



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**CAIO TORRES CRISPIM**

**DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PARA SISTEMAS DE  
SUSPENSÃO VEICULAR**

**FORTALEZA**

**2018**

CAIO TORRES CRISPIM

DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PARA SISTEMAS DE  
SUSPENSÃO VEICULAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Araújo Bezerra.

Coorientador: Prof. Dr. Rômulo do Nascimento Rodrigues.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

C949d Crispim, Caio Torres.  
Desenvolvimento de um método de otimização para sistemas de suspensão veicular / Caio Torres  
Crispim. – 2018.  
61 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,  
Curso de Engenharia Mecânica, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Roberto de Araújo Bezerra.  
Coorientação: Prof. Dr. Rômulo do Nascimento Rodrigues.

1. Projeto de Suspensão. 2. Otimização Multiobjetivo. 3. Modelo de 1/4 de Carro. 4. Densidade Espectral  
de Potência. I. Título.

CDD 620.1

---

CAIO TORRES CRISPIM

DESENVOLVIMENTO DE UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PARA SISTEMAS DE  
SUSPENSÃO VEICULAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Curso de Engenharia Mecânica do Centro  
de Tecnologia da Universidade Federal do  
Ceará, como requisito parcial para obtenção do  
título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovada em: \_\_/\_\_/\_\_\_\_.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Roberto de Araújo Bezerra (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Rômulo do Nascimento Rodrigues (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Francisco Iلسon da Silva Junior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À Deus

Aos meus pais, Mônica e Francisco.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus por tudo.

À minha família e amigos, pelo suporte e por estarem sempre presentes e disponíveis.

À Universidade Federal do Ceará, por todos os ensinamentos.

Aos professores Dr. Roberto de Araújo Bezerra e Dr. Rômulo do Nascimento Rodrigues, pela excelente orientação.

Ao professor participante da banca examinadora Dr. Francisco Ilson da Silva Junior, pelo tempo, pela valiosa colaboração e sugestões.

Aos colegas e amigos que fiz no Curso de Engenharia Mecânica, pelo apoio e colaboração em todos os momentos durante a graduação.

À Equipe Siará Baja e seus eternos colaboradores, por toda a confiança e contribuição no meu desenvolvimento profissional.

“Calcular a suspensão de um carro é quase totalmente uma questão de fazer aproximações úteis. Não é uma ciência exata. Mas também não é uma aplicação cega dos princípios de uma regra geral.” (Maurice Olley, *Notes on Suspension*, 1961)

## RESUMO

Este trabalho propõe um método de otimização multiobjetivo que usa algoritmos genéticos para encontrar as melhores características de mola e amortecedor para um sistema de suspensão veicular representado por um modelo simplificado de 1/4 de carro. Partindo-se de equações de densidade espectral de potência, que possibilitam a descrição das superfícies que tem um padrão de distribuição gaussiana das irregularidades, foram usados cinco tipos de estradas. As velocidades máximas onde são atingidos os limites de conforto ou de segurança para as estradas foram obtidas por quatro métodos diferentes de cálculos, sendo dois numéricos e dois analíticos. Os resultados são comparados, mostrando erros que se mantem muito baixos em um grande intervalo de velocidades. A eficácia e a validade do método analítico escolhido como base da otimização podem ser demonstradas por meio dos resultados obtidos. O algoritmo de otimização com uma base analítica de cálculos da aceleração sentida pelos ocupantes e do desvio padrão da carga do pneu se mostra uma alternativa com tempo de processamento bastante reduzido quando comparado aos algoritmos com base numérica. Modelos mais complexos de otimização, com muito mais variáveis e objetivos que o apresentado aqui, são comuns em projetos de suspensão veicular e podem se beneficiar das vantagens oferecidas por um método de otimização multiobjetivo com base analítica, chegando a soluções confiáveis com mais velocidade.

**Palavras-chave:** Projeto de Suspensão. Otimização Multiobjetivo. Modelo de 1/4 de Carro. Densidade Espectral de Potência.



## **ABSTRACT**

This work proposes a multi-objective optimization method that uses genetic algorithms to find the best spring and damper characteristics for a vehicle suspension system represented by a simplified quarter car model. Based on spectral power density equations that allow the description of the surfaces that have a Gaussian distribution pattern of the irregularities, five types of road were used. The maximum velocities where the comfort or safety limits for the roads are reached were obtained by four different calculation methods, two numerical and two analytical. The results are compared, showing errors that remain very low over a wide range of speeds. The efficacy and validity of the analytical method chosen as the basis of the optimization can be demonstrated by means of the obtained results. The optimization algorithm with an analytical base of acceleration calculations felt by the occupants and the standard deviation of the tire load shows a very short processing time alternative when compared to the numerical basis algorithms. More complex optimization models, with many more variables and objectives than the one presented here, are common in vehicle suspension projects and can benefit from the advantages offered by an analytical-based multi-objective optimization approach, reaching reliable solutions with more speed.

**Keywords:** Suspension Design. Multi-Objective Optimization. Quarter Car Model. Power Spectral Density.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo de 1/4 de carro .....	18
Figura 2 – Comportamento não-linear do pneu e da mola .....	19
Figura 3 – Tipos de amortecimento em um amortecedor real .....	20
Figura 4 – Associação dos tipos de amortecimentos .....	21
Figura 5 – Comportamento não-linear do amortecedor .....	21
Figura 6 – Movimentos do chassis .....	22
Figura 7 – Efeitos da assimetria dos amortecedores .....	22
Figura 8 – Modelo simplificado de 1/4 de carro .....	24
Figura 9 – Irregularidades das estradas nos domínios do tempo e da frequência .....	27
Figura 10 – Diferenças entre os vários valores de $\alpha$ .....	29
Figura 11 – Comparação entre as funções de sensibilidade descritas pela ISO 2631 e por Zuo (2003) .....	31
Figura 12 – Variações de carga no pneu .....	32
Figura 13 – Pareto-ótimo .....	37

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Comparativos dos resultados obtidos com os diferentes métodos de cálculos .....	41
Gráfico 2 – Valores das variáveis $c_2$ e $k_2$ resultantes da otimização pelo método A2 nas várias condições de estradas .....	42
Gráfico 3 – Resultados obtidos com novos valores de referência otimizados para conforto e segurança .....	43
Gráfico 4 – Valores das variáveis $c_2$ e $k_2$ resultantes da otimização apenas de segurança pelo método A2 nas várias condições de estradas .....	44
Gráfico 5 – Resultados obtidos com novos valores de referência otimizados apenas para segurança .....	45

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Classificação de estradas segundo a norma ISO 8608 .....	28
---	----

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

DLC	Dynamic Load Coefficient
GPU	Graphics Processing Unit
ISO	International Standardization Organization
prEN	Draft European Standard
RMS	Root Mean Square

## LISTA DE SÍMBOLOS

$y$	Deslocamento vertical do ponto de contato pneu-solo
$x_1$	Deslocamento vertical da massa não suspensa
$x_2$	Deslocamento vertical da massa suspensa
$\dot{x}_1$	Velocidade vertical da massa não suspensa
$\dot{x}_2$	Velocidade vertical da massa suspensa
$\ddot{x}_1$	Aceleração vertical da massa não suspensa
$\ddot{x}_2$	Aceleração vertical da massa suspensa
$c_1$	Amortecimento equivalente do pneu
$c_2$	Amortecimento equivalente do amortecedor
$c_2^+$	Amortecimento em movimento de expansão
$c_2^-$	Amortecimento em movimento de compressão
$k_1$	Constante elástica equivalente do pneu
$k_2$	Constante elástica da mola
$m_1$	Massa não suspensa
$m_2$	Massa suspensa
$Y$	Amplitude máxima de deslocamento vertical do ponto de contato pneu-solo
$X_1$	Amplitude máxima de deslocamento vertical da massa não suspensa
$X_2$	Amplitude máxima de deslocamento vertical da massa suspensa
$j$	Unidade imaginária dos números complexos
$s$	Domínio da Transformada de Laplace
$\mathcal{L}$	Operador da Transformada de Laplace
$A_{\ddot{x}_2}$	Amplitude máxima de aceleração da massa suspensa
$H_1$	Função de transferência da aceleração da massa suspensa
$F_{x_1y}$	Amplitude máxima da força de contato pneu-solo
$H_2$	Função de transferência da força de contato pneu-solo
$v$	Velocidade de deslocamento horizontal do ponto de contato pneu-solo
$w$	Índice de ondulação da superfície
$S$	Densidade espectral de potência, segundo ISO 8608
$S_z$	Densidade espectral de potência corrigida para uso em métodos analíticos
$\omega$	Frequência angular temporal das irregularidades do solo
$\omega_0$	Frequência angular espacial de referência da ISO 8608

$\Omega$	Frequência espacial das irregularidades do solo
$\Omega_0$	Frequência espacial de referência da ISO 8608
$\Omega_{min}$	Frequência espacial mínima das irregularidades do solo
$\Omega_{max}$	Frequência espacial máxima das irregularidades do solo
$\alpha$	Parâmetro de correção da função de densidade espectral de potência
$W_{k\ 2631}$	Função de sensibilidade vertical de corpo inteiro, segundo ISO 2631
$H_h,$	Função de transferência de limite de banda passa-alto da ponderação da frequência
$H_l,$	Função de transferência de limite de banda passa-baixo da ponderação da frequência
$H_t,$	Função de transferência de transição da aceleração-velocidade da ponderação da frequência
$H_s$	Função de transferência de passo ascendente da ponderação da frequência
$Q_i$	Fatores de qualidade das ressonâncias que servem de parâmetros das funções de transferência das ponderações principais em frequência
$f_i$	Frequências que servem de parâmetros das funções de transferência das ponderações principais em frequência
$W_{k\ Zuo}^{(i)}$	Função de sensibilidade vertical de corpo inteiro de ordem i, segundo Zuo (2003)
$a_{rms}$	Aceleração RMS sentida pelo passageiro
$\sigma_1$	Desvio padrão da aceleração sentida pelo passageiro
$DLC$	Coefficiente de carga dinâmica do pneu
$\sigma_2$	Desvio padrão do carregamento do pneu
$F_{est}$	Força de carregamento estático do pneu
$g$	Aceleração da gravidade
$Z$	Score da distribuição normal de probabilidade
$\pi$	Número Pi
$I_i$	Resultado da integral de James, Nichols e Phillips para equação integrada com denominador de grau i
$\alpha^{(i)}$	Numerador de grau i da equação integrada
$b^{(i)}$	Denominador de grau i da equação integrada
$\alpha_i$	Polinômio de grau i que compõe o numerador da equação integrada
$b_i$	Polinômio de grau i que compõe o denominador da equação integrada

- N1 Método de otimização com base numérica de acordo com as normas ISO 2631 e ISO 8608
- N2 Método de otimização com base numérica de acordo com a norma ISO 8608 e Zuo (2003)
- A1 Método de otimização com base analítica de acordo com Hác (1985) e Zuo (2003)
- A2 Método de otimização com base analítica de acordo com a norma ISO 8608 adaptada e Zuo (2003)



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	16
<b>1.1</b>	<b>Problemas</b> .....	16
<b>1.2</b>	<b>Hipóteses</b> .....	17
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b> .....	17
<b>2</b>	<b>ELEMENTOS DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO</b> .....	18
<b>2.1</b>	<b>Modelo de suspensão e equações governantes</b> .....	18
<b>2.2</b>	<b>Funções de transferência</b> .....	23
<b>2.3</b>	<b>Função de densidade espectral de potência</b> .....	26
<b>2.4</b>	<b>Ponderações de sensibilidade no domínio da frequência</b> .....	29
<b>2.5</b>	<b>Coefficiente de carga dinâmica dos pneus</b> .....	32
<b>2.6</b>	<b>Cálculos da aceleração percebida e da variação de carga do pneu</b> .....	33
<b>3</b>	<b>OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO USANDO ALGORITMOS GENÉTICOS</b> .....	36
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	39
<b>4.1</b>	<b>Comparação dos métodos</b> .....	40
<b>4.2</b>	<b>Otimização do conforto e da segurança</b> .....	42
<b>4.3</b>	<b>Otimização apenas da segurança</b> .....	44
<b>4.4</b>	<b>Discursão dos resultados da otimização</b> .....	46
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	47
<b>5.1</b>	<b>Trabalhos futuros</b> .....	47
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	48
	<b>APÊNDICE A – MODIFICAÇÕES NA FUNÇÃO DE DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA</b> .....	51
	<b>APÊNDICE B – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS INTEGRAIS USADAS NO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO</b> .....	55
	<b>APÊNDICE C – TABELAS COM OS DADOS OBTIDOS NOS TESTES DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO</b> .....	59

## 1 INTRODUÇÃO

O sistema de suspensão existe para garantir mais conforto e segurança ao passageiro e para isso busca-se uma configuração de amortecedor e mola que condicione o sistema a responder da melhor maneira possível às excitações causadas por irregularidades nas superfícies das estradas. Veículos mais seguros usam molas mais rígidas e amortecedores com maior resistência ao deslocamento, já os veículos mais confortáveis tem molas não tão rígidas e amortecedores com menor resistência ao deslocamento. Obter o máximo de conforto e segurança com o máximo limite de velocidade de deslocamento é o desejo de praticamente todos os projetistas de veículos, mas quase nunca é uma tarefa fácil, por isso métodos que alcancem bons resultados de maneira rápida e confiável são sempre bem recebidos.

### 1.1 Problemas

As superfícies por onde os veículos trafegam apresentam irregularidades que provocam excitações no sistema de suspensão, tais irregularidades seguem um padrão randômico e se torna inviável uma descrição de forma determinística. Modelos genéricos de estradas são gerados partindo de funções randômicas e simulações no domínio do tempo são usadas em processos de otimização de suspensões veiculares. O elevado tempo de processamento envolvido em simulações e processos de otimização da suspensão acabam se tornando um problema em modelos mais completos de suspensão, pois o número de variáveis pode crescer muito rápido.

As características desejadas em um sistema de suspensão muitas vezes são conflitantes, e isso pode ser observado em relação ao conforto e a segurança. Encontrar um ponto de equilíbrio acaba sendo um grande desafio. Os limites de conforto podem ser descritos com o auxílio da norma ISO 2631, que classifica as faixas de aceleração em relação aos níveis de desconforto, e também apresenta as equações que representam a sensibilidade de corpo-inteiro em função da frequência. Infelizmente a função de sensibilidade de corpo-inteiro é muito complexa e acaba aumentando demais a complexidade de análises mais simples. Já sobre a segurança, por enquanto não há parâmetros preestabelecidos ou normas que tragam limites para problemas encontrados na análise do contato pneu-solo.

## 1.2 Hipóteses

As irregularidades das estradas seguem um padrão randômico com distribuição muito próxima da gaussiana, e por isso podem ser melhores descritas de forma estatística por funções de densidade espectral de potência no domínio da frequência. Análises no domínio da frequência podem alcançar bons resultados em processos de otimização, mesmo desconsiderando as não-linearidades dos componentes do sistema de suspensão.

Processos de otimização podem demorar bem menos quando usam uma base analítica para cálculos de integrais no lugar dos mais tradicionais métodos numéricos. A otimização multiobjetivo pode se torna mais simples quando as análises são feitas nas condições limitantes da suspensão, assim é possível usar restrições que conduzam à melhores resultados. Simplificações na função que representa a sensibilidade de corpo-inteiro podem ter boa precisão, reduzindo bastante a complexidade do cálculo da aceleração sentida, e a análise do contato pneu-solo pode ser feita com base na probabilidade de perda do contato pneu-solo, que é equivalente a perda de carga no pneu. Algoritmos genéticos podem ser usados como ferramentas de otimização, pois têm características que garantem vantagens em casos onde as restrições e funções são não-lineares, além de convergirem de maneira veloz, mesmo quando há um grande número de variáveis.

## 1.3 Objetivos

Devem ser deduzidas as equações que expressão o modelo de 1/4 de carro e por meio da aplicação da Transformada de Laplace encontrar as funções de transferência que representam as proporções entre as respostas do sistema e as excitações. Em seguida, usar as informações obtidas na norma ISO 8608 para deduzir uma equação de densidade espectral de potência adaptada, que possa ser usada em métodos analíticos de cálculos dos valores ligados ao conforto e a segurança. Substituir as equações que representam a sensibilidade de corpo-inteiro da ISO 2631 por uma forma com boa precisão e mais simplicidade, dentre as apresentadas por Zuo (2003), o que tornará mais fácil a implementação de métodos analíticos de cálculos. Estabelecer os limites de segurança, não normatizados, com base nas informações apresentadas por Múčka (2016), e por fim concluir o desenvolvimento de um processo de otimização multiobjetivo para sistemas de suspensão, por meio de algoritmos genéticos restritos aos limites de conforto estabelecidos pela norma ISO 2631 e pela probabilidade de perda do contato pneu-solo.

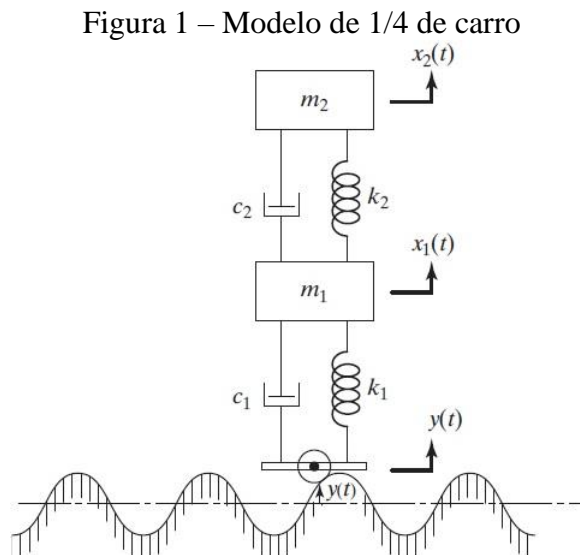
## 2 ELEMENTOS DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO

Nesta secção são apresentadas as bases para formulação matemática e o desenvolvimento de um método de otimização para sistemas de suspensão. Uma breve explicação dos vários componentes é feita, para assim garantir ao leitor um entendimento do processo de desenvolvimento do trabalho. A literatura traz algumas discordâncias em pontos fundamentais, tais pontos são abordados da melhor forma possível e comparações são apresentadas, para assim garantir que a otimização alcance bons resultados.

Não é feito um aprofundamento muito detalhado sobre o programa que executa a otimização, pois diversas possibilidades e ferramentas disponíveis podem chegar aos mesmos resultados aqui alcançados e isso também traria divergências ao tema do trabalho.

### 2.1 Modelo de suspensão e equações governantes

Para que seja possível realizar a otimização multiobjetivo é necessária a descrição matemática do funcionamento da suspensão. O modelo usado tem dois graus de liberdade, sendo composto por duas massas, duas molas e dois amortecedores e é mais comumente chamado de modelo de 1/4 de carro. Uma representação pode ser vista na Figura 1.

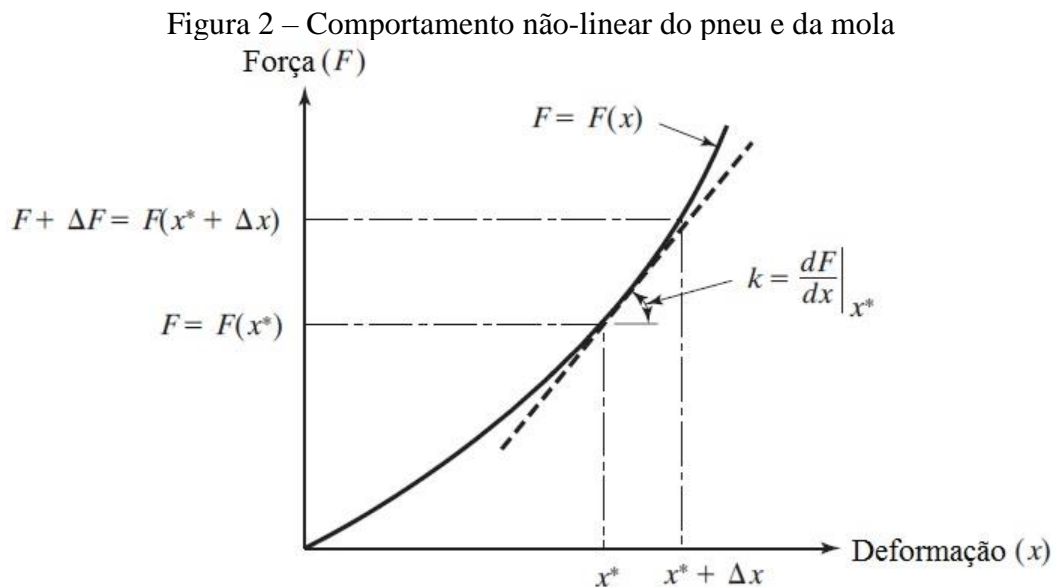


Fonte: Rao (2010).

Como se trata de um modelo simplificado, algumas considerações também precisam ser feitas. A primeira consideração é de que o sistema tem apenas duas massas com valores constantes, uma chamada de massa suspensa e outra chamada de massa não-suspensa. A massa suspensa  $m_2$  representa todos os componentes que são sustentados pelo conjunto

mola-amortecedor, já a massa não-suspensa  $m_1$  representa a roda, o cubo de roda e o conjunto de freio, que não são sustentado pelo conjunto mola-amortecedor e geram carga apenas no pneu. A segunda consideração é de que o amortecimento do pneu é muito pequeno quando comparado à constante elástica equivalente do pneu e por isso podemos considerar que tem valor nulo,  $c_1 = 0$  (GILLESPIE, 1992; MILLIKEN, 1995). A tendência é que os modelos com melhores resultados levem em consideração o amortecimento do pneu, mas os valores relacionados a isso são raramente encontrados e dependem de muitas variáveis, dentre elas algumas ligadas as características estruturais do pneu. A terceira e última consideração é de que mola, amortecedor e mola equivalente ao pneu são componentes com comportamento linear. Um componente é linear quando as respostas desse componente são sempre proporcionais as condições de excitação. No caso de uma mola linear, a razão entre força e deslocamento é constante, já em um amortecedor linear a razão entre força e velocidade de compressão ou expansão também é constante.

Suspensões veiculares são sistemas dinâmicos que geralmente apresentam não linearidades, no entanto tais não-linearidades podem ser pequenas e facilmente desconsideradas, como é feito na maioria dos casos com as molas e pneus. Quanto maiores as amplitudes maiores as influências da não-linearidade das molas, como pode ser visto na Figura 2.



Fonte: adaptada de Rao (2010).

No caso aqui apresentado as amplitudes estão em um intervalo que garante boa aproximação por uma série de Taylor truncada no primeiro termo, onde a primeira derivada é mensurada no ponto de equilíbrio estático (RAO, 2010). A série de Taylor truncada no

primeiro termo pode ser escrita da seguinte forma:

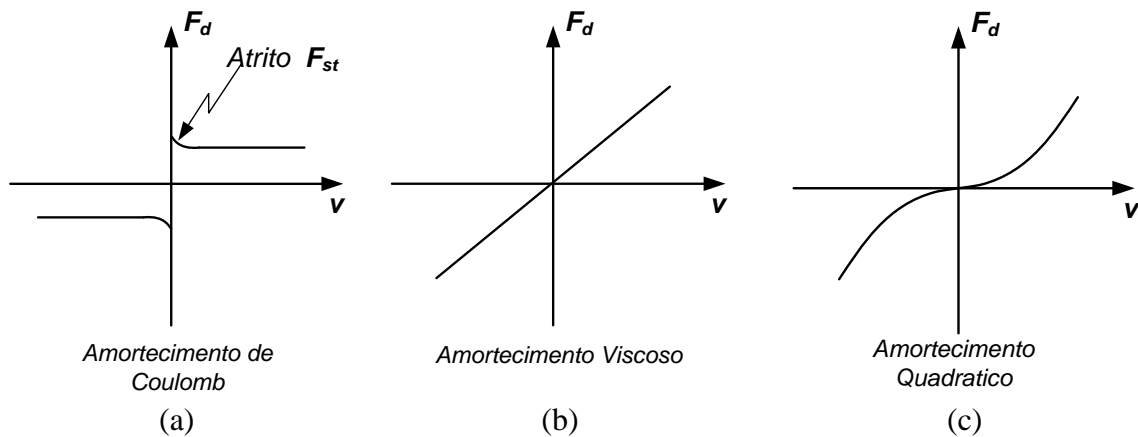
$$F(x) = F(x^*) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} (x - x^*) . \quad (1)$$

Logo temos:

$$k = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} . \quad (2)$$

Um amortecedor real é composto por três forças de amortecimento diferentes, o Amortecimento de Coulomb causado pelo atrito entre as partes móveis do amortecedor, pistão e tubo do pistão, Figura 3(a), o Amortecimento viscoso causado pelo cisalhamento do fluido na folga entre o pistão e tubo do pistão, Figura 3(b), e o Amortecimento Quadrático causado pelo deslocamento do pistão no fluido, Figura 3(c). Não-linearidades causadas por esses amortecimentos envolverem um grande número de variáveis e considerá-las traria uma grande complexidade ao trabalho, o que poderia acabar sendo prejudicial.

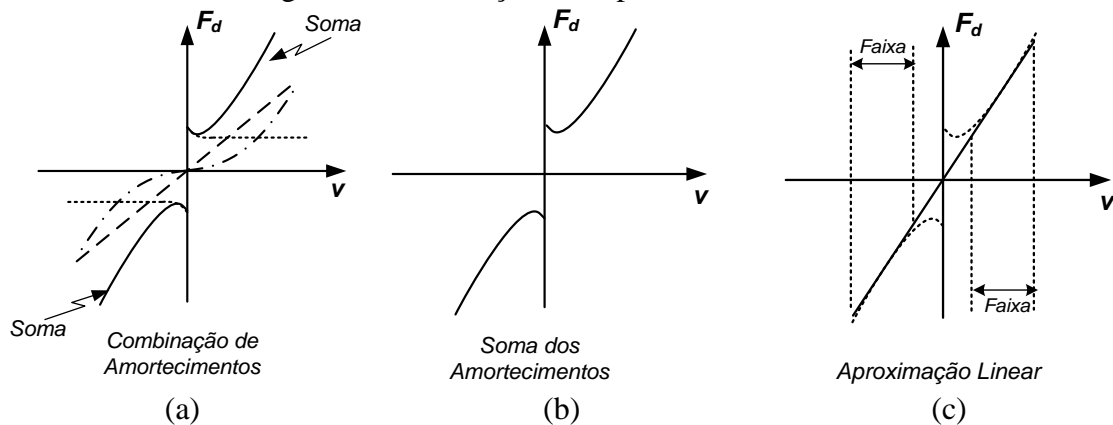
Figura 3 – Tipos de amortecimento em um amortecedor real



Fonte: Notas de aula do Prof. Roberto.

A associação dos vários tipos de amortecimento, assim como mecanismos de válvulas e molas, ameniza grande parte dessas não-linearidades em amortecedores reais, como pode ser visto na Figura 4, e o amortecimento pode ser considerado linear sem muitos esforços.

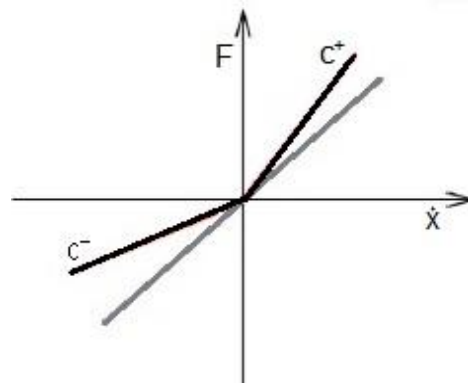
Figura 4 – Associação dos tipos de amortecimentos



Fonte: Notas de aula do Prof. Roberto. Diversos tipos de amortecimento com o resultado da soma dos mesmos (a). Soma dos amortecimentos (b). Linearização da soma dos diversos amortecimentos e as faixas de aproximação linear (c).

Os amortecedores ainda demonstram uma grande não-linearidade, como pode ser visto na Figura 5, onde para uma determinada velocidade os movimentos de compressão apresentam menor resistência que os movimentos de expansão.

Figura 5 – Comportamento não-linear do amortecedor



Fonte: adaptada de Silveira (2017).

O amortecimento pode ser descrito matematicamente da seguinte maneira:

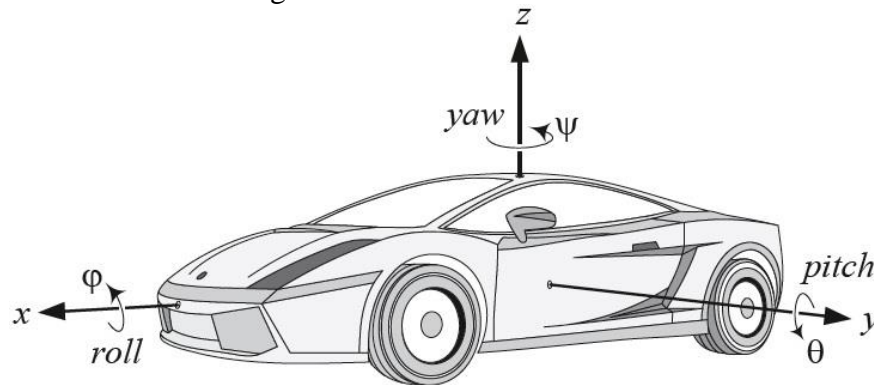
$$c_2 = \begin{cases} c_2^-, & \dot{x}_{12} < 0 \text{ (compressão)}, \\ c_2^+, & \dot{x}_{12} > 0 \text{ (expansão)}. \end{cases} \quad (3)$$

Um valor equivalente aproximado do amortecimento pode ser calculado de forma simples e já garante precisão suficiente (MITSCHKE, 2004; DIXON, 2007; ELMADANY, 1990; SILVEIRA, 2017):

$$c_2 = \frac{c_2^+ + c_2^-}{2}. \quad (4)$$

Esta assimetria tem como objetivo reduzir os valores máximos de aceleração durante a transposição de obstáculos mais severos, além de contribuir com a redução dos movimentos angulares de *pitch* do chassis, Figura 6, por meio de ajustes dos ângulos de fase entre suspensão dianteira e traseira (SILVEIRA, 2017).

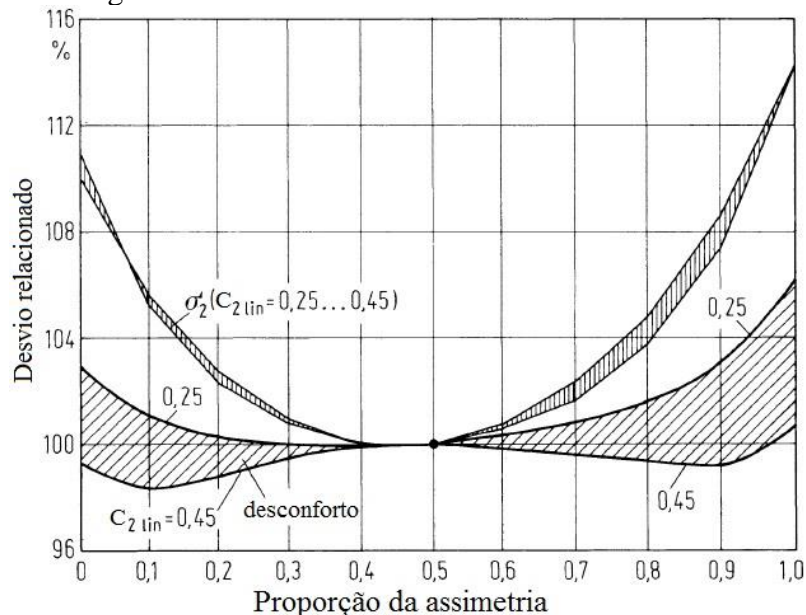
Figura 6 – Movimentos do chassis



Fonte: Jazar (2008).

Alguns testes da assimetria, feitos por ElMadany (1990) e Mitschke (2004), demonstram que normalmente ela não chega a ter impacto significativo nos resultados obtidos quando são desconsideradas as não-linearidades do amortecedor. A Figura 7 mostra um exemplo.

Figura 7 – Efeitos da assimetria dos amortecedores



Fonte: adaptada de Mitschke (2004). Os valores no eixo das ordenadas representam o desvio padrão da carga do pneu e o desconforto. Os valores no eixo das abscissas representam a assimetria do amortecedor.

Os valores no eixo das abscissas representam a assimetria do amortecedor, e normalmente giram em torno de 0,6 (GILLESPIE, 1992; MILLIKEN, 1995; DIXON, 2007).



O número que representa a assimetria pode ser encontrado pelo cálculo da seguinte razão:

$$\frac{c^+}{c^+ + c^-} . \quad (5)$$

Com todas as considerações feitas sobre o modelo e aplicando o diagrama de corpo livre às massas  $m_2$  e  $m_1$ , é possível escrever as equações diferenciais que governam o sistema (BALACHANDRAN, 2009):

$$m_1 \ddot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) + k_1(x_1 - y) = 0 , \quad (6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0 . \quad (7)$$

A desvantagem matemática de sistemas não-lineares está em permitirem análises apenas no domínio do tempo (SILVEIRA, 2014; VERROS, 2005; DIXON, 2007). A possibilidade de usar um modelo linear que possa representar um sistema não-linear dentro de uma faixa erro aceitável é importante, pois permite análises feitas no domínio da frequência. Análises no domínio do tempo podem gerar um tempo de processamento muito elevado e acabar atrasando o projeto. É nesse tipo de situação que análises no domínio da frequência se tornam vantajosas, pois mesmo não tendo a mesma precisão se mostram capazes de obter bons resultados.

## 2.2 Funções de transferência

As funções de transferência representam o deslocamento de resposta do sistema em relação ao deslocamento de excitação, e são obtidas por meio da aplicação da Transformada de Laplace, Equação (8), nas equações diferenciais que governam o sistema, Equações (6) e (7), (BALACHANDRAN, 2009; RAO, 2010).

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} x(t) dt . \quad (8)$$

Uma das propriedades das Transformadas de Laplace garante que a transformada da derivada de uma função, para o caso onde todas as condições iniciais são zero, é a multiplicação da transformada da função por  $s$ .

Para as seguintes considerações:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, \\ \ddot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Temos que:

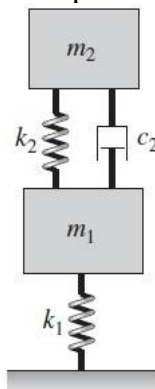
$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X, \quad (10)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX, \quad (11)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2 X. \quad (12)$$

Dito isto já é possível iniciar a dedução das funções de transferência do modelo de 1/4 de carro, Figura 8, simplificado por todas as considerações feitas.

Figura 8 – Modelo simplificado de 1/4 de carro



Fonte: Balachandran (2009).

Aplicando a Transformada de Laplace nas equações diferenciais que governam o sistema, obtemos:

$$m_1 X_1 s^2 - c_2 X_2 s + c_2 X_1 s - k_2 X_2 + k_2 X_1 + k_1 X_1 - k_1 Y = 0, \quad (13)$$

$$m_2 X_2 s^2 + c_2 X_2 s - c_2 X_1 s + k_2 X_2 - k_2 X_1 = 0. \quad (14)$$

Reorganizando as Equações (13) e (14):

$$(m_1 s^2 + c_2 s + k_2 + k_1) X_1 - (c_2 s + k_2) X_2 = k_1 Y, \quad (15)$$

$$(m_2 s^2 + c_2 s + k_2) X_2 - (c_2 s + k_2) X_1 = 0. \quad (16)$$

Isolando  $X_1$  na Equação (16), temos:

$$X_1 = \frac{(m_2 s^2 + c_2 s + k_2) X_2}{(c_2 s + k_2)}, \quad (17)$$

Substituindo  $X_1$  na Equação (15), temos:

$$\frac{(m_1 s^2 + c_2 s + k_2 + k_1)(m_2 s^2 + c_2 s + k_2) X_2}{(c_2 s + k_2)} - (c_2 s + k_2) X_2 = k_1 Y. \quad (18)$$

As funções de transferência das massas  $m_2$  e  $m_1$  são escritas da seguinte forma:

$$\frac{X_2}{Y} = \frac{k_1 (c_2 s + k_2)}{(m_1 s^2 + c_2 s + k_2 + k_1)(m_2 s^2 + c_2 s + k_2) - (c_2 s + k_2)^2}, \quad (19)$$

$$\frac{X_1}{Y} = \frac{k_1 (m_2 s^2 + c_2 s + k_2)}{(m_1 s^2 + c_2 s + k_2 + k_1)(m_2 s^2 + c_2 s + k_2) - (c_2 s + k_2)^2}. \quad (20)$$

Para calcular a função de transferência no domínio da frequência  $s$  é definido como sendo (BALACHANDRAN 2009; RAO 2010):

$$s = j\omega. \quad (21)$$

Para a aceleração da massa  $m_2$ , temos:

$$A_{\ddot{x}_2} = \mathcal{L}\{\ddot{x}_2(t)\}, \quad (22)$$

$$A_{\ddot{x}_2} = s^2 X_2, \quad (23)$$

Logo a função de transferência da aceleração da massa  $m_2$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$H_1 = \frac{A_{\ddot{x}_2}}{Y}, \quad (24)$$

$$H_1 = s^2 \frac{X_2}{Y}. \quad (25)$$

Para a força normal de contato entre o pneu e o solo, temos:

$$F_{x,y} = k_1(Y - X_1), \quad (26)$$

A função de transferência que representa a força normal de contato entre o pneu e o solo pode ser escrita da seguinte forma:

$$H_2 = \frac{F_{x,y}}{Y}, \quad (27)$$

$$H_2 = k_1 \left( 1 - \frac{X_1}{Y} \right). \quad (28)$$

As funções encontradas são semelhantes às usadas por Gobbi (2001) e Múčka (2018) em seus artigos. Outras funções como a do curso dos amortecedores e da energia dissipada por eles também podem ser deduzidas, e são importantes muito para o projeto do conjunto mola-amortecedor.

### 2.3 Função de densidade espectral de potência

As condições de excitação de um sistema precisam ser bem descritas, para que seja possível fazer cálculos das suas respostas. As características das estradas não podem ser determinadas de forma exata, por isso funções randômicas, com distribuições gaussianas de probabilidade, representam melhor tais condições. As amplitudes das rugosidades de intervalos aleatórios de estradas de vários tipos, Figura 9(a), foram registradas e serviram de amostras para análises estatísticas das condições das superfícies.

Por meio de Transformadas de Fourier, Equações (29) e (30), o resultado pôde ser analisado no domínio da frequência, como ilustra a Figura 9(b).

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (29)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (30)$$

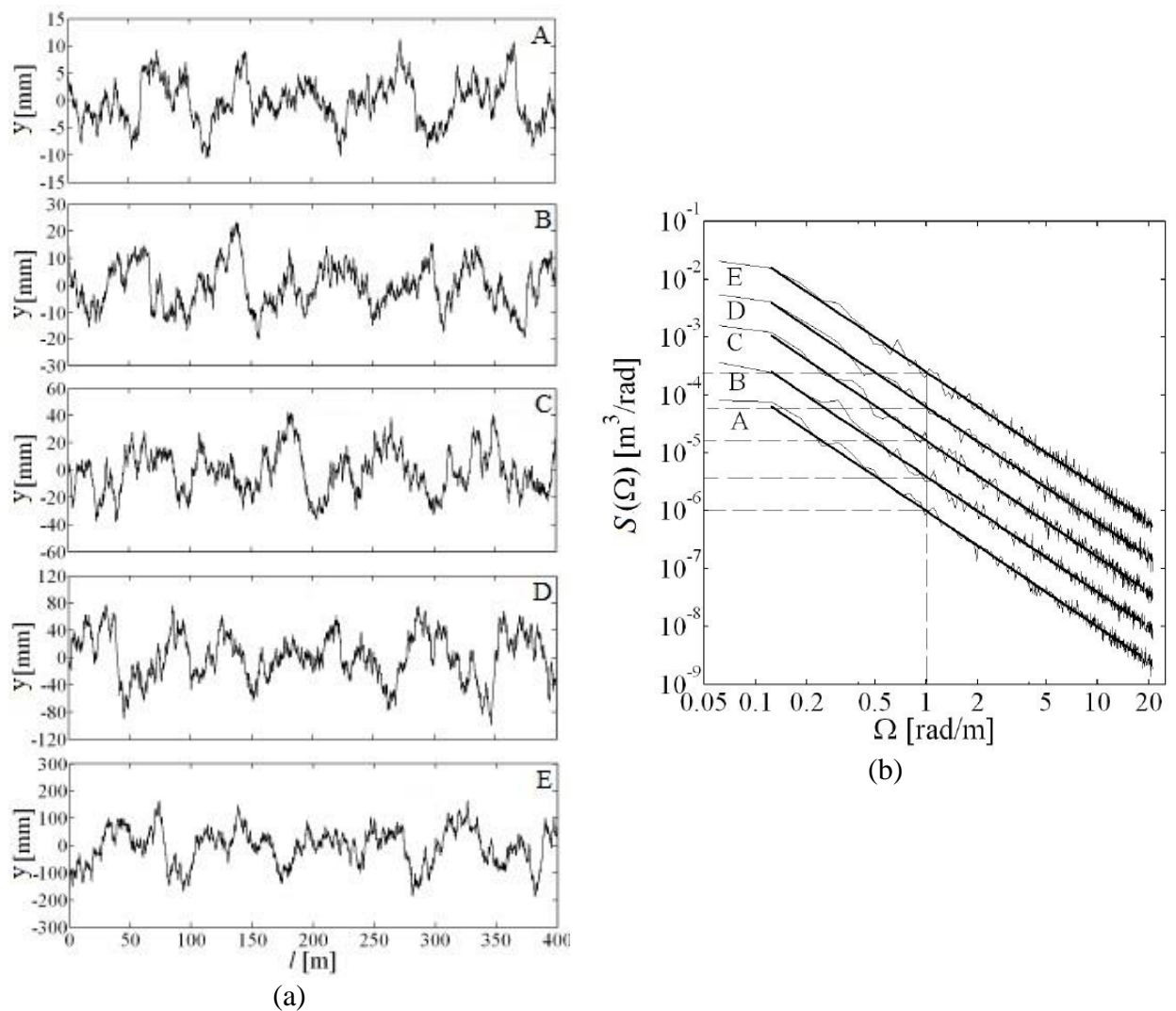
Os resultados obtidos foram aproximados por Dodds (1973) à uma fórmula matemática da densidade espectral de potência que é definida como:

$$s(\Omega) = s(\Omega_0) \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{-w}, \quad (31)$$

Tal função possibilita a classificação das estradas dependendo da qualidade da superfície. O valor de  $w$  é discutido em alguns trabalhos e pode variar, mas por conta de facilidades matemáticas e da norma ISO 8608, geralmente se considera  $w = 2$ , por isso:

$$s(\Omega) = s(\Omega_0) \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{-2}, \quad (32)$$

Figura 9 – Irregularidades das estradas nos domínios do tempo e da frequência



Fonte: adaptada de Múčka (2018). Irregularidades no domínio do tempo (a). Irregularidades no domínio da frequência (b).

As estradas são separadas em oito categorias simbolizadas por letras, como pode ser visto na Tabela 1, e as características de cada categoria são estabelecidas pela norma ISO 8608.

Tabela 1 – Classificação de estradas segundo a norma ISO 8608

	A	B	C	D	E	F	G	H
Faixa	< 2	2 - 8	8 - 32	32 - 128	128 - 512	512 - 2048	2048 - 8192	> 8192
Média	1	4	16	64	256	1024	4096	16384

Fonte: autor. Valores de  $S(\omega_0)$ , em  $(10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad})$ , para  $\omega_0 = 1 \text{ rad/m}$  e  $w = 2$ .

As funções são definidas em intervalos de frequências diferentes para veículos *on-road* e veículos *off-road*. Tais intervalos são definidos da seguinte maneira:

$$\text{On-road} \begin{cases} \Omega_{min} = 0,01 \text{ ciclos/m} , \\ \Omega_{max} = 10 \text{ ciclos/m} , \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{Off-road} \begin{cases} \Omega_{min} = 0,05 \text{ ciclos/m} , \\ \Omega_{max} = 10 \text{ ciclos/m} , \end{cases} \quad (34)$$

A equação que representa a densidade espectral de potência infelizmente apresenta valores muito altos e discrepantes da realidade para frequências muito baixas, essa é uma das causas que levaram a norma ISO 8608 a limitar o intervalo de frequência. Já em frequências muito altas a densidade espectral se torna muito baixa, além do efeito de envelopamento do pneu começar a ser muito forte, já que o pneu atua como um filtro passa baixa (BERES, 1987). Para evitar problemas com métodos analíticos, que podem ter limites de integração bem mais amplos, é necessária uma modificação na equação da densidade espectral de potência. Tal modificação deve garantir que métodos analíticos alternativos tenham respostas as mais próximas possível do método descrito na norma ISO 8608.

O Apêndice A mostra a dedução da seguinte forma alternativa de escrever a função de densidade espectral:

$$S_z(\omega) = \frac{S_z(\omega_0)v}{(\alpha v)^2 + \omega^2}. \quad (35)$$

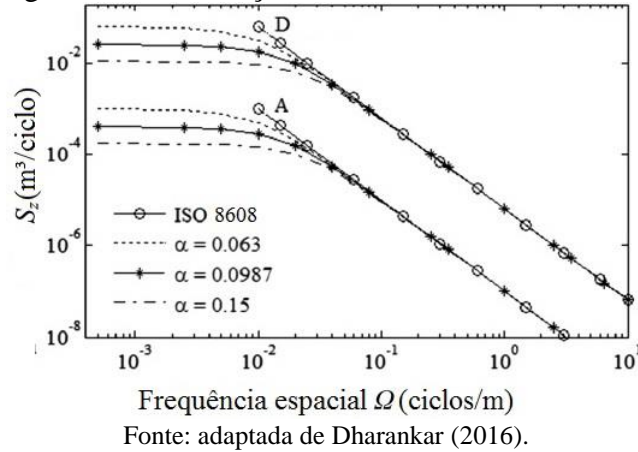
Onde o coeficiente  $\alpha$  de ajuste ao tipo de superfície é definido como:

$$\alpha = \frac{(\Omega_{min} \Omega_{max})}{(\Omega_{max} - \Omega_{min})} \pi^2. \quad (36)$$

As Equações (35) e (36) já atendem a todas as necessidades provenientes do uso

de métodos analíticos. Diferentes valores de  $\alpha$  são encontrados na literatura. A Figura 10 mostra o gráfico da equação de densidade espectral de potência para alguns valores de  $\alpha$ .

Figura 10 – Diferenças entre os vários valores de  $\alpha$



Os valores encontrados são de  $\alpha = 0,0987948 \text{ rad/m}$  para situações *on-road* e de  $\alpha = 0,495960 \text{ rad/m}$  para situações *off-road*. Segundo Goenaga (2017), Tyan (2009) e Hác (1985) os valores são de  $\alpha = 0,15 \text{ rad/m}$  para estradas pavimentadas e de  $\alpha = 0,45 \text{ rad/m}$  para estradas não pavimentadas, mas os resultados são relativamente distantes dos calculados. O valor mais próximo encontrado na bibliografia se mostrou de  $\alpha = 0,0986960 \text{ rad/m}$ , obtido pelo método descrito por Dharankar (2016), que usou uma base de cálculos sólida, divergindo muito pouco da usada nesse trabalho. Os métodos analíticos podem assumir a variável  $\alpha$  com valores diferentes e isso proporciona a comparação da eficácia obtida com algumas das opções disponíveis.

## 2.4 Ponderações de sensibilidade no domínio da frequência

A função que representa a sensibilidade humana às vibrações verticais de corpo-inteiro quando estão sentados, está presente na norma ISO 2631. Tal função tem impacto direto no cálculo da aceleração sentida por ocupantes de um veículo e com ela fica muito mais simples encontrar um bom ponto de equilíbrio entre segurança e conforto num projeto de suspensão.

A função principal da sensibilidade é composta por quatro polinômios, que multiplicados resultam na função a ser usada.

$$W_{k\ 2631} = H_h H_l H_t H_s . \quad (37)$$

Tais polinômios constituintes são definidos da seguinte maneira:

- Um filtro passa-alta que representa o limite inferior de 0,4 Hz de banda da função de transferência:

$$H_h = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_1}{Q_1}s + \omega_1^2}, \quad (38)$$

- Um filtro passa-baixa que representa o limite superior de 100 Hz de banda da função de transferência:

$$H_l = \frac{\omega_2^2}{s^2 + \frac{\omega_2}{Q_2}s + \omega_2^2}, \quad (39)$$

- Filtro de transição aceleração-velocidade que é proporcional à aceleração para baixas frequências e proporcional à velocidade para altas frequências:

$$H_t = \frac{\frac{\omega_4^2}{\omega_3}s + \omega_4^2}{s^2 + \frac{\omega_4}{Q_4}s + \omega_4^2}, \quad (40)$$

- Filtro de passo ascendente que mantém uma inclinação de aproximadamente 6 dB por oitava e é proporcional ao impulso:

$$H_s = \frac{s^2 + \frac{\omega_5}{Q_5}s + \omega_5^2}{s^2 + \frac{\omega_6}{Q_6}s + \omega_6^2}, \quad (41)$$

Onde:

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 = 1/\sqrt{2}; Q_4 = 0,63; Q_5 = Q_6 = 0,91; \\ f_1 = 0,4; f_2 = 100; f_3 = f_4 = 12,5; f_5 = 2,37; f_6 = 3,35; \end{cases} \quad (42)$$

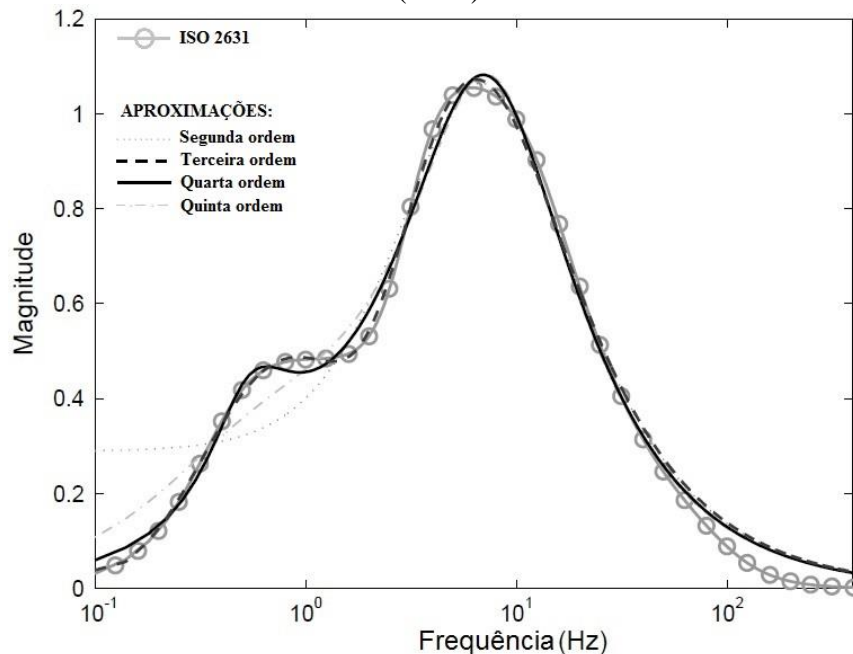
$$\omega_i = 2\pi f_i. \quad (43)$$

A função de sensibilidade resultante é um polinômio grande, onde o numerador é do quinto grau e o denominador é do oitavo grau e isso pode trazer muita complexidade aos métodos analíticos. Em seu trabalho, Zuo (2003) desenvolve formas aproximadas de representação da sensibilidade, que foram criadas para simplificar cálculos que envolvam a



sensibilidade humana de corpo-inteiro, e mesmo polinômios bem mais simples que o descrito na norma ISO 2631 conseguiram boa aproximação, como pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 – Comparação entre as funções de sensibilidade descritas pela ISO 2631 e por Zuo (2003)



Fonte: adaptado de Zuo (2003).

Polinômios de segunda até quinta ordem foram testados e o de terceira ordem se mostra a melhor opção, pois tem erros pequenos quando comparado ao descrito na norma ISO 2631 e traz uma grande simplificação.

$$W_{k\text{Zuo}}^{(3)} = \frac{80,03s^2 + 989,0s + 0,02108}{s^3 + 78,92s^2 + 2412s + 5614} \quad (44)$$

A norma ISO 2631 estabelece alguns intervalos de aceleração que podem ser usados para classificar o nível de conforto em um veículo.

$$\begin{aligned} a_{rms} &\leq 0,315 \text{ m/s}^2 \text{ (confortável)} \\ 0,315 \text{ m/s}^2 &\leq a_{rms} \leq 0,63 \text{ m/s}^2 \text{ (pouco desconfortável)} \\ 0,5 \text{ m/s}^2 &\leq a_{rms} \leq 1 \text{ m/s}^2 \text{ (razoavelmente desconfortável)} \\ 0,8 \text{ m/s}^2 &\leq a_{rms} \leq 1,6 \text{ m/s}^2 \text{ (desconfortável)} \\ 1,25 \text{ m/s}^2 &\leq a_{rms} \leq 2,5 \text{ m/s}^2 \text{ (muito desconfortável)} \\ 2 \text{ m/s}^2 &\leq a_{rms} \text{ (extremamente desconfortável)} \end{aligned} \quad (45)$$

Sendo assim, o limite escolhido foi de  $a_{rms} = 1,25 \text{ m/s}^2$ , para garantir que nunca se chegue a uma situação muito desconfortável.

O valor quadrático médio (RMS) da aceleração pode ser definido como o desvio

padrão da aceleração sentida pelo passageiro de um veículo submetido à excitações randômicas, logo temos:

$$a_{rms} = \sigma_1 . \quad (46)$$

## 2.5 Coeficiente de carga dinâmica dos pneus

Embora não haja uma norma que estabeleça limites ao comportamento dos pneus em relação ao solo, é necessária a adoção de medidas que garantam a estabilidade do veículo e a segurança dos passageiros. A força de atrito máxima entre pneu e solo é proporcional ao valor da força normal, e as variações da força normal podem ser analisadas estatisticamente, sendo limitadas a um valor que garanta um bom comportamento. Um coeficiente de carga dinâmica (*DLC*), é definido como a razão entre o desvio padrão do carregamento do pneu  $\sigma_2$  e a carga estática do pneu  $F_{est}$ :

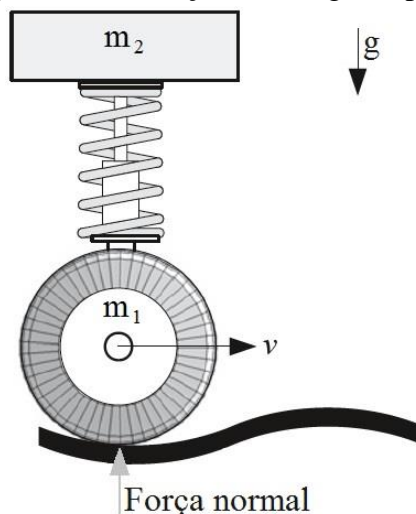
$$DLC = \frac{\sigma_2}{F_{est}} , \quad (47)$$

Onde:

$$F_{est} = (m_1 + m_2)g , \quad (48)$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 . \quad (49)$$

Figura 12 – Variações de carga no pneu



Fonte: adaptada de Jazar (2008).

Os valores de tal coeficiente geralmente variam de 0,01 até 0,4, mas valores acima

de 0,3 já podem ser considerados altos. Neste trabalho foi utilizado  $DLC = 0,3$ , e isso equivale a uma situação onde o pneu mantém contato com o solo em aproximadamente 99,9957% do tempo. Essa probabilidade pode ser encontrada por meio de uma distribuição de probabilidade normal padrão, onde  $Z = 1/DLC$  (MÚČKA, 2016). Desta forma é possível também dizer que os efeitos gerados por saltos do pneu são desprezíveis, já que a probabilidade de perda de contato com o solo é muito baixa.

## 2.6 Cálculos da aceleração percebida e da variação de carga do pneu

Os métodos numéricos para cálculos dependem dos limites estabelecidos pela norma ISO 8608 e são facilmente implementados partindo das seguintes equações:

$$\sigma_1^2 = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} |W_k(s)|^2 |H_1(s)|^2 S(\omega) d\omega , \quad (50)$$

$$\sigma_2^2 = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} |H_2(s)|^2 S(\omega) d\omega . \quad (51)$$

Onde  $\sigma_1$  é a aceleração RMS sentida pelo passageiro e  $\sigma_2$  é o desvio padrão da carga no pneu.

Numericamente a aceleração percebida pode ser calculada tanto por meio da função da sensibilidade descrita pela norma ISO 2631, quanto pela função descrita por Zuo (2003) e isso proporciona uma chance de comparar os dois métodos quanto aos valores de  $\sigma_1$ , já que  $\sigma_2$  não depende da sensibilidade e tem o mesmo valor para os dois casos.

Métodos para resolver essas integrais analiticamente têm menor tempo de processamento, mas o método usado neste trabalho requer condições específicas. A primeira modificação necessária é a redefinição dos limites de integração sugeridos pela norma ISO 8608 de  $\Omega_{min}$  e  $\Omega_{max}$  por 0 e  $+\infty$ , como segue:

$$\sigma_1^2 = \int_0^{+\infty} |W_k(s)|^2 |H_1(s)|^2 S_z(\omega) d\omega , \quad (52)$$

$$\sigma_2^2 = \int_0^{+\infty} |H_2(s)|^2 S_z(\omega) d\omega . \quad (53)$$

Para resolver esse problema será usado um princípio de integração que varre todo o domínio da frequência e por isso as integrais são escritas da seguinte forma:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_k(s)|^2 |H_1(s)|^2 S_z(\omega) d\omega, \quad (54)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_2(s)|^2 S_z(\omega) d\omega. \quad (55)$$

A integral é resolvida pelo método de James, Nichols e Phillips (NEWTON, 1957). Tal método garante uma resposta para problemas do seguinte tipo:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(s)a(-s)}{b(s)b(-s)} ds, \quad (56)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(s)a(-s)}{b(s)b(-s)} ds = 2\pi I. \quad (57)$$

Onde a função é estruturada da seguinte maneira:

$$a(s) = a_{i-1}s^{i-1} + a_{i-2}s^{i-2} + \dots + a_1s^1 + a_0, \quad (58)$$

$$b(s) = b_i s^i + b_{i-1}s^{i-1} + \dots + b_1s^1 + b_0. \quad (59)$$

Para obedecer essa condição as funções devem ser escritas nas seguintes formas (GOBBI, 2001):

$$S_z(\omega) = S_z(\omega_0) v \frac{1}{\alpha v + s} \frac{1}{\alpha v - s}, \quad (60)$$

$$|W_k(s)|^2 = W_k(s)W_k(-s), \quad (61)$$

$$|H_2(s)|^2 = H_2(s)H_2(-s). \quad (62)$$

Para o caso do contato do pneu-solo, temos:

$$\frac{a(s)}{b(s)} = H_2(s) \frac{1}{\alpha v + s} = \frac{a^{(4)}(s)}{b^{(5)}(s)}. \quad (63)$$

Logo:

$$\sigma_1^2 = S_z(\omega_0) v \pi I_5. \quad (64)$$

Seguindo a mesma lógica para o caso da aceleração percebida, temos:

$$\frac{a(s)}{b(s)} = W_{k_{zuo}}(s) H_1(s) \frac{1}{\alpha v + s} = \frac{a^{(7)}(s)}{b^{(8)}(s)}. \quad (65)$$

Logo:

$$\sigma_2^2 = S_z(\omega_0) v \pi I_8. \quad (66)$$

Os resultados das integrais  $I_5$  e  $I_8$ , calculadas analiticamente, e os polinômios  $a^{(4)}(s)$ ,  $b^{(5)}(s)$ ,  $a^{(7)}(s)$  e  $b^{(8)}(s)$  são descritos mais detalhadamente no Apêndice B.

É importante perceber a independência de  $I$  em relação à  $S_z(\omega_0)$ , já a velocidade  $v$  interfere no valor de  $I$ . Isso significa que os valores obtidos na otimização são mais ligados às velocidades e analisar os resultados com relação à velocidade é mais eficiente. Caso a velocidade  $v$  seja considerada uma constante, enquanto mudam as características da estrada, os valores de  $c_2$  e  $k_2$  encontrados na otimização serão sempre os mesmos, o que não acontece com os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , que são afetados por variações de  $S_z(\omega_0)$ .

### 3 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO USANDO ALGORITMOS GENÉTICOS

Quando um veículo é avaliado, são vários os critérios usados. Em um projeto tais critérios se tornam fundamentais, pois ajudam a determinar qual a solução mais próxima da ideal. Os objetivos em um projeto veicular geralmente estão ligados a redução das massas, redução dos custos, aumento da segurança, aumento do conforto e maior economia de combustível. Um produto que resulta da valorização de um único objetivo é quase sempre mal recebido pelo consumidor, pois acaba tendo baixo desempenho em situações gerais. Cada objetivo tem um conjunto ótimo de características e em muitos casos objetivos diferentes levam a características bastante divergentes.

Os métodos de otimização multiobjetivo têm como principal função mostrar soluções que atendam da melhor forma possível um conjunto de objetivos e assim aproximar o produto do que seria a melhor solução em condições ou critérios diversos, mas matematicamente o processo de otimização multiobjetivo é simplesmente a busca por variáveis que retornem os menores valores possíveis das funções que representam os objetivos. No caso analisado neste trabalho os objetivos são tornar um veículo mais seguro e confortável por meio de características do conjunto mola-amortecedor.

Os algoritmos genéticos são ferramentas computacionais que conseguem encontrar os pontos mínimos de funções por um método que trabalha de forma análoga ao processo evolutivo natural. As variáveis são representadas de uma forma binária, o que se assemelha aos cromossomos. O número de cromossomos está diretamente ligado a precisão com a qual as variáveis são determinadas. Uma população inicial é gerada de forma randômica, os indivíduos com melhores resultados formam uma elite e assim geram novos indivíduos mesclando suas características. Mutações são inseridas nos novos indivíduos e essa estratégia garante uma maior eficiência em evitar os mínimos locais das funções. Todas as gerações passam pelo processo de seleção, crossover e mutação.

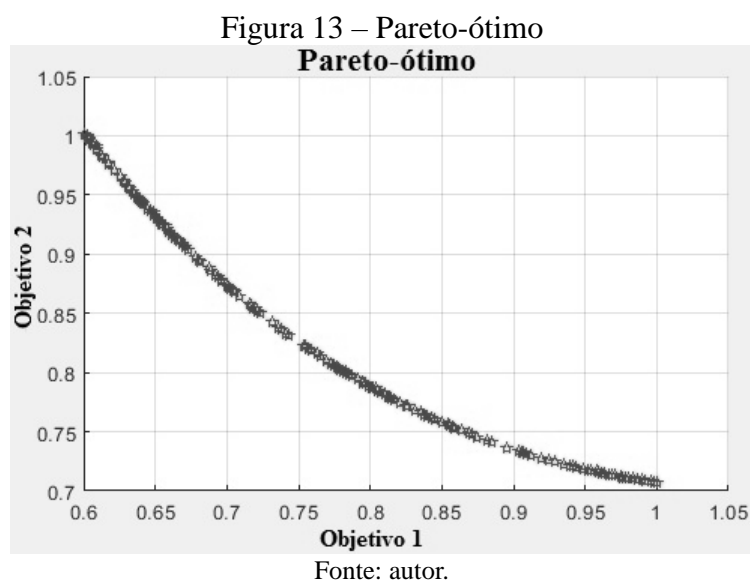
As vantagens desse método são (MASTINU, 2006):

- Pequena dependência de ferramentas matemáticas, como derivadas, o que diminui as restrições quanto as funções a serem otimizadas;
- Fácil processamento em paralelo, que garante melhor aproveitamento de computadores com grande número de núcleos, unidades de processamento gráfico (GPU) ou computação na nuvem, diminuindo o tempo computacional;
- Análise ampla do espectro de possibilidades com maiores chances de encontrar os mínimos globais;

- Funciona com variáveis contínuas e discretas;
- Ótima capacidade de lidar com restrições aplicadas tanto às variáveis quanto às funções objetivo;
- Usa regras de transição probabilística e não determinísticas, ou seja, para condições iniciais semelhantes o programa pode retornar soluções diversas.

Por todas essas características os algoritmos genéticos se mostram a melhor opção, entre as ferramentas analisadas, para o processo de otimização multiobjetivo desenvolvido neste trabalho.

Geralmente a resposta de uma otimização multiobjetivo que usa algoritmos genéticos é mostrada na forma de um conjunto solução Pareto-ótimo e a melhor opção, que será selecionada como resposta, está contida nesse conjunto. Como pode ser visto no exemplo da Figura 12, ainda são muitas as soluções possíveis presente nesse conjunto Pareto-ótimo e por isso a escolha pode se tornar difícil.



Muitas vezes, quando se determina a importância relativa de cada objetivo, uma otimização multiobjetivo pode ser executada da mesma maneira que uma otimização de um único objetivo, tendo como resposta não um conjunto Pareto-ótimo, mas uma única solução. Mesmo gerando uma grande simplificação na escolha da solução, a determinação das importâncias relativas é muito complexa, pois muitas características são mensuráveis apenas de maneira subjetiva (MASTINU, 2006).

Outra forma de transformar um problema multiobjetivo em um problema de um único objetivo é levando os critérios aos limites e assim tornando o produto o mais equilibrado possível no pior caso em que se possa encontrar. A estratégia usada neste trabalho

é elevar a velocidade máxima até atingir os limites pré-estabelecidos de conforto e segurança. Para isso a velocidade deve ser tratada como variável, assim como as características do conjunto mola-amortecedor. A única função objetivo será a velocidade do veículo, enquanto as restrições são o valor máximo da aceleração RMS, ponderada pela função de sensibilidade de corpo-inteiro, da massa suspensa e o valor máximo do coeficiente de carga dinâmica DLC do pneu. Dessa forma o programa vai retornar as características de mola e amortecedor que permitem a mais alta velocidade de deslocamento, sem que sejam ultrapassados os limites de conforto e segurança.

Os tempos de processamento são muito importantes, mas não são informados neste trabalho por dependerem da precisão, do número de indivíduos, do número de gerações, dos limites das variáveis, do algoritmo genético usado, das características do computador, etc., e nem sempre esse conjunto de propriedades pode ser mantido.

O MATLAB e sua *Optimization Toolbox*, foram escolhidos como plataforma para o procedimento de otimização multiobjetivo, pois oferecem uma biblioteca e ferramentas de otimização em que já estão implementados algoritmos genéticos, mas muitos outros programas e ferramentas podem ser usados e alcançar os mesmos resultados.



## 4 RESULTADOS

São usados quatro métodos para calcular a aceleração RMS sentida pelo passageiro e o desvio padrão da carga no pneu:

- N1 é um método de otimização que usa cálculos numéricos e função de sensibilidade como proposto pela norma ISO 2631;
- N2 é um método de otimização que usa cálculos numéricos, e a função de sensibilidade é o polinômio de terceira ordem proposto por Zuo (2003). Por variar apenas a função da sensibilidade, os valores do desvio padrão da carga do pneu obtidos por esse método são os mesmos obtidos pelo método N1;
- A1 é um método de otimização que usa cálculos analíticos, como função de sensibilidade o polinômio de terceira ordem proposto por Zuo (2003), e  $\alpha = 0,15 \text{ rad/m}$ ;
- A2 é um método de otimização que usa cálculos analíticos, a função de sensibilidade é o polinômio do terceira ordem proposto por Zuo (2003), e  $\alpha = 0,0987948 \text{ rad/m}$ , como obtido por meio da dedução mostrada no Apêndice A.

As integrais nos métodos N1 e N2 são feitas com apenas 1000 interações, pois o tempo de processamento cresce muito rápido com o aumento da precisão, e testes de convergência mostraram que mesmo nas velocidades mais altas o erro geralmente não passa de 0,5% da velocidade encontrada em relação ao mesmo método com 10000 interações.

Os métodos foram avaliados nos limites máximos de cinco classes de estradas diferentes. Tais classes já englobam a maioria das estradas trafegáveis encontradas em todo o mundo, sendo assim bastante representativas.

$$\begin{aligned}
 & - \text{A, com } S(\omega_0) = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad}; \\
 & - \text{B, com } S(\omega_0) = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad}; \\
 & - \text{C, com } S(\omega_0) = 32 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad}; \\
 & - \text{D, com } S(\omega_0) = 128 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad}; \\
 & - \text{E, com } S(\omega_0) = 512 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad}.
 \end{aligned} \tag{67}$$

A otimização tenta obter sempre o máximo limite de velocidade de deslocamento e é restrita ao valor máximo de aceleração sentida pelo passageiro,  $a_{rms} = 1,25 \text{ m/s}^2$ , e ao valor máximo do desvio padrão da variação de carga no pneu,  $\text{DLC} = 0,3$ .

Foram consideradas três variáveis, a constante elástica  $k_2$ , a constante de

amortecimento  $c_2$  e a velocidade  $v$ . A constante elástica  $k_1$ , quando tratada como variável, tende sempre ao limite inferior durante a otimização e por isso não pôde ser considerada uma variável. O uso de modelos que levam em consideração a dinâmica do veículo em curvas pode tornar possível a otimização de  $k_1$ , mas esse caso não faz parte deste trabalho.

Os valores das constantes usadas são:

$$\begin{cases} m_1 = 34,5 \text{ kg} , \\ m_2 = 230 \text{ kg} , \\ k_1 = 150190 \text{ N/m} . \end{cases} \quad (68)$$

Os limites das variáveis são:

$$\begin{cases} 0,36 \text{ km/h} \leq v \leq 3600 \text{ km/h} , \\ 100 \text{ Ns/m} \leq c_2 \leq 10000 \text{ Ns/m} , \\ 1000 \text{ N/m} \leq k_2 \leq 100000 \text{ N/m} . \end{cases} \quad (69)$$

#### 4.1 Comparação dos métodos

Inicialmente os valores das variáveis  $k_2$  e  $c_2$  são fixados para que seja possível expor as diferenças entre os vários métodos usados e compará-los.

$$\begin{cases} k_2 = 14599 \text{ N/m} , \\ c_2 = 1380 \text{ Ns/m} . \end{cases} \quad (70)$$

Os resultados podem ser vistos no Gráfico 1.

Tanto as constantes quanto as variáveis são as mesmas usadas por Múčka (2018) e são provenientes do modelo teórico de 1/4 de carro proposto por Sayers (1986a). A precisão dos resultados divulgados por Múčka (2018) é de 1 km/h e isso prejudica a comparação em velocidades muito baixas como as encontradas em estradas na condição E. Velocidades maiores que 100 km/h não foram divulgadas por Múčka (2018) e isso também prejudica comparações nas condições A e B.

É importante ressaltar que o intervalo de integração usado por Múčka (2018) é descrito pela norma prEN 13036-5, onde:

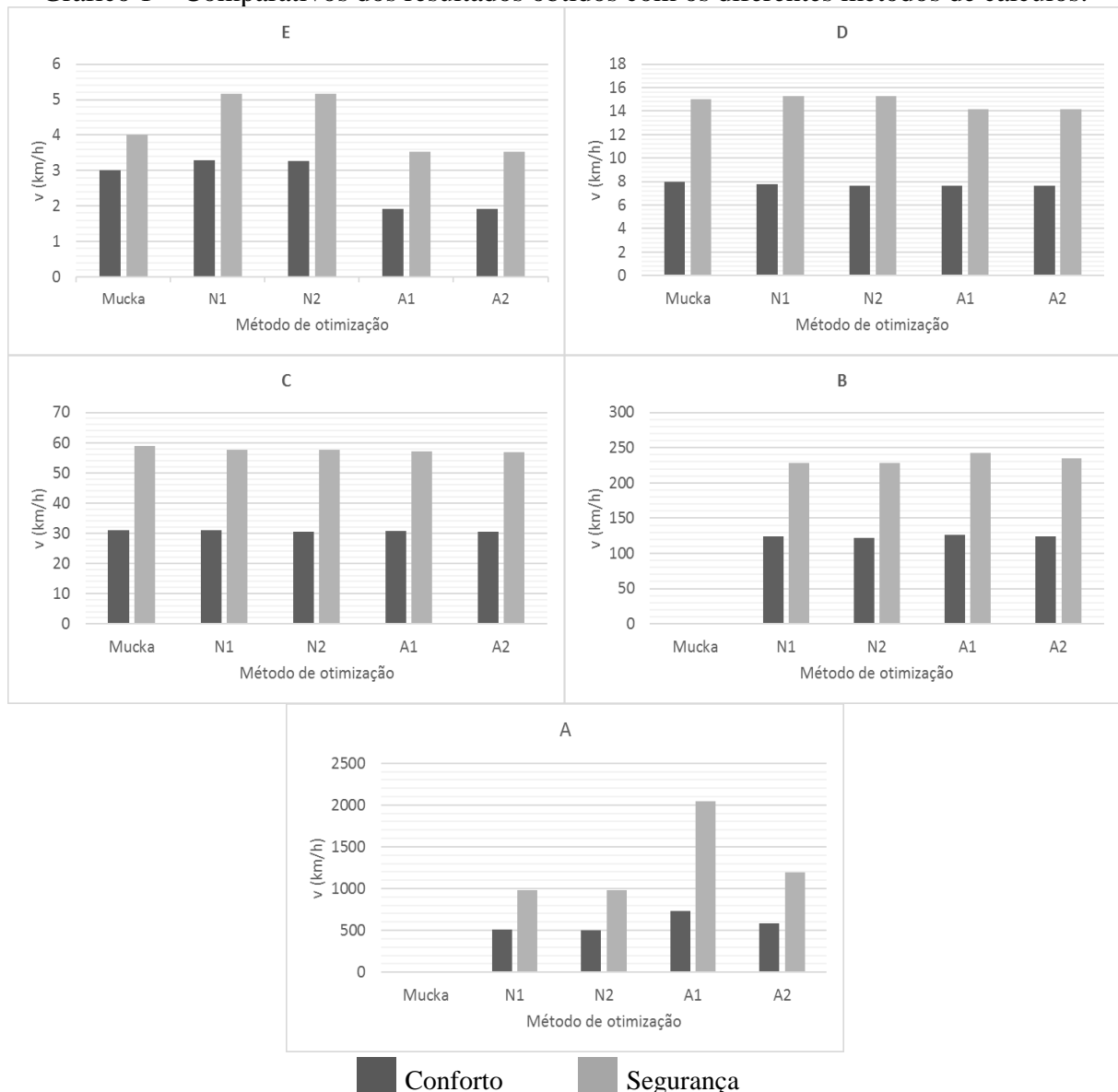
$$\begin{cases} \Omega_{min} = 0,02 \text{ ciclos/m} , \\ \Omega_{max} = 2 \text{ ciclos/m} , \end{cases} \quad (71)$$

Embora seja um intervalo bem menor que o descrito na norma ISO 8608, essa

faixa de frequências já é considerada grande o suficiente por englobar a parte onde as funções de transferência têm maior influência, e por isso os valores tendem a ser muito próximos.

Uma comparação entre os resultados obtidos pelos quatro métodos e pelo método numérico usado por Múčka (2018), mostra que os resultados dos métodos N1 e N2 geralmente ficam mais próximos, mas nos vários modelos as velocidades encontradas foram muito próximas em três das cinco condições, B, C e D. Os valores encontrados em A e E tiveram erros muito altos quando comparados as outras três condições. O que se constata é uma grande ligação da velocidade com os erros. Velocidades muito altas ou muito baixas tendem a trazer divergências aos modelos, sendo ainda mais visíveis entre os modelos numéricos e analíticos. Essa tendência se mantém praticamente inalterada em todos os testes.

Gráfico 1 – Comparativos dos resultados obtidos com os diferentes métodos de cálculos.

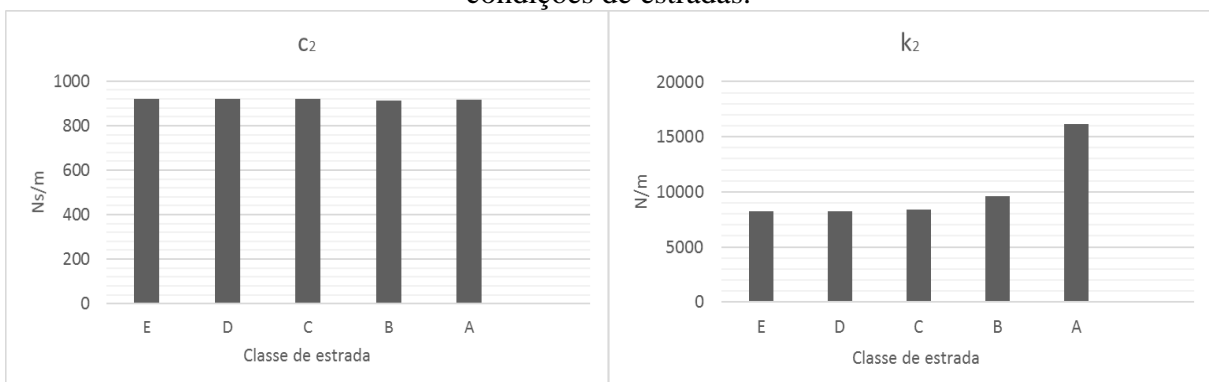


Fonte: autor. Os valores podem ser encontrados na Tabela 1 do Apêndice C. Velocidades maiores que 100 km/h não foram divulgadas por Múčka (2018) e por isso não aparecem no gráfico.

## 4.2 Otimização do conforto e da segurança

Processos de otimização foram executados nas cinco condições de estradas por meio do método A2. Fica visível a grande estabilidade do valor de  $c_2$  em todos os casos. Os valores de  $k_2$  também são muito estáveis entre as condições C, D e E. O aumento de  $k_2$  nas condições B e A demonstra a maior sensibilidade que a constante elástica tem em relação a velocidade. Os resultados podem ser vistos no Gráfico 2.

Gráfico 2 – Valores das variáveis  $c_2$  e  $k_2$  resultantes da otimização pelo método A2 nas várias condições de estradas.



Fonte: autor. Os valores podem ser encontrados na Tabela 2 do Apêndice C.

Através dos modelos de otimização foi possível chegar a valores que entregam um conforto bem maior e boa segurança, mesmo em condições bastante diversas. As velocidades podem ser encontradas na Tabela 2 do Apêndice C. Como se trata de um sistema passivo, a suspensão precisa funcionar com parâmetros fixos. Por ter os menores erros e estar numa faixa muito comum de velocidades, os valores escolhidos como novas referências são os obtidos na otimização usando o método A2 na condição C.

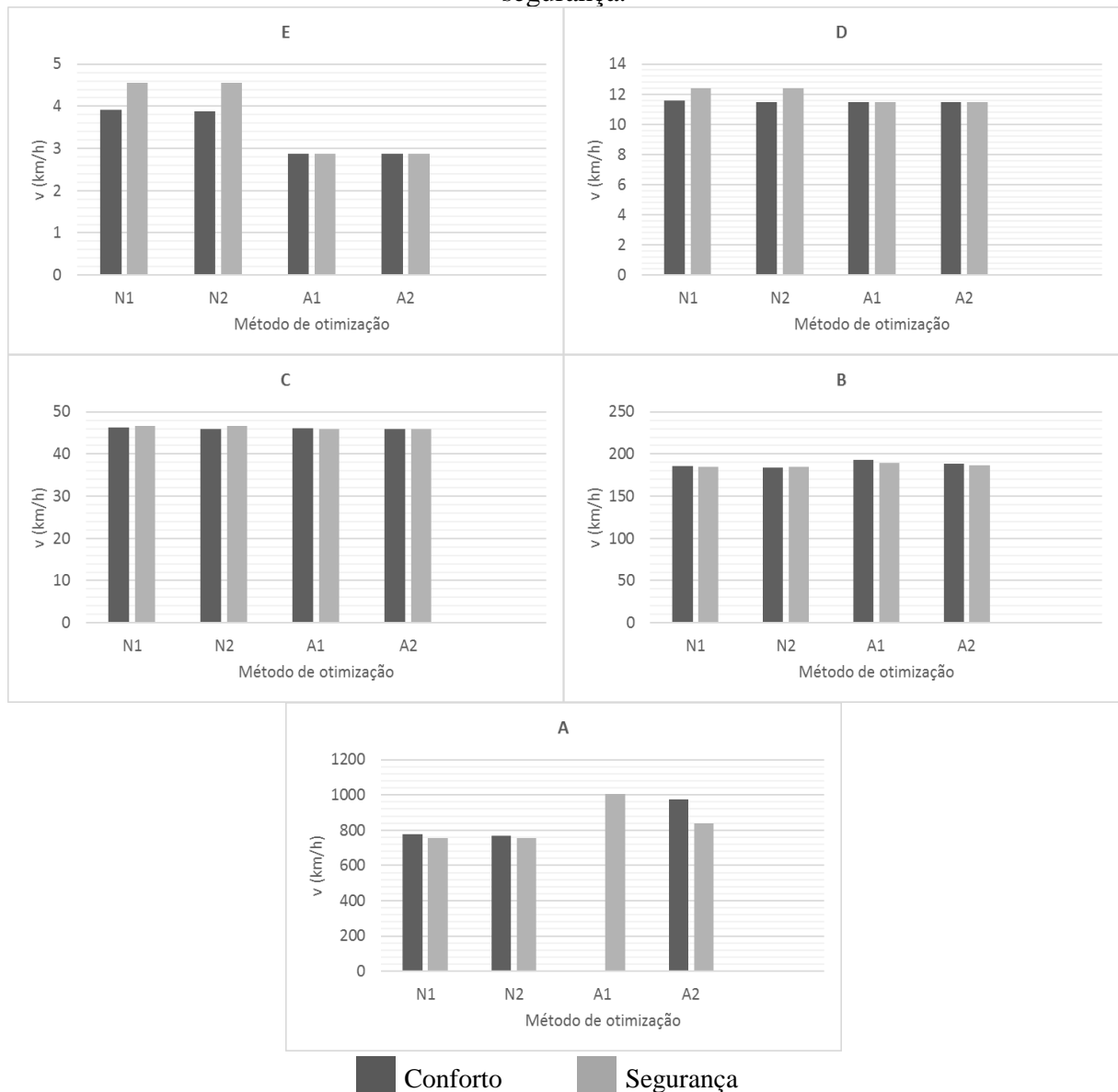
$$\begin{cases} k_2 = 8370 \text{ N/m}, \\ c_2 = 920,5 \text{ Ns/m}. \end{cases} \quad (72)$$

Os resultados podem ser vistos no Gráfico 3.

Com esses valores de  $k_2$  e  $c_2$  foi possível obter uma boa melhora em todas as condições de estradas, mesmo com a grande variação da velocidade. As diferenças entre as velocidades máximas para limites de conforto e de segurança reduziram bastante e isso pode ser usado como parâmetro na avaliação da eficácia do método de otimização. De maneira visual é possível perceber que a velocidade continua tendo muita influência na diferença percebida entre os métodos. Mesmo com os erros observados, uma análise dos resultados obtidos com o método N1, partido dos novos valores de referência encontrados pela

otimização com o método A2, também indicam o sucesso da otimização. A simplificação da sensibilidade, quando comparados N1 e N2, demonstra ser muito boa, mantendo erros sempre baixos. O método A1, não atingiu o limite de conforto na condição A, o valor da velocidade máxima tende sempre ao limite superior, já nas demais condições o modelo se mostrou confiável. Os testes feitos por meio dos valores encontrados pela otimização na condição C demonstram que os modelos A1 e A2 respondem melhor aos novos valores de referência otimizados nas condições C, D e E, enquanto os modelos N1 e N2 respondem melhor nas condições A, B e C.

Gráfico 3 – Resultados obtidos com novos valores de referência otimizados para conforto e segurança.



Fonte: autor. Os valores podem ser encontrados na Tabela 3 do Apêndice C. O valor da velocidade máxima obtida pelo método A1 com limitação de conforto extrapola na condição A, por isso não é mostrada no gráfico.

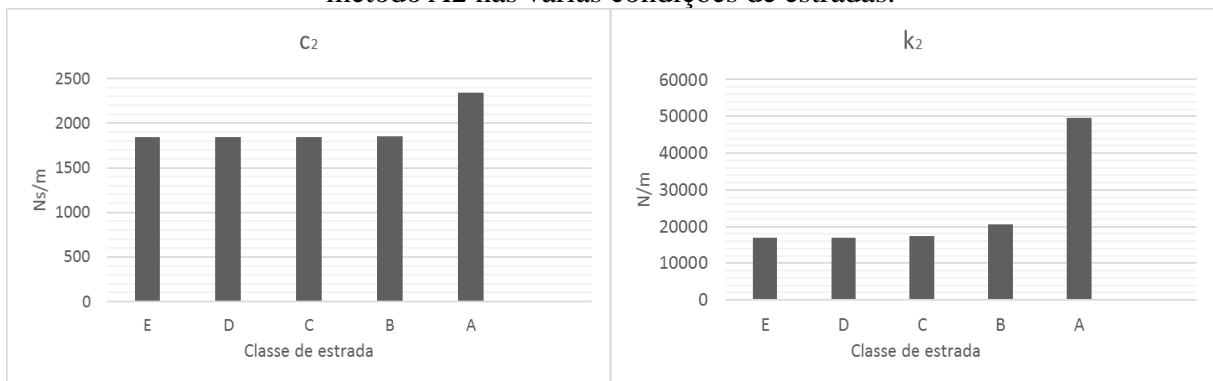
### 4.3 Otimização apenas da segurança

Uma grande vantagem ligada ao favorecimento da segurança é o aumento do desconforto em velocidades acima dos limites estabelecidos por leis de trânsito. Tal medida pode contribuir com a diminuição das infrações de trânsito e garantir uma maior segurança em praticamente todos os aspectos.

Seguindo a mesma metodologia aplicada anteriormente, mas fazendo análises de condições que apresentam valores já muito próximos das soluções ótimas limitadas apenas por  $DLC = 0,3$ , enquanto a aceleração RMS sentida pelo passageiro era desprezada, foi possível identificar uma boa margem de crescimento das velocidades máximas.

Mais uma vez os processos de otimização foram executados nas cinco condições de estradas por meio do método A2. Continua visível a grande estabilidade do valor de  $c_2$ , mas dessa vez apenas em quatro dos casos, já que na condição A ocorre um aumento considerável. Os valores de  $k_2$  continuam muito estáveis nas condições C, D e E. Mesmo o aumento considerável de  $k_2$  na condição B chega a parecer pequeno quando comparado ao grande aumento na condição A. As velocidades cresceram e as duas variáveis demonstram maior sensibilidade às novas velocidades,  $k_2$  muito mais que  $c_2$ . Os resultados podem ser vistos no Gráfico 4.

Gráfico 4 – Valores das variáveis  $c_2$  e  $k_2$  resultantes da otimização apenas de segurança pelo método A2 nas várias condições de estradas.



Fonte: autor. Os valores podem ser encontrados na Tabela 4 do Apêndice C.

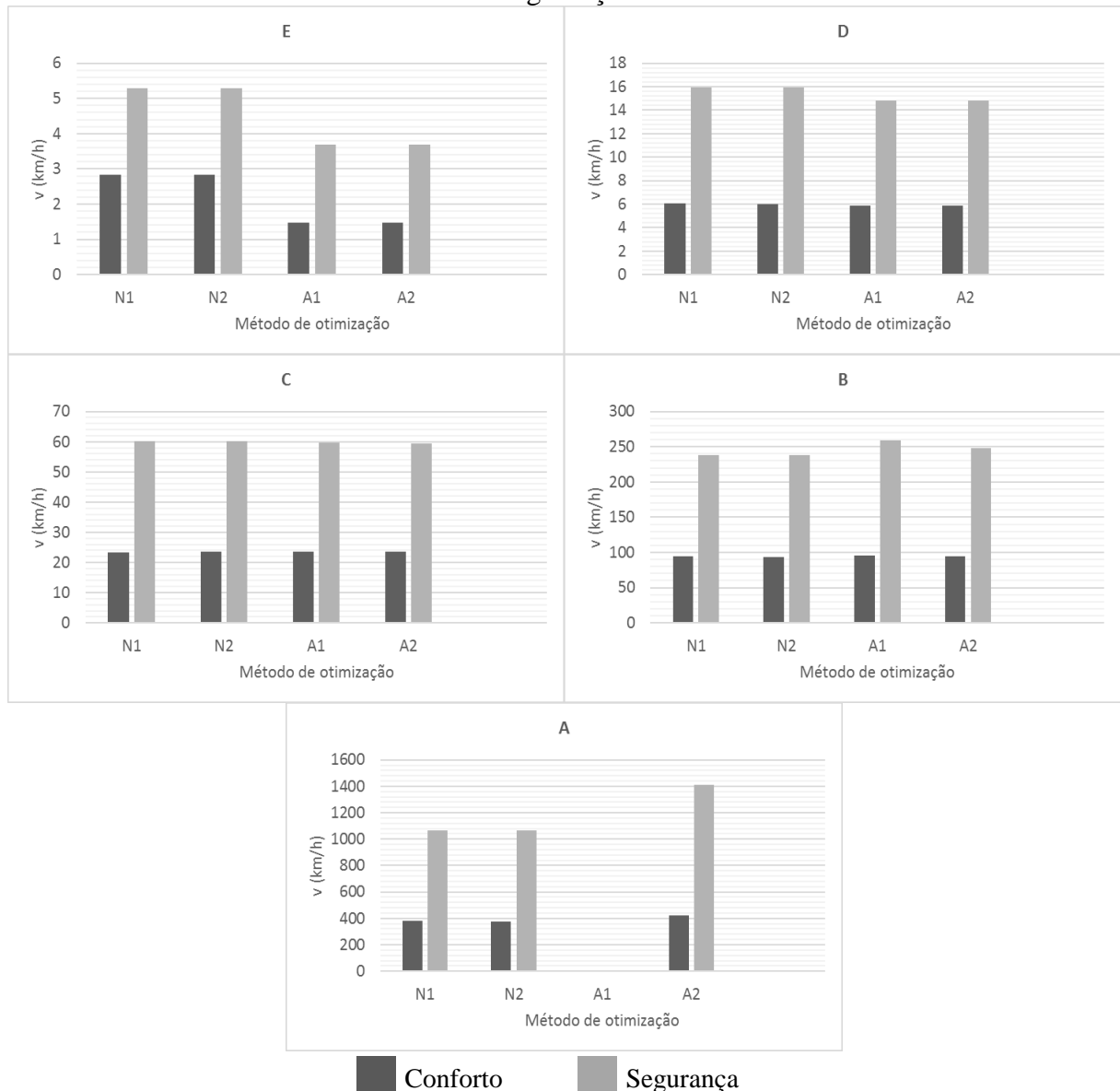
Fazendo o a análise com as novas características de referência, outra vez obtidas pela otimização usando o método A2 na condição C, temos:

$$\begin{cases} k_2 = 17300 \text{ N/m} , \\ c_2 = 1845 \text{ Ns/m} . \end{cases} \quad (73)$$

Os resultados podem ser vistos no Gráfico 5.

Mais uma vez A1 apresentou problemas, não atingiu nem os limites de conforto nem os de segurança na condição A, os valores das velocidades máximas tendem sempre ao limite superior, já nas demais condições o modelo se mostrou confiável. Na maior parte dos casos o método A1 se mostra muito bom, mas continua apresentando os maiores erros em altas velocidades.

Gráfico 5 – Resultados obtidos com novos valores de referência otimizados apenas para segurança.



Fonte: autor. Os valores podem ser encontrados na Tabela 5 do Apêndice C. Os valores das velocidades máximas obtidas pelo método A1 extrapolam na condição A, por isso não são mostradas no gráfico.

Na condição de melhora da segurança, os valores encontrados são bastante prejudiciais ao conforto, mas é importante lembrar que o modelo utilizado é bastante simplificado e desconsidera itens diretamente ligados ao conforto, como os assentos e a distância do passageiro aos eixos do veículo (ZHAO, 2017). Um outro componente bastante ligado ao

conforto é a variação da velocidade. Em vias urbanas as velocidades máximas geralmente acabam sendo bem maiores que as velocidades médias e isso tem um impacto benéfico direto no conforto. Os valores obtidos como limites de velocidade para conforto são muito mais próximos aos limites encontrados para velocidades médias iguais a esses valores que a velocidades máximas, sendo assim, passar momentaneamente desses limites não traz problema algum. O mesmo não pode ser dito das velocidades máximas encontradas para limites de segurança, pois até mesmo pequenos intervalos de tempo em velocidades acima do limite de segurança já são arriscados.

#### 4.4 Discursão dos resultados da otimização

Os métodos N1 e N2 serviram muito bem e demonstraram a eficácia da simplificação da função de sensibilidade proposta por Zuo (2003). Os valores com a simplificação acabam sendo ligeiramente mais conservadores, pois as velocidades máximas encontradas são quase sempre menores em N2, quando comparadas com N1. Os dois métodos têm pouca diferença quanto à demanda computacional, pois a simplificação da função de sensibilidade é uma melhora muito sutil perto dos métodos numéricos de resolução das integrais.

O fato de ter base totalmente vinculada à norma ISO 8608 acaba dando maior credibilidade ao método A2, já que o valor de  $\alpha$  tem uma fundamentação muito mais sólida que a usada em A1. Os valores de A1 e A2 foram muito próximos nas condições C, D e E, mas os erros mais altos de A1 nas condições A e B e os valores extrapolados em alguns casos na condição A, também foram muito importantes na análise de precisão. Mesmo as velocidades encontradas na condição A não sendo práticas para veículos rodoviários, garantir que o método funcione em situações mais extremas pode ajudar nos estudos de alguns casos, como trens de alta velocidade e aviões em situações de pouso e decolagem.

Os dois métodos analíticos são muito mais rápidos que os métodos numéricos e os valores de referência de  $c_2$  e  $k_2$  encontrados por A2 na condição C sempre tiveram boas respostas, mesmo nos métodos N1 e N2. As velocidades máximas nas condições A e E tem erros consideráveis quando comparados os resultados entre os métodos, mas o equilíbrio entre as velocidades de limite de conforto e limite de segurança, visto no Gráfico 3, comprovam a eficácia da otimização feita com A2. Depois de todas as características descritas, A2 pode ser considerado o método com melhor desempenho entre os analisados.



## 5 CONCLUSÃO

O uso de limites de segurança estipulados com base na probabilidade de perda do contato pneu-solo se mostrou uma boa alternativa diante da ausência de limites normatizados, pois os limites de velocidade encontrados em condições limitadas pela segurança, apresentaram valores coerentes e que acompanham os limites de velocidade encontrados em condições limitadas pelo conforto.

A aproximação simplificada da função de sensibilidade de corpo-inteiro se mostra uma ótima alternativa a partir das comparações entre os valores encontrados pelos dois métodos numéricos, N1 e N2, as velocidades se mantiveram sempre muito próximas em todas as condições testadas.

A modificação da equação de densidade espectral de potência garantiu o bom funcionamento dos dois métodos com base analítica, e aliada ao parâmetro  $\alpha$  de correção da função de densidade espectral de potência, como deduzido no Apêndice A, trouxe vantagem ao método A2, que teve erros menores que o método A1, onde  $\alpha$  tem um valor sugerido sem bases matemáticas tão sólidas.

Diminuição do tempo de processamento na otimização multiobjetivo, e a boa precisão do método A2 em uma faixa de velocidades que abrange a maior parte das condições de uso normais de um veículo, tornam A2 o método de melhor razão custo/benefício. Modelos mais complexos da suspensão podem se beneficiar ainda mais com isso, pois o aumento do número de variáveis e de objetivos torna os processos de otimização ainda mais demorados.

### 5.1 Trabalhos futuros

A ausência de dados que limitem melhor a constante elástica equivalente e o fator de amortecimento do pneu impossibilitam algumas melhoras, por tanto é possível dizer que o pneu deve ser mais estudado a fim de se obter resultados ainda melhores de otimização. O sistema de direção também pode influenciar bastante os valores tidos como ótimos, além de ter forte ligação com as características do pneu, por isso devem ser implementadas restrições e funções relevantes ao desempenho de tal sistema.

Análises do curso do amortecedor e da energia dissipada podem ser feitas com uma base de cálculos muito parecida com a usada neste trabalho. Os resultados podem trazer informações importantes para o projeto do amortecedor.

## REFERÊNCIAS

- BALACHANDRAN B., MAGRAB E. B., **Vibrations**, 2th ed. Cengage Learning, 2009.
- BARBOSA, R. S., **Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering – ABCM, 33, Brazil, 2011, 302-307.
- BERES, W., **Linear Models of Tyre Developing Properties**. Int. J. Vehicular Design 8(4), 1987, 485-503.
- DHARANKAR, C. S., HADA, M. K., CHANDEL, S., **Numerical generation of road profile through spectral description for simulation of vehicle suspension**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2016, 1-11.
- DIXON J., **The shock absorber handbook**. John Wiley & Sons; 2007.
- DODDS, C. J., ROBSON, J. D., **The Description of Road Surface Roughness**, Journal of Sound and Vibration, 31(2), 1973, 175–183.
- ELMADANY M.M., EL-TAMIMI A., **On a subclass of nonlinear passive and semi-active damping for vibration isolation**. Comput Struct 36, 1990, 921–931
- GENTA, G., **Motor Vehicle Dynamics: Modelling and Simulation**, Levrotto & Bella, Turin, Italy, 1997.
- GILLESPIE, T.D., **Fundamentals of Vehicle Dynamics**, Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, 1992.
- GOBBI M., MASTINU G., **Analytical description and optimization of the dynamic behaviour of passively suspended road vehicles**. Journal of Sound and Vibration 245, 2001, 457–481.
- GOENAGA, B., FUENTES, L., MORA, O., **Evaluation of the methodologies used to generate random pavement profiles based on the power spectral density: an approach based on the international roughness index**. Ing. Investig. **37**, 2017, 49–57.
- GRIFFIN, M.J., **Handbook of Human Vibration**, Academic Press, London, U.K., 1990.
- HÁC, A., **Suspension optimization of a 2-dof vehicle model using stochastic optimal control technique**. Journal of Sound and Vibration 100, 1985, 343–357.
- HEIBING, B., ERSOY, M. (Hrsg.): **Fahrwerkhandbuch**. ATZ/MTZ-Fachbuch. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2013.
- ISO 2631-1, **Mechanical vibration and shock – Evaluation of human response to whole-body vibration. Part I: General requirements**, International Standardization Organization, Geneva, Switzerland, 1997.

ISO 8608: **Mechanical Vibration–Road Surface Profiles–Reporting of Measured Data**, International Standardization Organization, Geneva, Switzerland, 1995.

JAZAR, R.N., **Vehicle Dynamics: Theory and Application**, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2008.

MASTINU, M., GOBBI, M., MIANO, C., **Optimal Design of Complex Mechanical Systems with Applications to Vehicle Engineering**, Springer Verlag, Berlin, Germany, 2006

MEIROVITCH, L., **Fundamentals of Vibrations**, McGraw-Hill, New York, 2001.

MILLIKEN W.F., MILLIKEN D.L., **Race Car Vehicle Dynamics**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, 1995.

MITSCHE, M., WALLENTOWITZ, H., **Dynamik der Kraftfahrzeuge**. Band B: Schwingungen, 4th ed., Springer-Verlag, Berlin, 2004.

MÚČKA, P., **Proposal of Road Unevenness Classification Based on Road Elevation Spectrum Parameters**, Journal of Testing and Evaluation, 44(2), 2016, 930–944.

MÚČKA, P., **Simulated Road Profiles According to ISO 8608 in Vibration Analysis**, Journal of Testing and Evaluation, 46(1), 2018, 405-418.

NEWTON, G.C., GOULD, L.A., KAISER, J.F., **Analytic Design of Linear Feedback Controls**, John Wiley & Sons, New York, 1957.

PACEJKA, H. B., **Tyre and Vehicle Dynamics**, Butterworth Heinemann, Oxford, U.K., 2002.

POPP K., SCHIEHLEN W., **Ground Vehicles Dynamics**. Springer Verlag, Berlin, Germany, 2010.

RAJAMANI, R., **Vehicle Dynamics and Control**, Springer, New York, 2009.

RAO, S. S., **Mechanical Vibrations**, 4th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.

SAYERS, M. W., GILLESPIE, T. D., AND PATERSON, W. D. O., **Guidelines for Conducting and Calibrating Road Roughness Measurements**, Technical Paper 46, The World Bank, Washington, DC, USA, 1986a.

SAYERS M. W., GILLESPIE, T. D., AND QUEIROZ, C., **The International Road Roughness Experiment: Establishing Correlation and a Calibration Standard for Measurements**, World Bank Technical Paper 45, The World Bank, Washington, DC, USA, 1986b.

SILVEIRA M., PONTES B.R. JR, BALTHAZAR J.M., **Use of nonlinear asymmetrical shock absorber to improve comfort on passenger vehicles**. Journal of Sound and Vibration 333, 2014, 2114–2129.

- SILVEIRA M, WAHI P, FERNANDES J.C.M., **Effects of asymmetrical damping on a 2 DOF quarter-car model under harmonic excitation**. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul.* 43, 2017, 14–24.
- TYAN, F., HONG, Y. F., SHUN-HSU, AND JENG, W. S., **Generation of random road profiles**, *Journal of Advanced Engineering*, 4(2), 2009, 1373–1378.
- VERROS G., NATSIAVAS S., PAPADIMITRIOU C., **Design optimization of quarter-car models with passive and semiactive suspensions under random road excitation**. *Journal of Vibration and Control* 11, 2005, 581–606.
- WEDIG W.V., **Digital Simulation of Road-Vehicle Systems**, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 27 (1), 2012, 82-87.
- WONG J.Y., **Theory of Ground Vehicles**, 3th ed. John Wiley & Sons, New York, 2001.
- YANG, S.P., CHEN, L.Q., LI, S.H., **Dynamics of vehicle-road coupled system**. New York: Springer jointly published with Science Press, 2015.
- ZHAO L.L., ZHOU C.C., YU Y. W., YANG F. X., **An analytical formula of driver RMS acceleration response for quarter-car considering cushion effects**, *Vehicle System Dynamics* 55(9), 2017, 1283-1296.
- ZUO, L., NAYFEH, S.A., **Low-Order Continuous-Time Filters for Approximation of the ISO 2631-1 Human Vibration Sensitivity Weightings**, *Journal of Sound and Vibration* 265, 2003, 459–465.

## APÊNDICE A – MODIFICAÇÕES NA FUNÇÃO DE DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

A escolha de uma forma equivalente da equação de densidade espectral que permita mais liberdade matemática trouxe problemas, pois as fontes apresentam divergências, além de geralmente não mostrarem dedução confiável de tal forma alternativa. Por isso se fez necessária a seguinte dedução:

A variância é definida como a integral da função de densidade espectral:

$$\sigma^2 = \int_{\Omega_{min}}^{\Omega_{max}} S(\Omega) d\Omega = \int_{\Omega_{min}}^{\Omega_{max}} S(\Omega_0) \left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{-2} d\Omega, \quad (1)$$

$$\sigma^2 = S(\Omega_0) \Omega_0^2 \left(\frac{1}{\Omega_{min}} - \frac{1}{\Omega_{max}}\right). \quad (2)$$

A forma alternativa a ser avaliada deve ter a estrutura de um filtro matemático que não permita que o valor da densidade espectral tenda ao infinito quando a frequência tende a zero. A estrutura da função assume uma forma já bastante utilizada:

$$S_z(\Omega) = \frac{\gamma\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2}. \quad (3)$$

A seguinte imposição é necessária para garantir a máxima eficácia do método é a garantia matemática de que as modificações na função não alteram os resultados:

$$\int_0^{+\infty} S_z(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(\Omega) d\Omega = \int_{\Omega_{min}}^{\Omega_{max}} S(\Omega) d\Omega. \quad (4)$$

Calculando a integral de  $S_z(\Omega)$ :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2} 2\pi \left(\frac{\gamma\alpha\sigma^2}{2\alpha \frac{1}{\Omega_0}}\right), \quad (5)$$

Desenvolvendo a igualdade, temos:

$$\frac{1}{2} 2\pi \left( \frac{\gamma\alpha\sigma^2}{2\alpha\frac{1}{\Omega_0}} \right) = S(\Omega_0)\Omega_0^2 \left( \frac{1}{\Omega_{min}} - \frac{1}{\Omega_{max}} \right). \quad (6)$$

Substituindo  $\sigma^2$  e fazendo as devidas simplificações chegamos ao seguinte resultado:

$$\gamma = \frac{4}{\Omega_0 2\pi}. \quad (7)$$

Para encontrar o valor de  $\alpha$  e preciso recorrer a mais um artifício matemático. O maior problema da equação convencional está nos valores das amplitudes obtidos em baixas frequências, mas as altas frequências podem ser consideradas um ponto em comum. Usando tal argumento podemos prosseguir.

para  $\Omega \gg \alpha$ , temos:

$$S_z(\Omega) \approx \frac{\gamma\alpha\sigma^2}{\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2}, \quad (8)$$

Logo:

$$S_z(\Omega) \approx S(\Omega). \quad (9)$$

Isso permite a seguinte igualdade:

$$\frac{\gamma\alpha\sigma^2}{\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2} = S(\Omega_0) \left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{-2}, \quad (10)$$

Simplificando:

$$\gamma\alpha\sigma^2 = S(\Omega_0), \quad (11)$$

Substituindo  $\sigma^2$ :

$$\gamma\alpha S(\Omega_0)\Omega_0^2 \left( \frac{1}{\Omega_{min}} - \frac{1}{\Omega_{max}} \right) = S(\Omega_0), \quad (12)$$

Simplificando:

$$\gamma\alpha\Omega_0^2\left(\frac{1}{\Omega_{min}} - \frac{1}{\Omega_{max}}\right) = 1. \quad (13)$$

Isolando  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{(\Omega_{min}\Omega_{max})}{(\Omega_{max} - \Omega_{min})} \frac{\pi}{2\Omega_0}, \quad (14)$$

Por definição:

$$\Omega_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad (15)$$

Logo:

$$\alpha = \frac{(\Omega_{min}\Omega_{max})}{(\Omega_{max} - \Omega_{min})} \pi^2. \quad (16)$$

As deduções feitas permitem escrever a função de densidade espectral na forma:

$$S_z(\Omega) = \frac{S(\Omega_0)}{\alpha^2 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2}. \quad (17)$$

Seguindo com esse modelo são necessárias algumas conversões para que os valores de entrada sejam os mesmos estabelecidos nos vários modelos de cálculos a serem comparados (WONG, 2001; DHARANKAR, 2016). Começando com a fatoração da frequência espacial, que permite usar os valores da frequência e da velocidade como variáveis de entrada na função.

$$\Omega = \frac{f}{v} = \frac{\omega}{2\pi v}, \quad (18)$$

$$S_z(\Omega) = \frac{S(\Omega_0)}{\alpha^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2} = \frac{S(\Omega_0)v^2}{(\alpha v)^2 + \omega^2}. \quad (19)$$

Conversão da frequência de referência:

$$\frac{rad}{m} = 2\pi \frac{ciclo}{m}, \quad (20)$$

$$\omega_0 = 2\pi\Omega_0 = 1 rad/m. \quad (21)$$

Conversão do índice de irregularidade do solo:

$$\frac{m^3}{rad} = \frac{1}{2\pi} \frac{m^3}{ciclo}, \quad (22)$$

$$S_z(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} S_z(\Omega_0). \quad (23)$$

Partindo da igualdade entre os diferentes métodos de expressar a função de densidade espectral é possível fazer uma calibração:

$$\int_0^{+\infty} S_z(\Omega) d\Omega = \int_0^{+\infty} S_z(\omega) d\omega, \quad (24)$$

$$\frac{S_z(\omega)}{S_z(\Omega)} = \frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{\Omega}{\omega}, \quad (25)$$

$$S_z(\omega) = \frac{1}{2\pi v} S_z(\Omega), \quad (26)$$

$$S_z(\omega) = \frac{1}{2\pi v} \frac{S_z(\Omega_0) v^2}{(\alpha v)^2 + \omega^2}, \quad (27)$$

$$S_z(\omega) = \frac{S_z(\omega_0) v}{(\alpha v)^2 + \omega^2}. \quad (28)$$

Obtemos assim o modelo de equação a ser usado nos cálculos analíticos.

Outra característica importante é a possibilidade de representar a função de densidade espectral da seguinte maneira:

$$S_z(\omega) = S_z(\omega_0) v \frac{1}{\alpha v + s} \frac{1}{\alpha v - s}. \quad (29)$$



## APÊNDICE B – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS INTEGRAIS USADAS NO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO

O método de James, Nichols e Phillips calcula integrais do seguinte tipo [NEWTON, 1957]:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(s)a(-s)}{b(s)b(-s)} ds, \quad (1)$$

Onde os polinômios são estruturados da seguinte maneira:

$$a(s) = a_{i-1}s^{i-1} + a_{i-2}s^{i-2} + \dots + a_1s^1 + a_0, \quad (2)$$

$$b(s) = b_i s^i + b_{i-1}s^{i-1} + \dots + b_1s^1 + b_0. \quad (3)$$

As deduções matemáticas desse método podem ser encontradas em Newton (1957). Para que seja possível calcular os valores de  $I$ , tais polinômios devem ser escritos em função das variáveis de entrada e das constantes disponíveis.

No caso do contato do pneu com o solo, onde  $a^{(4)}(s)$  é um polinômio do quarto grau e  $b^{(5)}(s)$  é um polinômio do quinto grau, temos:

$$a_0 = 0, \quad (4)$$

$$a_1 = 0, \quad (5)$$

$$a_2 = k_1 k_2 (m_1 + m_2), \quad (6)$$

$$a_3 = k_1 c_2 (m_1 + m_2), \quad (7)$$

$$a_4 = k_1 m_1 m_2, \quad (8)$$

$$b_0 = k_1 k_2 v \alpha, \quad (9)$$

$$b_1 = k_1 k_2 + k_1 c_2 v \alpha, \quad (10)$$

$$b_2 = k_1 c_2 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) v \alpha, \quad (11)$$

$$b_3 = (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) + c_2(m_1 + m_2)v\alpha, \quad (12)$$

$$b_4 = c_2(m_1 + m_2) + m_1 m_2 v\alpha, \quad (13)$$

$$b_5 = m_1 m_2. \quad (14)$$

O valor de  $I_5$  é definido para um polinômio com denominador de grau 5:

$$I_5 = \frac{1}{2\Delta_5} [a_4^2 n_0 + (a_3^2 - 2a_2 a_4) n_1 + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4) n_2 + (a_1^2 - 2a_0 a_2) n_3 + a_0^2 n_4]. \quad (15)$$

Onde:

$$n_0 = \frac{1}{b_5} (b_3 n_1 - b_1 n_2), \quad (16)$$

$$n_1 = -b_0 b_3 + b_1 b_2, \quad (17)$$

$$n_2 = -b_0 b_5 + b_1 b_4, \quad (18)$$

$$n_3 = \frac{1}{b_0} (b_2 n_2 - b_4 n_1), \quad (19)$$

$$n_4 = \frac{1}{b_0} (b_2 n_3 - b_4 n_2), \quad (20)$$

$$\Delta_5 = b_0 (b_1 n_4 - b_3 n_3 + b_5 n_2). \quad (21)$$

Seguindo a mesma lógica para o caso da aceleração percebida, onde  $a^{(7)}(s)$  é um polinômio do quarto grau e  $b^{(8)}(s)$  é um polinômio do quinto grau temos:

$$a_0 = 0, \quad (22)$$

$$a_1 = 0, \quad (23)$$

$$a_2 = 0,02108k_1 k_2, \quad (24)$$

$$a_3 = 0,02108k_1 c_2 + 989k_1 k_2, \quad (25)$$

$$a_4 = 989k_1c_2 + 80,03k_1k_2, \quad (26)$$

$$a_5 = 80,03k_1c_2, \quad (27)$$

$$a_6 = 0, \quad (28)$$

$$a_7 = 0, \quad (29)$$

$$b_0 = 5614k_1k_2v\alpha, \quad (30)$$

$$b_1 = 5614k_1k_2 + (5614k_1c_2 + 2412k_1k_2)v\alpha, \quad (31)$$

$$b_2 = 5614k_1c_2 + 2412k_1k_2 + [5614(m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2) + 2412k_1c_2 + 78,92k_1k_2]v\alpha, \quad (32)$$

$$b_3 = 5614(m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2) + 2412k_1c_2 + 78,92k_1k_2 + [5614c_2(m_1 + m_2) + 2412(m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2) + 78,92k_1c_2 + k_1k_2]v\alpha, \quad (33)$$

$$b_4 = 5614c_2(m_1 + m_2) + 2412(m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2) + 78,92k_1c_2 + k_1k_2 + [5614m_1m_2 + 2412c_2(m_1 + m_2) + 78,92(m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2) + k_1c_2]v\alpha, \quad (34)$$

$$b_5 = 5614m_1m_2 + 2412c_2(m_1 + m_2) + 78,92(m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2) + k_1c_2 + [2412m_1m_2 + 78,92c_2(m_1 + m_2) + (m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2)]v\alpha, \quad (35)$$

$$b_6 = 2412m_1m_2 + 78,92c_2(m_1 + m_2) + (m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2) + [78,92m_1m_2 + c_2(m_1 + m_2)]v\alpha, \quad (36)$$

$$b_7 = 78,92m_1m_2 + c_2(m_1 + m_2) + m_1m_2v\alpha, \quad (37)$$

$$b_8 = m_1m_2. \quad (38)$$

O valor de  $I_8$  é definido para um polinômio com denominador de grau 8:

$$\begin{aligned}
 I_8 = \frac{1}{2\Delta_8} [ & a_7^2 n_0 + (a_6^2 - 2a_5 a_7) n_1 + (a_5^2 - 2a_4 a_6 + 2a_3 a_7) n_2 \\
 & + (a_4^2 - 2a_3 a_5 + 2a_2 a_6 - 2a_1 a_7) n_3 \\
 & + (a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_0 a_6) n_4 \\
 & + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4) n_5 + (a_1^2 - 2a_0 a_2) n_6 + a_0^2 n_7 ] .
 \end{aligned} \tag{39}$$

Onde:

$$n_0 = \frac{1}{b_8} (b_6 n_1 - b_4 n_2 + b_2 n_3 - b_0 n_4) , \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 n_1 = & (b_0 b_7 - b_2 b_5) (-b_0 b_1 b_7 + b_0 b_3 b_5 + 2b_1^2 b_6) \\
 & + (b_3 b_7 - b_5^2) (b_0^2 b_5 + b_1 b_7^2) + b_1 b_3 b_8 (b_0 b_3 - b_1 b_2) \\
 & - b_1^2 b_8 (b_0 b_5 - b_1 b_4) \\
 & + (-b_2 b_7 + b_3 b_6 - b_4 b_5) (b_0 b_3^2 + b_1^2 b_4) \\
 & - b_1 b_6 (b_1^2 b_6 + 3b_0 b_3 b_5) - b_1 b_2 b_3 (b_3 b_6 - b_4 b_5) \\
 & + 2b_0 b_1 b_4 b_5^2 ,
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 n_2 = & (b_0 b_3 - b_1 b_2) (b_0 b_7^2 - b_1 b_5 b_8 - b_1 b_6 b_7 + b_2 b_5 b_7) \\
 & + (b_3 b_8 - b_4 b_7) (-b_0 b_1 b_5 + b_0 b_3^2 - b_1 b_2 b_3 + b_1 b_4^2) \\
 & - b_0 b_5 b_7 (b_0 b_5 - b_1 b_4) + b_1^2 b_8 (b_0 b_7 - b_1 b_6) ,
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 n_3 = & b_1 (b_1 b_8 - b_2 b_7)^2 \\
 & + (-b_5 b_8 + b_6 b_7) (b_0 b_1 b_5 - b_0 b_3^2 + b_1 b_2 b_3 - b_1 b_4^2) \\
 & + b_0 b_7^2 (-b_0 b_5 + b_1 b_4 + b_2 b_3) - 2b_0 b_1 b_3 b_7 b_8 ,
 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
 n_4 = & (-b_5 b_8 + b_6 b_7) (2b_0 b_1 b_7 - b_0 b_3 b_5 + b_1 b_2 b_5 - b_1^2 b_6) \\
 & + (-b_3 b_8 + b_4 b_7) (b_0 b_3 b_7 - b_1 b_2 b_7 + b_1^2 b_8) \\
 & - b_0^2 b_7^3 ,
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$n_5 = \frac{1}{b_0} (b_2 n_4 - b_4 n_3 + b_6 n_2 - b_8 n_1) , \tag{45}$$

$$n_6 = \frac{1}{b_0} (b_2 n_5 - b_4 n_4 + b_6 n_3 - b_8 n_2) , \tag{46}$$

$$n_7 = \frac{1}{b_0} (b_2 n_6 - b_4 n_5 + b_6 n_4 - b_8 n_3) , \tag{47}$$

$$\Delta_8 = b_0 (b_1 n_7 - b_3 n_6 + b_5 n_5 - b_7 n_4) . \tag{48}$$

## APÊNDICE C – TABELAS COM OS DADOS OBTIDOS NOS TESTES DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO

Tabela 1 – Comparação dos métodos de cálculos com valores de referência

	A		B		C		D		E	
	conf	Seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg
Múčka	>100	>100	>100	>100	31	59	8	15	3	4
N1	512,442	986,225	123,776	228,526	30,947	57,734	7,772	15,284	3,295	5,176
N2	504,819	986,225	122,274	228,526	30,570	57,734	7,678	15,284	3,266	5,176
A1	734,885	2048,419	126,378	242,794	30,644	57,086	7,644	14,173	1,911	3,541
A2	581,311	1198,820	124,192	235,402	30,603	56,854	7,643	14,167	1,911	3,541

Fonte: autor.

Tabela 2 – Resultados de velocidades para valores otimizados em cada condição de estrada por meio do método A2

	A		B		C		D		E	
	conf	seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg
k2-c2	16190 - 915,5		9630 - 913,5		8370 - 920,5		8270 - 921,5		8270 - 921,5	
N1	740,971	822,037	184,589	185,403	46,338	46,723	11,589	12,390	3,912	4,560
N2	736,423	822,037	182,461	185,403	45,833	46,723	11,463	12,390	3,879	4,560
A1	>>3600	1131,566	192,703	190,200	46,056	45,999	11,463	11,465	2,865	2,866
A2	912,071	912,071	187,394	187,394	45,925	45,925	11,462	11,462	2,865	2,865

Fonte: autor.

Tabela 3 – Resultados de velocidades para valores otimizados na condição de estrada C por meio do método A2

	A		B		C		D		E	
	conf	seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg
N1	776,176	757,563	185,618	184,495	46,338	46,723	11,588	12,390	3,912	4,560
N2	769,560	757,563	183,661	184,495	45,833	46,723	11,462	12,390	3,878	4,560
A1	>>3600	1005,275	193,220	188,940	46,056	45,999	11,462	11,465	2,865	2,866
A2	972,778	836,725	188,336	186,401	45,933	45,919	11,460	11,464	2,865	2,866

Fonte: autor.

Tabela 4 – Resultados de velocidades para valores de segurança máxima em cada condição de estrada, por meio do método A2

	A		B		C		D		E	
	conf	seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg
k2-c2	49590 - 2340		20680 - 1855		17300 - 1845		17050 - 1845		17030 - 1845	
N1	233,167	1290,963	92,294	237,548	23,712	60,310	6,073	15,616	2,841	5,287
N2	225,894	1290,963	91,215	237,548	23,491	60,310	6,012	15,616	2,833	5,287
A1	>>3600	>>3600	93,123	261,850	23,523	59,735	5,883	14,806	1,471	3,699
A2	245,956	1716,671	92,070	249,352	23,505	59,436	5,882	14,800	1,471	3,699

Fonte: autor.

Tabela 5 – Resultados de velocidades para valores de segurança máxima na condição de estrada C por meio do método A2

	A		B		C		D		E	
	conf	seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg	conf	seg
N1	379,825	1068,155	94,846	238,460	23,712	60,310	6,065	15,961	2,838	5,287
N2	375,155	1068,155	93,964	238,460	23,491	60,310	6,003	15,961	2,830	5,287
A1	>>3600	>>3600	95,846	259,511	23,523	59,735	5,873	14,806	1,468	3,699
A2	421,725	1412,724	94,811	248,599	23,505	59,436	5,873	14,800	1,468	3,699

Fonte autor.