UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA - CAEN

FRANCISCO BRUNO DE LIMA HOLANDA

LEILÕES MULTIDIMENSIONAIS COM ESCORE RESERVA SECRETO

FORTALEZA
2012

FRANCISCO BRUNO DE LIMA HOLANDA

LEILÕES MULTIDIMENSIONAIS COM ESCORE RESERVA SECRETO

Dissertação submetida à Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia.

Orientador: MAURÍCIO BENEGAS

FORTALEZA
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Pós Graduação em Economia - CAEN

H669l Holanda, Francisco Bruno de Lima
Leilões multidimensionais com escore reserva secreto / Francisco Bruno de Lima Holanda. - 2012.
24f.f. il. color., enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós Graduação em Economia, CAEN, Fortaleza, 2012.
Orientação: Prof. Dr. Maurício Benegas

1.Leilões ótimos 2. Leilões de escore 3. Licitação I. Título.

CDD 351.712

FRANCISCO BRUNO DE LIMA HOLANDA

LEILÕES MULTIDIMENSIONAIS COM ESCORE RESERVA SECRETO

Dissertação submetida à Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia.

Aprovado em 08/03/2012 pela banca examinadora

Maucício Benegas (Orientador)
UFC/CAEN

Sebastião Carneiro de Almeida (Membro)
UFC/CAEN

Sérgio Aquino de Souza (Membro)
UFC/CAEN

Resumo

Neste trabalho, vamos aplicar a teoria dos leilões para resolver um modelo parcimonioso de uma licitação pública em uma situação em que há a contratação de uma firma pelo Governo. Trata-se de uma extensão natural do modelo de leilão bidimensional proposto por Yeon-Koo Che (1993) para modelar leilões do Departamento de Defesa dos Estados Unidos.

A extensão será feita baseada em um modelo de preço reserva secreto proposto por Laffont et al. (1994) para o caso unidimensional. Por fim, faremos uma breve análise numérica do modelo desenvolvido neste trabalho.

Palavras-chave: leilões ótimos, leilões de escore, licitações.

Abstract

In this work, let's apply auction theory to solve a parsimonious procurement model in a situation where there is a contracting firm by the Government. It's a natural extension of the bidimensional auction model proposed by Yeon-Koo Che (1993) to model actions of the Department of Defense (DoD) in United States.

The extension will be made based in a secret reservation price model proposed by Laffont et at. (1994) to unidimensional case. At end, we will make a short numerical analysis of the model proposed in this work.

Keywords: optimal auctions, score auctions, procurements.

Sumário

1 Introdução

1.1 Leilões

Podemos definir um *leilão* como uma instituição de mercado com um conjunto específico de regras que determinam a alocação de recursos com base nas interações estratégicas entre compradores e vendedores denominadas *lances*. Dessa forma, a teoria dos leilões também pode ser considerada como um ramo da teoria dos jogos.

Registros históricos confirmam que o império Babilônico realizava anualmente leilões de mulheres por volta de 500 A.C. Também há fortes indícios de que os romanos recorriam a leilões para negociar escravos e ativos liquidados de devedores do império.

Com os avanços tecnológicos, principalmente com a criação da internet, os leilões se tornaram frequentes na vida de parte da população, principalmente com a criação da internet. Atualmente é possível participar diariamente de leilões através de sites especializados como o *e-Bay*[1] (e sua versão latino-americana o *mercado livre*[2]). A popularização do e-Bay é tão grande que o lucro da empresa foi de US$ 412 milhões no segundo semestre de 2010.

Existem diversas formas de leilão. Cada uma determinada por mecanismos específicos que também possuem propriedades específicas. Muitos dos trabalhos em teoria dos leilões se concentram em analisar algumas dessas propriedades como: otimalidade, compatibilidade de incentivos e eficiência de Pareto para cada um dos tipos de mecanismo. Os leilões podem ser abertos ou fechados

Em leilões abertos, o preço do bem leiloado é determinado através de um processo dinâmico de conhecimento comum. Esse processo dinâmico pode ocorrer de forma ascendente ou descendente.

- O leilão aberto de preços crescentes ou leilão *Inglês*. Este é a mais antiga e possivelmente a mais comum forma de leilão. Cada participante anuncia seus lances sucessivamente, aumentando o maior dos lances anteriores, até que reste apenas um jogador com o maior lance. Este é declarado vencedor, recebendo o objeto leiloado pelo último valor anunciado.
- O leilão aberto de preços decrescentes ou leilão *Holandês*. É a contrapartida do leilão Inglês. O leiloeiro inicia o leilão anunciando um valor alto para o objeto e reduz este valor continuamente até que algum participante aceite o lance corrente. Um lance equivalente ao valor de oportunidade do agente maximiza sua probabilidade de

[1] `http://www.ebay.com/`
[2] `http://www.mercadolivre.com.br/`

sucesso na transação, sendo seu benefício (diferença entre o valor de oportunidade e o preço de fechamento) nulo. A possibilidade de aumento de ganhos cresce à medida que o preço é reduzido. O leilão Holandês requer uma avaliação do mercado e do valor do bem leiloado. Negligenciar esta avaliação ex-ante aumenta a chance do agente não realizar negócio.

Em leilões fechados, os lances são apresentados simultaneamente ao leiloeiro em envelopes fechados. Vence o agente que tiver o maior valor de lance, desde que esse valor supere o preço de reserva do leiloeiro. Além disso, como cada participante toma conhecimento dos demais lances apenas quando o leilão está encerrado, este tipo leilão leva a cada participante fazer seu lance considerando exclusivamente seu valor de oportunidade. Assim, os ofertantes submetam lances com preços iguais ao seu custo. Dessa forma, dependendo da forma do pagamento, o participante terá lucro líquido zero na operação. Os dois principais tipos de leilões fechados são

- O leilão de lances selados de *primeiro preço* é outra forma comum de leilão. Nesta modalidade, os participantes submetem seus lances em envolopes selados; o agente que submete o maior lance é considerado vencedor e recebe o objeto pagando o valor do maior lance.
- O leilão de lances selados de *segundo preço* (ou *leilão de Vickrey*). É uma adaptação do tipo anterior. Os participantes submetem seus lances em envolopes selados; o agente que submete o maior lance é considerado vencedor. Porém, recebe o objeto pagando o valor do segundo maior lance. Apesar de de muito recomendado pelos economistas, por suas propriedades teóricas, o leilão de segundo preço tem sido raramente posto em prática. Isto se deve ao fato de que leilões de segundo-preço podem ser facilmente manipulados pela solicitação, por parte do leiloeiro, de lances-fantasma próximos ao maior lance submetido.

1.2 Licitações

A licitação, que é um tipo específico de leilão, tornou-se viável com o crescimento da indústria e do setor privado no início do século XX. Este modelo permite que órgãos públicos negociem com empresas de forma imparcial e eficiente. Apesar de possuir regras mais sofisticadas do que de um leilão comum, os lances ainda possuem uma forte influência no processo de licitação.

O ordenamento brasileiro, em sua Carta Magna (*art. 37, inciso XXI*), determinou a obrigatoriedade da licitação para todas as aquisições de bens e contratações de serviços e obras, bem como para alienação de bens, realizados pela Administração no exercício de suas funções.

A licitação é composta de diversos procedimentos que têm como meta garantir os princípios constitucionais da legalidade, da isonomia, da impessoalidade, da moralidade, da publicidade e da eficiência, com o intuito de proporcionar à Administração a aquisição, a venda ou a prestação de serviço de forma vantajosa, ou seja, menos onerosa e com melhor qualidade possível, é a chamada "eficiência contratória".

Dessa forma, a própria Constituição Federal defende implicitamente que o Governo deve se comportar como um agente privado que visa maximizar seus lucros. Portanto, este deve fazer do processo licitatório o mais eficiente possível.

O problema surge quando o Governo deseja adquirir um bem heterogêneo. Neste caso, a qualidade do produto, além do preço, deve ser um fator relevante na decisão da "melhor oferta". Portanto, iremos abordar neste trabalho um leilão de um bem "bivalorado". Ou seja, o Governo irá leiloar um contrato que busca adquirir um determinado bem que pode ser produzido por qualquer uma das firmas que disputam o leilão. Porém, tanto a qualidade como o preço deste bem podem ser controlados pelas firmas. Aqui também assumiremos como válido o *trade-off* clássico entre qualidade e preço.

Por outro lado, a forma como se dará a quantificação desta qualidade, não será objeto de estudo desse trabalho. Em vez disso, vamos abstrair a ideia de qualidade, quantificando-a por um número real q.

Surge então um problema em se estabelecer uma ordem para esses lances. Enquanto que, com lances unidimensionais podemos facilmente ordená-los usando a ordem natural dos números reais, com lances bidimensionais não temos uma "ordem natural", já que o mesmo não ocorre para o domínio desses lances ($\mathbb{R}^2$). Como em [4], contornaremos esse problema usando uma *função escore* que, dentre outras vantagens, é de livre escolha do Governo.

O diferencial do presente trabalho em relação a [4] será a inclusão de uma outra ferramenta que visa aumentar o lucro esperado do contratante (Governo) sem prejudicar a qualidade esperada do produto. Esta ferramenta será o score de reserva. Seguindo os passos de [6], vamos analisar as implicações dessa nova hipótese, porém, em um modelo de leilão multidimensional.

2 Literatura

A maioria dos especialistas na área afirma que a teoria moderna dos leilões começou com Vickrey [14]. Em seu trabalho seminal, Vickrey determinou um equilíbrio de estratégias em um leilão de primeiro preço e um equilíbrio em um leilão de segundo preço quando as valorações iniciais dos participantes do leilão são distribuídas por uma distribuição uniforme. Em seguida, demonstrou que as receitas esperadas para o vendedor nos dois tipos de leilões são iguais. Em um trabalho posterior, também demonstrou que a equivalência entre as receitas esperadas também é válida mesmo para distribuições arbitrárias.

A idéia de Vickrey de abordar o problema dos leilões fundamentada em aspectos da teoria dos jogos foram de tamanha influência que, em 1996, este foi laureado com o Prêmio Nobel em Economia. Foi a partir de seus *insights* que muitos outros trabalhos na área foram desenvolvidos. Um dos mais importates trabalhos foi elaborado por Riley e Samuelson (1981) [13]. Neste artigo, os autores demonstram uma versão mais geral do *teorema da equivalência de receitas* proposto por Vickey como citado a seguir:

> *Assume each of a given number of risk-neutral potential buyers of an object has a privately known signal independently drawn from a common, strictly increasing, atomless distribution. Then any auction mechanism in which (i) the object always goes to the buyer with the highest signal, and (ii) any bidder with the lowest-feasible signal expects zero surplus, yields the same expected revenue (and results in each bidder making the same expected payment as a function of her signal).*

A partir desses trabalhos vangardistas, observou-se o surgimento de diversos outros trabalhos analisando os mais variados tipos de leilão. Dessa forma, observou-se o surgimento dos mais diversas ramos de pesquisa. Dentre os quais encontra-se a especialidade que estuda o leilão de primeiro preço com valor de reserva secreto.

Esse tópico foi analisado com detalhes por Laffont et al., no artigo *First-Price Sealed-Bid Auctions With Secret Reservation Prices* de 1994. Neste trabalho, os autores primeiramente estudam se o leiloeiro possui uma receita esperada maior quando o preço de reserva é revelado ou quando é mantido sobre sigilo. Em seguida, é feita uma análise econométrica do modelo usando-se dados de leilões de madeira feitos no interior da França. Cabe ainda resaltar que houve um crescimento de trabalhos que desenvolveram a parte empírica da teoria dos leilões, além de novas ferramentas econométricas para estudá-las. Os artigos de Hendricks et al. (1994), Hendricks e Paarsch (1995), e Laffont et al. (1995) podem ser considerados como introdução para esta área.

Outro importante ramo de pesquisa foi iniciado com o trabalho pioneiro de Che entitulado *Design Competition Through Multidimensional Auctions* de 1993. Este artigo foi o primeiro a analisar leilões em que o lance é dado por um vetor, generalizando os modelos predecessores. Che desenvolveu seu trabalho para melhor entender teoricamente o mecanismo de leilão usado pelo Departamento de Defesa (DoD) dos Estados Unidos em que a qualidade e preço das licitações possuiam um importante papel no resultado do processo.

3 Modelo e Hipóteses

Nosso trabalho será analisar a situação na qual o Governo abre um processo de licitação em que as empresas devem gerar lances usando duas variáveis: preço e qualidade. Além disso, para um lance ser considerado vencedor deve obdecer alguns critérios mínimos que não são revelados pelo Governo até que todas as empresas façam seus lances.

Esta situação pode ser considerada como um jogo de informação incompleta em que o Governo e as firmas que desejam participar da licitação, possuem uma informação privada que não pode ser observada pelos demais participantes. Ademais, o Governo possui a capacidade de escolher as regras do jogo, atuando assim como o formulador do mecanismo de alocação dos recursos do jogo.

Nosso objetivo será, portanto, o de formular um mecanismo compatível em incentivos baseado em um modelo padrão de leilão multidimensional de primeiro escore quando há informação privada por parte do Governo e por parte das firmas.

O modelo será composto por um Governo contratante e N firmas concorrentes. Cada firma dará um lance composto (q, p), em que q representa a qualidade e p o preço. Assumiremos todos os agentes neutros ao risco.

3.1 Governo

O Governo possui uma característica não observada pelas firmas chamada *escore reserva* e denotado por s_R. Por outro lado, s_R segue uma distribuição acumulada G com suporte $[\overline{s}, \underline{s}]$. Essa distribuição será aceita como sendo de conhecimento comum.

Conforme utilizado em [4], é usada uma função escore quase-linear

$$S(q, p) = s(q) - p,$$

em que $s' > 0$, $s'' < 0$ e $\lim_{q \to 0} s'(q) = \infty$, $\lim_{q \to \infty} s'(q) = 0$. Como usual, essas hipóteses são assumidas para garantir uma solução interior.

A função escore é escolhida antes do leilão e é de conhecimento comum. Podemos observar dois fatos importantes: primeiro, a função escore não depende do escore reserva s_R do Governo, caso contrário, a função score seria um sinalizador do seu preço de reserva, segundo, a hipótese de as firmas não possuírem poder de barganha implicará que a função escore irá refletir as verdadeiras preferências do Governo.

3.2 Firmas

O tipo das firmas θ_i também possui distribuição acumulada conhecida F com suporte $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$. Todos os parâmetros θ_i, s_R são distribuídos de forma indepentente.

O lucro *ex post* da firma i caso seja a vencedora da licitação será dado por:

$$\pi_i(q,p) = p - c(q,\theta_i)$$

onde a função custo c é crescente tanto na variável qualidade q, quanto na variável tipo θ. Além disso, assuma que $c_{qq} \geq 0$, $c_{q\theta} > 0$ e $c_{qq\theta} \geq 0$.

3.3 "Timing"

O leilão possui o seguintes passos:

(i) Cada uma das N firmas escolhem um par (q,p) e escreve este par em um envelope selado.

(ii) O Governo escolhe um escore de reserva, não necessariamente o seu verdadeiro valor, e o escreve em um envelope fechado.[3]

(iii) Os envelopes são abertos e para cada par (q,p) é calculado seu valor segundo a função escore. A firma com maior escore será considerada vencedora, se este escore for maior que o escore de reserva do Governo.

[3]De fato, a diferenciação dos passos (i) e (ii) é apenas metodológica. Considerar que estes dois passos ocorram simultaneamente não afeta a estrutura do modelo devido as informações privadas dos agentes.

4 Equilíbrio do Modelo

Como vimos, o presente modelo pode ser estudado como um jogo estático com informação incompleta (jogo Bayesiano)[4] onde as firmas devem escolher uma combinação (q, p) em função do seu parâmetro custo de modo a maximizar seu *payoff* esperado.

Em termos gerais, o equilíbrio corresponde a determinar a curva $\xi : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\xi(\theta) = (\theta, q_s(\theta), p_s(\theta)).$$

Como em [4], vamos impor certas hipóteses, para obtermos um equilíbrio com $q(\theta)$ fixado para cada valor de θ. Feito isto, o equilíbrio fica completamente caracterizado pela curva $\check{\xi}(\theta) = (\theta, p_s(\theta))$. A partir daí, nosso objetivo nessa seção será fazer uma reparametrização do leilão bidimensional inicial em um leilão unidimensional. Dessa forma, poderemos usar os métodos padrões de análise de leilões unidimensionais.

4.1 Estratégias Dominantes

A hipótese mencionada no início desta seção é a seguinte:

Hipótese 1. *A função $S(\theta) = s(q) - c(q, \theta)$ possui único máximo interior para qualquer $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.*

Sob essa hipótese podemos demonstrar o seguinte lema:

Lema 1. *No leilão de primeiro preço a qualidade escolhida $q_s(\theta)$ é dada por $q_s(\theta) = \arg\max_q s(q) - c(q, \theta), \forall \theta < \overline{\theta}$* [5]

A análise do equilíbrio passa pela eliminação de estratégias dominadas no espaço de estratégias de cada firma. Intuitivamente, a firma do tipo θ, só irá jogar em pontos onde suas linhas de isolucro tangenciam as linhas de isoscore. Pois estes são os pontos que possuem maior probabilidade de vitória dentre aqueles que possuem o mesmo *payoff*.

Prova do Lema 1. Suponha que o lance de equilíbrio (q, p) é tal que $q_s(\theta) \neq q$ para pelo menos uma das firmas $\theta < \overline{\theta}$. Vamos mostrar que este lance é estritamente dominado pelo lance alternativo (q', p'), onde $q' = q_s$ e $p' = p + s(q_s) - s(q)$. Primeiramente, observe que $S(q, p) = S(q', p')$. Com isso, a probabilidade de (q, p) ser o lance vencedor é a mesma que

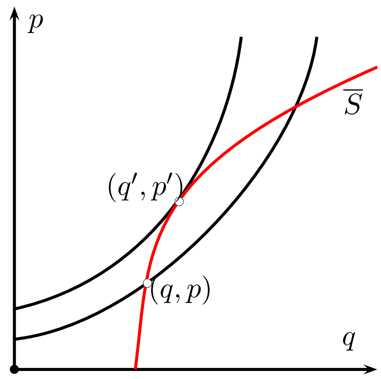
[4] Esta classe de jogos foi estudada pela primeira vez por John Harsanyi

[5] Em [4] este lema também é demonstrado em um leilão de segundo preço.

(q', p') também ser. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\pi(q',p'|\theta) &= p' - c(q',\theta) \\ &= p - c(q,\theta) + [V(q_s) - c(q_s,\theta) - (V(q) - c(q,\theta))] \\ &> p - c(q,\theta) = \pi(q,p|\theta)\end{aligned}$$

Graficamente, temos



Desse modo, o lucro esperado do lance (q', p') é maior que o lucro esperado do lance (q, p).[6] ■

4.2 Reparametrizando leilão bidimensional em um leilão unidimensional

Podemos definir, portanto, a função $S_0 : [\underline{\theta}, \overline{\theta}] \to \mathbb{R}$, como

$$S_0(\theta) = s(q_s(\theta)) - c(q_s(\theta), \theta)$$

Note que, pelo teorema do envelope, função $S_0(\theta)$ é decrescente e possui inversa. Além disso, fazendo a mudança de variável $v = S_0(\theta)$, podemos reparametrizar todo o espaço de tipos considerando $[\overline{v}, \underline{v}]$ no lugar de $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, onde $\underline{v}$ e $\overline{v}$ são tais que $\overline{v} = S_0(\underline{\theta})$ e $\underline{v} = S_0(\overline{\theta})$. Neste ponto, é importante recordar que $S_0'(\cdot) < 0$ portanto, $\underline{v} < \overline{v}$.

O novo espaço tipos $[\overline{v}, \underline{v}]$ também possui uma função distribuição como demonstraremos a seguir

Lema 2. *Se θ segue distribuição acumulada F, v segue distribuição acumulada H, onde*

$$H(v) = 1 - F(S_0^{-1}(v)).$$

[6]Veja que a eliminação de estratégias dominadas é independente do valor do escore de reserva ser usado ou não.

Prova do Lema 2.

$$\begin{aligned}\text{Prob}(v' \leq v) &= \text{Prob}(S_0(\theta') \leq S_0(\theta)),\ \text{como } S_0 \text{ é decrescente,}\\ &= \text{Prob}(\theta \geq \theta') = 1 - F(\theta) = 1 - F(S_0^{-1}(v))\end{aligned}$$

■

Continuando nossa reparametrização, defina a função

$$b(\theta, p) = S(q_s(\theta), p) = s(q_s(\theta)) - p$$

Assim, o lucro *ex post* da firma do tipo θ que escolhe um nível de preços p é dado por

$$p - c(q_s(\theta), \theta) = \underbrace{s(q_s(\theta)) - c(q_s(\theta), \theta)}_{=S_0(\theta)} - b(\theta, p) = v - b$$

o payoff da firma i pode ser resumido como

$$\Pi_i = \begin{cases} v_i - b_i & \text{se } b_i > \max_{j \neq i} b_j \text{ e } b_i > s_R \\ 0 \end{cases}$$

Podemos então analisar o seguinte jogo:

"Considere N agentes, cada um com uma informação privada v que define seu tipo. Estes agentes irão participar de leilão de primeiro preço de um bem unitário cuja valoração privada para cada agente do tipo v é numericamente igual a este parâmetro. Os agentes participam do leilão escrevendo lances b em envelopes fechados. O vendedor também escolhe um nível de preço mínimo no qual o bem pode ser vendido."

É claro que existe uma relação entre o modelo proposto acima e o modelo estudado neste trabalho. Tal relação é dado pelas funções $S_0(\cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$. Dessa forma, se $\beta(v)$ é uma estratégia ótima para o modelo anterior, podemos definir a segunda entrada $p_s(\theta)$ da curva ótima de nosso modelo através da seguinte relação:

$$\beta(S_0^{-1}(\theta)) = s(q_s(\theta)) - p_s(\theta)$$

Fazendo isso, reduzimos um leilão bidimensional a um leilão unidimensional.

4.3 Compatibilidade de Incentivos e Equilíbrio

Defina $\beta_i(\cdot)$ a estratégia da i-ésima firma, e $p(\cdot)$ a estratégia publicitária do Governo. Vamos nos restringir em determinar um equilíbrio com estratégias estritamente crescentes, diferenciáveis e simétricas para todos os jogadores. Ou seja, $\beta_i(\cdot) = \beta(\cdot)$. Defina ainda $y = \max v_i$ e $H_{\max}$ sua função de distribuição acumulada.

Vamos supor que o leilão proposto é um mecanismo compatível em incentivos. Do ponto de vista do Governo, com escore reserva s_R, suponha que o mesmo esteja disposto a revelar $p(\widetilde{s_R})$. Neste caso, seu escore esperado será

$$\begin{aligned} W_G(s_R, \widetilde{s_R}) &= s_R \cdot \text{Prob}\{\beta(y) < p(\widetilde{s_R})\} + \int_{\{y \geq \beta^{-1}(p(\widetilde{s_R}))\}} \beta(y) dH_{\max}(y) \\ &= s_R \cdot H_{\max}[\beta^{-1}(p(\widetilde{s_R}))] + \int_{\beta^{-1}(p(\widetilde{s_R}))}^{\overline{v}} \beta(y) dH_{\max}(y) \end{aligned} \tag{1}$$

Derivando a expressão acima com respeito a $\widetilde{s_R}$, podemos encontrar as condições de primeira ordem:

$$\begin{aligned} 0 &= s_R \cdot h_{\max}[\beta^{-1}(p(\widetilde{s_R}))](\beta^{-1})'(p(\widetilde{s_R}))\frac{\partial p(\widetilde{s_R})}{\partial s_R} \\ &\quad -\beta[\beta^{-1}(p(\widetilde{s_R}))]h_{max}[s^{-1}(p(\widetilde{s_R}))](\beta^{-1})'(p(\widetilde{s_R}))\frac{\partial p(\widetilde{s_R})}{\partial s_R} \end{aligned} \tag{2}$$

Assumindo que a estratégia ótima seja compatível em incentivos, (2) será satisfeita para $\widetilde{s_R} = s_R$. Portanto,

$$s_R = \beta[\beta^{-1}(p(s_R))] = p(s_R).$$

Dada a estratégia do Governo, a utilidade da firma do tipo θ_i que revela tipo $\widetilde{\theta_i}$ é

$$W_i(v_i, \widetilde{v_i}) = [v_i - \beta(\widetilde{v_i})]\text{Prob}[\beta(\widetilde{v_i}) > \beta(v_j),\ j \neq i \text{ e } \beta(\widetilde{v_i}) > s_R],$$

que pode ser reescrita como

$$U(v_i, \widetilde{v_i}) = [v_i - \beta(\widetilde{v_i})]H_{\max}(\widetilde{v_i})G(\beta(\widetilde{v_i})).$$

Derivando com relação a $\widetilde{v_i}$ e assumindo que no ótimo $v_i = \widetilde{v_i}$, temos

$$\begin{aligned} &[v_i - \beta(v_i)]\left[(N-1)H^{N-2}(v_i)h(v_i)G(\beta(v_i)) + H^{N-1}(v_i)g(\beta(v_i))\beta'(v_i)\right] \\ &\qquad\qquad -\beta'(v_i)H^{N-1}(v_i)G(\beta(v_i)) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Note que (3) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dv}[\beta(v)H^{N-1}(v)G(\beta(v))] = v\frac{d}{dv}[H^{N-1}(v)G(\beta(v))].$$

Integrando dos dois lados e usando integral por partes, temos:

$$\beta(v)H^{N-1}(v)G(\beta(v)) = [vH^{N-1}(v)G(\beta(v))]_{\underline{v}}^{v} - \int_{\underline{v}}^{v} H^{N-1}(x)G(\beta(x))dx$$

Sabendo que $H(\underline{v}) = 1 - F(\overline{\theta}) = 0$, $\beta(v)$ pode ser dada implicitamente como:

$$\beta(v) = v - \frac{\int_{\underline{v}}^{v} H^{N-1}(x)G(\beta(x))dx}{H^{N-1}(v)G(\beta(v))}.$$

Aplicando mudança de variável $v = S_0(\theta)$ e usando que $S_0'(\theta) = c_\theta(q_s(\theta), \theta)$[7], o lance ótimo será dado por

$$q_s(\theta) = \arg\max s(q) - c(q, \theta);$$

$$p(\theta) = c(q(\theta), \theta) + \frac{\int_{\theta}^{\overline{\theta}} c_\theta(q_s(t), t)(1 - F(t))^{N-1}(t)G(s(q_s(t)) - p_s(t))dt}{(1 - F(\theta))^{N-1}(\theta)G(s(q_s(\theta)) - p_s(\theta))}$$

Observe que para garantirmos que β seja estritamente crescente devemos impor algumas condições sobre $H(\cdot)$ e $G(\cdot)$. Por simplicidade, assuma que estas condições sejam satisfeitas.

[7] ver Apêndice

5 Análise do Resultado

Ao contrário de [4] Che (1993), a estratégia ótima não é obtida de forma explícita. De fato, esta é dada de forma implícita como ocorre em [6] Laffont (1994). Porém, esta realidade não impede a comparação do nosso resultado com os obtidos anteriormente por [4].

Teorema 1. *Sob as mesmas condições, o lance vencedor do leilão com escore reserva secreto possui preço menor do que o lance vencedor do leilão sem escore de reserva secreto.*

Prova do Teorema 1. Observe que, para todo $\widetilde{\theta} \geq \theta$, temos $G(\beta(\widetilde{v})) \leq G(\beta(v))$, pois G e β são funções crescentes e S_0 é decrescente. Portanto,

$$G(s(q_s(\widetilde{\theta})) - p_s(\widetilde{\theta})) = G(\beta(\widetilde{v})) \leq G(\beta(v)) = G(s(q_s(\theta)) - p_s(\theta)).$$

Mais ainda, aplicando esta última no resultado principal

$$\begin{aligned} p(\theta) &= c(q(\theta),\theta) + \frac{\int_{\theta}^{\overline{\theta}} c_\theta(q_s(t),t)(1-F(t))^{N-1}(t)G(s(q_s(t))-p_s(t))dt}{(1-F(\theta))^{N-1}(\theta)G(s(q_s(\theta))-p_s(\theta))} \\ &\leq c(q(\theta),\theta) + \frac{\int_{\theta}^{\overline{\theta}} c_\theta(q_s(t),t)(1-F(t))^{N-1}(t)dt}{(1-F(\theta))^{N-1}(\theta)} \end{aligned}$$

A intuição econômica por de trás deste teorema é: um mecanismo que envolve um escore de reserva não observado pelas firmas, gera uma incerteza a mais para elas. Com esta incerteza, é menor a probabilidade que o lance de equilíbrio dado no modelo de Che [4] seja, de fato, o lance vencedor. Como as firmas são neutras ao risco, elas compensam a incerteza sendo mais "agressivas", dando lances com um escore maior.

Todavia, note que o nível de qualidade se mantém inalterado. Ou seja, definir um escore reserva não cria distorções na qualidade ofertada pela firmas em seus lances.

5.1 Resultado Numérico

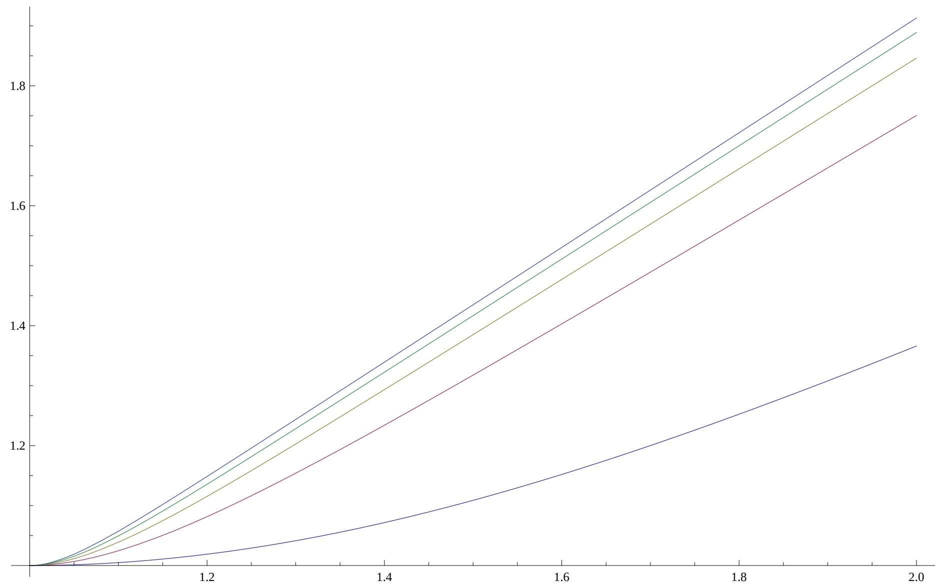
Nesta seção vamos fazer uma análise númerica da equação diferencial [**?**], resolvendo $\beta(\cdot)$ no caso particular em que $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são ambas funções distribuição uniforme com o suporte de v sendo o intervalo $[1, 2]$. Para isso, utilizamos os seguintes comandos no software Wolfram Mathematica 7.0.[8]

```
eqns = Table[Derivative[1][y[i]][x] ==
(5*i-4)*(y[i][x]^2-x*y[i][x])/(x^2-2 x*y[i][x]), i,1,5], Table[y[i][1] ==
1,{i,1,5}]
```

[8]http://www.wolfram.com/mathematica/

```
NDSolve[eqns, Table[y[i],{i,5}],{x,2}];
Plot[Evaluate[Table[y[i][x],{i,5}] /.%],{x,1,2}]
```

Obtemos o seguinte gráfico plotado para os valores de N iguais a 1, 6, 11, 16, 21. Em o eixo horizontal é dado pela variável V e o eixo vertical é dado pela variável B.



Esse resultado é condizente com os resultados previamente encontrados, i.e, que os participantes do leilão aumentam o valor de seu lance a medida que o número de concorrentes aumenta. Isto é bastante intuitivo, já que o maior número de partipantes diminui a probabilidade de um lance menor ser o vencendor. Além disso, no caso particular de funções densidade uniformes, a função $\beta(\cdot)$ converge para uma função linear. A relação contrária entre $\beta(\cdot)$ e $p(\cdot)$, nos garante que quanto maior for tipo da firma, menor será o preço cobrado por esta. Dessa forma, o Governo pode estimar um menor preço vencedor a medida que mais firmas entram no processo de licitação. Porém, pode existir um efeito adverso na qualidade caso firmas de tipos baixos sejam as vencedoras da licitação.

6 Conclusões

Nosso objetivo com esse trabalho foi uma melhoria das idéias propostas inicialmente por Yeon-Koo Che (1993) [4], usando para isso, idéias existentes em Laffont et al. (1994) [6]. O modelo de leilão bidimensional de Che garante uma utilidade esperada ótima para o Gorveno, porém nada garante que o resultado do leilão seja positivo para o Governo. Quando o Governo impõe uma regra do tipo *escore reserva*, poderá garantir que este resultado ótimo possua um nível mínimo de utilidade esperada.

Além disso, através de uma análise númerica foi possível conjecturar que o aumento do número de participantes é responsável por um aumento nos lances via variável preço, porém uma variação no número de participante não altera diretamente a varável qualidade do lance vencedor.

Trabalhos futuros poderão analisar se o procedimento de escore de reserva secreto é estritamente melhor (ou não) que um procedimento de escore de reserva público. *Insights* sobre essa situação podem ser encontrados também em Laffont et al. (1994) [6].

Referências

[1] Asker, J., Cantillon, E. “Properties of Scoring Auctions”, *RAND Journal of Economics* Vol. **39**, No. 1, Spring (2008) pp. 69-85.

[2] Branco, F., “The design of multidimensional auctions”. *RAND Journal of Economics*, **28**, (1997), pp. 63-80.

[3] Chatterjee, K.; Samuelson, W. “Bargaining under Incomplet Information” *Operations Research*, Vol. **31**, No. 5 (1983), pp. 835-851.

[4] Che, Y.K., “Design Competition Through Multidimensional Auctions,” *The RAND Journal of Economics*, Vol. **24** (1993), pp. 668-680.

[5] David, H.: *Order Statistics*, New York: Wiley (1969).

[6] Elyakime, B,; Laffont, J. J.; Loisel, P.; Voung, Q.; “First-Price Sealed-Bid Auctions With Secret Reservation Prices,” *Annales D’Économie et de Statistique*, **34** (1994) pp. 115-???.

[7] Gibbons, R. *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press (1992).

[8] Klemperer, P. *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, (2004).

[9] Krishna, V.: *Auction Theory*, Elsevier: Academic Press (2002).

[10] McAfee R.P.; McMillan J., “Auction and bidding.” *J. Econom. Lit.*, **25** (1987), pp. 699-738.

[11] Menezes, F.M., Monteiro, P.K.: *An Introduction to Auction Theory*, Oxford: Oxford Press (2008).

[12] Myerson, R.B., “Optimal Auction Design” *Mathematics of Operations Research*, Vol. **3** (1989), pp. 58-73 .

[13] Riley, J.G.; Samuelson, W.F., “Optimal Auctions” *The American Economic Review*, Vol. **71**, No. 3. June (1981), pp. 381-392.

[14] Vickrey, W. “Auctions And Bidding Games” in *Recent Advances in Game Theory*, Princenton Conference Series, **29**, Princenton, NJ: Princenton University Press, pp. 15-27.

7 Apêndice

Afirmação. *A função S_0 é tal que $S_0'(\theta) = c_\theta(q_s(\theta), \theta)$.*

Demonstração. Diferenciando S_0 com respeito a θ e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial S_0}{\partial \theta} = \frac{\partial s}{\partial q}(q_s(\theta))\frac{\partial q_s(\theta)}{\partial \theta} - \left[\frac{\partial c}{\partial q}(q_s(\theta), \theta)\frac{\partial q_s(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial c}{\partial \theta}(q_s(\theta), \theta)\right]$$

Pela condição de máximo,

$$\frac{\partial s}{\partial q}(q_s(\theta), \theta) = \frac{\partial c}{\partial q}(q_s(\theta), \theta)$$

Portanto

$$\frac{\partial S_0}{\partial \theta} = -\frac{\partial c}{\partial \theta}(q_s(\theta), \theta)$$

Como c é assumido crescente em θ, segue o resultado. ■