



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

MATHEUS NILTON VIDAL NOGUEIRA

**TERMODINÂMICA DE UMA SOLUÇÃO DO TIPO SCHWARZSCHILD COM UMA
TEORIA DE GAUGE NÃO-COMUTATIVA DA GRAVIDADE**

FORTALEZA

2020

MATHEUS NILTON VIDAL NOGUEIRA

TERMODINÂMICA DE UMA SOLUÇÃO DO TIPO SCHWARZSCHILD COM UMA
TEORIA DE GAUGE NÃO-COMUTATIVA DA GRAVIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

FORTALEZA
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- N713t Nogueira, Matheus Nilton Vidal.
Termodinâmica de uma solução do tipo Schwarzschild com uma teoria de Gauge da Gravidade / Matheus Nilton Vidal Nogueira. – 2020.
108 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.
1. Relatividade Geral. 2. Buracos Negros. 3. Radiação Hawking. 4. Geometria Não-Comutativa. I. Título.

CDD 530

MATHEUS NILTON VIDAL NOGUEIRA

TERMODINÂMICA DE UMA SOLUÇÃO DO TIPO SCHWARZSCHILD COM UMA
TEORIA DE GAUGE NÃO-COMUTATIVA DA GRAVIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 31/08/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Victor Pereira do Nascimento Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

AGRADECIMENTOS

- Agradeço aos meus pais José Nilton Nogueira Júnior e Maria Aldenice Façanha Vidal e ao meu irmão Davi Vidal Nogueira. Família é a base de tudo.
- Agradeço imensamente meu grande amor Andreza Maciel Rocha, por todo o carinho e atenção e por me fazer uma pessoa melhor a cada dia que passa.
- Agradeço também a minha cunhada Andréa Maciel Rocha pelas folhas de rascunho e a minha sogra Elisabete Maciel pelos cafés que me manteve acordado.
- Agradeço a todos os professores no decorrer de minha vida, em especial ao meu orientador Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.
- Agradeço a todos os amigos do LASSCO, os momentos de discussões e reflexões (e descontração também) foram essenciais para o desenvolvimento desta dissertação.
- Agradeço ao Departamento de Física da UFC.
- Agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho obtemos as quantidades termodinâmicas para um buraco negro do tipo Schwarzschild com uma teoria de gauge não-comutativa da gravidade, obtido por Bufalo e Tureanu [106]. Começamos com uma breve revisão de buracos negros na teoria da relatividade geral de Einstein, onde são apresentados as principais soluções, bem como suas características, de buracos negros encontrados na literatura. Depois, introduzimos o formalismo da Teoria Quântica de Campos em espaços-tempo curvo e discutimos sobre o efeito Hawking e a radiação de buracos negros. Mostraremos que buracos negros se comportam como sistemas térmicos obedecendo às leis da termodinâmica. Discutimos métodos alternativos de se obter a radiação Hawking, mais precisamente o método da equação de Hamilton-Jacobi e o das geodésicas nulas, baseados na visão do efeito Hawking como um processo de tunelamento, sendo assim métodos puramente semi-clássicos. Feito isto, introduzimos a Geometria Não-Comutativa, suas motivações e como implementá-la em teorias físicas, incluindo a gravidade. Discutimos algumas tentativas de obter uma versão não-comutativa da solução de Schwarzschild e o porque elas falham ao tentar regularizar o comportamento singular da origem e da temperatura. Baseado em uma outra visão do uso da não-comutatividade, mostramos as motivações que levou a solução completa não-comutativa de Schwarzschild determinada por Nicolini [84] e mostramos as novas características que esta métrica traz. Finalmente, iremos determinar a solução de Bufalo e Tureanu [106] e analisar suas principais características. Finalizamos com os cálculos da termodinâmica da solução de Bufalo. É encontrada as pequenas correções que a não-comutatividade trouxe para esta solução, embora, como iremos ver, ainda não seja esperado qualquer regularidade em comparação com o caso usual.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Buracos Negros. Radiação Hawking. Geometria Não-Comutativa.

ABSTRACT

In this work we obtain the thermodynamic quantities for a Schwarzschild black hole with a non-commutative gauge theory of gravity, obtained by Bufalo and Tureanu [106]. We begin with a brief review of black holes in Einstein's theory of general relativity, which presents the main solutions, as well as their characteristics, of black holes found in the literature. Then, we introduced the formalism of the Quantum Field Theory in curved spacetime and discussed the Hawking effect and black hole radiation. We will show that black holes behave like thermal systems obeying the laws of thermodynamics. We discuss alternative methods of obtaining Hawking radiation, more precisely the Hamilton-Jacobi equation method and that of null geodesics, based on the vision of the Hawking effect as a tunneling process, thus being purely semi-classical methods. That done, we introduce Non-Commutative Geometry, its motivations and how to implement it in physical theories, including gravity. We discussed some attempts to obtain a noncommutative version of the Schwarzschild solution and why they fail to try to regularize the singular behavior at origin and temperature. Based on another view of the use of non-commutativity, we show the motivations that led to the complete Schwarzschild non-commutative solution determined by Nicolini [84] and show the new characteristics that this metric brings. Finally, we will determine the Bufalo and Tureanu [106] solution and analyze its main characteristics. We finish with the calculations of the thermodynamics of the Bufalo's solution. It is found the small corrections that non-commutativity brought to this solution, although, as we will see, no regularity is yet expected in comparison with the usual case.

Keywords: General Relativity. Black Holes. Hawking Radiation. Noncommutative Geometry.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	UMA REVISÃO SOBRE BURACOS NEGROS	14
2.1	Buracos Negros de Schwarzschild	14
2.2	Buracos Negros de Reissner-Nordström	18
2.2.1	Extremos buracos negros de Reissner-Nordström	22
2.3	Buraco Negro de Kerr e Kerr-Newman	24
3	O EFEITO HAWKING E A TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS	26
3.1	Teoria Quântica de Campos em espaço-tempo curvo	26
3.2	O efeito Unruh	30
3.3	O efeito Hawking e a termodinâmica de buracos negros	39
3.3.1	O princípio holográfico	43
3.3.2	Descrição microscópica de buracos negros	44
3.3.3	O paradoxo da perda de informação	45
4	O FORMALISMO DO TUNELAMENTO PARA A RADIAÇÃO HAWKING	47
4.1	Produção de partículas em espaços-tempo com horizonte	47
4.1.1	Radiação Hawking em (1+1) dimensões	48
4.2	O método das geodésicas nulas	54
4.2.1	Tunelamento	55
4.2.2	Relação com a descarga elétrica	59
5	BURACOS NEGROS NÃO-COMUTATIVOS	61
5.1	Modelos de Geometria "Fuzzy"	61
5.2	Buracos Negros em Gravidade Não-Comutativa	67
5.2.1	Tentativas para obter a versão não-comutativa da métrica de Schwarzschild	67
5.2.2	Em direção a solução de Schwarzschild não-comutativa completa	70
5.3	A solução de Schwarzschild não-comutativa	73
5.3.1	Horizontes, curvatura e condições de energia	75
5.3.2	A termodinâmica do buraco negro	76
6	SOLUÇÃO DO TIPO SCHWARZSCHILD NUMA TEORIA DE GAUGE NÃO-COMUTATIVA	80
6.1	Teoria de gauge De Sitter	80
6.2	Solução exterior	82

6.3	Solução Interior	87
7	TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO	90
7.1	Temperatura	90
7.2	Entropia e Capacidade Térmica	94
8	CONCLUSÃO	96
	APÊNDICE A – BASES NÃO-COORDENADAS	97
	REFERÊNCIAS	103

1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento da teoria especial da relatividade de Einstein, houve a imediata necessidade de modificar a teoria Newtoniana da gravidade, que, ao contrário da teoria eletromagnética de Maxwell por exemplo, descreve uma interação com velocidade de propagação infinita. Porém, o problema de dar uma descrição relativística para o campo gravitacional é bem mais complexo do que simplesmente assumir uma velocidade limite e usar transformações de Lorentz para campos gravitacionais. De fato, a relatividade especial deixa de fazer sentido quando campos gravitacionais são incluídos.

O problema de incluir campos gravitacionais na teoria da relatividade foi resolvido pelo próprio Einstein [1, 2], com a então chamada Teoria Geral da Relatividade. A partir das considerações do Princípio da Equivalência, que afirma a impossibilidade de o observador diferenciar um referencial acelerado (não-inercial) de um inercial na presença de gravidade (por isso não podemos usar transformações de Lorentz), Einstein concluiu que para incluir os efeitos gravitacionais é necessário generalizar a métrica como sendo curva. Assim, na teoria geral da relatividade, o campo gravitacional é um efeito puramente geométrico, causando uma curvatura no espaço-tempo devido à presença de matéria e energia.

Em Relatividade Geral a dinâmica do campo gravitacional é descrita pelas equações de Einstein, um conjunto de equações acopladas e não-lineares com o tensor métrico fazendo o papel dos potenciais da teoria. Apesar de serem equações complicadas, é possível fornecer soluções analíticas exatas para estas. A primeira solução das equações de Einstein foi fornecida por Karl Schwarzschild [3] ao considerar as equações no vácuo e uma distribuição esférica de massa como fonte. Além de mostrar que as equações de Einstein possuem solução, a solução de Schwarzschild foi de suma importância para a testagem da mesma. De fato, esta solução forneceu valores precisos para o desvio do periélio de Mercúrio e para o desvio para o vermelho de origem gravitacional, o que fornece um suporte tanto teórico quanto experimental para a teoria de Einstein.

Porém, a solução de Schwarzschild também apresentava estranhos aspectos: esta solução fornece pontos em que o campo gravitacional torna-se infinito. Mais precisamente esses pontos são a origem e uma superfície do tipo luz denominada de horizonte de eventos, sendo o primeiro uma singularidade verdadeira, isto é, não pode ser removido por mudanças de coordenadas. A interpretação de que toda a distribuição de massa colapse e se concentre na origem levou a uma região (da origem ao horizonte de eventos) do espaço-tempo que ficou conhecida como Buraco Negro, e esta região é caracterizada por ser desconectada causalmente do restante do espaço-tempo : se algum objeto cruzar com o horizonte de eventos e entrar na

região de buraco negro, ele nunca mais irá escapar (por isso o nome Buraco Negro). Assim, na teoria clássica da Relatividade Geral, é impossível que buracos negros possam emitir quaisquer partículas.

Outras soluções das equações de Einstein foram obtidas por ir acrescentando gradativamente propriedades físicas a fonte do campo. Por exemplo, ao acrescentarmos a propriedade carga elétrica obtém-se a métrica conhecida como solução de Reissner-Nordström [4, 5] e ao considerarmos que a fonte possui um momento angular não desprezível obtém-se a métrica chamada de solução de Kerr [6] (ainda há uma solução mais geral que descreve um buraco negro carregado com rotação, chamado de solução de Kerr-Newman [7]). Em todas estas soluções, assim como a de Schwarzschild, há a presença inevitável de singularidades e Buracos Negros, na qual essas propriedades físicas são refletidas em sua curvatura.

Embora classicamente buracos negros não possam emitir partículas, apenas absorver, ao considerar efeitos quânticos, mais precisamente Teoria Quântica de Campos num background de buraco negro, Stephen Hawking [8] mostrou que buracos negros não são de fatos negros e podem emitir radiação térmica, conhecida como radiação Hawking, com um espectro de radiação do tipo corpo negro. Mais do que isso, pode ser associado ao buraco negro quantidades termodinâmicas como entropia e temperatura. Assim, ao considerarmos efeitos quânticos, podemos mostrar que buracos negros são essencialmente sistemas térmicos que obedecem as leis da termodinâmica. Uma das maneiras mais comuns de visualizar a radiação Hawking é através do processo de tunelamento quântico. A ideia é que pares partícula e anti-partícula que são criadas próximas ao horizonte (dentro ou fora), podem tunelar para o lado oposto, com o horizonte de eventos fazendo o papel de uma barreira de potencial.

Além do método original de Hawking, outros métodos, baseados na visão semi-clássica da radiação Hawking como um processo de tunelamento, foram desenvolvidos. Em particular, cito o método da equação de Hamilton-Jacobi, desenvolvido por T. Padmanabhan e K. Srinivasan [9] e o método das geodésicas nulas desenvolvido por M. Parikh e F. Wilczek [10]. O método da equação de Hamilton-Jacobi é baseado no uso do caminho complexo para processos de tunelamento, como descrito por Landau [11]. É considerado um campo escalar (clássico) propagando-se na região do buraco negro em questão, e então é utilizado o método WKB para resolver aproximadamente a equação de movimento para o campo, o que fornece a equação de Hamilton-Jacobi satisfeita pela partícula associada ao campo. A solução da equação de Hamilton-Jacobi é dada em termos de uma integral, que diverge no horizonte, e então é usado a extensão complexa para resolvê-la. O resultado é associado com as probabilidades de emissão e absorção de partículas, que fornece o valor correto da temperatura Hawking do buraco negro. Este método é particularmente útil no caso de buracos negros esféricos, por fornecer uma simples e conveniente forma para a temperatura Hawking. Já, o método das geodésicas nulas,

é baseado em partículas em uma geometria dinâmica a fim de forçar a conservação de energia. Para isto, é feita uma transformação de coordenadas que seja não singular no horizonte e que exiba esse comportamento dinâmico do espaço-tempo. Então, ao calcularmos as geodésicas radiais nulas conseguimos determinar a parte imaginária da ação para a região classicamente proibida, que, ao ser relacionada com o fator de Boltzmann, nos fornece a temperatura Hawking do buraco negro em questão.

A descrição de Hawking para evaporação de buracos negros, embora reforçada por argumentos semi-clássicos, apresenta problemas à medida que o buraco negro irradia. Primeiramente, a temperatura diverge quando toda a massa do buraco negro evapora, fornecendo um ponto no espaço-tempo de temperatura infinita. Também, quando a energia das partículas emitidas são comparáveis a massa/energia do buraco negro, os efeitos de reação reversa (backreaction effect) devem ser considerados. Estes problemas eram esperados, visto que os resultados de Hawking são derivados de Teoria Quântica de Campos em espaços curvos, uma aproximação para a verdadeira teoria quântica da gravidade, que exige que a massa do buraco negro satisfaça $M \gg M_p$, onde M_p é a massa de Planck. De fato, é considerado que a escala de Planck seja o divisor entre o comportamento clássico e quântico do espaço-tempo.

Temos duas teorias que são fortes candidatas para fornecer uma teoria quântica da gravidade: Supercordas [12, 13] e Gravidade Quântica de Laço (Loop Quantum Gravity) [14]. Embora ambas teorias sejam fisicamente muito promissoras, elas possuem algumas limitações, começando pela falta de dados experimentais. Assim, enquanto não há uma teoria quântica da gravidade bem estabelecida, fornecendo a resposta para o estágio final de evaporação de buracos negros, o que temos de fazer é utilizar teorias efetivas, como por exemplo Teoria Quântica de Campos em espaços curvos, que, como vimos, funciona muito bem até o momento em que os efeitos de reações reversas são levados em conta. Mas, estas teorias apresentam algo em comum: elas exibem um comportamento não-comutativo para as coordenadas do espaço-tempo. De fato, acredita-se que em gravidade quântica deve haver uma relação de incerteza que previne a medição das coordenadas com uma precisão maior do que a da escala de Planck: o momento e energia para fazer uma tal medida deve modificar a geometria do espaço-tempo nestas escalas [15]-[19]. Portanto, a fim de descrever estes efeitos, devemos ter uma teoria efetiva com uma relação de incerteza entre as coordenadas, implementada por postular a existência de uma variedade não-comutativa através da relação $[\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j] = i\theta^{ij}$, onde θ^{ij} são os parâmetros que medem a não-comutatividade. A resultante modificação na geometria é chamada de Geometria Não-Comutativa.

O uso das coordenadas não-comutativas leva a uma profunda modificação da álgebra das funções definidas sobre a variedade, substituindo o produto usual pelo produto Groenewold-Moyal ou produto- \star (estrela) [65, 66]. O produto estrela é não-comutativo, associativo e reflete

a estrutura não-local codificado nas relações de comutação imposta para as coordenadas. Fazendo uso do produto estrela, muitas tentativas de fornecer correções não-comutativas para a solução de Schwarzschild foram feitas. Porém, em todas elas não foram observadas a principal característica esperada do uso de geometria não-comutativa: a remoção de infinitos em teorias de curtas distâncias. Isto é porque, ao usar o produto estrela, comumente faz-se uma expansão perturbativa no parâmetro não-comutativo θ , quebrando a estrutura não-local induzida pela variedade não-comutativa. Portanto, se quisermos observar os efeitos esperados da não-comutatividade, devemos considerar os termos de ordem infinito em θ ou mudar a interpretação do uso das coordenadas não-comutativas e a correspondente álgebra.

Outra maneira de usar as coordenadas não-comutativas é através do uso das quasicoordenadas, definidas como os valores médios dos operadores coordenadas com respeito a estados coerentes, que são autoestados de operadores de levantamento definidos a partir dos operadores coordenadas. A vantagem deste método é o fato de podermos usar a multiplicação usual, visto que valores médios preservam o caráter não-local codificado na natureza da álgebra não-comutativa.

No espírito do uso das quasicoordenadas, P. Nicolini [84] determinou a versão não-comutativa completa para a solução de Schwarzschild. A solução corrigida trouxe notáveis características positivas, começando por curar o comportamento singular na origem. Além disso, todos os problemas vindos de Teoria Quântica de Campos em espaços-convos também são corrigidos. Conseqüentemente, conseguimos descrever todas as etapas de evaporação de buraco negro: naturalmente, a solução corrigida apresenta uma fase de resfriamento do buraco negro, até o momento em que este chega a um estado final de temperatura zero, deixando apenas uma massa remanescente estável do buraco negro, cujo tamanho da massa depende inteiramente do parâmetro não-comutativo θ .

Recentemente, uma solução de buraco negro esféricamente simétrico, induzido por uma teoria de gauge não-comutativa da gravidade foi desenvolvido pelos autores R. Bufalo e A. Tureanu [106]. A linha de raciocínio é análoga ao da métrica obtida por Chaichian [77]: É considerado a força de gauge do grupo $SO(4,1)$ (grupo das simetrias do espaço-tempo de Sitter) e, após feita uma transformação de calibre nesta quantidade, é tomado uma contração para o grupo $SO(3,1)$ a fim de obter expressões modificadas para os campos vierbein (e conseqüentemente, para as equações de Einstein também). Com a expressão da métrica deformada em termos da métrica de Schwarzschild usual, Chaichian determinou uma correção da solução de Schwarzschild até segunda ordem em θ . A diferença da solução de Bufalo e Tureanu está essencialmente em forçar a simetria esférica: ao usar a forma padrão para métricas esféricas, Bufalo e Tureanu resolveram as equações de Einstein modificadas, até segunda ordem em θ , devido a teoria de gauge induzida. Eles determinaram que o raio de Schwarzschild corrigido é

análogo ao raio do horizonte de eventos do buraco negro de Reissner-Nordstrom, sendo possível fazer um paralelo entre a carga elétrica com o parâmetro não-comutativo θ . Com esta analogia, a manifestação da não-comutatividade pode ser interpretada como um campo se propagando no espaço-tempo com efeito oposto ao do campo elétrico na solução de Reissner-Nordstrom.

Neste trabalho, determinamos as quantidades termodinâmicas da métrica obtida por Bufalo e Tureanu. Como vimos, é esperado que esta solução ainda não apresente qualquer regularidade em sua temperatura, visto que para obter a solução, foi necessário fazer um truncamento na ordem desejada para o parâmetro não-comutativo θ . Porém, nada nos impede de investigarmos quais as pequenas correções estes termos trazem para a termodinâmica do buraco negro.

Por conveniência, a menos que se diga o contrário, escolhemos unidades nas quais $c = \hbar = G = 1$. É assumido aqui que os leitores desta dissertação tenham o conhecimento básico de Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos. Os capítulos desta dissertação são divididos da seguinte maneira:

- Capítulo 2: É feita uma rápida revisão sobre buracos negros, mostrando sua definição e as principais características, bem como as principais soluções de buracos negros encontrados na literatura.
- Capítulo 3: É apresentada uma revisão de Teoria Quântica de Campos em espaços curvos. Depois, discutimos sobre o efeito Unruh na qual derivamos quase diretamente o efeito Hawking. Também, discutimos alguns problemas em aberto, vindos naturalmente da suposição de que buracos negros evaporam.
- Capítulo 4: Neste capítulo é discutido os dois métodos alternativos citados para obter a radiação Hawking: o método da equação de Hamilton-Jacobi e o das geodésicas nulas.
- Capítulo 5: Aqui está o coração desta dissertação. Considero o principal capítulo. É aqui que introduzimos o uso de geometria não-comutativa em teorias físicas e suas implicações.
- Capítulo 6: A solução de Bufalo e Tureanu é discutida. Analisaremos como eles obtiveram a solução bem como todas as suas características e correções.
- Capítulo 7: Determinamos a termodinâmica da solução de Bufalo e Tureanu e obtem-se as devidas correções de tais quantidades quando comparados com o caso usual.

Finalmente, nós concluímos com a análise e discussão dos nossos resultados.

2 UMA REVISÃO SOBRE BURACOS NEGROS

Este capítulo é dedicado a revisar as principais características básicas de buracos negros na teoria da gravidade de Einstein, a relatividade geral. A importância deste capítulo é clara, visto que nosso principal objetivo é estudar a termodinâmica de tais objetos e, além disso, quaisquer modificações da teoria são, em geral, comparadas com os casos usuais. Para um tratamento mais completo vide [20, 21].

2.1 Buracos Negros de Schwarzschild

Com a teoria da relatividade especial houve a necessidade de complementar a teoria Newtoniana da gravidade, pois além do fato óbvio de que tempo e espaço não estão em pé de igualdade na teoria de Newton, nenhuma interação pode viajar com uma velocidade maior do que a da luz no vácuo. Einstein conseguiu resolver este problema com sua teoria da relatividade geral, publicada em 1915 [1, 2]. Usando experimentos de pensamento e a matemática da geometria Riemanniana, ele mostrou que a gravidade é resultado de uma curvatura no espaço-tempo devido à presença de matéria, ou equivalentemente, energia.

Em relatividade geral, a dinâmica do campo gravitacional é descrita pelas equações de campo de Einstein, um conjunto de 10 equações diferenciais acopladas e não-lineares, com as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo em questão como os potenciais da teoria. A fim de obtê-la, vamos considerar a ação $S = S_G + S_M$, onde :

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R,$$

é a parte gravitacional da ação com $g = \det(g_{\mu\nu})$ e

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M,$$

é a parte da ação que descreve os campos de matéria e energia que servem como fonte para o campo gravitacional. Note que a forma da densidade lagrangiana \mathcal{L}_M depende do problema que temos em mãos. Assim, a forma completa da ação a ser considerada é

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M. \quad (2.1)$$

As equações de campo são obtidas variando a ação S com respeito as componentes da inversa da métrica $g^{\mu\nu}$ (o que é totalmente equivalente a variar com respeito a métrica $g_{\mu\nu}$

[20]), e usa-se o princípio da mínima ação. Definindo o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ como

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.2)$$

as equações resultantes são as equações de campo da relatividade geral

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci (ou escalar de curvatura), e $R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$ é o tensor de Ricci, obtido através da contração do tensor de Riemann $R^{\rho}_{\mu\sigma\nu}$, definido por:

$$R^{\rho}_{\mu\sigma\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}. \quad (2.4)$$

Os objetos $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ são chamados de conexão afim, que são utilizados para definirmos a operação diferenciação de forma covariante quando há presença de curvatura:

$$\nabla_{\nu}X^{\sigma}_{\mu} = \partial_{\nu}X^{\sigma}_{\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}X^{\lambda}_{\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}X^{\sigma}_{\lambda}, \quad (2.5)$$

onde ∇_{μ} denota a operação de diferenciação covariante e apenas por ilustração foi utilizado um tensor misto de ordem 1 covariante e ordem 1 contravariante. No caso particular de a derivada covariante da métrica ser nula, a conexão afim será chamada de conexão métrica, cujas componentes são dadas pelos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\nu}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}). \quad (2.6)$$

A equação (2.3) nos diz como a geometria do espaço-tempo é afetada (lado esquerdo) na presença de matéria e energia (lado direito). Tomando o traço de (2.3) obtemos a equação totalmente equivalente

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right), \quad (2.7)$$

onde T é o traço do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Pode-se notar imediatamente de (2.7) que no vácuo, isto é, em regiões livres de matéria e energia, temos $T_{\mu\nu} = 0$, e as equações de campo reduzem-se à forma conveniente

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

As expressões acima para os símbolos de Christoffel e o tensor de Riemann foram feitas considerando-se uma base coordenada, cujos vetores base são definidos através das derivadas parciais ao longo das coordenadas. Porém, podemos expressar todas essas quantidades utilizando diferentes bases. Uma dessas escolhas são as chamadas bases não-coordenadas ou formalismo vierbein (para uma revisão veja o apêndice), que são definidos ponto a ponto no

espaço-tempo. A vantagem desse novo formalismo é que, além de fornecer métodos práticos de determinar o tensor de curvatura, essa nova visão fornece uma maneira mais natural de tratar a gravidade como uma teoria de Gauge.

A primeira solução das equações de campo no vácuo (2.8) foi dada por Karl Schwarzschild em 1916 [3]. Para isto ele considerou uma distribuição esférica de massa M , que não possui carga e nem momento angular, isto é, neutra e estática. Em particular, pode ser mostrado que existe um sistema de coordenadas tal que a métrica gerada por uma tal distribuição de massa é escrita na forma mais geral como [21]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.9)$$

onde r, θ, ϕ são as coordenadas espaciais, t é a coordenada temporal e as funções $f(r)$ e $h(r)$ devem ser determinadas através das equações (2.8). Feito esta tarefa obtemos as seguintes equações diferenciais

$$-\frac{df}{dr} + \frac{1-f}{r} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dr} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} = 0. \quad (2.11)$$

A equação (2.10) pode ser reescrita na forma $\frac{d}{dr}(rf) = 1$, que ao ser integrada nos fornece a seguinte forma para a função $f(r)$

$$f(r) = 1 + \frac{C}{r}, \quad (2.12)$$

onde C é uma constante. A equação (2.11) implica que $f = Kh^{-1}$, onde K é outra constante. Fazendo $K = 1$, chegamos na solução geral :

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.13)$$

com $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ sendo a métrica de uma 2-esfera com raio unitário.

Pode-se notar imediatamente de (2.13) que para pontos muito distantes da fonte, isto é, para $r \rightarrow \infty$, a métrica torna-se aproximadamente da forma

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.14)$$

que nada mais é do que a métrica de um espaço-tempo plano escrito em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , e este fato nos permite interpretar fisicamente a solução (2.13) como o campo gravitacional de um corpo isolado.

A determinação da constante C é feita através do limite Newtoniano, que é o caso limite para pontos distantes da fonte e quando o campo gerado é fraco e aproximadamente estático. Neste limite é possível mostrar (ver por exemplo [21]) que a componente g_{00} da

métrica (2.13) toma a forma aproximada $g_{00} \approx -(1 + 2\Phi)$, onde Φ é o potencial gravitacional Newtoniano para um corpo esférico de massa M . Sabemos da gravitação Newtoniana que $\Phi = -\frac{M}{r}$ é o potencial fora de uma distribuição esférica de massa M a uma distância r do centro da distribuição. Comparando a componente g_{00} da métrica (2.13) com a forma aproximada no limite Newtoniano, obtemos que a constante C é dada por $-2M$, e a solução resultante é a conhecida métrica de Schwarzschild :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.15)$$

De fato, esta solução é a que descreve com maior completude o campo gravitacional próximo a corpos aproximadamente esféricos com grandes massas e pouca rotação.

A métrica (2.15) é a única solução com simetria esférica no vácuo das equações de campo e não há soluções dependente do tempo que possuem esta forma. Este resultado é conhecido como o teorema de Birkhoff (para uma prova, ver por exemplo [20]). Este fato é análogo ao da solução de Coulomb ser a única solução esféricamente simétrica das equações de Maxwell no vácuo, que implica a impossibilidade de existir radiação a partir de monopólos, tanto na teoria eletromagnética quanto na gravitacional.

Prontamente se vê que a solução (2.15) diverge tanto na origem $r = 0$ quanto no ponto $r = 2M$. A primeira divergência é considerada uma singularidade verdadeira, enquanto a segunda é devido a uma má escolha do sistema de coordenadas. Isto pode ser checado, por exemplo, pelo cálculo de invariantes de curvatura, feitos a partir de contrações do tensor de Riemann. Um dos invariantes de curvatura mais conhecidos na literatura é o escalar de Kretschmann, que para a métrica de Schwarzschild fornece:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (2.16)$$

que de fato diverge para $r = 0$ e possui um valor finito para $r = 2M$, e isto ocorre em quaisquer outros escalares construídos a partir do tensor de Riemann, sugerindo que a origem é uma singularidade verdadeira e que $r = 2M$ torna-se singular em (2.15) apenas pela escolha do sistema de coordenadas. De fato, uma das maneiras de remover a singularidade em $r = 2M$ é definindo a coordenada tortoise introduzida por Finkelstein [22] dada por $r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$, com isso podemos reescrever a métrica tal que esta se torne bem comportada em $r = 2M$.

A singularidade aparente em $r = 2M$ recebe o nome de raio de Schwarzschild e iremos denotá-la por r_S . A interpretação de que toda a massa da fonte colapse na origem levou a suposição de que a métrica (2.15), para $r < r_S$, descreve um estranho objeto que chamaremos de buraco negro de Schwarzschild, sendo $r = r_S$ a superfície que delimita a região de buraco negro, chamada de horizonte de eventos. Com estas definições podemos dizer que o buraco

negro é uma região do espaço-tempo separada do infinito devido à presença de um horizonte de eventos. Para $r > r_S$ um objeto irá orbitar em torno do buraco negro como se este fosse apenas o corpo de massa M que colapsou para gerá-lo. Mas se um objeto atravessar o horizonte de eventos, isto é, para a região $r < r_S$, pode-se notar que as coordenadas do tipo espaço irão tornar-se do tipo tempo e vice-versa, causando a inversão do cone de luz do objeto e isto implica que este objeto irá mover-se inevitavelmente em direção à singularidade $r = 0$. Portanto, nem a luz consegue escapar da região de buraco negro, e por isto este nome. Logo, desde que partículas não conseguem atingir seu infinito futuro dentro do buraco negro, a noção de causalidade é completamente quebrada, e por isso a região de buraco negro é totalmente desconectada causalmente com o restante do espaço-tempo.

Geralmente, o valor do raio de Schwarzschild r_S é bem menor do que o valor do raio físico ou tamanho do objeto em questão. Apenas para se ter uma noção, restaurando as unidades e considerando os valores do SI, o valor do raio de Schwarzschild é aproximadamente dado por

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \left(\frac{M}{M_\star} \right) \text{ km}, \quad (2.17)$$

onde $M_\star \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ é a massa do sol. Assim, para um corpo com a massa do sol, o raio de Schwarzschild é da ordem de $r_S \approx 3 \text{ km}$, cerca de 200000 vezes menor do que o raio do Sol. No caso de o raio físico do objeto ser maior do que seu raio de Schwarzschild não há necessidade de se preocupar com o horizonte de eventos na métrica (2.15), visto que pela presença de matéria "ao redor" da singularidade, a solução não se aplica. Mas, se um objeto entra em colapso gravitacional, eventualmente seu raio físico torna-se menor do que seu raio de Schwarzschild e então haverá a formação de um buraco negro. Ambos os espaços vazios dentro e fora do horizonte de eventos serão corretamente descritos pela métrica (2.15). Assim, a solução de Schwarzschild descreve corretamente o campo gravitacional fora de estrelas, planetas, buracos negros, tão bem quanto no interior de buracos negros.

2.2 Buracos Negros de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström é gerada por um objeto esfericamente simétrico de massa M e carregado com carga Q . Em situações astrofísicas realistas esta solução não é tão relevante, pois um buraco negro carregado deveria rapidamente se descarregar devido às produções de partículas via efeito Schwinger. Mas, do ponto de vista teórico, é uma solução bastante interessante de se analisar pois, por exemplo, podemos ver quais correções a carga elétrica traz para a métrica resultante. Além disso, o buraco negro de Reissner-Nordström será especialmente útil para este trabalho, porque nos capítulos futuros encontraremos uma métrica cujo raio do horizonte é análogo ao desta solução.

Note que para determinarmos a solução de Reissner-Nordström, não podemos usar as equações (2.8), pois como há um objeto carregado com carga Q não nula, este irá gerar um campo eletromagnético que permeia todo o espaço-tempo, logo há uma fonte de momento e energia. Para escrevermos a ação completa neste caso, devemos considerar a densidade lagrangiana que descreve o campo eletromagnético

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

tal que a parte de matéria e energia da ação é escrita como

$$S_M = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o chamado tensor força do campo eletromagnético, que é escrito em termos do 4-potencial A_μ como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.20)$$

Logo, a ação a ser considerada a fim de determinarmos a solução de Reissner-Nordström é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (2.21)$$

e, usando a definição (2.2), obtemos para o tensor momento-energia do campo eletromagnético

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_\nu^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (2.22)$$

Assumindo uma forma geral para a métrica e para o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, sempre levando em conta o fato de a fonte ser esfericamente simétrica, podemos determinar $g_{\mu\nu}$. Embora os cálculos sejam análogos aos feitos no caso do vácuo, os detalhes não serão mostrados aqui e apresentaremos apenas o resultado final. A métrica resultante é dada por

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.23)$$

com

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2}, \quad (2.24)$$

onde Q é a carga elétrica total e P é a carga magnética total do buraco negro. Note que a solução (2.23) é também assintoticamente plana, isto é, a métrica torna-se igual a de Minkowski para pontos muito afastados da fonte. Além disso, para o caso do buraco negro sem carga alguma, isto é, quando $Q = P = 0$, recuperamos imediatamente a métrica de Schwarzschild. Embora saibamos que até hoje não foi detectado a existência de uma carga magnética, nada nos impede de considerá-la por objetivos puramente teóricos, no entanto, por simplicidade, vamos

considerar $P = 0$, tal que

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (2.25)$$

Como estamos considerando apenas a carga elétrica, o 4-potencial será dado simplesmente por

$$A_\mu = \left(-\frac{Q}{r}, 0, 0, 0 \right), \quad (2.26)$$

e conseqüentemente, o campo elétrico associado a esse potencial será

$$E_r = F_{rt} = \partial_r A_t - \partial_t A_r = \frac{Q}{r^2}. \quad (2.27)$$

Analogamente ao caso de Schwarzschild, a métrica (2.23) possui uma verdadeira singularidade na origem $r = 0$, como pode ser verificado através do cálculo de invariantes de curvatura, como por exemplo

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \frac{4Q}{r^8}, \quad (2.28)$$

para a métrica de Reissner-Nordström, que diverge na origem, e assim o será para quaisquer outros invariantes de curvatura calculados usando a métrica (2.23).

A fim de determinarmos a estrutura do horizonte do buraco negro de Reissner-Nordström, vamos calcular o zero da componente g^{rr} da inversa da métrica. Visto que $g_{rr} = \Delta^{-1}$, então $g^{rr} = \Delta$. Daí ficamos com a equação

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0, \quad (2.29)$$

cujas soluções são dadas por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (2.30)$$

Podemos notar imediatamente de (2.30) que dependendo dos valores da massa M e da carga Q a solução poderá apresentar um, dois ou nenhum horizonte de eventos. Logo, teremos três possibilidades distintas para a métrica, cada uma descrevendo um diferente tipo de buraco negro. Vamos analisar cada caso separadamente.

- Caso 1 : $Q^2 > M^2$

Neste caso não é válida a equação (2.30), pois o raio do horizonte deve ser uma grandeza necessariamente real e positiva. Isto significa que a solução não apresenta um horizonte de eventos, isto é, é uma solução regular em todo o espaço-tempo com exceção da origem $r = 0$, que ainda é uma verdadeira singularidade. Neste caso, a singularidade na origem não estaria escondida de nós. A este tipo de singularidade dá-se o nome de "singularidade nua". Penrose, em 1969, propôs uma conjectura chamada de "cosmic censorship" que afirma a não existência de tais tipos de singularidade. A conjectura é baseada no fato

de que, se singularidades nuas existissem, então eventos que acontecessem na própria singularidade deveriam influenciar no universo, e até onde sabemos, as leis da física se quebram em singularidades, e perderíamos o poder de previsibilidade e não estaríamos aptos a dizer qualquer coisa sobre o futuro. Também poderíamos pensar neste caso como inválido, pois, falando bruscamente, a condição $Q^2 > M^2$ implica que a energia total do buraco negro seria menor do que a contribuição de energia devido ao campo elétrico, sendo assim considerado um caso não físico.

- Caso 2 : $M^2 > Q^2$

Neste caso, a equação (2.30) é válida e temos dois horizontes localizados em

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \text{ (horizonte exterior)}$$

e

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2} \text{ (horizonte interior)}$$

A solução diverge em ambos os raios acima. O horizonte exterior em r_+ age de maneira análoga ao horizonte de eventos na solução de Schwarzschild, uma vez que um objeto cruza este horizonte e entra na região do buraco negro, as coordenadas do tipo espaço e do tipo tempo trocam de papéis, causando uma inversão do cone de luz do objeto, e inevitavelmente fazendo com que este se mova em direção à singularidade $r = 0$. No entanto, antes de o objeto atingir a singularidade, ele irá cruzar o horizonte interno e então algo notável acontece : as coordenadas do tipo espaço e do tipo tempo trocam de papel novamente, e então o objeto não irá necessariamente mover-se até a singularidade $r = 0$. Neste caso, uma vez que um objeto cruza o horizonte interno r_- , a direção de aumento na coordenada r torna-se do tipo tempo (assim como a direção de diminuição da coordenada r é do tipo tempo quando este está entrando no buraco negro) e então, eventualmente, o objeto será cuspidado para o passado do buraco negro r_+ . Precisamente falando, r_+ é de fato o horizonte de eventos do buraco negro de Reissner-Nordström, enquanto r_- é o chamado horizonte de Cauchy.

- Caso 3 : $M^2 = Q^2$

Este é o caso em que o buraco negro tem o máximo de carga permitido dado a sua massa. Buracos negros que surgem com esta condição são chamados de buracos negros de Reissner-Nordström extremos. A solução nesta condição tem um papel importante no contexto da supergravidade e teoria de cordas. A razão para isto é que, por serem teorias supersimétricas, tais tipos de buracos negros deixam o número de supersimetrias invari-

antes, o que facilita ao efetuar os cálculos. Note que esta solução é altamente instável, visto que ao absorver uma pequena quantidade de massa, recaímos imediatamente para o caso anterior. Este tipo de buraco negro possui apenas um horizonte, localizado em $r = M$. Uma vez que um objeto cruza esse horizonte e entra no buraco negro, este não irá necessariamente mover-se na direção de diminuição de r , e conseqüentemente não irá atingir a singularidade $r = 0$.

2.2.1 Extremos buracos negros de Reissner-Nordström

Extremos buracos negros tem uma característica notável por fornecerem soluções exatas para as equações de Einstein-Maxwell obtidas por variar a ação (2.21). Uma tal solução ainda poderia ser obtida para qualquer número de buracos negros extremos em uma configuração estacionária, isto é, uma métrica multi-extrema de buraco negro. Para obtermos estas soluções, vamos considerar a métrica (2.23) com a condição $Q^2 = M^2$, que toma a forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 + d\Omega^2. \quad (2.31)$$

Fazendo um deslocamento na coordenada r , definimos a nova variável radial

$$\rho = r - M, \quad (2.32)$$

onde podemos usá-la para reescrever a métrica em termos desta nova coordenada. Um cálculo direto mostra que a métrica obtida é

$$ds^2 = -H^{-2}(\rho) dt^2 + H^2(\rho)(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (2.33)$$

com

$$H(\rho) = 1 + \frac{M}{\rho}. \quad (2.34)$$

Podemos ver claramente de (2.33) que esta métrica ainda é assintoticamente plana. Além disso, devido ao deslocamento (2.32), note que o horizonte de eventos deste buraco negro agora está localizado na origem $\rho = 0$ e, portanto, estas coordenadas cobrem apenas a região fora do horizonte. Estas coordenadas são chamadas de isotrópicas, e podemos ver que a parte espacial da métrica (2.33) é conformalmente plana, e então possui a simetria do grupo $SO(3)$. Portanto, podemos reescrever a métrica usando coordenadas cartesianas como

$$ds^2 = -H^{-2}(\vec{x}) dt^2 + H^2(\vec{x})(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.35)$$

onde a função H é agora escrita como

$$H(\vec{x}) = 1 + \frac{M}{|\vec{x}|}. \quad (2.36)$$

Além disso, podemos usar a condição de extremo escrita como $Q = M$ e o fato de que $r = \rho + M$ para reescrever o 4-potencial (2.26) da forma

$$A_\mu = \left(-\frac{M}{\rho + M}, 0, 0, 0 \right), \quad (2.37)$$

e usando a equação (2.34), podemos reescrever a componente A_0 , isto é, o potencial elétrico, em termos da função H por

$$A_0 = H^{-1} - 1. \quad (2.38)$$

Suponha que não soubéssemos a forma de H que foi definido em (2.34). Se resolvéssemos as equações de Einstein-Maxwell para a métrica (2.35) e o potencial elétrico (2.38), e exigindo que H seja independente do tempo, encontramos que H obedece a equação de Laplace

$$\nabla^2 H = 0, \quad (2.39)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano escrito em coordenadas cartesianas. Logo, H é uma função harmônica e assume a forma geral

$$H = 1 + \sum_{a=1}^N \frac{M_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a|}, \quad (2.40)$$

para um conjunto de N pontos espaciais definido pelos vetores \vec{x}_a , que localiza os N buracos negros de Reissner-Nordström extremos com massas M_a e cargas $Q_a = M_a$. Assim, checamos que a métrica obtida, de fato descreve uma configuração estacionária de buracos negros extremos de Reissner-Nordström, visto que H é uma função independente do tempo. Note que se considerarmos apenas um buraco negro extremo localizado na origem, recuperamos (2.34).

Por fim, vamos analisar como é a geometria de um buraco negro extremo próximo da origem $\rho = 0$. Para isso, vamos escrever a métrica (2.33) em termos de ρ

$$ds^2 = - \left(\frac{\rho}{\rho + M} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{\rho} \right)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2). \quad (2.41)$$

Tomando o limite para pontos próximos do horizonte, ou seja, para $\rho \approx 0$, a métrica toma a forma aproximada

$$ds^2 \approx - \frac{\rho^2}{M^2} dt^2 + \frac{M^2}{\rho^2} d\rho^2 + M^2 d\Omega^2. \quad (2.42)$$

Agora, definimos uma nova coordenada como

$$\omega = \frac{M^2}{\rho}, \quad (2.43)$$

tal que $d\rho^2 = (\rho^2/\omega^2)d\omega^2$. Com esta nova coordenada, a métrica próxima do horizonte escreve-se como

$$ds^2 \approx \frac{M^2}{\omega^2}(-dt^2 + d\omega^2) + M^2 d\Omega^2, \quad (2.44)$$

que tem a forma

$$ds^2 = \frac{r_S^2}{r^2}(-dt^2 + dr^2) + r_S^2 d\Omega^2. \quad (2.45)$$

Esta métrica é conhecida como solução de Bertotti-Robinson e consiste de dois espaços, AdS_2 e S_2 . Portanto, para pontos próximos do horizonte, a geometria de um buraco negro extremo de Reissner-Nordström é o produto direto $AdS_2 \times S_2$, ou seja, o produto direto de um espaço-tempo Anti de Sitter 2-dimensional e uma 2-esfera de raio M .

2.3 Buraco Negro de Kerr e Kerr-Newman

Apenas por questão de completude, vamos rapidamente apresentar a solução de Kerr [6] como o limite de carga nula da solução de Kerr-Newman [7]. A solução de Kerr determina o campo gravitacional devido à uma fonte massiva, neutra e com momento angular não-nulo. Devido ao movimento de rotação da fonte, é de se esperar que não necessariamente haverá simetria esférica. Porém, ainda haverá simetria axial ao longo do eixo vertical z do espaço 3-dimensional. No caso mais geral de a fonte, além de rotacionar, possuir uma carga elétrica não nula Q , o campo gravitacional é descrito pela solução de Kerr-Newmann dada por:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{Y}(dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{Y}[adt - (r^2 + a^2)d\phi]^2 + \frac{Y}{\Delta}dr^2 + Yd\theta^2, \quad (2.46)$$

com

$$Y = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.47)$$

$$\Delta = r^2 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{4\pi} + a^2, \quad (2.48)$$

onde a é um parâmetro que está relacionado ao momento angular J do objeto a partir da relação $a = J/M$. No limite de $Q \rightarrow 0$ obtém-se a solução de Kerr. Note que esta solução também é assintoticamente plana, isto é, tende a métrica de Minkowski para pontos muito afastados da fonte e também, como era de se esperar, a simetria esférica é quebrada devido à rotação da fonte. Pode ser mostrado que os zeros da função $\Delta(r)$ não são singularidades verdadeiras, isto é, podem ser removidos por mudanças de coordenadas. No entanto, uma singularidade física é

determinada a partir de $Y(r, \theta) = 0$, que é resolvida apenas por $r = \theta = 0$, que mostra que as singularidades do buraco negro de Kerr(-Newman) estão localizadas na origem e no equador da estrutura.

3 O EFEITO HAWKING E A TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS

Neste capítulo introduzimos o formalismo da Teoria Quântica de Campos em um espaço-tempo curvo, isto é, na presença de um campo gravitacional. Usando esta teoria, Hawking [8] mostrou que buracos negros não são tão negros assim, e podem emitir partículas com um espectro de radiação térmica análogo ao de um corpo negro. Além disso, podemos associar quantidades termodinâmicas ao buraco negro, mostrando que estes se comportam como sistemas térmicos. Porém, ao invés de seguirmos os cálculos originais de Hawking, vamos seguir a linha de [20], onde o efeito Hawking é derivado a partir do efeito Unruh, que será discutido na segunda seção. Finalizamos com uma pequena discussão dos problemas em aberto devido à conjectura de Hawking de que buracos negros evaporam.

3.1 Teoria Quântica de Campos em espaço-tempo curvo

Embora a teoria clássica da relatividade geral seja a teoria que melhor descreve a gravidade atualmente, é esperado que em processos onde os efeitos quânticos tornam-se dominantes, tais como a formação e o estágio final de evaporação de buracos negros, sejam melhor descritos com o advento da gravitação quântica. No entanto, enquanto uma tal teoria não é desenvolvida completamente, parece razoável considerar uma teoria na qual a métrica do espaço-tempo é tratada classicamente, mas é acoplada com campos de matéria que são tratados quanticamente. Claro que esta seria uma aproximação da gravitação quântica, onde o espaço-tempo é de fato quantizado.

Nesta aproximação, os campos de matéria irão obedecer as mesmas equações de movimento usuais, mas com a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ substituída por uma métrica clássica curva $g_{\mu\nu}$, que satisfaz as equações de Einstein com o lado direito substituído pelo valor esperado de um operador tensor momento-energia. Como será mostrado, numa teoria quântica em espaço-tempo curvo haverá problemas em definir os operadores campo em termos dos operadores de criação e aniquilação.

Vamos considerar um campo quântico escalar real sem massa ϕ se propagando num espaço-tempo plano caracterizado por $\eta_{\mu\nu}$. Este irá obedecer a equação de onda $\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$. A solução geral desta equação pode ser escrita em termos de uma combinação linear de um conjunto de soluções do tipo onda plana f_k , que são muito importantes pois caracterizam modos de frequência positiva e negativa, isto é, a derivada com respeito a coordenada temporal Minkowski de cada f_k e seu conjugado é proporcional a frequência. Assim, o operador ϕ pode

ser escrito como :

$$\phi = \sum_k \left[a_k f_k + a_k^\dagger f_k^* \right], \quad (3.1)$$

onde f_k^* é o complexo conjugado dos f_k e os coeficientes da expansão a_k e a_k^\dagger serão interpretados como os operadores de aniquilação e criação respectivamente. O estado de vácuo $|0\rangle$ é definido de tal forma que não se pode mais aniquilar quaisquer partículas, isto é :

$$a_k |0\rangle = 0, \forall k. \quad (3.2)$$

Ao mudarmos de referencial via transformações de Lorentz, pode ser mostrado [20] que os modos f_k permanecerão como um modo de frequência positiva, mas com a frequência alterada pelo boost. Logo, se algum estado descrevendo um conjunto de partículas com um certo momento é medido por um observador, para outro observador inercial, este estado irá descrever as mesmas partículas mas com o momento mudado pelo boost. Em particular, o operador número e o estado de vácuo irão coincidir para ambos os observadores.

Agora, vamos novamente considerar um campo escalar real sem massa ϕ , desta vez se propagando num espaço-tempo curvo caracterizado pela métrica $g_{\mu\nu}$. A equação de movimento satisfeita por ϕ será da forma :

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \xi R \phi = 0, \quad (3.3)$$

onde ξ é uma constante de acoplamento que leva em consideração a interação do campo com a curvatura do espaço-tempo. Para uma hipersuperfície do tipo espaço Σ com métrica induzida γ_{ij} e vetor normal unitário n^μ , o produto interno das soluções da equação (3.3) é dado por

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_\Sigma (\phi_1 \nabla_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \nabla_\mu \phi_1) n^\mu \sqrt{\gamma} d^3x, \quad (3.4)$$

independente da escolha de Σ .

Gostaríamos de fazer o mesmo procedimento que é feito em espaço-tempo plano, encontrar modos de frequência positiva e negativa para formar uma base para as soluções de (3.3). Porém, isto não será mais possível, desde que a métrica $g_{\mu\nu}$ é bem geral, não podemos garantir soluções que se separam em partes que são apenas dependente do tempo e outra que é apenas dependente do espaço. Claro que ainda podemos encontrar uma base para a solução geral, mas o problema é que haverá inúmeras possibilidades e a noção de vácuo e operador número irá depender desta escolha.

Vamos considerar um conjunto de soluções f_i que formam um conjunto completo

para (3.3). A solução geral para ϕ pode então ser escrita como:

$$\phi = \sum_i \left[a_i f_i + a_i^\dagger f_i^* \right], \quad (3.5)$$

onde os a_i e a_i^\dagger são operadores de aniquilação e criação com respeito ao conjunto de modos f . Haverá um estado de vácuo $|0_f\rangle$ que é aniquilado por todos os operadores de aniquilação:

$$a_i |0_f\rangle = 0. \quad (3.6)$$

Podemos igualmente considerar um conjunto alternativo de modos g_i que também formam um conjunto completo para as soluções de (3.3). Desta forma, o operador campo pode ser escrito ser analogamente por:

$$\phi = \sum_i \left[b_i g_i + b_i^\dagger g_i^* \right], \quad (3.7)$$

onde os operadores b_i e b_i^\dagger são os de aniquilação e criação com respeito ao conjunto de modos g . Da mesma maneira, haverá um estado de vácuo que é aniquilado por cada b_i :

$$b_i |0_g\rangle = 0. \quad (3.8)$$

Da transição de um espaço-tempo plano para curvo perdemos o motivo de preferir um conjunto de soluções base a outro, por exigir que eles sejam modos de frequência positiva com respeito a coordenada temporal. No contexto mais geral, se um observador define partículas com respeito a um conjunto de modos f_i e outro com respeito um conjunto de modos g_i eles irão, em geral, discordar do número de partículas medido. Para ver isto, vamos considerar uma mudança de base entre os f_i e os g_i :

$$\begin{aligned} g_i &= \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*), \\ f_i &= \sum_j (\alpha_{ji}^* g_j - \beta_{ji} g_j^*). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Esta mudança de base é conhecida como transformações de Bogolubov. Da mesma maneira, podemos usá-las para expressar os operadores em termos dos outros:

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_j (\alpha_{ji} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger), \\ b_i &= \sum_j (\alpha_{ij}^* a_j - \beta_{ij} a_j^\dagger). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Agora, considere um sistema que está no vácuo definido pelos modos f , $|0_f\rangle$, na qual nenhuma partícula deveria ser observada. Para determinar o número de partículas que um observador que utiliza os modos g como base deveria detectar, precisamos calcular o valor esperado do operador número dos modos g , isto é, o operador $b_i^\dagger b_i$ com relação ao vácuo dos modos f . Para este fim, fazemos uso das equações (3.10):

$$\begin{aligned}
\langle 0_f | b_i^\dagger b_i | 0_f \rangle &= \langle 0_f | \sum_{jk} (\alpha_{ij} a_j^\dagger - \beta_{ij} a_j) (\alpha_{ik}^* a_k - \beta_{ik}^* a_k^\dagger) | 0_f \rangle \\
&= \sum_{jk} (-\beta_{ij}) (-\beta_{ik}^*) \langle 0_f | a_j a_k^\dagger | 0_f \rangle \\
&= \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \langle 0_f | (a_k^\dagger a_j + \delta_{jk}) | 0_f \rangle \\
&= \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \delta_{jk} \langle 0_f | 0_f \rangle \\
&= \sum_j \beta_{ij} \beta_{ij}^*.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Logo, para um observador que usa os modos g , este deveria detectar um número de partículas dado por:

$$\langle 0_f | b_i^\dagger b_i | 0_f \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2. \tag{3.12}$$

Assim, o que seria um vácuo vazio para um observador, para outro deveria ter um certo número de partículas. Assim, se pelo menos um dos coeficientes β_{ij} for não nulo, os estados de vácuo não irão coincidir. De fato, pode-se notar pelas equações (3.10) que os β_{ij} relaciona os operadores de criação de uma base com operadores de criação e aniquilação de outra base. Logo, podemos concluir que o estado de vácuo e o número de partículas não são conceitos fundamentais, mas dependem profundamente do observador.

Por fim, considere um espaço-tempo que era inicialmente plano (1) e depois surge uma região de curvatura (2) e então evolui para uma região final plana novamente (3). Os modos base para a região (1), f_{1i} , que contém apenas modos de frequência positiva, será diferente dos modos base de frequência positiva para a região (3), f_{3i} . Isto é, o estado de vácuo inicial $|0_1\rangle$, o estado que satisfaz $a_{1i} |0_1\rangle = 0$ para todo operador de aniquilação inicial, não será o mesmo estado de vácuo para a região final (3), $|0_3\rangle$, ou seja, $a_{3i} |0_1\rangle \neq 0$. Pode-se interpretar este fato que a métrica dependente do tempo, ou seja, o campo gravitacional, causou a criação de um certo número de partículas do campo escalar. A produção de partículas pelo campo gravitacional é muito importante para exemplos físicos tais como o universo inicial e buracos negros.

3.2 O efeito Unruh

O efeito Hawking pode ser derivado mais rigorosamente fazendo cálculos detalhados de teoria quântica de campos num background curvo [8]. Porém, aqui nós iremos derivar o efeito Hawking investigando um fenômeno que tem muitas das ideias que introduzimos na seção anterior, mas é manifestado ainda em espaço-tempo plano, o efeito Unruh, que afirma que um observador acelerado com relação a um estado de vácuo no espaço de Minkowski deve detectar um espectro térmico de partículas.

A ideia é que para um observador acelerado no espaço de Minkowski, este irá se mover ao longo de orbitas de um vetor de Killing do tipo tempo, mas que não é o usual da simetria de translações temporais. Então, podemos expandir o campo em modos apropriados para o observador acelerado, e calcular o valor esperado do operador número com relação ao vácuo Minkowski. Isto irá mostrar que, observadores com diferentes noções de modos de frequência positiva e negativa irão discordar sobre o conteúdo de partículas de um dado estado e que, portanto, o estado de vácuo e operador número não são conceitos fundamentais ainda entre espaços-tempo plano.

Para este fim, vamos considerar a teoria quântica de campos mais simples possível, um campo escalar real ϕ sem massa, propagando-se num espaço-tempo bidimensional plano de Minkowski, cujo elemento de linha escrito em coordenadas inerciais (t, x) é dado por :

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2. \quad (3.13)$$

A equação de movimento para o campo será simplesmente $\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$. Considere um observador que está se movendo com uma aceleração uniforme α na direção x . A trajetória de tal observador $x^\mu(\tau)$ será dado pelas curvas :

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau), \\ x(\tau) &= \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau). \end{aligned} \quad (3.14)$$

De fato, as trajetórias dadas por (3.14) corresponde a um caminho de aceleração constante. Para ver isto, basta calcular as componentes da aceleração por $a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$. O resultado para as componentes são :

$$\begin{aligned} a^t &= \alpha \sinh(\alpha\tau), \\ a^x &= \alpha \cosh(\alpha\tau), \end{aligned} \quad (3.15)$$

cuja magnitude é dada por:

$$\sqrt{a_\mu a^\mu} = \sqrt{-\alpha^2 \sinh^2(\alpha\tau) + \alpha^2 \cosh^2(\alpha\tau)} = \alpha. \quad (3.16)$$

A trajetória do observador acelerado obedece a seguinte relação

$$x^2(\tau) = t^2(\tau) + \frac{1}{\alpha^2}, \quad (3.17)$$

isto é, a trajetória descrita é uma hipérbole, cujos caminhos assintóticos são os caminhos nulos $x = -t$ no passado e $x = t$ no futuro. O observador acelerado viaja do passado nulo infinito para o futuro nulo infinito, e não do infinito do tipo tempo, como deveria ser alcançado por observadores geodésicos.

Agora, vamos fazer uma mudança de coordenadas sobre o espaço de Minkowski 2-dimensional, que são adaptadas para o movimento uniformemente acelerado. As novas coordenadas (η, ξ) são tais que

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \quad x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta) \quad (x > |t|), \quad (3.18)$$

e cobrem apenas a região $x > |t|$ do espaço de Minkowski, região esta que iremos denominar de região I, como pode ser visto na figura 3.1. Nestas novas coordenadas, o caminho de aceleração constante (3.14) é dado pelas curvas

$$\eta(\tau) = \frac{\alpha}{a} \tau$$

$$\xi(\tau) = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a}{\alpha}\right), \quad (3.19)$$

ou seja, a coordenada do tipo tempo η é proporcional ao tempo próprio e a coordenada do tipo espaço ξ é uma constante. Em particular, um observador com aceleração $\alpha = a$ irá se mover sob os caminhos

$$\eta = \tau \quad \xi = 0. \quad (3.20)$$

Note também que as novas coordenadas tem alcances

$$-\infty < \eta, \xi < +\infty. \quad (3.21)$$

Podemos fazer uso das equações (3.18) para expressar o elemento de linha em termos das novas coordenadas (η, ξ)

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2). \quad (3.22)$$

A esta região $(x > |t|)$ com a métrica dada por (3.22) denominamos espaço de Rindler, em-

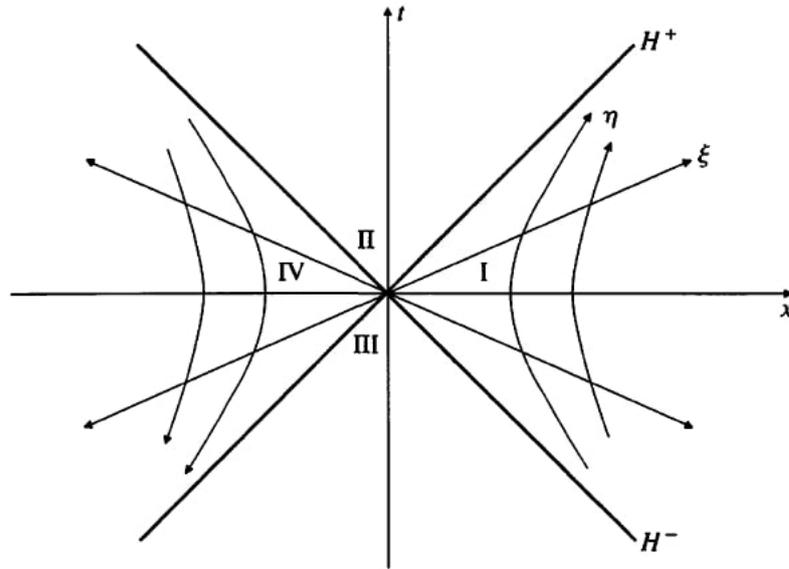


Figura 1: Espaço-tempo de Minkowski em coordenadas Rindler [20]. A região I é a região acessível para observadores que se movem com aceleração constante na direção positiva de x . As coordenadas (η, ξ) podem ser usadas na região I, ou separadamente na região IV, onde eles apontam em sentidos opostos. O campo vetorial ∂_η corresponde ao gerador da simetria de boost de Lorentz. Os horizontes H^\pm são horizontes de Killing para este campo vetorial, e também representam fronteiras do passado e futuro como visto por observadores Rindler.

bora, esta seja apenas uma parte do espaço de Minkowski, é claro. Um observador Rindler é aquele que se move em um caminho com uma aceleração constante, como em (3.19). A estrutura causal do espaço Rindler se assemelha a região $r > 2M$ da solução de Schwarzschild maximamente estendida. Em particular, a linha nula $x = t$, dado pelo H^+ na figura 3.1, é um horizonte de Cauchy futuro para qualquer $\eta = \text{hipersuperfície constante}$ do tipo espaço na região I. Analogamente, H^- é um horizonte de Cauchy passado. Estes horizontes são remanescentes dos horizontes de eventos no diagrama Kruskal, com observadores estáticos ($r = \text{constante}$) em Schwarzschild sendo relacionados aos observadores em um caminho de aceleração constante no espaço Rindler.

Podemos notar através do elemento de linha (3.22) que as componentes da métrica são independentes de η , e, portanto, temos uma simetria por translações nesta coordenada. Isto mostra que ∂_η é um campo de Killing. Podemos expressar ∂_η em termos dos campos de Killing das coordenadas (t, x) :

$$\begin{aligned} \partial_\eta &= \frac{\partial t}{\partial \eta} \partial_t + \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial_x \\ &= e^{a\xi} [\cosh(a\eta) \partial_t + \sinh(a\eta) \partial_x] \\ &= a(x\partial_t + t\partial_x). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Isto significa um campo de Killing associado com um boost na direção x . Podemos ver da ex-

pressão acima que o campo de Killing naturalmente se estende através de todo o espaço-tempo; as regiões II e III são do tipo espaço enquanto a região IV é do tipo tempo, mas direcionada para o passado. Os horizontes que nós temos identificado correspondem aos horizontes Killing para o campo ∂_η . O fator de redshift, calculado como $V = \sqrt{-K_\mu K^\mu}$, onde $K^\mu = (1, 0)$ é o vetor de Killing associado com a simetria em η , é

$$V = e^{a\xi}. \quad (3.24)$$

A partir de (3.24) podemos determinar a superfície de gravidade :

$$\kappa = \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V} = a, \quad (3.25)$$

Como estamos num espaço-tempo plano não há a presença de campo gravitacional, no entanto, esta superfície de gravidade caracteriza a aceleração dos observadores Rindler.

Também podemos definir as novas coordenadas (η, ξ) para a região $x < |t|$ (região IV) por simplesmente trocar os sinais da equação (3.18)

$$t = -\frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \quad x = -\frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta) \quad (x < |t|). \quad (3.26)$$

O sinal negativo garante que os campos ∂_η e ∂_t apontem em direção oposta nesta região. Note que nós não podemos usar as mesmas coordenadas (η, ξ) para ambas as regiões, desde que elas teriam o mesmo alcance nas duas, mas a vantagem de nomear as coordenadas com os mesmos símbolos é que a métrica (3.22) terá a mesma forma independente da região.

Finalmente, vamos considerar a equação de movimento para o campo quântico escalar ϕ em coordenadas Rindler :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = e^{-2a\xi} \left(-\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2 \right) \phi = 0. \quad (3.27)$$

Note que podemos dividir (3.27) pelo fator $e^{-2a\xi}$, desde que este nunca será nulo, o que mostra que podemos usar uma solução separável, uma parte dependendo apenas da coordenada temporal η e outra dependente apenas da coordenada do tipo espaço ξ . Logo, podemos usar soluções do tipo onda plana para resolver a equação (3.27). A onda plana normalizada que resolve (3.27) é dada por $g_k = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega\eta + ik\xi}$, com relação de dispersão $\omega = |k|$ já que o campo é não massivo. Note que estes modos são de frequência positiva com respeito a coordenada η . Mas, nós precisamos de modos que sejam de frequência positiva com respeito a um vetor de Killing direcionado para o futuro. Para a região $x < |t|$ o vetor de Killing que aponta para o futuro é $\partial_{(-\eta)}$ e não ∂_η . Para resolver este problema, consideremos dois conjuntos de modos, adequados para cada região:

$$g_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta + ik\xi}, \text{ para a região I,}$$

$$g_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega\eta + ik\xi}, \text{ para a região IV,} \quad (3.28)$$

onde os modos (1) se anulam na região IV e vice-versa.

Estes dois conjuntos de modos, juntos com seus conjugados, formam um conjunto completo para a solução geral de (3.27) em todo o espaço-tempo. Denotando os operadores de aniquilação associados a cada conjunto por $b_k^{(1,2)}$ podemos expandir o campo ϕ como

$$\phi = \int dk \left(b_k^{(1)} g_k^{(1)} + b_k^{(1)\dagger} g_k^{(1)*} + b_k^{(2)} g_k^{(2)} + b_k^{(2)\dagger} g_k^{(2)*} \right), \quad (3.29)$$

que é uma expansão alternativa em termos dos modos de Minkowski originais

$$\phi = \int dk \left(a_k f_k + a_k^\dagger f_k^* \right). \quad (3.30)$$

É direto mostrar que os modos $g_k^{(1,2)}$ são apropriadamente normalizados com respeito ao produto interno (3.4). Na métrica (3.22), o vetor normal unitário que aponta para o futuro para a superfície $\eta = 0$ é normalizado para

$$-1 = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -e^{2a\xi} (n^0)^2, \quad (3.31)$$

ou

$$n^0 = e^{-a\xi}. \quad (3.32)$$

O determinante da parte espacial da métrica é dado por

$$\sqrt{\gamma} = e^{a\xi}. \quad (3.33)$$

Logo, temos que $n^0 \sqrt{\gamma} = 1$, e o cálculo do produto interno dos modos Rindler segue precisamente dos modos ordinários de Minkowski. Logo teremos

$$(g_{k_1}^{(1)}, g_{k_2}^{(1)}) = \delta(k_1 - k_2)$$

$$(g_{k_1}^{(2)}, g_{k_2}^{(2)}) = \delta(k_1 - k_2)$$

$$(g_{k_1}^{(1)}, g_{k_2}^{(2)}) = 0, \quad (3.34)$$

e analogamente para os modos conjugados.

Assim, temos dois conjuntos de modos, Minkowski e Rindler, na qual podemos expandir as soluções para a equação de movimento para ϕ num espaço-tempo 2-dimensional.

Note que teremos duas interpretações diferentes para o espaço de Fock, em particular, os estados de vácuo serão diferentes. O vácuo de Minkowski, $|0_M\rangle$ que satisfaz

$$a_k |0_M\rangle = 0, \quad (3.35)$$

será um estado de multipartículas para um observador Rindler. Por outro lado, o vácuo Rindler $|0_R\rangle$ satisfazendo:

$$b_k^{(1)} |0_R\rangle = b_k^{(2)} |0_R\rangle = 0, \quad (3.36)$$

será descrito como um estado de multipartículas na representação de Minkowski. Isto acontece pois um modo Rindler nunca pode ser escrito em termos de modos de Minkowski que são puramente de frequência positiva. De fato, se escrevermos as transformações de Bogolubov para um dos operadores de aniquilação Rindler, este irá envolver uma mistura dos operadores de aniquilação e criação de Minkowski.

Um observador Rindler será estático com respeito as órbitas do vetor de Killing ∂_η . Para este observador na região I, por exemplo, irá usar os modos $g_k^{(1)}$ para descrever partículas, ou seja, o estado de vácuo Rindler estará sem nenhuma partícula, o estado $b_k^{(1)\dagger} |0_R\rangle$ será o estado de uma partícula com frequência $\omega = |k|$ e assim por diante. Reciprocamente, um observador Rindler em movimento com relação ao vácuo Minkowski deveria detectar partículas, mesmo quando para um observador inercial seria apenas o vácuo, completamente vazio. A pergunta é : que tipo de partículas o observador Rindler deveria detectar ? Para respondê-la, precisamos calcular os coeficientes de Bogolubov que relaciona os modos Minkowski e Rindler e então calcular o valor esperado do operador número Rindler com respeito ao vácuo de Minkowski. Mas, ao invés disso, vamos pegar um atalho devido a Unruh [24]. A ideia é encontrar um conjunto de modos que compartilham o mesmo estado de vácuo Minkowski, mas que a relação com os modos Rindler se torne mais direta. Para isto, precisamos estender analiticamente os modos Rindler para todo o espaço-tempo e expressá-la em termos dos modos Rindler originais.

Para este fim, podemos ver de (3.18) e (3.26) que a relação das coordenadas Rindler e Minkowski em ambas regiões são dadas por :

$$e^{-a(\eta-\xi)} = \begin{cases} a(-t+x), & \text{I} \\ a(t-x), & \text{IV} \end{cases} \quad (3.37)$$

$$e^{a(\eta+\xi)} = \begin{cases} a(t+x), & \text{I} \\ a(-t-x), & \text{IV} \end{cases} \quad (3.38)$$

Então, podemos expressar, por exemplo, um modo $g_k^{(1)}$ para uma partícula com $k > 0$ ($\omega = k$)

em termos das coordenadas (t, x) na região I como

$$\begin{aligned}\sqrt{4\pi\omega}g_k^{(1)} &= e^{-i\omega\eta+ik\xi} \\ &= e^{-i\omega(\eta-\xi)} \\ &= a^{i\omega/a}(-t+x)^{i\omega/a}.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Para estender analiticamente esta função para todo o espaço-tempo, basta assumir que esta é válida para todos os valores de (t, x) . Mas, devemos expressar o resultado em termos dos modos Rindler originais em todo espaço-tempo, e desde que os modos $g_k^{(1)}$ se anulam na região IV, devemos apelar para os modos $g_k^{(2)}$ também. Expressando-os em termos das coordenadas (t, x) , para $k > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\sqrt{4\pi\omega}g_k^{(2)} &= e^{i\omega\eta+ik\xi} \\ &= e^{i\omega(\eta+\xi)} \\ &= a^{-i\omega/a}(-t-x)^{-i\omega/a}.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Mas, note que (3.40) não tem o comportamento de (3.39) que nós queremos. No entanto, se tomarmos o complexo conjugado e invertermos o sinal do número de onda, ficamos com

$$\begin{aligned}\sqrt{4\pi\omega}g_{-k}^{(2)*} &= e^{-i\omega\eta+ik\xi} \\ &= e^{-i\omega(\eta-\xi)} \\ &= a^{i\omega/a}(t-x)^{i\omega/a} \\ &= a^{i\omega/a}[e^{-i\pi}(-t+x)^{i\omega/a}] \\ &= a^{i\omega/a}e^{\pi\omega/a}(-t+x)^{i\omega/a}.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Combinando as equações (3.39) e (3.41) ficamos com

$$\sqrt{4\pi\omega}(g_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/a}g_{-k}^{(2)*}) = a^{i\omega/a}(-t+x)^{i\omega/a},\tag{3.42}$$

que é bem definida em toda a superfície $t = 0$. O mesmo resultado também se aplica para modos com $k < 0$.

O modo (3.42) normalizado é dado por

$$h_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\frac{\pi\omega}{a})}}(e^{\pi\omega/2a}g_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a}g_{-k}^{(2)*}).\tag{3.43}$$

Os novos modos $h_k^{(1)}$ são uma extensão adequada dos modos $g_k^{(1)}$. Para formarmos um conjunto completo destes modos, precisamos estender também os modos $g_k^{(2)}$, que de maneira análoga

são dados por

$$h_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} (e^{\pi\omega/2a} g_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/2a} g_{-k}^{(1)*}). \quad (3.44)$$

Para verificar a normalização, por exemplo para os modos $h_k^{(1)}$, fazemos uso das equações (3.34):

$$\begin{aligned} (h_{k_1}^{(1)}, h_{k_2}^{(1)}) &= \frac{1}{2\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega_1}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi\omega_2}{a}\right)}} [e^{\pi(\omega_1+\omega_2)/2a} (g_{k_1}^{(1)}, g_{k_2}^{(1)}) + e^{-\pi(\omega_1+\omega_2)/2a} (g_{-k_1}^{(2)*}, g_{-k_2}^{(2)*})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega_1}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi\omega_2}{a}\right)}} [e^{\pi(\omega_1+\omega_2)/2a} \delta(k_1 - k_2) + e^{-\pi(\omega_1+\omega_2)/2a} \delta(-k_1 + k_2)] \\ &= \frac{e^{\pi\omega_1/a} - e^{-\pi\omega_1/a}}{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega_1}{a}\right)} \delta(k_1 - k_2) \\ &= \delta(k_1 - k_2), \end{aligned} \quad (3.45)$$

exatamente como esperado.

Portanto, nós podemos expandir o campo nestes novos modos,

$$\phi = \int dk (c_k^{(1)} h_k^{(1)} + c_k^{(1)\dagger} h_k^{(1)*} + c_k^{(2)} h_k^{(2)} + c_k^{(2)\dagger} h_k^{(2)*}). \quad (3.46)$$

Como vimos das transformações de Bogolubov, as equações (3.43) e (3.44) que relacionam os modos $h_k^{(1,2)}$ e os modos Rindler $g_k^{(1,2)}$ implicam na mesma relação para os operadores de aniquilação e criação dos respectivos modos

$$b_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} (e^{\pi\omega/2a} c_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a} c_{-k}^{(2)\dagger}), \quad (3.47)$$

$$b_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} (e^{\pi\omega/2a} c_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/2a} c_{-k}^{(1)\dagger}). \quad (3.48)$$

Logo, o operador número na região I, por exemplo

$$n_{\text{R}}^{(1)}(k) = b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1)}, \quad (3.49)$$

pode ser expressado em termos dos operadores $c_k^{(1,2)}$.

Agora, note que os modos de frequência positiva Minkowski originais com $k > 0$, as soluções do tipo onda plana $f_k \propto e^{-i\omega(t-x)}$, são analíticas e limitadas para (t, x) complexo desde que $\text{Im}(t-x) \leq 0$. Estes são os modos que descrevem ondas planas movendo-se para a direita. O mesmo é válido para os novos modos $h_k^{(1)}$ desde que seja feito o corte para a potência imaginária permanecer na metade superior do plano complexo $(t-x)$, de fato, isto é consistente em colocar

$e^{-i\pi} = -1$ em (3.41). Analogamente, tudo isto se aplica aos modos $h_k^{(2)}$, que são analíticos e limitados na metade inferior do plano complexo ($t+x$), como são modos de frequência positiva Minkowski representando uma onda movendo-se para a esquerda ($k < 0$). Consequentemente, isto mostra que, ao contrário dos modos $g_k^{(1,2)}$, os modos $h_k^{(1,2)}$ podem ser escritos em termos de modos Minkowski f_k que são puramente de frequência positiva. Portanto, os modos $h_k^{(1,2)}$ e os modos Minkowski compartilham o mesmo estado de vácuo $|0_M\rangle$ e podemos escrever

$$c_k^{(1)} |0_M\rangle = c_k^{(2)} |0_M\rangle = 0. \quad (3.50)$$

Embora os estados excitados não coincidam, isto não é necessário, pois estamos interessados em saber o que um observador Rindler detecta quando o estado é precisamente o vácuo de Minkowski. Para um tal observador na região I, por exemplo, este irá detectar partículas definidas pelos operadores $b_k^{(1)}$. O valor esperado do número de partículas com frequência ω com relação ao vácuo Minkowski, é dado por

$$\begin{aligned} \langle 0_M | b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1)} | 0_M \rangle &= \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)} \langle 0_M | e^{-\pi\omega/a} c_{-k}^{(1)} c_{-k}^{(1)\dagger} | 0_M \rangle \\ &= \frac{e^{-\pi\omega/a}}{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)} \delta(0) \\ &= \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \delta(0), \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde o estado $c_k^{(1)\dagger} |0_M\rangle$ é o estado normalizado de uma partícula,

$$\langle 0_M | c_k^{(1)} c_k^{(1)\dagger} | 0_M \rangle = \delta(0). \quad (3.52)$$

A divergência em (3.51) aparece devido o uso de modos base do tipo onda plana. Nós devíamos ter construído um pacote de ondas normalizado para obter uma resposta finita mas com mesmo espectro, problema análogo ao da partícula livre na mecânica quântica usual.

O resultado obtido para o valor esperado do número de partículas que deveria ser detectado pelo observador Rindler (3.51) é um espectro de Planck com temperatura

$$T = \frac{a}{2\pi}. \quad (3.53)$$

Nós temos assim, derivado o efeito Unruh, que para um observador movendo-se com aceleração uniforme através do vácuo de Minkowski, este deveria detectar um espectro térmico de partículas. Como pode ser visto em [20], a radiação detectada por um observador Rindler é verdadeiramente térmica. Assim, o efeito Unruh, além de mostrar que dois observadores distintos (Minkowski e Rindler) irão descrever o mesmo estado de maneiras completamente diferentes, nos mostra também a natureza térmica do vácuo em teoria quântica de campos.

A temperatura $T = a/2\pi$ é o que deveria ser detectado por um observador movendo-se ao longo do caminho $\xi = 0$, como vimos de (3.20). Mas, de (3.19), podemos ver que a aceleração de um observador movendo-se em quaisquer um dos caminhos $\xi = \text{constante}$ é dado por

$$\alpha = ae^{-a\xi}, \quad (3.54)$$

e este deveria detectar uma temperatura $T = \alpha/2\pi$. Isto é consistente com o redshift que deveria ser detectado por observadores estáticos movendo-se ao longo da órbita de um vetor de Killing K^μ . Se radiação é emitida de algum ponto x_1 com frequência ω_1 , então a frequência observada num ponto x_2 é

$$\omega_2 = \frac{V_1}{V_2} \omega_1, \quad (3.55)$$

onde V é a norma do vetor de Killing. De fato, vimos pela equação (3.57), que o fator de redshift associado ao campo de Killing ∂_η é $V = e^{a\xi}$, então

$$\omega_2 = e^{a(\xi_1 - \xi_2)} \omega_1. \quad (3.56)$$

Logo, se um observador em $\xi_1 = 0$ detecta uma temperatura $T = a/2\pi$ então outro observador em $\xi_2 = \xi$ deve verificar um redshift na temperatura dado por $T = ae^{-a\xi}/2\pi$.

Assim, o efeito Unruh nos mostra que mesmo no caso de espaço-tempo plano, a noção de vácuo e partícula não são conceitos fundamentais pois dependem do observador. A partir do efeito Unruh, podemos derivar quase diretamente o efeito Hawking. Portanto, vamos tentar argumentar em favor da radiação Hawking sem fazer quaisquer cálculos explícitos em espaço-tempo curvo. A derivação do efeito Hawking feito aqui segue de Carroll [20].

3.3 O efeito Hawking e a termodinâmica de buracos negros

Vamos considerar um observador estático ($r = \text{constante}$) fora de um buraco negro de Schwarzschild, isto é, numa posição $r_1 > r_S$ onde $r_S = 2M$ é o raio de Schwarzschild e M um parâmetro relacionado a massa do buraco negro. Sabemos da métrica de Schwarzschild que esta é invariante sob translações temporais, então ∂_t é um campo de Killing com o vetor de Killing associado $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$. O fator de redshift $V = \sqrt{-K_\mu K^\mu}$ para observadores estáticos na geometria de Schwarzschild é dado por

$$V = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (3.57)$$

com uma correspondente magnitude da aceleração dada por

$$a = \frac{1}{V} \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V} = \frac{M}{r^{3/2} \sqrt{r - 2M}}. \quad (3.58)$$

Se o observador estiver próximo do horizonte de eventos, $r_1 - 2M \ll 2M$, então a aceleração torna-se muito alta na escala definida pelo raio de Schwarzschild

$$a_1 \gg \frac{1}{2M}. \quad (3.59)$$

Por sua vez, o raio de Schwarzschild determina o raio de curvatura do espaço-tempo próximo do horizonte. Logo, para observadores cuja escalas de tempo e comprimento são definidos por $a_1^{-1} \ll 2M$ o espaço-tempo será aproximadamente plano. Vamos assumir que o estado quântico de algum campo escalar ϕ pareça o vácuo de Minkowski, isto é, livre de quaisquer partículas, como visto por observadores que estão "caindo" livremente próximo ao buraco negro. De fato, desde que o horizonte de eventos é um barreira não-local, esta afirmação torna-se razoável, pois um observador em queda livre não vê nada de especial ao atravessar o horizonte. Assim, um observador estático na geometria de Schwarzschild será essencialmente um observador acelerado com respeito a um espaço-tempo plano, e este, pelo efeito Unruh, irá detectar uma radiação com temperatura $T_1 = a_1/2\pi$.

Agora, vamos considerar um observador estático no infinito, ou pelo menos muito afastado da fonte, numa posição $r_2 \gg 2M$. Neste caso, não faz sentido desprezar a curvatura do espaço-tempo para escalas de tempo e comprimento $a_2^{-1} \gg 2M$, então não é de se esperar que tal observador detecte uma temperatura $a_2/2\pi$, com a_2 calculado em r_2 . Porém, a radiação será observada com um redshift apropriado, e podemos usar o argumento do final da seção anterior para determinar a temperatura que seria medida no infinito. Um tal observador deveria detectar um redshift na temperatura dado por

$$T_2 = \frac{V_1}{V_2} T_1 = \frac{V_1}{V_2} \frac{a}{2\pi}. \quad (3.60)$$

Podemos ver de (3.57) que no infinito $V_2 \rightarrow 1$, então a temperatura observada é

$$T = \lim_{r_1 \rightarrow 2M} \frac{V_1 a_1}{2\pi} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (3.61)$$

onde $\kappa = \lim(Va)$ é a superfície de gravidade. Assim, ao contrário de observadores acelerados num espaço-tempo plano, o vetor de Killing tem norma finita no infinito, e a radiação sofre um redshift para um valor finito não nulo. Logo, observadores distantes do buraco negro irão ver um fluxo de radiação térmica emitido do buraco negro com uma temperatura proporcional à sua superfície de gravidade. Este é o efeito Hawking e a própria radiação é conhecida como radiação Hawking. Não há nada desonesto nessa derivação do efeito Hawking, mas uma examinação cuidadosa do estado de vácuo próximo ao horizonte ser não singular para observadores caindo livremente deve ser levado em conta. Para uma discussão mais completa veja [20]. Para o caso

em questão do buraco negro de Schwarzschild, obtemos $\kappa = 1/4M$, fornecendo a temperatura

$$T = \frac{1}{8\pi M}. \quad (3.62)$$

Note que a temperatura do buraco negro de Schwarzschild depende apenas de sua massa, de uma forma inversamente proporcional. Assim, vemos que à medida que o buraco negro irradia sua temperatura aumenta, refletindo uma capacidade térmica negativa.

É claro que de um cálculo mais completo pode-se obter mais informações do que apenas a temperatura do buraco negro. Por exemplo, poderíamos questionar o que acontece quando o comprimento de onda da radiação emitida é comparável ao raio de Schwarzschild do buraco negro, onde nossas aproximações não serão mais válidas. Com um cálculo completo, isto é, considerando a emissão de tipos arbitrários de partículas de qualquer tipo de buraco negro (com carga e spin), o espectro da radiação emitida é da forma

$$\langle n_\omega \rangle = \frac{\Gamma(\omega)}{e^{2\pi(\omega-\mu)/\kappa} \pm 1}, \quad (3.63)$$

onde κ é a superfície de gravidade. O parâmetro μ é o potencial químico, este caracteriza a tendência do buraco negro de conservar seus números quânticos, isto é, um buraco negro carregado emite partículas carregadas com o mesmo sinal, buracos negros com rotação emitem partículas com mesmo sinal de momento angular. Assim, a radiação Hawking faz o buraco negro tender ao estado Schwarzschild. $\Gamma(\omega)$ é uma quantidade dependente da geometria do espaço-tempo e da frequência das partículas emitidas chamado fator de corpo cinza, que pode ser pensado como o termo que faz diferir o espectro (3.63) daquele de um corpo negro perfeito. Isto é porque as partículas que são emitidas pelo buraco negro serão modificadas pela geometria do espaço-tempo não trivial que o buraco negro gera ao redor dele, e, portanto, um observador localizado fora do buraco negro deveria detectar uma radiação diferente da de um corpo negro por esta quantidade que "filtra" a radiação Hawking inicial. Para baixas frequências o comprimento de onda torna-se maior que o raio de Schwarzschild e o efeito do fator de corpo cinza torna-se importante. Embora a expressão analítica para $\Gamma(\omega)$ seja difícil de se obter, nos casos limite de baixas e altas frequências, $\Gamma(\omega)$ para um campo escalar obedece

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &\rightarrow 1, & \omega &\gg \frac{1}{M}, \\ \Gamma(\omega) &\rightarrow \frac{A}{4\pi} \omega^2, & \omega &\ll \frac{1}{M}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde A é a área do buraco negro.

Uma maneira de entender como acontece a emissão de radiação por um buraco negro é pensar em flutuações do vácuo em termos de diagramas de Feynman, com a flutuação

sendo representada pela criação de um par partícula - antipartícula. No caso de um espaço-tempo plano, o par criado irá se aniquilar após um tempo finito, e seu efeito é apenas indireto. No entanto, se este efeito ocorre nas proximidades de um horizonte de eventos, ocasionalmente um membro do par será sugado para dentro do buraco negro, enquanto o outro irá escapar para o infinito. Neste modo de visualizar, a radiação Hawking é justamente essas partículas que conseguem escapar.

Uma vez que temos a expressão para a temperatura de um buraco negro, isto possibilita a analogia completa entre a mecânica de buracos negros e a termodinâmica. Se um buraco negro possui uma temperatura, então deve ser associado a ele uma entropia. De fato, imagine que temos um sistema com uma dada entropia e que de alguma maneira sabemos a entropia de todo o universo. Se o sistema é jogado para dentro do buraco negro, ele irá sumir de nossa visão e será sugado em direção a singularidade. Ou seja, se medirmos a entropia do universo após este evento, o valor resultante deveria ser menor do que era antes de jogarmos o sistema no buraco negro. Isto deveria violar a segunda lei da termodinâmica, que afirma que para processos espontâneos fisicamente aceitáveis, a entropia deve sempre aumentar. Mas, Bekenstein [25] resolveu o problema por assumir que o buraco negro também possui uma entropia. Se denotamos a entropia do buraco negro por S_{bn} e a do resto do universo por S_{ext} , então a entropia total não deve ser decrescente

$$\frac{d(S_{bn} + S_{ext})}{dt} \geq 0, \quad (3.65)$$

e isso deve eliminar a violação da segunda lei da termodinâmica. Além disso, baseado no teorema das áreas de Hawking [26], que afirma que em qualquer processo fisicamente aceitável a área de qualquer buraco negro no universo deve sempre aumentar, Bekenstein propôs que a entropia do buraco negro deve ser proporcional a área do buraco negro, já que a lei das áreas se assemelha com a afirmação da segunda lei da termodinâmica.

Com todos estes argumentos, é possível fazer uma analogia das leis da termodinâmica com a física dos buracos negros. Em 1973 [27], as quatro leis da mecânica de buracos negros foram propostas. Se a superfície de gravidade κ e A a área de um buraco negro (ou seja, a área do horizonte de eventos) são proporcionais a temperatura e entropia respectivamente, então as leis são

- Lei Zero : A superfície de gravidade κ é constante sobre o horizonte de um buraco negro estacionário.
- Primeira Lei : A conservação da energia é declarada como

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (3.66)$$

onde Ω é a velocidade angular, J é o momento angular, Φ é o potencial eletrostático e Q

a carga do buraco negro.

- Segunda Lei : A área do horizonte de eventos é sempre crescente para quaisquer eventos físicos aceitáveis

$$dA \geq 0 \quad (3.67)$$

- Terceira Lei : É impossível obter $\kappa = 0$ via processos físicos.

Através da comparação de (3.66) e da primeira lei da termodinâmica $dU = TdS + dW$, obtemos a entropia do buraco negro, chamada entropia de Bekenstein-Hawking que é dada por

$$S_{bn} = \frac{A}{4} \quad (3.68)$$

que é válido para qualquer tipo de buraco negro.

Portanto, vimos que buracos negros são de fato sistemas térmicos que obedecem as leis da termodinâmica. Porém, tudo isto levou a dois problemas : a descrição microscópica de buracos negros e o paradoxo da perda de informação. A resolução de tais problemas foi uma boa parte de pesquisa em física teórica de altas energias. Desde que buracos negros são uma região do espaço-tempo onde gravidade e mecânica quântica estão em pé de igualdade é de se esperar que tais problemas sejam resolvidos com o advento da teoria quântica da gravidade. Nós encerramos este capítulo revisando rapidamente tais problemas.

3.3.1 O princípio holográfico

Note que a entropia do buraco negro possui um comportamento diferente daquele de um sistema físico usual. Isto é porque a entropia do buraco negro está relacionado com a sua área, enquanto a de um sistema usual a entropia está relacionado com o volume. Ou seja, em termodinâmica a entropia é uma grandeza extensiva. Para ver o motivo disto, vamos considerar um sistema composto por V cubos de volume unitário, e então o volume do sistema é V . Suponha também que cada cubo tem dois estados possíveis, então o número total de estados acessíveis para os V cubos é

$$\Omega = 2^V \quad (3.69)$$

e então obtemos para a entropia

$$S = \ln \Omega = V \ln 2 \quad (3.70)$$

ou seja, proporcional ao volume e portanto é também uma grandeza extensiva.

Com os trabalhos de 't Hooft [28], ele chegou a uma surpreendente conclusão de que, em escalas de Planck, o mundo não é tridimensional, mas sim bidimensional. A fim de mostrar resumidamente seus argumentos vamos considerar um exemplo. Suponha que temos

um sistema com energia E contido numa esfera de volume V e raio R , onde cada unidade de volume possui dois estados possíveis, igual ao exemplo anterior. A energia contida na esfera é tal que o raio de Schwarzschild do sistema é menor do que o raio físico, isto é $2E < R$. Isto significa que a densidade de energia dentro da esfera não pode ser muito alta, senão isto ocasionaria um colapso e formaria um buraco negro. 't Hooft mostrou que a entropia do sistema é limitada por

$$S \leq \pi R^2 = \frac{A}{4} \quad (3.71)$$

isto é, a máxima entropia que o sistema pode alcançar é aquele de um buraco negro que preenche todo o volume da esfera. Este resultado é contraintuitivo, desde que a entropia do sistema está relacionado com sua área e não com seu volume. Isto é porque o sistema teórico que 't Hooft considerou é baseado em duas afirmações : que em escalas de Planck os graus de liberdade do espaço-tempo são discretos e que a evolução do sistema é reversível no tempo. Ou seja, quando tentamos fazer uma contagem do número de estados acessíveis, estamos fazendo a mesma contagem mais de uma vez. De acordo com 't Hooft, isto é devido ao fato da maioria dos estados possíveis em teoria de campos que tem uma alta energia, deveria colapsar para formar um buraco negro antes que ele possa influenciar a evolução do sistema. Isto é, quando levamos em conta a física gravitacional do sistema o número de graus de liberdade é reduzido. Logo, o número de estados acessíveis do sistema cresce exponencialmente com a área ao invés do volume. Isto explica o porque da entropia do sistema está relacionado com sua área. Este é o chamado princípio holográfico : para descrever a física dentro de um volume V , é suficiente conhecer os graus de liberdade na área A de sua superfície.

3.3.2 Descrição microscópica de buracos negros

Sabemos da mecânica estatística que para obter a entropia de um sistema precisamos contar o número de configurações microscópicas que geram as mesmas características macroscópicas do sistema. Logicamente, para isto, precisamos saber o que são os graus de liberdade microscópicos do sistema.

O teorema da "Calvície" da relatividade geral clássica afirma que para caracterizar completamente uma solução de buraco negro basta ter informações sobre seus parâmetros clássicos : massa, carga e momento angular. Isto significa que uma vez que o buraco negro é formado, observadores externos são incapazes de obter informações sobre o conteúdo de matéria que colapsou para gerá-lo. Neste contexto parece que o buraco negro possui apenas um estado possível, isto é, o espaço de fase clássico tem dimensão zero. A entropia esperada é então

$$S = \ln 1 = 0 \quad (3.72)$$

Mas este resultado está em contradição com o que acabamos de ver, que a entropia de um buraco negro é não nula e é dada pela expressão de Bekenstein-Hawking. Para resolver esta contradição precisamos saber quais são os graus de liberdade microscópico que faz surgir a entropia de Bekenstein-Hawking. Por exemplo, para um buraco negro de uma massa solar, a entropia é $S \approx 10^{18}$, e portanto o número de estados acessíveis é esperado como ser $\Omega \approx e^{10^{18}}$. Assim a descrição clássica e a quântica de buracos negros são extremamente diferentes.

Em cálculos feitos pelos autores Strominger e Vafa [29], eles obtiveram a entropia de Bekenstein-Hawking usando teoria de cordas para buracos negros em cinco dimensões. Como uma forte candidata para teoria quântica da gravidade, isto mostra que a teoria de cordas pode explicar satisfatoriamente a origem estatística da entropia de buracos negros.

3.3.3 O paradoxo da perda de informação

Sabemos da mecânica quântica que a matriz de densidade para estados puros $|\psi_a\rangle$ que pertencem a um espaço de Hilbert de dimensão infinita H , munido de uma base ortonormal de estados puros $|\psi_i\rangle$ é dado por

$$\rho_{puro} = \sum_a |\psi_a\rangle \langle \psi_a| \quad (3.73)$$

Podemos introduzir estados quânticos mistos como ensembles estatísticos de estados puros, cuja matriz de densidade neste caso é

$$\rho_{misto} = \sum_a p_a |\psi_a\rangle \langle \psi_a| \quad (3.74)$$

onde os p_a é a probabilidade de se obter cada estado puro $|\psi_a\rangle$ no ensemble. Em particular, a matriz de densidade para estados mistos é muito útil para descrição de sistemas térmicos. Para um sistema numa temperatura finita e fixa T , as probabilidades p_a são dadas pelo fator de Boltzmann $e^{-\beta E_a}$, onde $\beta = 1/T$ e E_a é a energia correspondente ao estado $|\psi_a\rangle$. Neste caso, a matriz de densidade para estados mistos é

$$\rho_{misto} = \sum_a \frac{e^{-\beta E_a}}{\sum_i e^{-\beta E_i}} |\psi_a\rangle \langle \psi_a| \quad (3.75)$$

Agora, vamos considerar um operador U definido em H tal que $|\psi_b\rangle = U |\psi_a\rangle$ e então $\langle \psi_b| = \langle \psi_a| U^\dagger$. Como os estados são ortonormais $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, obtemos

$$1 = \langle \psi_b | \psi_b \rangle = \langle \psi_a | U^\dagger U | \psi_a \rangle \rightarrow U^\dagger U = 1 \quad (3.76)$$

Ou seja, para garantir a ortonormalidade dos elementos de H o operador U deve ser unitário. Isto é, para qualquer processo físico consistente com a mecânica quântica, a evolução deve ser

unitária. Em termos das matrizes de densidade para estados puros e mistos, esta afirmação pode ser declarada como

$$\rho_{misto} \neq U\rho_{puro}U^\dagger \quad (3.77)$$

Logo, numa teoria de operadores unitários, um estado puro nunca pode evoluir para um estado misto.

Voltando para o caso de buracos negros, imagine que temos um estado quântico puro e este é 'jogado' para dentro do buraco negro. Isto irá causar um acréscimo infinitesimal na massa do buraco negro e ele irá começar a irradiar novamente. Quando o buraco negro irradia a massa por completo, esta será devolvida para o espaço-tempo na forma de radiação térmica, que é um estado misto. Ou seja, o buraco negro é um sistema que transforma estados quânticos puros em estados quânticos mistos. Como foi visto, isso não é permitido pela teoria quântica pois viola a evolução unitária. Esse é o paradoxo da perda de informação: O estudo de campos quânticos num background clássico traz um resultado que é consistente com as suposições iniciais da teoria. Muitas tentativas para resolver o paradoxo tem sido desenvolvidas. Mathur tentou fornecer uma solução usando teoria de cordas conhecida como a proposta 'fuzzball' para buracos negros [30], onde se faz o uso da correspondência AdS/CFT. Esta teoria afirma que é possível construir geometrias de microestado de buracos negros usando quantidade obtidas de teoria quântica de campos. Desde que teoria de campos é uma teoria unitária é esperado que qualquer processo na geometria do buraco negro deve ser unitária. O problema com esta teoria é que não se sabe se estas geometrias de microestados representam microestados de buracos negros típicos que fazem surgir a entropia de Bekenstein-Hawking.

4 O FORMALISMO DO TUNELAMENTO PARA A RADIAÇÃO HAWKING

Neste capítulo vamos revisar dois métodos alternativos para obter a radiação Hawking. Estes métodos são baseados na interpretação da radiação Hawking como o tunelamento de partículas que são criadas próximas do horizonte de eventos do buraco negro em questão, sendo assim um tratamento completamente semi-clássico. Vamos começar revisando o método da equação de Hamilton-Jacobi desenvolvido pelos autores Padmannabhan e Srinivasan [9]. Este método consiste em escrever a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula num background de buraco negro, e então utiliza-se o método WKB para calcular a probabilidade de tunelamento. O outro método é o das geodésicas nulas, desenvolvido por Parikh e Wilczek [10]. Este método é baseado em partículas numa geometria dinâmica e a parte imaginária da ação para a região classicamente proibida é relacionada ao fator de Boltzmann. Embora ambos estes formalismos de tunelamento sejam relacionados, neste trabalho vamos usar com mais frequência o método de Hamilton-Jacobi, devido sua simplicidade para espaços-tempo esfericamente simétricos. Neste capítulo iremos usar unidades na qual apenas a constante de Planck seja diferente de 1, para que todas as aproximações feitas aqui sejam explícitas.

4.1 Produção de partículas em espaços-tempo com horizonte

O resultado de Hawking, de que um buraco negro emite radiação, é essencialmente um efeito semi-clássico, onde a radiação térmica surge devido a presença de um horizonte de eventos na estrutura do espaço-tempo. Primeiramente, é feito aqui uma derivação da radiação térmica por uso de integrais de caminho. Considere um caminho num espaço-tempo caracterizado pela métrica, em coordenadas (t, r, θ, ϕ)

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + B^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

ou em coordenadas (t, x, y, z)

$$ds^2 = -B(x)dt^2 + B^{-1}(x)dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (4.2)$$

onde as funções $B(r)$ e $B(x)$ dependem de r e x respectivamente. O horizonte de eventos é dado pelas superfícies $r = r_0$ ($x = x_0$) tal que $B(r_0) = 0$ ($B(x_0) = 0$). Também é assumido que as derivadas $B'(r) = dB/dr$ ($B'(x) = dB/dx$) são finitas e não nulas quando calculadas no horizonte. O sistema de coordenadas da forma (4.1) pode ser introduzido em partes pelos espaço-tempo de Schwarzschild e de Sitter, enquanto um da forma (4.2), com $B(x) = 1 + 2gx$, representa um observador Rindler num espaço-tempo plano. Dado um espaço-tempo do tipo

(4.1), em alguma região R , podemos ver que não há singularidade física no horizonte, que no caso de Schwarzschild é dado pela superfície $r_0 = 2M$ onde M é a massa do buraco negro. É possível estender as geodésicas do passado para o futuro para chegar em regiões que não são cobertas pelo sistema de coordenadas (4.1)(a extensão Kruskal). Com isto, é possível mostrar que a relação entre as probabilidades de uma partícula com energia E escapar da região R e outra com mesma energia chegar a região R é dado por

$$P_{\text{perda}} = P_{\text{ganho}} e^{-\beta E}, \quad (4.3)$$

onde $\beta = 8\pi M$. Isto é equivalente a assumir que a região R está num banho térmico com temperatura β^{-1} . Na derivação original da radiação térmica feita por Hartle e Hawking [citar], é usado uma derivação semi-clássica por uma continuação analítica da coordenada temporal t para valores complexos e é mostrado que a probabilidade de emissão (perda) do horizonte passado foi relacionado com a absorção (ganho) no horizonte futuro segundo a equação (4.3).

Como toda a física está no plano (t, r) (ou no plano (t, x)) iremos discutir a radiação Hawking primeiramente na dimensão (1+1) e depois naturalmente generalizá-la para a dimensão (3+1) sem nenhuma modificação nos resultados. É derivado os resultados semi-clássicos no plano (t, r) (ou (t, x)) aplicando uma certa prescrição para evitar a singularidade encontrada no horizonte.

4.1.1 Radiação Hawking em (1+1) dimensões

Considere um caminho num espaço-tempo com (1+1) dimensões, na qual usando coordenadas (t, r) é definido pelo elemento de linha

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + B^{-1}(r)dr^2, \quad (4.4)$$

onde $B(r)$ é uma função da coordenada radial r . É assumido que o espaço-tempo definido por (4.4) possui um horizonte de eventos, isto é, existe um valor da coordenada radial $r = r_0$ na qual a função $B(r)$ é nula. Além disso, é assumido que $B'(r) = dB/dr$ é finito e não nulo em r_0 . É fácil ver que o horizonte de eventos não é uma singularidade física, pois ao calcularmos invariantes de curvatura, estes não devem divergir no horizonte. Então, podemos tomar o comportamento da função $B(r)$ próximo do horizonte

$$B(r) = B(r_0) + B'(r_0)(r - r_0) + O[(r - r_0)^2] = R(r_0)(r - r_0), \quad (4.5)$$

onde é assumido que $R(r_0) \neq 0$. Agora, vamos assumir um campo escalar real Φ com massa m_0 propagando-se no espaço-tempo definido por (4.4). O objetivo aqui será encontrar a equação de Hamilton-Jacobi satisfeito pelo funcional ação S_0 . O propagador semi-clássico pode ser cons-

truído utilizando S_0 que pode ser usado para analisar a singularidade no horizonte. (Este método é bastante diferente daquele de calcular os coeficientes de Bogolubov). Vamos considerar também que o campo está acoplado minimamente com o espaço-tempo, isto é, não há interação entre o campo e a curvatura. A equação de movimento satisfeita por Φ é dada pela equação de Klein-Gordon

$$\left(\square + \frac{m_0^2}{\hbar^2} \right) \Phi = 0, \quad (4.6)$$

onde o operador $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$ é calculado usando a métrica (4.4). Expandindo a equação (4.6) obtemos

$$\frac{1}{B(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(B(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -\frac{m_0^2}{\hbar^2} \Phi. \quad (4.7)$$

Para obter as funções de onda semi-clássica que satisfaz a equação (4.7) vamos utilizar o método WKB que se baseia no ansatz para Φ

$$\Phi(r, t) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(r, t) \right], \quad (4.8)$$

onde S faz o papel da ação, é uma função que será expandida em potências de \hbar . Substituindo (4.8) em (4.7) obtemos

$$\left[\frac{1}{B(r)} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - B(r) \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - m_0^2 \right] + \left(\frac{\hbar}{i} \right) \left[\frac{1}{B(r)} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - B(r) \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{dB(r)}{dr} \frac{\partial S}{\partial r} \right] = 0. \quad (4.9)$$

Agora, vamos expandir S numa série de potências de (\hbar/i)

$$S(r, t) = S_0(r, t) + \left(\frac{\hbar}{i} \right) S_1(r, t) + \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 S_2(r, t) + \dots \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) na expressão (4.9) e negligenciando os termos da ordem (\hbar/i) e maiores, encontramos para a menor ordem

$$\frac{1}{B(r)} \left(\frac{\partial S_0}{\partial t} \right)^2 - B(r) \left(\frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 - m_0^2 = 0. \quad (4.11)$$

A equação (4.11) é a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula de massa m_0 viajando num espaço-tempo definido pela métrica (4.4). A solução para esta equação pode ser calculada usando separação de variáveis cujo resultado é dado por

$$S_0(r, t) = -Et \pm \int^r \frac{dr}{B(r)} \sqrt{E^2 - m_0^2 B(r)}, \quad (4.12)$$

onde a constante de movimento E é interpretada como a energia da partícula. No caso de um campo escalar sem massa, isto é, quando $m_0 = 0$, a solução para (4.11) é dada exatamente pela equação

$$S_0(r, t; m_0 = 0) = F_1(t - r^*) + F_2(t + r^*), \quad (4.13)$$

onde a coordenada "tortoise" é definida como

$$r^* = \int \frac{dr}{B(r)}, \quad (4.14)$$

e F_1 e F_2 são funções arbitrárias. No caso das escolhas $F_1 = -Et + Er^*$ e $F_2 = -Et - Er^*$ fica claro que a solução (4.13) é a mesma que (4.12) com $m_0 = 0$. Então, o ansatz usado para Φ torna-se exato no caso de $m_0 = 0$. A partir de agora vamos considerar apenas o caso não massivo. O caso $m_0 \neq 0$ será considerado depois, mas a essência dos resultados será o mesmo.

O propagador semi-clássico $K(r_2, t_2; r_1, t_1)$ para a partícula se propagar do ponto (t_1, r_1) para (t_2, r_2) escrito usando a aproximação de ponto de sela, é dado por

$$K(r_2, t_2; r_1, t_1) = N \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_0(r_2, t_2; r_1, t_1)\right), \quad (4.15)$$

onde S_0 é o funcional ação que satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi clássica (4.11) no limite sem massa e N é uma constante de normalização. $S_0(r_2, t_2; r_1, t_1)$ é dado pela expressão

$$S_0(r_2, t_2; r_1, t_1) = S_0(2, 1) = -E(t_2 - t_1) \pm E \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{B(r)}. \quad (4.16)$$

A ambiguidade do sinal (devido à raiz quadrada) está relacionada com as partículas "saindo" ($\partial S_0 / \partial r > 0$) ou "chegando" ($\partial S_0 / \partial r < 0$). Se os pontos r_1 e r_2 estão no mesmo lado do horizonte, isto é, $r_1, r_2 > r_0$ ou $r_1, r_2 < r_0$, a integral em (4.16) será real e bem definida. Mas se estes pontos estão em lados opostos do horizonte, a integral não existe devido à divergência de $1/B(r)$ em $r = r_0$.

Para obtermos a amplitude de probabilidade para a partícula atravessar o horizonte de eventos, devemos dar uma prescrição extra para o cálculo da integral [31]. Desde que o horizonte de eventos definido em $B(r_0) = 0$ é uma superfície do tipo luz, podemos usar um $i\epsilon$ adequado para indicar o contorno em torno de $r = r_0$ que será feito para calcular a integral. A prescrição que vamos usar é definir o contorno como sendo um semi-círculo infinitesimal *acima* do polo $r = r_0$ para partículas "saindo" do lado esquerdo do horizonte e partículas "chegando" do lado direito. Da mesma maneira, para partículas "chegando" pelo lado esquerdo e partículas "saindo" pelo lado direito do horizonte (que corresponde a tomar uma transformação reversa no tempo da situação anterior), o contorno será um semi-círculo infinitesimal *abaixo* do polo $r = r_0$. Equivalentemente, esta quantidade puxa a singularidade de $r = r_0$ para $r = r_0 \mp i\epsilon$ onde o sinal de cima é usado para partículas que "saem" pelo lado esquerdo e que "chegam" pelo lado direito enquanto o sinal de baixo é para a situação reversa. No caso do espaço-tempo de Schwarzschild, isto significa acrescentar uma parte imaginária para a massa, desde que $r_0 = 2M$.

A prescrição feita acima para calcular a integral é o método do caminho complexo que pode ser visto em [11]. Este método é usado para calcular os coeficientes de reflexão e

transmissão na mecânica quântica usual por especificar um contorno complexo adequado para um dado cenário de tunelamento. O contorno deve ser especificado em duas regiões semi-clássica, onde o ansatz usado para a função de onda pode ser usado com um erro negligenciável, e então aproximação é válida ao longo de todo o contorno. Se singularidades estão presentes no sistema quântico e estão entre as regiões semi-clássicas, o contorno complexo apropriado contém informação útil que decide o comportamento estável do sistema. Nos espaços-tempo de buraco negro que estamos considerando aqui, a singularidade que aparece na ação (4.16) é devido à presença de um horizonte. Como a aproximação semi-clássica é usada em ambos os lados do horizonte e aproximadamente próximos a este, o contorno complexo precisa ignorar a singularidade e exigir que a aproximação semi-clássica seja válida em todo o contorno.

Agora, vamos considerar uma partícula saindo ($\partial S_0/\partial r > 0$) em $r = r_1 < r_0$. O módulo quadrado da amplitude para a partícula atravessar o horizonte, fornece a probabilidade para a emissão ocorrer. A contribuição de S_0 nas regiões $(r_1, r_0 - \varepsilon)$ e $(r_0 + \varepsilon, r_2)$ é real. Portanto, ao escolher o contorno como sendo a metade superior do plano complexo, temos

$$\begin{aligned} S_0[\text{emissão}] &= -E \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r_0 - \varepsilon}^{r_0 + \varepsilon} \frac{dr}{B(r)} + (\text{parte real}) \\ &= \frac{i\pi E}{R(r_0)} + (\text{parte real}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde o sinal negativo na integral é devido a condição inicial $\partial S_0/\partial r > 0$ em $r = r_1 < r_0$. Devido a definição que assumimos para $R(r_0)$ na equação (4.5), que este é positivo, então $B(r) < 0$ para $r < r_0$. (Para o caso $R < 0$, deve-se mudar o sinal na integral). O mesmo resultado é obtido para uma partícula chegando ($\partial S_0/\partial r < 0$) em $r = r_1 < r_0$. O contorno para este caso deve ser escolhido para permanecer na metade inferior do plano complexo. A amplitude para esta partícula atravessar o horizonte deve ser o mesmo para a partícula emitida, devido a invariância do sistema sob reversão temporal.

Agora, vamos considerar uma partícula chegando ($\partial S_0/\partial r < 0$) em $r = r_2 > r_0$. O módulo quadrado da amplitude desta partícula atravessar o horizonte fornece a probabilidade de ocorrer uma absorção. Escolhendo o contorno como metade superior do plano complexo, obtemos

$$\begin{aligned} S_0[\text{absorção}] &= -E \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r_0 + \varepsilon}^{r_0 - \varepsilon} \frac{dr}{B(r)} + (\text{parte real}) \\ &= \frac{-i\pi E}{R(r_0)} + (\text{parte real}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

O mesmo resultado é válido para uma partícula saindo do horizonte ($\partial S_0/\partial r > 0$) é considerada em $r = r_2 > r_0$. O contorno para este caso deve ser a metade inferior do plano complexo e a

amplitude de probabilidade para esta partícula cruzar o horizonte é a mesma da partícula que chega ser absorvida, devido à invariância sob reversão temporal.

Com isto, do método WKB, podemos obter a probabilidade $P \propto \exp(-\frac{2}{\hbar}\text{Im}S_0)$ de ocorrer o tunelamento. Para as probabilidades de emissão e absorção obtemos

$$P[\text{emissão}] \propto \exp\left(-\frac{2\pi E}{\hbar R}\right), \quad (4.19)$$

e

$$P[\text{absorção}] \propto \exp\left(\frac{2\pi E}{\hbar R}\right), \quad (4.20)$$

e então

$$P[\text{emissão}] = \exp\left(-\frac{4\pi E}{\hbar R}\right) P[\text{absorção}]. \quad (4.21)$$

Agora, note que devido à invariância por reversão temporal, a probabilidade para o processo de emissão é o mesmo para o processo de absorção voltando no tempo e vice-versa. Então, devemos interpretar o resultado acima de que a probabilidade de emissão de partículas não é o mesmo que a probabilidade de absorção das partículas. Ou seja, se em algum momento o horizonte emite partículas com uma certa probabilidade de emissão, a probabilidade de absorção de partículas no mesmo tempo é diferente da probabilidade de emissão. Portanto, este resultado mostra que é mais provável uma região ganhar partículas do que outras perdê-las. Mais do que isto, com a dependência exponencial da energia, é possível dar uma interpretação "térmica" para este resultado. Para um sistema com temperatura β^{-1} as probabilidades de emissão e absorção estão relacionadas por

$$P[\text{emissão}] = \exp(-\beta E) P[\text{absorção}]. \quad (4.22)$$

Comparando as equações (4.21) e (4.22), podemos identificar a temperatura do horizonte em termos de $R(r_0)$. O resultado (4.21) é baseado na suposição $R > 0$. Se $R < 0$ haverá uma mudança do sinal na equação. Incorporando ambos os resultados, obtemos para a temperatura do horizonte :

$$\beta^{-1} = \frac{\hbar|R|}{4\pi}. \quad (4.23)$$

Para o caso do buraco negro de Schwarzschild, obtemos

$$B(r) = 1 - \frac{2M}{r} \approx \frac{1}{2M}(r - 2M) + O[(r - 2M)^2], \quad (4.24)$$

que fornece $R = (2M)^{-1}$, e a temperatura resultante é $\beta^{-1} = \hbar/8\pi M$. Para o espaço-tempo de Sitter,

$$B(r) = (1 - H^2 r^2) \approx 2H(H^{-1} - r) = -2H(r - H^{-1}) \quad (4.25)$$

que fornece $\beta^{-1} = \hbar H/2\pi$ para a temperatura. Similarmente para o espaço-tempo Rindler

$$B(r) = (1 + 2gr) = 2g(r + (2g)^{-1}) \quad (4.26)$$

fornecendo $\beta^{-1} = g\hbar/2\pi$. A fórmula para a temperatura pode ser usada para modelos mais complicados e obter os mesmos resultados que seriam obtidos por métodos mais detalhados.

A prescrição usada para lidar com a singularidade é análogo a continuação analítica no tempo feito por Hawking [32] para obter a radiação emitida por buracos negros. Se estamos do lado esquerdo do horizonte e queremos contornar a singularidade por uma rotação de 2π ao invés de uma rotação por π , pode ser mostrado que isto é equivalente a substituir as coordenadas Kruskal (v, u) por $(-v, -u)$. Uma rotação completa por 2π em torno da singularidade pode ser dividida em duas partes, uma para a amplitude de emissão e a outra para a subsequente processo de absorção de uma partícula com energia E . Desde que as amplitudes não são as mesmas na presença de um horizonte, obtemos a radiação Hawking usual por meio da equação (4.22), com $R(r_0)$ dado por $(2M)^{-1}$. Este processo é análogo ao que é feito em [32], que relaciona as amplitudes com os horizontes passado e futuro. No método original de Hawking a continuação analítica de t para $t - 4Mi\pi$ faz as coordenadas Kruskal ir de (v, u) para $(-v, -u)$, e desde que o núcleo da integral de caminho é analítica numa faixa de $4Mi\pi$ abaixo do eixo t real, a radiação Hawking é obtida por deformar apropriadamente o contorno de integração. No entanto, note que neste método, não é exigido a extensão Kruskal e trabalhamos somente nas coordenadas (t, r) .

Agora, vamos verificar a validade do ansatz para o caso $m_0 \neq 0$. Para isto, vamos considerar a expansão (4.10) até o termo de ordem \hbar/i e negligenciar os termos de ordens mais altas. Feito isto, e substituindo para S_0 a expressão (4.12), obtemos para S_1 :

$$S_1 = -E_1 t \pm EE_1 \int \frac{dr}{B(r)} \frac{1}{\sqrt{E^2 - m_0^2 B(r)}} - \frac{1}{4} \ln(E^2 - m_0^2 B(r)), \quad (4.27)$$

onde E_1 é uma constante. Note que S_1 possui uma singularidade em $r = r_0$ da mesma ordem que tem a de S_0 . Ao calcular a amplitude de probabilidade para a partícula atravessar o horizonte, a contribuição do termo singular é somente um fator de fase multiplicado pelo núcleo semi-clássico e portanto não possui consequências. O termo finito não-singular contribui para o núcleo, mas este contribui a mesma quantidade para S [emissão] e S [absorção] e portanto não afeta a relação entre as probabilidades P [emissão] e P [absorção]. Se calcularmos as demais contribuições S_2, S_3 , e assim por diante, pode-se mostrar que todos eles possuem uma singularidade no horizonte da mesma ordem de S_0 . A contribuição para a amplitude de probabilidade são apenas termos multiplicados por potências de \hbar que podem ser negligenciados. Com isso, vemos que o ansatz semi-clássico no limite perturbativo é válido com erros negligenciáveis.

A generalização para $(3 + 1)$ dimensões é direta. Para isto, vamos utilizar a métrica completa (4.1). Para isto basta expandir a equação (4.7) da maneira adequada, isto é, basta acrescentar a parte angular do laplaciano. A equação de Klein-Gordon escrita em coordenadas (t, r, θ, ϕ) é

$$\frac{1}{B(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 B(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -\frac{m_0^2}{\hbar^2} \Phi. \quad (4.28)$$

Como o problema é esféricamente simétrico, podemos usar separação de variáveis $\Phi = \Psi(r, t) Y_l^m(\theta, \phi)$ para obter

$$\frac{1}{B(r)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 B(r) \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{m_0^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0. \quad (4.29)$$

E novamente fazendo o ansatz $\Psi = \exp((i/\hbar)S(r, t))$ e substituindo na equação acima obtemos

$$\left[\frac{1}{B(r)} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - B(r) \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - m_0^2 - \frac{l(l+1)\hbar^2}{r^2} \right] + \frac{\hbar}{i} \left[\frac{1}{B(r)} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - B(r) \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 B)}{dr} \frac{\partial S}{\partial r} \right] = 0. \quad (4.30)$$

Expandindo S em uma série de potências, como foi feito em (4.10), obtemos para o termo de ordem zero em \hbar/i ,

$$S_0 = -Et \pm \int^r \frac{dr}{B(r)} \sqrt{E^2 - B(r)(m_0^2 + L^2/r^2)}, \quad (4.31)$$

onde o termo $L^2 = l(l+1)\hbar^2$ é o quadrado do momento angular da partícula. Note que o termo L^2 pode ser negligenciado quando consideramos a equação acima próximo do horizonte, devido a multiplicação pelo fator $B(r)$. Portanto, todos os resultados semi-clássicos obtidos continuam válidos ainda com dimensões $(3 + 1)$. O ansatz semi-clássico permanece válido ainda para os termos de ordens mais altas de S . Todos estes termos possuem uma singularidade de mesma ordem no horizonte, e suas contribuições para o propagador semi-clássico ou é um fator de fase ou fatores multiplicativos com potências de \hbar , que podem ser negligenciados. Expandindo a equação de Klein-Gordon para Φ obtemos os mesmos resultados dados, mas não iremos fazer explicitamente aqui.

4.2 O método das geodésicas nulas

Para este método vamos também interpretar a radiação Hawking como o tunelamento de partículas que são criadas próximas do horizonte de eventos de um buraco negro. Neste método a conservação de energia tem um papel crucial : A transição entre estados devem ser feitas de tal maneira que a energia total seja a mesma, ou seja, a massa do buraco deve ir diminuindo à medida que irradia. Isto é porque nos métodos padrão para obter a radiação

Hawking a geometria é considerada fixa e a conservação de energia não é forçada durante o processo.

Por outro lado, é considerado aqui um buraco negro num espaço Schwarzschild, mas com uma geometria dinâmica a fim de forçar a conservação de energia. Apesar da aparência, a geometria Schwarzschild não é verdadeiramente estática, desde que não há vetores de Killing globais. Como este método é mais realístico, também será dito aqui quais são as correções com relação aos casos padrão.

4.2.1 Tunelamento

A fim de determinarmos o que acontece quando um objeto cruza o horizonte de eventos de um buraco negro, é necessário utilizarmos um sistema de coordenadas que seja não singular em tal superfície. Por isso, não devemos usar as coordenadas padrão Schwarzschild, mas em vez disso vamos introduzir a nova coordenada temporal

$$t = t_S + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}}, \quad (4.32)$$

onde t_S é a coordenada tempo Schwarzschild. Reescrevendo a métrica de Schwarzschild (2.15) em termos desta nova coordenada obtemos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.33)$$

Note que não há singularidade em $r = 2M$, e que neste novo sistema de coordenadas o espaço-tempo mostra seu caráter dinâmico por ser estacionário mas não estático. Estas coordenadas foram primeiramente introduzidas por Painlevé [33] cuja utilidade no estudo de mecânica quântica de buracos negros foi mostrado em [34].

A importância deste sistema de coordenadas é o fato crucial de não apresentar uma singularidade no horizonte e de serem estacionárias. Isto nos permite definir um estado de vácuo para campos quânticos, por exigir que estes aniquilem os modos de frequência negativa com respeito a coordenada t . Este estado irá parecer essencialmente vazio para observadores que caem livremente em direção ao buraco negro. Este vácuo irá essencialmente diferir do vácuo Unruh, que exige modos de frequência positiva com respeito a coordenada Kruskal $U = -\sqrt{r-2M} \exp\left(-\frac{t_S-r}{4M}\right)$ [24].

As geodésicas radiais nulas do espaço-tempo definido por (4.33) são dadas por

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}, \quad (4.34)$$

com o sinal de cima (baixo) correspondente as geodésicas que saem (chegam) do horizonte de eventos do buraco negro, com a suposição implícita de que a coordenada temporal t aumenta

na direção futuro. Quando a gravidade gerada pela própria partícula é levada em consideração, as equações para o elemento de linha (4.33) e para as geodésicas (4.34) são modificadas. Partículas auto-gravitantes foram estudadas por Kraus e Wilczek [35] usando a teoria Hamiltoniana para a gravidade. Eles mostraram que se considerarmos a massa do buraco negro fixa mas que sua massa Arnowitt-Deser-Misner total varie, então partículas de energia ω irão mover-se em geodésicas de um espaço-tempo com a variável M substituída por $M + \omega$. No entanto, se considerarmos que a massa do buraco negro flutue e que a massa total seja fixa, como é considerado aqui, uma partícula de energia ω irá mover-se em geodésicas num espaço-tempo definido por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2(M - \omega)}{r} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2(M - \omega)}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.35)$$

isto é, o elemento de linha (4.33) com $M \rightarrow M - \omega$.

Como o comprimento de onda da radiação emitida por um buraco negro é da ordem do tamanho do buraco, poderíamos duvidar se é válido considerar uma descrição usando partículas pontuais. Porém, quando a onda que sai do buraco negro é traçada de volta ao horizonte, seu comprimento de onda medido por observadores locais é sempre deslocado para o azul. Próximo do horizonte, o número de onda radial tende ao infinito, e portanto a descrição de partícula pontual, ou o método WKB é justificado.

A parte imaginária da ação para uma partícula com energia positiva que sai do horizonte de eventos de r_{in} para r_{out} é dada por

$$\text{Im} S = \text{Im} \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} p_r dr = \text{Im} \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_0^{p_r} dp_r' dr. \quad (4.36)$$

Para efetuarmos o cálculo da integral acima vamos utilizar a equação de movimento de Hamilton $\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}$ para mudar a variável de integração do momento para a energia. Ao fazermos isso, obtemos

$$\text{Im} S = \text{Im} \int_M^{M-\omega} \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{dr}{\dot{r}} dH \quad (4.37)$$

$$= \text{Im} \int_0^\omega \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}} (-d\omega'), \quad (4.38)$$

onde foi usado a equação (4.34) modificada e o sinal negativo na energia é devido a $H = M - \omega'$. O contorno deve ser escolhido de forma a garantir que soluções com energia positiva decaiam com o tempo, isto é, devemos tomar a metade do plano inferior ω' . Com isto, obtemos para a parte imaginária da ação

$$\text{Im} S = 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right), \quad (4.39)$$

dado que $r_{\text{in}} > r_{\text{out}}$. Para entendermos este ordenamento, que exige o sinal correto, notemos que

quando as integrais em (4.36) não são trocadas e usando o contorno $\omega \rightarrow \omega - i\varepsilon$ temos

$$\text{Im}S = \text{Im} \int_{r_{\text{in}}}^{\text{out}} \int_M^{M-\omega} \frac{dM'}{1 - \sqrt{\frac{2M'}{r}}} dr \quad (4.40)$$

$$= \text{Im} \int_{\text{in}}^{\text{out}} -\pi r dr. \quad (4.41)$$

E portanto $r_{\text{in}} = 2M$ e $r_{\text{out}} = 2(M - \omega)$. Note também que se compararmos o resultado acima com (4.36) obtemos $\text{Im}p_r = -\pi r$. Embora este resultado seja aparentemente permitido classicamente, é um movimento proibido classicamente. Isto é porque o próprio horizonte de eventos está contraindo. Assim, os limites da integral acima indicam que nesse caminho classicamente proibido, a partícula que sai começa sua trajetória em $r = 2M - \varepsilon$, isto é, a posição inicial da partícula é dentro do horizonte, e então a partícula atravessa o horizonte contraído e materializa-se em $r = 2(M - \omega) + \varepsilon$, ou seja, a posição final é fora do horizonte.

Alternativamente e analogamente, podemos considerar a radiação Hawking como a criação de um par partícula e antipartícula fora do horizonte de eventos, e considerar o tunelamento da partícula de energia negativa para dentro do buraco negro. Para efetuarmos os cálculos devemos notar que uma tal partícula move-se na direção inversa do tempo. Do elemento de linha (4.33) podemos ver rapidamente que tomar o reverso no tempo corresponde à troca $\sqrt{\frac{2M}{r}} \rightarrow -\sqrt{\frac{2M}{r}}$. Além disso, desde que a antipartícula vê a geometria da massa do buraco negro fixa, a correção da autogravitação é substituir M por $M + \omega$ e não por $M - \omega$. Logo, a parte imaginária da ação para uma partícula com energia negativa entrando no buraco negro é dada por

$$\text{Im}S = \text{Im} \int_0^{-\omega} \int_{r_{\text{out}}}^{r_{\text{in}}} \frac{dr}{-1 + \sqrt{\frac{2(M+\omega')}{r}}} d\omega' \quad (4.42)$$

$$= 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right), \quad (4.43)$$

onde foi usado a "teoria do buraco" de Feynmann para deformar o contorno : $\omega' \rightarrow \omega' + i\varepsilon$.

Ambas considerações, tunelamento de partícula e antipartícula, contribuem para a taxa de emissão no efeito Hawking. Num cálculo mais detalhado teríamos de levar em conta a soma das amplitudes antes de tomarmos o quadrado da mesma, a fim de obtermos a taxa de tunelamento semiclássico. No entanto, tais considerações somente fornecem um prefator multiplicativo. Mas, existe um outro tratamento na qual a parte exponencial da taxa de tunelamento é dado por [36]

$$\Gamma \approx e^{-2\text{Im}S} = e^{-8\pi\omega(M - \frac{\omega}{2})} = e^{\Delta S_{\text{B-H}}}, \quad (4.44)$$

onde o resultado foi expresso na forma mais conveniente usando a variação da entropia de Bekenstein-Hawking. Note que se o termo quadrático na energia for negligenciado, o resultado

acima fornece o inverso da temperatura Hawking $8\pi M$ para uma partícula saindo do buraco negro com energia ω . Esta correção aparece devido à conservação da energia, que bruscamente falando, auto-consistentemente aumenta a temperatura do buraco negro à medida que irradia. Este resultado deve estar correto, visto que no caso limite onde é emitido uma partícula com toda a massa e carga (se for o caso) do buraco negro haverá apenas um estado saindo possível. No entanto, há $\exp(S_{\text{B-H}})$ estados possíveis, levando a uma contradição. Mecânica estatística afirma que a probabilidade de encontrar um corpo contendo toda a massa do buraco negro é proporcional a $\exp(-S_{\text{B-H}})$, como acima.

A partir da equação (4.44) com os termos quadráticos da energia negligenciados e usando os argumentos padrão, obtemos o espectro de Planck com a correspondente temperatura $(8\pi M)^{-1}$

$$\rho(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|T(\omega)|^2}{e^{8\pi M\omega} - 1}, \quad (4.45)$$

onde o fator dependente da frequência $|T(\omega)|^2$ é a probabilidade da partícula com energia ω que sai do buraco negro alcançar seu futuro infinito e não se espalhar de volta.

A mesma técnica acima se aplica para o caso do buraco negro carregado, isto é, a solução de Reissner-Nordström. Porém, no caso em que a partícula emitida também carrega a carga do buraco negro, os cálculos tornam-se extremamente complicados, visto que as trajetórias destas partículas serão influenciadas também pelo campo eletromagnético. Portanto, vamos nos restringir apenas ao caso em que as partículas emitidas não possuem carga. O procedimento é completamente análogo.

Primeiro, usamos um sistema de coordenadas que seja não singular no horizonte de eventos e além disso, que mostre o caráter estacionário do espaço-tempo. De maneira análoga, definimos a nova coordenada temporal

$$t = t_r + 2\sqrt{2Mr - Q^2} + M \ln \left(\frac{r - \sqrt{2Mr - Q^2}}{r + \sqrt{2Mr - Q^2}} \right) + \frac{Q^2 - M^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{M^2 - Q^2} \sqrt{2Mr - Q^2}}{Mr} \right), \quad (4.46)$$

onde t_r é a coordenada temporal Reissner usual. Usando esta nova coordenada, reescrevemos o elemento de linha de Reissner-Nordström (2.23) da forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.47)$$

note que como esperado, o elemento de linha agora manifesta a característica estacionário, não estático e não singular no horizonte.

A equação de geodésica nula, isto é, a trajetória seguida por partículas sem massa

que saem do horizonte é dada por

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 1 - \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}, \quad (4.48)$$

e devemos substituir $M \rightarrow M - \omega$ quando a autogravitação da partícula é levada em conta [37].

A parte imaginária da ação para uma partícula que sai do horizonte de eventos é dada por

$$\text{Im}S = \text{Im} \int_0^\omega \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}} (-d\omega'), \quad (4.49)$$

onde novamente a integral é feita usando a prescrição de Feynman, por deformar o contorno $\omega' \rightarrow \omega' - i\varepsilon$. O resíduo no polo pode ser eliminado via transformação $u = \sqrt{2(M-\omega')r - Q^2}$.

Feito isto, a probabilidade de a partícula tunelar é dado por

$$\Gamma \approx e^{-2\text{Im}S} \quad (4.50)$$

$$= e^{-4\pi[2\omega(M-\omega/2)-(M-\omega)\sqrt{(M-\omega)^2-Q^2}+M\sqrt{M^2-Q^2}]} \quad (4.51)$$

$$= e^{\Delta S_{\text{B-H}}}. \quad (4.52)$$

Da mesma maneira, se considerarmos até primeira ordem em ω , obtemos o resultado usual para a temperatura Hawking de um buraco negro carregado

$$T_{\text{H}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \quad (4.53)$$

Novamente a conservação de energia implica em correções de ordens mais altas em ω e todos estes termos podem ser incluídos para expressar a taxa de emissão em termos da variação de entropia. Além disso, como a taxa de emissão tem que ser necessariamente real, as raízes na expressão (4.50) implica a não existência de radiação no caso não físico de a carga ser maior do que a massa do buraco negro.

Note que todas essas derivações foram feitas através de uma física local. Não foi preciso apelar para Euclideanização e nem para uma fase de colapso. A assimetria no tempo levando a radiação de saída surgiu ao invés de uma deformação local do contorno em termos da coordenada não estática t .

4.2.2 Relação com a descarga elétrica

Quando considerado a um nível mais amplo, a radiação da massa do buraco negro assemelha-se ao tunelamento de uma carga elétrica emitida por uma esfera condutora carregada. Embora os dois efeitos sejam situações físicas completamente distintas, as duas situações implicam em um puzzle aparente. Isto é porque a força elétrica entre cargas iguais é repul-

siva, enquanto a força gravitacional é sempre atrativa. Relacionado a isto, a energia do campo elétrico é sempre positiva, enquanto (heurísticamente) a energia do campo gravitacional é negativa. Nesta base, poderíamos pensar que o processo elétrico ocorre de maneira espontânea, e não exige o tunelamento, enquanto no caso gravitacional não há razão evidente para isso.

Vamos considerar uma esfera condutora de raio R e carga Q . A energia do campo elétrico pode ser baixada por emitir uma carga q , e esperamos que este processo ocorra espontaneamente. Se negligenciarmos o efeito de reação da carga q sobre a esfera condutora, a força entre eles será sempre repulsiva, para todas as distâncias. No entanto, vamos levar em conta também a carga induzida na esfera devido à carga q , o que é feito através do método das imagens. O potencial efetivo para esta configuração é dado por

$$V(r) = q \left(\frac{Q - q}{r} - \frac{qR}{r^2 - R^2} \right), \quad (4.54)$$

onde foi considerado configurações de carga imagem que garantam um potencial constante sobre a superfície da esfera e fixo no infinito. Note que no limite $Q \gg q$ o primeiro termo domina, e o potencial decresce monotonicamente com r , indicando nenhuma barreira. Mas, o segundo termo aumenta monotonicamente com r e torna-se dominante à medida que $r \rightarrow R$, produzindo uma barreira.

No caso gravitacional, o problema é somente o inverso. Se negligenciarmos a reação da partícula emitida, não há nada além de uma barreira. Ainda com os cálculos incluindo a reação, indica a possibilidade de redistribuir a massa e energia da esfera gravitante (buraco negro) em energia cinética das partículas emitidas.

Desde que a energia intrínseca do campo gravitacional é negativa, é desvantajoso reduzi-la, ponto por ponto. No entanto, desde que em geral, o espaçotempo contendo o buraco não é globalmente estático, existe modos de energia negativa propagando-se livremente dentro do horizonte de eventos do buraco negro, causando um encolhimento do buraco. Consequentemente, o raio do buraco negro diminui e o volume externo do espaço aumenta, sobre o qual a integração dos campos é feita. Isto, cinematicamente falando, é o porque do processo de radiação é permitido. Como é considerado a geometria do buraco negro como fixada, este não deveria ser uma possível fonte para a energia cinética da radiação, e uma genuína interpretação da radiação Hawking tem de ser incluída.

5 BURACOS NEGROS NÃO-COMUTATIVOS

Neste capítulo introduziremos a geometria não-comutativa e como usá-la em teorias físicas. Apresentaremos algumas correções que esta teoria trouxe tanto para Teoria Quântica de Campos quanto para Relatividade Geral. Em particular, algumas tentativas de obter uma versão não-comutativa da solução de Schwarzschild são mostradas aqui. Finalmente, discutiremos a versão não-comutativa completa do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo determinado por Nicolini [91]. A linha seguida aqui segue do artigo de revisão do próprio Nicolini [38].

5.1 Modelos de Geometria "Fuzzy"

A ideia inicial para se estudar física em espaços não comutativos veio no início do desenvolvimento da teoria quântica, com o objetivo de tornar uma teoria a curtas distâncias com propriedades renormalizáveis ou até torná-la finita [40] - [45]. Contudo, com o desenvolvimento das técnicas de renormalização em Teoria Quântica de Campos, houve uma perda de interesse em não comutatividade, até o momento em que uma tentativa de quantizar uma teoria não renormalizável, como a gravidade, foi estudado extensivamente. Paralelo a tudo isto, os matemáticos na década de 80 desenvolveram uma teoria a fim de descrever variedades Euclidianas em termos do espectro do operador de Dirac definido sobre a variedade, fornecendo uma generalização da geometria diferencial chamada de Geometria Não Comutativa [46]-[51].

O estudo de Geometria Não Comutativa é de grande interesse em física de altas energias. Em teoria de cordas abertas é mostrado que as coordenadas do espaço-tempo tornam-se operadores não comutativos sobre uma D-brana na presença de um campo constante Neveu-Schwarz B [52]-[53]. Consequentemente, as cordas abertas, pelo menos no limite de baixas energias, quando a matéria se desacopla da gravidade, induz uma teoria quântica de campos não comutativa, chamada de Teoria de Campos Não Comutativa, caracterizado pela presença de uma álgebra coordenada não comutativa. Também em Gravidade Quântica de Laço (Loop Quantum Gravity) a geometria quântica resultante exibe um comportamento não comutativo : operadores que medem áreas e volumes de uma subvariedade, estritamente falando, falham em comutar [54]-[57].

Independentemente da interpretação da não comutatividade, como sendo uma característica inerente do espaço-tempo ou como aspectos de Teoria de Cordas ou Gravidade Quântica de Laço, a Geometria Não Comutativa é frequentemente introduzida de tal maneira a expressar a "imprecisão" do espaço-tempo. Isto é feito através da imposição da relação de

comutação :

$$[\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j] = i\theta^{ij}, \quad (5.1)$$

onde os \mathbf{x}^i são as coordenadas que caracterizam o espaço e, no caso mais simples, θ^{ij} é uma matriz real, antissimétrica de ordem $D \times D$ (D é a dimensão do espaço-tempo), que possui a dimensão de quadrado de comprimento. Essa matriz caracteriza as células fundamentais de discretização do espaço-tempo, de maneira análoga que a constante de Planck \hbar discretiza o espaço de fase na mecânica quântica usual. Uma consequência direta de (5.1) é que estruturas pontuais não são mais bem definidas, visto que como agora as coordenadas tornaram-se operadores não comutativos, haverá uma relação de incerteza

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq \frac{1}{2} |\theta^{ij}|. \quad (5.2)$$

Podemos interpretar esta perda de informação como sendo devido a um cutoff ultravioleta efetivo natural, regulando não apenas a gravidade mas qualquer outra teoria quântica de campos. Definindo θ como o valor médio de um elemento de θ^{ij} , então $\frac{1}{\sqrt{\theta}}$ representa a escala de energia que separa o espaço-tempo convencional, representado por uma variedade diferenciável, do espaço-tempo representado por uma variedade não comutativa. Há um consenso em que os efeitos da não comutatividade aparecem entre a escala de energia do Modelo Padrão e a escala Planck. Desta maneira, poderíamos pensar em usar não comutatividade em teoria quântica de campos num espaço-tempo plano, para obter um limite inferior para a energia de corte na qual as partículas se movem e interagem em um espaço distorcido. No entanto, note que as relações (5.1) fornecem uma sutil quantização da variedade espaço-tempo \mathcal{M} , sem considerar quaisquer objetos tais como campos, funções ou tensores definidos sobre a variedade. Depois de construída essa base é que podemos definir vários tipos de estruturas sobre a variedade, mesmo quando \mathcal{M} é sujeito a um comportamento não comutativo. Entre as possíveis estruturas a ser definidas, podemos considerar independentemente campos de matéria ψ_α propagando-se em \mathcal{M} , ou até mesmo quantidades tensoriais, tais como o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que caracteriza a geometria e curvatura da variedade. Portanto, a quantização do espaço-tempo definido por (5.1) é um processo independente das quantidades definidas sobre ele. De fato, o tensor métrico é uma entidade matemática imposta a \mathcal{M} , que serve para medir a interação gravitacional sobre a variedade espaço-tempo, de maneira análoga ao potencial gravitacional Newtoniano ϕ na física pré-relativística. Logo, as flutuações quânticas de $g_{\mu\nu}$ é uma resposta das flutuações quânticas da variedade \mathcal{M} governado pelas equações (5.1). Portanto o comportamento quântico de \mathcal{M} é independente do tensor métrico, e ainda existe mesmo quando há apenas campos de matéria ψ_α propagando-se sobre a variedade.

Não comutatividade poderia ser pensada como uma possível violação da simetria

de Lorentz : devido à discretização do espaço-tempo, diferentes comprimentos de onda da luz deveriam viajar a diferentes velocidades, e tem um papel inesperado na energia de corte de raios cósmicos. Contudo, a violação de Lorentz pode ou não ser considerada em Geometria Não Comutativa : existem maneiras de implementar deformações locais em teoria de campos, impondo a seguinte relação não comutativa e forçando a simetria de Lorentz [58] - [64]:

$$[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (5.3)$$

onde $\theta^{\mu\nu}$ é agora um tensor antissimétrico de segunda ordem.

Um dos métodos mais populares encontrados na literatura para implementar a não comutatividade é substituir a multiplicação usual dos campos na lagrangiana, por um produto não local chamado produto Groenewold-Moyal ou produto- \star (estrela) [65]-[66]. Esta técnica foi inspirada nos estudos de mecânica quântica [67]-[68] e fornece uma maneira sistemática de descrever espaços não comutativos e campos propagando-se sobre eles.

Desde que θ é um parâmetro livre, que pode ser considerado um valor variável, começando do zero e aumentando seu valor à medida que entramos no regime não comutativo, uma deformação sobre $C(\mathcal{M})$, o conjunto das funções contínuas e limitadas sobre \mathcal{M} , é uma álgebra \mathcal{A}_θ com os mesmos elementos e leis de adição, porém com o produto usual de funções substituído pelo produto- \star . Se nós quiséssemos especificar monômios ou quaisquer outros tipos de produtos entre as coordenadas não comutativas, teríamos de fornecer uma prescrição de ordenamento. Porém, vamos contornar as condições de ordenamento estabelecendo um isomorfismo entre a álgebra não comutativa \mathcal{A}_θ e a álgebra usual das funções $C(R^D)$, através de um mapeamento linear S chamado *símbolo* do operador. Logo, podemos expressar a multiplicação em \mathcal{A}_θ em termos do produto- \star dos símbolos

$$\hat{f}\hat{g} = S^{-1}[S[\hat{f}]\star S[\hat{g}]], \quad (5.4)$$

onde $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{A}_\theta$. Pode-se pensar em diversas definições válidas para S , correspondente as diferentes escolhas do ordenamento para S^{-1} . Uma escolha padrão e conveniente encontrada na literatura é o ordenamento Weyl, denotado por \mathcal{W} [67]-[68]. Como resultado, mapeamos uma base monomial em $C(\mathcal{M})$ em uma base simetricamente ordenada dos elementos de \mathcal{A}_θ , através de $x^\alpha x^\beta \rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{x}^\alpha \mathbf{x}^\beta + \mathbf{x}^\beta \mathbf{x}^\alpha)$. A extensão de \mathcal{W} para o isomorfismo entre as álgebras, induzido pelo produto- \star , é dado por $\mathcal{W}[f\star g] = \mathcal{W}[f]\mathcal{W}[g] = \hat{f}\hat{g}$, onde $f, g \in C(\mathcal{M})$ e $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{A}_\theta$. A representação virá a ser

$$f(x)\star g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{2}\right)^k \theta^{\alpha_1\beta_1} \dots \theta^{\alpha_k\beta_k} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_k} f(x) \partial_{\beta_1} \dots \partial_{\beta_k} g(x), \quad (5.5)$$

donde se nota facilmente que o produto- \star é não comutativo e pode ser mostrado que este satisfaz

a propriedade associativa. Portanto, a não comutatividade do espaço-tempo pode ser considerada como produtos ordinários em \mathcal{A}_θ entre operadores Weyl ou, equivalentemente, como uma modificação do produto comutativo das funções definidas sobre o espaço-tempo $C(\mathcal{M})$ para o produto- \star Moyal.

Para transformarmos uma teoria de campos em uma teoria não comutativa, podemos escrever a ação do campo em termos do operador Weyl $W(\phi)$ correspondente ao campo $\phi(x)$. Então, podemos mapear a ação de volta as coordenadas do espaço para obter

$$S = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) \star (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} (\phi \star \phi) + \frac{\lambda}{24} (\phi \star \phi \star \phi \star \phi) \right], \quad (5.6)$$

onde apenas por ilustração foi usado a ação para um campo escalar massivo. Pode ser mostrado que as regras de Feynman para a teoria de campos descrita pela ação acima, fornecem expressões inalteradas para os propagadores e, portanto, ambas teorias são equivalentes a nível de campos livres. As únicas modificações são devido às contribuições de vértices, que são responsáveis pela não unitariedade da teoria e para uma mistura de divergências Ultravioleta(UV) e Infravermelho(IR).

Essas peculiaridades da teoria estão relacionadas a uma expansão perturbativa em θ na ação acima, visto que essa é a única maneira de extrair resultados fenomenologicamente testáveis. O que acontece é que ao truncarmos a série na ordem desejada para o parâmetro não comutativo θ , a não-localidade da teoria, codificada pela equação (5.3), é quebrada, fornecendo uma teoria de campos local. Em outras palavras, a não localidade induzida pela variedade não comutativa está relacionada a presença de termos de derivadas infinitas nos produtos de funções. Portanto, expansões de qualquer ordem em θ fornece uma teoria de campos local que, a priori, nada tem a ver com a teoria de campos não local original. Tentativas para tornar a teoria unitária [69] e contornar o problema da mistura das divergências UV/IR [70]-[71] foram feitas. Porém, a maneira mais eficiente de lidar com isto, é mudar a perspectiva sobre o emprego de coordenadas não comutativas e a correspondente álgebra \mathcal{A}_θ .

Sabemos, da mecânica quântica usual, que as flutuações de um operador quântico A são devidos às imprecisões do espaço de fase quântico, induzidos pelas relações de comutação de Heisenberg. Além disso, os autovalores do observável A fornecem os possíveis resultados fisicamente aceitáveis de uma medida de A e o valor médio $\langle A \rangle$ destes autovalores fornecem os resultados mais próximos das medidas do correspondente observável clássico. Valores médios, por serem misturas estatísticas de autovalores, levam em conta as flutuações quânticas do observável e evoluem com leis parecidas com as equações da dinâmica clássica. Assim, para extrairmos quantidades fisicamente relevantes da álgebra \mathcal{A}_θ , vamos considerar um conjunto de funções reais e contínuas que correspondem aos valores médios $\langle \hat{f} \rangle$ para cada $\hat{f} \in \mathcal{A}_\theta$.

Este procedimento nos permite usar a multiplicação usual, visto que os valores médios preservam o caráter não local devido à natureza não comutativa da álgebra \mathcal{A}_θ . O problema então é encontrar estados não-comutativos e calcular os respectivos valores médios $\langle \hat{f} \rangle$: a partir de uma relação não comutativa (5.3), não há autoestados coordenados para os agora operadores coordenadas e nenhuma representação pode ser definida. Porém, trabalhos pioneiros em óptica quântica [72] sugerem que estados coerentes, definidos como autoestados de operadores escada construídos apenas com operadores não comutativos, são os estados coordenados mais próximos que podemos construir, que nós podemos definir para coordenadas não-comutativas. Ou seja, estados coerentes são aqueles que tornam o mínimo de incerteza entre as coordenadas de uma variedade não comutativa e nos permite calcular os valores médios acima citados.

Como exemplo, vamos considerar o caso mais simples de uma variedade não-comutativa: um plano não-comutativo [73]-[75], caracterizado por um espaço-tempo com (2+1) dimensões, na qual apenas as coordenadas espaciais são não comutativas

$$[\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j] = i\theta \varepsilon^{ij}, \quad (5.7)$$

onde $i, j = 1, 2$ e $\theta^{ij} = \theta \varepsilon^{ij}$ foi escrito em termos de um único parâmetro não comutativo θ e um tensor antissimétrico ε^{ij} . Como agora as coordenadas espaciais são operadores não comutativos, nós não podemos construir estados do tipo $|x^1, x^2\rangle$. Porém, vamos construir operadores \mathbf{z} e \mathbf{z}^\dagger a fim de definir um conjunto conveniente de estados

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \quad (5.8)$$

$$\mathbf{z}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2), \quad (5.9)$$

que satisfazem $[\mathbf{z}, \mathbf{z}^\dagger] = \theta$. Com estes novos operadores podemos definir estados $|z\rangle$ tais que

$$\mathbf{z}|z\rangle = z|z\rangle, \quad (5.10)$$

$$\langle z|\mathbf{z}^\dagger = \langle z|z^*, \quad (5.11)$$

onde $|z\rangle = \exp(-\frac{z^*}{2\theta})\exp(-\frac{z}{\theta}\mathbf{z}^\dagger)|0\rangle$, com $|0\rangle$ sendo o estado de vácuo aniquilado pelo operador \mathbf{z} e z os correspondentes autovalores complexos. Com estes estados coerentes $|z\rangle$ podemos associar qualquer operador $F(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ com a função $F(z) = \langle z|F(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)|z\rangle$, que é o seu valor médio escrito em termos das *quasicoordenadas* x^1 e x^2 definidas por

$$\langle z|\mathbf{x}^1|z\rangle = \sqrt{2}\text{Re}z = x^1, \quad (5.12)$$

$$\langle z | \mathbf{x}^2 | z \rangle = \sqrt{2} \text{Im} z = x^2. \quad (5.13)$$

Com estas definições podemos descrever uma teoria quântica de campos no plano não-comutativo. Por exemplo, para um campo escalar temos

$$\phi(t, z) = \sum_{E, p} \left[\mathbf{a}_p^\dagger e^{-iEt} \langle z | \exp(ip_j \mathbf{x}^j) | z \rangle + \text{h.c.} \right], \quad (5.14)$$

onde \mathbf{a}_p e \mathbf{a}_p^\dagger são os convencionais operadores de aniquilação e criação, respectivamente, que aniquilam estados com energia e momento bem definidos no espaço de Fock. Devido à não comutatividade, o termo em $\langle z | \exp(ip_j \mathbf{x}^j) | z \rangle$ fornece um fator de decaimento Gaussiano $e^{-\theta_p^2/4}$. Assim, a não comutatividade modifica a medida de integração no espaço dos momentos, desde que funções $F(z)$ são representadas por sua transformada de Fourier inversa. Por exemplo, o propagador para o caso de campos livres no espaço dos momentos é dado por

$$G(E, \vec{p}^2) = \frac{e^{-\theta_p^2}}{-E^2 + \vec{p}^2 + m^2}, \quad (5.15)$$

que exibe o comportamento suave para o ultravioleta. Consequentemente, a equação para a função de Green deve ser modificada, por introduzir um diferente termo de fonte

$$(\Delta + m^2)G_\theta(\vec{x} - \vec{y}) = \rho_\theta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.16)$$

isto é, a função delta de Dirac foi substituída por uma distribuição Gaussiana, mostrando que em não-comutatividade não há mais o caráter pontual.

Logo, vimos que as flutuações da variedade devido à não-comutatividade, fornece um fator ultravioleta suave na transformada de Fourier dos campos definidos sobre a variedade, ainda a nível de campos livres. Importantes progressos nessa área tem sido feitos a fim de desenvolver uma teoria de campos numa formulação completamente não comutativa, isto é, com todas as coordenadas sendo não-comutativas. Como consequência, pode ser mostrado que a Teoria de Campos Não-Comutativo possui UV finito, e é livre de quaisquer contribuições IR, enquanto a invariância de Lorentz é recuperada impondo um único parâmetro não-comutativo θ

$$[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\nu] = i\theta\sigma^{\mu\nu}, \quad (5.17)$$

onde $\sigma^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico adimensional definido em [64].

5.2 Buracos Negros em Gravidade Não-Comutativa

5.2.1 Tentativas para obter a versão não-comutativa da métrica de Schwarzschild

É de grande interesse obter uma versão não-comutativa da Relatividade Geral, pois uma vez que escolhemos um modelo de Geometria Não-Comutativa, seria interessante obter como as equações que descrevem o campo gravitacional seriam modificadas devido à imprecisão do espaço-tempo. Nesta seção vamos apresentar uma formulação que fornecem métricas concretas para a versão não-comutativa das equações de Einstein.

Para começar, vamos analisar como a não-comutatividade modifica a solução mais simples encontrada em Relatividade Geral usual, a solução de Schwarzschild. Para este fim, vamos primeiramente usar a modificação das equações de Einstein induzidas por um gauge no grupo não comutativo ISO(3,1) (o grupo de Poincaré completo, incluindo os elementos de SO(3,1) e translações no espaço-tempo) obtidas por [76]. Mais precisamente, considera-se o campo de força de gauge do grupo não-comutativo ISO(4,1) e a contração com o grupo ISO(3,1) é feita para obter os campos vierbein modificados em termos dos campos vierbein originais. Feito isto, é possível obter a modificação para o escalar de Ricci e, conseqüentemente, para a ação do campo gravitacional

$$\int d^4x \sqrt{\hat{e}} \star \hat{e}_{\star a}^{\mu} \star \hat{R}_{\mu\nu}^{ab} \star (e_{\star b}^{\nu})^{\dagger} \star \sqrt{\hat{e}^{\dagger}}, \quad (5.18)$$

onde \hat{e}_{μ}^a são os campos vierbein modificados, $\hat{e} = \det(\hat{e}_{\mu}^a)$ e a inversa $\hat{e}_{\star a}^{\mu}$ é definida por $\hat{e}_{\star a}^{\mu} \star \hat{e}_{\mu}^b = \delta_a^b$. Estas quantidades podem ser expressas através de uma expansão em θ

$$\hat{e}_{\mu}^a = e_{\mu}^a + i\theta^{\nu\rho} e_{\mu\nu\rho}^a + \theta^{\nu\rho} \theta^{\kappa\sigma} e_{\mu\nu\rho\kappa\sigma}^a + O(\theta^3), \quad (5.19)$$

$$\hat{e}_{\star a}^{\mu} = e_a^{\mu} + i\theta^{\nu\rho} e_{a\nu\rho}^{\mu} + \theta^{\nu\rho} \theta^{\kappa\sigma} e_{a\nu\rho\kappa\sigma}^{\mu} + O(\theta^3), \quad (5.20)$$

onde $e_{\mu\nu\rho}^a$ e $e_{\mu\nu\rho\kappa\sigma}^a$ são escritos em termos de e_{μ}^a , $\theta^{\mu\nu}$ e as conexões de spin ω_{μ}^{ab} . Conseqüentemente, pode ser mostrado que a métrica modificada toma a forma [77]

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{ab} (\hat{e}_{\mu}^a \star \hat{e}_{\nu}^{b\dagger} + \hat{e}_{\mu}^b \star \hat{e}_{\nu}^{a\dagger}). \quad (5.21)$$

Expandindo os campos vierbein modificados \hat{e}_{μ}^a e usando os vierbein convencionais da solução de Schwarzschild, obtemos as componentes não-nulas da métrica de Schwarzschild modificada $\hat{g}_{\mu\nu}$

$$\hat{g}_{00} = g_{00} - \frac{\alpha(8r - 11\alpha)}{16r^4} \theta^2 + O(\theta^4), \quad (5.22)$$

$$\hat{g}_{11} = g_{11} - \frac{\alpha(4r - 3\alpha)}{16r^2(r - \alpha)^2} \theta^2 + O(\theta^4), \quad (5.23)$$

$$\hat{g}_{22} = g_{22} - \frac{2r^2 - 17\alpha r + 17\alpha^2}{32r(r - \alpha)} \theta^2 + O(\theta^4), \quad (5.24)$$

$$\hat{g}_{33} = g_{33} - \frac{(r^2 + \alpha r - \alpha^2) \cos \psi - \alpha(2r - \alpha)}{16r(r - \alpha)} \theta^2 + O(\theta^4), \quad (5.25)$$

onde $\alpha = 2M$ é o raio de Schwarzschild e $g_{\mu\nu}$ é a métrica de Schwarzschild convencional. Nota-se imediatamente que a solução obtida por este método (pelo menos até a ordem em θ considerado) não corrige o comportamento singular na origem e além disso fornece termos $1/r^4$.

Outra forma de introduzir correções não-comutativas para a gravidade é exigir que os $\theta^{\mu\nu}$ seja um tensor constante em um espaço curvo e que as simetrias do espaço-tempo reduzam-se a difeomorfismos que preservam o elemento de volume que também deixa $\theta^{\mu\nu}$ inalterado. Por meio de uma extensão do produto Moyal [78] para espaços curvos, foram encontradas contribuições não-comutativas para a métrica a nível linearizado [79]

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} (1 + 3\vec{\theta}^2 - (\vec{n} \cdot \vec{\theta})^2), \quad (5.26)$$

$$g_{0i} = 0, \quad (5.27)$$

$$g_{ij} = -\delta_{ij} - \frac{2M}{r} [n_i n_j + \delta_{ij} (\vec{\theta}^2 - (\vec{n} \cdot \vec{\theta})^2) + (\theta_i n_j + \theta_j n_i) \vec{n} \cdot \vec{\theta}], \quad (5.28)$$

onde $n_i = x_i/r$ são as componentes do vetor unitário na direção radial e as componentes do vetor θ são definidas de tal maneira que $\theta^{ij} = \varepsilon^{ijk} \theta_k$. Note que por este método o problema da singularidade na origem ainda persiste. Porém, neste trabalho foram encontradas correções não-comutativas proporcionais a $\vec{\theta}^2$ para o potencial Newtoniano. Tais correções podem ser incorporadas na constante Newtoniana G para obter o um valor efetivo para a mesma. Além disso, essas correções fornecem uma dependência angular $(\vec{n} \cdot \vec{\theta})^2$ para o potencial Newtoniano, que cai com $1/r^2$, contribuição que parece ser fisicamente inconsistente.

Outro método para obter correções não-comutativas a longas distâncias para a geometria clássica foi proposto [80]. Este trabalho utiliza argumentos semi-clássicos, no sentido de que são consideradas as correções apenas devido à interação do campo do gráviton linearizado com uma versão não-comutativa do tensor momento-energia

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^4x h_{\mu\nu} T_{\text{NC}}^{\mu\nu}, \quad (5.29)$$

onde o campo do gráviton próximo a uma fonte estática (ou aproximadamente estática), pode ser escrito em termos de uma integral de Fourier

$$h_{\mu\nu} = -16\pi \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}r} \frac{1}{\vec{q}^2} \left(T_{\mu\nu}^{\text{NC}}(q) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_{\text{NC}}(q) \right), \quad (5.30)$$

onde $T_{\mu\nu}^{\text{NC}}(q) = \langle p_2 | : T_{\mu\nu}^{\text{NC}}(x) : | p_1 \rangle$ e $q_\mu = (p_2 - p_1)_\mu$. É considerado o caso particular de um campo escalar como fonte de momento e energia. A versão não-comutativa do tensor momento-energia do campo escalar é dado por

$$T_{\text{NC}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \star \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi \star \partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \star \partial^\alpha \phi - m^2 \phi \star \phi). \quad (5.31)$$

Como usual, o cálculo com o produto- \star é feito por truncar a sua representação (5.5) em uma dada ordem. Para manter termos de no máximo até quartas derivadas, a expansão para $T_{\text{NC}}^{\mu\nu}$ fica sendo dada por

$$T_{\text{NC}}^{\mu\nu} \approx T_0^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} \frac{m^2}{16} \theta^{\alpha\beta} \theta^{\rho\sigma} \partial_\alpha \partial_\beta \phi \partial_\rho \partial_\sigma \phi, \quad (5.32)$$

onde $T_0^{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia para o campo escalar no caso comutativo. A solução obtida é dada por

$$g_{00} = \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{2m^2}{r^2} - \frac{2m^3}{r^3} + \dots \right] + \delta h_{00}^{\text{NC}}, \quad (5.33)$$

$$g_{ij} = \left[-\delta_{ij} \left(1 + \frac{2m}{r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \left(\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right) + \frac{2m^3}{r^3} \frac{r_i r_j}{r^2} + \dots \right] + \delta h_{ij}^{\text{NC}}, \quad (5.34)$$

$$g_{0i} = 0, \quad (5.35)$$

onde as correções devido aos termos de derivadas de quarta ordem no tensor energia-momento são dadas por

$$\delta h_{00}^{\text{NC}} = \frac{m^3 \theta^{0i} \theta^{0j}}{4\pi} \left[-\frac{\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3r_i r_j}{r^5} \right], \quad (5.36)$$

$$\delta h_{km}^{\text{NC}} = -\delta_{km} \delta h_{00}^{\text{NC}}, \quad (5.37)$$

$$\delta h_{0k}^{\text{NC}} = 0. \quad (5.38)$$

Como podemos ver, essas correções ainda não exibem o comportamento geométrico na singularidade, por ainda não eliminar o problema da singularidade na origem. Como nós iremos ver, a falta do mecanismo de regularização é devido ao uso de teorias de campo locais.

Por fim, outra tentativa de obter uma versão não-comutativa da solução de Schwarzschild foi obtida considerando a seguinte substituição $\hat{r} = (\sum_i \hat{x}_i^2)^{1/2}$, onde os \hat{x}_i satisfazem as

relações de comutação (5.1). A métrica proposta foi [81]-[82]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\hat{r}}\right) dt^2 - \frac{d\hat{r}d\hat{r}}{\left(1 - \frac{2M}{\hat{r}}\right)} - \hat{r}\hat{r}(d\psi^2 + \sin^2\psi d\phi^2). \quad (5.39)$$

Escrevendo este elemento de linha em termos das coordenadas comutativas, $x_i = \hat{x}_i + \frac{1}{2}\theta_{ij}\hat{p}_j$, onde $p_i = \hat{p}_i$ (isto é, os momentos ainda comutam entre si), podemos considerar as correções devido a estas substituições por meio de uma expansão perturbativa. Para a componente g_{00} obtém-se

$$g_{00} \approx \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{M}{2r^3} \left[\vec{L} \cdot \vec{\theta} - \frac{1}{8}(p^2\theta^2 - (\vec{p} \cdot \vec{\theta})) \right] + O(\theta^3), \quad (5.40)$$

onde $L_k = \varepsilon_{ijk}x_i p_j$, com $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$ e as componentes de $\vec{\theta}$ são tais que $\theta_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\theta_k$. No entanto, note que esta solução apresenta comportamentos não esperados: $d\hat{r}$ é um símbolo que parece inconsistente, o elemento de linha ds^2 é escrito em termos de operadores Hermitianos x^i e p^i e não por funções e nada é definido, as correções devido aos momentos linear e angular fornecem uma correção de $1/r^3$, piorando ainda mais o comportamento da geometria na origem.

5.2.2 Em direção a solução de Schwarzschild não-comutativa completa

Vimos na seção anterior que as métricas analisadas, mesmo com o uso da não-comutatividade, ainda não nos fornecem informações sobre a geometria na origem e, além disso, não são capazes de descrever o que acontece quando o buraco negro entra na fase de Planck (quando o raio do seu horizonte se aproxima do valor do comprimento de Planck, devido ao processo de evaporação). Como já foi dito, isto acontece porque para obter tais soluções foi usado uma expansão no parâmetro não-comutativo θ e como consequência, não há como governar o caráter não-local da variedade não-comutativa e não pode curar a singularidade na origem.

Porém, ao contrário do que foi feito, foi proposto uma modificação do potencial newtoniano [83] considerando os efeitos "completos" da não-comutatividade, isto é, sem ser feito uma expansão perturbativa em θ . Esta modificação foi obtida através da componente h_{00} do campo do gráviton

$$h_{00} = -8\pi \int d^4y G(x,y) T_{00}(y), \quad (5.41)$$

em que foi considerado uma distribuição gaussiana para o tensor momento-energia e para o propagador no espaço dos momentos. Após cálculos exatos, eles obtiveram para o potencial Newtoniano

$$\phi(r) = -\frac{M}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{\theta}}\right), \quad (5.42)$$

onde a função erro é definida por $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}$. Pode-se ver que no infinito, isto é, para $r \gg \sqrt{\theta}$, o potencial tende para a forma usual, caindo com $1/r$, enquanto que para pequenas

distâncias, isto é, para $r \ll \sqrt{\theta}$, o parâmetro não-comutativo θ fornece uma regularização para o potencial tal que $\phi(0) = -\frac{M}{\sqrt{\pi\theta}}$. Pela primeira vez θ ganha o papel de comprimento mínimo, o cutoff na distância devido a não-localidade intrínseca de um campo propagando-se numa variedade não-comutativa.

Este trabalho levou a mais proposições sobre a interação gravitacional quando o espaço-tempo é considerado uma variedade não-comutativa. De fato, o potencial modificado (5.42) foi usado para propor uma versão 2D não-comutativa da solução de Schwarzschild [84] bem como para obter e resolver a versão linearizada não-comutativa das equações de Einstein [85]-[86]. Mesmo no limite de campos fracos estas considerações levam a importantes conclusões, pois, desde que a não-comutatividade seja uma característica inerente do espaço-tempo, esta não depende da curvatura e, portanto, quaisquer modificações devido à não-comutatividade devem ser manifestadas ainda no regime de campo fraco. O uso das quasicoordenadas (os valores médios dos operadores coordenadas) levou a seguinte modificação das equações de Einstein linearizada :

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi\rho_\theta(\vec{x}), \quad (5.43)$$

$$\rho_\theta(\vec{x}) = \frac{M}{(2\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{4\theta}\right), \quad (5.44)$$

fornecendo uma distribuição do tipo gaussiana ao invés da distribuição convencional de Dirac δ , de acordo com a presença de um comprimento mínimo $\sqrt{\theta}$ na variedade. Por outro lado, a parte geométrica, descrita pelo tensor de Einstein, é formalmente considerada inalterada, mas com o cuidado de escrever este tensor em termos das já mencionadas quasicoordenadas.

Pode-se obter, sem quaisquer expansão perturbativa em θ , o equivalente não-comutativo para o elemento de linha de Schwarzschild linearizado

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi r}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)\right) dt^2 - dl^2, \quad (5.45)$$

onde γ é a função Gama incompleta, definida por:

$$\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) = \int_0^{r^2/4\theta} dt t^{-1/2} e^{-t}. \quad (5.46)$$

Note que sob a condição $r > \sqrt{\theta} \approx l_p$, a métrica acima fornece as características desejadas da não-comutatividade : do ponto de vista geométrico, as flutuações quânticas da variedade não-comutativa regularizam a singularidade na origem; do ponto de vista termodinâmico o buraco negro resultante irá apresentar uma regularização também em sua temperatura, depois de atingido um pico na temperatura, ocorrerá uma diminuição na emissão Hawking e consequentemente um resfriamento suave do buraco negro irá ocorrer à medida que irradia.

Outro aspecto importante é que a não-comutatividade implica que o buraco negro deve ter uma massa mínima M_0 para que haja a existência de um horizonte de eventos. De fato, todas essas características podem ser visualizadas através das Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 a seguir.

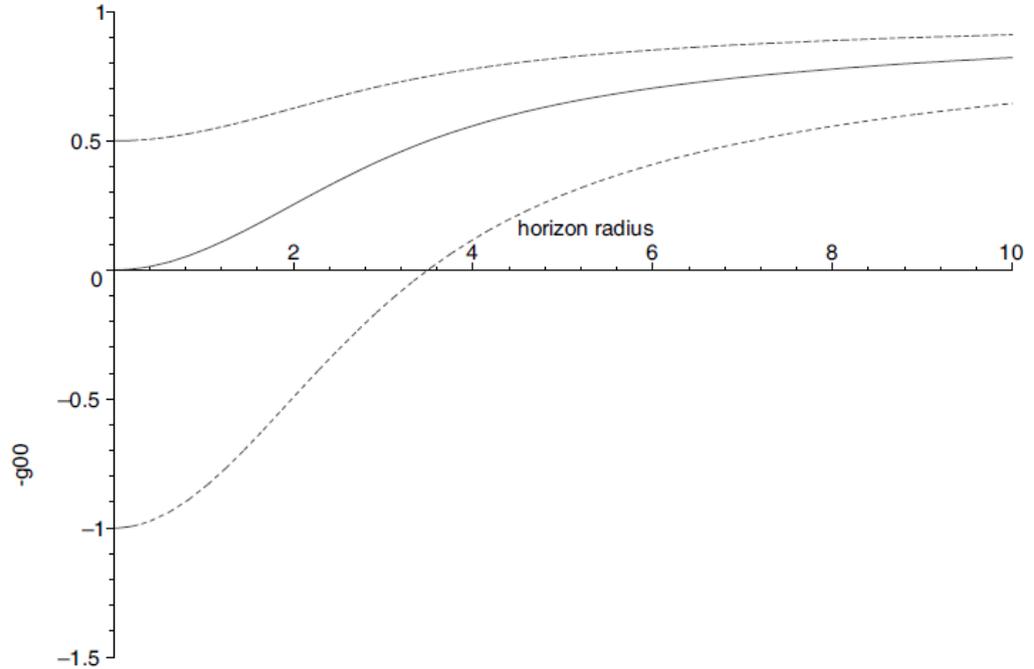


Figura 5.1: Solução linearizada: Função g_{00} vs distância radial $r/\sqrt{\theta}$ para algum valor de massa $M/\sqrt{\theta} M_{\text{p}}^2$ [38].

Na figura 5.1 a primeira linha corresponde a uma massa $M = 0,5M_0$, que implica a não existência de um horizonte de eventos; a última linha corresponde a uma massa $M = 2M_0$, que de fato corresponde a um buraco negro que é regular na origem $r = 0$; a curva do meio (linha sólida) corresponde ao caso limite $M = M_0$ na qual o raio do horizonte de eventos diminui rapidamente próximo da origem.

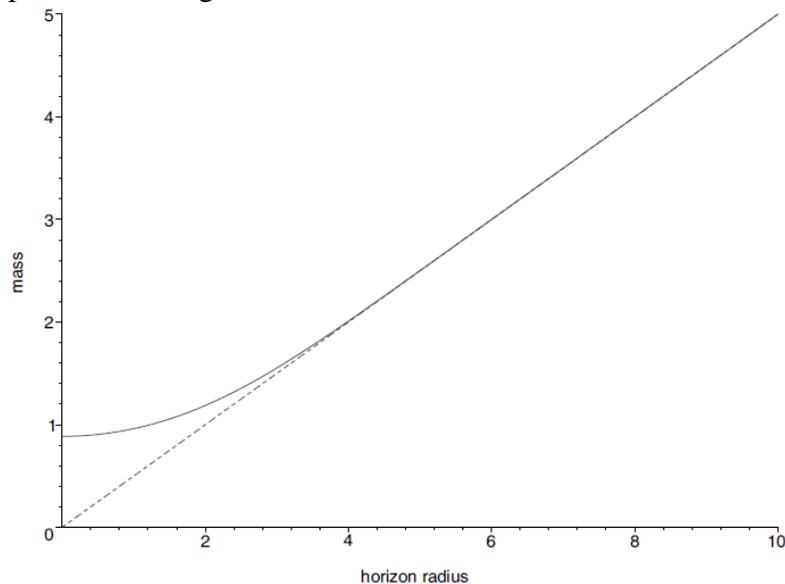


Figura 5.2: Solução linearizada: A massa $M/\sqrt{\theta} M_{\text{p}}^2$ vs relação com o horizonte de

eventos $r_H/\sqrt{\theta}$ [38].

Na figura 5.2 a linha tracejada corresponde ao caso usual, em que a massa é diretamente proporcional ao raio do horizonte, tornando-se nula na origem. No entanto, note que no caso não-comutativo, indicado pela linha sólida, vê-se que $M(r_H \rightarrow 0) \rightarrow M_0 = 0,5\sqrt{\pi\theta}M_P^2$, que implica que para $M < M_0$ não haverá a existência de horizonte de eventos.

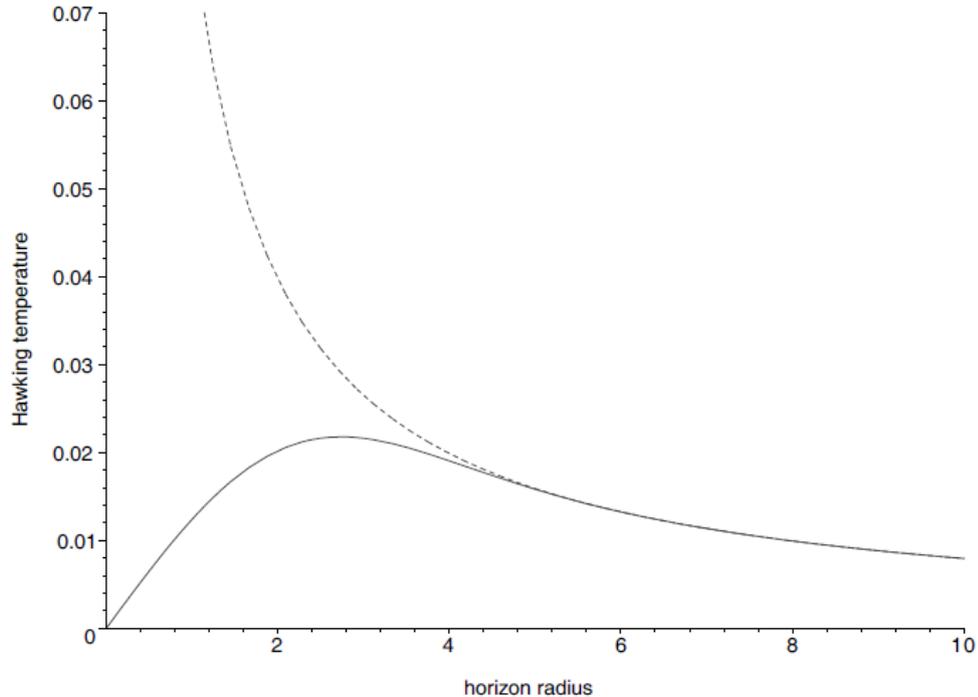


Figura 5.3: Solução linearizada: A temperatura Hawking $T_H\sqrt{\theta}$ vs horizonte de eventos $r_H/\sqrt{\theta}$ [38].

Na figura 5.3 a linha tracejada corresponde ao caso usual, em que a temperatura Hawking é sempre crescente à medida que o buraco negro irradia, divergindo quando $r_H \rightarrow 0$. A curva sólida mostra a correção da temperatura devido à não-comutatividade. Vê-se que a temperatura alcança um pico $T_H^{\text{Max}} = 2,18 \cdot 10^{-2}/\sqrt{\theta}$ para $r_H = 2,74\sqrt{\theta}$, e então esta decresce suavemente até zero à medida que $r_H \rightarrow 0$, eliminando o comportamento divergente do caso usual.

5.3 A solução de Schwarzschild não-comutativa

As considerações da seção anterior nos leva a seguinte versão não-comutativa das equações de Einstein escrita em termos das quasicoodenadas

$$G_{\theta}^{\mu\nu} = 8\pi T_{\theta}^{\mu\nu}, \quad (5.47)$$

onde a parte geométrica descrita pelo tensor de Einstein é mantida inalterada enquanto as modificações mais drásticas ocorre no termo de fonte. Considerando uma fonte esfericamente

simétrica, estática, difusa pelos efeitos da não-comutatividade obtemos a seguinte forma para a distribuição de energia

$$\rho_\theta(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (5.48)$$

que substitui a convencional distribuição delta de Dirac δ e fornece a seguinte componente temporal para o tensor momento-energia

$$T_{\theta 0}^0 = -\rho_\theta(r). \quad (5.49)$$

As equações de conservação $\nabla_\nu T_\theta^{\mu\nu} = 0$ e a condição "tipo Schwarzschild" $g_{00} = -g_{rr}^{-1}$ determinam completamente a forma para o tensor momento-energia

$$T_\theta^\nu{}_\mu = \text{diag}(-\rho_\theta, p_r, p_\perp, p_\perp), \quad (5.50)$$

onde $p_r = -\rho_\theta$ e $p_\perp = -\rho_\theta - \frac{r}{2}\partial_r\rho_\theta(r)$. Este tensor momento-energia difere do de um fluido perfeito por não apresentar termos isotrópicos na pressão, porém, p_r e p_\perp são notavelmente diferentes apenas para pontos muito próximos da origem, isto é, para $r \approx \sqrt{\theta}$, e a condição de fluido perfeito é recuperada para grandes distâncias. Colocando $T_\theta^{\mu\nu}$ nas equações de Einstein resultantes e levando em conta todas as considerações obtem-se o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)\right) dt^2 + \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5.51)$$

onde $d\Omega^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi d\phi^2$ (onde agora ψ denota o ângulo polar das coordenadas esféricas) e $\gamma(3/2, r^2/4\theta)$ é a função Gamma incompleta

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) = \int_0^{r^2/4\theta} dt t^{1/2} e^{-t}. \quad (5.52)$$

A métrica (5.51) descreve um corpo auto gravitante, do tipo fluido anisotrópico cuja pressão radial não-nula é uma consequência das flutuações quânticas da variedade não-comutativa, pressão esta que previne que a matéria não colapse em um ponto. Este é o primeiro efeito físico relevante devido à não-comutatividade. De fato, cálculos puramente clássicos nos faz acreditar em um colapso de matéria, ao contrário do que acontece quando a natureza quântica do campo gravitacional é levada em conta. Como esperado, os efeitos da não-comutatividade apenas tornam-se relevantes para pontos próximos da origem $r \approx \sqrt{\theta}$, onde ambas pressões tangenciais e densidade de matéria são regularizadas por θ e possuem o valor finito $M/(4\pi\theta)^{3/2}$ na origem. Assintoticamente no infinito, isto é, para grandes distâncias, a densidade e pressões se anulam, recuperando o regime de "solução no vácuo".

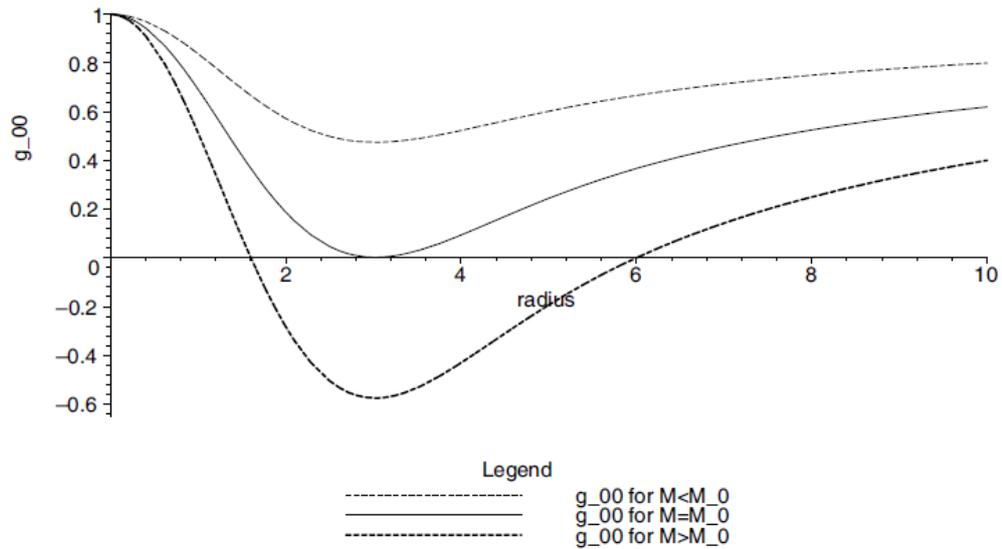


Figura 5.4. A solução de Schwarzschild não-comutativa. A função $-g_{00} = g_{rr}^{-1}$ vs $r/\sqrt{\theta}$ para vários valores de $M/\sqrt{\theta}$. A curva mais alta corresponde a $M = \sqrt{\theta}$ (nenhum horizonte) a curva do centro corresponde a $M = M_0 \approx 1,90\sqrt{\theta}$ (um horizonte degenerado em $r_H = r_0 \approx 3,0\sqrt{\theta}$) e a curva mais baixa corresponde a $M = 3,02\sqrt{\theta}$ (dois horizontes em $r_H = r_- \approx 1,60\sqrt{\theta}$ e $r_H = r_+ \approx 6,0\sqrt{\theta}$) [38].

5.3.1 Horizontes, curvatura e condições de energia

Vamos analisar mais detalhadamente as propriedades da métrica (5.51), começando pelo estudo da equação do horizonte $-g_{00}(r_H) = g^{rr}(r_H) = 0$. Como pode ser visto na Figura 5.4, diferente do caso usual, em que há apenas um horizonte de eventos em $r_H = 2M$, a não-comutatividade introduz um valor de massa mínima $M = M_0 \approx 1,90\sqrt{\theta}$ na qual não há presença de horizonte para $M < M_0$. Para $M > M_0$ a solução apresentará dois horizontes distintos e para o caso limite $M = M_0$ haverá apenas um horizonte degenerado em $r_H = r_0 \approx 3,0\sqrt{\theta}$, correspondente ao buraco negro extremo.

A não-comutatividade curou o problema da divergência da curvatura na origem. Isto pode ser visto ao calcularmos o valor do escalar de Ricci na origem cujo resultado é dado por

$$R(0) = \frac{4M}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}. \quad (5.53)$$

Portanto para $r < \sqrt{\theta}$ a curvatura possui um valor finito e positivo na origem. Ao invés de o espaço-tempo tornar-se singular à medida que nos aproximamos da origem, encontra-se um núcleo de Sitter cuja constante cosmológica é governada pela não-comutatividade e é dada por $\Lambda = M/3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}$. Fazendo a analogia com a aparição de termos de constante cosmológica induzidos por flutuações quânticas, quando descritas em termos de um tensor momento-energia

do tipo fluido [87], os termos de pressão mostrados anteriormente são o retrato do tipo fluido das flutuações quânticas não-comutativas, que determinam um núcleo de Sitter regular para pontos próximos da origem. Tentativas anteriores para fazer um núcleo de Sitter próximo a origem, a fim de regularizar a solução de Schwarzschild, foram feitas [88]-[89]. Tais soluções são conhecidas como buracos negros regulares. A grande diferença da solução não-comutativa das de buracos negros regulares é que o núcleo de Sitter próximo da origem não é algo forçadamente colocado na teoria, mas é o parâmetro não-comutativo θ que causa a transição suave para geometria regular de Sitter próximo da origem, ou seja, a regularidade do espaço-tempo descende diretamente do comportamento não-comutativo estabelecido pela relação (5.3).

Agora, vamos analisar as condições de energia da solução. Se pensarmos na solução (5.51) como uma solução clássica das equações de Einstein, poderíamos pensar numa possível violação da condição forte de energia

$$\rho_\theta + p_r + 2p_\perp \geq 0, \quad (5.54)$$

mesmo quando as condições fracas, $\rho_\theta + p_r \geq 0$ e $\rho_\theta + p_\perp \geq 0$ são sempre satisfeitas. De fato, note que

$$\rho_\theta + p_r + 2p_\perp \approx e^{r^2/4\theta} \left(\frac{r^2}{2\theta} - 2 \right), \quad (5.55)$$

que implica uma violação da condição forte de energia para $r < 2\sqrt{\theta}$. Isto significa que o tratamento clássico para a matéria e energia torna-se completamente equivocado numa região em que supomos desde o começo que os efeitos quânticos torna-se completamente dominante. Ou seja, no núcleo regular de Sitter próximo da origem, mais precisamente a $2\sqrt{\theta}$ de distância do centro do buraco negro, a gravidade será descrita por Geometria Não-Comutatividade e não pela Relatividade Geral.

5.3.2 A termodinâmica do buraco negro

Como já foi visto na análise da solução linearizada, o comportamento regular do espaço-tempo é refletido na termodinâmica da solução. De fato, podemos usar os métodos estabelecidos para determinar analiticamente a temperatura Hawking para a solução (5.51), fornecendo a seguinte expressão

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_+} \left[1 - \frac{r_+^3}{4\theta^{3/2}} \frac{e^{-r_+^2/4\theta}}{\gamma(3/2; r_+^2/4\theta)} \right], \quad (5.56)$$

onde a massa M foi escrita em termos do raio do horizonte de eventos. O comportamento da temperatura Hawking para a solução de Schwarzschild não-comutativa pode ser visto na Figura 5.5. Note que para grandes distâncias da fonte o comportamento convencional $T_H \propto 1/M$ ainda

é válido. A diferença notável aparece quando, no decorrer do processo de evaporação, o raio do horizonte r_+ atinge aproximadamente o valor $6\sqrt{\theta}$: a partir daí começa o desvio do caso usual na qual a temperatura alcança seu valor máximo em $r_+ = r_{\max} \approx 4,76\sqrt{\theta}$ e então o buraco negro começará a se resfriar, com uma relevante diminuição na taxa de emissão térmica. Quando r_+ atinge o valor $r_0 \approx 3,02\sqrt{\theta}$, isto é, quando o buraco negro alcança sua configuração extrema com massa $M_0 \approx 1,90\sqrt{\theta}$, a temperatura é zero e encerra-se o processo da emissão térmica.

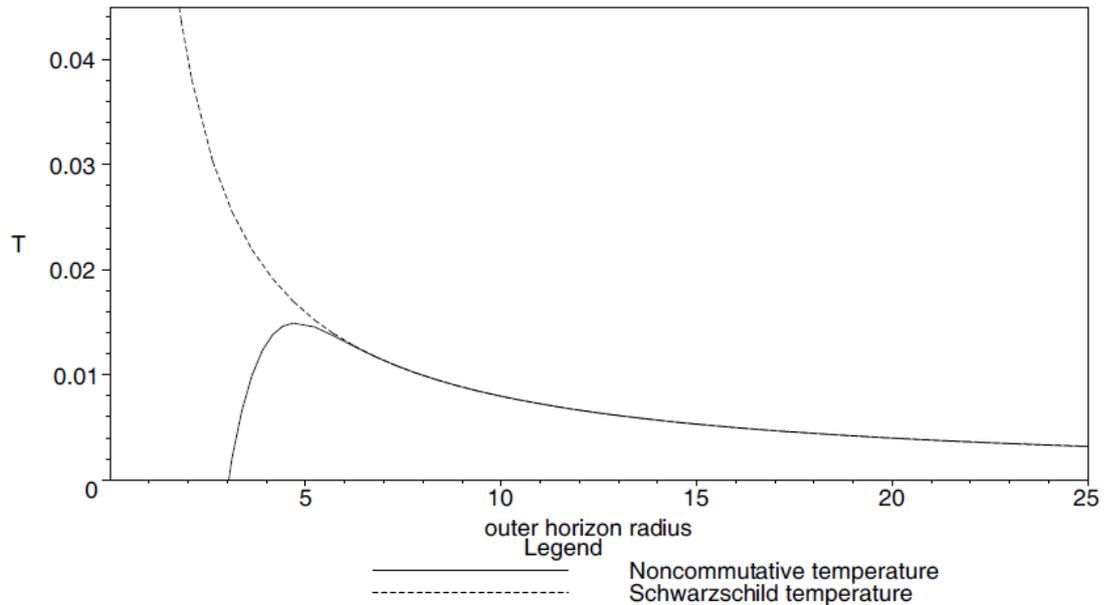


Figura 5.5 : A temperatura Hawking $T\sqrt{\theta}$ vs o raio do horizonte $r_+/\sqrt{\theta}$ [38].

Novamente, para $r_+ < r_0$ o buraco negro atinge sua configuração extrema e nós não podemos falar em horizonte de eventos e nenhuma temperatura pode ser definida. Dizemos então, que essa configuração de temperatura final zero é considerado uma "reliquia" do buraco negro, isto é, o remanescente da evaporação do buraco negro devido ao efeito Hawking. Note que, embora o buraco negro atinja uma temperatura máxima de aproximadamente $2,1 \cdot 10^{30}$ K, não estamos aptos a considerar quaisquer efeitos reversos. De fato, eh esta fase de resfriamento que nos permite usar a solução (5.51) durante toda a vida do buraco negro : para termos um efeito reverso significativo devemos ter $E_{\max} \approx M$, onde E_{\max} é o valor máximo da energia térmica, condição esta que nos leva a $\sqrt{\theta} < 10^{-34}$ cm, uma restrição não física.

Agora vamos considerar os efeitos da não-comutatividade nas demais quantidades termodinâmicas. Em particular, vamos verificar a lei das áreas para a entropia, fazendo uso da segunda lei da termodinâmica

$$dS_H = \frac{1}{T_H} \frac{dM(r_+)}{dr_+} dr_+, \quad (5.57)$$

onde a função $M(r_+) = \Gamma(3/2)r_+/2\gamma(3/2; r_+^2/4\theta)$ é obtida através da equação do horizonte $-g_{00}(r_+) = g^{rr}(r_+) = 0$. Integrando a expressão (5.57) do horizonte extremo r_0 até um valor

genérico do horizonte de eventos r_+ obtemos

$$\Delta S_H = \frac{1}{4G_\theta}(A_+ - A_0) + \delta S_H, \quad (5.58)$$

onde $A_+ = 4\pi r_+^2$, $A_0 = 4\pi r_0^2$, enquanto $G_\theta(r)$ pode ser interpretado como uma constante de Newton efetiva dado por

$$G \rightarrow G_\theta(r) = G \frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (5.59)$$

onde, para deixarmos explícito, foram usados unidades em que G é diferente de 1, e o fator δS_H é um pequeno termo de correção. O primeiro termo de (5.58) é a versão não-comutativa da lei das áreas de Bekenstein-Hawking, enquanto o segundo termo são mais correções não-comutativas que são sempre exponencialmente pequenas. De fato, como $r_0 > \sqrt{\theta}$, podemos usar a aproximação $\gamma(3/2; r^2/4\theta) \approx \sqrt{\pi}/2$ para encontrar

$$\delta S_H \approx \frac{1}{2\sqrt{\theta}G}(r_0^3 e^{-r_0^2/4\theta} - r_+^3 e^{-r_+^2/4\theta}). \quad (5.60)$$

Então nós dizemos que a lei das áreas continua válida com correções exponencialmente pequenas. O comportamento da entropia pode ser visto na Figura 5.6.

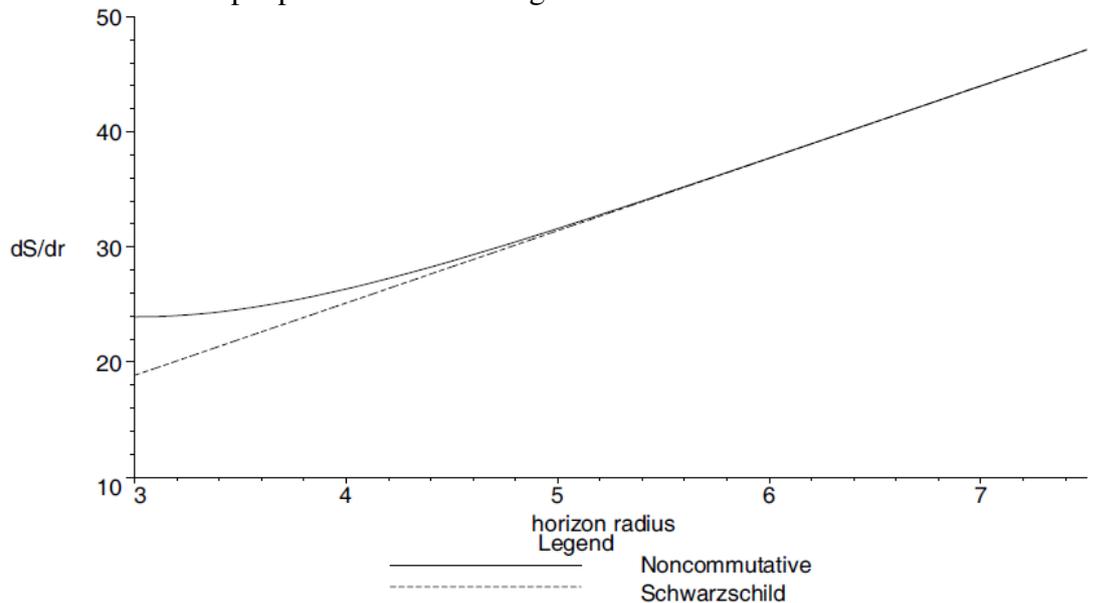


Figura 5.6 A função $\frac{dS_H}{dr_+} \sqrt{\theta}$ vs. o raio do horizonte de eventos $r_+/\sqrt{\theta}$ [38].

Podemos notar pelo gráfico que o comportamento convencional para a relação área-entropia vale até $r_+ \approx r_{\max} \approx 4,76\sqrt{\theta}$, valor do horizonte na qual a temperatura atinge seu valor máximo e a fase de resfriamento começa. Logo, as correções não comutativas são dominantes apenas na região $r_0 < r_+ < r_{\max}$. O comportamento da entropia é qualitativamente o mesmo do caso usual de Schwarzschild, pelo menos no que se refere à Terceira Lei da Termodinâmica: para temperaturas próximas ao zero absoluto, a entropia é governada apenas pela temperatura e, além disso, tende para um valor mínimo constante independentemente de outros parâmetros.

Em particular, tem-se $\Delta S_H = 0$, para o remanescente do buraco negro $r_+ = r_0$ [90]-[92].

Finalmente vamos analisar a influência da não-comutatividade na capacidade térmica do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo. A capacidade térmica é dada pela expressão

$$C = \frac{dM}{dT_H} = T_H \left(\frac{dS_H}{dr_+} \right) \left(\frac{dT_H}{dr_+} \right)^{-1}. \quad (5.61)$$

Podemos notar imediatamente que uma temperatura igual zero corresponde a $C = 0$ que nos leva a concluir que o remanescente do buraco negro é um objeto termodinamicamente estável, que não pode trocar energia e evaporar. Além disso, qualquer zero da função dT_H/dr_+ implica em um polo para a capacidade térmica C e nos diz o momento em que há a troca de sinal para $C > 0$, tornando o sistema estável, isto é, o momento em que começa a fase de resfriamento do buraco negro. O fato de haver um ponto em que C se torna singular não deve ser algo preocupante, para isto basta ver que ainda nos pontos críticos de C e T_H a entropia

$$S_H = C(T_H) \left(\frac{dT_H}{T_H} \right), \quad (5.62)$$

é sempre uma função positiva definida, fornecendo a termodinâmica correta do buraco negro. Logo, a singularidade na capacidade térmica marca o momento da transição de fase do buraco negro entre o regime instável de Schwarzschild para o regime estável da fase de resfriamento [93]-[94].

6 SOLUÇÃO DO TIPO SCHWARZSCHILD NUMA TEORIA DE GAUGE NÃO-COMUTATIVA

Neste capítulo discutiremos a solução obtida pelos autores Bufalo e Tureanu [106]. A forma em que a não-comutatividade é introduzida aqui é baseado na linhas dos trabalhos de Chamseddine [76] e Chaichian [77], já discutidos no capítulo anterior. A diferença da solução de Bufalo e Tureanu é a imposição da simetria esférica e então as equações de Einstein modificadas são resolvidas. É esperado que uma tal solução ainda apresente um comportamento irregular na origem, visto que a forma de introduzir a não-comutatividade aqui é baseado numa expansão perturbativa do parâmetro não-comutativo. Porém, a solução de Bufalo traz interessantes características como, por exemplo, uma possível interpretação física da não-comutatividade.

6.1 Teoria de gauge De Sitter

Vamos começar revisando o formalismo do método da base ortonormal, ou o formalismo vierbein [21]. Para introduzir este modelo, vamos utilizar a teoria de gauge do grupo De Sitter $SO(4, 1)$ para um espaço-tempo 4-dimensional [95]. O grupo $SO(4, 1)$ possui 10 dimensões e seus geradores infinitesimais são tais que $M_{AB} = -M_{BA}$, onde $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$. Podemos colocar $A = a, 4$ e $B = b, 4$ onde $a, b = 0, 1, 2, 3$, e com isto podemos introduzir $P_a = M_{a4}$ como os geradores das translações e $M_{ab} = -M_{ba}$ como os geradores das rotações de Lorentz. Os potenciais de gauge associados são denotados por $\omega_\mu^{AB} = -\omega_\mu^{BA}$. Dos potenciais acima podemos identificar as conexões de spin $\omega_\mu^{ab} = -\omega_\mu^{ba}$ e os campos vierbein $\omega_\mu^{a4} = \kappa e_\mu^a$, onde κ é um parâmetro de contração. O campo de força associado com os potenciais de gauge ω_μ^{AB} é dado por

$$F_{\mu\nu}^{AB} = \partial_\mu \omega_\nu^{AB} - \partial_\nu \omega_\mu^{AB} + \eta_{CD}(\omega_\mu^{AC} \omega_\nu^{DB} - \omega_\nu^{AC} \omega_\mu^{DB}), \quad (6.1)$$

onde $\eta_{CD} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1, +1)$. Novamente, podemos escrever as seguintes componentes em termos dos campos vierbein e das conexões de spin :

$$F_{\mu\nu}^{a4} \equiv \kappa T_{\mu\nu}^a = \kappa[\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \eta_{bc}(\omega_\mu^{ab} e_\nu^c - \omega_\nu^{ab} e_\mu^c)] \quad (6.2)$$

e

$$F_{\mu\nu}^{ab} \equiv R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \eta_{cd}(\omega_\mu^{ac} \omega_\nu^{db} - \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^{db}) + \kappa(e_\mu^a e_\nu^b - e_\nu^a e_\mu^b), \quad (6.3)$$

onde $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. No limite de $\kappa \rightarrow 0$ o grupo de gauge resultante é o $ISO(3, 1)$, o chamado grupo de gauge Poincaré da gravitação. Esta teoria de gauge possui a estrutura geométrica do espaço Riemann-Cartan U_4 , onde ambos curvatura $R_{\mu\nu}^{ab}$ e torção $T_{\mu\nu}^a$ estão presentes, e são escritos em termos dos campos de gauge gravitacionais e_μ^a e dos potenciais ω_μ^{ab} . Portanto,

pode-se ver que a teoria de gauge Poincaré, é uma teoria da gravidade onde ambos massa e spin são fontes de campos gravitacionais.

No entanto, note que se considerarmos que os campos vierbein e as conexões de spin não são variáveis independentes (por exemplo, no caso de matéria sem spin), podemos obter uma expressão das componentes da conexão de spin em termos dos campos vierbein, por exigir que a torção (6.2) seja nula

$$\partial_{[\mu} e_{\nu]}^a = \eta_{cd} e_{[\mu}^c \omega_{\nu]}^{ad}. \quad (6.4)$$

No caso de torção nula, a estrutura geométrica reduz-se para um espaço Riemanniano V_4 . Iremos usar a equação (6.4) para determinar as componentes da conexão de spin no caso do espaço-tempo não-comutativo, desde que é uma maneira mais simples natural de fazê-lo. Além disso, os cálculos tensoriais são facilmente feitos no formalismo vierbein, desde que a física torna-se mais 'visível' num referencial localmente inercial.

O tensor de curvatura da teoria de gauge Poincaré $ISO(3,1)$ é obtido diretamente de (6.3)

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_{\mu} \omega_{\nu}^{ab} - \partial_{\nu} \omega_{\mu}^{ab} + \eta_{cd} (\omega_{\mu}^{ac} \omega_{\nu}^{db} - \omega_{\nu}^{ac} \omega_{\mu}^{db}). \quad (6.5)$$

Como vamos considerar a contraparte não-comutativa da solução de Schwarzschild das equações de movimento gravitacional, é natural exigir uma métrica estática e esféricamente simétrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6.6)$$

onde foi escolhido $x^{\mu} = (t, r, \theta, \phi)$ com $\mu = 0, 1, 2, 3$ para as coordenadas do espaço-tempo. Uma base ortonormal adequada para a métrica acima é dada por [21]

$$e_{\mu}^0 = f^{1/2}(dt)_{\mu} \quad (6.7)$$

$$e_{\mu}^1 = f^{-1/2}(dr)_{\mu} \quad (6.8)$$

$$e_{\mu}^2 = r(d\theta)_{\mu} \quad (6.9)$$

$$e_{\mu}^3 = r \sin\theta(d\phi)_{\mu} \quad (6.10)$$

Note que ao introduzir uma base ortonormal não-coordenada, os campos vierbein e_{μ}^a e sua inversa \bar{e}_a^{μ} são definidos por um covetor $e^a = e_{\mu}^a dx^{\mu}$ e seu vetor dual $\bar{e}_a = \bar{e}_a^{\mu} \partial_{\mu}$, respectivamente, satisfazendo as condições $e_{\mu}^a \bar{e}_a^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ e $e_{\mu}^a \bar{e}_b^{\mu} = \delta_b^a$.

A fim de determinar as componentes desconhecidas da métrica, devemos resolver as equações de movimento para $e_{\mu}^a(x)$,

$$R_{\mu}^a - \frac{1}{2} e_{\mu}^a R = 8\pi T_{\mu}^a, \quad (6.11)$$

onde $R_{\mu}^a = R_{\mu\nu}^{ab} \bar{e}_b^{\nu}$ e $R = R_{\mu\nu}^{ab} \bar{e}_a^{\mu} \bar{e}_b^{\nu}$. É usado um sistema de unidades tal que $G = c = \hbar = 1$, e T_{μ}^a é o tensor momento-energia da fonte de matéria. Podemos usar as equações (6.11) para determinar a solução interior, mas podemos também determinar a solução exterior, ou solução no vácuo, que é dado por

$$R_{\mu}^a = 0. \quad (6.12)$$

Agora, vamos determinar a solução não-comutativa primeiramente no vácuo, por resolver a equação (6.12), e depois usar (6.11) para obter a solução interior, onde iremos considerar um fluido perfeito como fonte para o campo gravitacional.

6.2 Solução exterior

Agora, vamos introduzir a não-comutatividade no modelo que estamos usando, isto é, a teoria de gauge gravitacional Poincaré. Para isto, vamos utilizar o produto estrela Moyal " \star " entre campos vierbein, e então fazer uma análise perturbativa para as contribuições não-comutativas para a solução no vácuo das equações de movimento para um espaço-tempo estático e esféricamente simétrico. Para acrescentar não-comutatividade em gravidade, vamos utilizar o método desenvolvido em [76], onde uma deformação da gravitação é obtida por calibrar o grupo $SO(4, 1)$, e depois tomar uma contração $\kappa \rightarrow 0$ para obter a teoria de gauge Poincaré $ISO(3, 1)$ e então a teoria de gauge deformada, na qual será feito os cálculos.

A estrutura não-comutativa do espaço-tempo é determinada impondo a seguinte relação de comutação

$$[x^{\mu}, x^{\nu}] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (6.13)$$

onde os parâmetros $\Theta^{\mu\nu} = -\Theta^{\nu\mu}$ são constantes que medem a não-comutatividade. Note que as coordenadas do espaço-tempo ganham o status de operadores. Para desenvolver a teoria de gauge não-comutativa, vamos introduzir o produto estrela Moyal para duas funções g e h , definido por [77, 105]

$$g(x) \star h(x) = g(x) \exp \left[\frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_{\mu} \overrightarrow{\partial}_{\nu} \right] h(x). \quad (6.14)$$

Deve ser enfatizado que o produto estrela Moyal é não-local por definição e portanto deve agir no espaço-tempo inteiro. No entanto, desde que não iremos considerar a contribuição completa da não-comutatividade, mas apenas contribuições até a ordem Θ^2 , a situação pode ser vista como pequenas perturbações no espaço tangente na qual os campos vierbein são definidos. Note que introduzir não-comutatividade através do produto Moyal (6.14) torna a teoria não covariante sob transformações gerais de coordenadas, sem considerar se esta é usada na teoria de gauge ou na teoria de Einstein da gravidade. Além disso, deve ser notado também que a simetria de Lorentz é quebrada devido a não-comutatividade como usual, em nosso, dos campos vierbein.

Agora, vamos introduzir a ação modificada de Einstein-Cartan [96]:

$$S_{EC} = \frac{1}{4\chi} \int d^4x (|e_\star| \star \bar{e}_a^\mu \star R_{\mu\nu}^{ab} \star \bar{e}_b^\nu + H.c.), \quad (6.15)$$

$$= \frac{1}{4\chi} \int d^4x (|e| R_\star + H.c.), \quad (6.16)$$

onde χ é o acoplamento de Einstein e $|e_\star| = \det_\star(e_\mu^a) = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon_{abcd} e_\mu^a \star e_\nu^b \star e_\lambda^c \star e_\sigma^d = \det(e_\mu^a) + O(\Theta^2)$. Além disso, seguindo da definição do produto estrela Moyal, obtemos as expressões para métrica deformada $g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{ab} (e_\mu^a \star e_\nu^b + e_\nu^b \star e_\mu^a)$, o tensor de Ricci deformado $R_\mu^a = R_{\mu\nu}^{ab} \star \bar{e}_b^\nu$ e escalar de Ricci deformado $R_\star = \bar{e}_a^\mu \star R_{\mu\nu}^{ab} \star \bar{e}_b^\nu$. Note a Hermiticidade da definição (6.16). Uma tal definição será de suma importância para a análise das equações de campo de Einstein deformadas.

Precisamos determinar a expressão para tensor de torção na teoria de gauge modificada. Para isto, precisamos variar a ação de Einstein-Cartan (6.16) com respeito as conexões de spin ω_μ^{ab} . O resultado obtido é

$$2T_{\mu\nu}^a \equiv 2\partial_{[\mu} e_{\nu]}^a - \eta_{cd} e_{[\mu}^c \star \omega_{\nu]}^{ad} + H.c. \quad (6.17)$$

Em particular, deve ser notado que a condição de realidade sobre o tensor de torção está codificada no resultado acima, portanto nenhuma ambiguidade no ordenamento estrela está presente.

Considerando novamente o caso de torção nula, obtemos a condição generalizada

$$2\partial_{[\mu} e_{\nu]}^a = \eta_{cd} e_{[\mu}^c \star \omega_{\nu]}^{ad} + H.c. \quad (6.18)$$

A expressão acima é o ponto de partida, desde que esta relaciona as componentes (complexas) da conexão de spin em termos dos campos vierbein. No caso não-comutativo o tensor de torção pode ser não nulo, embora no caso usual o seja [97], então a suposição de torção nula neste caso é uma restrição específica.

As derivadas do lado esquerdo da equação (6.18) podem ser obtidas diretamente usando as relações (6.7). Além disso, substituindo a forma explícita dos campos vierbein nas equações (6.18) obtemos as seguintes restrições a serem satisfeitas :

$$f^{-\frac{1}{2}} f' (dr)_{[\mu} (dt)_{\nu]} = (f^{-\frac{1}{2}} (dr)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{01} + (r(d\theta)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{02} + (r \sin \theta (d\phi)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{03} + H.c. \quad (6.19)$$

$$0 = -(f^{\frac{1}{2}} (dt)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{10} + (r(d\theta)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{12} + (r \sin \theta (d\phi)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{13} + H.c. \quad (6.20)$$

$$2(dr)_{[\mu} (d\theta)_{\nu]} = -(f^{\frac{1}{2}} (dt)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{20} + (f^{-\frac{1}{2}} (dr)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{21} + (r \sin \theta (d\phi)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{23} + H.c. \quad (6.21)$$

$$2 \sin \theta (dr)_{[\mu} (d\phi)_{\nu]} + 2r \cos \theta (d\theta)_{[\mu} (d\phi)_{\nu]} = -(f^{\frac{1}{2}}(dt)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{30} + (f^{-\frac{1}{2}}(dr)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{31} + (r(d\theta)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{32} + H.c. \quad (6.22)$$

Para resolver as equações acima, vamos usar um ansatz baseado no caso comutativo usual [21].

O ansatz se baseia em impor as seguintes relações para as componentes

$$\omega_{\mu}^{02} = 0 \quad (6.23)$$

$$\omega_{\mu}^{03} = 0 \quad (6.24)$$

$$\omega_{\mu}^{01} = \frac{1}{2} f'(dt)_{\mu} \quad (6.25)$$

$$\omega_{\mu}^{12} = -f^{\frac{1}{2}}(d\theta)_{\mu} \quad (6.26)$$

Substituindo o ansatz nas equações (6.20) e (6.21) obtemos as seguintes restrições

$$(r \sin \theta (d\phi)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{13} + H.c. = 0 \quad (6.27)$$

$$(r \sin \theta (d\phi)_{[\mu} \star \omega_{\nu]}^{23} + H.c. = 0 \quad (6.28)$$

Além disso, tomando as componentes $\mu = 1$ e $\mu = 2$ na equação (6.22) obtemos as restrições adicionais

$$2 \sin \theta (d\phi)_{\nu} = (f^{-\frac{1}{2}}) \star \omega_{\nu}^{31} + H.c. \quad (6.29)$$

$$2r \cos \theta (d\phi)_{\nu} = (r) \star \omega_{\nu}^{32} + H.c. \quad (6.30)$$

Podemos utilizar as quatro últimas equações para determinar as componentes ω_{μ}^{13} e ω_{μ}^{23} , que são dadas por

$$\omega_{\mu}^{13} = -(f^{\frac{1}{2}}) \star (\sin \theta) (d\phi)_{\mu} \quad (6.31)$$

$$\omega_{\mu}^{23} = -(r^{-1}) \star (r \cos \theta) (d\phi)_{\mu}. \quad (6.32)$$

Agora, note que desde que não obtemos nenhuma inconsistência, podemos dizer que de fato nossas suposições iniciais nos levaram as componentes modificadas da conexão de spin. Além disso, podemos adicionar partes imaginárias nas soluções para conexão de spin, as equações (6.23), (6.31) e (6.32) sem violar as restrições (6.18). Estes termos extras podem ser escolhidos de tal forma que no caso comutativo usual estes tendam a zero. Logo, a classe de soluções que é obtida aqui é apenas um tipo particular de um grupo mais geral de soluções fisicamente modificadas.

O tensor de Riemann (6.5) pode ser generalizado diretamente, por substituir o pro-

duto usual pelo produto estrela Moyal

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \eta_{cd} (\omega_\mu^{ac} \star \omega_\nu^{db} - \omega_\nu^{ac} \star \omega_\mu^{db}). \quad (6.33)$$

A fim de obter as componentes não nulas do tensor de Riemann (6.33), vamos usar as expressões das componentes da conexão de spin (6.23), (6.31) e (6.32). Ao efetuar os cálculo, obtemos para as componentes do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu}^{01} = f'' (dr)_{[\mu} (dt)_{\nu]} \quad (6.34)$$

$$R_{\mu\nu}^{02} = f^{\frac{1}{2}} f' (d\theta)_{[\mu} (dt)_{\nu]} \quad (6.35)$$

$$R_{\mu\nu}^{03} = -[f^{\frac{1}{2}} f'] \star (\sin \theta) (dt)_{[\mu} (d\phi)_{\nu]} \quad (6.36)$$

$$R_{\mu\nu}^{12} = -f^{-\frac{1}{2}} f' (dr)_{[\mu} (d\theta)_{\nu]} \quad (6.37)$$

e

$$R_{\mu\nu}^{13} = -(f^{-\frac{1}{2}} f') \star (\sin \theta) (dr)_{[\mu} (d\phi)_{\nu]} + 2([f^{\frac{1}{2}} r^{-1}] \star (r \cos \theta) - f^{\frac{1}{2}} \star \cos \theta) (d\theta)_{[\mu} (d\phi)_{\nu]}, \quad (6.38)$$

e

$$R_{\mu\nu}^{23} = 2((r^{-2} \star (r \cos \theta) - r^{-1} \star \cos \theta) (dr)_{[\mu} (d\phi)_{\nu]} + 2((r)^{-1} \star (r \sin \theta) - f \star \sin \theta) (d\theta)_{[\mu} (d\phi)_{\nu]}). \quad (6.39)$$

Note que nas equações (6.38), (6.39), houve a presença de termos extras devido a não-comutatividade, que se cancelam quando impomos o limite $\Theta = 0$. A generalização para o caso não-comutativo do tensor de Ricci pode ser feito diretamente como antes, e as equações de movimento modificadas no vácuo podem ser obtidas a partir da ação (6.16),

$$R_\mu^a + H.c. = 0 \quad (6.40)$$

Os cálculos perturbativos usando o produto estrela levam a partes imaginárias nos termos de potências ímpares do parâmetro não-comutativo Θ . Desde que estamos interessados numa teoria de gauge não comutativa da gravidade, os campos de gauge, assim como a equação de movimento (6.40), estão sujeitas à condição realidade, que vem diretamente da ação (6.16). Para este propósito, as componentes não nulas do tensor de Ricci são expressadas como

$$R_0^0 + H.c. = R_{0\nu}^{01} \bar{e}_1^\nu + R_{0\nu}^{02} \bar{e}_2^\nu + R_{0\nu}^{03} \star \bar{e}_3^\nu + H.c. \quad (6.41)$$

$$R_1^1 + H.c. = R_{1\nu}^{10} \bar{e}_0^\nu + R_{1\nu}^{12} \bar{e}_2^\nu + R_{1\nu}^{13} \star \bar{e}_3^\nu + H.c. \quad (6.42)$$

$$R_2^2 + H.c. = R_{2\nu}^{20} \bar{e}_0^\nu + R_{2\nu}^{21} \bar{e}_1^\nu + R_{2\nu}^{23} \star \bar{e}_3^\nu + H.c. \quad (6.43)$$

$$R_3^3 + H.c. = R_{3\nu}^{30} \star \bar{e}_0^\nu + R_{3\nu}^{31} \star \bar{e}_1^\nu + R_{3\nu}^{30} \star \bar{e}_2^\nu + H.c. \quad (6.44)$$

Para simplificar os cálculos, vamos usar um sistema de coordenadas onde as componentes da matriz $\Theta^{\mu\nu}$ fica dado por [77, 105]

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta & 0 \\ 0 & -\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.45)$$

com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e Θ é um parâmetro constante¹. Após efetuar os cálculos, obtemos para as componentes do tensor de Ricci até segunda ordem em Θ

$$R_0^0 + H.c. = -\frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} f'' - r^{-1} f^{\frac{1}{2}} f' - \frac{1}{8r^3} \Theta^2 f^{\frac{1}{2}} f' + O(\Theta^3), \quad (6.46)$$

$$R_1^1 + H.c. = -\frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f'' - r^{-1} f^{-\frac{1}{2}} f' - \frac{1}{8r^3} \Theta^2 f^{-\frac{1}{2}} f' + O(\Theta^3), \quad (6.47)$$

$$R_2^2 + H.c. = -f' + r^{-1}(1-f) + \frac{1}{4r^3} \Theta^2(1-f) + O(\Theta^3), \quad (6.48)$$

$$R_3^3 + H.c. = -f' \sin \theta + (1-f)r^{-1} \sin \theta + \frac{1}{4r^3} \Theta^2(1-f) \sin \theta + O(\Theta^3). \quad (6.49)$$

Com isto, podemos obter a solução exterior usando a componente R_2^2 do tensor de Ricci. A partir da equação de movimento (4.7), obtemos

$$R_2^2 + H.c. = -f' + r^{-1}(1-f) + \frac{1}{4r^3} \Theta^2(1-f) + O(\Theta^3) = 0. \quad (6.50)$$

Resolvendo a equação acima para a função $f(r)$, obtemos a solução exterior modificada

$$f(r) = 1 - \frac{C}{r} \left[1 - \frac{\Theta^2}{8r^2} \right], \quad (6.51)$$

onde C é uma constante de integração. No caso usual a constante C é relacionada com a massa M do buraco negro, por considerar corpos testes no regime de campos fracos, isto é, na teoria Newtoniana da gravidade. No entanto, como as geodésicas do espaço-tempo de Schwarzschild

¹As componentes temporais do parâmetro não-comutativo não foram consideradas pois pode ser mostrado que isso acarreta numa teoria com características indesejáveis, como por exemplo uma Teoria Quântica de Campos não unitária. [98, 99, 100]

no caso não-comutativo são mais complicados [101], uma tal relação não pode valer. Logo, vamos comentar as implicações da estrutura modificada no caso da solução interior deformada.

6.3 Solução Interior

Após obtida a solução exterior, precisamos completar a análise obtendo a solução interior. Para este fim, vamos considerar como fonte de matéria o tensor momento-energia de um fluido perfeito(comutativo) para as equações de movimento (6.11). Para garantir a condição de realidade devemos considerar a ação (6.16) adicionada de campos de matéria. Logo, a solução interior modificada pode ser obtida por resolver as equações de campo modificada :

$$G_{\mu}^a \equiv R_{\mu}^a - \frac{1}{2}e_{\mu}^a R_{\star} + H.c. = 16\pi T_{\mu}^a. \quad (6.52)$$

As componentes do tensor de Ricci já foram obtidas na seção anterior, e então falta calcular apenas o termo

$$e_{\mu}^a R_{\star} + H.c. = (\bar{e}_0^0 \star R_0^0 + \bar{e}_1^1 \star R_1^1 + \bar{e}_2^2 \star R_2^2 + \bar{e}_3^3 \star R_3^3)e_{\mu}^a + H.c. \quad (6.53)$$

Note que as componentes do tensor de Ricci na equação (6.52), são as calculadas nas expressões (6.41)-(6.44). Em particular, estamos interessados em determinar a componente 00 da equação de movimento (6.52). Para este fim, basta considerar e calcular

$$e_0^0 R_{\star} + H.c. = (\bar{e}_0^0 \star R_0^0 + \bar{e}_1^1 \star R_1^1 + \bar{e}_2^2 \star R_2^2 + \bar{e}_3^3 \star R_3^3)e_0^0 + H.c. \quad (6.54)$$

Analogamente ao que é feito na seção anterior, após efetuar todos os cálculos obtém-se para a componente 00 :

$$G_0^0 = -f^{\frac{1}{2}} r^{-2} \left[r(1-f) \left[1 - \frac{1}{8} \Theta^2 r^{-2} \right] \right]' + O(\Theta^3). \quad (6.55)$$

Vamos considerar como fonte de matéria para o campo gravitacional o tensor momento-energia de um fluido perfeito(comutativo) $T_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu} e_{\mu}^a$, com

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (6.56)$$

Substituindo as equações (6.55) e (6.56) na equação de movimento (6.52), e após efetuar uma integração, obtemos

$$r(1-f) \left[1 - \frac{1}{8} \Theta^2 r^{-2} \right] = 2m(r) \quad (6.57)$$

$$= 8\pi \int_0^r dR R^2 \rho(R) + C, \quad (6.58)$$

onde $m(r)$ é chamado função massa. Além disso, podemos definir as quantidades $\Delta = r^2 - \frac{\Theta^2}{8} - 2rm(r)$ e $\Sigma = r^2 - \frac{\Theta^2}{8}$, tal que a solução toma a forma $f(r) = \frac{\Delta}{\Sigma}$. Logo, o elemento de linha modificado pode ser escrito como

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (6.59)$$

Embora a presença da correção não-comutativa tenha modificado a singularidade no caso da métrica de Schwarzschild usual ($r_S = 2M$) de uma maneira não trivial, podemos ver que Δ possui duas singularidades na coordenada radial r ,

$$r_+ = m(r) + \sqrt{m^2(r) + \frac{\Theta^2}{8}}. \quad (6.60)$$

E o horizonte interno $r = r_-$. Mas este será negativo $r_- < 0$ e portanto não possui nenhum significado físico. Logo, no caso não-comutativo de fato há apenas uma singularidade em $r = r_+$.

Uma implicação dos efeitos da não-comutatividade pode ser obtido diretamente da equação (6.60). Se restaurarmos as unidades, o raio do horizonte r_+ pode ser escrito como :

$$r_+ = \frac{l_p}{M_p}m(r) + \sqrt{\left(\frac{l_p}{M_p}m(r)\right)^2 + \frac{\Theta^2}{8}}, \quad (6.61)$$

onde $M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{-8}\text{kg}$ é a massa de Planck e $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}\text{m}$ é o comprimento de Planck. A não-comutatividade fornece uma correção do raio de Schwarzschild da forma

$$r_+ \approx \frac{2l_{\text{eff}}}{M_p}m(r), \quad (6.62)$$

onde $l_{\text{eff}} = l_p \left(1 + \left(\frac{M_p}{l_p}\right)^2 \frac{\Theta^2}{32m^2(r)}\right)$ é o comprimento mínimo efetivo. Para um buraco negro com massa da ordem da massa de Planck $m(r) \approx M_p$ o comprimento mínimo efetivo é da ordem de $l_{\text{eff}} \approx l_p + \frac{\Theta^2}{32l_p}$.

É esperado que os efeitos da não-comutatividade tornem-se relevantes nas escalas de Planck, então, em princípio, espera-se que estes efeitos prevaleçam na escala de energia de Planck $\Lambda_{\text{NC}} = E_p \approx 10^{16}\text{TeV}$. Neste caso, vemos que para um buraco negro com a massa de Planck, a principal contribuição para o raio efetivo vem da solução de Schwarzschild usual, sendo os efeitos da não-comutatividade 32 vezes menor. O raio efetivo do buraco negro é então um pouco maior do que o raio de Schwarzschild usual $l_{\text{eff}} \approx 1.03l_p$.

Vamos considerar escalas de energia intermediários encontrados na literatura, onde os efeitos da não-comutatividade tornam-se relevantes, desde que os efeitos da não-comutatividade variam muito de um modelo para outro. Por exemplo, um limite na escala de energia $\Lambda_{\text{NC}} >$

10^4TeV , é obtido por analisar correções do momento magnético anômalo do elétron [102] levando a uma estimativa para o comprimento mínimo efetivo da ordem de $l_{\text{eff}} < 10^{-12} \text{m}$. Enquanto para um limite na escala de energia $\Lambda_{\text{NC}} > 10^{11} \text{TeV}$ é obtido por estudar o experimento do magnetômetro atômico [103], onde leva a um comprimento mínimo efetivo da ordem $l_{\text{eff}} < 10^{-26} \text{m}$. Logo, vemos que a contribuição de Θ , quando calculadas com um menor limite de energia, fornece um comprimento efetivo bem maior comparado com o comprimento de Planck $l_p \approx 10^{-35} \text{m}$. Este comportamento pode ser traçado para o fato que os limites de energia para não-comutatividade dependem do problema físico que está sendo analisado, bem como da precisão dos resultados experimentais, onde as correções da não-comutatividade são equipados com barras de erro dos dados experimentais.

Voltando para a nossa solução, podemos notar que o raio do horizonte corrigido (6.60) é análogo ao do buraco negro de Reissner-Nordstrom, um buraco negro carregado, no caso usual [4, 5], onde $\Delta = r^2 - 2rM + Q^2$ e $\Sigma = r^2$, na qual as singularidades da solução de Reissner-Nordstrom são

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (6.63)$$

onde Q é a carga elétrica total do buraco e M sua massa total. Note que neste caso há a presença de dois horizontes, um interno $r = r_-$ e um externo $r = r_+$.

Logo, como a solução de Reissner-Nordstrom é obtida na presença de um campo elétrico na solução, é possível fazer uma analogia entre os resultados (6.60) e (6.63) para os raios do horizonte para dar uma interpretação física da não-comutatividade. A contribuição de Θ em (6.60) é manifestada através de um campo se propagando no background, análogo ao efeito do campo elétrico na solução de Reissner-Nordstrom.

No entanto, a não-comutatividade produz um efeito oposto ao do campo elétrico em Reissner-Nordstrom, no sentido de que em (6.63) a presença da carga elétrica leva a uma diminuição do raio horizonte em comparação com o raio de Schwarzschild r_S , enquanto a não-comutatividade em (6.60) leva a um aumento do raio do horizonte. A interpretação física deste resultado é que o campo elétrico e não-comutatividade podem ser vistos, respectivamente, como responsável por uma força/potencial, que faz com que o raio do buraco negro se torne menor e maior, respectivamente. Este último pode ser interpretado como uma confusão do espaço-tempo devido a não-comutatividade, levando a um efeito similar a um fluido incompressível [104].

7 TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO

Finalmente, é determinado aqui as quantidades termodinâmicas temperatura, entropia e capacidade térmica para o buraco negro de Bufalo e Tureanu [106]. Como já foi enfatizado, ainda não é esperado um comportamento regular para sua temperatura. Porém, nada nos impede de determinarmos quais as pequenas correções a solução de Bufalo nos traz comparado com o caso usual.

7.1 Temperatura

No capítulo anterior obtemos uma solução de um buraco negro do tipo Schwarzschild numa teoria de gauge da gravidade não-comutativa [106]. A métrica obtida é estática e esfericamente simétrica, e possui a forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (7.1)$$

onde $d\Omega^2$ é a métrica de uma esfera bidimensional, e a função lapso $f(r)$ possui a forma

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \left[1 - \frac{\Theta^2}{8r^2} \right]^{-1}, \quad (7.2)$$

onde M é um parâmetro que está relacionado com a massa total do buraco negro, e como vimos Θ é uma constante que mede a não-comutatividade. O comportamento da função lapso $f(r)$ está sendo mostrado na figura 2. Note que a não-comutatividade torna-se relevante à medida que aumentamos o parâmetro não-comutativo Θ .

Vimos também que esta solução apresenta duas raízes.

$$r_{\pm} = M \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\Theta^2}{8M^2}} \right). \quad (7.3)$$

O comportamento das raízes r_{\pm} está mostrado na figura 3. Note que o que seria o horizonte interno r_- é negativo para $M > 0$ e portanto não possui significado físico, então de fato há apenas uma singularidade no caso não-comutativo. Podemos ver também que a não-comutatividade trouxe um aumento do raio do horizonte em comparação com o valor usual, que corresponde, no limite $\Theta \rightarrow 0$ a singularidade usual exibida pela métrica de Schwarzschild nas coordenadas usuais (t, r, θ, ϕ) .

Para obter a temperatura Hawking para esta solução, vamos empregar o formalismo Hamilton-Jacobi que foi desenvolvido em [9] e revisado no segundo capítulo. Como vimos, este método se baseia em tratar o horizonte de eventos como uma barreira de potencial tal

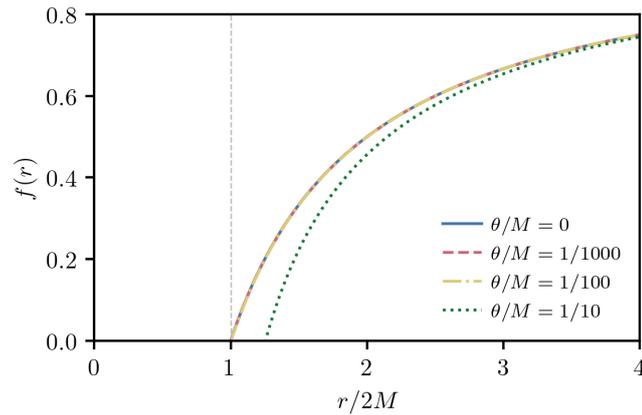


Figura 2: Função lapso $f(r)$. Note o desvio do caso clássico a medida que o parâmetro Θ aumenta. A linha vertical corresponde a localização $r = 2M$ do horizonte clássico.

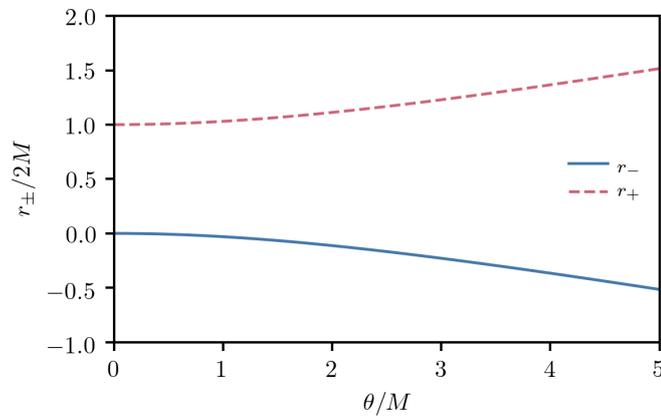


Figura 3: As singularidades do buraco negro r_{\pm} como uma função do parâmetro não-comutativo Θ . Note que r_{+} corresponde ao horizonte do buraco negro $r_{+} = 2M$ no limite clássico $\theta \rightarrow 0$, e a singularidade não física $r_{-} = 0$ é removida.

que as partículas criadas próximas do horizonte podem escapar do buraco negro através do tunelamento quântico. O método consiste em calcular a probabilidade de ocorrer o tunelamento. Para este fim, é suficiente considerar somente eventos próximos do horizonte e com trajetórias radiais, tal que tudo pode ser resolvido no plano $t - r$.

$$s^2 = -f(r)t^2 + \frac{r^2}{f(r)}. \quad (7.4)$$

Por simplicidade, vamos considerar a perturbação de um campo escalar massivo ϕ que se propaga no background definido pela métrica (7.4). A equação de movimento do campo escalar é a equação de Klein-Gordon

$$\hbar^2 g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi - m^2 \phi = 0, \quad (7.5)$$

onde m é a massa associada ao campo ϕ .

Usando a métrica (7.4) a equação de Klein-Gordon nos leva a

$$-\partial_t^2 \phi + f^2(r) \partial_r^2 \phi + \frac{1}{2} \partial_r f^2(r) \partial_r \phi - \frac{m^2}{\hbar^2} f(r) \phi = 0. \quad (7.6)$$

Se nós interpretarmos ϕ como uma função de onda semi-clássica associado com as partículas que são criadas no buraco negro, podemos resolver a equação (7.6) através do método WKB, que consiste em usar o seguinte ansatz

$$\phi(t, r) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}(t, r) \right]. \quad (7.7)$$

Substituindo o ansatz (7.7) na equação (7.6) e expandindo o resultado em potências de \hbar , obtemos para a menor ordem

$$(\partial_t \mathcal{S})^2 - f^2(r) (\partial_r \mathcal{S})^2 - m^2 f(r) = 0, \quad (7.8)$$

A equação (7.8) é a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula de massa m , com \mathcal{S} fazendo o papel da ação relativística. Usando separação de variáveis, (7.8) possui a solução:

$$\mathcal{S}(t, r) = -\omega t + W(r), \quad (7.9)$$

onde ω é uma constante de movimento que pode ser interpretado como a energia da radiação emitida. Colocando a solução (7.9) na equação (7.8) obtemos que a função $W(r)$ deve obedecer a relação

$$W(r) = \int \frac{r}{f(r)} \sqrt{\omega^2 - m^2 f(r)}. \quad (7.10)$$

Agora nós tomamos a expansão de $f(r)$ próximo do horizonte de eventos r_+ ,

$$f(r) = f(r_+) + f'(r_+)(r - r_+) + \dots, \quad (7.11)$$

e então a parte espacial da ação (7.10) toma a forma

$$W(r) = \int \frac{r}{f'(r_+)} \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2 f'(r_+)(r - r_+)}}{(r - r_+)}, \quad (7.12)$$

onde o primo denota derivada com respeito a coordenada radial r . A última integral pode ser resolvida usando o teorema de resíduo que fornece o resultado

$$W = \frac{2\pi \omega}{f'(r_+)}. \quad (7.13)$$

A probabilidade de ocorrer o tunelamento e a partícula escapar do buraco negro é dado por

$$\Gamma \sim \exp(-2 \operatorname{Im} \mathcal{S}) = \exp \left[-\frac{4\pi \omega}{f'(r_+)} \right], \quad (7.14)$$

onde nós notamos que $\text{Im } \mathcal{I} = \text{Im } W$.

Comparando a equação (7.14) com o fator de Boltzmann $e^{-\omega/T}$, obtemos a temperatura do buraco negro

$$T_H = \frac{\omega}{2 \text{Im } \mathcal{I}} = \frac{f'(r_+)}{4\pi}. \quad (7.15)$$

No nosso caso, com $f(r)$ dado por (7.2) e o raio do horizonte por (7.3) obtemos para a temperatura

$$T_H = \frac{1}{4\pi M} \frac{\sqrt{1 + \frac{\Theta^2}{8M^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\Theta^2}{8M^2}}} = \frac{1}{4\pi M} \frac{r_+ - M}{r_+}. \quad (7.16)$$

Note que no limite clássico $\Theta \rightarrow 0$ nós recuperamos a temperatura do buraco negro no caso usual. O comportamento da temperatura corrigida está indicado na figura 4. Note que para gran-

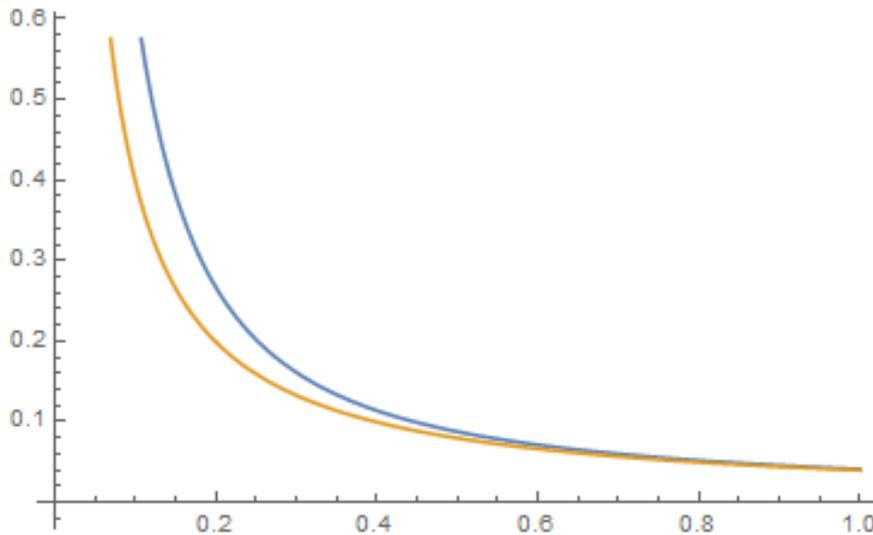


Figura 4: A temperatura Hawking corrigida como dada pela equação (7.16) (gráfico azul) x temperatura Hawking do buraco negro clássico (gráfico laranja), ambos em função da massa M . Note que os efeitos da não-comutatividade prevalecem a medida que o buraco negro evapora, como esperado.

des valores da massa as correções quânticas são negligenciáveis, mas a medida que o buraco negro evapora o desvio da situação clássica torna-se notável. O efeito da não-comutatividade torna-se dominante no estágio final de evaporação do buraco negro, como esperado. No entanto, a não-comutatividade apresentada nesta solução apresentou resultados contrários daqueles esperados pela literatura. Ao invés do buraco negro ir resfriando até alcançar a temperatura zero, sua temperatura aumenta continuamente a medida que evapora, divergindo quando M tende a zero. De fato, podemos ver que a solução corrigida esquenta mais rápido que o usual. Este comportamento era esperado, pois para se obter esta solução foi utilizado uma expansão até segunda ordem no parâmetro não-comutativo Θ .

Porém, a fim de eliminarmos a divergência, iremos impor um "cutoff" na temperatura, exigindo que o buraco negro evapore até sua massa alcançar a massa de Planck

$M_p \approx 10^{-8}$ kg. De fato, esta deve ser a menor massa que um objeto físico poderia alcançar, e então o buraco negro não teria mais energia suficiente para emitir radiação.

Com isto, podemos estimar a temperatura máxima alcançada pelo buraco negro no fim de sua evaporação. Desde que a não-comutatividade é de fato uma contribuição muito pequena, vamos expandir, até a segunda ordem em $\Theta = 0$, a expressão para a temperatura (7.16) em torno de $\Theta = 0$:

$$T_H \approx \frac{1}{8\pi M} + \frac{\Theta^2}{256\pi M^3} = T_{Sch} \left(1 + \frac{\Theta^2}{32M^2} \right), \quad (7.17)$$

onde $T_{Sch} = 1/8\pi M$ é a temperatura usual para o buraco negro de Schwarzschild. Usando o valor estimado para o parâmetro $\Theta \approx 0.2l_p$, veja [84], onde $l_p \approx 10^{-35}$ m é o comprimento de Planck, o buraco negro irá alcançar a temperatura máxima :

$$T_H^{\max} = 1,00125T_{Sch}(M_p), \quad (7.18)$$

onde $T_{Sch}(M_p)$ é a temperatura para um buraco negro de Schwarzschild com a massa de Planck. Como podemos ver, a maior contribuição vem da solução usual de Schwarzschild, sendo a não-comutatividade uma correção muito pequena, mesmo em escalas de Planck, onde estes efeitos tornam-se relevantes.

7.2 Entropia e Capacidade Térmica

Como nós obtemos a temperatura, é imediato o cálculo da entropia através da primeira lei da termodinâmica. A entropia é dada por

$$S = \int \frac{M}{T_H}. \quad (7.19)$$

Usando a expressão para a temperatura (7.16), e efetuando a integração, obtemos para a entropia

$$\begin{aligned} S &= 2\pi M^2 \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{\Theta^2}{8M^2}} - \frac{\Theta^2}{8M^2} \log \left[4M \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\Theta^2}{8M^2}} \right) \right] \right\} \\ &= 2\pi M^2 \left[\frac{r_+}{M} - \frac{\Theta^2}{8M^2} \log(4r_+) \right]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Escrevendo a massa em função do raio do horizonte de eventos, podemos reescrever a entropia da forma

$$S = \frac{A}{4} - \frac{\pi\Theta^2}{4} \left[\log(4r_+) + \frac{1}{2} \right], \quad (7.21)$$

onde $A = 4\pi r_+^2$ é a área do horizonte de eventos, desde que o buraco negro é esfericamente simétrico. Note que o primeiro termo em (7.21) é a lei das áreas de Bekenstein para a entropia, e no segundo termo há a presença de uma correção logarítmica devido a não-comutatividade.

Está claro da expressão para a entropia (7.21) que no limite clássico $\Theta \rightarrow 0$, nós recuperamos a entropia de Bekenstein-Hawking do buraco negro de Schwarzschild no caso usual.

Usando a expressão para a temperatura corrigida (7.16), obtemos a capacidade térmica do buraco negro a partir da termodinâmica usual

$$C_v = \frac{\partial M}{\partial T} = -\frac{4\pi M^2 \Theta^2 \sqrt{\Theta^2 + 8M^2}}{16\sqrt{2}M^3 - 8M^2 \sqrt{\Theta^2 + 8M^2} + \Theta^2 \sqrt{\Theta^2 + 8M^2}}. \quad (7.22)$$

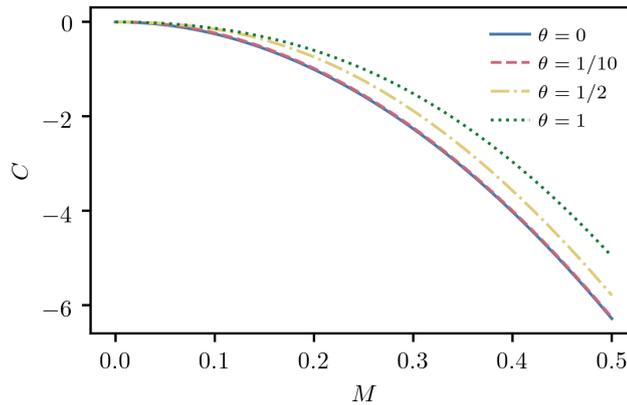


Figura 5: Capacidade térmica do buraco negro como função do parâmetro não comutativo Θ . Note que o comportamento clássico é recuperado no limite $\theta \rightarrow 0$.

Novamente, no limite para o caso usual $\Theta \rightarrow 0$ obtemos a capacidade térmica do buraco negro de Schwarzschild $C_{Sch} = -8\pi M^2$. Como no caso usual, a capacidade térmica para a solução corrigida é sempre negativa, o que mostra que mesmo com correções não-comutativas o buraco negro permanece instável, como já notado pelo resultado da temperatura. A capacidade térmica do buraco negro diminui a medida que o buraco negro evapora, tendo a zero quando a massa tende a zero. No entanto, como foi dito, a não-comutatividade impõe uma regularidade na temperatura, e portanto não podemos tomar a massa remanescente sendo zero, desde que neste limite a temperatura diverge. Portanto, vamos considerar a massa remanescente como sendo a massa de Planck. O comportamento da capacidade térmica está mostrado na figura 5. Note que a não-comutatividade trás uma diminuição da capacidade térmica com relação ao caso usual, porém esta permanece negativa.

8 CONCLUSÃO

Assim, vimos que a não-comutatividade imposta a partir de uma relação não-comutativa para as coordenadas implica numa modificação da álgebra por substituir o produto usual de funções pelo produto estrela, que por definição é não-local e contém termos de ordem infinita no parâmetro não-comutativo Θ . No entanto, para obter resultados fisicamente testáveis normalmente faz-se um truncamento na ordem desejada em Θ . Porém, isto quebra a estrutura não-local induzida e então as características de regularização desejadas da não-comutatividade não são observadas.

Então, para removermos os indesejáveis infinitos da teoria é necessário considerar todos os termos da expansão do produto estrela ou mudar a interpretação do uso coordenadas não-comutativas. Seguindo a última recomendação, vimos que trabalhando com o uso das quasicordenadas, definidas como o valor médio dos operadores coordenadas, é possível determinar uma versão totalmente não-comutativa da solução de Schwarzschild, com um comportamento regular na origem e em sua temperatura, sendo possível dar uma descrição em todos os estágios de evaporação do buraco negro.

Com estas considerações, é esperado que o comportamento na origem e a temperatura da solução de Bufalo e Tureanu ainda não apresente qualquer regularidade, visto que para obter a solução foi necessário fazer uma expansão perturbativa no parâmetro não-comutativo, quebrando a não-localidade induzido pela variedade não-comutativa. Porém, a solução ainda apresentou muitas características interessantes, como por um exemplo a presença de um horizonte de eventos com um raio análogo ao do buraco negro de Reissner-Nordstrom, sendo possível fornecer uma interpretação física para a não-comutatividade. Além disso, detectamos que o buraco negro esquenta mais rapidamente do que o caso usual, nas escalas em que a não-comutatividade torna-se importante. Ao impor um cutoff para a massa do buraco negro, conseguimos estimar qual o valor da temperatura máxima ao fim de sua evaporação. A entropia não obedece estritamente a lei das Áreas de Bekenstein-Hawking, há um termo logarítmico como correção que vem devido ao uso da não-comutatividade, pelo menos até a ordem em Θ considerado. O buraco negro ainda permanece termodinamicamente instável, por possuir uma capacidade térmica negativa em todo o seu processo de evaporação.

APÊNDICE A – BASES NÃO-COORDENADAS

As expressões fornecidas para os símbolos de Christoffel e o tensor de Riemann foram feitas considerando-se uma base coordenada, cujos vetores da base são dados pelas derivadas parciais das coordenadas:

$$\hat{e}_\mu = \partial_\mu, \quad (\text{A.1})$$

ou equivalentemente para as bases 1-forma (para uma explicação detalhada sobre formas, produtos exteriores e derivadas exteriores, consulte, por exemplo, Carroll [20]):

$$\hat{\theta}^\mu = dx^\mu. \quad (\text{A.2})$$

Porém, esta não é a única opção que temos. Poderíamos igualmente usar outro conjunto de vetores base que não são relacionados diretamente com o sistema de coordenadas utilizado. Podemos definir uma base não-coordenada \hat{e}_a (o índice latino serve para diferenciar a base não-coordenada da coordenada) em cada ponto do espaço-tempo, exigindo que as componentes da métrica nesta base sejam iguais aos da métrica de Minkowski:

$$g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = \eta_{ab}, \quad (\text{A.3})$$

onde $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. A exigência acima vem do fato de que localmente o espaço-tempo torna-se plano, modelado pela métrica de Minkowski, como afirma o princípio da equivalência. Isto significa que nessa base podemos subir e descer índices usando a métrica de Minkowski. Escrevendo as componentes da antiga base em termos das componentes da nova obtemos:

$$\hat{e}_\mu = e_\mu^a \hat{e}_a. \quad (\text{A.4})$$

Os coeficientes e_μ^a formam uma matriz invertível que iremos chamar de tetrada ou campo vierbein. As componentes da inversa de e_μ^a , denotadas por e^μ_a , são definidas através das relações:

$$e^\mu_a e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad e_\mu^a e^\mu_b = \delta_b^a. \quad (\text{A.5})$$

Podemos usar as relações acima para escrever as componentes do tensor métrico na base não-coordenada:

$$g_{\mu\nu} = e^\mu_a e^\nu_b \eta_{ab}. \quad (\text{A.6})$$

Poderíamos igualmente considerar uma base não-coordenadas para 1-forma, deno-

tada por $\hat{\theta}^a$. Esses vetores de base 1-forma podem ser relacionados com os vetores da base vetorial através da relação:

$$\hat{\theta}^a \hat{e}_b = \delta_b^a. \quad (\text{A.7})$$

Uma consequência imediata é que a base 1-forma não-coordenada está relacionada com a base 1-forma coordenada $\hat{\theta}^\mu = dx^\mu$ por:

$$\hat{\theta}^\mu = e^\mu_a \hat{\theta}^a, \quad (\text{A.8})$$

e

$$\hat{\theta}^a = e_\mu^a \hat{\theta}^\mu. \quad (\text{A.9})$$

Como localmente o espaço-tempo é o de Minkowski, podemos usar transformações de Lorentz locais para fazer uma mudança de base:

$$\hat{e}_a \rightarrow \hat{e}_{a'} = \Lambda^a_{a'}(x) \hat{e}_a, \quad (\text{A.10})$$

onde as transformações de Lorentz $\Lambda^a_{a'}$ são definidas como aquelas que preservam a métrica de Minkowski:

$$\Lambda^a_{a'} \Lambda^b_{b'} \eta_{ab} = \eta_{a'b'}. \quad (\text{A.11})$$

Então, nós podemos fazer transformações de Lorentz em cada ponto do espaço-tempo e isto ainda não nos impede de considerarmos uma mudança geral de coordenadas que, ao mesmo tempo, resulta numa lei de transformação tensorial:

$$T^{a'\mu'}_{b'\nu'} = \Lambda^{a'}_a \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \Lambda^b_{b'} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} T^{a\mu}_{b\nu}, \quad (\text{A.12})$$

onde cada tipo de índice se transforma de maneira apropriada.

Assim, podemos usar tudo o que sabemos sobre tensores ao usar bases não-coordenadas, a maior parte do trabalho é apenas colocar os campos vierbein nos lugares certos. A diferença crucial vem quando tentamos diferenciar objetos definidos em bases não-coordenadas. No caso usual, a derivada covariante de um tensor é dado por sua derivada parcial somado com termos de correção envolvendo o próprio tensor e as componentes da conexão $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, como visto na equação (2.5). O mesmo procedimento continua válido para bases não-coordenadas, porém os coeficientes da conexão são substituídos pela conexão spin, denotado por $\omega_\mu^a_b$ (o nome conexão spin vem do fato que esses objetos podem ser usados para definir derivadas covariantes de spinores). Para cada índice latino obtém-se um fator com conexão spin da maneira usual:

$$\nabla_\mu X^a_b = \partial_\mu X^a_b + \omega_\mu^a_c X^c_b - \omega_\mu^c_b X^a_c. \quad (\text{A.13})$$

Da exigência que um tensor deve ser escrito da mesma maneira independente da

base, podemos obter uma relação entre a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, os campos vierbein e conexão spin:

$$\omega_\mu{}^a{}_b = e_\nu{}^a e^\lambda{}_b \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda{}^a. \quad (\text{A.14})$$

Desde que a conexão é introduzida a fim de garantir uma lei de transformação tensorial para a derivada covariante, é de se esperar que a conexão de spin não obedece a lei de transformação tensorial. Sob transformação geral de coordenadas o índice grego se transforma da maneira correta, como uma 1-forma. Mas sob transformações de Lorentz locais os índices latinos se transformam de maneira não-homogênea:

$$\omega_\mu{}^{a'}{}_{b'} = \Lambda^{a'}{}_a \Lambda^b{}_{b'} \omega_\mu{}^a{}_b - \Lambda^c{}_{b'} \partial_\mu \Lambda^{a'}{}_c. \quad (\text{A.15})$$

A vantagem deste novo formalismo é porque torna-se possível duas coisas novas: a possibilidade de descrever spinores num espaço curvo e tomar suas derivadas covariantes (que não será descrito aqui) e o outro é que este formalismo traz uma nova maneira de ver as coisas, fornecendo uma interpretação dos vários tensores como formas diferenciais. Por exemplo, um objeto do tipo $X_\mu{}^a$ pode ser pensado como um tensor misto de ordem (1,1) ou como um "vetor calculado em 1-forma". Esse objeto possui um índice grego covariante, que podemos pensar como 1-forma, porém, note que para cada valor desse índice há um vetor. Analogamente, um tensor $A_{\mu\nu}{}^a{}_b$, antissimétrico nos índices μ e ν , pode ser pensado como um "tensor (1,1) calculado em 2-forma". A utilidade desse ponto de vista vem quando se considera derivadas exteriores. Pensando em $X_\mu{}^a$ como vetor calculado em 1-forma podemos calcular sua derivada exterior:

$$(dX)_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu X_\nu{}^a - \partial_\nu X_\mu{}^a. \quad (\text{A.16})$$

Pode ser mostrado que o objeto acima de fato transforma-se como uma 2-forma (isto é, de acordo a lei de transformação de um tensor (0,2)) sob transformações gerais, mas não transforma-se como um vetor sob transformações locais de Lorentz. Mas usando a conexão de spin, pode-se fixar um termo em (A.16) a fim de que este se transforme como um tensor:

$$(dX)_{\mu\nu}{}^a + (\omega \wedge X)_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu X_\nu{}^a - \partial_\nu X_\mu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b X_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a{}_b X_\mu{}^b, \quad (\text{A.17})$$

onde o sinal " \wedge " denota o produto exterior entre formas.

Uma aplicação direta deste formalismo vem quando consideramos os tensores de torção e curvatura, que caracterizam qualquer conexão. A torção, com dois índices antissimétricos, pode ser pensado como uma "vetor calculado em 2-forma", $T_{\mu\nu}{}^a$. A curvatura, sempre antissimétrica em seus dois últimos índices, é um "tensor (1,1) calculado em 2-forma", $R^a{}_{b\mu\nu}$. Podemos suprimir índices em formas diferenciais expressando-os em termos de bases 1-forma:

$$e^a = e_\mu^a dx^\mu, \quad (\text{A.18})$$

e a conexão spin 1-forma:

$$\omega^a_b = \omega_\mu^a{}_b dx^\mu. \quad (\text{A.19})$$

As expressões para a torção e curvatura nesse formalismo são:

$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b, \quad (\text{A.20})$$

e

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b. \quad (\text{A.21})$$

Note que R^a_b representa o tensor de Riemann inteiro, com os índices gregos suprimidos. As equações acima são conhecidas como equações de estrutura de Cartan. Estas equações são totalmente equivalentes às definições usuais. Por exemplo, para a torção:

$$T_{\mu\nu}^\lambda = e^\lambda_a T_{\mu\nu}^a \quad (\text{A.22})$$

$$= e^\lambda_a (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^a{}_b e_\nu^b - \omega_\nu^a{}_b e_\mu^b) \quad (\text{A.23})$$

$$= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (\text{A.24})$$

onde foi usado a expressão (A.14) para expressar os $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ em termos dos campos vierbein e conexão spin.

Todas as expressões acima foram obtidas considerando-se uma forma geral para a conexão. Vamos ver o que a condição particular de a conexão ser dada pelos símbolos de Christoffel implica. A exigência de um espaço livre de torção exige que (A.20) seja nulo; isto não leva a qualquer consideração sobre os índices da conexão spin. Compatibilidade métrica é expressada como "constância covariante" da métrica, $\nabla g = 0$. Podemos ver no que isto implica quando expressamos a métrica na base não-coordenada, onde suas componentes são simplesmente η_{ab} :

$$\nabla_\mu \eta_{ab} = \partial_\mu \eta_{ab} - \omega_\mu^c{}_a \eta_{cb} - \omega_\mu^c{}_b \eta_{ac} \quad (\text{A.25})$$

$$= -\omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ba}. \quad (\text{A.26})$$

A anulação da expressão acima implica:

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}. \quad (\text{A.27})$$

Assim, compatibilidade métrica implica antissimetria dos índices latinos na conexão spin. As duas condições juntas (livre de torção e compatibilidade métrica) nos permite

relacionar a conexão spin em termos dos campos vierbein através da expressão:

$$\omega^a{}_b \wedge e^b = -de^a. \quad (\text{A.28})$$

O formalismo acima, de usar bases não-coordenadas, leva a grandes simplificações em certos casos, incluindo o cálculo do tensor de curvatura. Não iremos fazer isto explicitamente aqui. Para um exemplo desse tipo de aplicação veja por exemplo Carroll [20], onde é calculado o tensor de curvatura para a métrica de Friedmann.

Na linguagem de bases não-coordenadas, é possível comparar o formalismo de conexões e curvatura em geometria Riemanniana com as teorias de gauge em física de partículas. Em ambas as situações, os campos de interesse vivem em espaços vetoriais que são definidos em cada ponto do espaço-tempo. No caso da Relatividade Geral (descrita pela geometria Riemanniana), os espaços vetoriais incluem o espaço tangente, o espaço cotangente e os espaços vetoriais de dimensões maiores construídos a partir destes. No caso de teorias de gauge, os espaços vetoriais de interesse são "internos". A diferença é que o espaço tangente e seus relacionados estão intimamente ligados com a própria variedade e são naturalmente definidos uma vez que a variedade é estabelecida. Por outro lado, os espaços vetoriais internos podem ter as dimensões que nós quisermos, e tem que ser definidos de maneira independente sobre a variedade. Na linguagem matemática, a união de uma variedade base com espaços vetoriais internos (definidos em cada ponto) é um "feixe de fibras" (do inglês fiber bundle).

Além da variedade base (no nosso caso, o espaço-tempo) e as fibras (espaços internos) é necessário assumir uma "estrutura de grupo", um grupo de Lie que age sobre as fibras. Sem entrar em detalhes, a estrutura de grupo para o fibrado tangente em um espaço-tempo 4-dimensional é geralmente $GL(4, \mathbf{R})$, o grupo das matrizes 4x4 reais e invertíveis; se nós temos uma métrica Lorentziana, este grupo se reduz ao grupo de Lorentz $SO(3,1)$. Podemos introduzir um espaço vetorial interno 3-D, que, supondo que estes são definidos através de rotações espaciais, leva a estrutura de grupo $SO(3)$ para este novo feixe. Um campo que vive neste feixe será denotado por $\phi^A(x^\mu)$, onde o índice A varia de 1 a 3; é um 3-vetor (um interno, não relacionado com o espaço-tempo) para cada ponto da variedade. Nós podemos escolher qualquer base que nós desejarmos para expressarmos as fibras; isto significa que nesse caso as "quantidades físicas" devem ser invariantes sob transformações locais de $SO(3)$:

$$\phi^A(x^\mu) \rightarrow \phi^{A'}(x^\mu) = O^{A'}{}_A(x^\mu) \phi^A(x^\mu), \quad (\text{A.29})$$

onde $O^{A'}{}_A(x^\mu)$ é uma matriz de $SO(3)$ que depende do espaço-tempo. Estas transformações são conhecidas como transformações de Gauge, e teorias invariantes sob essas transformações são chamadas de "teorias de gauge".

Na maioria das vezes não é difícil fazer com que as quantidades físicas sejam invariantes sob transformações de gauge. A dificuldade surge quando derivadas parciais, tais como $\partial_\mu \phi^A$, são considerados. Como a matriz $O^{A'}_A(x^\mu)$ depende do espaço-tempo, aparecerão termos indesejados para a transformação da derivada parcial. A solução é introduzir uma conexão correta a fim de eliminar o termo indesejado na lei de transformação. Assim, podemos definir uma conexão sobre o feixe fibrado como sendo um objeto $A_\mu^A{}_B$, com "dois índices de grupo" e um índice de espaço-tempo. Sob transformações gerais esse objeto se transforma como 1-forma, enquanto que para transformações de gauge temos:

$$A_\mu^{A'}{}_{B'} = O^{A'}_A O^B_{B'} A_\mu^A{}_B - O^C_{B'} \partial_\mu O^{A'}_C. \quad (\text{A.30})$$

Com esta lei de transformação, a "derivada covariante de gauge":

$$D_\mu \phi^A = \partial_\mu \phi^A + A_\mu^A{}_B \phi^B, \quad (\text{A.31})$$

transforma-se "tensorialmente" sob transformações de gauge .

A noção de conexão definidos sobre um feixe fibrado interno está relacionado intimamente com a conexão definidas sobre fibrados tangentes, especialmente no formalismo não-coordenado que vimos acima. Por exemplo, note que a lei de transformação (A.30) tem exatamente a mesma forma que a lei de transformação para a conexão spin (A.15). Podemos ainda definir uma curvatura ou um "campo de forças" que é um 2-forma:

$$F^A{}_B = dA^A{}_B + A^A{}_C \wedge A^C{}_B, \quad (\text{A.32})$$

exatamente como (A.21). Nós podemos transportar paralelamente as coisas ao longo de caminhos, e há uma construção análoga para o propagador paralelo.

É importante enfatizar a diferença entre as duas construções acima. A diferença permanece no fato de que o fibrado tangente está intimamente relacionado com bases locais definidas sobre a variedade, enquanto os feixes fibrados estão relacionados com um espaço interno. Faz sentido dizer que um vetor no espaço tangente em um ponto p "aponta em direção a um caminho" que passa por p . Portanto, não há analogias entre bases coordenadas para um espaço interno: derivadas parciais ao longo de curvas nada tem a ver com vetores internos. A associação de campos de gauge se torna muito mais natural, no entanto, ao utilizarmos campos vierbein, que relacionam bases ortonormais e bases coordenadas. O tensor de torção, em particular, é definido apenas para uma conexão sobre o fibrado tangente, não para quaisquer conexões em teoria de gauge. Assim, há diferentes usos da noção de conexão e devemos usá-la em cada contexto adequadamente.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Einstein, Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, **part 2**, 844 (1915).
- [2] A. Einstein, Annalen der Physik **49**, 769 (1916).
- [3] K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **7**, 189 (1916).
- [4] H. Reissner, Ann. Phys. (Leipzig) **50**, 106 (1916).
- [5] G. Nordstrom, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **20**, 1238 (1918).
- [6] R.P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 26 (1963).
- [7] E.T Newman, R. Penrose, J.Math.Phys. **3**, 566–578 (1962).
- [8] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [9] K. Srinivasan, T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **60**, 024007 (1999).
- [10] M. K. Parikh, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **85**, 5042 (2000).
- [11] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, "Quantum Mechanics(Non-relativistic theory), Course of theoretical physics, Volume 2" (Pergamon, New York, 1975).
- [12] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, Superstring Theory. Vol. 1: Introduction (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [13] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [14] C. Rovelli, Quantum Gravity (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [15] B. S. DeWitt, Phys. Rev. **162**, 1195 (1967).
- [16] B. S. DeWitt, Phys. Rev. **162**, 1239 (1967).
- [17] B. S. DeWitt, The formal structure of quantum gravity, in Procs. Recent Developments in Gravitation (Springer-Verlag, 1978), pp. 275–322.
- [18] L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 145 (1995).
- [19] X. Calmet, M. Graesser and S. D. H. Hsu, Phys. Rev. Lett. **93**, 211101 (2004).
- [20] S. M. Carroll, "Spacetime and Geometry", San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004).
- [21] R. M. Wald, "General Relativity", Chicago, USA: Univ. Pr.(1984).
- [22] D. Finkelstein, Physical Review **110**, 965 (1958).
- [23] M. Kruskal, Physical Review **119**, 1743 (1960).

- [24] W.G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870-892 (1976).
- [25] J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333-2346 (1973).
- [26] S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **25**, 152-166 (1972).
- [27] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161-170 (1973).
- [28] G. 't Hooft, arXiv:gr-qc/9310026.
- [29] A. Strominger, C. Vafa, Phys. Lett. B **379**, 99-104 (1996).
- [30] S.D. Mathur, Fortsch. Phys. **53**, 793-827 (2005).
- [31] T. Padmanabhan, Pranaama **37**, 179 (1991).
- [32] J.B. Hartle, S.W. Hawking, Phys. Rev. D **13**, 2188 (1976).
- [33] P. Painlevé, C. R. Acad. Sci. (Paris) **173**, 677 (1921).
- [34] P. Kraus and F. Wilczek, Mod. Phys. Lett. A **9**, 3713 (1994).
- [35] P. Kraus and F. Wilczek, Nucl. Phys. **B433**, 403 (1995).
- [36] P. Kraus and E. Keski-Vakkuri, Nucl. Phys. **B491**, 249 (1997).
- [37] P. Kraus and F. Wilczek, Nucl. Phys. **B437**, 231 (1995).
- [38] P. Nicolini, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 1229 (2009).
- [39] M. Agheben, M. Nadalini, L. Vanzo, S. Zerbini, JHEP **05** 014 (2005).
- [40] W. Pauli, Letter of Heisenberg to Peierls (1930), in Scientific Correspondence, Vol. II, ed. K. von Meyenn (Springer-Verlag, 1985), p. 15.
- [41] E. Schrödinger, Die Naturwiss. **31**, 518 (1934).
- [42] A. Mach, Z. Phys. **104**, 93 (1937).
- [43] W. Heisenberg, Ann. Phys. **32**, 20 (1938).
- [44] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
- [45] C. N. Yang, Phys. Rev. **72**, 874 (1947).
- [46] A. Connes, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. Phys. **22**, 257 (1985).
- [47] S. L. Woronowicz, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto **23**, 117 (1987).
- [48] S. L. Woronowicz, Commun. Math. Phys. **111**, 613 (1987).
- [49] A. Connes, Noncommutative Geometry (Academic Press, 1994).
- [50] A. Connes, Commun. Math. Phys. **182**, 155 (1996).
- [51] A. Connes, J. Math. Phys. **41**, 3832 (2000).

- [52] E. Witten, Nucl. Phys. B **268**, 253 (1986).
- [53] N. Seiberg and E. Witten, J. High Energy Phys. **9909**, 032 (1999).
- [54] T. Thiemann, Introduction to modern canonical quantum general relativity arXiv:gr-qc/0110034.
- [55] A. Ashtekar, A. Corichi and J. A. Zapata, Class. Quantum Grav. **15**, 2955 (1998).
- [56] A. Corichi and J. A. Zapata, Int. J. Mod. Phys. D **17**, 445 (2008).
- [57] A. Ashtekar, Loop quantum gravity: Four recent advances and a dozen frequently asked questions, to appear in Proceedings of 11th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation, and Relativistic Field Theories, Berlin, Germany, 23–29 Jul 2006, eds. H. Kleinert, R. T. Jantzen and R. Ruffini (World Scientific, Singapore, 2008), arXiv:0705.2222.
- [58] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994).
- [59] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995).
- [60] K. Morita, Prog. Theor. Phys. **108**, 1099 (2003).
- [61] H. Kase, K. Morita, Y. Okumura and E. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **109**, 663 (2003).
- [62] K. Morita, Y. Okumura and E. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **110**, 989 (2003).
- [63] K. Morita, Prog. Theor. Phys. **111**, 881 (2004).
- [64] A. Smailagic and E. Spallucci, J. Phys. A **37**, 1 (2004) [Erratum: *ibid.* **37**, 7169 (2004)].
- [65] H. J. Groenewold, Physica **12**, 405 (1946).
- [66] J. E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99 (1949).
- [67] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, New York, 1931).
- [68] E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [69] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, Phys. Lett. B **533**, 178 (2002).
- [70] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, Commun. Math. Phys. **237**, 221 (2003).
- [71] H. Grosse and R. Wulkenhaar, Commun. Math. Phys. **256**, 305 (2005).
- [72] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [73] S. Cho, R. Hinterding, J. Madore and H. Steinacker, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 161 (2000).
- [74] A. Smailagic and E. Spallucci, J. Phys. A **36**, L467 (2003).
- [75] A. Smailagic and E. Spallucci, J. Phys. A **36**, L517 (2003).
- [76] A.H. Chamseddine, Phys. Lett. B **504**, 33 (2001).

- [77] M. Chaichian, A. Turenau, G. Zet, *Phys. Lett. B* **660**, 573 (2008).
- [78] M. Kontsevich, *Lett. Math. Phys.* **66**, 157 (2003).
- [79] E. Harikumar and V. O. Rivelles, *Class. Quantum Grav.* **23**, 7551 (2006).
- [80] A. Kobakhidze, *Phys. Rev. D* **79**, 047701 (2009).
- [81] F. Nasser, *Gen. Relativ. Gravit.* **37**, 2223 (2005).
- [82] F. Nasser, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1113 (2006).
- [83] A. Gruppuso, *J. Phys. A* **38**, 2039 (2005).
- [84] P. Nicolini, A. Smailagic and E. Spallucci, The fate of radiating black holes in noncommutative geometry, in *Proc. EPS-13, “Beyond Einstein — Physics for 21st Century”*, eds. A. M. Cruise and L. Ouwehand (ESA Publication Division, Noordwijk, The Netherlands, 2006).
- [85] P. Nicolini, Noncommutative nonsingular black holes, in *Proc. 8th Workshop “What Comes Beyond the Standard Models”*, Bled, Slovenia, July 19–29 2005, *Bled Workshops in Physics*, Vol. 6, No. 2, eds. N. M. Borstnik, H. B. Nielsen, C. D. Froggatt and D. Lukman (DMFA-Zaloznistvo, Ljubljana, Slovenia, 2005), p. 79.
- [86] P. Nicolini, *J. Phys. A* **38**, L631 (2005).
- [87] Y. B. Zel’dovich, *Sov. Phys. Usp.* **11**, 381 (1968).
- [88] J.M. Bardeen, in: *Conference Proceedings of GR5 (Tbilisi, URSS, 1968)*, p. 174.
- [89] S. Ansoldi, arXiv:0802.0330.
- [90] Y. S. Myung, Y. W. Kim and Y. J. Park, *J. High Energy Phys.* **0702**, 012 (2007).
- [91] E. Spallucci, A. Smailagic and P. Nicolini, *Phys. Lett. B* **670**, 449 (2009).
- [92] R. Banerjee, B. R. Majhi and S. K. Modak, *Class. Quant. Grav.* **26**, 085010 (2009).
- [93] D. Pavon, *Phys. Rev. D* **43**, 2495 (1991).
- [94] Y. S. Myung, *Mod. Phys. Lett. A* **23**, 667 (2008).
- [95] T. Eguchi, P.B. Gilkey, A.J. Hanson, *Phys. Rep.* **66**, 213 (1980); F.W. Hehl, J.D. McCrea, E.W. Mielke, Y. Ne’eman, *Phys. Rep.* **258**, 1 (1995); F. Gronwald, F.W. Hehl, arXiv:gr-qc/9602013; A.H Chamseddine, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **03**, 149 (2006).
- [96] J.W. Moffat, *Phys. Lett. B* **491**, 345 (2000).
- [97] S. Fabi, B. Harms, A. Stern, *Phys. Rev. D* **78**, 065037 (2008).
- [98] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, G. Piacitelli, *Phys. Lett. B* **533**, 178 (2002).
- [99] J. Gomis, T. Meheh, *Nucl. Phys. B* **591**, 265 (2000).
- [100] . Liao, K. Sibold, *Eur. Phys. J.C* **25**, 469 (2002).

- [101] S.C. Ulhoa, R.G.G. Amorim, A.F. Santos, *Gen. Relativ. Gravit.* **46**, 1760 (2014).
- [102] T.C. Adorno, D.M. Gitman, A.E. Shabad, D.V. Vassilevich, *Phys. Rev. D* **84**, 085031 (2011).
- [103] I. Mociuiu, M. Pospelov, R. Roiban, *Phys. Lett. B* **489**, 390 (2000).
- [104] Yoichiro Nambu (private communication).
- [105] M. Chaichian, M.R. Setare, A. Tureanu, *G. Zet, J. High Energy Phys.* **04** 064 (2008).
- [106] R. Bufalo, A. Tureanu, *Phys. Rev. D* **92**, 065017 (2015).