UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CAMPUS DE RUSSAS

CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

JOSÉ CARLOS DOS SANTOS JERÔNIMO

O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE CÂMERAS MÍNIMO EM PONTOS ESTRATÉGICOS NA CIDADE DE PALHANO: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

RUSSAS

2020

JOSÉ CARLOS DOS SANTOS JERÔNIMO

O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE CÂMERAS MÍNIMO EM PONTOS ESTRATÉGICOS NA CIDADE DE PALHANO: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus de Russas da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Orientadora: Prof. Ms. Tatiane Fernandes Figueiredo

RUSSAS

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J54p Jerônimo, José Carlos dos Santos.
O problema de alocação de câmeras mínimo em pontos estratégicos na cidade de Palhano : uma abordagem utilizando programação linear inteira / José Carlos dos Santos Jerônimo. – 2020.
28 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas, Curso de Ciência da Computação, Russas, 2020.
Orientação: Prof. Me. Tatiane Fernandes Figueiredo.

1. Alocação de câmeras. 2. Otimização combinatória. 3. Programação linear inteira. I. Título.
CDD 005

JOSÉ CARLOS DOS SANTOS JERÔNIMO

O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE CÂMERAS MÍNIMO EM PONTOS ESTRATÉGICOS NA CIDADE DE PALHANO: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus de Russas da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ms. Tatiane Fernandes
Figueiredo (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcio Costa Santos
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Bonfim Amaro Júnior
Universidade Federal do Ceará - UFC

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, por ter me dado forças e por ter me permitido chegar até aqui. Obrigado, Senhor, por nunca ter desistido de mim e sempre me dar forças para vencer as batalhas. Deus é conosco sempre.

À minha mãe, Ana Célia por ter me apoiado nesse momento da minha vida e ter me proporcionado a realizar meu sonho. Obrigado por acreditar em mim sempre, serei eternamente grato a ti, te amo.

À Simone por todo o seu carinho, amizade, sinceridade, afeto e amor. Obrigado por acreditar em mim e me incentivar sempre. Obrigado por tudo, te amo.

A todos os meus amigos, que tiraram os mais diversos sorrisos do meu rosto, e que sempre estiveram junto comigo. Estamos juntos.

Ao especialista em instalação de câmeras, Elano que nos ajudou a validar um dos modelos de alocação de câmeras para o Centro da cidade de Palhano.

A todos os professores que me acompanharam durante toda a minha graduação, em especial a professora Tatiane Fernandes Figueiredo, que foi muito importante e me incentivou bastante para finalização deste trabalho.

RESUMO

As câmeras de monitoramento são recursos que ajudam na segurança de um local, em uma cidade que venha a ser considerada insegura, por parte do governo e população, nota-se a importância da utilização destes recursos. Dentre um conjunto de possibilidades que buscam colaborar com a resolução do problema de segurança em cidades, este trabalho busca fornecer uma forma otimizada para alocar câmeras em locais estratégicos. A partir da análise do mapa do centro da cidade de Palhano, este trabalho propõe uma abordagem utilizando técnicas de Programação Linear Inteira (PLI) para a resolução do Problema de Alocação de Câmeras Mínimo em pontos estratégicos na cidade de Palhano. Utilizando conceitos de Teoria dos Grafos para representação da instância real do mapa da cidade de Palhano, as técnicas utilizadas visam obter soluções para o problema através da aplicação de modelos matemáticos gerados a partir do estudo de dois problemas clássicos da literatura: o problema da Cobertura Mínima de Vértices e o problema das p-Medianas.

Palavras-chave: Alocação de câmeras. Otimização combinatória. Programação Linear Inteira.

ABSTRACT

The monitoring cameras are resources that help in the security, in a city that may be considered unsafe, by the government and the population, the importance of using these resources are noted. Among a set of possibilities that seek to collaborate with the resolution of the security problem in cities, this work present to provide an optimized way to allocate cameras in strategic locations. Based on the analysis of the Palhano city centre map, this work proposes an approach using Integer Linear Programming (ILP) techniques to solve the Minimum Camera Allocation Problem and place cameras at strategic points in the city of Palhano. Using concepts from Graph Theory to represent the real instance of the map of the center city of Palhano, the techniques used aim to obtain solutions to the problem through the application of mathematical models generated from the study of two classic problems in the literature: the Vertex Cover problem and the p-Median problem.

Keywords: Allocation of cameras. Combinatorial optimization. Integer linear programming.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A utilização de câmeras de monitoramento pode ser vista como um recurso tecnológico para melhoria da segurança de um local. Com o crescimento de delitos, muitos não solucionados no Brasil, o uso das câmeras de monitoramento tem aumentado a cada dia. Dentre suas finalidades destaca-se a inibição de assaltos, assassinatos, identificação de criminosos, dentre outros. Segundo dados da ENASP - Estratégia Nacional de Justiça e Segurança Pública (2017), aproximadamente 60 mil pessoas foram assassinadas no Brasil, mas somente 6% dos homicídios dolosos foram solucionados, índices extremamente baixos comparados a outros países. Por exemplo, no Reino Unido a taxa de solução chega a 90%, na França chega a 80% e no Estados Unidos a 65%. De acordo com *Big Brother Watch*, Londres possuía em 2017 aproximadamente 51.000 câmeras, sendo considerada a cidade mais vigiada do mundo, segundo um grupo de civis chamado *Liberty*, em média um londrino é visto nas câmeras cerca de 300 vezes por dia.

O índice de solução de crimes no Brasil é baixo, porém em São José dos Campos, verifica-se a eficiência na resolução dos casos. De acordo com o Departamento de Polícia Judiciária do Interior, o município implantou o projeto São José Unida, onde seu foco reside na implantação de câmeras de segurança em locais públicos. O projeto foi criado em 2017 e tem como intuito reduzir a criminalidade no município, apresentando uma taxa de 92% de solução de homicídios. Segundo a Polícia Civil em 2016, o índice de solução era em média 55%, índice muito abaixo comparado ao ano posterior, constatando a eficiência do projeto.

A partir da análise das ruas do centro de Palhano, no estado do Ceará, este trabalho busca apresentar uma solução eficiente para alocação de câmeras em pontos estratégicos no centro desta cidade, utilizando como base dois problemas clássicos de otimização combinatória: o problema das *p-Medianas* e o problema da *Cobertura Mínima de Vértices*. Na literatura é possível encontrar trabalhos que aplicam o problema da Cobertura Mínima de Vértices, para resolução do Problema de Alocação de Camêras, como o trabalho de Pinzón *et al.* (2017) que apresentam dois modelos de programação linear inteira para solucionar o problema em questão. Já os autores Yaghini *et al.* (2013) e Soares (2009) apresentam extensões do problema das *p-Medianas* para o problema de alocação de facilidades de forma otimizada. No trabalho de Soares (2009) são apresentados algoritmos primais e duais, enquanto no trabalho de Yaghini *et al.* (2013) propõem um algoritmo denominado *local branching* e uma busca por vizinhança induzida por relaxamento para a resolução do problema de alocação.

Após uma pesquisa literária, com o intuito de encontrar possíveis formas para resolução do problema de alocação de câmeras na cidade de Palhano, este trabalho apresenta uma definição formal para o problema denominado *Problema de Alocação de Câmeras Mínimo*, sendo apresentado duas formulações de Programação Linear Inteira para sua resolução. As formulações apresentadas foram testadas utilizando uma instância, gerada pelo autor com base em conceitos da área de Teoria dos Grafos, que representa de forma real o mapa do centro da cidade de Palhano. Para análise dos resultados, as soluções encontradas por ambas formulações foram apresentadas à um especialista da área de instalação de câmeras que definiu critérios e pontos importantes que devem ser considerados na decisão de qual formulação apresenta uma melhor solução do ponto de vista prático e real. A organização deste trabalho se encontra da seguinte forma: no capítulo 2 é apresentado o objetivo geral e os objetivos específicos; no capítulo 3 são apresentados os conceitos base para a solução do problema proposto; no capítulo 4 são apresentados alguns trabalhos que são semelhantes de alguma forma com este trabalho; no capítulo 5 são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados para realizar a pesquisa e o desenvolvimento do projeto; no capítulo 6 são apresentados os resultados deste trabalho. Por fim, o capítulo 7 apresenta a conclusão e os trabalhos futuros.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

Apresentar uma solução para o Problema de Alocação de Câmeras Mínimo em pontos estratégicos na cidade de Palhano através de técnicas de Programação Linear Inteira.

2.2 Objetivo específicos

- Gerar uma instância que represente de forma realista o centro da cidade de Palhano;
- Realizar uma pesquisa literária de modelos matemáticos quem podem ser aplicados no Problema de Alocação de Câmeras Mínimo;
- Apresentar os modelos matemáticos que poderão representar formas realistas para resolução do Problema de Alocação de Câmeras Mínimo;
- Implementar e testar os modelos matemáticos apresentados;
- Fornecer uma análise do resultados obtidos.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para absorção de conhecimentos iniciais que são necessários para melhor compreensão da solução considerada para o problema abordado, neste capítulo são apresentados os conceitos nas áreas de Teoria dos Grafos e Programação Linear, nas subseções 3.1 e 3.2, respectivamente. Nas subceções 3.2.2 e 3.2.3 apresentam os problemas de Cobertura Mínima de Vértices e o problema das p-Medianas, respectivamente.

3.1 Teoria dos Grafos

Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ constitui-se de um conjunto finito não vazio $V(G)$ de elementos, que são chamados de vértices, e um conjunto de pares não-ordenados de elementos distintos de $V(G)$, chamado *arestas*, ou seja, $E(G) \subseteq \{(u,v)|u,v \in V(G), u \neq v\}$. Se $a = (u,v)$ é uma aresta, dizemos que *a incide* em u e em v, tal que u e v são seus extremos, logo u e v são *adjacentes*.

Há dois tipos de grafos, os *grafos-orientados (digrafos)* e os *não-orientados*, a diferença entre entre ambos reside na orientação de suas arestas. Nos grafos orientados $D = (V,E)$, consiste de um conjunto finito não-vazio $V(D)$ de elementos, chamado vértices ou nós, e um conjunto $E(D)$ de elementos, no qual, são chamados de *arcos* ou *arestas orientadas*, em que são pares ordenados de vértices distintos, ou seja, $E(D) \subseteq \{(u,v)|u,v \in V(D), u \neq v\}$. Se $x = (u,v)$ é um arco, dizemos que *x incide* em u e em v, tal que u e v são seus extremos. Além do mais, u e v são referenciados como *origem* e *destino*, respectivamente.

Um *passeio* é uma sequência de *vértices*, tendo como propriedade, se u e v são vértices consecutivos na sequência, então uv é um *arco* do grafo. Um *caminho* em um grafo é um *passeio* sem arcos repetidos, tal que todos os arcos são diferentes entre si. A origem de um *caminho* é o seu primeiro *vértice* e o destino, é o seu último, portanto quando um caminho tem origem u e destino x, dizemos que vai de u para x.

Dentre as formas de representar um grafo em programas de computador, destaca-se o uso de *matrizes de adjacência*, estrutura de dados escolhida para representar o grafo utilizado neste trabalho. Dado um grafo G com n vértices, podemos representar uma matriz de adjacência como uma matriz $n \times n$, onde $G = [a_{ij}]$. Desta forma a_{ij} guarda informação sobre como os vértices v_i e v_j estão relacionados, ou seja, retorna informações sobre a adjacência entre ambos os vértices . Sendo $a_{i,j} = 1$ se e somente se $(i, j) \in E$ e 0 caso contrário (CHARTRAND *et al.*, 2010).

3.2 Programação Linear

A Programação Linear é uma técnica usada para se trabalhar com problemas da Pesquisa Operacional e pode ser definida como um planejamento de operações (atividades) para obter um resultado ótimo, ou seja, um resultado que atinja o melhor objetivo de acordo com o modelo especificado. Esta solução se encontra entre todas as alternativas viáveis (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). Um modelo de Programação Linear pode ser visto como um sistema de equações e inequações lineares que descrevem um problema, consistindo de *variáveis de decisão*, *função objetivo* e *restrições*, formalmente podemos representá-las conforme a seguir:

Função objetivo

$$\text{maximizar ou minimizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

S.A:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}X_n < b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n < b_2$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n < b_m$$

$$x_i \geq 0 \text{ e } b_j \geq 0, \forall_i = 1,2,...,n \text{ e } j = 1,2,...,m$$

Onde:

$Z =$ a função a ser maximizada ou minimizada seguindo as restrições definidas;

$x_i =$ são as variáveis que representam quantidades de recursos a serem determinadas;

$c_i =$ são os coeficientes de ganho ou custo que cada variável é capaz de gerar;

$b_j =$ é a quantidade disponível de cada recurso;

$a_{ij} =$ é a quantidade de recurso i, no qual uma unidade j consome.

3.2.1 *Programação Linear Inteira*

Um problema de Programação Linear Inteira (PLI) é um problema específico da Programação Linear (PL), tendo como requisito que todas as suas variáveis estão sujeitas a restrições de integralidade, havendo também problemas de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) onde algumas variáveis podem possuir valores inteiros enquanto algumas variáveis possuem valores contínuos. Por fim, existe também o caso das variáveis serem restritas a valores 1 ou 0, denominado problema de Programação Linear Inteira Binária (WOLSEY, 1998).

Os modelos de PLI também são do tipo PL, tal que suas variáveis estão sujeitas a restrições e consistindo de valores inteiros, como podemos ver no exemplo:

Função objetivo

$$\max Y = 8x_1 + 3x_2$$

S.A:

$$2x_1 + 5x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Há diversos algoritmos capazaes de solucionar problemas de programação linear inteira. A abordagem mais utilizada faz uso de um método de busca em árvore chamado *Branch-and-Bound* (B&B), a ideia é basicamente relaxar o problema de programação inteira, ou seja, remover as restrições que diz que as variáveis devem ser inteiras. Após a relaxação, o problema é dividido em diversos novos problemas, com adição de novas restrições, até encontrar soluções inteiras ou não realizáveis. O algoritmo B&B é uma técnica de divisão e conquista, onde o problema é dividido em subproblemas e posteriormente esses subproblemas são solucionados de forma polinomial até que se encontre a solução ótima.

3.2.2 *O Problema da Cobertura Mínima de Vértices*

Cai *et al.* (2013) denotam a Cobertura Mínima de Vértices como um problema clássico da otimização, onde dado um grafo $G = (V, E)$, busca-se por um conjunto de vértices de cardinalidade mínima, onde cada aresta do grafo é incidente a pelo menos um vértice deste conjunto. Desta forma, através deste conjunto é possível definir um número mínimo de vértices do grafo $G = (V,E)$ que cobrem todo o grafo para uma determinada representação de uma instância. O problema de Cobertura Mínima de Vértices é aplicado em diversos problemas reais, dentre eles estão, aplicações da biologia computacional, infraestrura e redes de computadores e instalações de câmeras, sendo esta última aplicação, foco da problemática apresentada neste trabalho.

Como o Problema de Cobertura de Vértices tem sido bastante aplicado à resolução do problema de instalação de câmeras, e por este motivo foi considerado uma peça chave para a obtenção de uma solução neste trabalho. Abaixo é apresentado uma breve explicação do formulação de Programação Linear Inteira clássica para sua resolução.

Dado um grafo $G = (V,E)$. Considere a seguinte variável binária:

$$\mathrm{x}_v = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } v \text{ está no conjunto de cobertura,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

Uma possível formulação matemática para o Problema de Cobertura de Vértices é definido a seguir.

$$\text{F.O: } \min \sum_{v \in V} x_v \tag{3.1}$$

$$\text{S.A: } x_u + x_v \geq 1, \text{para todo} (u,v) \in E(G) \tag{3.2}$$

$$x_v \in \{0,1\}, \text{para todo v} \in V(G) \tag{3.3}$$

A função objetivo (3.1) minimiza o tamanho do conjunto de cobertura. A primeira restrição (3.2) garante cobrir todas os vértices do grafo. Por fim, a última restrição (3.3) expressa a integralidade e não negatividade das variáveis de decisão.

Um exemplo está descrito nas figuras 1 e 2, onde ambas representam um grafo simples com 7 vértices. Porém na figura 2 é a solução de cobertura mínima de vértices para esta instância, no qual esta solução é denotada pelos vértices coloridos de vermelho.

Figura 1 – Exemplo de uma instância simples

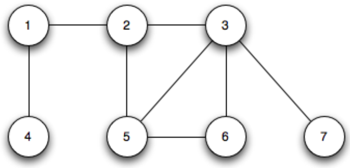
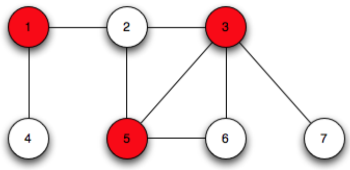


Figura 2 – Conjunto cobertura



3.2.3 Problema das p-Medianas

O problema das p-Medianas pode ser visto como um problema clássico de otimização combinatória, tendo como objetivo determinar facilidades para atender uma quantidade de clientes com algumas restrições definidas de acordo com a aplicação específica. Em Soares (2009), o Problema das p-Medianas é definido formalmente como: determinar quais p facilidades, tal que $p \leq m$, onde m é o número de pontos que podem ser abertas facilidades. As facilidades devem ser determinadas de forma a minimizar a soma das distâncias de cada cliente a facilidade aberta mais próxima.

Por ser um problema bastante conhecido em questões de alocação, o p-Medianas foi escolhido como segunda opção para solucionar o nosso objetivo principal, alocar câmeras no centro da cidade de Palhano. Abaixo é apresentado uma breve explicação da formulação de Programação Linear Inteira clássica para sua resolução.

Considere um grafo $G = (V, E)$, onde os vértices representam as facilidades e clientes, e as arestas as distâncias entre eles. Nesta formulação não há distinção entre facilidades e clientes, ou seja, é considerado que todos os vértices podem ser facilidades ou clientes. Seja $d_{ij} : E \rightarrow \mathbb{N}$ a função de distância definida entre um par de vértices, é apresentado a seguir variáveis binária da formulação:

$$\mathrm{x}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o cliente i é atendido pela facilidade localizada em j,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\mathrm{y}_{j} = \begin{cases} 1, & \text{se a facilidade é aberta no local j,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma possível formulação matemática para o Problema de p-Medianas é definido a seguir.

$$\text{F.O: } \min \sum_{(i,j)\in E} d_{ij}x_{ij} \tag{3.4}$$

$$\text{S.A: } \sum_{j\in V} x_{ij} = 1, \forall i \in V \tag{3.5}$$

$$y_j - x_{ij} \geq 0, \forall i, j \in V \tag{3.6}$$

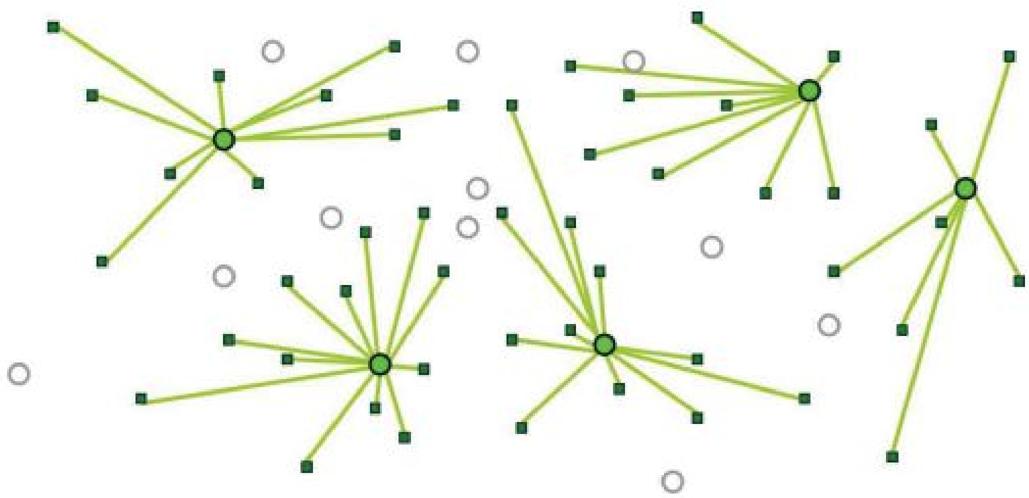
$$\sum_{j\in \mathbb{V}} y_j = p \tag{3.7}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i, j \in V \tag{3.8}$$

A função objetivo (3.4) minimiza a distância total de atribuição dos clientes às facilidades, a primeira restrição (3.5) demonstra que cada cliente deve ser designado a somente uma facilidade, a segunda restrição (3.6) limita que um cliente não seja designado a uma facilidade que não tenha sido aberta, a terceira restrição (3.7) expressa que deve ser aberto no máximo p facilidades, e por fim, a última restrição (3.8) expressa a integralidade e não negatividade das variáveis de decisão.

A figura 3 ilustra uma solução para o problema das p-Medianas para uma instância contendo 50 clientes $(n = 50)$ e 16 potenciais localização de facilidades $(m = 16)$, sendo obrigatório a abertura de exatamente 5 facilidades $(p = 5)$.

Figura 3 – Exemplo de solução p-Medianas



4 TRABALHOS RELACIONADOS

Com o intuito de entender e estudar problemas relacionados ao problema proposto, apresenta-se neste capítulo alguns trabalhos com foco em problemas de alocação.

Na Seção 4.1 é exposto o problema das p-Medianas, assim como algoritmos com objetivo em obter boas soluções para o mesmo. Na seção 4.2 é apresentado um algoritmo heurístico eficiente baseado nos métodos locais de busca de vizinhança induzida por ramificação para resolução deste mesmo problema. Na seção 4.3 são apresentados modelos de localização de câmeras de vigilância em uma rede de transporte público, no qual ele apresenta dois modelos matemáticos, onde no primeiro considera três variáveis binárias e no segundo são definidas duas. Por fim, na seção 4.4 é mostrado um algoritmo genético que tem como objetivo agrupar clusters energéticos, tal que sua energia corresponda ao potencial de energia verde disponível no mesmo cluster.

4.1 *Algoritmos primais e duais para o problema das p-Medianas(PMNC)*

Soares (2009) destaca alguns dos algoritmos para o PMNC e propõe modelos matemáticos para a resolução da mesmo, entretanto, apesar do PMNC ser considerado bem resolvido para instâncias de médio porte pelos autores, ou seja, sendo possível encontrar soluções ótimas para centenas de usuários, para milhares de usuários, a diferença entre os valores do limite inferior e os valores retornados correspondem a 1% do valor ótimo.

O trabalho de Soares (2009), com o intuito de melhorar o limite inferior apresenta três formulações para o PMNC, denominadas formulação primal, dual e dual condensada. Neste trabalho os autores analisam e verificam a qualidade das soluções retornadas pelos modelos primais, duais e por um algoritmo de planos de corte.

Foram apresentados vários algoritmos para solucionar o problema, inicialmente foram utilizadas várias heurísticas construtivas, as soluções obtidas foram comparadas entre si e obtiveram boas soluções, exceto o método Pseudo-Aleatória, posteriormente foi implementada uma heurística de refinamento, o *interchange*, se mostrando bastante potente. Foram implementados dois algoritmos duais, *Dual Ascent* e *Dual adjustment*, ambos geram excelentes limites superior e inferior para o problema, em seguida o autor mostrou três novos métodos (*Dual Scalling*, *Fixação Ativa de Arcos* e *Fixação Ativa de Facilidades*), o primeiro não retornou bons resultados, os algoritmos de fixação ativa reduziram consideravelmente diversas instâncias analisadas. Sucessivamente o autor mostrou um método do tipo *Branch-and-Cut*, implementando assim, o procedimento *Plano-de-Corte*, portanto não foram obtidos bons resultados, por fim, foi proposto o *Branch-and-Ascent* utilizando técnicas de enumeração implícita de soluções, foram obtidos resultados satisfatórios e se mostrando uma técnica promissora.

4.2 *Um algoritmo heurístico e eficiente para o problema das p-Medianas capacitado (CPMP)*

Dado um grafo completo não direcionado, tal que $G = (V,A)$, onde $V = (1,2,...,n)$ e $A = \{n \times n\}$ são vértices e arestas do grafo, respectivamente. O CPMP tem como intuito determinar um número p de instalações ou facilidades para atender a um conjunto de n demanda e com isso atribuir cada um dos nós restantes $(n - p)$ a uma das facilidades escolhida para que todos os pontos de demanda sejam correspondidos, tal que a demanda alocada para cada facilidade não seja maior que seu limite de capacidade.

Com isso, em Yaghini *et al.* (2013) é exposta uma modelagem para o CPMP, onde a função objetivo minimiza a distância ponderada entre os pontos de demanda e as facilidades, posteriormente é proposto um método baseado em *local branching* e busca por vizinhança induzida por relaxamento. Os autores propôem três estratégias para solucionar o problema. Na primeira estratégia, é calculado considerando apenas variáveis medianas, na segunda é calculado considerando apenas a atribuição de variáveis, e por fim, na terceira, para obter um espaço menor de pesquisa, a variável mediana e a de atribuição são consideradas como um conjunto de variáveis binárias simultâneas.

4.3 *Modelos de localização de câmeras de vigilância em uma rede de transporte público massivo*

Tendo como objetivo de alocar câmeras de vigilância em uma rede de transporte público para aumentar o número de detecão de crimes pelas câmeras e melhorar a qualidade da imagem do sistema de vigilância, Pinzón *et al.* (2017) mostram dois modelos de programação linear para solucionar o problema em questão, nos modelos são considerados vários fatores e restrições, dentre eles estão os de valores orçamentários, onde se deseja maximizar a cobertura das câmeras no local, mas com um limite de valor a gastar definido pela empresa. Outra restrição seria a de conectividade, no qual se procura garantir que pelo menos uma câmera de vigilância esteja disponível para cada par de estações diretamente conectadas.

Para formulação matemática do problema de instalação das câmeras, os autores consideram vários fatores de restrição, dentre eles estão a qualidade da resolução de vídeo, custo de aquisição e instalação dos equipamentos, e vida útil das câmeras. Para a instalação e aplicação são considerados algumas possibilidades: câmeras atualmente instaladas, câmeras analógicas biométricas de média resolução e biométricas com uma resolução de alta definição. Duas formulações matemáticas são apresentadas e comparadas, a primeira é com base em três tipos de variáveis de decisão, enquanto a segunda utiliza duas.

No primeiro modelo são definidos três variáveis binárias $(x_{ijk}, y_{ijkt}, v_{jk})$, onde x_{ijk} é igual a 1 se e somente se uma câmera do tipo $i \in I$ é colocado na posição $j \in N$, no início do período $k \in H$, caso contrário é igual a 0. Seja y_{ijkt} igual a 1, se o tipo de câmera $i \in I$ for colocado na posição $j \in N$ no início do período $k \in H$ e é mantido durante o período $t \in H$, caso contrário é igual a 0. Seja v_{jk} igual a 1, se e somente se houver uma câmera antiga instalada na posição $j \in N$ no início do planejamento e é mantida durante o perído $k \in H$, caso contrário é igual a 0. Dois critérios são considerados relevantes na decisão e são formulados em duas funções, sendo intituladas de Z_1, no qual é equivalente a maximizar o número de pessoas monitoradas que podem ser vulneráveis a crimes e Z_2 que tem como intuito de maximizar a qualidade da imagem dos vídeos gravados pelas câmeras do sistema.

Já no segundo modelo são definidos duas variáveis, seja y_{ijkt} igual a 1 se e somente se um tipo de câmera $i \in I$ estiver alocada na posição $j \in N$ no início do período $k \in H$ e for mantido até o final do período $t \in H$, caso contrário é igual a 0. Seja v_{jk} igual a 1 se e somente se uma câmera estiver alocada na posição $j \in N$ desde o início do planejamento e for mantido até o fim do período $k \in H$, caso contrário é igual a 0. O segundo modelo utiliza como critérios de decisão as mesmas do primeiro modelo. Para comparar os modelos foi calculado o número de variáveis e restrições de cada uma, para o modelo de três variáveis, o número de variáveis é igual a $|N| \cdot |H| \cdot (|I| + (\frac{|I| \cdot |H-1|}{2}) + 1)$ e no modelo de duas variáveis o número de variáveis é calculado a seguir, $|N| \cdot |H| \cdot ((\frac{|I| \cdot |H-1|}{2}) + 1)$, logo é possível notar que o primeiro modelo possui $|I| \cdot |N| \cdot |H|$ variáveis a mais que o segundo modelo.

O número de restrições do modelo de três variáveis é igual a $|N| \cdot |H| \cdot (3 + 4 \cdot |I| \cdot |H| + 2 \cdot |I| + |H| + |N|) + |N|$, no segundo modelo é igual a $|H| + |N| \cdot |H| \cdot (3 + 3 \cdot |I| \cdot |H| + |N| +) + |N|$, logo é possível notar que o primeiro modelo tem $|N| \cdot |H| \cdot (|I| \cdot |H| + 2 \cdot |I| + |H|)$ restrições a mais que o segundo. Os dois modelos foram testados e um estudo experimental com um conjunto de instâncias aleatórias foi realizado, os resultados mostraram que para essas instâncias os dois modelos encontraram solução ideal, demonstraram otimalidade da solução em tempos relativamentes curtos, notou-se que o modelo de duas variáveis se mostrou mais eficiente que o de três variáveis, tendo uma taxa entre $73-90\%$ menor que esse.

4.4 *Projetando regiões de energia sustentável usando algoritmos genético e uma bordagem de alocação*

Com o intuito de mapear clusters geográficos em regiões estratégicas para transformação de diferentes formas de energia, Yanık *et al.* (2016) apresentam um estudo de caso para um novo problema de planejamento de energia verde. Para tal, é apresentado um modelo que tem como objetivo determinar os territórios de planejamento de energia verde na Turquia.

Uma forma de solucionar o problema é resolvê-lo utiliando o problema das *p* medianas, porém como este problema é NP-Difícil, requer um grande esforço computacional. Portanto, Yanık *et al.* (2016) propôs o algoritmo genético, onde os genes de um cromossomo correspondem ao índice das áreas selecionadas, todas as áreas básicas são atribuídas ao território mais próximo, enquanto a função fitness é a soma das distâncias entre o centro territorial e as unidades básicas. O tamanho da população é definido como dez vezes o número de territórios, cada uma das soluções iniciais é gerada pela atribuição aleatória de uma unidade básica a cada território.

O algoritmo é aplicado para os 933 distritos da Turquia, onde os resultados são apresentados para número de regiões (P), após calcular a diferença entre o potencial energético e a demanda total para cada distrito, notou-se que são necessários $102,3 * 10^6$ unidades de energia para os distritos, portanto esse potencial energético é menor que a demanda, com isso tenta-se minimizar o problema agrupando os distritos em regiões, inicalmente testado para P = 10, foi possível notar que em 3 territórios a demanda de energia ficou negativa e com isso, são necessários recursos energéticos adicionais nestes territórios, posteriormente é testado para diversos valores de P, e com base nos resultados, se o número de regiões aumentar, o número de centros ou facilidades energéticas diminui.

5 PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS

Dada a natureza aplicada da pesquisa realizada, este trabalho foi desenvolvido com base em uma adaptação das fases da Pesquisa Operacional abordadas por Hillier e Lieberman (2013).

5.1 Estudo da Área

Primeiramente, foi realizado um estudo na área de Teoria dos Grafos e Pesquisa Operacional com foco em técnicas de Programação Linear Inteira. Além da pesquisa, também houve um estudo com intuito de obter conhecimentos sobre formulação matemáticas aplicadas à resolução de problemas de alocação de camêras descritos na literatura. Após uma extensa pesquisa literária, foi definido formalmente o problema de Alocação de Câmeras Mínimo em Pontos Estratégicos da cidade de Palhano.

5.2 Definição do problema

Seja $G = (V,E)$ um grafo não orientado que representa o mapa do centro da cidade de Palhano e $dij : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ a função de distância que representa a distância entre dois pontos estratégicos (vértices) definidos no mapa, o Problema de Alocação de Câmeras Mínimo em pontos estratégicos na cidade de Palhano pode ser definido como o problema de encontrar um número de pontos mínimo, para alocação de camêras de segurança, de tal forma que todos os pontos definidos no mapa, representando o centro da cidade, sejam cobertos ou monitorados por pelo menos uma das camêras alocadas.

5.3 Geração do mapa do centro da cidade de Palhano

Com ajuda da secretaria de infraestrutura da cidade de Palhano, foram obtidas informações consideradas relevantes pelos mesmos a cerca do centro da cidade, assim como todas as relações e distâncias entre as ruas. De posse destas informações optou-se pela representação do mapa através de um grafo. Utilizando matriz de adjacência como representação, no qual cada linha e cada coluna da matriz representam pontos estratégicos das ruas, ou mais especificamente vão representar as esquinas do mapa apresentado. Logo estas esquinas vão retratar os vértices na instâcia do grafo, e os valores contidos na relação linha/coluna apresentam as distâncias entre os pontos estratégicos ou esquinas definidas.

5.4 Configuração do ambiente computacional e implementação das formulações

Para implementação das formulações matemáticas apresentadas nas Seções 3.2.2 e 3.2.3 foi utilizado o framework de Otimização IBM ILOG CPLEX Optimization Studio na versão 12.10.0. As formulações foram implementadas na linguagem OPL e as execuções foram realizadas utilizando uma máquina Intel Core i3, 2.00 GHz, 4GB de RAM, DDR3 e sistema operacional Windows 10.

Para a formulação de cobertura de vértices mínima, a solução retornada apontou 14 pontos a serem alocadas câmeras de segurança, de tal forma que todos os pontos definidos no mapa, representando o centro da cidade, sejam assistidos por pelo menos uma das camêras alocadas. Objetivando comparar a solução obtida pela formulação de cobertura mínima de vértices com a solução obtida pela formulação de p-Medianas, o valor de p foi definido também com o valor 14. O tempo de execução da instância para o cobertura de vértices foi 0.044 segundos, já para o p-Medianas foi 0.066 segundos.

6 RESULTADOS

Este capítulo descreve os resultados obtidos das implementações dos modelos matemáticos propostos. Na Seção 6.1 são apresentadas as soluções obtidas das formulações propostas; na seção 6.2 é apresentado a validação das soluções obtidas junto ao especialista de instalação de câmeras.

6.1 Soluções obtidas

A partir das formulações apresentadas nas Seções 3.2.2 e 3.2.3, implementadas e executadas utilizando o framework Cplex 12.10, para entrada definida como descrito na Seção 5.3, foram obtidas duas soluções para o Problema de Alocação de Câmeras Mínimo em pontos estratégicos na cidade de Palhano. As Figuras 4 e 5 mostram onde seriam as alocações geradas definidas pelos dois modelos, respectivamente.

Em ambas figuras, os círculos pretos representam os possíveis locais de alocação de câmeras, onde os círculos que contém um ícone rosa no centro representam uma instalação de câmera de acordo com as solução obtida por cada formulação.

Figura 4 – Solução para a modelagem de cobertura de vértices

Fonte: Criado pelo autor.

Figura 5 – Solução para a modelagem de p-Medianas.

Fonte: Criado pelo autor.

6.2 Validação das soluções geradas

Para validar qual das solucões obtidas pode ser considerada mais condizente com a realidade, foi realizada uma reunião com um especialista em instalação de câmeras da cidade de Palhano. Após compreensão do problemática apresentada neste trabalho, foi questionado ao especialista qual das solução apresentadas na Seção 6.1 melhor se adequaria as condiçoes reais do centro da cidade de Palhano.

O especialista considerou a solução gerada pela formulação de cobertura mínima de vértices mais condizente com a realidade da cidade, sua afirmação foi pautada na fato da solução apresentada abranger de forma mais otimizada a área comercial de Palhano, que em sua opinião requer uma segurança maior, ao mesmo tempo que assegura também a avenida principal, sendo esta área um local de grande tráfego de desconhecidos por ser a rodovia principal da cidade que dá acesso a entrada e saída da mesma.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foram apresentados duas formulações de Programação Linear Inteira para Problema de Alocação de Câmeras Mínimo em pontos estratégicos na cidade de Palhano. Ambas as formulações foram baseadas em dois problemas clássicos da literatura: o Problema da Cobertura Mínima de Vértices e o Problema das p-Medianas . As soluções obtidas foram validadas e comparadas entre si por um especialista em instalação de câmeras. Como resultado final foi definido que solução mais adequada para o Centro da cidade de Palhano, foi a solução gerada através da formulação de cobertura mínima de vértices, por abranger as principais áreas do centro da cidade.

7.1 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros pode-se realizar um aprimoramento das formulações Programação Linear Inteira apresentadas adicionando pesos nos vértices, no qual esses pesos irão representar a importância de proteger aquele lugar, pesquisar sobre novas formulações para realizar um estudo comparativo mais abrangente, realizar testes com instâncias de outras cidades e aplicar as formulações para outros problemas de alocações, como por exemplo, alocar torres de internet para maximar sua área de cobertura, dentre diversos outros problemas.

REFERÊNCIAS

CAI, S.; SU, K.; LUO, C.; SATTAR, A. Numvc: An efficient local search algorithm for minimum vertex cover. **Journal of Artificial Intelligence Research**, v. 46, p. 687–716, 2013.

CHARTRAND, G.; LESNIAK, L.; ZHANG, P. **Graphs & digraphs**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2010.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2013.

PINZÓN, N. S.; MARROQUÍN, D. P.; RUEDA, W. J. G. Modelos de localización de cámaras de vigilancia en una red de transporte público masivo. **Ingeniería y ciencia**, Universidad EAFIT, v. 13, n. 25, p. 71–93, 2017.

SOARES, G. F. **Algoritmos Primais e Duais para o Problema das p-Medianas**. Tese (Doutorado) — PUC–Rio, 2009.

WOLSEY, L. A. **Integer programming**. [S.l.]: Wiley, 1998.

YAGHINI, M.; MOMENI, M.; SARMADI, M.; AHADI, H. R. An efficient heuristic algorithm for the capacitated $p-$ \! $medianproblem.$**4OR**$,Springer,v.$ 11$,n.$ 3$,p.$229 $- -$248$,$2013.

YANIK, S.; SÜRER, Ö.; ÖZTAYŞI, B. Designing sustainable energy regions using genetic algorithms and location-allocation approach. **Energy**, Elsevier, v. 97, p. 161–172, 2016.