



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA

TEORIAS DE *GAUGE* TOPOLOGICAMENTE MASSIVAS: UM ENSAIO  
SOBRE A TEORIA DE MAXWELL-BF

FORTALEZA

2020

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA

TEORIAS DE *GAUGE* TOPOLOGICAMENTE MASSIVAS: UM ENSAIO SOBRE A  
TEORIA DE MAXWELL-BF

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

---

- O49t Oliveira, Pedro Henrique Ferreira de .  
Teorias de *Gauge* topologicamente massivas: um ensaio sobre a teoria de Maxwell-BF / Pedro Henrique Ferreira de Oliveira. - 2020.  
117 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2020.  
Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.  
Coorientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.
1. Teorias de calibre. 2. Teorias de campos topológicas. 3. Formas diferenciais. 4. Chern-Simons. 5. Modelo BF. I. Título.

CDD 530

---

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA

TEORIAS DE *GAUGE* TOPOLOGICAMENTE MASSIVAS: UM ENSAIO SOBRE A  
TEORIA DE MAXWELL-BF

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 08/10/2020.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho  
(Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia  
Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a minha mãe, Joana D'arc de Oliveira, que sempre me apoiou em todas as minhas decisões ao longo dessa caminhada, sem ela este trabalho e muitos dos meus sonhos não se realizariam.

## AGRADECIMENTOS

Nesses dois anos de Mestrado, de muito estudo, esforço e empenho gostaria de agradecer - com certeza levado ao pecado do esquecimento - a algumas pessoas que me acompanharam e foram fundamentais para a realização de mais este sonho. Por isso, expresso aqui, através de sentimentos lapidados por palavras sinceras, um infinitesimal da importância que elas tiveram e ainda têm, nesta conquista.

Início os agradecimentos por meus pais, Raimundo Ferreira de Oliveira (*in memoriam*) e Joana D'arc de Oliveira, que sempre primaram pela minha educação, me incentivaram e acreditaram que eu superaria todos os obstáculos que se colocassem em meu caminho. Em especial, agradeço a minha mãezinha que dedicou 100% de sua energia e tempo em prol da minha educação e de meu irmão nos últimos 10 anos após o falecimento de nosso pai. Esta conquista também é sua!

Ao meu irmão caçula, Rodolfo Ferreira de Oliveira, por me servir de inspiração e por me fazer ter confiança em minhas decisões, por todas as brigas e discussões e, é claro, por todas as conversas descontraídas sobre animes e mangás.

Agradeço especialmente a minha noiva, Vanesca Almeida de Oliveira, o melhor presente que eu jamais poderia sonhar em possuir (no melhor sentido da palavra). Uma mulher virtuosa, atenciosa, guerreira e amiga, que me apoiou em todos os momentos difíceis - e não foram poucos -, por sempre compreender minha dedicação quase absurda aos estudos, mesmo significando ser privada da minha companhia e atenção. Eu te amo!

No cenário acadêmico agradeço inicialmente ao Professor Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho que sempre esteve disponível, com paciência e atenção, dedicando de seu valioso tempo para me orientar ao longo desse Mestrado. A orientação culmina com a defesa deste trabalho, mas a colaboração prosseguirá pelo doutorado e eventuais pesquisas.

Seria impossível não agradecer aos grandes professores da graduação que me apoiaram no desejo de ingressar no próximo nível acadêmico, dentre eles destaco: Dr. Michel Lopes Granjeiro, Dr. João Philipe Macedo Braga, Dra. Silvia Helena Roberto de Sena, Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima e Dra. Mylene Ribeiro Moura Miranda. Obrigado por acreditarem no meu potencial.

Gostaria de agradecer a todo o elenco de profissionais que convivi (dentro e fora de sala de aula) nesses anos de Mestrado, em especial aos doutores pelos quais tive a grande oportunidade de ser estudante, Dr. João Milton Pereira Júnior (Eletrodinâmica Clássica I), Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Teoria de Grupos e Teoria Quântica de Campos I), Dr. Carlos William de Araujo Paschoal (Mecânica Estatística I), Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Teoria Clássica de Campos) e Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Teoria Quântica de Campos II). É com uma satisfação da ordem do indescritível que posso afirmar que aprendi muito com vocês, obrigado!

Aos professores participantes da banca examinadora, Dr. Geová Maciel de Alencar Filho, Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante e Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima sou grato pelo tempo dedicado e pelas valiosas colaborações e sugestões para a melhoria desta dissertação e aperfeiçoamento de meus futuros trabalhos.

Agradeço também, a todos que um dia contribuíram direta ou indiretamente com a minha formação, aos membros do Laboratório de Gravitação, Modelos de Campos e Cordas (LabGmc<sup>2</sup>), antigo Laboratório de Relatividade e Investigações em Cordas e

Campos (LARICCA). Sou grato especialmente ao amigo Ícaro Daniel por todo o apoio nos momentos mais difíceis e sombrios do último semestre.

Aqui deixo também meus agradecimentos aos jovens Isael Pires, Marciano Rufino e aos irmãos Wellisson e Weslei Lima, pela moradia conjunta e ricas discussões sobre Física, nas mais variadas formas, uma vez que cada um a apreciava sob uma ótica distinta.

Agradeço a Jefferson Paixão, Adailton Azevedo e demais jovens do Departamento de Física da UFC pelas ricas discussões de corredor sobre Teoria de Campos e Física de um modo geral.

As plataformas online inSPIRE-HEP, Sci-Hub e Library Genesis por removerem todas as barreiras no caminho da Ciência!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradecimentos especiais ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará (UFC) pelo apoio logístico, especialmente agradeço à Secretária da Pós-Graduação, Rejane Ramos Coelho, por toda a paciência em solucionar minhas infinitas dúvidas.

Agradeço a todos os trabalhadores brasileiros que, através do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), financiaram minha bolsa de pós-graduação ao longo de todo o período.

Por fim, agradeço a você que está se dispondo a ler este trabalho para aprender um pouco comigo, pois foi pensando em você que me dispus a escrever em tantos detalhes, e é por saber das enormes dificuldades que a jornada do conhecimento demanda que eu te dedico um pensamento do físico teórico Richard Feynman, *“estude muito o que mais lhe interessa da maneira mais indisciplinada, irreverente e original possível”*. Por isso não desista mesmo quando não souber mais o que fazer, lembre-se que sempre existe alguém que pode estar se inspirando em você!

***Go beyond!***

*“Remembering that I’ll be dead soon is  
the most important tool I’ve ever  
encountered to help me make the big  
choices in life.*

*Because almost everything, all  
external expectations, all pride, all  
fear of embarrassment or failure,  
these things just fall away in the face  
of death, leaving only what is truly  
important.*

*Remembering that you are going to  
die is the best way I know to avoid the  
trap of thinking you have something  
to lose.*

*You are already naked.  
There is no reason not to follow your  
heart!”*

---

**Steve Jobs**

## RESUMO

Nesta dissertação de mestrado buscamos discutir, de modo claro, dialógico e sistemático as técnicas e consequências da inserção de termos massivos na teoria Eletromagnética de Maxwell. Inicialmente fazemos uma discussão do Eletromagnetismo usualmente trabalhado através de três linguagens matemáticas. Como exercício didático, abordamos o mecanismo de Proca como geração de massa ad-hoc, contextualizando-o no cenário da supercondutividade. Para alcançar os objetivos propostos inserimos um termo topologicamente massivo do tipo Chern-Simons, o que faz o Eletromagnetismo ganhar características distintas. Nestas teorias a dimensionalidade do espaço se restringe à quantidades ímpares e o fóton adquire massa, o que leva a lei de Coulomb a ter o seu alcance estritamente limitado em uma espécie de blindagem. O cerne do trabalho contém uma discussão completa da versão abeliana do modelo BF que, ao usar de tensores antissimétricos, constitui efetivamente uma generalização dimensional da teoria de Chern-Simons. Questões relacionadas a simetrias do modelo, redução dimensional e da dinâmica dos campos são discutidas em pormenores. Por fim, buscamos obter as soluções das equações de Maxwell massiva no caso estático, de modo a contextualizar e motivar o estudo da teoria de Maxwell-BF.

**Palavras-chave:** Teorias de calibre. Teorias de campos topológicas. Formas diferenciais. Chern-Simons. Modelo BF.

## ABSTRACT

In this master's thesis we seek to discuss, in a clear, dialogical and systematic way, the techniques and consequences of the insertion of massive terms in Maxwell's Electromagnetic theory. Initially, we discuss Electromagnetism, usually worked out in three mathematical languages. As a didactic exercise, we approach the Proca mechanism as an ad-hoc mass generation, contextualizing it in the scenario of superconductivity. To achieve the proposed objectives, we inserted a topologically massive term of the Chern-Simons type, which makes Electromagnetism gain distinct characteristics. In these theories, the dimensionality of space is restricted to odd amounts and the photon acquires mass, which leads Coulomb's law to have its range strictly limited in a kind of shielding. The core of the work contains a complete discussion of the Abelian version of the BF model, which, using antisymmetric tensors, effectively constitutes a dimensional generalization of the Chern-Simons theory. Issues related to model symmetries, dimensional reduction and field dynamics are discussed in detail. Finally, we seek to obtain the solutions to Maxwell's massive equations in the static case, in order to contextualize and motivate the study of Maxwell-BF theory.

**Keywords:** Gauge theories. Topological field theories. Differential forms. Chern-Simons. BF model.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Conjunto das simetrias mais recorrentes no estudo de <i>Física Teórica</i> separadas pelo caráter de suas transformações (contínuas e discretas). Fonte: Adaptado de Tung[9]. . . . .	18
Tabela 2 – Relação entre o Sistema Internacional de Unidades (SI) e o Sistema Gaussiano (SG) no <i>Eletromagnetismo</i> . Fonte: Adaptado de Neto[5]. . . . .	47
Tabela 3 – Simetrias e quantidades conservadas na Mecânica Lagrangiana. Fonte: Adaptado de Thornton e Marion[74]. . . . .	94
Tabela 4 – Funções de Green de alguns operadores diferenciais de segunda ordem com condições de contorno de Dirichlet, em que $H_0^{(1)}$ e $K_0$ são as funções de Henkel e Bessel (modificada). Adaptado de Arfken e Weber[22]. . . . .	100

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relação de desacoplamento das forças fundamentais que descrevem o Universo. Fonte: O autor. . . . .	19
Figura 2 – A relação entre o espaço dos vetores ( $\mathbb{V}$ ) e o espaço dos covetores ( ${}^*\mathbb{V}$ ) é dada pelo mapeamento $g_{\mu\nu}$ , denominado métrica. Fonte: O autor. . . . .	24
Figura 3 – Estrutura causal da <i>Relatividade Restrita</i> na qual os eventos $A$ e $B$ estão conectados por uma relação de causalidade, enquanto o evento $C$ é independente dos demais. Fonte: Adaptado de Neto[1]. . . . .	27
Figura 4 – Potencial de Coulomb de uma carga unitária $q = 4\pi$ (em azul) comparado ao potencial de Yukawa $\kappa = 10$ (em laranja) para efeitos de ilustração da blindagem que ocorre no cenário $\kappa \neq 0$ . Fonte: O autor. . . . .	60
Figura 5 – As linhas de fluxo magnético contornam o supercondutor esférico, haja visto $\vec{B}_0 = 0$ no seu interior devido à magnetização oriunda do efeito Meisner. Fonte: Matsushita[52]. . . . .	61
Figura 6 – Campo magnético gerado por uma corrente induzida sobre uma placa com densidade superficial de cargas $\rho = \rho(x, y)$ . Os pontos destacados delimitam a intersecção das linhas de campo com o plano, determinando um fluxo magnético. Fonte: O autor. . . . .	65
Figura 7 – Um dipolo é uma distribuição discreta de duas cargas de mesmo módulo, e sinal contrário mantidas à uma distância relativa entre si fixa no tempo. Fonte: O autor. . . . .	86

## LISTA DE SÍMBOLOS

$c$	Velocidade da luz no vácuo, $c \approx 3 \cdot 10^8 m/s$
$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$	Tensor contravariante de <i>rank</i> - $p$ ( $p, 0$ )
$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}$	Tensor misto do tipo ( $p, q$ )
$T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$	Tensor covariante de <i>rank</i> - $p$ ( $0, p$ )
$T_{(p)}$	Forma diferencial de <i>rank</i> $p$ , a $p$ -forma
$\wedge$	Produto exterior
$d$	Derivada exterior
$d^\dagger$	Coderivada exterior
$\Delta$	Operador de Laplace-Beltrami
$\bigwedge_p$	$p$ -forma de base
$\forall$	Para todo
$\mathbb{E}^D$ ou $(\mathbb{R}^D, \delta)$	Espaço euclidiano $D$ -dimensional
$\otimes$	Produto tensorial, ou produto direto
$\oplus$	Soma direta
$\delta_j^i$	Delta de Kronecker
$\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \cdot, \vec{\nabla} \times, \nabla^2$	Gradiente, divergente, rotacional e laplaciano
$\square$	D'Alembertiano
$*T_{(p)}$	<i>Dual</i> da $p$ -forma
$\mathcal{M}$	Variedade
$g^{\mu\nu}(x)$	Métrica do espaço-tempo geral
$\eta^{\mu\nu}(x)$	Métrica do espaço-tempo de Minkowski
$\Omega^p(\mathcal{M}_D, g)$	Subvariedade das $p$ -formas em $\mathcal{M}_D$
$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D}$	Símbolo de Levi-Civita de <i>rank</i> $D$
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Conjunto dos números naturais, reais e complexos, respectivamente
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais não nulos
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica no vácuo
$\mu_0$	Permeabilidade magnética no vácuo
$\mathcal{L}, \mathcal{H}$	Densidade lagrangiana, hamiltoniana
$\hbar$	Constante de Planck reduzida, $\hbar = h/2\pi$
$\equiv$	Lê-se da seguinte maneira: 'é definido como'
$G(\vec{x}, \vec{x}')$	Função de Green
$\delta(\vec{x} - \vec{x}')$	Delta de Dirac

## LISTA DE SIGLAS

CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
LabGmc <sup>2</sup>	Laboratório de Gravitação, Modelos de Campos e Cordas
LARICCA	Laboratório de Relatividade e Investigações em Cordas e Campos
UFC	Universidade Federal do Ceará
MC	Mecânica Clássica
MQ	Mecânica Quântica
MR	Mecânica Relativística
TQC	Teoria Quântica de Campos
TCC	Teoria Clássica de Campos
RR	Relatividade Restrita
MA	Mecânica Analítica
MP	Modelo Padrão das Partículas Elementares
SI	Sistema Internacional de Unidades
SG	Sistema Gaussiano de Unidades
HL	Sistema Heaviside-Lorentz de Unidades
TG	Transformação de Galileu
TL	Transformação de Lorentz
CS	Chern-Simons
TMGT	<i>Topological massive gauge theory</i> (Teoria de calibre topologicamente massiva)
BF	<i>Background field</i> (Campo de fundo)

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	17
<b>1.1</b>	<b>A Física Teórica e a descrição do Universo</b>	17
<b>1.2</b>	<b>O Modelo Padrão e a busca por unificação</b>	18
<b>1.3</b>	<b>Porque estudar o Eletromagnetismo?</b>	20
<b>1.4</b>	<b>Sobre as hipóteses e objetivos</b>	20
<b>1.5</b>	<b>Sobre a construção desta dissertação</b>	21
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA</b>	23
<b>2.1</b>	<b>Tensores</b>	23
<b>2.1.1</b>	<b>Definições e propriedades gerais</b>	23
<b>2.1.2</b>	<b>Tensores no Espaço-Tempo</b>	26
<b>2.2</b>	<b>Formas Diferenciais</b>	28
<b>2.2.1</b>	<b>Dualidade de Hodge</b>	32
<b>2.2.2</b>	<b>Cálculo Exterior</b>	34
2.2.2.1	Derivação em Formas Diferenciais	35
2.2.2.2	Integração de Formas Diferenciais	39
<b>2.2.3</b>	<b>Cálculo Funcional em p-formas</b>	41
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÕES DO ELETROMAGNETISMO DE MAXWELL</b>	42
<b>3.1</b>	<b>Formulação Vetorial</b>	42
<b>3.1.1</b>	<b>Descrição do problema fundamental</b>	42
<b>3.1.2</b>	<b>Equações de Maxwell e a conservação da carga elétrica</b>	43
<b>3.1.3</b>	<b>Tensor das tensões de Maxwell</b>	44
<b>3.1.4</b>	<b>Liberdade de gauge</b>	45
<b>3.2</b>	<b>Formulação Tensorial (covariante)</b>	47
<b>3.2.1</b>	<b>Covariância da teoria</b>	47
<b>3.2.2</b>	<b>Aspectos gerais</b>	49
3.2.2.1	Simetria de <i>Gauge</i>	49
3.2.2.1.1	Fixação de <i>Gauge</i>	50
3.2.2.2	Equação do campo do fóton	50
3.2.2.3	Invariantes da teoria	51
3.2.2.4	Solução geral da equação de Maxwell (no vácuo)	51
<b>3.3</b>	<b>Formulação em Formas Diferenciais</b>	52
<b>4</b>	<b>ELETROMAGNETISMO EM TEORIAS DE CAMPO</b>	55

4.1	Teoria de Maxwell . . . . .	55
4.1.1	Discussões teóricas, experimentais e conclusões iniciais . . . . .	57
4.2	Motivação inicial - o campo de Proca . . . . .	58
4.2.1	Potencial Elétrico e suas características . . . . .	59
4.2.1.1	Carga puntiforme na origem . . . . .	59
4.2.1.2	Caso sem fontes . . . . .	60
4.2.2	Aplicação da Teoria de Maxwell-Proca (MP) . . . . .	60
5	EFEITOS DA MASSA TOPOLÓGICA NA ELETRODINÂMICA . . . . .	63
5.1	Teoria de Chern-Simons . . . . .	63
5.1.1	Eletrodinâmica em (2+1)-dimensões . . . . .	63
5.1.2	Um comentário sobre a Eletrodinâmica em (4+1)-dimensões . . . . .	68
6	TEORIAS DE CAMPO TOPOLOGICAMENTE MASSIVAS: O MODELO BF . . . . .	70
6.1	Descrição do Modelo BF . . . . .	70
6.2	Modelo BF abeliano (3+1)-dimensional . . . . .	71
6.3	Redução dimensional . . . . .	72
6.3.1	Invariância de <i>gauge</i> em $(S_{BF})_{eff}$ . . . . .	74
6.4	A Teoria Maxwell-BF (3 + 1)-dimensional . . . . .	75
6.5	Obtenção das equações de movimento . . . . .	79
6.5.1	Equações de Maxwell-BF . . . . .	80
6.5.2	Conservação da carga e a dinâmica de $\varphi$ . . . . .	81
6.5.3	Solução geral das equações de Maxwell-BF . . . . .	82
6.6	Eletrostática na Teoria MBF . . . . .	82
6.6.1	A carga pontual . . . . .	84
6.6.2	A Lei de Gauss . . . . .	85
6.6.3	O dipolo elétrico e a condição de aproximação multipolar . . . . .	86
7	CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS . . . . .	89
7.1	Considerações Finais . . . . .	89
7.2	Perspectivas futuras . . . . .	89
	APÊNDICE A - FORMALISMO LAGRANGIANO DE CAMPOS . . . . .	91
A.1	Transição para o contínuo . . . . .	92
A.2	Teorema de Noether . . . . .	93
A.3	Simetria por translação no espaço-tempo . . . . .	94
A.3.1	O tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ do Eletromagnetismo . . . . .	95

	APÊNDICE B - ALGUMAS NOÇÕES MATEMÁTICAS . . .	97
B.1	Símbolo de Levi-Civita . . . . .	97
B.2	Teoria das Funções de Green . . . . .	99
B.2.1	Visão Geral . . . . .	99
B.2.2	Aplicação . . . . .	100
B.2.3	Cálculo da Função de Green para o fóton massivo . . . . .	100
	APÊNDICE C - DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS . . .	103
C.1	Relações de autodualidade . . . . .	103
C.2	Propriedades do cálculo exterior . . . . .	104
C.3	Cálculo Exterior em $\mathbb{E}^3$ . . . . .	108
	REFERÊNCIAS . . . . .	111

## 1 INTRODUÇÃO

“Se não tiver ninguém para continuar o que os outros fizeram, a morte de todos que lutaram por isso até agora terá sido em vão”

---

Eren Yeager (Hajime Isayama)

### 1.1 A Física Teórica e a descrição do Universo

O maior desafio de um físico teórico é formular uma teoria que seja conceitualmente consistente e comprovada experimentalmente, afinal uma teoria física deve estar de acordo com a Natureza [1]. Na tentativa de descrever os fenômenos naturais, diversas teorias foram construídas de forma hermética e desvinculada, cada uma com seu conjunto de premissas e limites bem estabelecidos.

A *Mecânica*, por exemplo, se divide em quatro teorias (*Mecânica Quântica*, *Mecânica Clássica*, *Mecânica Relativística* e a *Mecânica Quântica Relativística*) que se relacionam sobre duas características fundamentais (a dimensão,  $d$ , e velocidade,  $v$ , dos objetos envolvidos na descrição) [2]. Dependendo das condições do problema, mesmo a *Mecânica Clássica* (que é conceitualmente a mais ‘limitada’<sup>1</sup>) oferece uma descrição fiel aos problemas, como é o caso das situações cotidianas.

Com os limites das teorias bem estabelecidos é possível (na maioria dos casos) transitar entre as mesmas através de operações de limites ou por teoremas de conexão. Por exemplo, a *Relatividade Restrita* (RR) nos limites de baixa velocidade se torna a *Mecânica Clássica* [3] enquanto que na *Mecânica Quântica* o *Teorema de Ehrenfest* associa o valor esperado dos operadores quânticos às grandezas clássicas correspondentes [4].

Enquanto as leis físicas têm que ser verificadas experimentalmente, as leis matemáticas são demonstradas [5] de tal forma que a construção matemática é invariante sobre a gênese da teoria física e, muitas vezes, estabelece resultados que são verificados experimentalmente *a posteriori*.

Do ponto de vista pragmático a *Mecânica Analítica* (MA) é o alicerce da *Física Teórica* [6], haja vista que os fenômenos físicos podem ser completamente descritos conhecendo-se as funções lagrangiana ou hamiltoniana e, a partir delas é possível, via Princípio de Hamilton [7], obter as equações que governam a dinâmica do sistema.

---

<sup>1</sup>A *Mecânica Clássica* é mais ‘limitada’ no sentido de ser um caso particular das demais teorias.

Dependendo da natureza da configuração do sistema estudado é possível descrevê-lo através de suas simetrias, isto é, transformações que o deixam invariante. Matematicamente, este efeito é tal que as equações que descrevem o sistema mantém a mesma forma. Tais simetrias podem ser categorizadas de duas formas distintas, as denominadas contínuas sobre o espaço-tempo, e as discretas [8]. Ao longo desta dissertação os sistemas mais discutidos possuirão duas simetrias principais a invariância de Lorentz e a invariância de *gauge* (ou simetria de calibre), ambas simetrias contínuas do espaço-tempo. Um resumo das principais simetrias em *Física* consta na Tabela 1.

Simetria contínua	Simetria discreta
Translação no espaço: $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$	Transformação de paridade: $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$
Translação no tempo: $t \rightarrow t + \tau$	Inversão temporal: $t \rightarrow -t$
Rotação no espaço 3D: $x^i \rightarrow R_j^i(\theta, \varphi)x^j$	Translações discretas na rede
Transformação de Lorentz: $x^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu x^\nu$	Rotações discretas na rede
Transformação de <i>gauge</i> : $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$	Simetria de permutação das partículas

Tabela 1: Conjunto das simetrias mais recorrentes no estudo de *Física Teórica* separadas pelo caráter de suas transformações (contínuas e discretas). Fonte: Adaptado de Tung[9].

O estudo de simetrias se intensificou após a formulação do Teorema de Noether<sup>2</sup>, o qual associa a cada simetria contínua uma lei de conservação<sup>3</sup> [11], dando um caráter mais geométrico às propriedades físicas de determinados sistemas, como a conservação do momento linear total [9].

## 1.2 O Modelo Padrão e a busca por unificação

Atualmente sabe-se que a dinâmica do Universo é governada por quatro forças fundamentais: gravitacional, eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca. Acredita-se que essas forças, embora apresentem um problema de hierarquia<sup>4</sup>, sejam derivadas de uma teoria mais fundamental e única. Este era talvez o maior sonho de Einstein: construir um esquema amplo que unificasse todas as interações conhecidas (o *Eletromagnetismo* e a *Gravitação*) [13]. Einstein não obteve êxito e seu sonho foi adiado, até que seu propósito foi herdado por uma legião de seguidores.

Atualmente uma considerável parcela dos físicos teóricos dedica a sua vida e carreira ao objetivo de criar um modelo sistemático que aborde todas as interações do Universo, numa denominada “*Teoria do Tudo*”. Nesta teoria, a força fundamental

<sup>2</sup>Para uma breve revisão de *Mecânica Lagrangiana* e do Teorema de Noether, consulte o Apêndice A.

<sup>3</sup>Veremos, em capítulos posteriores, que a simetria de *gauge* estará associada a conservação da carga elétrica [10].

<sup>4</sup>O problema de hierarquia das forças fundamentais é a existência de uma diferença considerável na intensidade da força gravitacional com relação às outras três no cenário microscópico [12], ela é fraca demais!

na gênese do Universo conhecido se dividiu nas forças atualmente conhecidas, iniciando pelo desacoplamento da força gravitacional e seguindo as demais em um ordenamento semelhante ao representado na figura 1.

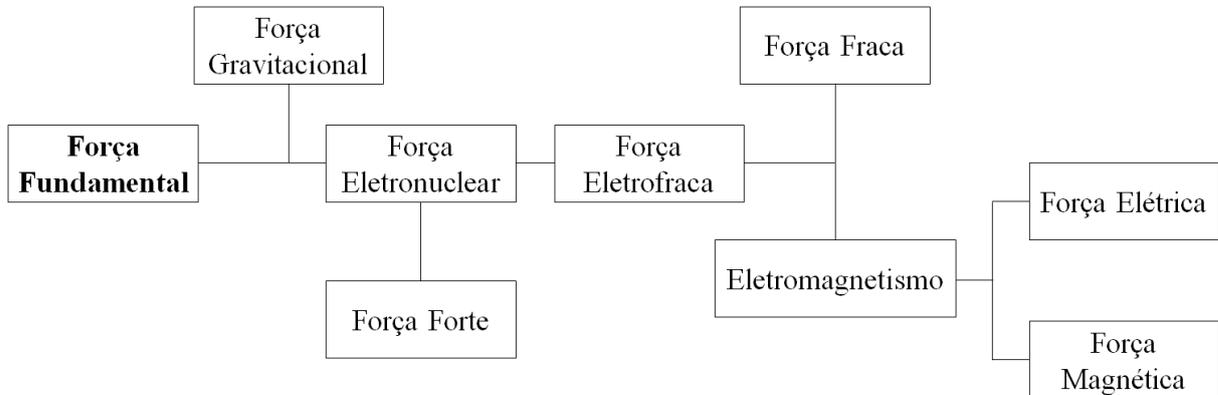


Figura 1: Relação de desacoplamento das forças fundamentais que descrevem o Universo. Fonte: O autor.

Compreender como a matéria e as partículas de força interagem no começo do Universo pode abrir uma margem para uma *Física* completamente diferente da atual, nos possibilitando uma compreensão mais fundamental do Universo [13], como ele efetivamente surgiu e qual a causa para essa força fundamental se fracionar nas conhecidas atualmente.

É natural que o processo de unificação dessas forças aconteça no sentido contrário ao desacoplamento. Inicialmente Maxwell conseguiu, através de ferramentas do cálculo vetorial, integrar as forças elétricas e magnéticas que até então eram compreendidas como forças distintas na descrição de fenômenos sem qualquer correlação, em uma força eletromagnética. Assim sendo, a teoria eletromagnética de Maxwell corresponde a uma das grandes unificações em *Física* [14].

No entanto, o processo de unificação encontrou uma dificuldade, novamente relacionada à *Gravitação* (ela é não renormalizável<sup>5</sup>! [1]). Entretanto, foi possível unificar as outras teorias em um modelo que explica não apenas a maneira com a qual as partículas de matéria (léptons, quarks e hádrons) interagem entre si, mas também dá um entendimento sobre como essa interação ocorre devido aos bósons vetoriais (partículas de força), além de uma explicação sobre a origem da massa das partículas (mecanismo de Higgs). Este modelo é conhecido por Modelo Padrão das partículas elementares (MP)<sup>6</sup> [1].

<sup>5</sup>Uma teoria física é dita renormalizável quando é possível, ao se redefinir os parâmetros de acoplamento dos campos, eliminar os infinitos das quantidades físicas na *Teoria Quântica de Campos* (TQC) [1].

<sup>6</sup>Uma leitura divertida sobre o assunto em nível inicial foi escrita por Woithe, Wiener e Veken[15]. Os autores fornecem uma explicação qualitativa dos termos da lagrangiana do Modelo Padrão e discutem a interpretação de cada termo com base nos diagramas de Feynman associados.

Embora ferramentas matemáticas permitam descrever todos os bósons vetoriais através dos tensores e as partículas de matéria pelos spinores, as forças eletromagnéticas são as únicas totalmente compreendidas [2].

### 1.3 Porque estudar o Eletromagnetismo?

Pela completeza e ‘simplicidade’ da teoria eletromagnética seria natural se questionar porque pesquisadores mantêm estudos sistemáticos nos dias atuais, sendo ela uma ‘teoria consolidada’. Embora o *Eletromagnetismo* seja, de fato, uma teoria sólida, existem variantes da teoria de Maxwell, como a denominada eletrodinâmica planar, que apresentam características completamente distintas daquela observada em um espaço-tempo  $(3 + 1)$ -dimensional.

Além disso, em uma teoria de campo (dentro de certos limites) é possível adicionar termos na ação que independem da métrica do espaço analisado, sendo portanto termos topológicos. Estes termos topológicos constituem uma forma alternativa ao Mecanismo de Higgs na geração de massa das partículas que mediam a força. Em especial, nas teorias de Maxwell com a adição de um termo de Chern-Simons que leva o fóton a adquirir massa e a Lei de Coulomb deixa de ser válida, tendo um alcance estritamente limitado.

Estudos recentes no assunto mostraram que os modelos de Maxwell-Chern-Simons e Auto-Dual admitem a mesma redefinição de campos [16], que o termo de Chern-Simons pode ser induzido por efeitos radioativos [17] e reduzido por simetrias [18]. Além disso, em 2019, Blasi e Maggiore[19] discutiram a *Teoria de Maxwell* com um termo de *gauge* topologicamente massivo do tipo BF para descrever a dualidade em condições de contorno, nessa condição as identidades de Ward (que descrevem as simetrias de *gauge* da teoria) foram quebradas, sendo necessário construir condições de fronteira mais gerais e uma álgebra de corrente não trivial na fronteira.

### 1.4 Sobre as hipóteses e objetivos

Uma vez estabelecidas suposições, como a massa do fóton ser nula e, consequentemente, o mesmo se propagar como uma onda com a velocidade da luz, todo o *Eletromagnetismo* de Maxwell foi originado, permitindo uma descrição de fenômenos naturais. Este é o caminho lógico: a partir de algum ‘se’ deve-se obter um ‘então’ logicamente consistente (pelo menos no aspecto teórico). Com efeito, mudanças na premissa inicial abrem possibilidades para teorias mais abrangentes da realidade e possibilitam uma compreensão mais geral do funcionamento do Universo.

A hipótese inicial desta pesquisa, sem dúvidas, foi o caráter limitado que a interação eletromagnética deva possuir, uma vez que a velocidade da luz agora é um limite inalcançável no cenário de velocidades para a propagação de informação. Com isto, mesmo uma partícula puntiforme deve ter seu potencial elétrico ‘blindado’.

Em contrapartida, uma teoria de fóton massivo deve apresentar características (simetrias) fundamentais observadas, como é o caso da conservação da carga elétrica (associada à simetria de *gauge*), fazendo com que a teoria de Maxwell-Proca (a primeira teoria de fóton massivo, baseada no termo de Klein-Gordon do campo escalar) deva obedecer uma condição de vínculo.

O objetivo geral desta dissertação é discutir o efeito de uma teoria de fóton massivo via geração de massa topológica e que preserve a simetria de calibre. Com isso, os objetivos específicos são:

- Discutir as ferramentas matemáticas necessárias;
- Apresentar os mecanismos de geração de massa dos campos vetoriais pelo modelo de Proca, suas propriedades fundamentais e aplicações;
- Examinar as Teorias de *Gauge* topologicamente massivas, em especial o modelo BF e suas simetrias fundamentais;
- Discutir a redução dimensional do modelo BF;
- Obter equações diferenciais que descrevam a dinâmica de sistemas de fóton massivo;
- Descrever a eletrostática generalizada;
- Discutir alguns problemas clássicos, com efeito de motivação da aplicabilidade do modelo.

### 1.5 Sobre a construção desta dissertação

Esta dissertação foi escrita com a tentativa de ser completa em si mesma, pois não são necessários extensivos requisitos externos, afinal aquilo que é necessário foi cuidadosamente inserido neste texto em um caráter de revisão nos primeiros capítulos e nos apêndices.

Para atingir os objetivos aqui propostos o trabalho foi dividido em capítulos, com organização própria e sequencial, de modo que é recomendada a leitura deste texto na ordem apresentada. No capítulo 2, intitulado “Fundamentação Matemática” discutimos alguns pontos fundamentais da teoria de tensores e conseqüentemente das formas diferenciais em uma construção lógica da evolução dos conceitos.

No capítulo 3, denominado “Formulações da Eletrodinâmica” discutimos inicialmente a teoria eletromagnética de Maxwell com seus principais resultados conhecidos do cálculo vetorial. Em seguida fizemos a transposição para a formulação covariante e por fim, a descrevemos através das  $p$ -formas.

O capítulo 4, descrito como, “Eletromagnetismo em Teorias de Campo” buscou introduzir os conceitos da *Mecânica Lagrangiana* no *Eletromagnetismo* de Maxwell, além de iniciar a discussão sobre fóton massivo através da discussão da teoria de Maxwell-Proca em uma aplicação na *Supercondutividade*.

O capítulo 5, “Efeitos da Massa Topológica na Eletrodinâmica”, buscou introduzir os chamados termos topologicamente massivos, como é o caso da teoria de Chern-Simons. Nele, abordamos a teoria de Maxwell-Chern-Simons no cenário  $(2 + 1)$ -dimensional, dando uma leve explanação sobre sistemas  $D = (4 + 1)$ .

Já no capítulo 6, denominado como “Teorias de Campo Topologicamente Massivas”, se constitui como o cerne da dissertação, a descrição geral de um modelo topologicamente massivo, invariante de *gauge* e sem a restrição dimensional da teoria de Chern-Simons. Neste capítulo, obtemos a dinâmica dos campos nas equações de Maxwell-BF e discutimos brevemente algumas modificações na *Eletrostática* através de problemas clássicos.

Por fim, o capítulo 7, intitulado como “Considerações e Perspectivas”, como o nome diz, resume aquilo que foi feito e o que se pretende desenvolver em trabalhos futuros no doutorado.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Serão apresentados neste capítulo, alguns pontos fundamentais de *Matemática* para uma compreensão completa do formalismo empregado nesta dissertação. Inicialmente será feita uma discussão de tensores (baseada nas referências [1, 5, 20]) em um caráter de revisão e, em seguida, uma discussão em maior profundidade das formas diferenciais (baseada, sobretudo, no livro “*Geometry, Topology and Physics*” do professor Nakahara[21]). Ao longo do capítulo serão feitos redirecionamentos para leituras complementares, quando necessário.

### 2.1 Tensores

Embora o estudo de vetores possua diversas características e interpretações na descrição de sistemas físicos, ocorre de muitas vezes serem necessários objetos de mais componentes, como é o caso das matrizes. Define-se então o tensor como um objeto matemático que generaliza a noção de vetor [11].

Muitos objetos de teorias físicas assumem um caráter tensorial, como é o caso dos tensores momento de inércia e energia-momento [22], este último consta demonstrado no formalismo lagrangiano como consequência do Teorema de Noether no Apêndice A e discutido para o caso do campo eletromagnético no capítulo 3 desta dissertação.

#### 2.1.1 Definições e propriedades gerais

Considere uma transformação de coordenadas, dada por<sup>1</sup> [5]

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \quad (2.1)$$

no entanto, se tomarmos a derivada de uma função escalar  $\phi$  com relação às coordenadas obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}. \quad (2.2)$$

Observe que os vetores de coordenadas e os vetores de derivada direcional se transformam de maneiras distintas, enquanto um se transforma com  $R$  o outro se transforma com  $R^{-1}$ , desde que o jacobiano da transformação não seja nulo [20].

---

<sup>1</sup>É importante deixar claro que, a partir daqui, será usada a convenção de Einstein, na qual um par de índices repetidos no mesmo termo de uma equação representa uma soma, isto é,

$$A_i B_i \equiv \sum_i A_i B_i.$$

Convenciona-se então, denominar duas representações, os objetos com índice sobrescrito recebem o nome de contravariantes, enquanto que objetos com índice subscrito são denominados covariantes<sup>2</sup> [23]. Essas duas representações sugerem que estes objetos matemáticos existem em espaços duais, de tal forma que deve existir uma relação de correspondência *dual*<sup>3</sup> entre ambos. Por isso o vetor gradiente é geralmente escrito como sendo

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.3)$$

com efeito, define-se um mapeamento que leva os objetos do espaço dos vetores ( $\mathbb{V}$ ) em seu correspondente no espaço dos covetores ( ${}^*\mathbb{V}$ ), este mapeamento denominado métrica  $g : \mathbb{V} \rightarrow {}^*\mathbb{V}$  (veja a figura 2), é tal que define-se uma operação de ‘abaixamento’ (‘levantamento’) de índices

$$A_i = g_{ij} A^j \quad \text{e} \quad A^i = g^{ij} A_j, \quad (2.4)$$

com  $g^{ij}$  sendo o inverso de  $g_{ij}$ , ou seja [1]

$$g^{ij} g_{jk} = g_k^i = \delta_k^i. \quad (2.5)$$

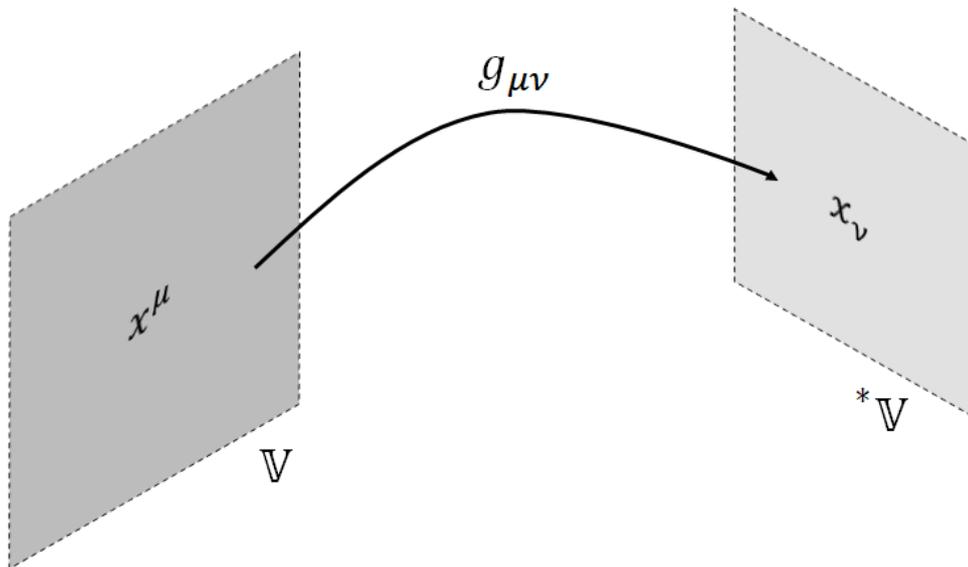


Figura 2: A relação entre o espaço dos vetores ( $\mathbb{V}$ ) e o espaço dos covetores ( ${}^*\mathbb{V}$ ) é dada pelo mapeamento  $g_{\mu\nu}$ , denominado métrica. Fonte: O autor.

Assim, em geral, um tensor de posto (ou *rank*)  $p + q$  com  $p$  índices contravariantes e  $q$  índices covariantes é um objeto do tipo  $(p, q)$  que se transforma do seguinte

<sup>2</sup>O termo covariante possui um outro significado, a invariância da forma. Diz-se que uma determinada teoria física é covariante se suas relações matemáticas permanecem invariantes sob uma transformação característica [1], isto é, se puderem ser escritas em termos de quadri-vetores e quadri-tensores. Como veremos no próximo capítulo, o *Eletromagnetismo* de Maxwell é covariante.

<sup>3</sup>Essa correspondência *dual* é similar à dos ‘kets’ e ‘bras’ da *Mecânica Quântica* de Dirac, de modo que é possível operar tensores em ambas as representações e obter escalares da teoria.

modo [20]

$$T'_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_q}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}(x) = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\lambda_2}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\lambda_p}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\rho_2}}{\partial x'^{\nu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\rho_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T_{\rho_1\rho_2\cdots\rho_q}{}^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p}(x), \quad (2.6)$$

onde cada índice se transforma como o do vetor.

Uma característica dos tensores é que seu produto gera um outro tensor de posto alterado, esta alteração depende exclusivamente do *rank* dos tensores envolvidos. Como exemplo, sejam dois tensores covariantes, de postos  $p$  e  $q$  respectivamente, assim

$$T'_{\mu_1\cdots\mu_p} W'_{\nu_1\cdots\nu_q} = \underbrace{\frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda_p}}{\partial x'^{\mu_p}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\rho_q}}{\partial x'^{\nu_q}}}_{p+q \text{ termos}} T_{\lambda_1\cdots\lambda_p} W_{\rho_1\cdots\rho_q} = S'_{\alpha_1\cdots\alpha_{(p+q)}}, \quad (2.7)$$

sendo o resultado um tensor covariante de *rank*  $p+q$ .

Além disso é possível reduzir a ordem de um tensor contraindo índices contravariantes com covariantes, em especial o produto de um tensor do tipo  $(p, q)$ , com  $\delta_{\mu_j}^{\nu_i}$  é um tensor de ordem  $p+q-2$ . Com essa característica podemos construir escalares (invariantes sob transformações de coordenadas) da teoria e definir uma generalização do produto escalar como sendo a contração de um tensor covariante com um tensor contravariante

$$A^i B'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A^j B_k = \delta_j^k A^j B_k = A^j B_j, \quad (2.8)$$

em que foi utilizada a relação de correspondência *dual* entre as duas representações, de tal forma que no espaço euclidiano [6]

$$x_i = \delta_{ij} x^j, \quad (2.9)$$

com  $\delta_{ij}$  sendo o tensor métrico deste espaço<sup>4</sup>.

Muitos dos tensores mais relevantes em *Física* são os objetos de dois índices, os quais podem ser associados à uma matriz. Uma característica muito útil desse tipo de tensor é que o mesmo pode ser decomposto como a soma de dois outros tensores, um simétrico e um antissimétrico<sup>5</sup>

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) = T_{(ij)} + T_{[ij]}, \quad (2.10)$$

no qual  $T_{(ij)}$  e  $T_{[ij]}$  são as partes simétrica e antissimétrica de  $T_{ij}$ , respectivamente. Esta

<sup>4</sup>Pela característica fundamental de  $\delta = \det(\delta_{ij}) = 1$  não há diferença entre as duas representações, explicando porque essa diferença não é importante para as teorias usuais. Isto não será verdade para os objetos do espaço de Minkowski!

<sup>5</sup>Simetria, neste sentido, está relacionada à permutação de dois índices do tensor, um tensor simétrico é tal que  $S_{ij} = S_{ji}$ , enquanto que um tensor antissimétrico é tal que  $A_{ij} = -A_{ji}$ .

propriedade é importante, pois a contração<sup>6</sup> de um objeto simétrico na permutação de dois índices, com um antissimétrico nos mesmos índices é identicamente nulo

$$S_{ij}A^{ij} = S_{ji}A^{ji} = -S_{ij}A^{ij} \Rightarrow S_{ij}A^{ij} = 0, \quad (2.11)$$

a primeira igualdade é verdade pois índices saturados (somados) podem ser renomeados. Uma consequência direta dessa característica é que a contração de dois tensores de *rank*-2, sendo que pelo menos um seja uma quantidade antissimétrica, faz com que apenas a parte antissimétrica do outro tensor contribua, o que reduz abruptamente o número de componentes independentes. Enquanto uma matriz antissimétrica de ordem  $N$  possui [22]

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2}, \quad (2.12)$$

componentes independentes, uma matriz simétrica possui os  $N$  termos da diagonal principal a mais.

### 2.1.2 Tensores no Espaço-Tempo

O estudo do espaço-tempo se centraliza nos objetos invariantes, como o elemento de linha, dado por [24]

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.13)$$

onde  $g_{\mu\nu}(x)$  é o tensor métrico<sup>7</sup>, e  $x$  é o conjunto de coordenadas do espaço-tempo<sup>8</sup>.

Um caso especial de espaço-vetorial no qual  $g_{\mu\nu}$  não depende das coordenadas é o espaço de Minkowski, no qual [25]

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.14)$$

onde a métrica dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{se } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{se } \mu = \nu = i, \text{ com } (i = 1, 2, 3) \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases}, \quad (2.15)$$

<sup>6</sup>Contração é o termo usado para a soma implícita em índices repetidos, seguindo a convenção de Einstein  $A_\mu B^\mu$  indica que há uma soma sobre todos os valores de  $\mu$ .

<sup>7</sup>Espaços vetoriais nos quais a métrica não depende das coordenadas do espaço-tempo são chamados espaços chatos (*flat*, do inglês), como é o caso do espaço vetorial em que vivem os objetos da *Relatividade Restrita*.

<sup>8</sup>É comum representar um espaço-tempo evidenciando o número de coordenadas tipo espaço adicionada do número de coordenadas tipo tempo, por exemplo o espaço de Minkowski é um espaço  $(3+1)$ -dimensional.

é denominada métrica de Bjorken-Drell<sup>9</sup>. Com isto, o elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.16)$$

com  $dx^0 = cdt$ . Fisicamente o elemento infinitesimal de linha é a entidade geométrica na variedade que conecta dois eventos, localizados por 4-vetores  $x^\mu$  [5]. Da forma como  $ds^2$  foi definido, em um gráfico que compreenda  $d\vec{r}$  versus  $cdt$  pode ser separado em três regiões [25]

$$\begin{cases} ds^2 > 0 & \text{tipo tempo,} \\ ds^2 < 0 & \text{tipo espaço,} \\ ds^2 = 0 & \text{cone de luz,} \end{cases} \quad (2.17)$$

essas condições relacionam as conexões existentes entre dois eventos quaisquer. A figura 3 esquematiza isto para uma dimensão espacial.

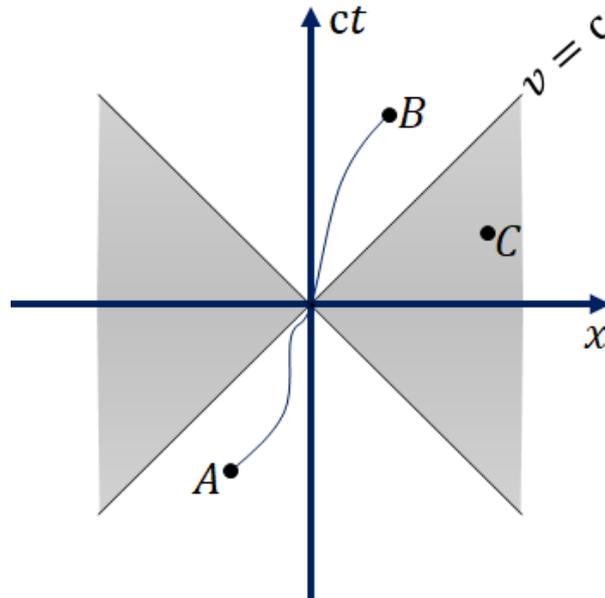


Figura 3: Estrutura causal da *Relatividade Restrita* na qual os eventos  $A$  e  $B$  estão conectados por uma relação de causalidade, enquanto o evento  $C$  é independente dos demais. Fonte: Adaptado de Neto[1].

A região sombreada corresponde a trajetórias no espaço-tempo (também denominadas linhas do universo) de partículas com  $v > c$  (correspondendo ao intervalo do tipo espaço) e por isso não podem estar conectadas por relações de causalidade, ou seja, não há comunicação entre os eventos devido a limitação na velocidade da luz. Por outro lado, as partículas massivas com  $v < c$  residem no interior do cone de luz<sup>10</sup> e estão sepa-

<sup>9</sup>A diferença de sinal entre coordenadas tipo tempo e tipo espaço, se dá para que todas as componentes sejam reais. Uma tentativa de fazer o espaço-tempo ter uma métrica positivo definida obriga a coordenada temporal à ser um número complexo, sendo tais métricas usualmente denominadas pseudo-euclidianas [1].

<sup>10</sup>O cone de luz corresponde as linhas de universo de partículas não massivas com  $v = c$  (por isso, cone

rados por um intervalo do tipo tempo, no qual é impossível tomar os eventos simultâneos, fazendo com que não seja possível modificar a ordem temporal dos eventos<sup>11</sup> via mudança de referencial.

Neste espaço-tempo, domínio da *Relatividade Restrita*, a transformação característica é dada pelas *Transformações de Lorentz* (TL) [3], as quais são o único conjunto de transformações não singulares no espaço chato que mantém a invariância de  $ds^2$  [24], de tal modo que preserva as propriedades de  $ds^2$  (2.17), preservando assim as relações de causalidade das partículas.

Além disso, neste espaço, quadrivetores contravariantes possuem componentes

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}), \quad (2.18)$$

enquanto que a sua representação covariante carrega um sinal de menos na parte espacial

$$A_\mu = (A_0, -\vec{A}). \quad (2.19)$$

## 2.2 Formas Diferenciais

Um problema natural que aparece no uso de tensores é que trocamos o *Formalismo Vetorial*, o qual exige o uso de uma grande quantidade de equações diferenciais acopladas para o estudo de sistemas de muitas partículas e graus de liberdade, por um outro que, muitas vezes o reduz a uma equação, mas os objetos envolvidos possuem vários índices e, conseqüentemente mais componentes (afinal os graus de liberdade físicos devem ser independentes da escolha do formalismo!). Por exemplo, um tensor covariante de *rank* 5 em um espaço com  $D = 10$ , isto é, o objeto  $T_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(x)$ , onde  $x$  é um ponto do espaço 10-dimensional, possui um total de  $10^5$  componentes. Neste sentido trabalhar com objetos com essa quantidade de componentes é impraticável, mesmo em sistemas constituídos de poucas partículas. Por conta disso, uma das maiores motivações de físicos, sobretudo dos que trabalham com *Teorias de Campo*, é simplificar ao máximo a descrição de um sistema, de modo a descrevê-lo com o mínimo de componentes, graus de liberdade e equações de movimento compactas para suas grandezas dinâmicas.

Como vimos, os tensores são objetos matemáticos que possuem uma determinada propriedade de transformação sobre algum grupo de simetria contínua<sup>12</sup>. Em uma abordagem algébrica (discutida no início deste capítulo) vimos que, se  $T$  é um tensor e

---

de luz), no qual  $ds^2 = 0$  [3].

<sup>11</sup>Se fosse possível se deslocar com  $v > c$  então seria realizável a mudança do ordenamento temporal, fazendo com que o efeito precedesse sua respectiva causa, violando o princípio da causalidade [25].

<sup>12</sup>Simetria contínua é qualquer conjunto de transformações que podem ser reduzidas à identidade por uma variação contínua de seus parâmetros [9].

$S$  um conjunto de transformações (por exemplo, uma rotação dos eixos de coordenadas), temos que

$$T' = ST, \quad (2.20)$$

aqui foram deliberadamente omitidos os índices envolvidos.

No entanto, é possível dar uma interpretação mais geométrica aos tensores através das formas diferenciais. O estudo das formas diferenciais de *rank*  $p$  (que serão denotadas ao longo deste texto como  $p$ -formas) é uma abordagem geométrico-diferencial dos tensores [26]. Assim como aconteceu com os tensores, foi com o advento da *Relatividade Geral* que a *Geometria Diferencial* adentrou à *Física* de modo definitivo.

Historicamente um dos precursores do estudo das formas diferenciais foi o matemático francês, Élie Cartan, que associou essa correspondência entre espaços vetoriais do tipo vetores de deslocamento (tensores contravariantes) e os operadores diferenciais direcionados (tensores covariantes) [27].

A motivação física para o estudo das formas está diretamente relacionada à natureza dos elementos fundamentais de medida serem objetos antissimétricos, um elemento de área é uma 2-forma, um elemento de volume será o correspondente à  $D$ -forma, o tensor de campo do eletromagnetismo  $F_{\mu\nu}$  também é uma 2-forma dada pelo rotacional de um potencial vetor (que é uma 1-forma).

Além disso, o uso de objetos antissimétricos reduz abruptamente o número de componentes para a descrição de um mesmo sistema físico, no qual a única quantidade simétrica realmente importante é a métrica do espaço-tempo.

Uma maneira conveniente de escrever as formas diferenciais é fazendo uso de que elementos infinitesimais de comprimento obedecem a mesma lei de transformação de vetores diretores (unitários) sob transformações multilineares, sendo portanto o conjunto  $\{dx^{\mu_i}\}$  uma base para o espaço das formas diferenciais [26]. Desse modo uma 1-forma é definida como

$$T_{(1)} = T_i dx^i, \quad (2.21)$$

onde  $T_i$  são as componentes de  $T_{(1)}$ , e denotaremos então que  $dx^i$  é a 1-forma de base.

Define-se uma forma diferencial de ordem  $p$ , a  $p$ -forma, representada por  $T_{(p)} \in \Omega^p(\mathcal{M}_D, g)$ , como sendo um tensor totalmente antissimétrico do tipo  $(0, p)$  em uma variedade<sup>13</sup>  $\mathcal{M}$  específica [21]. Com efeito, é necessário construir uma  $p$ -forma de base, como sendo uma generalização da 1-forma de base, e sendo totalmente antissimétrica na permutação de dois índices quaisquer. Para isto iremos definir o produto exterior

---

<sup>13</sup>Variedades são generalizações das ideias familiares sobre curvas e superfícies para objetos de dimensão arbitrária, em geral uma variedade  $\mathcal{M}$  é um espaço topológico que é homeomórfico (localmente) para  $\mathbb{R}^n$  [21].

(simbolizado por  $\wedge$ , *wedge*) como sendo a parte totalmente antissimétrica do produto tensorial de  $p$  elementos do tipo  $dx^{\mu_i}$ .

Uma 2-forma geral pode ser obtida através do produto tensorial<sup>14</sup> de dois vetores

$$T_{(2)} = T_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (2.22)$$

como, por definição,  $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ , podemos escrever

$$T_{(2)} = -T_{\mu\nu} dx^\nu \otimes dx^\mu, \quad (2.23)$$

de modo que podemos somar ambas as equações e obter

$$T_{(2)} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu), \quad (2.24)$$

onde iremos definir a 2-forma de base [26]

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu. \quad (2.25)$$

Por uma análise similar podemos definir a 3-forma de base

$$dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu + dx^\nu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\mu + dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\lambda - dx^\lambda \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\lambda - dx^\mu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\nu, \quad (2.26)$$

onde  $\otimes$  simboliza o produto tensorial.

Com isto, podemos definir uma expressão geral para uma  $p$ -forma qualquer como sendo [21]

$$T_{(p)} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \bigwedge_p, \quad (2.27)$$

onde

$$\bigwedge_p \equiv dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (2.28)$$

é a  $p$ -forma de base, e  $T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$  são as componentes da forma.

Da definição de uma forma diferencial ser um tensor totalmente antissimétrico de *rank*- $p$ , temos que o número de componentes independentes (em  $D$  dimensões) é dado pela combinação [28]

$$\binom{D}{p} = \frac{D!}{p! (D-p)!} \quad (2.29)$$

---

<sup>14</sup>O produto tensorial consiste em indexar o segundo objeto nas componentes do primeiro, de tal forma que o produto tensorial de duas matrizes quadradas,  $A$  de ordem  $n$  por  $B$  de ordem  $m$ , isto é  $A \otimes B$ , é uma matriz  $C$  de ordem  $n + m$  [20, 22].

levantando a condição que

$$p \leq D, \quad (2.30)$$

assim em  $D$ -dimensões, uma  $(D + 1)$ -forma é necessariamente nula. De fato, havendo  $(D + 1)$  ‘lacunas’ para serem preenchidas por  $D$  índices haverá necessariamente uma repetição, como uma  $p$ -forma é, por definição, um objeto totalmente antissimétrico, uma  $(D + \tilde{a})$ -forma é nula para todo  $\tilde{a} \in \mathbb{N}^*$  [29]. Além disso, uma  $D$ -forma possui apenas uma componente independente, se comportando assim como um escalar.

Com uma visão geral das formas diferenciais faz-se importante conhecer as maneiras de se trabalhar algebricamente com estes objetos. Iremos inicialmente definir o produto entre formas, de modo que o resultado seja necessariamente uma forma. Seja uma  $p$  e uma  $q$ -forma, seu produto exterior será tal que [21]

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} = \frac{1}{p! q!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} W_{\nu_1 \dots \nu_q} \underbrace{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q}}_{p + q \text{ termos}}, \quad (2.31)$$

isto é, uma  $(p + q)$ -formas desde que  $p + q \leq D$ . Portanto,

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} \equiv S_{(p+q)}. \quad (2.32)$$

Em um caso particular, se tomarmos o produto exterior entre duas 1-formas (vetores), o resultado obtido será uma 2-forma (tensor antissimétrico de *rank* 2), assim sendo seja  $D > 2$ , e  $u = u_i dx^i$  e  $v = v_j dx^j$ , o produto exterior é tal que

$$u_i v_j dx^i \wedge dx^j = T_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad (2.33)$$

onde  $T_{ij}$  deve ser então a parte completamente antissimétrica de  $u_i v_j$ , portanto

$$T_{ij} \equiv u_{[i} v_{j]} = \frac{1}{2} (u_i v_j - u_j v_i), \quad (2.34)$$

a notação  $u_{[i} v_{j]}$  indica que será tomada a parte completamente antissimétrica dos índices entre colchetes. Tomemos o caso particular do espaço euclidiano  $\mathbb{E}^3$ , definido pela métrica  $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$  com o conjunto  $\{dx^i\}$  constituindo uma base ortonormal, com efeito, sejam dois vetores definidos na variedade, as 1-formas,

$$u = u_i dx^i = u_1 dx^1 + u_2 dx^2 + u_3 dx^3, \quad (2.35)$$

$$v = v_j dx^j = v_1 dx^1 + v_2 dx^2 + v_3 dx^3, \quad (2.36)$$

o produto exterior será então dado por uma 2-forma  $w$ , tal que

$$w = \frac{1}{2} w_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad (2.37)$$

com  $w_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$ , como  $i, j = 1, 2, 3$ , deve-se ter

$$w_{ij} \doteq \begin{pmatrix} 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \\ u_2 v_1 - u_1 v_2 & 0 & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_1 v_3 - u_3 v_1 & u_3 v_2 - u_2 v_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

imediatamente percebe-se que as componentes da matriz associada à 2-forma contém as componentes do produto vetorial dos vetores definidos na variedade. Com efeito, o produto exterior generaliza a noção do produto vetorial<sup>15</sup> para formas diferenciais de qualquer ordem definidas em uma variedade arbitrária.

O produto exterior poderá assumir o caráter comutativo ou não, isto dependerá da ordem das formas envolvidas, tal que [26]

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} = (-1)^{pq} W_{(q)} \wedge T_{(p)}, \quad (2.39)$$

cuja demonstração consta no Apêndice C.2.

Como consequência direta dessa propriedade o produto exterior entre duas formas iguais é necessariamente nulo se  $p$  for ímpar, em particular para formas de ordem ímpar iguais vale a seguinte identidade

$$T_{(p)} \wedge T_{(p)} = 0. \quad (2.40)$$

A demonstração também consta no Apêndice C.2.

Claramente o produto exterior é associativo, tal que

$$(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) \wedge S_{(r)} = T_{(p)} \wedge (W_{(q)} \wedge S_{(r)}). \quad (2.41)$$

Esta demonstração será omitida.

### 2.2.1 Dualidade de Hodge

Observe ainda, que matematicamente vale a seguinte igualdade

$$\binom{D}{p} = \binom{D}{D-p}, \quad (2.42)$$

portanto, curiosamente uma  $p$ -forma e uma  $(D-p)$ -forma possuem a mesma quantidade de componentes independentes e, portanto, carregam as mesmas informações. Diz-se então que estes são tensores duais, onde a operação de dualidade faz o mapeamento do

<sup>15</sup>Sendo mais rigoroso, é o *dual* do produto exterior que generaliza de maneira imediata os conceitos do produto vetorial, retomaremos essa discussão quando apresentarmos o conceito de dualidade de formas diferenciais.

tipo  $*$  :  $\Omega^p(\mathcal{M}_D, g) \rightarrow \Omega^{D-p}(\mathcal{M}_D, g)$ . Com efeito, a ideia de que uma  $D$ -forma é, na realidade, um escalar fica mais clara, visto que seu *dual* é uma 0-forma.

Matematicamente a dualidade será representada pelo símbolo asterisco (*hodge*) à esquerda<sup>16</sup>. Portanto,

$$*T_{(p)} = W_{(D-p)}, \quad (2.43)$$

tal que efetivamente a operação de dualidade de uma  $p$ -forma é definida como [21]

$$*T_{(p)} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{1}{(D-p)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_D} \sqrt{|g|} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D}, \quad (2.44)$$

de modo que a invariância do elemento de volume é preservada.

Como a operação da dualidade é um isomorfismo espera-se que a sua atuação sequencial retorne o objeto original, isto é, que o *dual* do *dual* de uma forma seja a própria forma. Com uma dependência direta da dimensão da variedade e da forma considerada é possível mostrar (verifique o Apêndice C.1) que, em uma variedade  $(\mathcal{M}_D, g)$  riemanniana vale [21]

$$**T_{(p)} = (-1)^{p(D-p)} T_{(p)}. \quad (2.45)$$

Em uma situação de dimensão par e *rank* par para a forma diferencial observa-se o fenômeno da autodualidade, isto é

$$**T_{(p)} = T_{(p)}. \quad (2.46)$$

No caso de uma variedade de Lorentz, onde existem diferenças nas dimensões tipo tempo e das dimensões tipo espaço, no qual o determinante da métrica não é positivo definido, temos que a dupla atuação de *hodge* leva a (no caso em que  $\eta = -1$ )

$$**T_{(p)} = (-1)^{1+p(D-p)} T_{(p)}. \quad (2.47)$$

Esta relação também encontra-se demonstrada no Apêndice C.1.

Com efeito, para definir um mapeamento inverso a operação do *dual*, se define o operador inverso a *hodge*, isto é,  $*^{-1} : \Omega^{D-p}(\mathcal{M}_D, g) \rightarrow \Omega^p(\mathcal{M}_D, g)$ , como sendo [21]

$$*^{-1} \equiv (-1)^{p(D-p)} * \quad (2.48)$$

para uma variedade riemanniana, e

$$*^{-1} \equiv (-1)^{1+p(D-p)} * \quad (2.49)$$

para uma variedade lorentziana.

---

<sup>16</sup>Esta escolha serve para evitar a confusão com o símbolo utilizado para representar o complexo conjugado de um número do tipo  $z = a + ib$ , onde  $i$  é a partícula imaginária, tal que  $i^2 = -1$ .

O *dual* de uma forma diferencial de rank  $p$ , como já discutido, é uma  $(D - p)$ -forma, carregando em si as mesmas componentes. Verifiquemos então o que representa a quantidade  $*(u \wedge v)$ , com  $u, v \in \Omega^1(\mathbb{E}^3, \delta)$  os vetores dos quais o produto exterior resultou em uma matriz cujas entradas continham as componentes do produto vetorial usual. Explicitamente

$$\begin{aligned}
 *(u \wedge v) &= u_i v_j *(dx^i \wedge dx^j) \\
 &= \frac{1}{(3-2)!} u_i v_j \epsilon^{ij}{}_k dx^k \\
 &= u_i v_j \delta_{k\bar{k}} \epsilon^{ij\bar{k}} dx^k \\
 &= \epsilon_{ijk} u^i v^j dx^k = \vec{u} \times \vec{v}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Portanto, o *dual* do produto exterior generaliza os conceitos do produto vetorial usual<sup>17</sup>. Por questão de completeza, podemos estender os conceitos do produto escalar fazendo uso de um termo do tipo  $*(u \wedge *v) \in \Omega^0(\mathbb{E}^3, \delta)$

$$\begin{aligned}
 *(u \wedge *v) &= u_i v_j *(dx^i \wedge *(dx^j)) \\
 &= \frac{1}{2} u_i v_j *(\epsilon^j{}_{kl} dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l) \\
 &= \frac{1}{2} u_i v_j \delta^{jj'} \epsilon_{j'kl} \epsilon^{ikl} *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\
 &= u_i v_i = \vec{u} \cdot \vec{v},
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

onde foi usado que  $*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 1$ .

### 2.2.2 Cálculo Exterior

Assim como a definição dos tensores possibilita a generalização de diversos elementos, e toma escalares, vetores e matrizes como casos particulares, o estudo das formas diferenciais busca generalizar conceitos do cálculo vetorial, como gradiente, divergente, rotacional e laplaciano.

Dessa forma será possível, ter o análogo desses operadores para qualquer *rank* de um tensor, em uma dimensão arbitrária e que independa do sistema de coordenadas<sup>18</sup>.

<sup>17</sup>Note que,  $u \wedge v$  e  $*(u \wedge v)$  possuem as mesmas componentes, embora sejam objetos matemáticos inicialmente distintos.

<sup>18</sup>Os operadores vetoriais usuais, embora conhecidos, assumem formas diferentes de acordo com o sistema de coordenadas, visto dependerem dos elementos  $h_{ij}$  da métrica envolvida na transformação das coordenadas cartesianas. Por exemplo, o laplaciano em coordenadas cartesianas de uma função escalar  $f(x, y, z)$  é simplesmente  $\nabla^2 f(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 f$ , enquanto que em coordenadas polares esféricas,  $f(r, \theta, \phi)$  assume a seguinte forma [22]

$$\nabla^2 f(r, \theta, \phi) = r^{-2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + (r^2 \sin \theta)^{-1} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + (r^2 \sin \theta)^{-1} \partial_\phi^2 f.$$

Teremos então o cálculo vetorial no  $\mathbb{E}^3$  como um caso particular do cálculo exterior. Iremos, ao longo das próximas subseções, usar este caso particular ( $\mathbb{E}^3$ ) com efeito de motivação.

### 2.2.2.1 Derivação em Formas Diferenciais

Iremos então definir a operação da derivada exterior, com o símbolo  $d$ , tal que, o operador será dado por [28]

$$d \equiv dx^i \partial_i, \quad (2.52)$$

em que  $\partial_i$  é a derivada direcional usual (equação 2.3) que atuará sobre os coeficientes das formas. Seja  $T_{(p)}$ , uma  $p$ -forma geral (equação 2.27), a derivada exterior dela será

$$dT_{(p)} = \frac{1}{p!} (\partial_\rho T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}) dx^\rho \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (2.53)$$

observe então que a atuação da derivada exterior sobre uma  $p$ -forma a leva em uma  $(p+1)$ -forma, assim a derivada exterior é o mapeamento  $d : \Omega^p(\mathcal{M}_D, g) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{M}_D, g)$  [29]. O produto direto automaticamente requer a anti-simetrização do coeficiente.

Seja uma 0-forma,  $\phi$ , a atuação de  $d$  deverá então retornar uma 1-forma, isto é, um vetor

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i = T_i dx^i, \quad (2.54)$$

onde  $T_i = \partial_i \phi$  é o equivalente ao gradiente de uma função escalar no  $\mathbb{E}^3$

$$\vec{T} = \vec{\nabla} \phi. \quad (2.55)$$

Uma outra interpretação para este operador decorre da atuação do mesmo em vetores. Seja uma 1-forma,  $u = u_i dx^i$ , assim

$$du = (\partial_j u_i) dx^j \wedge dx^i \stackrel{!}{=} T_{ji} dx^j \wedge dx^i, \quad (2.56)$$

nesta situação devemos extrair a parte totalmente antissimétrica de  $\partial_j u_i$ , portanto

$$T_{ji} = \partial_{[j} u_{i]} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i - \partial_i u_j), \quad (2.57)$$

de modo que o coeficiente da 2-forma contém o análogo as componentes do rotacional<sup>19</sup> do vetor no  $\mathbb{E}^3$

$$\vec{T} = \vec{\nabla} \times \vec{v}. \quad (2.58)$$

O cálculo exterior possui algumas propriedades, que são generalizações de propriedades do cálculo usual, como a Regra de Leibniz (cuja demonstração consta no Apên-

<sup>19</sup>Analogamente ao verificado no produto vetorial, o rotacional é obtido por  $*du = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ .

dice C.2) da derivada de um produto de funções (neste caso, formas diferenciais) [29]

$$d(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) = (dT_{(p)}) \wedge W_{(q)} + (-1)^p T_{(p)} \wedge (dW_{(q)}). \quad (2.59)$$

Note que o caso  $p = q = 0$  retorna a conhecida regra da derivada do produto de funções.

Além disso, com base na própria definição da  $p$ -forma ser um objeto totalmente antissimétrico, é possível demonstrar que

$$d^2 T_{(p)} \equiv ddT_{(p)} = 0, \quad (2.60)$$

para toda  $p$ -forma, é o *Lema de Poincaré* [26] (demonstrado também no Apêndice C.2). Esta propriedade é denominada usualmente como *nilpotente*, isto é, potência nula, e pode revelar propriedades topológicas da variedade. Nas teorias de Yang-Mills, por exemplo, os operadores de simetria BRST são *nilpotentes*, de modo que o uso de formas diferenciais é imediato [1]. Além disso, qualquer forma exata, isto é que possa ser escrita como a derivada de uma outra forma, constitui uma forma fechada, isto é com derivada nula, no entanto a recíproca não é necessariamente verificada [28].

Para obter um análogo da divergência de um vetor iremos precisar definir uma outra maneira de derivar as  $p$ -formas, denotada coderivada, ou derivada exterior adjunta (simbolizada por  $d^\dagger$ ), e definida como

$$d^\dagger \equiv (-1)^{Dp+D+1} *d*, \quad (2.61)$$

se a variedade for riemanniana [21]. No caso de uma variedade de Lorentz, a definição se torna

$$d^\dagger \equiv (-1)^{D(p+1)} *d*. \quad (2.62)$$

A escolha de se definir a coderivada com o símbolo  $\dagger$  (*dagger*) é tomada pela similaridade à dos operadores de destruição  $a$  (que leva um auto-estado de energia  $|n\rangle$  em um estado  $|n-1\rangle$ ) e criação  $a^\dagger$  (que tem o efeito contrário) do oscilador harmônico da *Mecânica Quântica*. Assim, enquanto que a derivada aumenta em uma unidade a ordem da forma, a coderivada diminui em uma unidade o *rank* da mesma, de modo que  $d^\dagger : \Omega^p(\mathcal{M}_D, g) \rightarrow \Omega^{p-1}(\mathcal{M}_D, g)$ . Para ver isto, tomemos uma  $p$ -forma,  $T_{(p)} \in \Omega^p(\mathcal{M}_D, g)$ , assim

$$\begin{aligned} d^\dagger T_{(p)} &= (-1)^{Dp+D+1} *d*T_{(p)} = (-1)^{Dp+D+1} *d S_{(D-p)} \\ &= (-1)^{Dp+D+1} *W_{(D-p+1)} = (-1)^{Dp+D+1} Q_{(p-1)}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

da definição da coderivada, temos imediatamente que vale o Lema de Poincaré [26]

$$(d^\dagger)^2 T_{(p)} \equiv d^\dagger d^\dagger T_{(p)} = 0, \quad (2.64)$$

além disso, vê-se diretamente que a atuação da coderivada sobre um escalar é necessariamente nula, isto é

$$d^\dagger T_{(0)} = (-1)^{D+1} *d *T_{(0)} = (-1)^{D+1} *dS_{(D)} = 0. \quad (2.65)$$

O esperado da atuação da coderivada sobre uma 1-forma é que resulte em uma 0-forma, uma vez que a divergência de um vetor é um escalar. Assim sendo, seja  $v = v_i dx^i$ , é possível mostrar (consulte o Apêndice C.3) que, a menos de um sinal, a coderivada no espaço euclidiano tridimensional se realiza como a divergência de um vetor

$$d^\dagger v = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \quad (2.66)$$

Até aqui não seria realmente necessário definir a coderivada, pois a derivada exterior de uma 2-forma em  $\mathbb{E}^3$  já produz a noção da divergência de um vetor [28], no entanto a definição da coderivada da forma que a fizemos neste texto possibilita uma visão mais geométrica em analogia direta ao cálculo vetorial usual.

Das definições apresentadas como generalizações dos operadores diferenciais é possível demonstrar facilmente todas as propriedades do cálculo vetorial, de tal modo que como exercício didático destacaremos explicitamente duas propriedades imediatamente obtidas pelo Lema de Poincaré [30],

- Seja  $\phi \in \Omega^0(\mathbb{E}^3, \delta)$ ,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = (*d)d\phi = *d^2\phi = 0, \quad (2.67)$$

logo, todo gradiente é irrotacional.

- Seja  $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{E}^3, \delta)$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\alpha}) = *d^{**}d\alpha = *d^2\alpha = 0, \quad (2.68)$$

portanto, todo rotacional é solenoidal.

Ao longo desta seção definimos dois operadores, os quais generalizam as noções principais do cálculo vetorial para formas diferenciais arbitrárias, a derivada exterior carrega em sua definição o gradiente e o rotacional, e a coderivada exterior possui a finalidade do divergente. No cálculo diferencial, o quarto operador, denominado laplaciano possui uma característica de não modificar a natureza do objeto o qual atua<sup>20</sup>, o laplaciano de

<sup>20</sup>Tomamos neste caso o sistema cartesiano  $\mathbb{E}^3$ , mas esta característica independe do sistema de coordenadas.

um escalar  $f(x, y, z)$  é um escalar

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2}, \quad (2.69)$$

enquanto que o laplaciano de um vetor  $\vec{v}(x, y, z)$  também é um vetor

$$\nabla^2 \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial^2 \vec{v}(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}(x, y, z)}{\partial z^2}. \quad (2.70)$$

Assim, para completar a analogia, devemos construir um operador que não altere a ordem da forma. Vimos que  $d$  aumenta em uma unidade a ordem, enquanto que  $d^\dagger$  abaixa em uma unidade, portanto a atuação sequencial desses operadores mantém  $p$  invariante em uma  $p$ -forma, isto é,  $\Delta : \Omega^p(\mathcal{M}_D, g) \rightarrow \Omega^p(\mathcal{M}_D, g)$ . Define-se então o operador de Laplace-Beltrami como sendo [31]

$$\Delta \equiv (d + d^\dagger)^2 = d^\dagger d + dd^\dagger. \quad (2.71)$$

Note que, devido a presença da codiferencial, o operador de Laplace-Beltrami carrega as informações da métrica que define a variedade, sendo então uma generalização do laplaciano não apenas em espaços *flat*, mas também em espaços curvos [21].

Esta maneira de se definir este operador evita que sua atuação sobre um escalar (e sobre uma  $D$ -forma) seja identicamente nula. Seja a 0-forma  $\phi$ , no  $\mathbb{E}^3$ , assim

$$\Delta \phi = (d^\dagger d + dd^\dagger) \phi, \quad (2.72)$$

como  $d^\dagger \phi = 0$  obtemos (procedimentos constam no Apêndice C.3) que

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi, \quad (2.73)$$

sendo então o Operador de Laplace-Beltrami atuando em uma 0-forma o equivalente ao laplaciano de uma função escalar em um sistema tridimensional.

Por questões de completeza analisemos a atuação de  $\Delta$  sobre uma 1-forma, pois neste caso nenhuma parcela do operador irá se anular como aconteceu no caso da função escalar. Seja assim, o vetor  $\vec{v}$ , representado por  $v = v_i dx^i$ , desejamos obter

$$\Delta v = (d^\dagger d + dd^\dagger) v_i dx^i, \quad (2.74)$$

assim, mostra-se (consulte o Apêndice C.3) que a atuação do operador de Laplace-Beltrami sobre um vetor é exatamente, a menos de um sinal, o seu laplaciano no espaço euclidiano tridimensional

$$\Delta v = -\nabla^2 \vec{v}. \quad (2.75)$$

Além disso, uma  $p$ -forma ( $T$ ) é dita ser harmônica se satisfizer duas condições simultâneas, ser fechada ( $dT = 0$ ) e ser cofechada ( $d^\dagger T = 0$ ) [29], portanto

$$\Delta T = 0. \quad (2.76)$$

### 2.2.2.2 Integração de Formas Diferenciais

Assim como o conceito de diferenciabilidade foi estendido para o estudo das formas diferenciais, buscaremos compreender o sentido da integração nas mesmas e quais as principais relações envolvidas.

Se tomarmos a base de uma  $D$ -forma poderíamos estabelecer um volume associado (este volume é necessário para se fixar a integração sobre  $\mathcal{M}$ ), no entanto, para que um elemento de volume seja invariante sobre uma transformação de coordenadas<sup>21</sup> é preciso tomar um fator multiplicativo relacionado à métrica (ou melhor, ao determinante da métrica)<sup>22</sup> envolvida

$$\Omega_{\mathcal{M}} \equiv \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^D, \quad (2.77)$$

de modo que o volume é obtido ao se integrar sobre toda a variedade<sup>23</sup>.

A noção de produto interno se resume à uma operação entre objetos tal que seu resultado seja um escalar. Na análise tensorial, o produto interno é dado pela contração de um tensor contravariante por um covariante, com a mesma quantidade de índices [11]. Da definição do produto exterior, podemos estender esse conceito para as formas diferenciais. Sejam uma  $p$  e uma  $q$ -forma, o resultado dessa operação possui dimensão  $p + q$ , portanto, basta tomarmos isto como sendo igual à dimensão  $D$  da variedade e ao integrarmos teremos um escalar. Para isto,  $q = D - p$ , sendo este o *dual* da  $p$ -forma. Assim, a  $D$ -forma, será obtida pelo seguinte produto de  $p$ -formas

$$T_{(p)} * W_{(p)} \equiv T_{(p)} \wedge^* W_{(p)} = S_{(D)}. \quad (2.78)$$

Por cálculo explícito temos que [21]

$$T_{(p)} * W_{(p)} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_p} W^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_p} \Omega_{\mathcal{M}}, \quad (2.79)$$

<sup>21</sup>É fundamental que o elemento de volume seja invariante por uma transformação de coordenadas, para que ao ser integrado sempre resulte no mesmo valor numérico de volume que é, fisicamente, um invariante.

<sup>22</sup>Para uma discussão mais aprofundada no assunto consulte Manfredo [27], sessão 1.2.

<sup>23</sup>Aqui toma-se por hipótese de  $\mathcal{M}$  ser orientável para que o volume não troque de sinal.

desta expressão é diretamente visto que este produto é comutativo, isto é

$$T_{(p)} * W_{(p)} = W_{(p)} * T_{(p)}. \quad (2.80)$$

Como resultado de que  $T_{(p)} * W_{(p)}$  é uma  $D$ -forma, sua integração sobre  $\mathcal{M}$  é bem definida, de modo que definimos o produto interno como sendo [26]

$$(T, W) \equiv \int_{\mathcal{M}} T_{(p)} * W_{(p)} = \frac{1}{p!} \int_{\mathcal{M}} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} W^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \Omega_{\mathcal{M}}. \quad (2.81)$$

O produto interno possui a propriedade de comutatividade

$$(T, W) = (W, T). \quad (2.82)$$

Uma outra relação de “comutatividade” pode ser derivada quando a variedade possui algumas condições. Seja  $(\mathcal{M}_D, g)$  uma variedade riemanniana, compacta, orientável sem um contorno e  $T_{(p)} \in \Omega^p(\mathcal{M})$ ,  $W_{(p-1)} \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})$  é possível mostrar (consulte no Apêndice C.2) que [26, 30]

$$(dW, T) = (W, d^\dagger T). \quad (2.83)$$

Ocorre, no entanto, de que em uma variedade de Lorentz a demonstração sofre sutis alterações<sup>24</sup>, mas a identidade acima é satisfeita, sendo uma propriedade de qualquer variedade.

Como consequência dessa propriedade, o Operador de Laplace-Beltrami é, em uma variedade riemanniana, um operador positivo definido, de tal maneira que seja  $T \in \Omega^p(\mathcal{M}_D, g)$ , então

$$\begin{aligned} (T, \Delta T) &= (T, d^\dagger dT) + (T, dd^\dagger T) \\ &= (dT, dT) + (d^\dagger T, d^\dagger T) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Isto não é necessariamente válido para uma variedade lorentziana.

Embora o tensor métrico seja o objeto fundamental para a descrição de uma variedade, é possível estabelecer estruturas diferenciáveis independente da existência da mesma, desde que seja possível ter a noção de vetor, uma vez que ao se definir a topologia de um conjunto de pontos é factível estabelecer a noção de vizinhança e, com isso, definir as cartas que definem a variedade [21]. A partir da variedade é possível estabelecer conexões (curvas) entre os pontos, o que leva diretamente ao conceito de vetor tangente que, em essência, carrega em si a noção de alguma estrutura diferencial [27]. Este tipo de

<sup>24</sup>Esta demonstração será omitida por ser similar à feita para a variedade riemanniana.

teoria, na qual a presença da métrica não é fundamental é chamada de ‘Teoria de Campos Topológica’, na qual a dinâmica de um campo não precisa de uma métrica associada, sendo portanto uma teoria mais fundamental. Nos capítulos 5 e 6 discutiremos algumas teorias topológicas de campos como é o caso da teoria de Chern-Simons e a teoria BF.

### 2.2.3 Cálculo Funcional em $p$ -formas

Em geral, as formas diferenciais dependem do mapeamento da variedade, de modo que  $A_{(p)}(x)$ , onde  $x$  são os pontos da variedade  $(\mathcal{M}_D, g)$ . O conceito de cálculo funcional se mostra relevante sobretudo para extrair as equações de movimento que descrevem a dinâmica das formas envolvidas em determinado sistema físico. Sejam  $A(x)$  e  $B(x)$ ,  $p$ -formas em uma variedade plana, e usando (equação 2.81)

$$(A_{(p)}, B_{(p)}) = \int_{\mathcal{M}} A_{(p)}(x) \wedge^* B_{(p)}(x) = \int \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) B^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) d^D x, \quad (2.85)$$

se tomarmos a derivada funcional com relação à  $A_{\nu_1 \dots \nu_p}(y)$  de ambos os lados, obtemos

$$\frac{\delta}{\delta A_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p}(y)} (A, B) = B^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p}(y), \quad (2.86)$$

de modo que define-se a derivada funcional de uma  $p$ -forma  $A(x)$ , como sendo

$$\frac{\delta}{\delta A(y)} (A, B) = B(y). \quad (2.87)$$

Assim, é conveniente definir a  $p$ -forma Delta de Dirac através do produto interno

$$(\delta_p^D(x - y), B(x)) = B(y), \quad (2.88)$$

onde

$$\frac{\delta A(x)}{\delta A(y)} = \delta_p^D(x - y). \quad (2.89)$$

Assim, em termos da distribuição<sup>25</sup> delta de Dirac, temos que [16]

$$\delta_p^D(x - y) = \frac{1}{p!} \delta^D(x - y) g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_p \nu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \otimes dy^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dy^{\nu_p}, \quad (2.90)$$

como  $x$  e  $y$  são pontos distintos então  $dx^{\mu_i}$  é conectado com  $dy^{\nu_j}$  pelo produto tensorial  $\otimes$ , não sendo antissimetrizado.

É claro que, para  $p = 0$  (escalar) obtemos a delta de Dirac usual

$$\delta_0^D(x - y) = \delta^D(x - y). \quad (2.91)$$

<sup>25</sup>A delta de Dirac não representa em essência as características de uma função, haja vista ser zero em todos os pontos com exceção de um, no qual é infinita, não possuindo assim qualquer sentido analítico.

### 3 FORMULAÇÕES DO ELETROMAGNETISMO DE MAXWELL

Neste capítulo iremos fazer uso da teoria Eletromagnética como uma motivação inicial da importância das formas diferenciais em *Física*. Para isto, inicialmente, revisaremos as principais noções da formulação vetorial da teoria baseada nas Equações de Maxwell (norteadas, sobretudo pelas discussões do Griffiths[2] e Jackson[32]) e após isto introduziremos o uso de tensores na chamada formulação covariante do *Eletromagnetismo* (duas boas referências para um primeiro contato são os livros do Neto[5] e Rubakov[10]). Por fim, de modo orgânico, iremos introduzir o uso das  $p$ -formas com a finalidade de motivar sobre as vantagens desse formalismo matemático.

#### 3.1 Formulação Vetorial

##### 3.1.1 Descrição do problema fundamental

O problema fundamental da *Eletrodinâmica* consiste em determinar a força total que atua sobre uma carga  $Q$  (denominada como carga de prova) devido à presença de um conjunto de cargas fonte  $\{q_i\}$  que podem estar em movimento (ou não). Verifica-se experimentalmente que vale o Princípio da Superposição

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (3.1)$$

isto é que a interação entre cada carga ocorre de forma independente, onde a força elétrica devido à cada carga é dada pela Lei de Coulomb [2]

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i Q}{r_i^2} \hat{r}_i = Q \vec{E}_i, \quad (3.2)$$

em que  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}, \quad (3.3)$$

e  $\vec{E}$  é definido como sendo o campo elétrico

$$\vec{E} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i, \quad (3.4)$$

uma quantidade física que preenche todo o espaço independente da existência (ou não) de uma carga de prova. Fisicamente o campo elétrico é a força por unidade de carga que uma carga sofreria ponto a ponto do espaço.

No caso das cargas fontes estarem em movimento experimentalmente verifica-se um outro tipo de força, denominada força magnética. De modo que se uma carga  $Q$  se move com velocidade  $\vec{v}$ , observa-se uma força do tipo

$$\vec{F} = Q \left( \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (3.5)$$

em que  $\vec{B}$  é o campo magnético na região, que no caso de correntes estacionárias<sup>1</sup> é determinado pela Lei de Biot-Savart [2]

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2}, \quad (3.6)$$

em que  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética no vácuo

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}. \quad (3.7)$$

Em geral, uma partícula carregada ao adentrar um ambiente com campo elétrico e magnético fica sujeita à força de Lorentz [14]

$$\vec{F} = Q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (3.8)$$

Embora tenhamos decidido apresentar o problema fundamental em um cenário de cargas discretas o mesmo é facilmente generalizado ao tomar um objeto tridimensional carregado e mapeá-lo por uma densidade volumétrica de carga  $\rho(\vec{r})$  e tomar a integral das relações anteriores<sup>2</sup>. Por exemplo o campo elétrico devido à uma distribuição volumétrica de carga é tal que [32]

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2} \hat{r} d\tau, \quad (3.9)$$

no qual poderemos aproveitar as possíveis simetrias do problema para utilizar o sistema de coordenadas ideal para a resolução do problema.

### 3.1.2 Equações de Maxwell e a conservação da carga elétrica

Inicialmente a teoria elétrica e a teoria magnética se desenvolveram individualmente sem demonstrar muitas conexões, a força elétrica existia devido à presença de cargas, enquanto que a força magnética aparecia devido à uma corrente elétrica (cargas em movimento). Foi em 1865 que o físico britânico James Clerk Maxwell conseguiu unificar ambas em uma teoria maior, chamada teoria Eletromagnética [33].

Utilizando ferramentas do cálculo diferencial e integral, Maxwell agrupou as

<sup>1</sup>Corrente estacionária faz menção à uma corrente elétrica que existe desde sempre (fluxo contínuo), sem alterações e sem acúmulo de carga em lugar algum [2].

<sup>2</sup>Para uma revisão consulte Griffiths[2], capítulos 2 e 5.

quantidades importantes da teoria em 4 equações<sup>3</sup> diferenciais [32]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (3.10a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{Sem nome}) \quad (3.10b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{Lei de Faraday}) \quad (3.10c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell}) \quad (3.10d)$$

e corrigiu a Lei de Ampère (equação 3.10d), adicionando um termo de corrente de deslocamento  $\mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  para que as 4 equações exibissem simetria [34].

Dessas equações temos todos os mecanismos para gerar campo elétrico e campo magnético. Campo elétrico é gerado por carga ( $Q = \int \rho d\tau$ ) e variação de campo magnético (no tempo), enquanto que campo magnético é gerado por corrente ( $\vec{j} = \rho \vec{v}$ , no caso  $\vec{j}$  é uma densidade volumétrica de corrente elétrica) e por variação de campo elétrico (no tempo). Assim, as equações de Maxwell mostram como as cargas produzem campos, e como os campos afetam as cargas<sup>4</sup> [2].

Ao se tomar a divergência na Lei de Ampère-Maxwell (equação 3.10d), obtemos a equação de continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3.11)$$

o que implica diretamente na conservação da carga elétrica.

### 3.1.3 Tensor das tensões de Maxwell

Conhecendo-se as cargas e campos envolvidos em determinado problema é possível determinar a força eletromagnética que atua sobre qualquer objeto dotado de cargas. A força eletromagnética total sobre as cargas em um volume  $\mathcal{V}$  se dá pela integração da força de Lorentz

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}} \left( \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \right) d\tau, \quad (3.12)$$

cuja força por unidade de volume é dada por

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}. \quad (3.13)$$

No entanto pode acontecer de não conhecermos as cargas que geram os campos, de modo que pode ser fundamental ter a força como função única dos campos, para isto podemos

<sup>3</sup>Em termos das componentes de um sistema tridimensional temos um total de oito equações.

<sup>4</sup>As leis de força, Lei de Coulomb (força elétrica) e Lei de Biot-Savart (força magnética) estão contidas nas Equações de Maxwell não homogêneas.

manipular as equações de Maxwell e obter<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \vec{f} = \epsilon_0 \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] \\ - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Observe que mesmo para campos substancialmente simples este cálculo (incluindo a integração) se mostra extensivamente complicado.

Com efeito de simplificar esta relação podemos introduzir o chamado tensor<sup>6</sup> das tensões de Maxwell [34]

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right), \quad (3.15)$$

como  $T_{ij}$  possui dois índices é comum representá-lo por  $\overleftrightarrow{T}$  (em analogia ao símbolo de um vetor<sup>7</sup>). Portanto, a expressão da força como dependência única dos campos é resumida como [2]

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} d\tau, \quad (3.16)$$

em que  $\vec{S}$  é o vetor de Poynting que representa o fluxo energético do campo eletromagnético. Portanto, a força eletromagnética além de estar matematicamente mais simples nos possibilita interpretar  $\overleftrightarrow{T}$  como sendo uma força aplicada sobre a superfície que encerra o volume carregado, de modo que os termos diagonais, isto é  $T_{ii}$  representam pressões, enquanto que os termos fora da diagonal, isto é  $T_{ij}$  com  $i \neq j$  constituem tensões de cisalhamento, daí o nome dado inicialmente à este objeto matemático de dois índices.

### 3.1.4 Liberdade de gauge

Um último tópico de discussão da teoria Eletromagnética a ser levantado aqui é a simetria fundamental denominada simetria de *gauge* (calibre). Como todo campo rotacional é solenoidal e o campo magnético possui divergência nula é possível introduzir um potencial vetor  $\vec{A}$ , tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (3.17)$$

<sup>5</sup>Para o cálculo explícito, consulte Griffiths [2], seção 8.2.2.

<sup>6</sup>Embora este objeto seja um tensor iremos aqui dar uma interpretação ‘vetorial’ para o mesmo, enquanto que no Apêndice A obteremos o mesmo a partir de um tensor mais fundamental da teoria.

<sup>7</sup>É possível então definir o produto escalar desse tensor com um vetor  $\vec{a}$ , o resultado sendo assim um vetor

$$\left( \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T} \right)_j = a_i T_{ij}.$$

o qual pode ser utilizado na Lei de Ampère para obtermos

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.18)$$

similarmente como todo campo gradiente é irrotacional podemos introduzir um potencial escalar  $V$ , tal que o campo elétrico pode ser escrito como [34]

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.19)$$

na eletrostática ( $\partial \vec{A}/\partial t = 0$ ) retornamos diretamente a relação entre campo elétrico e potencial. Desta forma, trocamos um formalismo envolvendo 6 componentes por apenas 4 componentes (3 de  $\vec{A}$  e 1 de  $V$ ), essa troca possui uma consequência, as grandezas não ficam univocamente determinadas a partir dos campos.

Seja assim, dois conjuntos de funções,  $(V, \vec{A})$  e  $(V', \vec{A}')$ , tais que a relação entre ambas é do tipo [2]

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}, \\ V' = V + \beta, \end{cases} \quad (3.20)$$

desde que esse conjunto de transformações mantenha os campos físicos ( $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ ) invariantes constata-se que, como  $\vec{B} = \vec{B}'$ , então

$$\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\lambda, \quad (3.21)$$

em que  $\lambda$  é uma função escalar da posição e do tempo. Similarmente, como  $\vec{E} = \vec{E}'$ , obtém-se que

$$\beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad (3.22)$$

dessa forma é possível tomar uma função escalar  $\lambda$  arbitrária e adicionar o seu gradiente ao potencial vetor desde que simultaneamente seja retirada sua derivada temporal do potencial escalar. Estas transformações são conhecidas como transformações de calibre [10]

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda, \\ V' = V - \partial_t \lambda. \end{cases} \quad (3.23)$$

Denomina-se ‘liberdade de *gauge*’ a liberdade de escolher qualquer função analítica  $\lambda = \lambda(\vec{r}, t)$  desde que se faça de acordo com (equação 3.23), esta escolha recebe o nome de *gauge*. É evidente, no entanto, que uma vez escolhido (fixado) o *gauge*, a simetria da teoria é quebrada.

### 3.2 Formulação Tensorial (covariante)

Na seção anterior discutimos o *Eletromagnetismo* (definido pelas Eqs. 3.10) em termos do Sistema Internacional de Unidades (SI), no entanto podemos livremente alterar o sistema de unidades sem prejuízo teórico<sup>8</sup>. A partir desta seção, por uma questão de elegância nas equações iremos adotar o Sistema Gaussiano (SG), o qual se relaciona com o SI de acordo com a tabela 2.

Sistema Internacional de Unidades	Sistema Gaussiano
$\rho$	$4\pi\epsilon_0\rho$
$\vec{j}$	$4\pi\epsilon_0\vec{j}$
$\vec{E}, V$	$\vec{E}, V$
$\vec{B}, \vec{A}$	$\vec{B}/c, \vec{A}/c$

Tabela 2: Relação entre o Sistema Internacional de Unidades (SI) e o Sistema Gaussiano (SG) no *Eletromagnetismo*. Fonte: Adaptado de Neto[5].

Com isso as equações de Maxwell ficam como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (3.24a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.24b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.24c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3.24d)$$

e a motivação de se trocar do SI para o SG fica evidenciada, pois dessa maneira a derivada com relação à  $x^0 = ct$  se torna explícita, dando indícios de que o *Eletromagnetismo* de Maxwell é compatível com a *Relatividade Restrita* proposta por Einstein[35], isto é, tem suas equações prontas para uma generalização em termos de quadrivetores.

Vale ressaltar ainda que a força de Lorentz, neste sistema de unidades se torna

$$\vec{F} = Q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), \quad (3.25)$$

enquanto que a equação de continuidade da carga permanece inalterada.

#### 3.2.1 Covariância da teoria

Como já discutimos ao longo da revisão de tensores, uma teoria é dita covariante se suas quantidades físicas puderem ser escritas em termos de quadrivetores e quadritensores [1].

<sup>8</sup>Mudanças de sistemas de unidades constituem apenas mudanças de escala.

Ao desacoplar as equações de Maxwell (Eqs. 3.10) conclui-se que a onda eletromagnética (luz) se propaga com velocidade  $c$ . Da *Relatividade Restrita* temos que esta velocidade é a mesma para todos os referenciais inerciais, contradizendo as Transformações de Galileu (TG), mas sendo compatível com as Transformações de Lorentz (TL) [3]. Dessa forma, é possível escrever as equações de Maxwell numa forma manifestamente relativística, na qual não há distinção entre coordenadas tipo tempo e tipo espaço [23].

Com efeito didático iniciaremos a discussão pela equação de continuidade da carga elétrica, de modo que se introduzirmos

$$j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z) \equiv (c\rho, \vec{j}), \quad (3.26)$$

como um candidato à quadrivetor da teoria e, usando  $\partial_\mu$  como uma generalização da equação 2.3, com  $x^0 = ct$ , é direto que a equação da conservação da carga pode ser escrita como

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.27)$$

Como um escalar é invariante sob TL, então  $j^\mu$  é, de fato, uma quadricorrente (que é conservada!) [5].

Além disso, como já discutimos na seção anterior, o campo magnético pode ser escrito como o rotacional de um vetor potencial (equação 3.17) e o campo elétrico pode ser expresso através de uma relação envolvendo os campos  $(V, \vec{A}/c)$  (equação 3.19) podemos nos sentir inclinados à introduzir o quadrivetor potencial

$$A^\mu \equiv \left( V, \frac{\vec{A}}{c} \right), \quad (3.28)$$

e através dele, o tensor antissimétrico de *rank* 2 dado pelo rotacional de  $A^\mu$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (3.29)$$

não é difícil verificar que a matriz associada ao tensor  $F^{\mu\nu}$  é [1]

$$F^{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

portanto  $F^{\mu\nu}$  é chamado de tensor do campo (no inglês, *field strength*) Eletromagnético. Consequentemente a sua forma covariante é (para a métrica de Bjorken-Drell, (2.15),

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\gamma} \eta_{\gamma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

As equações de Maxwell não-homogêneas (Eqs. 3.24a e 3.24d) sugerem que a igualdade seja tal que à esquerda tenha-se a divergência de  $F^{\mu\nu}$  enquanto que à direita se tenha a corrente  $j^\nu$ , assim [6]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (3.32)$$

imediatamente obtém-se a equação de continuidade, uma vez que a contração  $\partial_\nu \partial_\mu$  é simétrica.

As equações de Maxwell homogêneas (Eqs. 3.24b e 3.24c) por outro lado não possuem sua compactação direta para a formulação covariante, as mesmas decorrem das identidades de Bianchi [36]

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0. \quad (3.33)$$

No entanto, esta equação é comum de ser apresentada da seguinte forma

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.34)$$

onde  ${}^*F^{\mu\nu}$  é o *dual*<sup>9</sup> do tensor  $F^{\mu\nu}$ , isto é

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}. \quad (3.35)$$

Assim, as Equações de Maxwell, na formulação covariante obedecem uma relação clara de simetria [6]

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \\ \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0, \end{cases} \quad (3.36)$$

### 3.2.2 Aspectos gerais

#### 3.2.2.1 Simetria de *Gauge*

Nesta formulação, uma transformação de *gauge* sobre o campo  $A^\mu$  é tal que

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda, \quad (3.37)$$

---

<sup>9</sup>Como  $F^{\mu\nu}$  é um tensor totalmente antissimétrico, a dualidade aqui é exatamente a mesma apresentada no capítulo anterior no estudo das formas diferenciais.

onde  $\lambda$  é uma função das coordenadas do espaço-tempo [10]. Imediatamente a definição do tensor do campo eletromagnético se mantém invariante, fazendo assim do *Eletromagnetismo* um exemplo de teoria de calibre [37].

### 3.2.2.1.1 Fixação de *Gauge*

Esta arbitrariedade na escolha da função das coordenadas do espaço-tempo é compreendida como graus de liberdade (não-físicos) do sistema, de tal modo que duas configurações conectadas por transformações de calibre são equivalentes [38]. A fixação de *gauge*, neste sentido, constitui-se como um procedimento matemático para eliminar esses graus de liberdade redundantes. A maneira de fixar o *gauge*, na maioria dos casos, simplifica os cálculos envolvidos na previsão e determinação de quantidades físicas, podendo ainda ser colocada como uma imposição *ad-hoc* para que o modelo satisfaça determinada propriedade física verificada experimentalmente, como é o caso da conservação local da carga elétrica.

As quatro fixações de *gauge* mais trabalhadas no âmbito da *Teoria Clássica de Campos* (TCC) são [10]

$$\partial_i A^i = 0, \quad (\text{Gauge de Coulomb}) \quad (3.38)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (\text{Gauge de Lorentz}) \quad (3.39)$$

$$A_0 = 0, \quad (\text{Gauge Residual}) \quad (3.40)$$

$$n_i A^i = 0, \quad (\text{Gauge Axial}) \quad (3.41)$$

em que  $\vec{n}$  é um vetor fixo, unitário, tridimensional e constante no espaço-tempo. Ao longo da dissertação, a aplicabilidade e consequências da escolha de uma fixação de *gauge* ficará evidenciada.

### 3.2.2.2 Equação do campo do fóton

Para entender a dinâmica do campo vetorial  $A^\mu$  podemos tomar as equações de Maxwell na forma não-homogênea (equação 3.32) e usar da definição de  $F^{\mu\nu}$  (equação 3.30), com isso

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (3.42)$$

pela invariância de calibre podemos tomar uma função  $\lambda$  que satisfaça o *gauge* de Lorentz. Em uma condição de vácuo ( $j^\nu = 0$ ) temos [37]

$$\square A^\nu = 0, \quad (3.43)$$

que é a equação de onda para o quadrivetor  $A^\nu$ . O procedimento de quantizar um campo associa ao mesmo uma determinada partícula [1], particularmente a quantização do campo eletromagnético leva à descrição do comportamento dos fótons, partículas que medeiam a interação eletromagnética [39]. Portanto,  $A^\mu$  é o campo que representa o fóton.

### 3.2.2.3 Invariantes da teoria

Além disso, com o tensor eletromagnético é possível construir escalares de Lorentz. O primeiro tem relação sobre a diferença do módulo dos campos

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \propto \vec{B}^2 - \vec{E}^2, \quad (3.44)$$

enquanto que a contração do *dual* com o próprio tensor gera a projeção de um campo sobre o outro, isto é

$$*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \propto \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (3.45)$$

### 3.2.2.4 Solução geral da equação de Maxwell (no vácuo)

Um procedimento eficaz para obter a solução geral das Equações de Maxwell (equação 3.32) no caso sem fontes, isto é, com  $j_\nu = 0$  é escrever o campo  $A_\mu$  através de sua transformada de Fourier [40],

$$A_\mu = \int_{k^0 \geq 0} [e^{ikx} a_\mu(k) + e^{-ikx} a_\mu^*(k)] d^4k, \quad (3.46)$$

onde  $a_\mu(k)$  é o campo do fóton<sup>10</sup> no espaço dos vetores de onda  $k$ . A restrição  $k^0 \geq 0$  está associada à evolução em  $x^0$  acontecer em um sentido único devido à 2ª Lei da Termodinâmica<sup>11</sup>.

Usando a definição do *field strength* nas equações de Maxwell é possível obter a seguinte condição [10],

$$k^2 a_\nu - k_\nu (ka) = 0, \quad (3.47)$$

implicando em dois casos possíveis,  $k^2 \neq 0$  ou  $k^2 = 0$ . O primeiro leva à soluções longitudinais (com relação à  $k_\nu$ ), do tipo

$$a_\nu(k) = k_\nu c(k), \quad (3.48)$$

com  $c(k)$  uma função arbitrária.

<sup>10</sup>Naturalmente,  $a_\mu$  apenas representará o fóton após a quantização do campo eletromagnético, na qual se impõem regras de comutação entre o campo e o seu campo momento canonicamente conjugado [41].

<sup>11</sup>A Segunda Lei da Termodinâmica afirma que a variação da entropia global de um sistema fechado é sempre maior ou igual a zero, caracterizando processos irreversíveis ou reversíveis, respectivamente [42].

O caso  $k^2 = 0 \Rightarrow k^0 = |\vec{k}|$ , por outro lado leva à soluções transversais, do tipo

$$a_\mu = k_\mu c(k) + e_\mu^{(\alpha)}(k)b(k), \quad (3.49)$$

em que  $c(k)$  e  $b(k)$  são funções arbitrárias, e  $\{e_\mu^{(\alpha)}\}$  é um conjunto de vetores ortogonais à  $k_\mu$ , com  $\alpha = 0, 1, 2$  e  $e_\mu^{(0)} \stackrel{!}{=} 0$ .

Portanto, a solução geral das equações de Maxwell (caso sem fontes), nos leva à [10]

$$A_\mu = \begin{cases} A_\mu^\perp = \int d^3k \left[ e^{ikx} e_\mu^{(\alpha)}(\vec{k}) b_\alpha(\vec{k}) + e^{-ikx} e_\mu^{(\alpha)}(\vec{k}) b_\alpha^*(\vec{k}) \right] \Big|_{k^0=|\vec{k}|} \\ A_\mu^\parallel = \int d^4k \left[ e^{ikx} k_\mu c(k) + e^{-ikx} k_\mu c^*(k) \right] \end{cases} \quad (3.50)$$

Observe que a parte longitudinal corresponde a um *gauge* puro, isto é  $A_\mu^\parallel(x) = \partial_\mu \alpha(x)$ , com

$$\alpha(x) = \int d^4k \left[ -ie^{ikx} c(k) + ie^{-ikx} c^*(k) \right], \quad (3.51)$$

uma função escalar arbitrária. A parte não trivial da solução transversal corresponde a um conjunto de ondas planas, movendo-se na velocidade da luz (com frequência  $k^0 = |\vec{k}|$ ) e exibe a presença de duas amplitudes independentes  $b_\alpha$  para cada vetor de onda  $\vec{k}$  [10] sendo os dois graus de liberdade<sup>12</sup> (polarização) físicos da onda eletromagnética.

### 3.3 Formulação em Formas Diferenciais

A formulação de formas diferenciais para o *Eletromagnetismo* é imediata após toda a construção covariante da teoria, visto que muitos elementos que a descrevem são antissimétricos, como é o caso do *field strength*, no entanto poderíamos ter feito essa discussão do ponto de vista puramente matemático das  $p$ -formas e após isto buscar as devidas interpretações<sup>13</sup>.

Como o quadrivetor potencial carrega em si a dinâmica do fóton, isto é, toda informação eletromagnética, iniciaremos a formulação por ele, logicamente  $A^\mu$  é uma 1-forma, isto é

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (3.52)$$

<sup>12</sup>O campo  $A_\mu$  como um 4-vetor possui 4 componentes, no entanto a simetria de *gauge* reduz um dos graus de liberdade. O outro grau de liberdade é eliminado uma vez que  $m = 0$ , fazendo com que haja uma invariância de *gauge* residual [10].

<sup>13</sup>Com efeito de ilustração poderíamos partir da equação de propagação de uma partícula relativística com velocidade igual a  $c$ , massa de repouso nula e spin 1, representada por uma 1-forma e com isso obter as várias relações do *Eletromagnetismo*, tudo isso sem sequer se preocupar com o significado de carga elétrica e/ou correntes.

com isto, podemos construir uma 2-forma através da derivada exterior

$$F = dA = (\partial_\nu A_\mu) dx^\nu \wedge dx^\mu, \quad (3.53)$$

como  $dx^\nu \wedge dx^\mu$  é um objeto totalmente antissimétrico, então apenas a parte antissimétrica do coeficiente contribuirá. Como já sabemos

$$\partial_{[\nu} A_{\mu]} = \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu), \quad (3.54)$$

assim, podemos renomear os índices saturados

$$F = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (3.55)$$

portanto, a componente da 2-forma é o tensor do campo eletromagnético.

Entre outras coisas é imediato que, como  $F = dA$ , qualquer transformação em  $A$  a menos de um gradiente  $d\lambda$  (em que  $\lambda$  é uma 0-forma), mantém  $F$  necessariamente invariante pelo Lema de Poincaré,  $d^2\lambda = 0$  [26]. A simetria de *gauge* é então uma consequência desse lema matemático. Além disso, observe que pelo Teorema da Decomposição de Hodge, a 1-forma  $A$  pode ser escrita como[21]

$$A = d\alpha \oplus d^\dagger\beta \oplus \gamma, \quad (3.56)$$

em que  $\gamma$  é uma forma harmônica, portanto a liberdade de calibre da teoria está totalmente contida em  $d\alpha$  e  $\gamma$ .

Como  $F$  constitui uma forma exata então necessariamente constitui-se como uma forma fechada, isto é

$$dF = 0, \quad (3.57)$$

vejamos qual o conteúdo desta equação. A atuação da derivada sobre  $F$  deve resultar em uma 3-forma, tal que

$$dF = \frac{1}{2} (\partial_\rho F_{\mu\nu}) dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} W_{\rho\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (3.58)$$

onde  $W_{\rho\mu\nu}$  é dado pela parte totalmente antissimétrica do coeficiente

$$\begin{aligned} W_{\rho\mu\nu} &\equiv \partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} \\ &= \frac{1}{6} (\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\rho F_{\nu\mu} - \partial_\nu F_{\mu\rho} - \partial_\mu F_{\rho\nu}) \\ &= \frac{1}{3} (\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

assim,

$$dF = \frac{1}{6} (\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho}) dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (3.60)$$

no entanto,  $dF = 0$  o que leva portanto à suas componentes serem identicamente nulas, isto é

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0, \quad (3.61)$$

que são as identidades de Bianchi. Como já vimos essa relação representa as equações de Maxwell homogêneas (equação 3.34).

Além dessa maneira é comum, como já discutimos, escrever estas equações pela divergência do *dual* de  $F_{\mu\nu}$ . Como a equação de Maxwell é homogênea, temos que

$$dF = *d^\dagger *F_{(2)} = 0, \quad (3.62)$$

assim, a forma alternativa de se escrever estas equações é

$$d^\dagger *F = 0, \quad (3.63)$$

embora seja preferível utilizar a primeira.

Para o caso das equações com a presença de fontes, cuja dinâmica está associada à divergência de  $F_{\mu\nu}$ , então

$$d^\dagger F = \frac{4\pi}{c} J. \quad (3.64)$$

Uma consequência direta dessa equação é que se tomarmos a sua coderivada obtemos naturalmente a equação de continuidade da carga elétrica

$$d^\dagger J = 0, \quad (3.65)$$

mais uma propriedade física que é uma consequência natural do Lema de Poincaré.

Portanto, na formulação de formas diferenciais, as equações de Maxwell se reduzem à

$$\begin{cases} dF = 0, \\ d^\dagger F = \frac{4\pi}{c} J. \end{cases} \quad (3.66)$$

Vale destacar a elegância e simplicidade com que as equações de Maxwell foram escritas em (3.66)<sup>14</sup>, uma vez que ambas governam a dinâmica das forças eletromagnéticas para sistemas de dimensão arbitrária sem envolver o uso de um conjunto de coordenadas específicas. As equações (3.66) representam ao máximo a eficiência de se utilizar ferramentas matemáticas mais sofisticadas para descrever com maior clareza as propriedades fundamentais de sistemas físicos.

<sup>14</sup>Como leitura complementar focada nas relações das formas diferenciais aplicadas a descrição da teoria eletromagnética, consulte Warnick e Russer[43].

## 4 ELETROMAGNETISMO EM TEORIAS DE CAMPO

Neste capítulo, apresentaremos o *Eletromagnetismo* de Maxwell no formalismo da *Teoria de Campos*, obtendo as equações de Maxwell através das equações de Euler-Lagrange da ação adequada. Além disso, motivaremos sobre o estudo de teorias de fóton massivo a partir da teoria de Proca. Vale destacar que deste capítulo em diante iremos designar a ‘densidade lagrangiana’ apenas por ‘lagrangiana’.

### 4.1 Teoria de Maxwell

A lagrangiana mais simples<sup>1</sup> que leva às Equações de Maxwell (na presença de fontes) é [44]

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}A_\mu J^\mu, \quad (4.1)$$

neste caso, novamente alteramos o sistema de coordenadas, desta vez para o sistema de Heaviside-Lorentz<sup>2</sup>, usualmente empregado em teorias de campo. O primeiro termo, bilinear nas derivadas do campo, é denominado termo cinético (responsável pela dinâmica do campo) e o segundo termo é o acoplamento do campo com a respectiva fonte que o gera. Este último termo é derivado a partir do objeto mais simples possível de ser formado com apenas uma potência do campo e que preserve as simetrias de Lorentz e de *gauge* local

$$\frac{q}{c} \int d\tau \dot{x}^\mu A_\mu(x(\tau)) = \frac{1}{c} \int d^D x J^\mu A_\mu, \quad (4.2)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio e  $J^\mu(x)$  é definida como

$$J^\mu(x) \equiv q \int d\tau \delta^D(x - x(\tau)). \quad (4.3)$$

Para determinarmos as equações de movimento para o campo  $A_\mu$  tomemos às Equações de Euler-Lagrange (equação A.9) para a lagrangiana de Maxwell (equação 4.1). Para facilitar a compreensão, façamos isoladamente o cálculo de cada termo das equações, imediatamente

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c} J^\nu, \quad (4.4)$$

assim o problema se reduz em determinar<sup>3</sup>

<sup>1</sup>A lagrangiana não é mensurável, com efeito, sua definição não é unívoca para a descrição de um determinado sistema físico [23].

<sup>2</sup>No sistema gaussiano o fator  $1/4$  é substituído por  $1/16\pi$ .

<sup>3</sup>Com efeito de simplificação costuma-se definir o campo tensorial auxiliar  $A_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , fazendo com que o tensor de Faraday seja escrito como  $F_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \left[ \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial A_{\mu\nu}} F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial A_{\mu\nu}} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial A_{\mu\nu}} F^{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) F^{\alpha\beta} = F^{\nu\mu},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

dessa forma, as Equações de Maxwell são as Equações de Euler-Lagrange para a ação do campo eletromagnético [6]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} J^\nu, \tag{4.6}$$

juntamente das identidades de Bianchi contém todo o conteúdo da teoria de Maxwell. A dimensionalidade abordada na teoria de Maxwell é inicialmente arbitrária de modo que é possível variar livremente os índices na lagrangiana.

Outra questão relevante a se analisar é a energia do campo eletromagnético. A definição da densidade hamiltoniana (cuja integral volumétrica resulta na energia do campo  $A_\mu$ ) é dada por [6]

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}, \tag{4.7}$$

o primeiro termo já foi obtido, fazendo  $\nu = 0$  na equação (4.5)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&= -F^{0\mu} (F_{0\mu} + \partial_\mu A_0) + \frac{1}{2} (B^2 - E^2) \\
&= E^2 - F^{0i} \partial_i A_0 + \frac{1}{2} (B^2 - E^2),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

o segundo termo deve ser integrado por partes cujo termo de superfície pode ser eliminado por condições de contorno, o outro termo resulta na Equação de Gauss, portanto em uma região sem fontes ( $\rho = 0$ )

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2), \tag{4.9}$$

sendo uma quantidade positivamente definida, fixando os sinais na lagrangiana.

Em formas diferenciais, como já visto no capítulo anterior, a *Eletrodinâmica* de Maxwell se baseia na 1-forma do potencial vetor  $A = A_\mu dx^\mu$  e no *field strength*  $F = dA$ , sendo uma 2-forma. Como  $F^{\mu\nu}$  está diretamente associado ao dual de  $F_{\mu\nu}$ , a ação de Maxwell (em uma variedade de dimensão arbitrária) é

$$S_M = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} F \wedge *F - \frac{1}{c} \int_{\mathcal{M}} A \wedge *J, \tag{4.10}$$

em termos do produto interno

$$S_M = \frac{1}{2} (dA, dA) - \frac{1}{c} (A, J), \quad (4.11)$$

observe que desta maneira obtemos as Equações de Maxwell adequadas, ao tomar a derivada funcional (equação 2.87)

$$\frac{\delta S_M}{\delta A(y)} = 0 \Rightarrow d^\dagger F = \frac{1}{c} J, \quad (4.12)$$

aqui foram usadas as propriedades demonstradas do produto interno de formas.

#### 4.1.1 Discussões teóricas, experimentais e conclusões iniciais

Lagrangianas como a de Maxwell descrevem a dinâmica de partículas sem massa, no entanto, compreender a descrição de uma partícula massiva associada à um campo de *gauge* é de fundamental importância para o entendimento das diversas interações fundamentais da natureza [10, 37, 45].

Embora seja muito discutido que o fóton (geralmente representado pelo símbolo  $\gamma$ ), a partícula de interação eletromagnética possua massa zero, existem inúmeros experimentos que estabelecem apenas limites superiores para a massa do fóton. Um dos limites mais aceitos atualmente é dado por Olive et al.[46]

$$m_\gamma \lesssim 1,78 \cdot 10^{-54} kg, \quad (4.13)$$

que embora seja próximo de zero não o garante ser, de tal forma que o estudo de teorias eletromagnéticas massivas possuem relevância teórica.

Existem, pelo menos, quatro mecanismos para gerar a massa dos campos em um modelo de ação:

1. Mecanismo *ad-hoc*: a forma mais imediata constitui-se na inserção de um termo quadrático no campo [47], em analogia a teoria de Klein-Gordon, fazendo com que a constante de acoplamento tenha dimensão de massa [23]. Este modelo idealizado por Proca (recebendo seu próprio nome) como tentativa de gerar a massa para o campo eletromagnético será discutido na seção posterior como motivação inicial;
2. Geração espontânea: matematicamente, para gerar a massa das partículas de interação é comum empregar o denominado Mecanismo de Higgs, o qual faz com que os bósons das interações fundamentais do Modelo Padrão interajam entre si através de um campo quântico externo, denominado campo de Higgs, que ao quebrar a simetria eletrofraca tem como consequência a geração de massa destas partículas [10].

3. Teoria de altas derivadas: outro mecanismo é através do estudo de lagrangianas contendo termos de derivada superior nos campos [1]. No setor eletromagnético um desses modelos constituiu-se como a teoria de Podolsky [48], a única teoria de segunda ordem que é invariante pelo grupo de Lorentz e U(1) local [49], sendo então a única generalização para derivadas de segunda ordem do eletromagnetismo de Maxwell.
4. Termos topológicos: por fim, outra maneira de gerar a massa para os campos é através da inserção de termos topológicos, isto é, que independem da métrica associada. O modelo mais discutido academicamente é a teoria de Maxwell-Chern-Simons [18, 44, 50], a qual consta discutida no capítulo 5 desta dissertação.

## 4.2 Motivação inicial - o campo de Proca

A primeira proposta de uma teoria com fóton massivo foi idealizada nos anos 30 pelo físico romeno Alexandru Proca [32], que modificou a lagrangiana por um termo de massa (bilinear nos campos) [38] em analogia à teoria de Klein-Gordon [47]

$$\mathcal{L}_{MP} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}A_{\mu}J^{\mu} + \frac{\kappa^2}{2}A_{\mu}A^{\mu}. \quad (4.14)$$

Para o campo de Proca,  $A^{\mu}$ , as equações de movimento podem ser obtidas resolvendo a Equação de Euler-Lagrange (equação A.9) para  $\mathcal{L}_{MP}$ . Desenvolvendo explicitamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{MP}}{\partial A^{\rho}} &= \frac{\partial}{\partial A^{\rho}} \left[ \frac{\kappa^2}{2} \eta_{\mu\nu} A^{\nu} A^{\mu} - \frac{1}{c} J_{\mu} A^{\mu} \right] \\ &= \frac{\kappa^2}{2} \eta_{\mu\nu} (\delta_{\rho}^{\nu} A^{\mu} + A^{\nu} \delta_{\rho}^{\mu}) - \frac{1}{c} J_{\mu} \delta_{\rho}^{\mu} \\ &= \kappa^2 A_{\rho} - \frac{1}{c} J_{\rho}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

A outra parcela é justamente o termo do tipo  $\partial^{\sigma} F_{\sigma\rho}$  oriundo do termo de Maxwell. Portanto, a equação de movimento para o campo de Proca é

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} + \kappa^2 A^{\nu} = \frac{1}{c} J^{\nu}. \quad (4.16)$$

Observa-se que a Equação de Maxwell não-homogênea (equação 3.32) é modificada por um termo linear no campo com constante associada à massa. A presença explícita do campo  $A^{\mu}$  nas equações de movimento dá significado físico para os potenciais (em contraponto à teoria Eletromagnética de Maxwell, em que o significado físico é atribuído apenas aos campos elétrico e magnético), fazendo com que a teoria Maxwell-Proca não seja invariante de calibre! Uma imposição experimental da conservação (local) da carga elétrica restringe

o campo ao *gauge* de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (4.17)$$

nesta restrição<sup>4</sup>, a equação de movimento para o campo é da forma

$$(\square + \kappa^2) A^\nu = \frac{1}{c} J^\nu, \quad (4.18)$$

correspondendo, no caso sem fontes, à equação de Klein-Gordon para um campo de massa  $\kappa$ . Por outro lado, na presença de fontes,  $A^\nu$  pode ser obtido via função de Green do operador  $(\square + \kappa^2)$  [22].

### 4.2.1 Potencial Elétrico e suas características

#### 4.2.1.1 Carga puntiforme na origem

Para um caso mais simples, busquemos a solução esfericamente simétrica da equação (4.18) para uma carga puntiforme na origem (isto é,  $J^\nu = (cq\delta(r), 0, 0, 0)$ ) e em repouso (ou seja,  $A^\nu = (V, 0, 0, 0)$  e  $\square = -\nabla^2$ ). Nestas restrições a equação se torna

$$(\nabla^2 - \kappa^2) V(r) = -q\delta(r). \quad (4.19)$$

No *Eletromagnetismo* de Maxwell ( $\kappa = 0$ ) obtemos o potencial de Coulomb como função de Green para o problema, no entanto, no eletromagnetismo de Proca a solução é dada pelo potencial de Yukawa

$$V(r) = \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad (4.20)$$

que é a Lei de Coulomb com um alcance limitado<sup>5</sup> pela exponencial do fator  $\kappa$ . Verifiquemos explicitamente que o potencial de Yukawa (equação 4.20) é solução da equação de Helmholtz modificada (equação 4.19).

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-\kappa r}}{r} \right) &= \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} (\nabla^2 e^{-\kappa r}) + 2 (\nabla e^{-\kappa r}) \left( \nabla \frac{1}{r} \right) + e^{-\kappa r} \left( \nabla^2 \frac{1}{r} \right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^3} \partial_r (r^2 \partial_r e^{-\kappa r}) + 2(-\kappa e^{-\kappa r}) \left( -\frac{1}{r^2} \right) - 4\pi \delta(r) e^{-\kappa r} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^3} \partial_r (-\kappa r^2 e^{-\kappa r}) + 2\kappa \frac{e^{-\kappa r}}{r^2} - 4\pi \delta(r) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[ \kappa^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r} - 2\kappa \frac{e^{-\kappa r}}{r^2} + 2\kappa \frac{e^{-\kappa r}}{r^2} - 4\pi \delta(r) \right]. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Essa equação de vínculo restringe as configurações de campo permitidas, de modo que é possível reduzir um grau de liberdade do campo [38]. Assim, a teoria de Proca possui 3 graus de liberdade, sendo os dois graus de polarização transversal e um grau de polarização longitudinal na onda eletromagnética.

<sup>5</sup>Uma outra situação em que este tipo de solução é discutida encontra-se em Ramos et al.[51], onde o elétron que gera o potencial elétrico está imerso em um meio coloidal carregado. A interação da carga com o meio gera um efeito de blindagem eletrostática, que reduz o alcance do potencial.

Portanto,

$$(\nabla^2 - \kappa^2) \left( \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-\kappa r}}{r} \right) = -q\delta(r), \quad (4.21)$$

sendo exatamente igual à equação (4.19), e fazendo do Potencial de Yukawa, solução do problema. Este tipo de potencial (representado na figura 4), tende a zero mais rapidamente do que o potencial de Coulomb.

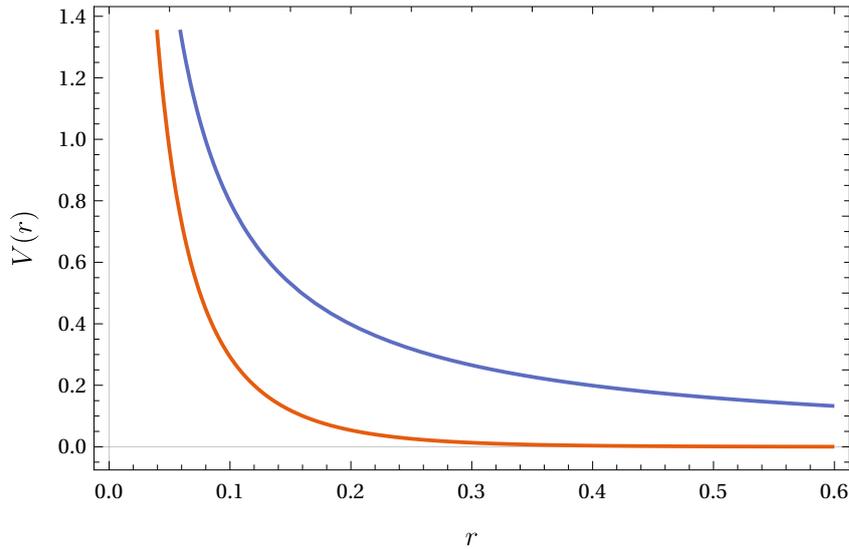


Figura 4: Potencial de Coulomb de uma carga unitária  $q = 4\pi$  (em azul) comparado ao potencial de Yukawa  $\kappa = 10$  (em laranja) para efeitos de ilustração da blindagem que ocorre no cenário  $\kappa \neq 0$ . Fonte: O autor.

#### 4.2.1.2 Caso sem fontes

Com efeito de análise, tomemos uma solução do tipo ondas planas, isto é

$$A^\mu(\vec{x}, x^0) = A_{(0)}^\mu \exp\left(i\vec{k} \cdot \vec{x} - \frac{i\omega x^0}{c}\right), \quad (4.22)$$

em que  $A_{(0)}^\mu$  é a amplitude da onda. Analisando o caso sem fontes, esta solução na Equação de Klein-Gordon, leva à

$$E^2 = c^2|\vec{p}|^2 + \left(\frac{\hbar\kappa}{c}\right)^2 c^4, \quad (4.23)$$

correspondendo à relação relativística<sup>6</sup> de uma partícula de massa  $\kappa\hbar/c$ .

#### 4.2.2 Aplicação da Teoria de Maxwell-Proca (MP)

Uma pergunta pertinente a se fazer neste momento é: *Existe, de fato, alguma circunstância na qual o fóton demonstra possuir massa?* A resposta para este questiona-

<sup>6</sup>Aqui usamos as relações de Broglie  $E = \hbar\nu$  e  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  que conectam a dualidade dos tratamentos ondulatório e corpuscular da luz (fóton).

mento é que sim, há uma aplicação da teoria de Maxwell-Proca na *Supercondutividade*<sup>7</sup>. Com efeito de ilustração iremos destacar esta discussão que se encontra em mais detalhes nas seções 12.8 e 12.9 do livro “*Classical Electrodynamics*” do professor Jackson[32].

A teoria de London busca um entendimento teórico do comportamento dos campos eletromagnéticos em supercondutores<sup>8</sup>, sobretudo um efeito curioso que ocorre no interior do material supercondutor, o campo eletromagnético é expulso quando o material realiza a transição de estado normal ( $T > T_c$ ) para um estado de supercondutor ( $t < T_c$ ), de tal forma que o campo aplicado penetra uma distância característica denominada profundidade de penetração de London,  $\lambda_L$ . Este efeito, de expulsão do campo no interior de supercondutores, é denominado efeito Meisner e está representado na figura 5.

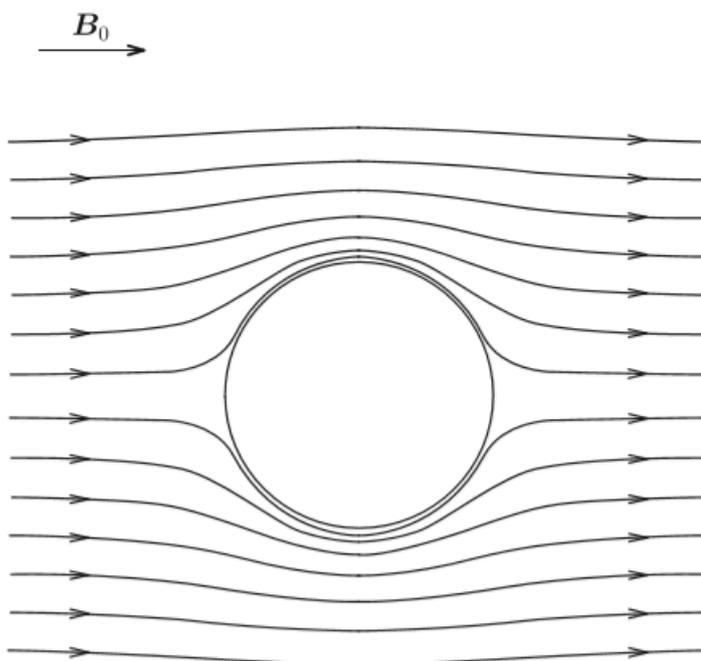


Figura 5: As linhas de fluxo magnético contornam o supercondutor esférico, haja visto  $\vec{B}_0 = 0$  no seu interior devido à magnetização oriunda do efeito Meisner. Fonte: Matsushita[52].

Na seção 12.9 de Jackson[32], o mesmo faz uma discussão fenomenológica sobre o comportamento da densidade de corrente no interior de um supercondutor a partir do movimento (não relativístico) dos portadores de carga  $Q$ , com densidade  $n_Q$  e velocidade

<sup>7</sup>Aplicações desse modelo em *Física de Altas Energias*, no entanto, não são recorrentes, uma vez que termos de massa estilo Proca fazem da teoria não renormalizável. Portanto, uma teoria fundamental deve ser não massiva, devendo-se recorrer à algum mecanismo de geração espontânea, como o de Higgs [45]

<sup>8</sup>Um supercondutor é, por definição, um material que não oferece resistência ao transporte de elétrons, teoricamente havendo uma dissipação nula de energia na forma de calor pelo *Efeito Joule*. O fenômeno da supercondutividade foi descoberto em meados de 1911 por Kammerlingh Onnes, em Leiden, Holanda usando da liquefação do gás Hélio, a aproximadamente  $4.2K$ , para resfriar os metais, em especial o mercúrio [52].

$\vec{v}$ , tal que

$$\vec{J} = Qn_Q\vec{v}, \quad (4.24)$$

de tal forma que se considerarmos um acoplamento mínimo com o campo de Maxwell [10]

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad (4.25)$$

com  $\vec{p} = m_Q\vec{v}$  sendo o momento linear clássico. Assim, a densidade de corrente é dada por

$$\vec{J} = \frac{Qn_Q}{m_Q}\vec{P} - \frac{Q^2n_Q}{m_Qc}\vec{A}. \quad (4.26)$$

No entanto, na ausência de campo externo o valor esperado do momento é nulo<sup>9</sup>, assim obtém-se uma das Equações de London

$$\vec{J} = -\frac{Q^2n_Q}{m_Qc}\vec{A}, \quad (4.27)$$

observe, no entanto que as equações de Maxwell não-homogêneas (equação 3.32), no *gauge* de Lorentz, para esta densidade de corrente podem ser escritas como

$$\nabla^2\vec{A} - \partial_0^2\vec{A} - \kappa^2\vec{A} = 0, \quad (4.28)$$

correspondendo à equação de Maxwell-Proca (4.18) na ausência de fontes, com

$$\kappa^2 \equiv \frac{4\pi Q^2 n_Q}{m_Q c^2}, \quad (4.29)$$

portanto, no limite estático as soluções são do tipo Yukawa (equação 4.20), de tal forma que a profundidade de London é dada por

$$\lambda_L = \frac{1}{\kappa} = \frac{c}{2Q} \sqrt{\frac{m_Q}{\pi n_Q}}, \quad (4.30)$$

tal que como o fóton de Proca decai exponencialmente tem-se o efeito Meisner como se os fótons no interior do supercondutor adquirissem massa, causando o decaimento exponencial do campo<sup>10</sup>.

---

<sup>9</sup>Este é um resultado do Teorema de Bloch, o qual foi apenas discutido em pormenores por Brillouin, tal que o comportamento do supercondutor permaneça coerente mesmo após a aplicação de um campo externo [53].

<sup>10</sup>Uma situação similar ocorre aos elétrons em bandas planas de grafeno, os quais se comportam como férmions de Dirac sem massa na região próxima aos cones de Dirac, embora elétrons sejam partículas naturalmente massivas [54].

## 5 EFEITOS DA MASSA TOPOLÓGICA NA ELETRODINÂMICA

O objetivo deste capítulo é apresentar a teoria de Maxwell-Chern-Simons como alternativa à geração de massa e que preserve a simetria por transformações de calibre. Obteremos as Equações de Maxwell modificadas e discutiremos sobre a natureza dos campos neste cenário.

### 5.1 Teoria de Chern-Simons

Uma outra forma de gerar a massa dos fótons constitui a denominada teoria de Chern-Simons (CS), na qual a invariância de calibre é preservada, mas há uma restrição na dimensionalidade do espaço. Essa eletrodinâmica, conhecida como teoria planar<sup>1</sup> do *Eletromagnetismo* possui propriedades bem distintas das conhecidas e discutidas no capítulo 3 desta dissertação, haja vista o potencial elétrico ser uma função logarítmica da posição<sup>2</sup>.

A Teoria de Chern-Simons consiste na mais conhecida teoria de calibre topologicamente massiva (do inglês *Topological Massive Gauge Theory*, TMGT), então iremos inicialmente discutir em profundidade a teoria CS em  $2 + 1$  dimensões, e em seguida iremos apresentar sem muito aprofundamento o procedimento para generalizar a teoria para  $5D$ .

#### 5.1.1 Eletrodinâmica em (2+1)-dimensões

O termo de CS em  $(2 + 1)$ -dimensões é dado por [44]

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (5.1)$$

onde  $\kappa$  é o parâmetro (inversamente proporcional ao comprimento) de Chern-Simons. Observe que este termo, não é imediatamente invariante de *gauge*, haja vista que a variação na lagrangiana é dada pela divergência

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \partial_\sigma \left( \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\mu\nu\sigma} F_{\mu\nu} \lambda \right), \quad (5.2)$$

no entanto lagrangianas que diferem apenas por uma divergência são denominadas ‘lagrangianas equivalentes’, pois geram as mesmas equações de movimento (e a mesma ação

<sup>1</sup>Uma situação na qual a *Eletrodinâmica* de Chern-Simons pode ser empregada são os sistemas bidimensionais como o estudo da geração do *gap* de energia no grafeno [50].

<sup>2</sup>Esta é uma das maneiras de trabalhar em espaços de dimensionalidade reduzida. Por outro lado, se considerarmos o espaço-tempo com dimensão usual tem-se a *Eletrodinâmica Planar* como uma teoria efetiva, preservando assim a Lei de Coulomb usual.

se forem desprezados os termos de superfície) [6], fazendo da teoria CS invariante de calibre.

Uma das maiores relevâncias associadas a teoria CS é seu comportamento por uma transformação de paridade. Uma transformação de paridade é uma simetria discreta que leva um vetor  $\vec{x}$  na sua reflexão, isto é, em  $-\vec{x}$  [40]. Em 3 dimensões espaciais isto é feito ao rotacionar em torno de um eixo fixo, analogamente a paridade em 2 dimensões tipo espaço, deve alterar o sinal apenas de uma das componentes, com isto

$$A^0 \rightarrow A^0, \quad A^1 \rightarrow -A^1, \quad A^2 \rightarrow A^2, \quad (5.3)$$

assim, se  $\hat{P}$  for o operador paridade é fácil verificar que

$$\hat{P}(\mathcal{L}_{CS}) = -\mathcal{L}_{CS}, \quad (5.4)$$

do ponto de vista prático, a teoria de Chern-Simons se mostra extremamente útil na descrição de fenômenos que quebram a simetria por paridade, como é o caso do efeito Hall quântico fracionário da *Física da Matéria Condensada* [55].

Neste cenário, o potencial vetor é do tipo  $A^\mu = (V, A^1, A^2)$ , além disso, os tensores de *rank-2* da teoria (como é o caso do  $F^{\mu\nu}$ ) possuem 3 componentes independentes (lembre que na *Eletrodinâmica* de Maxwell eram 6 termos, as seis componentes dos campos elétrico e magnético), como o campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (5.5)$$

então o mesmo é bidimensional, de modo que possui duas componentes independentes. Sendo assim, o campo magnético nesta teoria deve ser um escalar! Diretamente se verifica, que

$$F^{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & -B \\ E_y & B & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Matematicamente isto se explica, uma vez que  $\vec{A} = (A^1, A^2)$  e  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , o rotacional de um vetor bidimensional é um escalar [22].

Em um espaço-tempo usual, com 3 dimensões espaciais, linhas de corrente geram um campo magnético com simetria axial em relação ao eixo da corrente. Seja então um plano com uma densidade de carga elétrica  $\rho = \rho(x, y)$  (não necessariamente constante) imerso em uma região com campo elétrico, este plano então estará sujeito à uma diferença de potencial (ddp) localmente nos pontos que o mapeiam, essa ddp gera uma corrente induzida na superfície. Essa corrente é naturalmente bidimensional, onde

podemos analisar a contribuição de cada componente como sendo uma corrente em uma linha reta (que é infinita!) que gera assim um campo magnético com simetria axial que perfura o plano carregado, como mostra a figura abaixo.

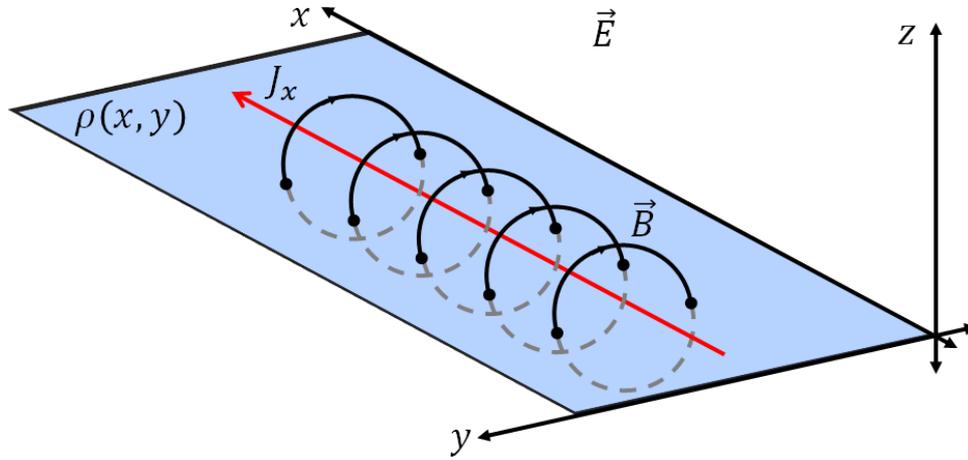


Figura 6: Campo magnético gerado por uma corrente induzida sobre uma placa com densidade superficial de cargas  $\rho = \rho(x, y)$ . Os pontos destacados delimitam a intersecção das linhas de campo com o plano, determinando um fluxo magnético. Fonte: O autor.

Como no espaço da teoria de CS a dimensão (tipo espaço) normal ao plano não existe, o campo magnético de um espaço-tempo  $(3 + 1)$  é refletido como um fluxo magnético em  $(2 + 1)$  dimensões, ou seja um escalar.

Ocorre, no entanto, que o termo CS isolado leva apenas em soluções triviais de campo

$$F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.7)$$

correspondendo ao chamado *gauge* puro. Para eliminar a trivialidade na teoria é preciso acoplar o termo de Chern-Simons à algum outro termo, inicialmente é possível adicionar um termo de corrente

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{1}{c} A_\mu J^\mu, \quad (5.8)$$

com  $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2$ . Esta lagrangiana leva às equações de movimento

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = \frac{1}{c} J^\mu, \quad (5.9)$$

se tomarmos a divergência da equação acima, o primeiro membro é exatamente a identidade de Bianchi e, portanto

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (5.10)$$

que é a conservação da carga.

Em termos das componentes, temos que

$$\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0\nu\rho}F_{\nu\rho} = \frac{1}{c}J^0 \Rightarrow \rho = -\kappa B, \quad (5.11)$$

assim a densidade de carga é proporcional ao fluxo magnético, onde  $\kappa$  é a constante que vincula estas quantidades. As componentes espaciais da corrente, por outro lado

$$j^i = -c\kappa\epsilon^{ij}E_j \quad (5.12)$$

sendo proporcionais à componente transversal do campo elétrico.

Algumas outras possibilidades de eliminar a solução trivial da teoria de Chern-Simons são [44]

- (i) acoplamento a campos de matéria dinâmica (escalares carregados ou férmions),
- (ii) acoplamento ao termo Maxwell,
- (iii) escolher um espaço-tempo com topologia não trivial,
- (iv) campos de calibre não-abelianos (Teorias de Yang-Mills),
- (v) gravidade.

Nesta dissertação iremos trabalhar o modelo CS acoplado ao termo de Maxwell, portanto a lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons (caso com fonte), é dada por [56]

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}A_\mu J^\mu + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho, \quad (5.13)$$

com  $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2$ . Esta lagrangiana leva às equações de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\nu\mu\rho}F_{\mu\rho} = \frac{1}{c}J^\nu, \quad (5.14)$$

imediatamente se verifica que as identidades de Bianchi

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = 0, \quad (5.15)$$

são satisfeitas.

Ao contrário do campo de Proca já discutido, e do modelo BF a ser discutido no capítulo seguinte, a teoria de Maxwell-Chern-Simons não indica explicitamente nada que indique a relação da constante de acoplamento à massa do campo de *gauge*. Evidentemente isso já o é esperado, uma vez que uma análise dimensional mostra que  $[\kappa] = L^{-1} = M$ , indicando que  $\kappa$  deva ter uma relação com a massa. Essa conexão é melhor visualizada ao se calcular o propagador<sup>3</sup> da teoria MCS, o qual exibe um pólo em  $k^2 = \kappa$  [57], similar

<sup>3</sup>O propagador é uma função que especifica a amplitude de probabilidade de uma partícula viajar de um lugar a outro em um determinado tempo [41]. Usualmente o propagador também pode ser visualizado como o inverso do operador de onda apropriado para a partícula sendo, portanto, frequentemente chamado de função de Green (causal) [20].

ao que ocorre em campos massivos, por isso o modelo MCS é “topologicamente massivo”, com a massa topológica igual a  $\sqrt{\kappa}$  [44].

Se expandirmos (5.14) em termos das componentes obtemos as Equações de Maxwell modificadas para o campo elétrico. Fazendo  $\nu = 0$ , a Lei de Gauss se mostra modificada por um termo extra de carga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho + \kappa B = \rho_{eff}, \quad (5.16)$$

de modo que, nesta teoria, o fluxo magnético efetivo gerado pela corrente bidimensional condiciona um acúmulo maior (ou menor, dependendo do sinal de B) de carga. Ainda que  $\rho = 0$ , haveria a carga oriunda do termo de Chern-Simons.

As demais equações são facilmente obtidas

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{1}{c} (j_x + c\kappa E_y) + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (5.17)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{c} (j_y - c\kappa E_x) + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (5.18)$$

em ambas as equações temos que a corrente (assim como a densidade de carga) é modificada por um termo referente à teoria de Chern-Simons.

Por fim, é de fácil verificação que

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (5.19)$$

assim, a Lei de Faraday é a única das equações de Maxwell que não se altera devido ao termo de CS, no entanto pela redução dimensional se torna uma equação escalar.

Em formas diferenciais, a ação de Chern-Simons é descrita pela 1-forma do potencial vetor

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (5.20)$$

consequentemente,  $dA = \partial_\nu A_\rho dx^\nu \wedge dx^\rho$ , portanto

$$\int_{\mathcal{M}_3} A \wedge dA = \int_{\mathcal{M}_3} A_\mu \partial_\nu A_\rho dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho, \quad (5.21)$$

como a 3-forma de base corresponde ao produto do Levi-Civita com uma configuração específica o termo de CS é recuperado. Portanto, a ação de Maxwell-Chern-Simons (com fonte) é

$$S_{MCS} = \frac{1}{2} \int dA \wedge * dA + \frac{\kappa}{2} \int A \wedge dA - \frac{1}{c} \int A \wedge * J, \quad (5.22)$$

ou então, na notação do produto interno

$$S_{MCS} = \frac{1}{2} (dA, dA) + \frac{\kappa}{2} (A, *dA) - \frac{1}{c} (A, J). \quad (5.23)$$

### 5.1.2 Um comentário sobre a Eletrodinâmica em (4+1)-dimensões

O termo de Chern-Simons, da forma como foi definido, está diretamente vinculado à um espaço-tempo de dimensionalidade  $2 + 1$ , pois os índices só coincidem neste cenário. Para estender à teoria para mais dimensões naturalmente o símbolo de Levi-Civita necessitaria adquirir mais índices, que devem ser contraídos, ou com as componentes do campo, ou então com as derivadas do próprio campo, afinal a lagrangiana deve ser um escalar de Lorentz. Naturalmente a lagrangiana não deve ser bilinear nos campos, uma vez que este objeto é simétrico. A outra opção que seria introduzir uma derivada no campo livre também é impossível, haja vista de que no cálculo das equações de movimento o termo de CS iria desaparecer imediatamente. Portanto, teorias de CS exigem, por construção, que a variedade tenha dimensão ímpar<sup>4</sup>.

Em um espaço-tempo de  $4 + 1$  dimensões<sup>5</sup> para espaços de dimensão superiores à usual, de tal forma que não será discutido em profundidade., o termo de CS é dado por

$$\tilde{\mathcal{L}}_{CS} = \frac{\kappa}{6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\rho \partial_\sigma A_\lambda, \quad (5.24)$$

o acento *tilde* indica que a quantidade está em  $5D$ . Em formas diferenciais, a ação de CS se torna

$$\tilde{S}_{CS} = \frac{\kappa}{6} \int_{\mathcal{M}_5} A \wedge dA \wedge dA = \frac{\kappa}{6} (A, *^{-1}dA \wedge dA), \quad (5.25)$$

com  $\tilde{A}^\mu = (A^\mu, A^5)$ , em que não nos preocuparemos com a origem do termo extra<sup>6</sup>. Da maneira pela qual escrevemos  $\tilde{\mathcal{L}}_{CS}$  a mesma não é invariante de *gauge*, no entanto o termo dado pela divergência pode ser eliminado na integração pelo termo de superfície. Esta é então uma característica das teorias de CS que independem da dimensionalidade do espaço-tempo.

Com isso, o *field strength* possui agora 10 componentes independentes, em que

<sup>4</sup>Há uma maneira, no entanto, de construir uma teoria estilo Chern-Simons em  $3 + 1$  dimensões, denominado modelo de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw [58]. Este modelo, entretanto, exige que um campo vetorial de fundo seja considerado, o que viola a simetria do grupo de Lorentz [59].

<sup>5</sup>Esta seção servirá apenas como motivação de generalizar a teoria CS

<sup>6</sup>Teorias de dimensões extras geralmente estão associadas aos efeitos da gravidade, de modo que a quinta componente do potencial deveria fazer alusão ao potencial gravitacional [24].

$$F^{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z & F^{05} \\ E_x & 0 & -B_z & B_y & F^{15} \\ E_y & B_z & 0 & -B_x & F^{25} \\ E_z & -B_y & B_x & 0 & F^{35} \\ -F^{05} & -F^{15} & -F^{25} & -F^{35} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

em que  $F^{\mu 5}$  dependerá da componente extra do potencial e da derivada em relação à essa coordenada, isto é

$$F^{\mu 5} = \partial^\mu A^5 - \partial^5 A^\mu. \quad (5.27)$$

A ação de Maxwell-Chern-Simons em  $5D$  é

$$\tilde{S}_{MCS} = \frac{1}{2} (dA, dA) + \frac{\kappa}{6} (A, {}^{*-1}dA \wedge dA) - \frac{1}{c} (A, J), \quad (5.28)$$

que se derivarmos funcionalmente, nos leva às equações de movimento modificadas por termos de correntes efetivas.

## 6 TEORIAS DE CAMPO TOPOLOGICAMENTE MASSIVAS: O MODELO BF

Como visto no capítulo anterior, a *Eletrodinâmica* modificada por um termo do tipo Chern-Simons, embora explique fenômenos em que o fóton comporta-se como tendo massa, como é o caso de sistemas que violam a simetria CPT, apresenta a particularidade de ser válida apenas em sistemas planares, como é o caso do sistema  $(2 + 1)$ -dimensional. Tentativas de generalizar dimensionalmente a teoria de Maxwell-Chern-Simons para espaços-tempo de dimensão arbitrária e que preserve a invariância de *gauge* possui aplicabilidade imediata no âmbito teórico do estudo de sistemas que a *Eletrodinâmica* de Maxwell é usualmente aplicada, no grupo de Poincaré do tipo  $(3+1)$ -dimensional. Neste capítulo discutiremos a versão abeliana do modelo BF, que constitui-se efetivamente como uma ‘generalização dimensional’ do modelo de Chern-Simons.

### 6.1 Descrição do Modelo BF

Uma maneira de obter a dimensionalidade pretendida para o estudo das teorias é através do dual de formas. O tensor de Faraday é, como já discutido, uma 2-forma. Assim, consideremos uma  $(D - 2)$ -forma  $B$  com a qual construímos o seguinte termo de ação

$$S_{BF} \propto m \int_{\mathcal{M}_D} B \wedge F. \quad (6.1)$$

Ele possui validade dimensional arbitrária, e é um termo topológico uma vez que não está associado à influência da métrica do espaço-tempo.

Em um aspecto histórico, com a proposta de que a matéria não era constituída, a nível fundamental, de partículas pontuais, mas sim de objetos estendidos, as denominadas cordas [41], pensou-se em generalizações da teoria eletromagnética cujas fontes não fossem localmente discretas. Nesse sentido, uma extensão lógica dos procedimentos para se determinar o acoplamento do campo  $A_\mu$  com sua fonte (consulte a equação (4.2)) pode ser utilizada para o campo  $B$  e sua fonte que deve, por construção, ser uma 2-forma [60]. Com efeito, seja  $x = x(\tau, \sigma)$  a parametrização de coordenadas que delimitam os domínios desse objeto estendido, sendo  $\tau$  o tempo próprio e  $\sigma$  o comprimento da corda, assim

$$\int d\tau d\sigma \dot{x}^\mu x'^\nu B^{\mu\nu} = \int d^D x J^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (6.2)$$

com  $\dot{x} = \partial x / \partial \tau$  e  $x' = \partial x / \partial \sigma$ . Como  $B_{\mu\nu}$  é antissimétrico define-se a corrente da corda

(fonte do campo  $B$ ) como

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \delta^D(x - x(\tau, \sigma)) [\dot{x}^\mu x'^\nu - \dot{x}^\nu x'^\mu]. \quad (6.3)$$

O campo antissimétrico  $B$ , é denominado na literatura como campo de Kalb-Ramond (KR), devido aos estudos de Kalb e Ramond[60], e possui aplicações que vão desde teorias de gravidade modificada [61], tentativas de unificar a *Gravitação* e o *Eletromagnetismo* [62] à propriedades óticas do espaço-tempo [63]. Além disso, vale destacar que o *field strength* do campo KR,  $H(= dB)$ , é entendido como fonte de torção no espaço-tempo [64].

Nesta dissertação iremos estudar o acoplamento do campo de Kalb-Ramond com o tensor eletromagnético como um modelo topologicamente massivo [65] para estudar o *Eletromagnetismo*.

## 6.2 Modelo BF abeliano (3+1)-dimensional

Uma teoria (3 + 1)-dimensional modelada pelo termo BF, no aspecto eletromagnético (sem fontes) deve ser dada por uma ação do tipo [66]

$$S_{BF} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{m}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right], \quad (6.4)$$

em que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor de Faraday, e  $H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$  é o *field strength* do potencial de *gauge*  $B_{\mu\nu}$ <sup>1</sup>. Observaremos que existem dois conjuntos de transformações de *gauge* independentes que deixam a ação invariante [67]

$$\begin{cases} \delta_1 A_\mu = \partial_\mu \Lambda, & \delta_1 B_{\mu\nu} = 0, \\ \delta_2 A_\mu = 0, & \delta_2 B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Sigma_\nu - \partial_\nu \Sigma_\mu, \end{cases} \quad (6.5)$$

em que  $\Lambda$  e  $\Sigma_\mu$  são os parâmetros escalar e vetorial de *gauge*, respectivamente.

Verificaremos explicitamente que  $S_{BF}$  (equação 6.4) é invariante pelas transformações locais de calibre (equações 6.5). O primeiro conjunto de transformações retorna

$$\delta_1 F_{\mu\nu} = \partial_\mu (\delta_1 A_\nu) - \partial_\nu (\delta_1 A_\mu) = \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = 0, \quad (6.6)$$

$$\delta_1 H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu (\delta_1 B_{\nu\rho}) + \partial_\nu (\delta_1 B_{\rho\mu}) + \partial_\rho (\delta_1 B_{\mu\nu}) = 0, \quad (6.7)$$

$$\delta_1 (B_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = (\delta_1 B_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} + B_{\mu\nu} (\delta_1 F^{\mu\nu}) = 0, \quad (6.8)$$

portanto

$$\delta_1 S_{BF} = 0. \quad (6.9)$$

---

<sup>1</sup>O *field strength* do potencial de *gauge*  $B_{\mu\nu}$  é obtido de forma similar às identidade de Bianchi do tensor de Faraday, através da anti simetrização do coeficiente da 3-forma  $H = dB$ .

Além disso, o segundo conjunto de transformações locais de calibre retorna

$$\delta_2 F_{\mu\nu} = \partial_\mu(\delta_2 A_\nu) - \partial_\nu(\delta_2 A_\mu) = 0, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 H_{\mu\nu\rho} &= \partial_\mu(\delta_2 B_{\nu\rho}) + \partial_\nu(\delta_2 B_{\rho\mu}) + \partial_\rho(\delta_2 B_{\mu\nu}) \\ &= \partial_\mu(\partial_\nu \Sigma_\rho - \partial_\rho \Sigma_\nu) + \partial_\nu(\partial_\rho \Sigma_\mu - \partial_\mu \Sigma_\rho) + \partial_\rho(\partial_\mu \Sigma_\nu - \partial_\nu \Sigma_\mu) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\delta_2(B_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = (\delta_2 B_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} + B_{\mu\nu}(\delta_2 F^{\mu\nu}) = (\partial_\mu \Sigma_\nu - \partial_\nu \Sigma_\mu) F^{\mu\nu}. \quad (6.12)$$

A variação no termo  $BF$  por transformação de calibre é eliminada através das condições de contorno aferidas aos parâmetros de *gauge*. Portanto,

$$\delta_2 S_{BF} = 0. \quad (6.13)$$

### 6.3 Redução dimensional

O modelo BF, como já discutido, busca ser uma generalização dimensional da teoria de Chern-Simons para a geração de massa topológica, preservando a simetria por transformações locais de *gauge*, assim sendo, uma redução dimensional no problema, isto é, considerar que os campos envolvidos na teoria não se propagam em uma das direções espaciais, deveria retornar os efeitos da teoria CS. Este procedimento foi inicialmente discutido por Govindarajan, Rindani e Sivakumar[68] em um caso geral, sendo explorado no modelo BF por Kumar e Lahiri[67]<sup>2</sup>. Em teorias de maior dimensionalidade,  $D = 4 + 1$  por exemplo, este método assume particular importância na discussão de teorias do tipo Kaluza-Klein de *Gravitação*, com efeito de descrever os fenômenos em 4 dimensões como uma teoria efetiva [67].

Geralmente a redução dimensional é realizada expandindo os campos nos modos normais correspondentes às dimensões extras compactadas, ao fim integrando-as. Esta abordagem é útil no estudo de modelos de campos duais e em teorias de supercordas [65]. Aqui iremos considerar que os campos apenas independem de uma coordenada específica,  $x^3$ , por exemplo. Com efeito

$$\begin{cases} A_{\bar{\mu}} \equiv (A_\mu, A_3) \equiv (A_\mu, \varphi), \\ B_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \equiv (B_{\mu\nu}, B_{\mu 3}) \equiv (B_{\mu\nu}, b_\mu) \\ d \equiv dx^{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} = dx^\mu \partial_\mu + dx^3 \partial_3 = dx^\mu \partial_\mu, \end{cases} \quad (6.14)$$

com  $\mu, \nu = 0, 1$  e  $2$ , e  $\varphi$  e  $b_\mu$  são campos escalar e vetoriais constantes, respectivamente.

<sup>2</sup>Nos estudos de Kumar e Lahiri[67] esta discussão é levantada na formulação covariante a nível de lagrangiana, o que demanda muito mais cálculos do que a abordagem autoral descrita nesta dissertação utilizando o formalismo de formas diferenciais.

Com efeito didático, iremos reescrever o problema no formalismo de formas diferenciais e efetuar a redução dimensional visando fazer uso das características geométricas dos objetos matemáticos, simplificando em muito o processo descrito nas referências já consagradas. A ação, se torna

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \left( \frac{1}{2} H \wedge *H + mB \wedge F + \frac{1}{2} F \wedge *F \right), \quad (6.15)$$

enquanto que as condições de redução dimensão se tornam

$$\begin{cases} A \equiv A_{\bar{\mu}} dx^{\bar{\mu}} = A_{\mu} dx^{\mu} + \varphi dx^3 \equiv \bar{A} + \varphi, \\ B \equiv \frac{1}{2} B_{\bar{\mu}\bar{\nu}} dx^{\bar{\mu}} \wedge dx^{\bar{\nu}} = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} + b_{\mu} dx^{\mu} \wedge dx^3 \equiv \bar{B} + b. \end{cases} \quad (6.16)$$

Neste sentido,  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  são a 1 e 2-forma no espaço  $(2+1)$ -dimensional, enquanto que  $\varphi$  e  $b$  correspondem à respectiva componente 3 desses objetos. Fazendo esta substituição e integrando na dimensão extra

$$(S_{BF})_{eff} = \int_{\mathcal{M}_3} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{H} + db) \wedge *(\bar{H} + db) + m(\bar{B} + b) \wedge (\bar{F} + d\varphi) + \frac{1}{2} (\bar{F} + d\varphi) \wedge *(\bar{F} + d\varphi) \right\},$$

por desenvolvimento explícito obtemos

$$(S_{BF})_{eff} = \int_{\mathcal{M}_3} \left\{ \frac{1}{2} \bar{H} \wedge * \bar{H} + \frac{1}{2} \bar{H} \wedge * db + \frac{1}{2} db \wedge * \bar{H} + \frac{1}{2} db \wedge * db + \frac{1}{2} \bar{F} \wedge * \bar{F} + \frac{1}{2} \bar{F} \wedge * d\varphi + \frac{1}{2} d\varphi \wedge * \bar{F} + \frac{1}{2} d\varphi \wedge * d\varphi + m\bar{B} \wedge \bar{F} + m\bar{B} \wedge d\varphi + mb \wedge \bar{F} + mb \wedge d\varphi \right\}.$$

Observe então que muitos termos dessa ação são, por definição, nulos, como é o caso de termos que combinem de algum modo  $\varphi$  e  $b$

$$b \wedge d\varphi = (b_{\mu} dx^{\mu} \wedge dx^3) \wedge (\partial_{\nu} \varphi dx^{\nu} \wedge dx^3) = 0. \quad (6.17)$$

O mesmo se verifica nos termos 3 e 7 da ação. Por fim, observe que termos do tipo  $T_{(p)} \wedge * dt_{(p-1)}$  são nulos, em que  $T$  são os termos independentes de  $dx^3$ , enquanto que  $t$  corresponde ao  $b$  e ao  $\varphi$ . Além disso, como toda  $(D+1)$ -forma é nula em uma variedade  $D$ -dimensional, o termo  $\bar{B} \wedge \bar{F}$  integrado resulta em zero. Por fim, observe que podemos fazer

$$B \wedge d\varphi = d(B \wedge \varphi) - H \wedge \varphi, \quad (6.18)$$

portanto, se definirmos  $G = db$  o *field strength* para o vetor  $b_{\mu}$ , teremos que a ação efetiva (em componentes) é [67]

$$(S_{BF})_{eff} = \int d^3x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} b_{\rho} + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} - \frac{m}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho} H_{\mu\nu\rho} \varphi + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi + \frac{m}{2} \partial_{\mu} [\epsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho} \varphi] \right]. \quad (6.19)$$

O último termo pode ser descartado por se tratar de uma derivada global, através da imposição dos campos se anularem na fronteira.

Observe, no entanto, que o quinto termo da ação possui relação direta com o *dual* da 3-forma  $H_{\mu\nu\rho}$ , de fato

$$h = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\rho} H_{\mu\nu\rho} \quad (6.20)$$

é um escalar de Lorentz! Dessa forma, podemos escrever

$$H_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho} h, \quad (6.21)$$

portanto a ação se torna

$$(S_{BF})_{eff} = \int d^3x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} b_\rho + \frac{1}{2} h^2 - mh\varphi + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right], \quad (6.22)$$

em que para remover o escalar  $h$  basta tomar a sua equação de movimento e substituí-la na ação. Assim

$$\frac{\delta(S_{BF})_{eff}}{\delta h} = 0 \Rightarrow h - m\varphi = 0, \quad (6.23)$$

portanto

$$(S_{BF})_{eff} = \int d^3x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} b_\rho + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right], \quad (6.24)$$

ou seja, a redução dimensional da ação do modelo BF forneceu a ação do modelo abeliano<sup>3</sup> de Jackiw-Pi<sup>4</sup> [69] adicionada de um campo escalar, real e massivo  $\varphi$ <sup>5</sup>. É imediato de que a ação descrita pela equação (6.24) é exatamente igual à de Jackiw-Pi na escolha do *gauge* axial, isto é  $A_3 = \varphi = 0$ .

### 6.3.1 Invariância de *gauge* em $(S_{BF})_{eff}$

Com a redução dimensional as transformações locais de *gauge* (equações 6.16) são escritas como

$$\begin{cases} \delta_1 A_\mu = \partial_\mu \Lambda, & \delta_1 \varphi = \partial_3 \Lambda = 0, \\ \delta_1 B_{\mu\nu} = 0, & \delta_1 b_\mu = 0, \end{cases} \quad (6.25)$$

<sup>3</sup>A verificação desta conexão em teorias não-abelianas também é verificável, para isso consulte Kumar e Lahiri[67].

<sup>4</sup>Observe que o termo do tipo  $F \wedge b$  é topológico, no sentido de não depender da métrica do espaço-tempo, sendo o equivalente ao termo  $B \wedge F$  em 4 dimensões, por isto o mesmo é chamado termo misto de Chern-Simons.

<sup>5</sup>Essa conexão de redução dimensional e geração de massa já foi verificada na literatura em diversos modelos de campos. Em particular, Khoudeir[70] mostrou que ações de campos vetoriais massivos que preservam a simetria de *gauge* podem ser obtidos a partir da redução dimensional de uma teoria de calibre não massiva em 5 dimensões.

e

$$\begin{cases} \delta_2 A_\mu = 0, & \delta_2 \varphi = 0, \\ \delta_2 B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Sigma_\nu - \partial_\nu \Sigma_\mu, & \delta_2 b_\mu = \partial_\mu \Sigma_3 - \partial_3 \Sigma_\mu = \partial_\mu \Sigma_3. \end{cases} \quad (6.26)$$

Verifiquemos explicitamente se o modelo reduzido dimensionalmente realmente preservou as mesmas simetrias de calibre.

O primeiro conjunto de transformações retorna

$$\delta_1 F_{\mu\nu} = \partial_\mu(\delta_1 A_\nu) - \partial_\nu(\delta_1 A_\mu) = \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = 0, \quad (6.27)$$

$$\delta_1 G_{\mu\nu} = \partial_\mu(\delta_1 b_\nu) - \partial_\nu(\delta_1 b_\mu) = 0, \quad (6.28)$$

$$\delta_1(F_{\mu\nu} b_\rho) = (\delta_1 F_{\mu\nu}) b_\rho + F_{\mu\nu}(\delta_1 b_\rho) = 0, \quad (6.29)$$

$$\delta_1(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta_1 \varphi) = 0, \quad (6.30)$$

portanto

$$\delta_1(S_{BF})_{eff} = 0. \quad (6.31)$$

Além disso, o segundo conjunto de transformações locais de calibre retorna

$$\delta_2 F_{\mu\nu} = \partial_\mu(\delta_2 A_\nu) - \partial_\nu(\delta_2 A_\mu) = 0, \quad (6.32)$$

$$\delta_2 G_{\mu\nu} = \partial_\mu(\delta_2 b_\nu) - \partial_\nu(\delta_2 b_\mu) = \partial_\mu \partial_\nu \Sigma_3 - \partial_\nu \partial_\mu \Sigma_3 = 0, \quad (6.33)$$

$$\delta_2(F_{\mu\nu} b_\rho) = (\delta_2 F_{\mu\nu}) b_\rho + F_{\mu\nu}(\delta_2 b_\rho) = F_{\mu\nu} \partial_\rho \Sigma_3, \quad (6.34)$$

$$\delta_2(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta_2 \varphi) = 0, \quad (6.35)$$

similarmente a variação no termo  $F_{\mu\nu} b_\rho$  pode ser eliminada na integração pelas condições de contorno. Portanto,

$$\delta_2(S_{BF})_{eff} = 0, \quad (6.36)$$

fazendo do modelo, invariante de calibre.

## 6.4 A Teoria Maxwell-BF (3 + 1)-dimensional

Buscaremos estudar um modelo de eletromagnetismo que seja topologicamente massivo e invariante de *gauge*, para isto analisaremos a influência de um termo do tipo  $B \wedge F$  na *Eletrodinâmica* de Maxwell (equação 6.4) em uma variedade (3 + 1)-dimensional lorentziana. Esta abordagem carece de referências na literatura, sendo então as seções 6.4, 6.5 e 6.6 uma contribuição autoral.

Pelas proporções do trabalho, vale relembrar algumas definições, a saber a autodualidade (equação 2.47)

$$**T_{(p)} = (-1)^{p(D-p)+1} T_{(p)},$$

e a coderivada exterior (equação 2.62)

$$d^\dagger \equiv (-1)^{D(p+1)} * d *.$$

Neste sentido, a lagrangiana do modelo pode ser escrita (caso livre) como sendo

$$S_{MBF} = \int_{\mathcal{M}_4} \left( \frac{1}{2} H \wedge * H + m B \wedge F + \frac{1}{2} F \wedge * F \right), \quad (6.37)$$

em que  $F = dA$  e  $H = dB$  são os *field strength* das 1 e 2-formas  $A = A_\mu dx^\mu$  e  $B = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ , respectivamente. Na notação do produto interno, esta ação livre é escrita como

$$S_{MBF} = \frac{1}{2} (H, H) + \frac{1}{2} (F, F) - m (B, *F), \quad (6.38)$$

o negativo no termo  $BF$  se originou da necessidade de se introduzir à identidade

$$\mathbb{1} = {}^{*-1}*, \quad (6.39)$$

em que

$${}^{*-1} = (-1)^{1+p(D-p)}*,$$

é a operação inversa à dualidade de Hodge para variedades lorentzianas (equação 2.49).

Para um entendimento inicial deste modelo verifiquemos às equações de movimento para os campos  $A$  e  $B$  em uma situação de ausência de fontes ( $J = 0$ ). Já verificamos que vale à seguinte propriedade

$$(dT, W) = (T, d^\dagger W), \quad (6.40)$$

assim, buscaremos uma expressão que permita comutar a dualidade de Hodge dentro do produto interno. Sejam, uma  $p$ -forma  $F$  e uma  $(D - p)$ -forma  $B$  em uma variedade lorentziana  $D$ -dimensional, assim

$$\begin{aligned} (F, *B) &= \int_{\mathcal{M}_D} F \wedge ** B \\ &= (-1)^{-(D-p)p+1} \int_{\mathcal{M}_D} F \wedge B \\ &= (-1)^{-(D-p)p+1} (-1)^{p(D-p)} \int_{\mathcal{M}_D} B \wedge F \\ &= (-1) \int_{\mathcal{M}_D} B \wedge F \\ &= (-1)^{2+p(D-p)} \int_{\mathcal{M}_D} B \wedge ** F, \end{aligned} \quad (6.41)$$

no caso particular de  $p = 2$  e  $D = 4$ , obtemos que

$$(B, *F) = (F, *B). \quad (6.42)$$

A determinação das equações de movimento para os campos seguirá, como já discutido, as propriedades do cálculo funcional de formas, assim, as equações de movimento pro campo  $A$  são obtidas via

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{MBF}}{\delta A} = 0 &= d^\dagger F - m d^\dagger *B \\ &= *d^*F - m^* d^{**}B \\ &= *d^*F + m^*H, \end{aligned}$$

portanto

$$d^*F = -mH. \quad (6.43)$$

De maneira similar, determinemos à equação de movimento do campo  $B$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{MBF}}{\delta B} = 0 &= d^\dagger H - m^*F \\ &= *d^*H - m^*F, \end{aligned}$$

portanto

$$d^*H = mF. \quad (6.44)$$

Obtemos, assim, equações de movimento que relacionam os *field strenths*  $H$  e  $F$ , no entanto é possível eliminar  $H$  na equação de movimento de  $F$  tomando a operação  $d^*$  na equação (6.43)

$$d^*d^*F = -md^*H \quad (6.45)$$

usando a equação (6.44) na equação (6.45), e como para uma 2-forma em uma variedade lorentziana quadridimensional  $d^\dagger = *d^*$

$$dd^\dagger F = -m^2F, \quad (6.46)$$

portanto, como  $F$  e  $H$  são formas exatas ( $F = dA$  e  $H = dB$ ) então são formas fechadas pelo Lema de Poincaré, isto é,  $dF = dH = 0$ , fazendo com que  $dd^\dagger = \Delta$  (Operador de Laplace-Beltrami, ver equação 2.71), na métrica de Bjorken-Drell (equação 2.15), por outro lado,  $\Delta = \partial_\mu \partial^\mu = \square$  (Operador d'Alembertiano), portanto

$$(\square + m^2)F = 0, \quad (6.47)$$

de modo análogo é possível mostrar que

$$(\square + m^2) H = 0, \quad (6.48)$$

nesse sentido cada componente dos campos  $F$  e  $H$  (não simultaneamente) oscila como um campo massivo, solução da Equação de Klein-Gordon, como deveria ser uma vez que o modelo BF satisfaz à equação de Einstein  $p^\mu p_\mu = m^2$ . A relação do parâmetro  $m$  com a massa associada ao campo dá a interpretação da massa topológica do campo.

Com o efeito de visualizar que o campo eletromagnético, neste sentido, adquire massa, tomemos um *ansatz* como solução da equação (6.44) do tipo

$${}^*H = mA + d\varphi, \quad (6.49)$$

em que  $\varphi$  é uma 0-forma associada às condições de contorno do campo. Com efeito,

$$\begin{aligned} {}^*d^*F &= -m(mA + d\varphi) \\ {}^*d^*dA &= -m^2A - md\varphi \\ \square A - d^*d^*A &= -m^2A - md\varphi \\ (\square + m^2)A &= d({}^*d^*A - m\varphi), \end{aligned} \quad (6.50)$$

se tomarmos a seguinte condição de calibre

$$d^\dagger A = m\varphi, \quad (6.51)$$

como sendo o *gauge* de Lorentz generalizado, obtemos que o campo eletromagnético obedece à Equação de Klein-Gordon<sup>6</sup>

$$(\square + m^2)A = 0. \quad (6.52)$$

Este resultado, consoante com a teoria de Maxwell-Proca, bem como a mesma contagem de graus de liberdade físicos, revela que há uma relação de dualidade entre uma teoria vetorial (Proca) e um modelo tensorial (BF), que são objetos matematicamente distintos. Matematicamente já foi verificado que campos de *gauge* estão conectados por uma rede intrincada de dualidades [71], observadas através da redefinição dos campos [16, 72]. Recentemente Maluf et al.[73] verificaram a dualização em modelos acoplados com férmions, verificando essa conexão para além das teorias livres.

---

<sup>6</sup>Com efeito de  $m$  representar uma massa não nula para o fóton então  $k^\mu k_\mu \neq 0$  (equação de Einstein), levando à não existência de uma simetria de *gauge* residual [10], logo apenas um grau de liberdade é não físico na teoria de fóton massivo, de modo que deve haver um grau de polarização longitudinal à propagação da onda eletromagnética.

### 6.5 Obtenção das equações de movimento

A ação do modelo na presença de uma fonte para o campo  $A$ , isto é, com  $J \neq 0$ , leva à obtenção das seguintes equações

$$d^\dagger F = -m^* H + \frac{1}{c} J, \quad (6.53)$$

$$d^\dagger H = m^* F, \quad (6.54)$$

como se espera, o limite  $m \rightarrow 0$  faz com que a equação (6.53) seja igual às equações de Maxwell não-homogêneas<sup>7</sup>, de tal forma que a *Eletrodinâmica* de Maxwell configura-se como um caso particular da *Eletrodinâmica* de Maxwell-BF.

Usando o *ansatz* da seção anterior para resolver a segunda equação, obtemos que a primeira equação se torna

$$\begin{aligned} d^\dagger F &= -m^2 A - m d\varphi + c^{-1} J \\ d^\dagger dA + d(m\varphi) + m^2 A &= c^{-1} J \\ d^\dagger dA + d d^\dagger A + m^2 A &= c^{-1} J \\ (\square + m^2) A &= c^{-1} J, \end{aligned} \quad (6.55)$$

da segunda para a terceira linha foi usada a condição de Lorentz generalizada. Por outro lado, se quisermos deixar o resultado em termos da divergência do tensor intensidade do campo eletromagnético, temos

$$d^\dagger F = c^{-1} J - m^2 A_m, \quad (6.56)$$

onde  $A_m \equiv A + d\varphi/m$ , é o quadripotencial vetor efetivo<sup>8</sup>. Imediatamente verifica-se que no limite da massa tender à zero recupera-se o conteúdo da *Eletrodinâmica* de Maxwell e neste caso obtemos termos proporcionais à potências de  $m$ , o qual verificamos na seção anterior ser um fator de massa topológica ao campo do fóton.

Uma questão à ser discutida é a invariância de *gauge* que aparentemente foi violada ao termos explicitamente o campo  $A_\mu$  nas equações de movimento, além de um

<sup>7</sup>As Equações de Maxwell homogêneas não são modificadas no cenário de  $m \neq 0$ , uma vez que as identidades de Bianchi permanecem as mesmas.

<sup>8</sup>No sistema de unidades geometrizadas (ou naturais) constata-se que [10]

$$[L] = [T] = \frac{1}{[M]},$$

com  $[X]$  representando a unidade da quantidade  $X$  (sendo  $L$ ,  $T$  e  $M$  as quantidades de comprimento (do inglês, *length*), tempo (do inglês, *time*) e massa (do inglês, *mass*) respectivamente) portanto o fator de massa no termo  $\Phi$  automaticamente corrige as unidades, haja vista  $d\varphi$  possuir dimensão de inverso de massa devido ser dado por uma derivada com relação às coordenadas.

outro termo,  $\Phi = d\varphi$ , o qual denominaremos aqui por potencial vetor topológico. Na notação de formas diferenciais, as transformações de *gauge* (equações 6.5) se tornam

$$\begin{cases} \delta_1 A = d\Lambda, & \delta_1 B = 0, \\ \delta_2 A = 0, & \delta_2 B = d\Sigma, \end{cases} \quad (6.57)$$

com  $\Lambda$  e  $\Sigma$  sendo uma 0 e 1-formas, respectivamente. Evidencia-se, novamente, que devido aos *field strength* serem definidos como formas exatas, pelo Lema de Poincaré, constituem-se como formas fechadas, portanto  $\delta_i H = \delta_i F = 0$ , com  $i = 1, 2$ .

Assim sendo, buscaremos o conjunto de transformações do potencial vetor topológico, explicitamente o primeiro conjunto de transformações, na equação (6.49), fornece

$$\delta_1^* H = m\delta_1 A + \delta_1 \Phi \Rightarrow \delta_1 \Phi = -md\Lambda, \quad (6.58)$$

enquanto que

$$\delta_2^* H = m\delta_2 A + \delta_2 \Phi \Rightarrow \delta_2 \Phi = 0, \quad (6.59)$$

de fato, observe que a equação (6.56) não carrega unicamente o potencial vetor, mas sim  $A_m = A + \Phi/m$ , o qual imediatamente

$$\delta_i A_m = 0, \quad (6.60)$$

é invariante pelas transformações de calibre da teoria. Além disso, é direto que

$$F_m = dA_m = F, \quad (6.61)$$

de tal forma que os tensores de Faraday são iguais, representando a mesma quantidade física, uma vez que as identidades de Bianchi são satisfeitas. Portanto, em termos do quadripotencial vetor efetivo, as equações de movimento são

$$d^\dagger F_m = \frac{1}{c} J - m^2 A_m. \quad (6.62)$$

### 6.5.1 Equações de Maxwell-BF

Obtidas as equações de Maxwell-BF na notação de formas diferenciais, podemos escrevê-las vetorialmente em termos de suas componentes, isto juntamente da Lei de força de Lorentz (equação 3.25) representará todo o conteúdo teórico do *Eletromagnetismo*.

As equações não-homogêneas de Maxwell-BF, em componentes são dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} J^\nu - m^2 A_m^\nu, \quad (6.63)$$

com  $J^\mu = (c\rho, \vec{j})$  e  $A^\mu = (V, \vec{A})$ . Seja  $\mu = i$  e  $\nu = j$ , diretamente obtém-se

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j} - m^2 \vec{A}_m, \quad (6.64)$$

enquanto que  $\mu = i$  e  $\nu = 0$  retorna

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - m^2 V_m, \quad (6.65)$$

devido ao tensor de Faraday não ter sofrido modificações, então à identidade de Bianchi permanece válida, de modo que as equações homogêneas permanecem da mesma forma, isto é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.66)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (6.67)$$

Empregando as técnicas do cálculo vetorial, podemos exprimir estes resultados através de uma formulação integral,

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} + m^2 \int_V V d\tau = Q_{enc}, \quad (6.68)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0, \quad (6.69)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -c^{-1} \frac{\partial \Phi_{\vec{E},S}}{\partial t}, \quad (6.70)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} + m^2 \Phi_{\vec{A},S} = c^{-1} I_{enc} + c^{-1} \frac{\partial \Phi_{\vec{E},S}}{\partial t}, \quad (6.71)$$

onde  $\Phi_{\vec{X},S}$  é o fluxo do campo vetorial  $\vec{X}$  na superfície delimitada por  $\partial S$ .

### 6.5.2 Conservação da carga e a dinâmica de $\varphi$

A conservação global da carga elétrica é observada nos mais diversos processos físicos, tais como a colisão de partículas, decaimentos e produção de pares [12], constituindo-se assim como uma das simetrias fundamentais da *Física*. É razoável que toda teoria que busque, consistentemente, explicar fenômenos eletromagnéticos esteja em acordo com a conservação da carga elétrica, de tal forma que se impusermos à divergência sobre à equação de movimento (equação 6.62) com a imposição  $d^\dagger J = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} d^\dagger J &= d^\dagger A_m \\ &= d^\dagger A + \frac{1}{m} d^\dagger d\varphi, \end{aligned} \quad (6.72)$$

fazendo  $d^\dagger A = m\varphi$  (*gauge* de Lorentz generalizado, equação 6.51), e como  $d^\dagger\varphi = 0$ , temos que

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (6.73)$$

de modo que  $\varphi$  também é solução da Equação de Klein-Gordon.

### 6.5.3 Solução geral das equações de Maxwell-BF

Um questionamento natural à ser feito é como obter a solução para os mais diversos problemas, uma vez conhecida a fonte  $J$ . A partir da equação (6.62) podemos escrever, no *gauge* de Lorentz Generalizado,

$$(\square + m^2)A_m = \frac{1}{c}J, \quad (6.74)$$

a solução desta equação nos fornece  $A_m$ , que é a solução das equações de Maxwell corrigida pelo fator oriundo da massa topológica. Ao estudarmos alguns problemas com mais rigor será realizada a comparação entre  $A_m$  e  $A$  (a solução das equações de Maxwell usuais, isto é, no caso  $m = 0$ ) onde buscaremos a existência da possibilidade de verificação experimental da massa topológica em problemas clássicos.

Existem muitas maneiras de se buscar resolver uma equação diferencial, sendo a mais utilizada, o método de separação de variáveis, muito útil na resolução das equações de Laplace, mas ineficaz para problemas não-homogêneos [22]. Uma maneira elegante de contornar este problema reside na teoria das funções de Green, que se constitui como um mecanismo geral para a obtenção de soluções de equações diferenciais parciais não-homogêneas [41]. Os detalhes da teoria (em caráter de revisão) constituem o Apêndice B.2.

## 6.6 Eletrostática na Teoria MBF

Esta seção buscará compreender aspectos práticos da teoria de Maxwell-BF em sistemas do tipo  $(3 + 1)$ -dimensional, verificando as modificações mais imediatas na *Eletrostática* de Maxwell. O interesse pelo regime (independente do tempo) é inerente à gama de fenômenos eletromagnéticos que podem ser investigados sem levar em conta a dependência temporal dos mesmos. Atualmente, todos estes fenômenos são descritos pela *Eletrostática* de Maxwell e é natural neste trabalho estendermos esta descrição<sup>9</sup> para o modelo BF. Neste cenário, em que os campos são independentes do tempo, a E.D.P. se

---

<sup>9</sup>O mesmo poderia ser feito para a Magnetostática, onde a causa a ser imposta na função de Green é a densidade de corrente elétrica.

torna

$$(\nabla^2 - m^2)A_m^\mu = -c^{-1}j^\mu, \quad (6.75)$$

equivalendo à E.D.P. de Helmholtz modificada.

O cerne da *Eletrostática* reside no entendimento do campo (ou do potencial) elétrico de uma carga puntiforme em todos os pontos do espaço, tal configuração de carga é localizada no espaço e mapeada como

$$\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (6.76)$$

de tal forma que toda a carga se encontra concentrada em  $\vec{x} = \vec{x}'$ . Com a informação da distribuição de carga é possível determinar o potencial elétrico, que satisfaz a equação (6.75). Para isto precisaremos estabelecer as condições de contorno que o problema deve satisfazer, a mais natural é de que a interação diminua com a distância, a chamada ‘condição de finitude’

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} V(\vec{x}) = 0, \quad (6.77)$$

e que o potencial seja avaliado sobre todo o espaço, isto é  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ . A partir disso podemos determinar a Função de Green  $G(\vec{x}, \vec{x}')$  do operador  $(\nabla^2 - m^2)$ , tal que

$$(\nabla^2 - m^2)G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (6.78)$$

Assim, pode-se resolver este problema expandindo as funções no espaço de Fourier ( $\mathbb{K}^3$ )<sup>10</sup> determinando, assim, a função de Green associada ao operador e adequada à condição de finitude. O resultado é

$$G_m(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (6.79)$$

Imediatamente a presença de uma fonte  $\rho(\vec{x}')$  que, nesse caso, é interpretada como uma densidade da distribuição de carga elétrica gera um efeito em  $\vec{x}$ , o qual dá-se o nome de potencial elétrico, definido por

$$V_m(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' G_m(\vec{x}, \vec{x}')\rho(\vec{x}'). \quad (6.80)$$

O objetivo desta seção é, de modo geral, obter o campo elétrico dos problemas clássicos fazendo o contraponto teórico dos efeitos da massa topológica em situações clássicas, sendo necessário conhecer apenas a distribuição de cargas  $\rho(\vec{x}')$ .

<sup>10</sup>O desenvolvimento completo consta no Apêndice B.2.

### 6.6.1 A carga pontual

Como já definido a distribuição volumétrica da carga pontual e, uma vez que sua integral de volume

$$Q = q \int_{\mathcal{V}} d^3 \vec{x}' \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (6.81)$$

equivale à sua carga total. Portanto, o potencial elétrico gerado por esta carga é dado por

$$V(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (6.82)$$

equivalendo, como esperado da teoria de Proca, a um potencial do tipo Yukawa, isto é, de curto alcance.

Veja que o potencial elétrico de Yukawa satisfaz os seguintes limites

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_m(r) = 0, \quad (6.83)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_m(r) = \infty, \quad (6.84)$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} V_m(r) = V(r), \quad (6.85)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m(r) = 0. \quad (6.86)$$

A equação (6.83) nos diz que o potencial vai a zero para pontos muito distantes da carga pontual, enquanto que a equação (6.85) mostra que o potencial elétrico devido a esta carga na teoria de Maxwell-BF se comporta como o potencial usual de Maxwell no limite de  $m$  indo à zero, como esperado. Por outro lado, o limite em que  $m$  tende ao infinito gera a anulação do potencial, de fato, a massa reside unicamente no termo exponencial que decai com o aumento de  $m$ . Por fim, a equação (6.84) contém uma informação exatamente igual ao caso usual, o potencial diverge na origem, isto é, sobre a carga puntiforme.

O campo elétrico, por outro lado é obtido pelo gradiente do potencial, uma vez que as equações de Maxwell Homogêneas (equações 6.66 e 6.67) não sofreram modificações, assim fazendo  $\vec{x}' = 0$  e  $|\vec{x}| = r$

$$\begin{aligned} \vec{E}_m(r) &= -\vec{\nabla} V_m(r) \\ &= -\frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\exp(-mr)}{r} \right] \hat{r} \\ &= \frac{q}{4\pi r^2} [1 + mr] e^{-mr} \hat{r}. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Como esperado, o limite  $m \rightarrow 0$  retorna a Lei de Coulomb.

### 6.6.2 A Lei de Gauss

Tendo o campo elétrico é possível calcular o seu fluxo através de uma superfície fechada que encerre completamente a carga elétrica. Por questões de simetria, escolhamos  $\partial\mathcal{V}$  como uma esfera de raio  $R$  centrada na carga. Assim

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{a}, \quad (6.88)$$

como  $\vec{E} \parallel d\vec{a}$  e  $da = r^2 d\Omega$ , com  $d\Omega$  o ângulo sólido. Tem-se, então, que

$$\Phi_{\vec{E}} = q(1 + mR)e^{-mR}, \quad (6.89)$$

fazendo com que o fluxo elétrico dependa explicitamente da superfície ‘gaussiana’ escolhida. De fato, das equações de Maxwell-BF, lembre que, a Lei de Gauss se torna<sup>11</sup>

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{a} + m^2 \int_{\mathcal{V}} V d\tau = Q_{enc}, \quad (6.90)$$

com efeito o fluxo elétrico sob uma determinada superfície é sempre menor do que o seria no caso usual, devido ao campo agora ser de curto alcance.

Com a premissa de que o Princípio da Superposição permanece válido, pode-se construir o campo elétrico de uma distribuição qualquer mapeando-a através de  $dq = d^3\vec{x}\rho(\vec{x})$ , tal que o campo e o potencial ficam determinados.

A vantagem de calcular o campo elétrico através do fluxo sob uma determinada superfície reside no aproveitamento das simetrias do problema de modo a tornar a integral volumétrica em uma integral sobre uma única coordenada, comentaremos brevemente três casos particulares, a esfera carregada, o fio infinito e o plano infinito.

- O caso da esfera condutora de raio  $R$ , possui a mesma simetria (esférica) da carga puntiforme, de tal forma que o resultado encontrado é justamente a solução da equação

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = q(1 + mr)e^{-mr} \quad (6.91)$$

imediatamente, observa-se que o campo elétrico de uma esfera carregada comporta-se como se toda a carga estivesse localizada em seu centro

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi r^2}(1 + mr)e^{-mr}. \quad (6.92)$$

- O fio infinito, por outro lado possui simetria cilíndrica, de tal forma que uma superfície cilíndrica de raio  $r$  e comprimento  $l$  que seja coaxial ao fio permite o cálculo do

<sup>11</sup>De fato, o potencial de Yukawa e o campo obtido a partir dele satisfazem a Lei de Gauss corrigida.

campo elétrico, o qual, devido à sua simetria, é normal à  $\partial\mathcal{V}$  em todos os pontos, portanto, seja  $q = \lambda l$  ( $\lambda$  é a densidade linear de carga), tem-se que

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r}(1 + mr)e^{-mr}\hat{r}, \quad (6.93)$$

similar ao encontrado pro campo da esfera, o resultado de Maxwell limitado por um fator do tipo  $\xi(m, r) = (1 + mr)e^{-mr}$ .

- Por fim, um exemplo de simetria planar é o plano infinito, no qual a superfície gaussiana é a famosa ‘caixa de pílulas’ de área superficial  $a$ , sendo  $q = 2a\sigma$  ( $\sigma$  é a densidade linear de carga), assim

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2}\xi(m, r)\hat{r}, \quad (6.94)$$

embora fosse claro devido aos problemas anteriores este é um resultado a se destacar, pois no caso de Maxwell o campo elétrico sob um plano infinito é constante, isto é, não depende da distância entre o ponto e a distribuição de carga, na teoria massiva isto não é verdade, o campo decai pelo fator de Yukawa.

### 6.6.3 O dipolo elétrico e a condição de aproximação multipolar

O dipolo elétrico, como o nome sugere, constitui-se como um sistema contendo duas cargas puntiformes com cargas opostas tomadas a uma distância relativa fixa  $2r'$ , de tal forma que deseja-se obter a configuração do potencial elétrico em qualquer região do espaço devido à esta distribuição discreta de cargas. Uma representação esquemática do sistema de interesse está descrita na figura 7.

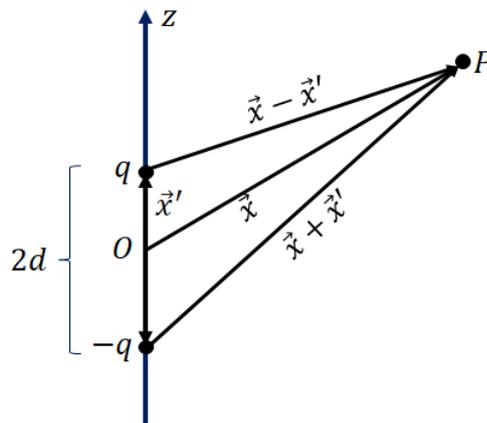


Figura 7: Um dipolo é uma distribuição discreta de duas cargas de mesmo módulo, e sinal contrário mantidas à uma distância relativa entre si fixa no tempo. Fonte: O autor.

Devido a linearidade dos operadores diferenciais, o Princípio da Superposição é sempre verificado, portanto o potencial em um ponto  $P$  qualquer em  $\mathbb{R}^3$  deve ser dado

como a contribuição de cada carga individualmente, ou seja

$$V_d(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{e^{-m|\vec{x}+\vec{x}'|}}{|\vec{x}+\vec{x}'|} \right], \quad (6.95)$$

esta expressão dá o valor exato do potencial em qualquer ponto  $P \in \mathbb{R}^3$ .

Contudo, os maiores interesses de se determinar o potencial são para distâncias suficientemente grandes da distribuição de carga elétrica, de tal forma que pode-se questionar quais condições regem as regiões para que se considere que o ponto  $P$  está muito distante de uma distribuição de cargas de volume finito. Para isto iremos enunciar a “condição de aproximação multipolar” na forma de um teorema.

**Teorema 1** (Condição de aproximação multipolar). *Seja uma distribuição de cargas restrita em um volume finito  $\mathcal{V}$  do espaço, este que é simplesmente conexo. O volume  $\mathcal{V}$  é o menor volume que contém todos os elementos da distribuição de cargas. As distâncias (euclidianas, reais e positivamente definidas) entre dois pontos arbitrários  $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$  e entre um ponto arbitrário  $x_3 \in \mathcal{V}$  e  $P \in \mathbb{R}^3$  são denotadas por  $d(x_1, x_2)$  e  $d(x_3, P)$ , respectivamente. Sejam assim, dois conjuntos  $\xi$  e  $\chi$  definidos como*

$$\xi = \{d(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathcal{V}\} \quad (6.96)$$

$$\chi = \{d(x_3, P) | x_3 \in \mathcal{V} \text{ e } P \in \mathbb{R}^3\}, \quad (6.97)$$

desta forma, diz-se que  $P$  está muito afastado de  $\mathcal{V}$  quando

$$\frac{\max \xi}{\min \chi} \ll 1. \quad (6.98)$$

Com efeito, buscaremos uma maneira de aplicar esta condição ao problema, expandindo-o em uma Série de Taylor. De fato, é imediato que  $\max \xi = 2x'$ , enquanto que a menor distância da distribuição à  $P$  é  $\min \chi = |\vec{x} - \vec{x}'|$ , assim a condição se torna

$$\frac{2x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \ll 1, \quad (6.99)$$

como  $x' > 0$  e  $|\vec{x} - \vec{x}'| > 0$ , sendo o segundo menor que o primeiro, segue que o quadrado de cada obedece a mesma desigualdade. Usando a definição de norma

$$3 \left( \frac{x'}{x} \right)^2 + 2 \left( \frac{x'}{x} \right) \cos \theta \ll 1, \quad (6.100)$$

em que  $\theta$  é o ângulo formado entre os vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{x}'$ . Devido ao caráter oscilatório da função cosseno, podemos reescrever a condição limitando o máximo da função, assim

$$3 \left( \frac{x'}{x} \right)^2 + 2 \left( \frac{x'}{x} \right) \ll 1, \quad (6.101)$$

por fim, como  $2x < 3x$  e  $x+1 > 1$  para todo  $x > 0$ , a condição de aproximação multipolar é garantida se

$$\frac{x'}{x} \ll 1, \quad (6.102)$$

dessa forma pode-se tomar uma expansão de Taylor do potencial considerando aproximações de termos da ordem de  $\mathcal{O}(x'/x)$ .

De fato, usando da lei dos cossenos anteriormente empregada, o potencial de cada carga do dipolo é reescrito como

$$V_{\pm}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi x} \frac{\exp[-mx\Omega_{\pm}(x, x', \theta)]}{\Omega_{\pm}(x, x', \theta)}, \quad (6.103)$$

em que

$$\Omega_{\pm}(x, x', \theta) \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \pm \left(\frac{x'}{x}\right) \cos \theta}, \quad (6.104)$$

considerando uma expansão nos termos de primeira ordem, isto é

$$\Omega_{\pm}(x, x', \theta) \approx \Omega_{\pm}(x, x', \theta) \Big|_{\left(\frac{x'}{x}\right)=0} + \frac{\partial \Omega_{\pm}(x, x', \theta)}{\partial (x'/x)} \Big|_{\left(\frac{x'}{x}\right)=0} \left(\frac{x'}{x}\right), \quad (6.105)$$

portanto

$$\Omega_{\pm}(x, x', \theta) = \frac{1}{x} e^{-mx} \left[ 1 \mp (1 + mx) \left(\frac{x'}{x} \cos \theta\right) \right], \quad (6.106)$$

portanto, o potencial elétrico do dipolo pode ser escrito como

$$V_d(\vec{x}) \approx \frac{2q}{4\pi x} e^{-mx} (1 + mx) \left(\frac{x'}{x}\right) \cos \theta, \quad (6.107)$$

definindo um vetor de momento de dipolo

$$\vec{p} \equiv 2qx' \hat{x}_3, \quad (6.108)$$

pode-se escrever

$$V_d(\vec{x}) \approx \frac{1}{4\pi x^2} e^{-mx} (1 + mx) \vec{p} \cdot \hat{x}, \quad (6.109)$$

é imediato que esta solução obedece à condição de finitude do potencial, e o caso  $m \rightarrow 0$  retorna o caso usual.

## 7 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

### 7.1 Considerações Finais

Nesta dissertação, fizemos inicialmente uma revisão dos tópicos de *Matemática* mais requisitados para a compreensão deste texto e implementamos isto ao estudo da teoria Eletromagnética de Maxwell, dissertando sobre as formulações vetoriais, tensoriais e em formas diferenciais, evidenciando a redução de componentes (e conseqüentemente das equações) para a descrição de um sistema físico. Esta abordagem evidenciou como uma generalização das ferramentas matemáticas possibilita uma interpretação mais assertiva sobre propriedades e características intrínsecas à teoria, como a conservação de carga e a invariância de *gauge* (calibre).

Após isto iniciamos uma discussão sobre teorias vetoriais massivas, com uma discussão do campo de Proca, que embora não seja invariante de calibre altera substancialmente a natureza do potencial, justamente ao efeito de atribuir uma massa de repouso não nula ao fóton. Verificamos que na transição de fase de um material supercondutor, os fótons em seu interior comportam como partículas massivas, fazendo com que o campo eletromagnético seja expulso do interior do material. Em sequência analisamos as principais características da teoria de Chern-Simons em espaços-tempo do tipo  $(2 + 1)$  e  $(4 + 1)$ -dimensional evidenciando as modificações na Eletrodinâmica com um termo topologicamente massivo.

Como contraponto à teoria de Chern-Simons, é discutido em detalhes o modelo BF como uma generalização para variedades de dimensão arbitrária. Foi mostrado ainda que esse termo é invariante sob dois conjuntos de transformações de *gauge* e leva o fóton a possuir uma massa de repouso não nula sem ferir a equação de Einstein  $p^2 = m^2$ . Discutimos ainda a redução dimensional do modelo BF e verificamos que o grau de liberdade no processo de redução se desacoplou como um campo escalar massivo.

Por fim, foi feita uma breve discussão sobre a *Eletrostática* no cenário de validade da teoria de Maxwell-BF, revelando explicitamente os efeitos da blindagem no potencial eletrostático com a resolução de alguns problemas clássicos.

### 7.2 Perspectivas futuras

Como perspectivas futuras ao desenvolvimento dessa dissertação algumas opções são imediatas, como a generalização da teoria da radiação, esta tem como objeto de estudo o comportamento dos campos elétrico e magnético produzidos pelo movimento de

cargas aceleradas. As características destes campos dependem fortemente da dinâmica das cargas envolvidas, fazendo com que as equações que descrevem o movimento destas cargas tenham um papel essencial na descrição quantitativa da radiação produzida por tais cargas.

Além disso, outra extensão imediata deste trabalho seria estudar as propriedades da *Ótica* nos limites de fóton massivo, uma vez que como em *Teorias de Campo*, a massa nula elimina um grau de liberdade físico do sistema, na teoria Maxwell-BF esse grau de liberdade deve existir, como um grau de polarização longitudinal da luz, o que deve levar à efeitos óticos distintos.

Por outro lado, a solução do problema obtida neste trabalho poderia ser condensada em termos de uma permissividade elétrica modificada por um termo referente ao potencial elétrico explícito na Lei de Gauss. Portanto, um potencial trabalho seria desenvolver a *Eletrodinâmica* na matéria como uma teoria efetiva da dinâmica do fóton descrito pela Equação de Helmholtz.

Por fim, um último aprimoramento desse trabalho poderia ser a construção de um termo topológico em 5 dimensões do tipo

$$S \propto \int_{\mathcal{M}_5} \phi H \wedge F, \quad (7.1)$$

como um modelo de Randall-Sundrum. Com esta ação as derivadas podem ser organizadas para que se tenha um termo do tipo  $d\phi \wedge B \wedge F$ , que ao impor que o campo escalar obedeça uma solução de parede de domínio (do inglês, *Domain Wall Solution*), leva ao ser integrado na direção 5, uma teoria BF efetiva na membrana e estudar a localização dos campos: escalar, vetorial e  $p$ -forma.

## APÊNDICE A – FORMALISMO LAGRANGIANO DE CAMPOS

Para se trabalhar classicamente sistemas físicos sem se preocupar com as forças presentes e abandonando o cálculo vetorial existem duas formulações equivalentes entre si e com suposições que as tornam fisicamente equivalentes à *Dinâmica* de Newton. Ambas as formulações tomam como pressuposto fundamental o Princípio de Hamilton, que gera as chamadas Equações de Euler-Lagrange, que descrevem a dinâmica do sistema.

Em linhas gerais, seja um sistema discreto (isto é, constituído de partículas não relativísticas) descrito completamente por um conjunto de coordenadas generalizadas<sup>1</sup>  $(q_j, \dot{q}_j, t)$ , donde  $j = 1, 2, \dots, s$  com  $s$  sendo o número de graus de liberdade do sistema, dessa forma, a evolução temporal de um sistema sujeito à restrições (físicas e/ou geométricas) se realiza de modo a minimizar<sup>2</sup> a integral de tempo da lagrangiana, a qual é chamada de ação.

Matematicamente, a lagrangiana ( $L$ ) é definida como a diferença das energias cinética ( $T$ ) e potencial ( $V$ ), portanto, a ação é dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t), \quad (\text{A.1})$$

em que o Princípio de Hamilton, ao implicar que  $\delta S = 0$  (com  $\delta$  representando a derivada funcional) leva à obtenção das equações de movimento, denominadas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Para que este formalismo seja consistente com a *Mecânica* de Newton, é preciso que os potenciais sejam conservativos e que as restrições físicas e/ou geométricas sejam tais que conectem as coordenadas [74].

Além disso é preciso definir o momento conjugado à  $j$ -ésima coordenada, como

---

<sup>1</sup>Dá-se o nome ‘coordenada generalizada’ à qualquer conjunto de coordenadas que descreva completamente o estado (graus de liberdade) de um sistema. Uma discussão mais profunda sobre o conceito e necessidade de um conjunto mais geral de coordenadas pode ser encontrado em Thornton e Marion[74], seção 7.3.

<sup>2</sup>Em um aspecto mais geral o Princípio de Hamilton se relaciona apenas ao fato de a evolução temporal de um sistema ‘extremizar’ a ação, isto é, levar sua primeira derivada como sendo nula, no entanto, experimentalmente verifica-se que a maior parte dos sistemas físicos tomam o caminho de minimização, sendo muitas vezes chamado de Princípio da Mínima Ação [7].

sendo

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad (\text{A.3})$$

implicando diretamente em

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad (\text{A.4})$$

estas duas relações permitem à escrita de um novo formalismo. Se num determinado sistema a lagrangiana for cíclica com relação à alguma coordenada, isto é, que não dependa explicitamente da mesma, então o momento canônico será uma constante de movimento, portanto, uma transformação de Legendre na lagrangiana que nos permita escrever um objeto do tipo  $H = H(q_j, p_j, t)$  é claramente mais vantajoso por eliminar graus de liberdade de sistemas que apresentam simetria. Empregando a definição dos momentos conjugados, podemos escrever [74]

$$H = p_j \dot{q}_j - L, \quad (\text{A.5})$$

como sendo a hamiltoniana<sup>3</sup> do sistema. As equações de movimento de Hamilton são

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{e} \quad -\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (\text{A.6})$$

### A.1 Transição para o contínuo

Em um sistema relativístico a descrição de partículas deve ser mediada por campos, de modo a eliminar a problemática da ação a distância. Sejam os campos escalares<sup>4</sup>, definidos em um contínuo da posição  $\vec{x}$  e do tempo, o conjunto de coordenadas generalizadas, esta descrição levará o problema à espaços de configuração dotados de infinitos graus de liberdade, de modo que será preciso mapear a lagrangiana por uma função densidade da mesma, tal que

$$L = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (\text{A.7})$$

de modo que a ação é uma integral da densidade lagrangiana em uma variedade [75]

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (\text{A.8})$$

---

<sup>3</sup>Fisicamente a hamiltoniana está associada a energia total do sistema. No caso em que a energia cinética é uma função quadrática de  $\dot{q}_j$  e a energia potencial é independente das velocidades, temos que  $H = T + V = E$ .

<sup>4</sup>Um campo escalar é definido como

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

isto é, um invariante sob um conjunto de transformações.

a qual leva diretamente, via Princípio de Hamilton, às equações de Euler-Lagrange que descrevem a dinâmica dos campos associados [6]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Se definirmos o campo momento canonicamente conjugado ao campo  $\phi(\vec{x}, t)$  de forma análoga ao feito no caso discreto

$$\pi(\vec{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad (\text{A.10})$$

nos leva diretamente à definição da densidade hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (\text{A.11})$$

cujas equações de Hamilton<sup>5</sup> são

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \quad \text{e} \quad -\dot{\pi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi}, \quad (\text{A.12})$$

em que a derivada funcional com relação ao campo é dada por

$$\frac{\delta}{\delta \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)}. \quad (\text{A.13})$$

## A.2 Teorema de Noether

A densidade lagrangiana (e conseqüentemente a hamiltoniana) varia de problema para problema, de tal modo que muitas vezes pode ocorrer de, a partir de propriedades do sistema físico, termos de supor uma forma funcional base para a lagrangiana. Por exemplo, em um caso de um pêndulo simples, sabemos que a energia potencial que molda o movimento confinado da partícula é do tipo  $mgh$ , enquanto que sua energia cinética é quadrática no módulo da velocidade.

Um artifício muito recorrente na construção de densidades lagrangianas é fazer uso das simetrias naturais do sistema, que levam à quantidades conservadas, ou então iniciar o problema constatando as constantes de movimento e a partir delas obter as simetrias. Exemplo de simetrias e quantidades conservadas em *Física Clássica* constituem a tabela abaixo,

Esta possibilidade é governada pelo Teorema de Noether, que associa à cada simetria contínua (não apenas as mencionadas na tabela acima), uma quantidade con-

---

<sup>5</sup>Independente de qual descrição (lagrangiana ou hamiltoniana) se escolha trabalhar é fundamental compreender que a descrição e o entendimento físico do problema reside nas equações de movimento dos campos, não na escolha de se trabalhar com  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{H}$ , afinal ambos são conectados por uma transformada de Legendre. Por questões convencionais, em teorias de campo, é preferível adotar o formalismo lagrangiano.

Característica (sistema)	Propriedade (lagrangiana)	Conservação
Homogêneo no tempo	Sem função explícita do tempo	Energia total
Homogêneo no espaço	Invariante por translação	Momento linear
Isotrópico no espaço	Invariante por rotação	Momento angular

Tabela 3: Simetrias e quantidades conservadas na Mecânica Lagrangiana. Fonte: Adaptado de Thornton e Marion[74].

servada<sup>6</sup> [9]. Seja uma transformação infinitesimal  $\delta\phi$  que leve à uma transformação na densidade lagrangiana

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi), \quad (\text{A.14})$$

usando as Equações de Euler-Lagrange, obtemos que, se a transformação  $\delta\phi$  deixa a lagrangiana invariante, então  $\delta\mathcal{L} = 0$  e, portanto

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) = 0, \quad (\text{A.15})$$

levando diretamente à uma quantidade conservada. O Teorema de Noether é, sem dúvidas, um dos teoremas mais elegantes em Física!

### A.3 Simetria por translação no espaço-tempo

Como caso particular para avaliar a carga de Noether iremos tomar um sistema com simetria por translações infinitesimais ( $x' = x + \epsilon$ ) no espaço-tempo.

Assim, pela definição do campo escalar, com o emprego de uma expansão de Taylor até termos lineares em  $\epsilon^\mu$ , obtemos

$$\delta\phi(x) = -\epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x), \quad (\text{A.16})$$

sendo que  $\mathcal{L}$  também obedece essa variação por ser um campo escalar. Com isto, para um parâmetro  $\epsilon$  arbitrário obtemos à seguinte equação de continuidade

$$\partial_\mu\mathcal{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.17})$$

sendo a quantidade,

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (\text{A.18})$$

uma constante de movimento.

A interpretação dessa constante se dá mediante a análise de suas componentes individuais. Para  $\nu = 0$ , a equação de continuidade

$$\partial_\mu\mathcal{T}^{\mu 0} = 0, \quad (\text{A.19})$$

<sup>6</sup>Esta quantidade geralmente é denominada carga ou corrente de Noether.

em que

$$\mathcal{T}^{00} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \quad (\text{A.20})$$

sendo assim relacionado à densidade de energia armazenada em  $\phi$ , enquanto que

$$\mathcal{T}^{i0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \dot{\phi}, \quad (\text{A.21})$$

represente uma corrente de energia. Consequentemente  $\mathcal{T}^{i0}$  corresponde à uma densidade de momento linear, tal que o objeto

$$P^\mu \equiv \int d^3\vec{x} \mathcal{T}^{\mu 0}, \quad (\text{A.22})$$

representa a quantidade de energia e momento. Por fim, a quantidade

$$\mathcal{T}^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \partial^i \phi - \eta^{ij} \mathcal{L}, \quad (\text{A.23})$$

é uma corrente de momento.

Portanto, a quantidade conservada nesta simetria é o momento e energia do campo  $\phi$ , de modo que  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  é chamado tensor energia-momento.

### A.3.1 O tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ do Eletromagnetismo

Como aplicação direta do discutido anteriormente apliquemos para o caso do campo eletromagnético na teoria de Maxwell e vamos analisar as componentes do tensor energia-momento. A densidade lagrangiana de Maxwell (no vácuo, sem fontes) é dada por

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{A.24})$$

neste caso o campo escalar  $\phi$  é substituído pelo campo de *gauge*  $A^\mu$ , portanto [6]

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = F^{\lambda\mu} \partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda}. \quad (\text{A.25})$$

Com efeito, o tensor momento-energia obtido diretamente da aplicação do campo de *gauge* na expressão da corrente de Noether não é simétrico, no entanto é possível simetrizá-lo adicionando uma divergência, do tipo  $\partial^\nu A_\lambda \rightarrow \partial^\lambda A_\nu + F^\nu{}_\lambda$ , sem que isto modifique a interpretação física [6]. O resultado desse procedimento é um tensor simétrico [5]

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda} F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda}, \quad (\text{A.26})$$

a componente  $\mu = \nu = 0$ , leva diretamente à (em termos dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ )

$$\mathcal{T}^{00} = \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2), \quad (\text{A.27})$$

que é a densidade de energia armazenada no campo eletromagnético.

Assim, a corrente de energia é fornecida pela componente ( $\mu = 0, \nu = i$ )

$$\mathcal{T}^{0i} = \left( \vec{E} \times \vec{B} \right)^i, \quad (\text{A.28})$$

sendo a  $i$ -ésima componente do vetor de Poynting. Enquanto que a corrente de momento,  $\mathcal{T}^{ij}$  corresponde ao tensor das tensões de Maxwell (equação 3.15)

$$\mathcal{T}^{ij} = -E^i E^j - B^i B^j + \frac{1}{2} \eta^{ij} \left( |\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right), \quad (\text{A.29})$$

é fácil ver que além de simétrico<sup>7</sup>,  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  possui traço nulo<sup>8</sup>, portanto este tensor possui 9 componentes independentes ( $\mathcal{T}^{00}, \mathcal{T}^{01}, \mathcal{T}^{02}, \mathcal{T}^{03}, \mathcal{T}^{12}, \mathcal{T}^{13}, \mathcal{T}^{23}, \mathcal{T}^{11}, \mathcal{T}^{22}$ ).

---

<sup>7</sup>O tensor momento-energia ser simétrico é requisito fundamental para a conservação do tensor momento angular

$$L^{\beta\gamma} = \int \mathcal{M}^{0\beta\gamma} d^3x,$$

em que  $\mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta} x^\gamma - T^{\alpha\gamma} x^\beta$  é o tensor corrente de momento angular orbital.

<sup>8</sup>Isto permite escrever uma das componentes da diagonal principal em termos das outras três, por exemplo escolhamos  $\mathcal{T}^{33} = -(\mathcal{T}^{00} + \mathcal{T}^{11} + \mathcal{T}^{22})$ .

## APÊNDICE B – ALGUMAS NOÇÕES MATEMÁTICAS

O objetivo deste apêndice é fazer uma revisão de noções de *Matemática* complementares ao entendimento geral da dissertação.

### B.1 Símbolo de Levi-Civita

Através de dois vetores é possível multiplicá-los de duas formas distintas, através do produto escalar (que gera um escalar relacionado à projeção de um sobre o outro) e do produto vetorial (que gera um vetor normal ao plano de seus vetores geradores, cujo módulo é dado pela área do paralelogramo formado pelos mesmos). O produto escalar pode ser representado da seguinte forma

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \delta_{ij} u_i v_j, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\delta_{ij}$  é o tensor simétrico e isotrópico de *rank* 2, tal que  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e nulo caso contrário. O produto vetorial, por outro lado é dado por

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Na tentativa de se poder exprimir o produto vetorial de forma similar ao produto escalar, podemos definir um objeto de três índices, totalmente antissimétrico, denominado símbolo de Levi-Civita, como sendo

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (ijk) \text{ for uma permutação par de } (123) \\ -1 & \text{se } (ijk) \text{ for uma permutação ímpar de } (123) \\ 0 & \text{se alguns ou todos os índices forem iguais} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

assim o produto vetorial pode ser escrito de forma sucinta

$$\vec{u} \times \vec{v} = \epsilon_{ijk} \hat{e}_i u_j v_k, \quad (\text{B.4})$$

com todos os índices contraídos.

Outra característica relevante para o uso deste símbolo está em permitir a escrita conveniente do determinante de uma matriz  $M$  quadrada qualquer. Seja  $M_{3 \times 3}$ ,

pode-se mostrar que [5]

$$\epsilon_{abc} \det M = \epsilon_{ijk} M_{ia} M_{jb} M_{kc}. \quad (\text{B.5})$$

É recorrente nos cálculos haver a contração entre objetos do tipo Levi-Civita, de modo que o conhecimento de certas relações se mostram fundamentais. As relações mais recorrentes são [20]

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}, \quad (\text{B.6})$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{njk} = 2\delta_{in}, \quad (\text{B.7})$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6. \quad (\text{B.8})$$

Uma relação não muito empregada mas que serve para ilustrar uma forma mais geral de determinar a anti simetrização de dois símbolos com todos os índices distintos é tomar o determinante de uma matriz composta por deltas de Kronecker com o primeiro índice correndo sobre as linhas e o segundo sobre as colunas [5]. Com efeito, observe que para três índices

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} - \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km}, \quad (\text{B.9})$$

em termos da forma reduzida do determinante se torna

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

portanto, o produto de símbolos em  $D$  dimensões é tal que

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_D} = \begin{vmatrix} \delta_{\mu_1 \nu_1} & \delta_{\mu_1 \nu_2} & \dots & \delta_{\mu_1 \nu_D} \\ \delta_{\mu_2 \nu_1} & \delta_{\mu_2 \nu_2} & \dots & \delta_{\mu_2 \nu_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\mu_D \nu_1} & \delta_{\mu_D \nu_2} & \dots & \delta_{\mu_D \nu_D} \end{vmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

Para rotações observa-se que o símbolo de Levi-Civita se comporta como um tensor isotrópico de *rank*  $D$ . No entanto, para transformações ortogonais gerais o mesmo não se mantém invariante<sup>1</sup>, sendo assim um pseudotensor.

<sup>1</sup>Uma discussão mais abrangente sobre o assunto pode ser encontrada em Butkov [20], sessão 16.5.

## B.2 Teoria das Funções de Green

Para a compreensão dinâmica de situações físicas é recorrente a necessidade de resolver uma (ou várias) equações diferenciais, sendo o método da separação de variáveis o mais empregado na solução de EDP's homogêneas. No *Eletromagnetismo*, os casos não homogêneos representam fontes de campo, isto é, indicam a existência de cargas e/ou correntes, carregando consigo uma complexidade para a obtenção da solução. Veremos neste apêndice, de modo simplificado, o método das funções de Green, o qual não exigirá a distinção do tipo de fonte.

### B.2.1 Visão Geral

O interesse tanto matemático, quanto físico, na teoria das Funções de Green se resume à resolver equações do tipo

$$\hat{O}f(x) = g(x), \quad (\text{B.12})$$

em que  $\hat{O}$  é um operador diferencial de segunda ordem com algumas condições de contorno e  $x$  é o conjunto de coordenadas que descrevem completamente o sistema. Neste sentido, postula-se a existência de uma função de dois pontos,  $G(x, x')$ , tal que

$$f(x) = \int dx' G(x, x')g(x'), \quad (\text{B.13})$$

consequentemente, como  $\hat{O}$  é um operador diferencial nas coordenadas sem linha, nosso problema se resume em resolver a seguinte equação

$$\hat{O}G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (\text{B.14})$$

obter  $G(x, x')$  e integrar juntamente à  $g(x')$ . A relevância do método das funções de Green é sua universalização no aspecto de ser uma característica do operador, e não da 'fonte'  $g(x)$ . Além disso, se  $G(x, x')$  é uma função de Green, existem infinitas funções do tipo

$$G(x, x') \rightarrow G(x, x') + F(x, x'), \quad (\text{B.15})$$

desde que

$$\hat{O}F(x, x') = 0, \quad (\text{B.16})$$

seja homogênea. Essa liberdade na escolha de  $F(x, x')$  nos permite ajustar a função de Green para se adequar às condições de contorno pretendidas<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Em geral, para problemas de *Eletrostática*, a condição de contorno será tomada de modo que o potencial elétrico tenda à zero nas bordas do Universo [52].

### B.2.2 Aplicação

O problema mais fundamental da *Eletrostática* consiste em resolver a Equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho, \tag{B.17}$$

para uma carga puntiforme  $\rho = q\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ . Com efeito, a solução é dada pelo potencial de Coulomb, de tal forma que a função de Green (para as condições de contorno do problema) é (a menos de constantes multiplicativas)

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{B.18}$$

o potencial elétrico de uma carga unitária. Fisicamente é a função de Green que faz o mapeamento da distribuição de cargas e/ou correntes (dadas certas condições de contorno) em um outro ponto no qual o efeito será avaliado.

A função de Green se mostra interessante pois independe da distribuição da fonte, depende unicamente do operador diferencial e das condições de contorno. Torna-se útil, exprimir a função de Green de alguns operadores recorrentes em *Física Teórica*, com condições de contorno do tipo  $G(x \rightarrow \infty) = 0$ ,

	Laplace $\nabla^2$	Helmholtz $\nabla^2 + k^2$	Helmholtz (modificada) $\nabla^2 - k^2$
$d = 1$	Sem solução $(-\infty, \infty)$	$\frac{i}{2k} \exp\{ik \vec{x} - \vec{x}' \}$	$\frac{1}{2k} \exp\{-k \vec{x} - \vec{x}' \}$
$d = 2$	$-\frac{1}{2\pi} \ln \vec{x} - \vec{x}' $	$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \vec{x} - \vec{x}' )$	$\frac{1}{2\pi} K_0(k \vec{x} - \vec{x}' )$
$d = 3$	$\frac{1}{4\pi} \frac{1}{ \vec{x} - \vec{x}' }$	$\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{ik \vec{x} - \vec{x}' \}}{ \vec{x} - \vec{x}' }$	$\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{-k \vec{x} - \vec{x}' \}}{ \vec{x} - \vec{x}' }$

Tabela 4: Funções de Green de alguns operadores diferenciais de segunda ordem com condições de contorno de Dirichlet, em que  $H_0^{(1)}$  e  $K_0$  são as funções de Henkel e Bessel (modificada). Adaptado de Arfken e Weber[22].

### B.2.3 Cálculo da Função de Green para o fóton massivo

Pelos objetivos desta dissertação iremos determinar a função de Green, para o caso estático, isto é  $\partial_t = 0$ , a equação (6.74) se torna

$$(\nabla^2 - m^2) \bar{A}(\vec{x}) = -\frac{1}{c} J(\vec{x}), \tag{B.19}$$

o objetivo aqui é então determinar a função de Green do operador de Helmholtz modificado ( $\hat{\mathcal{O}} = \nabla^2 - m^2$ ). A EDP elíptica do tipo

$$(\nabla^2 - m^2)f(\vec{x}) = g(\vec{x}), \tag{B.20}$$

com  $f, g$  analíticas, pode ser explorada através da análise de suas transformadas de Fourier<sup>3</sup>, definidas por

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}), \quad (\text{B.21})$$

sendo  $\tilde{f}(\vec{k})$  o correspondente da função no espaço vetorial  $\mathbb{K}^3$ , definida como

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}). \quad (\text{B.22})$$

Supondo que exista uma função de Green para o operador de Helmholtz, então devemos ter

$$\hat{\mathcal{O}}f(\vec{x}) = g(\vec{x}), \quad (\text{B.23})$$

com efeito,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{g}(\vec{k}) &= (\nabla^2 - m^2) \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}) \\ &= [(i\vec{k}) \cdot (i\vec{k}) - m^2] \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}) \\ &= -(\vec{k}^2 + m^2) \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}), \end{aligned}$$

como  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$  constitui um conjunto linearmente independente (e infinito) em ambos os espaços vetoriais, concluí-se que

$$\tilde{f}(\vec{k}) = -\frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} \tilde{g}(\vec{k}), \quad (\text{B.24})$$

portanto

$$f(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' g(\vec{x}') \times \left\{ - \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \right\}, \quad (\text{B.25})$$

a segunda integral é, por definição a função de Green

$$G_m(\vec{x}, \vec{x}') = - \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}. \quad (\text{B.26})$$

A função de Green (equação B.26), por outro lado, possui dois polos<sup>4</sup> simples ( $k = \pm im$ ), de tal forma que a integração deve ser realizada sobre o plano complexo. Sem perda de generalidade, tomemos coordenadas polares esféricas, nas quais o elemento de volume é

$$d^3\vec{k} = k^2 dk d\phi d(\cos \theta), \quad (\text{B.27})$$

<sup>3</sup>Para uma revisão sobre transformadas de Fourier, consulte a seção 10.4 do livro do Professor Neto[5].

<sup>4</sup>Um polo é um ponto ou região, também denominada singularidade, na qual a função não é analítica, não existindo integral por consequência imediata.

além disso o sistema pode ser rotacionado de modo que  $\vec{k} \parallel (\vec{x} - \vec{x}')$  e se  $|\vec{x} - \vec{x}'| = r$ , obtemos

$$G_m(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{1}{k^2 + m^2} e^{ikr \cos \theta}, \quad (\text{B.28})$$

por cálculo direto

$$G_m(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{8\pi^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dk k \frac{1}{k^2 + m^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}). \quad (\text{B.29})$$

De fato, há dois polos simples em  $k = \pm im$ , de tal forma que pode-se organizar o denominador de modo a destacar os polos separadamente,

$$G_m(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk k \frac{1}{(k + im)(k - im)} (e^{ikr} - e^{-ikr}), \quad (\text{B.30})$$

pelo teorema dos resíduos<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} G_m(\vec{x}, \vec{x}') &= \frac{i}{8\pi^2 r} 2\pi i \left[ \frac{e^{-mr}}{2} + \frac{e^{mr}}{2} + \frac{e^{mr}}{2} + \frac{e^{-mr}}{2} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi r} [e^{-mr} + e^{mr}], \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

por fim, deve-se ter que a função de Green satisfaça a condição de finitude, portanto

$$G_m(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (\text{B.32})$$

tendo o potencial Coulombiano como um caso particular de  $m = 0$ , sendo simétrico  $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x})$  devido a função de Green depender unicamente do módulo da diferença entre os vetores.

---

<sup>5</sup>O teorema dos resíduos diz que se  $f(z)$  com  $z \in \mathbb{C}$  for analítica em todo o espaço, com exceção (talvez) em pontos  $z = \omega_i$  (singularidades), e  $\mathcal{C}$  for uma curva simples fechada no interior desta vizinhança e em torno das singularidades, então a integral de Cauchy é dada por

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res} f(\omega_i),$$

em que “Res” é chamado de resíduo de  $f$  em  $\omega_i$  [20]. Para um estudo mais detalhado, consulte o capítulo 15 do livro-texto do Professor Neto[41].

## APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Por uma questão de completeza, neste apêndice, apresentaremos as demonstrações de relações importantes que foram omitidas ao longo do texto principal.

### C.1 Relações de autodualidade

I) Queremos demonstrar que uma  $p$ -forma,  $T_{(p)} \in \Omega^p(\mathcal{M})$ , donde a variedade  $(\mathcal{M}, g)$  é riemanniana, a autodualidade é tal que

$$**T_{(p)} = (-1)^{p(D-p)}T_{(p)}. \quad (\text{C.1})$$

*Demonstração.* Seja uma  $p$ -forma geral

$$T_{(p)} = \frac{1}{p!}T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{C.2})$$

seu *dual* será então dado por (equação 2.44)

$$*T_{(p)} = \frac{1}{p!}T_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{1}{(D-p)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_D} \sqrt{|g|} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D}, \quad (\text{C.3})$$

consequentemente o *dual* do *dual*

$$**T_{(p)} = \frac{1}{p!}T_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{1}{(D-p)!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_D} \sqrt{|g|} \frac{1}{p!} \epsilon^{\nu_{p+1} \dots \nu_D \lambda_1 \dots \lambda_p} \sqrt{|g|} dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_p}, \quad (\text{C.4})$$

lembre, no entanto que

$$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} = g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \dots g^{\mu_D \nu_D} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_D} = g^{-1} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_D}, \quad (\text{C.5})$$

onde  $g = \det g_{\mu\nu}$ . Dessa forma ao abaixar os  $p$  índices do primeiro símbolo de Levi-Civita, com os  $D-p$  índices do segundo, teremos baixado  $D$  índices. Assim

$$**T_{(p)} = \frac{|g|}{p! p! (D-p)! g} T_{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_D} \epsilon_{\nu_{p+1} \dots \nu_D \lambda_1 \dots \lambda_p} dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_p}, \quad (\text{C.6})$$

podemos ordenar os índices do segundo  $\epsilon$ , o que nos dá um fator multiplicativo de  $(-1)^{p(D-p)}$ . Pela total anti simetria compartilhada entre os Símbolos de Levi-Civita e a  $p$ -forma de base, ao correr sobre todos os valores possíveis de  $\nu$  e  $\lambda$  deveremos ter um fator multiplicativo de  $p!(D-p)!$ , de modo que concluímos a demonstração

$$**T_{(p)} = (-1)^{p(D-p)}T_{(p)}. \quad (\text{C.7})$$

□

**II)** Queremos demonstrar que uma  $p$ -forma,  $T_{(p)} \in \Omega^p(\mathcal{M})$ , donde a variedade  $(\mathcal{M}, \eta)$  é lorentziana, a autodualidade é tal que

$$**T_{(p)} = (-1)^{p(D-p)+1}T_{(p)}, \quad (\text{C.8})$$

*Demonstração.* Neste caso iremos analisar os mesmos procedimentos, mas para uma variedade do tipo Lorentz  $(\mathcal{M}, \eta)$ , neste caso tomaremos uma métrica do tipo Bjorken-Drell, cuja assinatura é do tipo  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$ , dessa forma,  $\eta = -1$ .

Os procedimentos serão exatamente os mesmos da demonstração anterior, de modo que obteremos

$$**T_{(p)} = (-1)^{p(D-p)} \frac{|\eta|}{p! \eta} T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{C.9})$$

portanto, a condição de autodualidade se manifesta como sendo,

$$**T_{(p)} = (-1)^{p(D-p)+1}T_{(p)}. \quad (\text{C.10})$$

□

## C.2 Propriedades do cálculo exterior

**I)** Queremos demonstrar que

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} = (-1)^{pq}W_{(q)} \wedge T_{(p)}, \quad (\text{C.11})$$

onde  $T_{(p)}$  e  $W_{(q)}$  são uma  $p$  e uma  $q$ -forma, respectivamente.

*Demonstração.* Seja o produto exterior dessas formas

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} = T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} W_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q}, \quad (\text{C.12})$$

como o produto exterior de duas 1-forma é anticomutativo, para cada permutação de  $dx^{\mu_p}$  com  $dx^{\nu_j}$  irá produzir um fator multiplicativo “ $-1$ ”, assim, como  $1 \leq j \leq q$ , temos que

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} = (-1)^q T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} W_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q} \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{C.13})$$

como são  $p$  objetos (1-formas) para permutar dessa maneira, então teremos que

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} = (-1)^{pq} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} W_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q} \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{C.14})$$

como  $T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$  e  $W_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_q}$  são escalares, concluímos que

$$T_{(p)} \wedge W_{(q)} = (-1)^{pq} W_{(q)} \wedge T_{(p)}, \quad (\text{C.15})$$

tal que o produto exterior será comutativo (ou não comutativo) dependendo da ordem das formas envolvidas.  $\square$

**II)** Queremos demonstrar que

$$T_{(p)} \wedge T_{(p)} = 0 \quad (\text{C.16})$$

para  $p$  ímpar.

*Demonstração.* A propriedade demonstrada anteriormente vale para duas formas diferenciais quaisquer, em particular tomemos esta relação para duas  $p$ -formas iguais, assim

$$T_{(p)} \wedge T_{(p)} = (-1)^{p^2} T_{(p)} \wedge T_{(p)}, \quad (\text{C.17})$$

o caso em que  $p$  é um número par não leva a nada conclusivo, no entanto, se  $p$  for um número ímpar então  $p^2$  também o é. Dessa forma

$$T_{(p)} \wedge T_{(p)} = -T_{(p)} \wedge T_{(p)}, \quad (\text{C.18})$$

portanto,

$$T_{(p)} \wedge T_{(p)} = 0; \text{ se } p \text{ for ímpar.} \quad (\text{C.19})$$

$\square$

**III)** Queremos demonstrar que

$$d(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) = (dT_{(p)}) \wedge W_{(q)} + (-1)^p T_{(p)} \wedge (dW_{(q)}), \quad (\text{C.20})$$

que é a regra de Leibniz para a derivada exterior.

*Demonstração.* Seja  $T_{(p)}$  e  $W_{(q)}$  uma  $p$  e uma  $q$ -forma, respectivamente, tal que

$$T_{(p)} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \cdots \mu_p} \bigwedge_p, \quad (\text{C.21})$$

por efeito de simplificação estamos definindo a  $p$ -forma de base como sendo

$$\bigwedge_p \equiv dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{C.22})$$

assim a derivada exterior do produto das formas será dada como

$$d(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) = \partial_i dx^i \wedge \left( \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} \bigwedge_p \wedge \frac{1}{q!} W_{\nu_1 \dots \nu_q} \bigwedge_q \right), \quad (\text{C.23})$$

como  $T_{\mu_1 \dots \mu_p}$  e  $W_{\nu_1 \dots \nu_q}$  são 0-formas, podemos reorganizar a equação da seguinte maneira

$$d(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) = \partial_i (T_{\mu_1 \dots \mu_p} W_{\nu_1 \dots \nu_q}) \left( dx^i \wedge \frac{1}{p!} \bigwedge_p \wedge \frac{1}{q!} \bigwedge_q \right), \quad (\text{C.24})$$

usando a regra de Leibniz usual

$$d(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) = (\partial_i T_{\mu_1 \dots \mu_p} W_{\nu_1 \dots \nu_q} + T_{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_i W_{\nu_1 \dots \nu_q}) \left( dx^i \wedge \frac{1}{p!} \bigwedge_p \wedge \frac{1}{q!} \bigwedge_q \right), \quad (\text{C.25})$$

assim, como

$$\left( dx^i \wedge \frac{1}{p!} \bigwedge_p \wedge \frac{1}{q!} \bigwedge_q \right) = (-1)^p \left( \frac{1}{p!} \bigwedge_p \wedge dx^i \wedge \frac{1}{q!} \bigwedge_q \right), \quad (\text{C.26})$$

obtemos,

$$\begin{aligned} d(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) &= \left[ \frac{1}{p!} (\partial_i T_{\mu_1 \dots \mu_p}) dx^i \wedge \bigwedge_p \right] \wedge \left[ \frac{1}{q!} W_{\nu_1 \dots \nu_q} \bigwedge_q \right] \\ &\quad + (-1)^p \left[ \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} \bigwedge_p \right] \wedge \left[ \frac{1}{q!} (\partial_i W_{\nu_1 \dots \nu_q}) dx^i \wedge \bigwedge_q \right], \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

portanto,

$$d(T_{(p)} \wedge W_{(q)}) = (dT_{(p)}) \wedge W_{(q)} + (-1)^p T_{(p)} \wedge (dW_{(q)}). \quad (\text{C.28})$$

□

**IV)** Queremos demonstrar que

$$d^2 T_{(p)} = ddT_{(p)} = 0 \quad \forall p, \quad (\text{C.29})$$

que é o *Lema de Poincaré*.

*Demonstração.* Seja uma  $p$ -forma geral

$$T_{(p)} = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{C.30})$$

a derivada exterior do mesmo será consequentemente uma  $(p+1)$ -forma

$$dT_{(p)} = \frac{1}{p!} (\partial_j T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}) dx^j \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{C.31})$$

atuando novamente  $d$  obtemos a  $(p+2)$ -forma

$$d^2T_{(p)} = \frac{1}{p!} (\partial_k \partial_j T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}) dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{C.32})$$

como  $\partial_k \partial_j$  é simétrico na permutação desses dois índices, e  $dx^k \wedge dx^j$  é antissimétrico na permutação dos mesmos índices, sua contração é zero, logo

$$d^2T_{(p)} = ddT_{(p)} = 0. \quad (\text{C.33})$$

□

V) Queremos demonstrar que se  $T_{(p)}$  e  $W_{(p-1)}$  pertencerem à uma variedade riemanniana, compacta, orientável e nula nos contornos então

$$(dW, T) = (W, d^\dagger T). \quad (\text{C.34})$$

*Demonstração.* Uma maneira de produzir as  $D$ -formas pretendidas é através da seguinte derivação

$$d(W * T) = dW * T - (-1)^p W \wedge d^* T, \quad (\text{C.35})$$

afim de transformar a última derivada em uma coderivada iremos introduzir a seguinte identidade

$$\mathbb{1} = (-1)^{(D-p+1)[D-(D-p+1)]^{**}} = (-1)^{Dp+D+p+1^{**}}, \quad (\text{C.36})$$

assim, como a variedade é riemanniana

$$d(W * T) = dW * T - W * d^\dagger T, \quad (\text{C.37})$$

diretamente vale a seguinte igualdade

$$\int_{\mathcal{M}} d(W * T) = \int_{\mathcal{M}} dW * T - \int_{\mathcal{M}} W * d^\dagger T. \quad (\text{C.38})$$

no entanto, como  $\mathcal{M}$  é orientável com fronteira  $\partial\mathcal{M}$  com orientação induzida podemos aplicar Teorema Generalizado de Stokes<sup>1</sup> [21]

$$\int_{\mathcal{M}} d(W * T) = \int_{\partial\mathcal{M}} W * T = 0, \quad (\text{C.39})$$

onde a última igualdade foi assumida! Portanto, temos que

$$(dW, T) = (W, d^\dagger T). \quad (\text{C.40})$$

---

<sup>1</sup>O Teorema Generalizado de Stokes também é conhecido como Teorema de Barrow-Newton-Leibniz-Gauss-Ostrogradski-Green-Stokes-Poincaré [30], do qual podem ser demonstrados todos os teoremas do cálculo vetorial usual.

□

**C.3 Cálculo Exterior em  $\mathbb{E}^3$** I) Queremos demonstrar que, em  $\mathbb{E}^3$ 

$$d^\dagger v = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (\text{C.41})$$

isto é, que a coderivada exterior recai sobre o divergente (a menos de um sinal) de um vetor no cálculo usual.

*Demonstração.* Seja uma 1-forma,  $v = v_i dx^i$ , em  $\mathbb{E}^3$ , assim

$$\begin{aligned} d^\dagger v &= (-1)^{3 \cdot 1 + 3 + 1} * d * (v_i dx^i) \\ &= - * d \left( \frac{1}{2} v_i \epsilon_{mni} dx^m \wedge dx^n \right) \\ &= - * \left( \frac{1}{2} \partial_j v_i \epsilon_{mni} dx^j \wedge dx^m \wedge dx^n \right) \\ &= - * \left( \frac{1}{2} \partial_j v_i \epsilon_{mni} \epsilon^{jmn} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right) \\ &= - * \left( \frac{1}{2} \partial_j v_i \epsilon_{mni} \epsilon^{jmn} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right) \\ &= -\frac{1}{3!} \partial_i v_i \epsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \end{aligned}$$

portanto,

$$d^\dagger v = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (\text{C.42})$$

□

II) Queremos demonstrar que, em  $\mathbb{E}^3$ 

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi, \quad (\text{C.43})$$

isto é, que o operador de Laplace-Beltrami recai sobre o laplaciano de uma função escalar.

*Demonstração.* Seja a 0-forma  $\phi$ , no  $\mathbb{E}^3$ , assim

$$\Delta \phi = (d^\dagger d + d d^\dagger) \phi, \quad (\text{C.44})$$

imediatamente  $d^\dagger \phi = 0$ , o que nos leva à

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= d^\dagger d\phi \\
&= (-1)^{3\cdot 0+3+1} *d * (\partial_i\phi dx^i) \\
&= *d \left( \frac{1}{2}\epsilon_{mni}\partial_i\phi dx^m \wedge dx^n \right) \\
&= * \left( \frac{1}{2}\epsilon_{mni}\partial_j\partial_i\phi dx^j \wedge dx^m \wedge dx^n \right) \\
&= * \left( \frac{1}{2}\epsilon_{mni}\partial_j\partial_i\phi \epsilon^{jmn} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right) \\
&= * (\delta_i^j \partial_j \partial_i \phi dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\
&= * (\nabla^2 \phi dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\
&= \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \nabla^2 \phi dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\
&= \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \nabla^2 \phi \epsilon^{ijk},
\end{aligned}$$

portanto,

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi, \quad (\text{C.45})$$

□

I) Queremos demonstrar que, em  $\mathbb{E}^3$

$$\Delta v = -\nabla^2 \vec{v}, \quad (\text{C.46})$$

isto é, que o operador de Laplace-Beltrami recai sobre o laplaciano (a menos de um sinal) de um vetor.

*Demonstração.* Seja o vetor  $\vec{v}$ , representado por  $v = v_i dx^i$ , assim desejamos obter

$$\Delta v = (d^\dagger d + dd^\dagger) v_i dx^i, \quad (\text{C.47})$$

faremos este cálculo separadamente. Primeiramente observe que,

$$\begin{aligned}
d^\dagger dv_i dx^i &= (-1)^{3\cdot 2+3+1} *d * (\partial_j v_i dx^j \wedge dx^i) \\
&= *d (\partial_j v_i \epsilon_{kji} dx^k) \\
&= - * (\partial_l \partial_j v_i \epsilon_{kij} dx^l \wedge dx^k) \\
&= -\partial_l \partial_j v_i \epsilon_{kij} \epsilon_{plk} dx^p \\
&= -\partial_l \partial_j v_i dx^p (\delta_{ip} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jp}) \\
&= \partial_i \partial_j v_i dx^j - \partial_j \partial_j v_i dx^i,
\end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

enquanto que

$$\begin{aligned}
dd^\dagger v_i dx^i &= (-1)^{3 \cdot 1 + 3 + 1} d * d * (v_i dx^i) \\
&= -d * d \left( \frac{1}{2} v_i \epsilon_{mni} dx^m \wedge dx^n \right) \\
&= -d * \left( \frac{1}{2} \partial_j v_i \epsilon_{mni} dx^j \wedge dx^m \wedge dx^n \right) \\
&= -d * \left( \frac{1}{2} \partial_j v_i \epsilon_{mni} \epsilon^{jmn} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right) \\
&= -d * (\partial_i v_i dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\
&= -d \left( \frac{1}{3!} \partial_i v_i \epsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \right) \\
&= -d \left( \frac{1}{3!} \partial_i v_i \epsilon_{ijk} \epsilon^{ijk} \right) \\
&= -\partial_j \partial_i v_i dx^j,
\end{aligned} \tag{C.49}$$

portanto, temos que a atuação do operador de Laplace-Beltrami sobre um vetor é exatamente, a menos de um sinal o laplaciano no espaço euclidiano tridimensional

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \partial_i \partial_j v_i dx^j - \partial_j \partial_j v_i dx^i - \partial_j \partial_i v_i dx^j \\
&= -\partial_j \partial_j v_i dx^i \\
&= -\nabla^2 \vec{v}.
\end{aligned} \tag{C.50}$$

□

## REFERÊNCIAS

- [1] NETO, J. B. *Teoria de Campos e a Natureza - Parte Quântica*. São Paulo: Livraria da Física, 2017. ISBN 978-85-7861-491-1. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=h9hDswEACAAJ&dq=inauthor:%22Joao+Barcelos+Neto%22&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEWj25LSG7NjnAhWjH7kGHSloBIIQ6AEISjAF>>.
- [2] GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. São Paulo: Pearson, 2011. ISBN 978-85-7605-886-1. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books/about/Eletrodin%C3%A2mica.html?id=4q9BYgEACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.br/books/about/Eletrodin%C3%A2mica.html?id=4q9BYgEACAAJ&redir_esc=y)>.
- [3] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Ótica, Relatividade, Física Quântica*. São Paulo: Blucher, 2014. ISBN 978-85-212-0803-7. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=KjHjAAAACAAJ&dq=nussenzveig&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEWj25LSG7NjnAhWjH7kGHSloBIIQ6AEIODAC>>.
- [4] GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. São Paulo: Pearson, 2011. ISBN 978-85-7605-927-1. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books/about/Mec%C3%A2nica\\_qu%C3%A2ntica.html?id=Z1CLZwEACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.br/books/about/Mec%C3%A2nica_qu%C3%A2ntica.html?id=Z1CLZwEACAAJ&redir_esc=y)>.
- [5] NETO, J. B. *Matemática para físicos com aplicações - vetores, tensores e spinores*. São Paulo: Livraria da Física, 2010. ISBN 978-85-7861-091-3. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5stDYgEACAAJ&dq=matematica+para+f%C3%ADsicos&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwiSwNG07NjnAhUNGrkGHXIVAJ4Q6AEIKDAA>>.
- [6] LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Livraria da Física, 2007. ISBN 85-88325-24-1. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XpOS2eOdDR4C&lpg=PP1&dq=nivaldo%20lemos&hl=pt-BR&pg=PP1#v=onepage&q=nivaldo%20lemos&f=false>>.
- [7] GRAY, C. G.; TAYLOR, E. F. When action is not least. *American Journal of Physics*, v. 75, n. 5, p. 434–458, 2007. Disponível em: <<https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.2710480>>.
- [8] ISHAM, C.; ISHAM, C. *Lectures on Groups and Vector Spaces for Physicists*. World Scientific, 1989. (Lecture Notes in Physics Series). ISBN 9789971509552. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Wx0nsuNOfUEC>>.
- [9] TUNG, W. *Group Theory in Physics*. Chicago: World Scientific Publishing, 2003. ISBN 9971-966-56-5. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=O89tgpOBO04C&lpg=PP1&dq=wu-ki%20tung&hl=pt-BR&pg=PP1#v=onepage&q=wu-ki%20tung&f=false>>.
- [10] RUBAKOV, V. *Classical Theory of Gauge Fields*. New Jersey: Princeton University Press, 1999. ISBN 0-691-05927-6. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BxjL6EkIpfUC&lpg=PP1&dq=rubakov&hl=pt-BR&pg=PP1#v=onepage&q=rubakov&f=false>>.
- [11] JEEVANJEE, N. *An introduction to tensors and group theory for physicists*. New York, NY: Birkhäuser, 2011. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/1494077>>.

- [12] PERKINS, D. H. *Introduction to High Energy Physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0-521-62196-8. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books/about/Introduction\\_to\\_High\\_Energy\\_Physics.html?id=e63cNigcmOUC&redir\\_esc=y](https://books.google.com.br/books/about/Introduction_to_High_Energy_Physics.html?id=e63cNigcmOUC&redir_esc=y)>.
- [13] ABDALLA, E.; SAA, A. *Cosmologia: dos mitos ao centenário da Relatividade*. São Paulo: Blucher, 2010. ISBN 978-0-471-60386-3. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5QK5DwAAQBAJ&lpg=PP1&dq=Cosmologia%20dos%20mitos&hl=pt-BR&pg=PP1#v=onepage&q=Cosmologia%20dos%20mitos&f=false>>.
- [14] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica - Eletromagnetismo*. São Paulo: Blucher, 2015. ISBN 978-85-212-0801-3. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books/about/Curso\\_De\\_Fisica\\_Basica\\_V\\_3\\_Eletromagneti.html?id=AtRCvgAACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.br/books/about/Curso_De_Fisica_Basica_V_3_Eletromagneti.html?id=AtRCvgAACAAJ&redir_esc=y)>.
- [15] WOITHE, J.; WIENER, G. J.; VEKEN, F. F. Van der. Let's have a coffee with the Standard Model of particle physics! *Phys. Educ.*, v. 52, n. 3, p. 034001, 2017. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/aa5b25>>.
- [16] GOMES, M. A. M.; LANDIM, R. R. Duality and fields redefinition in three dimensions. *J. Phys.*, A38, p. 257–262, 2005. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/38/1/019/pdf>>.
- [17] DESER, S.; GRIGUOLO, L.; SEMINARA, D. Gauge invariance, finite temperature and parity anomaly in  $D = 3$ . *Phys. Rev. Lett.*, v. 79, p. 1976–1979, 1997. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.79.1976>>.
- [18] JACKIW, R.; PI, S. Y. Reducing the Chern-Simons term by a symmetry. *Phys. Lett.*, B423, p. 364–368, 1998. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/340390/files/9712087.pdf>>.
- [19] BLASI, A.; MAGGIORE, N. Topologically protected duality on the boundary of Maxwell-BF theory. *Symmetry*, v. 11, p. 921, 2019. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2073-8994/11/7/921/htm>>.
- [20] BUTKOV, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: LTC, 2011. ISBN 978-85-216-1145-5. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iUj1NAAACAAJ&dq=butkov&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwj27NKFkdHnAhUUDrkGHZ0vBb8Q6AEIKzAA>>.
- [21] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. London: Institute of Physics Publishing, 2003. ISBN 0-7503-0606-8. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=p2C1DwAAQBAJ&lpg=PP1&dq=nakahara&hl=pt-BR&pg=PP1#v=onepage&q=nakahara&f=false>>.
- [22] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. London: Elsevier Academic Press, 2005. ISBN 0-12-088584-0. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books/about/Mathematical\\_Methods\\_for\\_Physicists.html?id=VbLBQgAACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.br/books/about/Mathematical_Methods_for_Physicists.html?id=VbLBQgAACAAJ&redir_esc=y)>.
- [23] NASTASE, H. *Classical Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. ISBN 978-1-108-47701-7. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BluHDwAAQBAJ>>.

- [24] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Canada: Wiley, 1972. ISBN 0-471-925675. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=-QH2PgAACAAJ&dq=weinberg+gravitation&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwjSoeG9ktHnAhX0GbkGHTO3B2UQ6AEIKDAA>>.
- [25] RINDLER, W. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford: Oxford University Press, 2006. ISBN 0-19-856731-6. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books/about/Relativity.html?id=fUj\\_LW51GfQC&redir\\_esc=y](https://books.google.com.br/books/about/Relativity.html?id=fUj_LW51GfQC&redir_esc=y)>.
- [26] FLANDERS, H. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Academic Press, 1963. (Dover books on advanced mathematics). ISBN 9780486661698. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=pG0PIIIIO08kC>>.
- [27] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Brasília: Projeto Euclides, 1988. ISBN 85-244-0036-6. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=cZqXNQAAACAAJ&dq=geometria+riemania+carmo&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwj0i\\_OaktHnAhWUHrkGHSUbaWwQ6AEIKjAA](https://books.google.com.br/books?id=cZqXNQAAACAAJ&dq=geometria+riemania+carmo&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwj0i_OaktHnAhWUHrkGHSUbaWwQ6AEIKjAA)>.
- [28] TU, L. *An Introduction to Manifolds*. Springer New York, 2010. (Universitext). ISBN 9781441973993. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=br1KngEACAAJ>>.
- [29] LEE, J. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2003. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387954486. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=eqfgZtjQceYC>>.
- [30] BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. *Cálculo Exterior*. São Paulo: Livraria da Física, 2009. ISBN 978-85-7861-026-5. Disponível em: <[https://www.academia.edu/12723034/C%C3%A1lculo\\_exterior\\_para\\_f%C3%ADsicos\\_-\\_Bassalo\\_Cattani](https://www.academia.edu/12723034/C%C3%A1lculo_exterior_para_f%C3%ADsicos_-_Bassalo_Cattani)>.
- [31] THIRRING, W. *A Course in Mathematical Physics - Classical Field Theory*. New York: Springer-Verlag, 1978. ISBN 3-211-81475-2. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=4DEKgw7fOuUC&q=thirring&dq=thirring&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwiCwLfQk9HnAhVJK7kGHbFNC4EQ6AEIWzAF>>.
- [32] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. Nova Jersey: John Wiley Sons, 1998. ISBN 0-471-30932-X. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2hZ0CgAAQBAJ&dq=inauthor:%22John+David+Jackson%22&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwiG1aeHktHnAhUUIbkGHe6eCYkQ6AEIKDAA>>.
- [33] RAMOS, I. R. O. et al. Sobre a indução do campo eletromagnético em referenciais inerciais mediante transformações de Galileu e Lorentz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 39, 2017. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbef/v39n2/1806-1117-rbef-39-02-e2306.pdf>>. Acesso em: 8 set. 2019.
- [34] BROMLEY, D.; GREINER, W. *Classical Electrodynamics*. Springer New York, 1998. (Classical Theoretical Physics). ISBN 9780387947990. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=pov6H2QGNWAC>>.
- [35] EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen Phys.*, v. 17, p. 891-921, 1905. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.200590006>>.

- [36] PADMANABHAN, T. *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139485395. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BSfe2MjbQ3gC>>.
- [37] AITCHISON, I. J. R.; HEY, A. J. G. *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction; 2nd ed.* Bristol: Hilger, 1989. (Graduate student series in physics). Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/113381>>.
- [38] DOUGHTY, N. A. *Lagrangian Interaction - An Introduction To Relativistic Symmetry In Electrodynamics And Gravitation*. New York: Adson-Wesley, 1990. ISBN 0-201-41625-5. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JQpQDwAAQBAJ&lpg=PA1&dq=Lagrangian%20Interaction%20-%20An%20Introduction%20To%20Relativistic%20Symmetry%20In%20Electrodynamics%20And%20Gravitation&hl=pt-BR&pg=PA1#v=onepage&q=Lagrangian%20Interaction%20-%20An%20Introduction%20To%20Relativistic%20Symmetry%20In%20Electrodynamics%20And%20Gravitation&f=false>>.
- [39] GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. Baden-Württemberg: Wiley-Vch, 2004. ISBN 978-0-471-60386-3. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/111880>>.
- [40] SIEGEL, W. Fields. 2020. Disponível em: <<http://insti.physics.sunysb.edu/~siegel/Fields4.pdf>>.
- [41] NETO, J. B. *Matemática para físicos com aplicações - Tratamentos Clássico e Quântico*. São Paulo: Livraria da Física, 2011. ISBN 978-85-88325-80-7. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=CtCztgAACAAJ&dq=inauthor:%22Joao+Barcelos+Neto%22&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwj25LSG7NjnAhWjH7kGHSl0BIIQ6AEIPTAD>>.
- [42] CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics; 2nd ed.* New York, NY: Wiley, 1985. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/450289>>.
- [43] WARNICK, K.; RUSSER, P. Differential forms and electromagnetic field theory. *Progress in Electromagnetics Research*, v. 148, p. 83–112, 01 2014. Disponível em: <<http://www.jpier.org/PIER/pier.php?paper=14063009>>.
- [44] DUNNE, G. V. Aspects of chern-simons theory. In: \_\_\_\_\_. *Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems*. New York: Springer, 1998. p. 177–263. ISBN 978-3-540-66909-8. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/hep-th/9902115.pdf>>.
- [45] DELBOURGO, R.; TWISK, S.; THOMPSON, G. Massive yang-mills theory: Renormalizability versus unitarity. *International Journal of Modern Physics A*, v. 03, n. 02, p. 435–449, 1988. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X88000163>>.
- [46] OLIVE, K. A. et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C38, p. 090001, 2014. Disponível em: <<http://pdg.lbl.gov/2014/download/rpp2014-Chin.Phys.C.38.090001.pdf>>.

- [47] PROCA, A. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *J. Phys. Radium*, v. 7, 1936. Disponível em: <[https://jphysrad.journaldephysique.org/articles/jphysrad/abs/1936/08/jphysrad\\_1936\\_\\_7\\_8\\_347\\_0/jphysrad\\_1936\\_\\_7\\_8\\_347\\_0.html](https://jphysrad.journaldephysique.org/articles/jphysrad/abs/1936/08/jphysrad_1936__7_8_347_0/jphysrad_1936__7_8_347_0.html)>. Acesso em: 03 mar. 2020.
- [48] PODOLSKY, B.; KIKUCHI, C. A generalized electrodynamics part ii—quantum. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 65, p. 228–235, Apr 1944. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.65.228>>.
- [49] CUZINATTO, R.; MELO, C. de; POMPEIA, P. Second order gauge theory. *Annals Phys.*, v. 322, p. 1211–1232, 2007. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0003491606001564>>.
- [50] CARRINGTON, M. E. Effect of a Chern-Simons term on dynamical gap generation in graphene. *Phys. Rev. B*, v. 99, 2019. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.99.115432>>. Acesso em: 26 fev. 2020.
- [51] RAMOS, I. R. O. et al. Eletrostática em sistemas coloidais carregados. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, 2018. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbef/v40n4/1806-9126-RBEF-40-4-e5408.pdf>>.
- [52] MATSUSHITA, T. *Electricity and Magnetism: New Formulation by Introduction of Superconductivity*. Tokyo: Springer, 2014. ISBN 978-4-431-54525-5. Disponível em: <<https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-4-431-54526-2>>.
- [53] KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics*. New York: John Wiley Sons, 2007. ISBN 8-1265-1045-5. Disponível em: <[https://books.google.co.in/books?id=F9Qu5c\\_hUaUC&hl=pt-BR&source=gbs\\_navlinks\\_s](https://books.google.co.in/books?id=F9Qu5c_hUaUC&hl=pt-BR&source=gbs_navlinks_s)>.
- [54] DARTORA, C. A.; JIMENES, M. S.; ZANELLA, F. Os fundamentos da física dos férmions de Dirac sem massa em (1+2)-D e o grafeno. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, 2015. Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/rbef/v37n3/0102-4744-rbef-37-3-3301.pdf>>. Acesso em: 4 mai. 2020.
- [55] ZHANG, S. C.; HANSSON, T. H.; KIVELSON, S. An effective field theory model for the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, v. 62, p. 82–85, 1988. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.62.82>>.
- [56] DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Topologically Massive Gauge Theories. *Annals Phys.*, v. 140, p. 372–411, 1982. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0003491682901646?via%3Dihub>>.
- [57] OLIVEIRA, D. M. d. Uma proposta para o ensino de teoria quântica de campos na graduação: a eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons como motivação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, p. 1 – 9, 09 2011. ISSN 1806-1117. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172011000300009&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172011000300009&nrm=iso)>.
- [58] CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 41, p. 1231, 1990. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.41.1231>>.

- [59] CASANA, R.; FERREIRA MANOEL M., J.; SANTOS, C. E. Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 025030, 2008. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.78.025030>>.
- [60] KALB, M.; RAMOND, P. Classical direct interstring action. *Phys. Rev. D*, v. 9, p. 2273–2284, 1974. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.9.2273>>.
- [61] HOWE, P. S.; PAPADOPOULOS, G. Twistor spaces for HKT manifolds. *Phys. Lett. B*, v. 379, p. 80–86, 1996. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0370269396003930?via%3DIihub>>.
- [62] GERMAN, G.; MACIAS, A.; OBREGON, O. Kaluza-Klein approach in higher dimensional theories of gravity with torsion. *Class. Quant. Grav.*, v. 10, p. 1045–1053, 1993. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/10/5/021>>.
- [63] KAR, S. et al. Cosmic optical activity from an inhomogeneous kalb–ramond field. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 19, n. 4, p. 677–687, Jan 2002. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/19/4/304>>.
- [64] MAJUMDAR, P.; SENGUPTA, S. Parity-violating gravitational coupling of electromagnetic fields. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 16, n. 12, p. L89–L94, Nov 1999. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/16/12/102>>.
- [65] ALMEIDA, C. A. S. Remarks on topological models and fractional statistics. *Braz. J. Phys.*, v. 31, p. 277–284, 2001. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/bjp/v31n2/v31n2a18.pdf>>.
- [66] KUMAR, R.; MUKHOPADHYAY, D. (3+1)-Dimensional Topologically Massive 2-form Gauge Theory: Geometrical Superfield Approach. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 6, p. 452, 2018. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-018-5933-7>>.
- [67] KUMAR, R.; LAHIRI, A. Dimensional reduction of four-dimensional topologically massive gauge theory. 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1507.05771.pdf>>.
- [68] GOVINDARAJAN, T. R.; RINDANI, S. D.; SIVAKUMAR, M. Dimensional Reduction and Theories With Massive Gauge Fields. *Phys. Rev.*, D32, p. 454, 1985. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/pdf/10.1103/PhysRevD.32.454>>.
- [69] JACKIW, R.; PI, S.-Y. Seeking an even parity mass term for 3-D gauge theory. *Phys. Lett.*, B403, p. 297–303, 1997. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269397005200>>.
- [70] KHOUDEIR, A. The Abelian topological mass mechanism from dimensional reduction. *Phys. Rev. D*, v. 59, p. 027702, 1999. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.59.027702>>.
- [71] BERTRAND, B.; GOVAERTS, J. Mass Generation in Abelian U(1) Gauge Theories: A Rich Network of Dualities. *J. Math. Phys.*, v. 60, n. 10, p. 102904, 2019. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5109628>>.

- [72] LANDIM, R. Field redefinitions and massive BF models in arbitrary space-time dimensions. *Phys. Lett. B*, v. 542, p. 160–164, 2002. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/hep-th/0108242.pdf>>.
- [73] MALUF, R. et al. Dual equivalence between self-dual and topologically massive  $B \wedge F$  models coupled to matter in 3+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 102, n. 2, p. 025006, 2020. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.102.025006>>.
- [74] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. São Paulo: Cengage Learning, 2014. ISBN 978-85-221-0906-7. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books/about/Din%C3%A2mica\\_cl%C3%A1ssica\\_de\\_part%C3%ADculas\\_e\\_sis.html?hl=pt-PT&id=DfzCuAAACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.br/books/about/Din%C3%A2mica_cl%C3%A1ssica_de_part%C3%ADculas_e_sis.html?hl=pt-PT&id=DfzCuAAACAAJ&redir_esc=y)>.
- [75] LAHIRI, A.; PAL, P. B. *A First Book of Quantum Field Theory*. Oxford: Alpha Science, 2007. ISBN 978-1-84265-249-7. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=\\_UmPP8Yr5mYC&lpg=PR1&dq=A%20First%20Book%20of%20Quantum%20Field%20Theory&hl=pt-BR&pg=PR1#v=onepage&q=A%20First%20Book%20of%20Quantum%20Field%20Theory&f=false](https://books.google.com.br/books?id=_UmPP8Yr5mYC&lpg=PR1&dq=A%20First%20Book%20of%20Quantum%20Field%20Theory&hl=pt-BR&pg=PR1#v=onepage&q=A%20First%20Book%20of%20Quantum%20Field%20Theory&f=false)>.