



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE CRATEÚS
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

DANIEL NASCIMENTO CAMPOS DOS ANJOS

EFICÁCIA DE MODELOS MICROMECAÑICOS NA MODELAGEM DE
ESTRUTURAS DE CONCRETO DE ULTRA ALTO DESEMPENHO REFORÇADO
COM FIBRAS DE AÇO

CRATEÚS

2019

DANIEL NASCIMENTO CAMPOS DOS ANJOS

EFICÁCIA DE MODELOS MICROMECAÑICOS NA MODELAGEM DE ESTRUTURAS
DE CONCRETO DE ULTRA ALTO DESEMPENHO REFORÇADO COM FIBRAS DE
AÇO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Engenharia Civil da Universidade
Federal do Ceará, como requisito parcial à
obtenção do título de bacharel em Engenharia
Civil.

Orientador: Prof. Ms. Carlos David Rodrigues
Melo.

CRATEÚS

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A619e Anjos, Daniel Nascimento Campos dos.

Eficácia de modelos micromecânicos na modelagem de estruturas de concreto de ultra alto desempenho reforçado com fibras de aço / Daniel Nascimento Campos dos Anjos. – 2019.
143 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Crateús, Curso de Engenharia Civil, Crateús, 2019.

Orientação: Prof. Me. Carlos David Rodrigues Melo.

1. Concreto de ultra alto desempenho. 2. Homogeneização. 3. Micromecânica. 4. Método dos Elementos Finitos. I. Título.

CDD 620

DANIEL NASCIMENTO CAMPOS DOS ANJOS

EFICÁCIA DE MODELOS MICROMECAÑICOS NA MODELAGEM DE ESTRUTURAS
DE CONCRETO DE ULTRA ALTO DESEMPENHO REFORÇADO COM FIBRAS DE
AÇO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Engenharia Civil da Universidade
Federal do Ceará, como requisito parcial à
obtenção do título de bacharel em Engenharia
Civil.

Aprovada em: 04/12/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ms. Carlos David Rodrigues Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Leandro Soares Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Silva Medeiros Junior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha mãe por ter me dado todas as oportunidades, ensinamentos e força de vontade para superar todas as dificuldades durante esta trajetória.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Nilza Miguel, por todo o apoio incondicional demonstrado em todos esses anos. Por toda a compressão e ajuda em todas as decisões por mim tomadas, além de todo o amor demonstrado em todos os momentos de minha vida. Por ser a pessoa responsável pela realização desse sonho e por contribuir nos âmbitos financeiro e emocional durante o curso.

À minha família que sempre me motivou a continuar nos momentos mais difíceis e acreditou na possibilidade da realização desse sonho.

Ao Prof. Ms. Carlos David pela ótima orientação, pelo apoio acadêmico e principalmente pela confiança depositada em mim. Por sempre incentivar na busca por conhecimento e oportunidades acadêmicas, além do respeito e exemplo de pessoa que sempre demonstrou ser.

Aos professores participantes da banca examinadora Leandro Moreira e Marcelo Medeiros pelo tempo, valiosas colaborações e sugestões para este trabalho.

Aos amigos de república Bruno Moreira, Jean Castro, José Jerônimo e Wesley Nathan que colaboraram em minha vida acadêmica e pessoal. Ao grupo “Combat’s” que proporcionou os melhores momentos durante o curso.

À cada amigo, professor, colega de turma ou funcionário que contribuiu direta ou indiretamente para a conclusão desta jornada.

“A necessidade é a melhor mestra e guia da natureza. A necessidade é terna e inventora, o eterno freio e lei da natureza.”

(Leonardo da Vinci)

RESUMO

O concreto de ultra alto desempenho reforçado por fibras (CUADRF) é um material que possui características excepcionais de resistência à compressão, durabilidade e ductilidade. Portanto, apresenta-se como alternativa na elaboração de projetos estruturais que possuam condições específicas de agressividade, seja por ação de agentes deletérios ou cargas estruturais elevadas. O CUADRF é utilizado preponderantemente em recuperação e reparo de estruturas. A aplicação em larga escala do CUADRF enfrenta barreiras principalmente devido ao alto custo e a falta de parâmetros normativos para atender aos requisitos de projeto. A caracterização do comportamento mecânico do CUADRF depende primordialmente da interação entre as fases que compõe a mistura, que induz a necessidade de uma análise multiescalar para definir o desempenho global do material. O presente trabalho visa avaliar a precisão dos principais modelos de homogeneização micromecânica na obtenção dos parâmetros mecânicos do CUADRF. Isto é feito comparando os resultados da abordagem micromecânica com resultados experimentais obtidos na literatura. Em seguida, esses modelos são implementados como sub-rotinas de usuário UMAT no software ABAQUS® que é utilizado para realizar a avaliação do comportamento mecânico de uma viga por meio do método dos elementos finitos. Os modelos de homogeneização adotados no presente trabalho são: Mori-Tanaka, Auto Consistente, Voigt (limite superior) e Reuss (limite inferior). Os resultados obtidos pelos modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente indicam uma diferença para os valores experimentais do módulo de elasticidade entre 2% e 3%, enquanto para o coeficiente de Poisson essa diferença é inferior a 2%. Os modelos de Voigt e Reuss apresentaram-se imprecisos para determinar o módulo de elasticidade e não devem ser utilizados para determinar o coeficiente de Poisson devido às hipóteses adotadas em sua formulação. O comportamento mecânico da viga denota elevada rigidez, produzindo pequenas deformações para carregamentos elevados. Além disso, as tensões internas mostraram variar linearmente a uma variação de 2% da fração volumétrica de fibras de aço para o modelo Mori-Tanaka. Por fim, a abordagem micromecânica pode ser aplicada ao CUADRF com grau de precisão satisfatório e pode ser utilizada como um complemento para reduzir custos em um extenso processo de dosagem experimental.

Palavras-chave: Concreto de ultra alto desempenho. Homogeneização. Micromecânica. Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

Ultra-High-Performance Fiber Reinforced Concrete (UHPFRC) is a material that has exceptional compressive strength, durability and ductility. Therefore, it presents to be an alternative in the improvement of structural designs that have specific conditions of aggressiveness due to deleterious agents or high structural loads. UHPFRC is currently used predominantly in the rehabilitation and repair of structures. The large-scale application of UHPFRC faces barriers mainly due to the high cost and the lack of normative parameters to design requirements. The characterization of the mechanical behavior of UHPFRC depends primarily on the interaction between the phases that compose the mixture, that induce a requirement of a multiscale analysis to define the overall performance of the material. The present work aims to evaluate the accuracy of the principal micromechanical homogenization models to obtain the mechanical parameters of UHPFRC. This is done by comparing the results of the micromechanical approach with experimental results obtained from the literature. These models are implemented as UMAT user subroutines in ABAQUS® software, which is then used to performs evaluate of the mechanical behavior of a beam by using the finite element method. The homogenization models adopted in the present work are: Mori-Tanaka, Self Consistent, Voigt (upper limit) and Reuss (lower limit). The results obtained by Mori-Tanaka and Auto Consistent models indicate a difference for the experimental values of the Young modulus between 2% and 3%, while for the Poisson's ratio this difference is around 2%. On the other hand, the Voigt and Reuss models presented to be inaccurate to determine the Young modulus and should not be used to determine the Poisson's ratio due to the assumptions adopted in its formulation. The mechanical behavior of the beam denotes high stiffness, producing small deformations for high loads. furthermore, the inner stresses have been shown to vary linearly at a steel fiber volumetric fraction variation of 2% for the Mori-Tanaka model. Finally, the micromechanical approach can be applied to UHPFRC with a satisfactory degree of accuracy and can be used as a complement to lower costs in an extensive experimental dosing process.

Keywords: Ultra high-performance concrete. Homogenization. Micromechanics. Finite element method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Tecnologias de concreto associadas ao CUADRF	24
Figura 2 - Tipos de fibras utilizados no CUADRF	26
Figura 3 - Microestrutura do CUADRF	30
Figura 4 - Zona de transição entre matriz e agregado do CUADRF	31
Figura 5 – Microestrutura da fibra de aço após a fratura de uma amostra	32
Figura 6 - Diagrama tensão-deformação à compressão sem fibras	34
Figura 7 - Diagrama tensão-deformação à compressão com fibras.....	35
Figura 8 - Diagrama de tensão-deformação à tração idealizado do CUADRF	38
Figura 9 - Ponte para pedestres Sherbrooke na cidade de Quebec, Canadá, 1997	44
Figura 10 - Passarela Seonyu na Coréia Do Sul.....	45
Figura 11 - Escada helicoidal de CUADRF	47
Figura 12 - Museu de arte e centro cultural patrocinado pela fundação Louis Vuitton	48
Figura 13 - Compósito com microestrutura randômica e periódica	52
Figura 14 - Processo de homogeneização.....	53
Figura 15 - EVR na homogeneização de compósitos.....	55
Figura 16 - Condições de contorno em tensão homogênea aplicadas ao EVR	59
Figura 17 - Condições de contorno em deformação homogênea aplicadas ao EVR.....	60
Figura 18 - Determinação dos campos de tensão e deformação a partir de uma deformação ϵ^* prescrita em um contorno elipsoidal	63
Figura 19 - Método da inclusão equivalente	64
Figura 20 - Processo de homogeneização baseado no método da inclusão equivalente	65
Figura 21 - Parâmetros geométricos de uma inclusão elipsoidal	67
Figura 22 - Método de homogeneização de Mori-Tanaka.....	68
Figura 23 - Método de homogeneização Auto Consistente.....	70
Figura 24 - Diferentes tipos de elementos finitos.....	75
Figura 25 - Malha de elementos finitos	76
Figura 26 - Etapas de análise estrutural do software ABAQUS®.....	78
Figura 27 - Esquema de funcionamento de uma UMAT	81
Figura 28 - Procedimento de análise de uma viga de CUADRF no ABAQUS	83
Figura 29 - Estrutura básica de uma sub-rotina UMAT.....	85
Figura 30 - Definição do material de usuário	86
Figura 31 - Etapa de vinculação da sub-rotina UMAT ao ABAQUS®.....	87

Figura 32 - Seleção do arquivo da sub-rotina UMAT	87
Figura 33 - Execução da análise do modelo com sub-rotina UMAT.....	88
Figura 34 - Resultados experimentais, micromecânicos e por análise de regressão do módulo de elasticidade do CUADRF	91
Figura 35 - Resultados experimentais e micromecânicos do coeficiente de Poisson do CUADRF	93
Figura 36 - Análise micromecânica do módulo de elasticidade do CUADRF por fração volumétrica.....	95
Figura 37 - Análise micromecânica do coeficiente de Poisson do CUADRF por fração volumétrica.....	97
Figura 38 - Modelo geométrico do ensaio de flexão de quatro pontos	99
Figura 39 - Discretização da malha de elementos finitos do modelo numérico.....	100
Figura 40 - Deslocamento resultante da viga de CUADRF	101
Figura 41 - Tensões principais absolutas na viga de CUADRF	103
Figura 42 - Tensões principais absolutas ao longo da viga	104
Figura 43 - Tensões longitudinais (SS3) na viga de CUADRF	106
Figura 44 - Tensões longitudinais (SS3) ao longo da viga	107
Figura 45 - Diagrama força x flecha do CUADRF	109
Figura 46 - Forças de reação nos roletes durante o ensaio de flexão de quatro pontos.....	112

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Comparação CAD versus CUADRF	22
Tabela 2 - Fator de escala entre concreto armado e CUADRF	23
Tabela 3 - Composição típica do CUAD	23
Tabela 4 - Resultados experimentais de grupos de corpos de prova aos 28 dias	90
Tabela 5 - Diferença percentual dos resultados dos modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente para os resultados experimentais e por regressão do módulo de elasticidade do CUADRF	92
Tabela 6 - Diferença percentual dos resultados dos modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente para os resultados experimentais do coeficiente de Poisson do CUADRF	94
Tabela 7 - Variação percentual do módulo de elasticidade entre os limites de Voigt e Reuss..	96
Tabela 8 - Diferença percentual entre as tensões principais de tração das frações volumétricas de fibras de aço analisadas.....	105
Tabela 9 - Diferença percentual entre as tensões longitudinais de tração das frações volumétricas de fibras de aço analisadas.....	108
Tabela 10 - Comparação entre variáveis mecânicas do CAD, CUAD e CUADRF	110
Tabela 11 - Erro percentual máximo entre as forças de reações nos roletes para as frações volumétricas de fibras de aço analisadas	112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACI	<i>American Concrete Institute</i>
AFGC	<i>Association Française de Génie Civil</i>
AFNOR	<i>Association Française de Normalization</i>
ANSI	<i>American National Standards Institute</i>
CAA	Concreto Auto Adensável
CAD	Concreto de Alto Desempenho
CPR	Concreto de Pós Reativos
CRF	Concreto Reforçado com Fibras
CUAD	Concreto de Ultra Alto Desempenho
CUADRF	Concreto de Ultra Alto Desempenho Reforçado com Fibras
DSP	Densificado com Partículas Pequenas
EVR	Elemento de Volume Representativo
FHWA	<i>Federal Highway Administration</i>
ISO	<i>International Organization for Standardization</i>
JSCE	<i>Japan Society of Civil Engineering</i>
MDF	Livre de Macro Defeitos
MEF	Método dos Elementos Finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

$f'_{c,t}$	Resistência à compressão após t dias
t	Tempo em dias
f_c	Resistência à compressão aos 28 dias
f_{ct}	Resistência à tração
d_0	Menor dimensão válida para a mecânica dos meios contínuos
d_h	Dimensão característica das heterogeneidades de um compósito
l_{evr}	Dimensão característica do elemento de volume representativo
L	Dimensão característica do corpo
$\langle \sigma_m \rangle$	Tensão média na matriz
$\langle \sigma_i \rangle$	Tensão média na inclusão
$\langle \varepsilon_m \rangle$	Deformação média na matriz
$\langle \varepsilon_i \rangle$	Deformação média na inclusão
V_m	Volume de matriz
V_i	Volume de inclusão
V	Volume total
$\langle \sigma \rangle$	Tensão média
$\langle \varepsilon \rangle$	Deformação média
:	Contração dupla de tensores
\mathbb{C}	Tensor de rigidez
\mathbb{C}_m	Tensor de rigidez da matriz
\mathbb{C}_i	Tensor de rigidez da inclusão
\mathbb{D}	Tensor de flexibilidade
\mathbb{D}_m	Tensor de flexibilidade da matriz
\mathbb{D}_i	Tensor de flexibilidade da inclusão
f_i	Fração volumétrica da inclusão
f_m	Fração volumétrica da matriz
$T(x)$	Vetor força
Σ	Tensão Macroscópica
$n(x)$	Vetor normal
$u(x)$	Vetor deslocamento
E	Deformação macroscópica

\mathbb{A}_i	Tensor de concentração de tensão da inclusão
\mathbb{B}_i	Tensor de concentração de deformação da inclusão
\mathbb{A}_m	Tensor de concentração de tensão da matriz
\mathbb{B}_m	Tensor de concentração de deformação da matriz
$\boldsymbol{\varepsilon}^*$	Campo de deformação uniforme “Eigenstrain”
\mathbb{S}	Tensor de Eshelby
I	Tensor identidade
\mathbb{C}_0	Tensor de rigidez elástico do meio infinito
ν_m	Coefficiente de Poisson da matriz
d	Diâmetro da fibra
l	Comprimento da fibra
r	Razão de aspecto da fibra
E^0	Campo de deformação constante
\mathbb{A}_{dil}	Tensor de concentração diluído da inclusão
\mathbb{C}_{hom}^{MT}	Tensor constitutivo homogeneizado do modelo Mori-Tanaka
\mathbb{C}_{hom}^{AC}	Tensor constitutivo homogeneizado do modelo Auto Consistente
\mathbb{C}_{hom}^{Voigt}	Tensor constitutivo homogeneizado do modelo de Voigt
\mathbb{C}_{hom}^{Reuss}	Tensor constitutivo homogeneizado do modelo de Reuss
E_m	Módulo de elasticidade da matriz
E_i	Módulo de elasticidade da inclusão
ν_i	Coefficiente de Poisson da inclusão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	16
1.2	Delimitações do trabalho	17
1.3	Estrutura do trabalho	17
2	CONCRETO DE ULTRA ALTO DESEMPENHO REFORÇADO COM FIBRAS	19
2.1	Definições	19
2.2	Desenvolvimento	20
2.3	Generalidades	22
2.4	Influência das fibras	25
2.5	Dosagem	26
2.6	Microestrutura	29
2.7	Propriedades mecânicas	32
2.7.1	Resistência à compressão	32
2.7.1.1	<i>Diagrama tensão-deformação à compressão</i>	34
2.7.2	Resistência à tração	35
2.7.2.1	<i>Diagrama tensão-deformação à tração</i>	37
2.8	Durabilidade	38
2.9	Resistência ao fogo	40
2.10	Fadiga	42
2.11	Vantagens e Aplicações	43
2.12	Limitações	48
3	MICROMECAÂNICA	51
3.1	Teoria da homogeneização	53
3.2	Elemento de volume representativo (EVR)	54
3.3	Fundamentos da micromecânica	56
3.4	Problema de valor de contorno	59
3.5	Lema de Hill	60
3.6	Tensores de concentração de tensão e deformação	61
3.7	Método da inclusão equivalente de Eshelby	62
3.8	Tensor de Eshelby	66
3.9	Modelo de Mori-Tanaka	67
3.10	Modelo Auto Consistente	70

3.11	Limites de Voigt e Reuss.....	72
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	74
4.1	Descrição geral do software ABAQUS ®.....	77
4.2	Sub-rotina UMAT	79
4.2.1	<i>Linguagem Fortran</i>	<i>81</i>
4.3	Modelagem numérica de uma viga no software ABAQUS ®	82
4.4	Implementação e execução da sub-rotina UMAT no software ABAQUS®.....	84
5	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	89
5.1	Validação dos modelos micromecânicos	89
5.2	Homogeneização micromecânica dos parâmetros mecânicos do CUADRF	94
5.3	Simulação do comportamento macromecânico de uma viga de CUADRF submetida ao ensaio de flexão de quatro pontos	98
5.3.1	<i>Modelo numérico</i>	<i>98</i>
5.3.2	<i>Avaliação do comportamento macromecânico de uma viga de CUADRF</i>	<i>100</i>
5.3.2.1	<i>Deslocamento resultante</i>	<i>101</i>
5.3.2.2	<i>Tensões principais máximas absolutas</i>	<i>102</i>
5.3.2.3	<i>Tensões longitudinais (SS3)</i>	<i>105</i>
5.3.2.4	<i>Diagrama força x flecha</i>	<i>108</i>
5.3.2.5	<i>Análise comparativa entre CAD, CUAD e CUADRF</i>	<i>110</i>
5.3.3	<i>Erros associados ao modelo numérico proposto</i>	<i>112</i>
6	CONCLUSÕES.....	114
	REFERÊNCIAS	116
	APÊNDICE A – SUB-ROTINA UMAT MORI-TANAKA.....	128
	APÊNDICE B – SUB-ROTINA UMAT AUTO CONSISTENTE	133
	APÊNDICE C – SUB-ROTINA UMAT VOIGT	139
	APÊNDICE D – SUB-ROTINA UMAT REUSS.....	141

1 INTRODUÇÃO

A indústria da construção civil busca sistematicamente acompanhar o desenvolvimento tecnológico de outras áreas, assim, a eficiência e qualidade dos bens gerados por essa indústria se torna um fator fundamental para um cenário em que os custos decorridos possam ser minimizados concomitantemente com a elevação da vida útil e desempenho do bem produzido.

Neste contexto, a necessidade das obras de infraestrutura por um tipo de material com características de durabilidade e desempenho acima dos padrões oferecidos pelo concreto convencional, levou ao surgimento de materiais como o concreto de alto desempenho (CAD), e sua evolução, o concreto de ultra alto desempenho (CUAD), um compósito de matriz cimentícia que se apresenta como solução no desenvolvimento de estruturas em que o concreto convencional, armado, protendido ou até mesmo o CAD não atinja os requisitos de projeto necessários para a construção de estruturas mais seguras, duráveis, sustentáveis e esbeltas.

A superioridade do CUAD em relação ao CAD pode ser exemplificada por meio da resistência à compressão, propriedade geralmente utilizada para definir o material. O *American Concrete Institute* (ACI) define o CAD como um concreto cuja resistência característica mínima seja superior a 41 MPa (ACI, 1992). Já a *Association Française de Génie Civil* (AFGC) define o CUADRF como um material de matriz cimentícia cuja resistência à compressão seja superior a 150 MPa e inferior a 250 MPa (AFGC, 2013). Esta definição do CUAD está descrita em um documento de recomendações técnicas e não está vinculado a um órgão regulador normativo, por isso, este material apresenta diversas definições na literatura, com cada autor explicitando os principais critérios para se considerar um material cimentício como ultra alto resistente.

O CUAD, assim como o concreto convencional, é um compósito resultado da combinação em quantidades pré-definidas de materiais aglomerantes cimentícios, água e materiais inertes, e se diferencia por possuir em sua composição aditivos químicos como superplastificantes, adições minerais como a sílica ativa e eventualmente adição de fibras metálicas, sendo neste caso denominado concreto de ultra alto desempenho reforçado com fibras (CUADRF). A mistura entre esses materiais em proporções adequadas aliada a métodos de curas específicos como cura térmica sob pressão atmosférica ou sob pressão controlada proporciona características especiais como uma alta resistência a compressão, boa trabalhabilidade e elevada durabilidade.

O CUADRF pelas suas características tem sido alvo de inúmeras pesquisas acerca

das suas possíveis aplicações. Uma das aplicações mais promissoras é a reabilitação de elementos estruturais, por exemplo, pontes de elementos de superestrutura sujeitos a severas cargas ambientais e mecânicas, permitindo maior durabilidade (redução de manutenção) e proporcionando impermeabilização (BUTTIGNOL; SOUSA; BITTENCOURT, 2017). Além disso, este material atua aumentando a resistência da estrutura à ação dos esforços solicitantes e como proteção contra impactos, ação do fogo, desgaste devido à ação das intempéries, além de também agir como barreira de proteção impedindo o ingresso de agentes agressivos (BUTTIGNOL et al., 2018).

Novos materiais de alta tecnologia como o CUADRF são ideais para aplicações onde resistência à compressão e à tração, pequena espessura e alta capacidade de absorção de energia são necessárias (MÁCA; SOVJÁK; KONVALINKA, 2014). Além disso, por não necessitar de armadura para resistir os esforços de tração, o CUADRF se mostra uma boa opção arquitetônica em fachadas e pontes cuja disposição geométrica não viabilize a utilização de materiais convencionais. Em vista disso, seu comportamento mecânico deve ser adequadamente caracterizado para aproveitar plenamente suas propriedades únicas no projeto estrutural, possibilitando a construção de elementos estruturais mais leves, duráveis, eficientes e inovadores (BUTTIGNOL; SOUSA; BITTENCOURT, 2017).

Apesar de suas propriedades superiores, alguns fatores impedem a aplicação do CUADRF em larga escala na indústria como a variabilidade das diretrizes para projeto e construção de estruturas e a inviabilidade econômica devido ao custo dos insumos e técnicas de execução que envolvem tipos de curas específicos e exigem um alto controle de processos de fabricação e das propriedades dos materiais.

Além disso, os métodos de projeto para estruturas de CUADRF diferem das soluções tradicionais de concreto armado e/ou protendido (RESPLENDINO; TOUTLEMONDE, 2014). Logo, a maioria dos projetos estruturais fazem uso limitado das propriedades avançadas do CUADRF, baseando-se em resultados de pesquisa diretamente aplicáveis e princípios primários da engenharia (GRAYBEAL, 2009). Em vista disso, é necessário a caracterização adequada do comportamento do material a fim de aproveitar plenamente suas propriedades únicas em projeto.

Para que o CUADRF apresente as características desejáveis no estado endurecido, demanda-se que a microestrutura da matriz cimentícia heterogênea se apresente densa, de forma que os espaços intersticiais entre os grãos de cimento sejam os menores possíveis, resultando em um material de baixa porosidade. Assim, para que as propriedades do CUADRF sejam desenvolvidas é necessário que a microestrutura possua determinadas características resultantes

da interação entre os diferentes materiais que compõe a mistura, ou seja, uma microestrutura cuja fases constituintes atuem de maneira a potencializar a performance final do material em relação a suas propriedades mecânicas.

Em um compósito, o arranjo entre as diferentes fases ocorre de forma imperfeita, acarretando anisotropia e heterogeneidades. O comportamento e efeitos destas heterogeneidades sobre as propriedades e o desempenho global de um material é o principal objetivo das investigações micromecânicas (COSTA, 2017). Em vista disso, o estudo da microestrutura do CUADRF é fundamental para a caracterização de suas propriedades macroscópicas.

Para caracterizar o comportamento de um material pode-se usar técnicas de homogeneização que fornecem as propriedades efetivas do material em uma escala macroscópica a partir da análise microscópica das propriedades, já conhecidas, dos materiais constituintes. No presente trabalho, utiliza-se os modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente baseados na teoria do campo médio.

Em outra abordagem, as propriedades efetivas de compósitos podem ser estimadas por análises de limites teóricos previamente estabelecidos denominados limites variacionais. Os limites são obtidos por meio de princípios variacionais da teoria da elasticidade linear e então utilizados para indicar a faixa de valores que a propriedade efetiva está contida. No presente trabalho, utiliza-se os limites variacionais de Voigt e Reuss que fornecem respectivamente o limite superior e inferior da propriedade efetiva considerada.

1.1 Objetivos

Objetiva-se com este trabalho avaliar a eficácia de modelos micromecânicos na caracterização do desempenho mecânico do CUADRF.

O presente trabalho busca atingir os seguintes objetivos específicos:

- a) apresentar uma extensa revisão bibliográfica do CUADRF, caracterizando a influência do comportamento microestrutural nas propriedades macroscópicas do material;
- b) obter as propriedades mecânicas efetivas do CUADRF segundo a abordagem da teoria dos campos médios utilizando os modelos de Mori-Tanaka e Auto Consistente e segundo a abordagem de princípios variacionais por meio dos limites de Voigt e Reuss;
- c) validar os resultados obtidos mediante as abordagens citadas através da

- comparação com os resultados experimentais obtidos na literatura;
- d) avaliar o comportamento de uma viga de CUADRF simulada numericamente por elementos finitos para diversas frações volumétricas de fibras de aço incluídas no modelo numérico através de modelos micromecânicos implementados como sub-rotina de usuário (UMAT).

1.2 Delimitações do trabalho

No presente trabalho, para a aplicação das técnicas de homogeneização considerou-se o CUADRF como um material bifásico, com fibras, também denominadas de inclusões, imersas em um meio homogêneo denominado matriz.

No caso analisado, a matriz é constituída pela pasta de cimento e as inclusões são consideradas como fibras de aço cilíndricas curtas distribuídas randomicamente na matriz. Além disso, ambas as fases apresentam comportamento elástico, consideração necessária para a formulação dos modelos micromecânicos utilizados.

Além disso, o CUADRF possui dificuldades em relação a realização dos ensaios de caracterização mecânica devido a seus métodos específicos de cura com alta pressão e/ou alta temperatura, necessitando de equipamentos como câmaras de pressurização, prensas e estufas de autoclave. Assim, não dispondo de tal infraestrutura laboratorial recorreu-se a literatura vigente para utilizar uma base de dados experimentais comparativa.

1.3 Estrutura do trabalho

Na seção 1 é apresentado a introdução apresentando as características e o contexto que levou o surgimento do concreto de ultra alto desempenho reforçado com fibras, além da necessidade de se caracterizar o comportamento mecânico adequadamente por meio de uma abordagem capaz de representar com precisão o comportamento micromecânico do material. Além disso, são apresentados os objetivos da pesquisa e suas delimitações.

Na seção 2 é apresentado um extenso levantamento bibliográfico acerca do concreto de ultra alto desempenho reforçado com fibras, discutindo-se sobre suas fases e a influência de cada uma delas em suas propriedades. Expõe-se conceitos gerais, definições, desenvolvimento do material, limitações, aplicações, dosagem, principais propriedades mecânicas, microestrutura e influência das fibras.

Na seção 3 apresenta-se a teoria da homogeneização e seus princípios básicos que

norteiam o projeto de pesquisa. Posteriormente expõem-se os conceitos micromecânicos que instituem a relação entre o meio microscópico e macroscópico. Em seguida, apresenta-se o trabalho realizado por John D. Eshelby (1957) no qual os modelos de Mori-Tanaka e Auto Consistente se baseiam para posteriormente serem descritos e formulados. Por fim, apresenta-se os modelos de Voigt e Reuss que utilizam princípios variacionais para prever a propriedade efetiva do material.

A seção 4 apresenta uma explicação acerca da aplicação do método dos elementos finitos em elementos estruturais, assim como a utilização desse método por meio do software ABAQUS® e o processo de modelagem computacional adotado no método de pesquisa.

A seção 5 apresenta as aplicações numéricas realizadas. Avalia-se a eficiência dos modelos micromecânicos na obtenção dos parâmetros mecânicos e os resultados mecânicos provenientes da modelagem por elementos finitos de um elemento estrutural constituído por CUADRF. Os resultados oriundos da análise numérica por elementos finitos são avaliados conforme a variação da fração volumétrica de fibras de aço incluídas previamente nos modelos micromecânicos definidos na análise como sub-rotina de usuário (UMAT).

Na seção 6 são expostas as principais conclusões referentes ao trabalho e a conclusão geral baseada no objetivo proposto.

2 CONCRETO DE ULTRA ALTO DESEMPENHO REFORÇADO POR FIBRAS

2.1 Definições

As primeiras diretrizes técnicas na tentativa de padronizar o conceito, fabricação e desenvolvimento do CUAD foi publicado pela *Association Française de Génie Civil* (AFGC) no ano de 2002 (AFGC, 2002). Posteriormente, este documento foi revisado e atualizado para se tornar compatível com os Eurocódigos em seus âmbitos de aplicações (AFGC, 2013). Em seguida, o Japão por meio da *Japanese Society of Civil Engineerings* (JSCE) desenvolveu seu próprio documento com orientações técnicas e recomendações profissionais para projeto e construção de elementos estruturais a base de compósitos cimentícios de ultra alto desempenho reforçado com fibras (JSCE, 2008). Esses documentos não eram normativos, e suas orientações foram consideradas inadequadas, o que motivou em 2016 a publicação de normas técnicas pela *Association Française de Normalisation* (AFNOR) em busca de estabelecer especificações claras e processos padronizados para o CUAD (AFNOR, 2016). Essas normas francesas atualmente servem como base para o processo de dosagem e controle do processo de produção do CUAD.

Embora não exista definição precisa para o CAD e o CUAD, é reconhecido que esses materiais exibem combinação de atributos positivos, incluindo maior resistência, reduzida porosidade, alta fluidez e melhor resistência térmica (SOHAIL et al., 2017). Uma definição para o CAD é apresentada pelo *American Concrete Institute* (ACI) enquanto o CUAD, por ser um material relativamente desconhecido no âmbito da construção civil, não possui definição precisa, recorrendo-se a diversas fontes bibliográficas para uma análise uniforme das principais propriedades.

De acordo com o ACI (1992) o CAD é um concreto cuja a resistência característica mínima não deve ser inferior a 41 MPa. Além disso, para que um concreto seja considerado de alto desempenho ele deve atender requisitos especiais de desempenho e uniformidade que não podem ser atingidos com materiais e práticas de fabricação convencionais (ACI, 1992).

Já em relação ao CUAD, a AFGC, em seu documento oficial de recomendações técnicas para o CUAD, apresenta uma definição como um material de matriz de cimentícia com uma resistência à compressão característica entre 150 MPa e 250 MPa (AFGC, 2013). As recomendações japonesas da JSCE (2008) impõe o mesmo limite de resistência, porém especifica o tamanho máximo do agregado, a relação água-cimento e a quantidade de fibras. Apesar desse limite imposto, amostras de CUAD com resistência à compressão entre 130 MPa

e 150 MPa são considerados como CUAD de baixa resistência (AFGC, 2002).

De acordo com Richard e Cheyrezy (1995) o CUAD pode apresentar resistência à compressão variando de 150 MPa a 810 MPa dependendo dos métodos de fabricação e de cura. Já a resistência à tração média obtida pelo ensaio de resistência à tração direta para amostras sem adição de fibras situa-se na faixa entre 7 a 10 MPa (ZHOU et al., 2018). A adição de fibras de aço pode elevar o valor da resistência à tração em até 100% dependendo do teor e do tipo de fibra incorporada na mistura (HASSAN; JONES; MAHMUD, 2012).

O CUAD é descrito normalmente como um compósito de matriz cimentícia caracterizado por uma quantidade significativa de cimento (normalmente superior a 600 kg/m^3), agregados finos (inferior a 6 mm), aglutinantes (pozolana, cinza volante, sílica ativa, pó reativo) e baixa relação água / cimento ($a / c < 0,2$) (BUTTIGNOL; SOUSA; BITTENCOURT, 2017). Para conferir um comportamento dúctil ao CUAD pode-se incorporar fibras descontínuas devido a facilidade de inclusão na mistura e a melhora na capacidade de absorção de energia sob impacto ou explosão (YOO; BANTHIA, 2017). Neste caso, o material é denominado concreto de ultra alto desempenho reforçado com fibras (CUADRF).

Por não possuir em sua composição agregados graúdos alguns autores classificam o CUADRF como uma “argamassa”, porém o termo “concreto” é usualmente utilizado devido as características mecânicas superiores atingidos por esse material. A ausência de agregado graúdo é considerada um aspecto fundamental para a microestrutura densa e o desempenho devido a redução da heterogeneidade entre a matriz de cimento e o agregado (MANASA; RAMANA; PRADEEP, 2014).

2.2 Desenvolvimento

Nas últimas décadas um desenvolvimento notável no campo da tecnologia do concreto deu origem a concretos de ultra alta resistência com reforço de fibras (CUADRF). O conhecimento fundamental da influência da microestrutura no comportamento mecânico do material levou ao desenvolvimento de materiais à base de cimento Portland com propriedades extraordinárias como o Densificado com Partículas Pequenas (DSP), Livre de Macros Defeitos (MDF) e o Concreto de Pós Reativo (CPR). Todos esses materiais seguem os mesmos princípios de fabricação, almejando uma relação água/cimento inferior a 0,2 e denso empacotamento granular, eles se diferem apenas na maneira em que a densidade granular é alcançada (AÏTCIN, 1998).

O DSP é um tipo de material composto por uma elevada porcentagem de sílica ativa,

superplastificantes e agregados com alta resistência e pequeno diâmetro como o diabásio ou bauxita calcinada (CWIRZEN; PENTTALA; VORNANEN, 2008). A microestrutura densa alcançada pelo uso de partículas ultrafinas para absorver os vazios entre as partículas de cimento é responsável pelo termo DSP (RAHMAN; MOLYNEAUX; PATNAIKUNI, 2005). Os produtos fabricados com tecnologia DSP são apropriados para uso estrutural pois podem atingir resistências à compressão de 150 a 200 MPa (AÏTCIN, 1998).

O MDF é um material cuja principal característica é a ausência de descontinuidades na sua microestrutura como vazios relativamente grandes que normalmente estão presentes em compostos cimentícios (GUERRINI, 2000). O MDF difere-se do DSP por apresentar em sua composição um polímetro solúvel em água, como o álcool polivinílico, que atua melhorando o comportamento reológico de misturas de cimento com um baixo volume de água, obtendo um material mais resistente resultante da ligação cruzada entre cimento e o polímetro (RAHMAN; MOLYNEAUX; PATNAIKUNI, 2005). No entanto, aplicações práticas deste material são incomuns, pois observa-se uma diminuição das propriedades mecânicas após o contato com a água (CWIRZEN; PENTTALA; VORNANEN, 2008).

Devido ao uso de pó de sílica como aglutinante e de agregados muito finos o CUADRF é comumente denominado de concreto pós-reativo (SUGANO; KIMURA; SHIRAI, 2007). O CPR desenvolvido pelo francês Pierre Richards é o que mais se destaca dentre os materiais de cimento Portland de ultra alta resistência devido aos conceitos inovadores que apresenta. Este CPR chegou a atingir uma resistência à compressão de até 810 MPa graças a combinação entre cura térmica e sob pressão (RICHARD; CHEYREZY, 1995).

O CPR é definido como um material cimentício de ultra alta resistência com elevada homogeneidade, compacidade, ductilidade e microestrutura densa (LIVI, 2017). A denominação concreto de pós reativo é derivado do pó utilizado como mistura e da natureza reativa da sílica (RAHMAN; MOLYNEAUX; PATNAIKUNI, 2005).

A característica determinante para se considerar um material cimentício como CPR é a ausência de agregado graúdo com as partículas possuindo um tamanho médio de aproximadamente 0,2 mm (TUTIKIAN; ISAIA; HELENE, 2011). Em geral, o CPR é caracterizado pela utilização de adições minerais juntamente com cimento para um alto teor de aglomerantes, baixa relação água/aglomerantes, uso de pó de quartzo de pequeno diâmetro como agregados finos, fibras e aditivos superplastificantes (BENETON et al., 2014).

Segundo Aïtcin (1998) o desempenho mecânico dos CPR's é obtido por:

- a) aumento da homogeneidade em relação ao concreto convencional ou de alto desempenho, eliminando as partículas grossas pela limitação do tamanho máximo de partículas usadas em sua composição para 300 μm ;
- b) aumento da compactidade obtida pela otimização da mistura granular devido a proporções de partículas com diâmetros médios bem espaçados ao longo de toda a escala granulométrica;
- c) aplicação de pressão no material durante o endurecimento para compensar parcialmente a retração química do cimento;
- d) tratamento térmico adequado com o objetivo de refinar a microestrutura;
- e) aumento da ductilidade através da incorporação de fibras de aço selecionadas de acordo com tamanho e diâmetros adequados.

2.3 Generalidades

Assim como o CAD é visto como uma evolução tecnológica frente ao concreto convencional, o CPR, também conhecido como CUADRF, é uma evolução frente ao CAD. A Tabela 1 mostra uma comparação entre as propriedades mecânicas alcançadas por esses dois materiais.

Tabela 1 - Comparação CAD *versus* CUADRF

Propriedade Mecânica	CAD	CUADRF
Resistência à compressão (MPa)	60-100	180-200
Resistência à tração na flexão (MPa)	06-10	40-50
Energia de fratura (J/m^2)	140	1200-40000
Módulo de Young (GPa)	23-37	50-60

Fonte: adaptado de Lee e Chisholm (2005)

No CUADRF, que possui agregados finos com tamanho médio de 200 μm , as fibras de aço quando presentes se comportam como barras de reforço em um concreto convencional em um fator de escala de 100, portanto a matriz de CUAD reforçada com fibras funciona mecanicamente como um concreto armado (AÏTCIN, 2007). A Tabela 2 apresenta a comparação entre as dimensões características do agregado e do reforço do concreto armado e do CUADRF por um fator de escala de 100.

Tabela 2 - Fator de escala entre concreto armado e CUADRF

Material	Agregado Dimensão Máxima (mm)	Fibra/Armadura Diâmetro (mm)	Fibra/Armadura Comprimento (mm)
CUADRF	0.2	0.2	12
Concreto armado	20	20	1200

Fonte: adaptado de Aïtcin (2007)

Alguns CUADRF's são desenvolvidos com materiais locais ou patenteados em diferentes partes do mundo que conferem uma dosagem otimizada própria. O composto Nanodur® 5941 utilizado no CUADRF pela empresa Sudholt Wassermann permite a produção com agregados convencionais em usinas de mistura de concreto e o produto TAKTL® utilizado pela empresa britânica OGM especializada na concepção e fornecimento de elementos de fachadas arquitetônicas, permite a mudança de brilho, textura e cor (TORREGROSA, 2013).

O conceito de CPR se difundiu e deu origem a CUADRF comerciais hoje disponíveis no setor da construção civil como o Ductal®. Além disso, existem outros tipos de CUADRF como o BSI® desenvolvido em conjunto pelas empresas Eiffage e Sika e o BCV® desenvolvido pela fabricante de cimento Vicat em conjunto com a empresa Vinci. O Ductal® é a principal tecnologia utilizada na Ásia, Austrália e América do Norte enquanto na Europa Ocidental utiliza-se o BSI® e o Ductal® (AFGC, 2013).

A tecnologia Ductal® foi desenvolvida pelos esforços combinados de três empresas de ramos diferentes da construção civil, a Lafarge, fabricante de materiais de construção, Bouygues, contratante, e Rhodia, fornecedora de aditivos químicos.(JUSTS et al., 2011). Este material tem diferentes composições de material dependendo da aplicação particular. A Tabela 3 apresenta uma composição típica do Ductal®.

Tabela 3 - Composição típica do CUAD

Material	Quantidade (kg/m ³)	Porcentagem por volume
Cimento Portland	712	28.5
Areia fina	1020	40.8
Sílica ativa	231	9.3
Pó de quartzo	211	8.4
Superplastificante	30.7	1.2
Acelerador	30.0	1.2
Fibras de aço	156	6.2
Água	109	4.4

Fonte: Graybeal (2006)

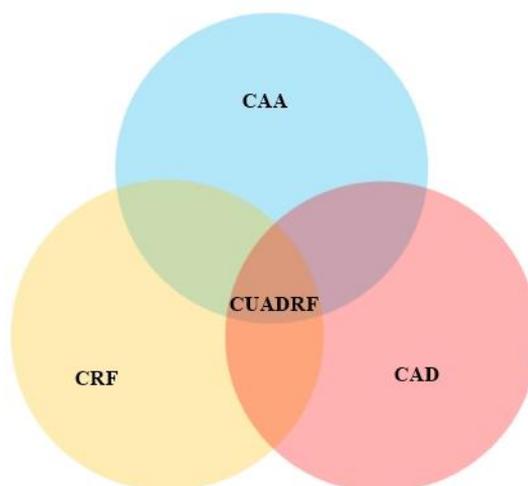
O Ductal® patenteadado pela empresa Lafarge baseia-se nos princípios de fabricação de um CPR. O processo tecnológico adotado minimiza heterogeneidades como microfissuras e

poros, permitindo alcançar uma maior porcentagem do potencial de capacidade máxima de carga definida por seus componentes e aprimorar as propriedades de durabilidade. (BEHLOUL et al., 2004). Além disso, a tecnologia Ductal® incorpora fibras em quantidades adequadas para garantir um nível substancial de ductilidade e resistência à tração adequada, e, além disso, está baseada nos princípios de homogeneidade e compacidade granular característico do CPR.

Há vários tipos de Ductal® de acordo com o tipo de fibra utilizada, o tratamento de cura adotado e o modo de preparo que é ajustado de acordo com os requisitos técnicos e econômicos exigidos para cada aplicação. O uso de diferentes tipos de fibras depende da finalidade final do material, seja estrutural ou arquitetônico, e das condições de exposição do material. Para o Ductal® essas fibras podem ser feitas de aço (Ductal® - FM), de material orgânico (Ductal® - FO) ou combinação de aço e material orgânico (Ductal® - AF) (BEHLOUL et al., 2004).

Essencialmente os diferentes tipos de CUADRF estão correlacionados, pois todos incorporam os avanços da combinação em maior ou menor grau de três tecnologias de concreto: Concretos autoadensáveis (CAA), concretos reforçados por fibras (CRF) e concretos de alto desempenho (CAD) como mostra a Figura 1 (TORREGROSA, 2013).

Figura 1 - Tecnologias de concreto associadas ao CUADRF



Fonte: Torregrossa (2013)

Segundo Guerrini (2000) o desenvolvimentos destes materiais foram possíveis devido ao:

- a) desenvolvimento de novos sistemas de reforço;
- b) estudo da interface fibra-matriz e a consequente otimização de propriedades;

- c) desenvolvimento de matrizes cimentícias de alto desempenho que apresentam propriedades microestruturais mais resistentes e duráveis;
- d) aperfeiçoamento em técnicas de processamento que permitem obter materiais com alta tenacidade e baixa porosidade.

2.4 Influência das fibras

Para o CUADRF, a caracterização da interação entre a matriz e as fibras é de significativa importância visto que uma maior resistência à compressão em uma matriz de ultra alta resistência tende a aumentar a fragilidade (LEE; KANG; KIM, 2010). A distribuição das fibras tem um efeito significativo nas propriedades mecânicas do CUADRF, em particular, o comportamento mecânico pode ser afetado pela orientação, comprimento, forma e interação com partículas agregadas (BARNETT et al., 2010).

Yoo e Banthia (2017) constataram que a adição de fibras de aço melhora o comportamento a compressão, tração e flexão conforme o aumento da quantidade de fibras e a adição de fibras de aço longas e retas aumenta a capacidade de absorção de energia e a resistência ao impacto na tração e flexão. Tal comportamento depende da adição de fibras em quantidades adequadas na matriz, que além de melhorar ligeiramente a resistência à compressão, leva a um comportamento pseudo-plástico à tração, resultante do processo de multi-microfissuramento (SPASOJEVIĆ, 2008). Este processo ocorre devido a deformação ou arrancamento da fibra que provoca microfissuras na matriz e um comportamento de endurecimento por deformação.

A investigação microestrutural indica uma microestrutura muito densa da pasta de cimento, especialmente ao redor de partículas agregadas e fibras de aço (EL-DIEB, 2009). Além disso, a adição de microfibras em um sistema híbrido resulta na eficiência do processo de endurecimento por deformação e do comportamento à multi-fissuração (PARK et al., 2012). Já a adição de fibra de polipropileno resulta na formação de um filme de água na interface fibra-matriz, tornando a resistência da ligação muito fraca (EL-DIEB, 2009).

Como o CUADRF não inclui agregados graúdos e exibe alta fluidez, a orientação e a dispersão das fibras de aço podem depender da direção do fluxo devido à sequência de lançamento ou à forma da estrutura (YANG; JOH; KIM, 2010). Para uma distribuição uniforme das fibras é necessário que o material fresco tenha fluidez, capacidade de passagem por obstáculos e resistência a segregação no dia em que é fabricado devido a maior sensibilidade às mudanças de temperatura e umidade relativa (AL-AZZAWI, 2018).

As fibras de aço são o tipo mais comum de fibras utilizado em misturas de CUADRF devido à sua alta resistência, elevada resistência em ambientes alcalinos e elevado módulo de elasticidade (BUTTIGNOL; SOUSA; BITTENCOURT, 2017). Estas fibras podem ser do tipo com ponta de gancho, torcidas e retas longas e curtas. No entanto, para aplicações em que o material está sujeito a possibilidade de incêndios, incorpora-se fibras de polipropileno para evitar uma fragmentação explosiva. Em caso de incêndio, o vapor formado dentro do material durante o aquecimento é liberado no ambiente externo através dos poros formados no ponto de fusão da fibra de polipropileno, em torno de 170 ° C (OZAWA et al., 2019). Os principais tipos de fibras utilizados estão apresentados na Figura 2.

Figura 2 - Tipos de fibras utilizados no CUADRF



Fonte: Buttignol, Sousa e Bittencourt (2017)

2.5 Dosagem

A dosagem é a seleção de matérias-primas em proporções ideais para fornecer a composição mais econômica para o material com as propriedades necessárias no estado fresco e endurecido para aplicações específicas. Para o CUADRF o processo de dosagem visa obter uma matriz cimentícia densamente compactada através da otimização da microestrutura, resultando em um material com boa trabalhabilidade no estado fresco e com propriedades mecânicas e de durabilidade avançadas no estado endurecido.

Em vista disso, De Larrard e Sedran (1994) propuseram um modelo linear de densidade de empacotamento que demonstrou bom desempenho na previsão de proporções ótimas de materiais cimentícios superplastificados. No entanto, a natureza linear deste modelo limitava a capacidade de abordar a relação entre proporções de materiais e densidade de empacotamento. Em vista disso, o modelo foi atualizado considerando a teoria da densidade virtual para um novo modelo denominado como modelo de suspensão sólida. O novo modelo permite uma produção de uma argamassa fluida com relação água/aglutinante de 0,14, uma matriz de baixa porosidade e uma resistência à compressão de 236 MPa com uma cura térmica de 4 dias a 90 ° C (DE LARRARD; SEDRAN, 1994).

Posteriormente, este modelo foi otimizado com base nos conceitos de densidade de empacotamento virtual e índice de compactação para um modelo denominado modelo de empacotamento compressível, que tinha como objetivo prever a densidade de empacotamento de uma mistura polidispersa (DE LARRARD; SEDRAN, 2002). No entanto, todos esses métodos de mistura demonstraram dificuldade em determinar a fração de empacotamento de materiais muito finos ou suas combinações na mistura, limitando sua aplicação em misturas de CUADRF (YU; SPIESZ; BROUWERS, 2014)

Assim, outra abordagem considerando a distribuição integral de tamanho das partículas graduadas continuamente proposta por Andreasen e Andersen (1930) expressa que uma porosidade mínima está diretamente relacionada a uma distribuição ótima de tamanho das partículas dos materiais aplicados na mistura. Utilizando o modelo de empacotamento de partículas proposto por Andreasen e Andersen em conjunto com uma baixa quantidade de aglutinante (650 kg/m³) e uma adição de 2,5 % de fibras de aço em volume total é possível produzir um material com matriz densa e homogênea com uma resistência à compressão de 150 MPa (YU; SPIESZ; BROUWERS, 2014). Além disso, a otimização gradual da densidade de empacotamento de partículas pode ser alcançada através da abordagem da demanda de água de superplastificante para alcançar a trabalhabilidade desejada, dependendo da proporção água / pó (RAMGE; LOHAUS, 2010).

É observado que durante a aplicação de forças de compressão no material, tensões de tração e cisalhamento internas aparecem na interface matriz/agregado, gerando fissuras na matriz com tamanho diretamente proporcional ao diâmetro do agregado (RICHARD; CHEYREZY, 1995). Dessa forma, a redução no tamanho do agregado está diretamente relacionada a uma grande redução no tamanho das microfissuras. Por isso, para um material denso o processo de dosagem deve fornecer um excesso de materiais finos para cada nível de tamanho de grão de forma a garantir que a configuração granular das partículas grossas não

produzam vazios intersticiais no material (RAMGE; LOHAUS, 2010).

A influência da distribuição das partículas também pode ser observado no procedimento de mistura do concreto ecológico produzido por Fennis, Walraven e Den Uijl (2009), que, baseado nos conceitos da tecnologia de empacotamento de partículas, mostra que o aumento da eficiência da resistência pode ser equilibrado com a redução da quantidade de cimento na mistura. Isto acontece devido à baixa relação água/cimento que torna o grau de hidratação do CUADRF relativamente baixo. Portanto, substituir o cimento não hidratado por materiais mais resistentes e baratos como calcário e pó de quartzo pode melhorar a eficiência da mistura. É observado que o uso de calcário e pó de quartzo em substituição ao cimento promove uma melhora significativa na trabalhabilidade e na eficiência das fibras de aço, além de redução da quantidade de micro sílica, produzindo vantagens econômicas e ambientais (YU; SPIESZ; BROUWERS, 2014).

Além disso, modelos e simulações auxiliados por computador também foram propostos para o projeto de mistura do CUADRF. Estes modelos são desenvolvidos considerando todas as variáveis necessárias no processo de dosagem, como tamanho, forma e densidade de partículas, em busca de uma densidade de empacotamento mais elevada. Com a evolução do modelo estrutural e o método de cálculo utilizado, pode ser possível compor misturas otimizadas com base apenas nos dados específicos das matérias-primas (GEISENHANSLÜKE; SCHMIDT, 2004). Um exemplo dessa abordagem é a aplicação de um sistema de inferência neuro-difusa adaptável para investigar os diversos parâmetros de mistura que afetam a resistência à compressão do CUADRF (TAGHADDOS et al., 2004).

Em outra abordagem, um modelo estatístico utilizando a metodologia de superfície de resposta foi desenvolvido por Ghafari, Costa e Júlio (2014) para prever a máxima resistência à flexão de uma mistura autoadensável a partir de teores variáveis de fibras de aço. Os resultados demonstram que o uso de 1,75% em volume de microfibras de aço híbrida é a porcentagem ideal para que o material atenda ao valor limite de critérios de autoadensabilidade da mistura.

Além disso, diversas pesquisas foram realizadas com o objetivo de otimizar a proporção da mistura do CUADRF. Park et al. (2012) concluíram que o CUADRF produzido com macrofibras com geometria retorcida fornece o melhor desempenho em relação à resistência pós-fissuração, capacidade de deformação e comportamento de multi-microfissuração. Ghafari et al. (2014) conduziram um estudo experimental que verificou que a adição de 3% em peso de nanosílica leva a uma redução nos poros capilares e a um refinamento da estrutura dos poros, produzindo uma matriz mais densa e homogênea. Ademais, a otimização numérica de um método analítico inovador, baseado na abordagem estatística de projeto de

mistura, indicou que é possível projetar uma mistura que atinja uma resistência à compressão superior a 150 MPa, com significativa substituição do cimento por sílica ativa e pó de quartzo (GHAFARI; COSTA; JÚLIO, 2015).

Mesmos com os diversos modelos de otimização de misturas, a ampla aplicação do CUADRF na indústria da construção civil é restringida principalmente devido ao custo de produção derivado do custo de obtenção da matéria-prima. Assim, a substituição parcial do cimento por alguns subprodutos industriais como a escória granulada de alto-forno e a sílica ativa procuram baratear seu custo concomitantemente com a manutenção das propriedades mecânicas e de durabilidade. Por exemplo, El-dieb (2009) produziu CUADRF com cerca de 17,5% de sílica ativa do total de materiais cimentícios presente na mistura, resultando em um material com alta tenacidade à fratura e conseqüentemente uso potencial em estruturas de concreto sujeitas a abalos sísmicos. Hassan, Jones e Mahmud (2012) utilizaram cimento, escória granulada de alto forno e sílica ativa na fração volumétrica total de materiais cimentícios de respectivamente 55%, 35%, 10% para gerar um material com resistência à compressão de 150 MPa aos 28 dias. Além disso, a adição de 20% do total da fração volumétrica de materiais cimentícios de sílica ativa densificada contendo mais de 92% de dióxido de silício (SiO_2) contribuiu para o alcance de uma resistência à compressão de 170 MPa e uma resistência à tração de 15,3 MPa (TAYEH et al., 2012).

2.6 Microestrutura

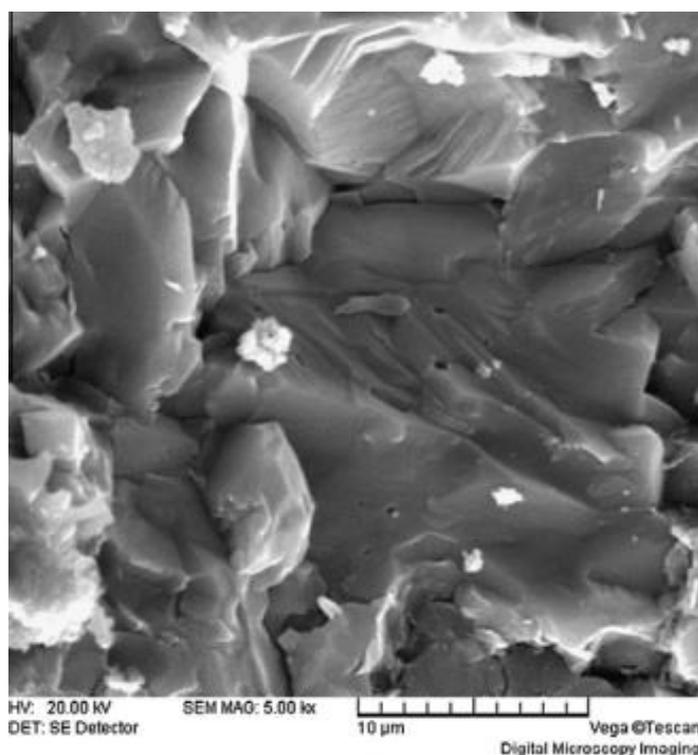
O CUADRF é um material que possui uma microestrutura muito densa e uniforme, responsável pelas principais propriedades mecânicas, arquitetônicas e de durabilidade deste material. Estas características microestruturais são resultados de um empacotamento de partículas sólidas, de reações de hidratação e pozolânicas em materiais cimentícios e da melhoria da zona de transição interfacial entre agregados e matriz (SHI et al., 2015).

A densidade de empacotamento de partículas sólidas, cuja otimização depende do processo de escolhas dos materiais e do projeto de mistura adotado, possui significativa influência na porosidade do material durante o processo de hidratação. Em geral, conforme os produtos são formados no processo de hidratação, os poros de gel aumentam enquanto os poros capilares tendem a diminuir. É relatado que para o CUADRF os poros capilares se tornam descontínuos para uma hidratação de apenas 26% do cimento, enquanto para o CAD é necessário uma hidratação de aproximadamente 54% (BONNEAU et al., 2000).

A microestrutura do CUADRF é composta por agregados e a fase compacta da

matriz, onde observa-se produtos de hidratação, partículas de clínquer de cimento não hidratadas e partículas de pó (WANG et al., 2015). A observação da microestrutura por microscópio eletrônico por varredura (Figura 3) mostra que a estrutura densa da pasta endurecida pode ser atribuída à baixa relação água/cimento (a/c), à hidratação do cimento, por meio da formação de gel C-S-H, e ao efeito pozolânico da sílica ativa e da escória granulada de alto forno (WANG et al., 2012). A baixa relação a/c acompanhada por um regime de cura por temperatura elevada favorecem as reações pozolânicas da mistura, que convertem os cristais fracos de CH (portlandita), produzidas na hidratação, em cristais fortes de C-S-H (silicato de cálcio hidratado) (REDA; SHRIVE; GILLOTT, 1999). Além disso, diferentemente do C-S-H de baixa densidade que predomina no concreto convencional, o C-S-H do CUADRF possui alta densidade, caracterizada por elevada rigidez e dureza (SHI et al., 2015).

Figura 3 - Microestrutura do CUADRF

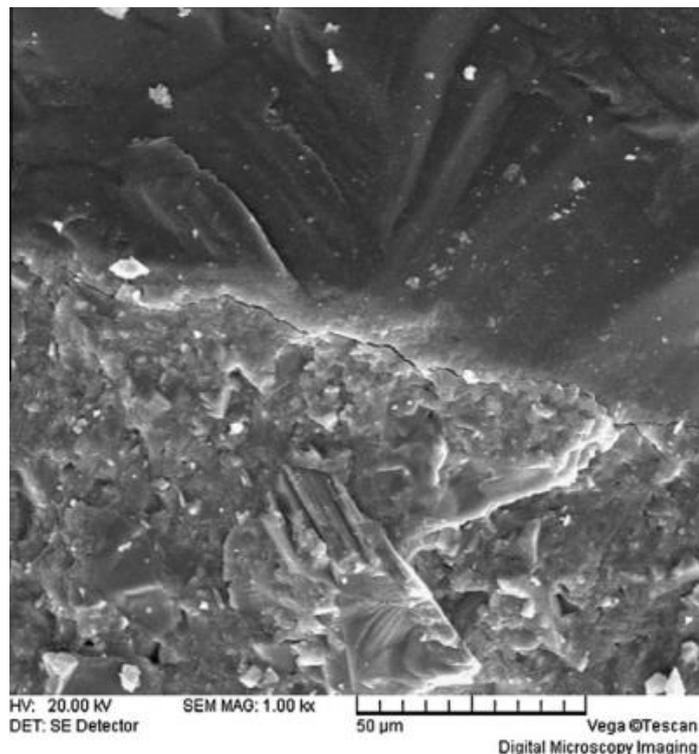


Fonte: Wang et al. (2012)

A zona de transição interfacial entre matriz e agregado para o concreto convencional apresenta geralmente alta porosidade e alto teor de portlandita. Já para o CUADRF, essa zona apresenta-se compacta, sem porosidade aparente (Figura 4) (WANG et al., 2012). Esta zona observada nas misturas de CUADRF possui espessura muito menor em comparação com as zonas observadas para o CAD e para o concreto convencional, indicando uma ligação bem desenvolvida entre a pasta de cimento e a superfície do agregado (REDA; SHRIVE; GILLOTT, 1999).

A resistência na ligação deve-se principalmente a capacidade das partículas extremamente finas de sílica ativa têm de estarem localizadas muito próximas às partículas de agregados, como na interface pasta-agregado que geralmente é a parte mais fraca da microestrutura (AL-AZZAWI, 2018). Além disso, é observado que a inclusão de nanosílica também pode melhorar significativamente a zona de transição interfacial entre os agregados e a pasta de cimento (GHAFARI et al., 2014).

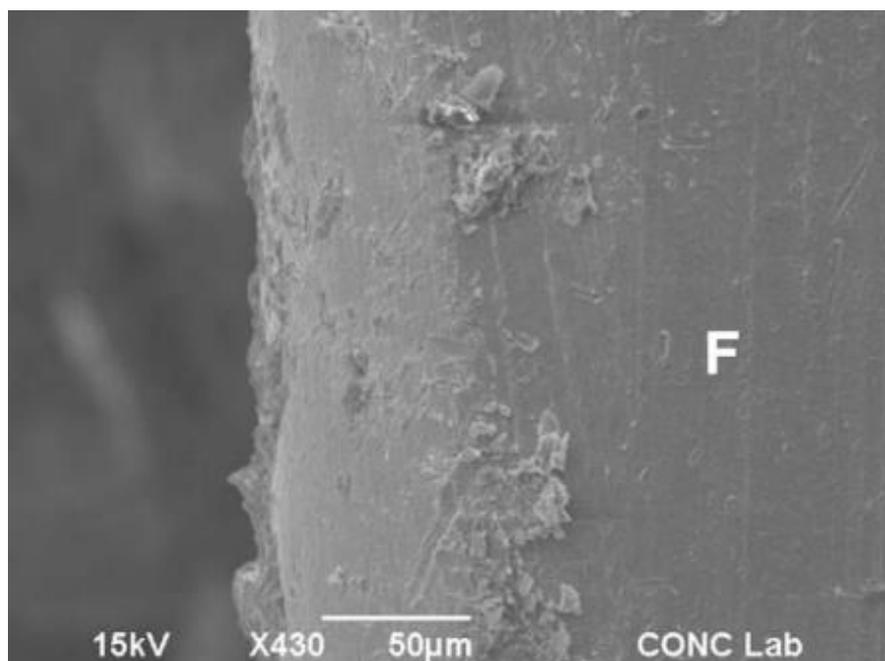
Figura 4 - Zona de transição entre matriz e agregado do CUADRF



Fonte: Wang et al. (2012)

Outra zona de transição que influencia diretamente nas propriedades mecânicas do CUADRF é a interface entre a pasta de cimento e as fibras de aço. Observando a microestrutura em torno das partículas de fibras após a fratura de uma amostra (Figura 5), constata-se resíduos da pasta de cimento em torno da fibra arrancada, indicando uma ligação muito forte (EL-DIEB, 2009). A resistência da ligação na zona de contato entre a fibra de aço e a pasta de cimento é resultado da superfície áspera da fibra de aço, que provoca uma densa malha de microfissuras na superfície de contato durante o processo de arrancamento da fibra (SMARZEWSKI; BARNAT-HUNEK, 2018). Assim, as fibras fornecem um mecanismo de consumo de energia (endurecimento) no material, por meio de um processo de extração que não existe no concreto convencional (EL-DIEB, 2009).

Figura 5 – Microestrutura da fibra de aço após a fratura de uma amostra



Fonte: El-dieb (2009)

2.7 Propriedades mecânicas

2.7.1 Resistência à compressão

A resistência à compressão é a propriedade mais importante a ser determinada em um projeto estrutural que utilize compósitos de matriz cimentícia. Para o CUADRF, frequentemente utiliza-se uma versão modificada da norma ASTM C39 – Método de teste padrão para resistência à compressão de amostras cilíndricas de concreto (ASTM, 1994). O ensaio é modificado elevando a taxa de carregamento de 0,24 MPa/segundo para 1 MPa/segundo para adequar a alta resistência à compressão apresentada pelo CUADRF a duração do ensaio (GRAYBEAL; STONE, 2012).

A resistência à compressão típica do CUADRF apresenta-se na faixa de 150 a 250 MPa (AFGC, 2013), embora procedimentos de fabricação específicos, materiais especiais e métodos de cura sob pressão e/ou temperatura possam elevar esse valor significativamente. Ensaio realizado por Richard e Cheyrezy (1995) utilizaram agregados de aço, pressurização de 50 MPa e um regime de cura térmica acima de 250 °C para atingir uma surpreendente resistência à compressão de 810 MPa. Em geral, o início e a taxa posterior de ganho de resistência depende dos materiais constituintes, dosagem e condições de cura, embora fatores relativos ao controle dos ensaios possam gerar resultados divergentes (RUSSEL, G;

GRAYBEAL, 2013).

A influência do regime de cura e da aplicação de uma pressão de compactação é de extrema importância para que a matriz de ultra alta resistência supere a faixa habitual de 150 a 250 MPa. Em geral, a resistência à compressão em corpos de prova aumenta em função do tempo e temperatura de cura. É verificado que para atingir um nível de resistência considerável, corpos de prova submetidos a cura à temperatura ambiente exigem um tempo de cura significativamente maior em comparação a corpos de prova sujeitos à cura em temperatura elevada (GRAYBEAL; STONE, 2012). Em relação a compactação sob pressão, é relatado que a aplicação de uma pressão de compactação de 100 MPa pode conduzir a uma resistência à compressão de 475 MPa, embora a aplicação de uma pressão de compactação de 25 MPa seja suficiente para eliminar grandes espaços de ar e água livre das amostras (IPEK et al., 2011).

Outro fator que influencia a determinação da resistência à compressão é o tamanho e a geometria das amostras de ensaio que se relacionam diretamente com a densidade microestrutural do material e podem variar em diversas partes do mundo. Amostras no formato de cubo exibem resistências maiores que amostras cilíndricas devido à sua menor relação de aspecto e ao confinamento lateral proporcionalmente maior fornecido pelas placas da máquina de ensaio (RUSSEL, G; GRAYBEAL, 2013). Além disso, observa-se que normalmente amostras maiores exibem menores valores de resistência à compressão como por exemplo nos experimentos relatados por Zhang et al. (2017), em que um cubo de 100 mm de aresta possuía uma resistência à compressão 20% menor do que um cubo de 50 mm de aresta. Tal discrepância entre as amostras resulta da maior probabilidade de se encontrar heterogeneidades microestruturais em amostras maiores (GRAYBEAL, 2006).

Apesar de influenciar diretamente a maioria das propriedades e o comportamento, as fibras melhoram apenas ligeiramente a resistência a compressão do concreto do CUADRF (HASSAN; JONES; MAHMUD, 2012). No entanto, quando o CUADRF atinge seu limite de resistência à compressão a ruptura não é explosiva como na maioria dos concretos convencionais devido aos efeitos restritivos e confinantes das fibras (GRAYBEAL, 2006).

As condições de cura podem apresentar grande variabilidade ao longo dos ensaios, inviabilizando a análise do comportamento de ganho de resistência à compressão do CUADRF ao longo do tempo. Graybeal (2006) determinou esse ganho de resistência à compressão utilizando uma análise de regressão de dados para uma mistura específica testada sob condições de cura padrões laboratoriais para gerar a Equação (2.1), que determina o ganho de resistência à compressão em qualquer momento após 0,9 dias.

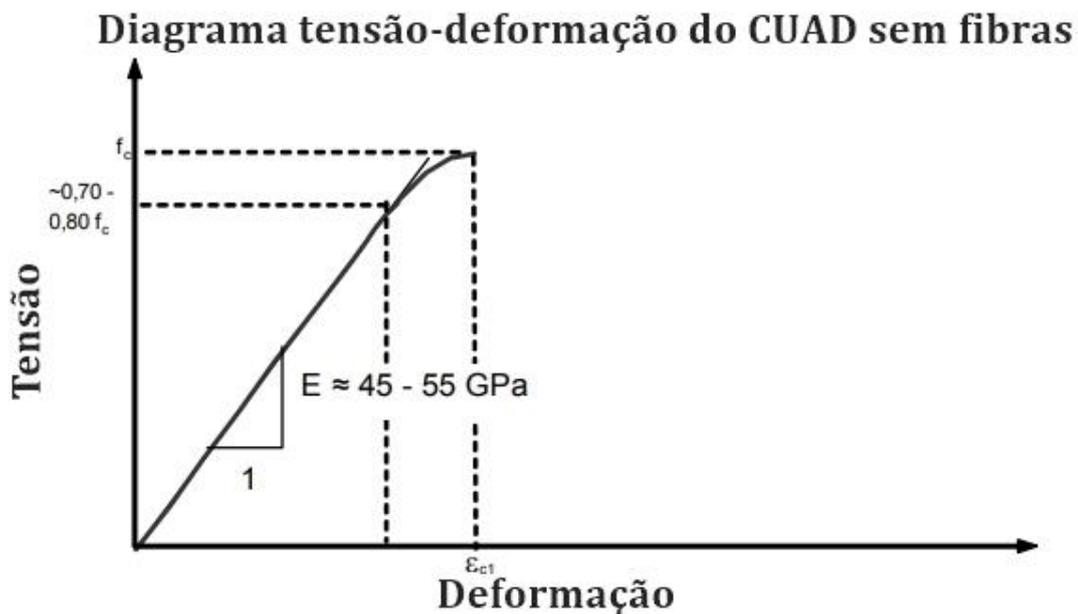
$$f'_{c,t} = f_c \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{t - 0.9}{3} \right)^{0.6} \right) \right] \quad (2.1)$$

Onde $f'_{c,t}$ é a resistência à compressão após t dias, f_c é a resistência à compressão após 28 dias e t é o tempo em dias após o processo de moldagem da amostra.

2.7.1.1 Diagrama tensão-deformação à compressão

A relação tensão-deformação uniaxial de compressão do concreto é uma das relações constitutivas mais básica e importantes em projetos estruturais. O CUAD mostra um comportamento elástico linear até cerca de 70% a 80% da resistência à compressão e na ausência de fibras o modo de ruptura é explosivo, ou seja, não há continuidade descendente do diagrama de tensão-deformação mostrado na Figura 6 (FEHLING; LEUTBECHER; BUNJE, 2004).

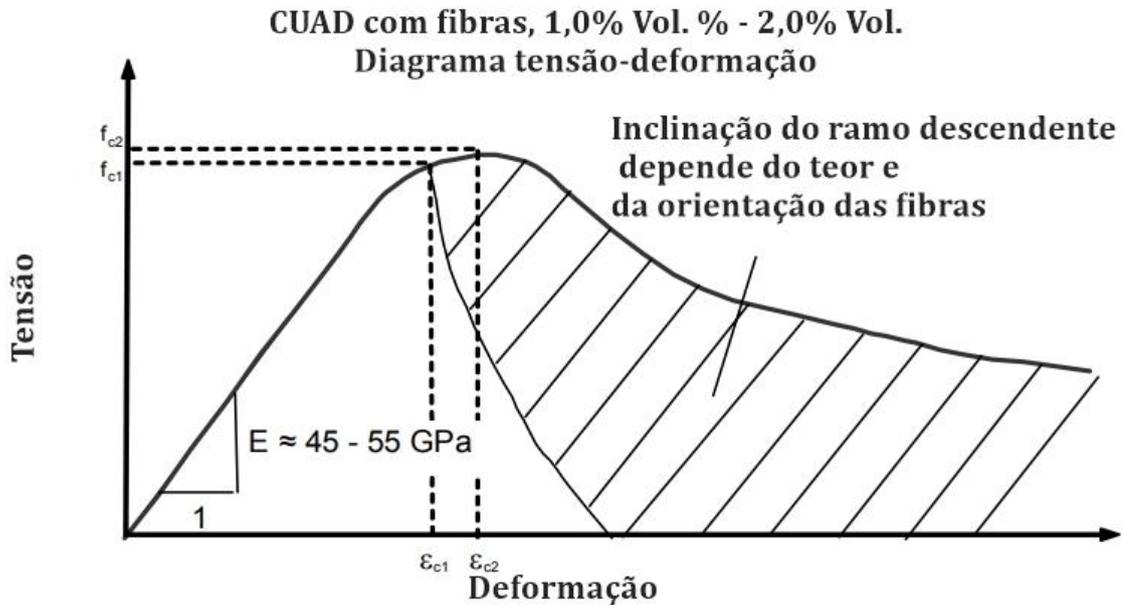
Figura 6 - Diagrama tensão-deformação à compressão sem fibras



Fonte: Adaptado de Fehling, Leutbecher e Bunje (2004)

Para o CUAD com fibras, uma ramificação descendente é desenvolvida como exemplificado na Figura 7. Esta ramificação ocorre em consequência do mecanismo de transferência de tensão que as fibras podem realizar através das fissuras do concreto. A inclinação do ramo descendente depende do teor, geometria, rigidez, orientação e comprimento da fibra em relação ao tamanho máximo do agregado (FEHLING; LEUTBECHER; BUNJE, 2004).

Figura 7 - Diagrama tensão-deformação à compressão com fibras



Fonte: Adaptado de Fehling, Leutbecher e Bunje (2004)

2.7.2 Resistência à tração

Do mesmo modo que a resistência à compressão, a resistência à tração é uma das propriedades críticas na concepção de um projeto estrutural. A análise da resistência à tração do CUADRF depende primordialmente dos conhecimentos da tecnologia desenvolvida para concretos reforçados com fibras (CRF), pois as fibras exercem influência significativa no comportamento do material submetido ao esforço de tração. Na ausência de fibras de aço o CUAD apresenta uma ruína frágil, sem a presença de grandes deformações, enquanto a ruína do CUAD combinado com fibras de aço ocorre apenas após extensa deformação plástica (EL-DIN et al., 2016).

No entanto, o comportamento à tração do CUADRF difere do CRF por ser caracterizado por uma fase de multi-microfissuração e apresentar significativa tenacidade à fratura, assim, os modelos de determinação da resistência à tração do CRF não podem ser aplicados diretamente (SPASOJEVIĆ, 2008). Recomendações da AFGC (2002) propõem que seja realizado o ensaio de tração direta ou ensaio de tração à flexão para a caracterização do material e que sejam aplicados fatores corretivos a cada procedimento proposto para gerar leis constitutivas intrínsecas que não dependam do tamanho do corpo de prova ou do tipo de ensaio realizado.

Em um ensaio de tração direta, o corpo de prova é submetido a tensão uniaxial

assim, a resposta à tração pode ser caracterizada diretamente medindo a carga e a deformação. Porém, o ensaio à tração direta dificilmente é realizado pois é de difícil execução, por esse motivo o ensaio de tração na flexão é normalmente executado. Tal ensaio inclui suposições mecânicas que não são consistentes com o comportamento do CUADRF, que endurece por deformação e, portanto, pode superestimar os valores da resistência à tração (RUSSEL, G; GRAYBEAL, 2013). Portanto, para a análise fidedigna dos resultados são aplicados fatores de correção que variam dependendo da profundidade da seção transversal, em milímetros, em comparação com uma profundidade de referência de 100 mm (AFGC, 2002).

Os ensaios disponíveis para avaliar as propriedades mecânicas de tração são limitados e imprecisos, tornando-se um obstáculo para projetistas considerando a importância dessas propriedades nos elementos estruturais. Nos ensaios, as propriedades de tração são influenciadas pelo modo de fabricação e pela geometria do corpo de prova e dependem significativamente da distribuição das fibras que podem ocasionalmente causar uma distribuição não homogênea das propriedades no elemento. (HABEL, 2004).

Ensaio laboratoriais indicam que elementos fabricados com CUADRF exibem uma resistência à tração significativamente maior do que elementos fabricados com concreto convencional (GRAYBEAL, 2006). Além disso, dependendo do teor de fibra de aço, o CUADRF pode apresentar resistência à tração quase 100% superior do que na ausência de fibras, permitindo projetos mais seguros contra ruptura por cisalhamento (HASSAN; JONES; MAHMUD, 2012).

O CUADRF normalmente apresenta resistência à tração na faixa de 7 a 15 MPa, dependendo do teor e tipo das fibras incorporadas, e seu comportamento é considerado dúctil quando submetido a esforços de tração (GU; YE; SUN, 2015). A alta ductilidade resulta de um efeito de ponte das fibras através das fissuras da matriz (YANG; JOH; KIM, 2010). Segundo Spasojević (2008) o mecanismo de ponte das fibras ocorre quando a fibra impede o avanço de abertura de uma fissura da matriz. Neste processo, dependendo das condições de ligação entre a fibra e matriz, a fibra pode dissipar energia (por meio do arrancamento e deformação), permitindo a formação de novas microfissuras em um processo denominado multi-microfissuração que resulta em um comportamento de endurecimento por pseudo-deformação do material.

Com base neste processo, a caracterização das propriedades da interação fibra-matriz permite melhorar o desempenho a tração através da otimização de parâmetros das fibras. A resistência a abertura de fissuras pode ser otimizada quando as fibras são uniformemente distribuídas na matriz e quando propriedades de interface fibra/matriz e geométricas da fibra

são adequadamente selecionadas. (LI; WANG; BACKER, 1990). Além disso, o ângulo de inclinação de uma fibra em uma matriz cimentícia tem uma forte influência na resistência ao arrancamento da fibra. Ensaio de arrancamento determinaram que a maior carga de arrancamento pode ser alcançada com as fibras com ângulo de inclinação na faixa de 30-45° devido ao mecanismo combinado de desprendimento e fragmentação da matriz nos compósitos de fibras inclinadas (LEE; KANG; KIM, 2010).

Experimentos realizados por Wille, Kim e Naaman (2011) analisaram o comportamento a tração do CUADRF com diferentes tipos de fibras de aço incorporando um percentual em volume menor que 2,5%. Este estudo mostrou que a resistência à tração do CUADRF pode ser melhorada substituindo as fibras de aço lisas de alta resistência, comumente utilizada, por fibras de aço torcidas ou com gancho em suas extremidades, que influenciam positivamente a aderência mecânica entre fibra e matriz. Os resultados demonstraram que a incorporação de uma fração volumétrica de 2,0% de fibras de aço lisas, torcidas e com ganchos levaram a uma resistência à tração no CUADRF de respectivamente 11,0 MPa, 14,0 MPa e 14,9 MPa (WILLE; KIM; NAAMAN, 2011)

Graybeal (2006) determinou experimentalmente as propriedades de tração do CUADRF utilizando ensaios de flexão com seções prismáticas, ensaios de tração axial com briquetes de argamassa e ensaios de tração axial com cilindros. A partir dos resultados destes ensaios, Graybeal concluiu que a resistência à tração (f_{ct}) do CUADRF está relacionada à resistência à compressão (f_c) por meio da Equação (2.2):

$$f_{ct} = x\sqrt{f_c} \quad (2.2)$$

Onde x é um multiplicador com valor 7,8 para amostras tratadas a vapor, 8,3 para amostras tratadas a vapor atrasado e vapor temperado e 6,7 para amostras não tratadas.

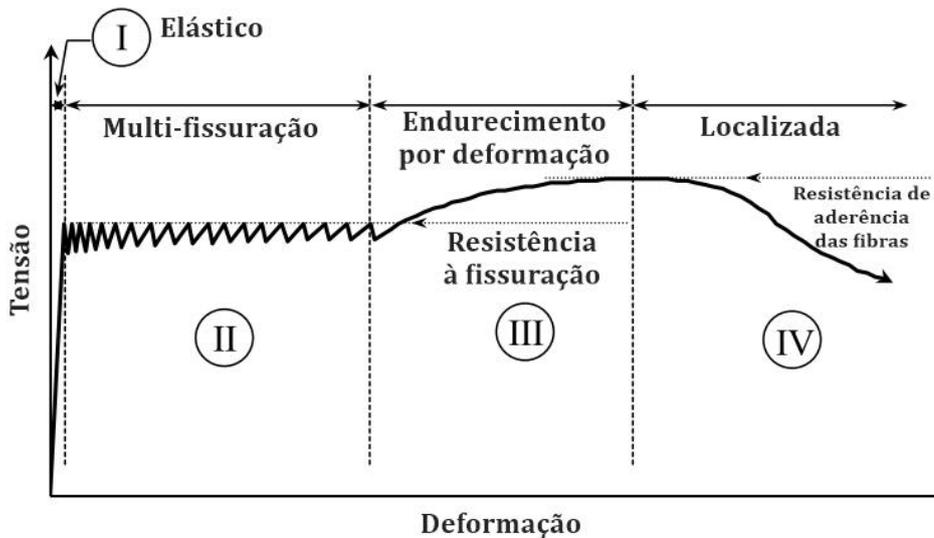
2.7.2.1 Diagrama tensão-deformação à tração

A relação tensão-deformação do CUADRF submetido a esforço axial de tração exemplifica graficamente a influência do mecanismo de ação das fibras no comportamento do material. Russel e Graybeal (2013) propuseram o diagrama tensão-deformação uniaxial à tração apresentado na Figura 8 baseado em ensaios de tração direta de dois CUADRF com diversos teores de fibras.

Neste diagrama o comportamento à tração é dividido em quatro estágios. O estágio 1 diz respeito ao comportamento elástico do material em que a matriz é responsável por suportar

os esforços. No estágio 2 a tensão supera a resistência à tração na matriz, formando múltiplas fissuras estreitamente espaçadas na matriz. O estágio 3 é caracterizado por endurecimento por deformação com aumento de abertura das fissuras. Por último, no estágio 4 as fissuras se tornam localizadas e após atingirem seu limite de abertura causam o arrancamento das fibras da matriz. Logo após o material atinge a ruptura.

Figura 8 - Diagrama de tensão-deformação à tração idealizado do CUADRF



Fonte: Adaptado de Russel e Graybeal (2013)

2.8 Durabilidade

Diversas obras de infraestrutura são executadas em ambientes quimicamente agressivos. Por isso, exigem materiais com capacidade de suportar as condições para as quais foi projetado, sem sofrer danos significativos ao longo da vida útil. Tal característica resulta da microestrutura extremamente densa e, portanto, completamente impermeável a entrada de qualquer agente deletério, proporcionando ao material alta durabilidade em ambientes agressivos (BEHLOUL et al., 2004).

A elevada durabilidade na matriz de ultra alta resistência depende substancialmente da redução do número e tamanho dos poros, pois estes são os responsáveis pela entrada e transporte dos agentes agressivos no interior do material. O CUADRF apresenta uma matriz muito densa caracterizada por poros pequenos e descontínuos, o que reduz significativamente a transferência de massa, e deste modo, a penetração de líquidos, gases, ou materiais radioativos (NEMATOLLAHI, 2012).

Normalmente, a porosidade total está associada ao modo de fabricação adotado,

como a inclusão de pressão de compactação e cura térmica. Testes laboratoriais utilizando adsorção de gás e porosimetria de intrusão de mercúrio mostraram que para uma cura sem tratamento térmico pode ser observado um raio de poro máximo de 10 nanômetros, enquanto que para o tratamento com calor um raio de poro singular máximo de 1,5 nanômetros pode ser observado (HEROLD; MÜLLER, 2004). Além disso, a pressão de compactação aplicada ao material em seu estado fresco aumenta sua densidade relativa a valores superiores a 6% por meio da remoção do ar aprisionado e excesso de água (RICHARD; CHEYREZY, 1995).

A absorção de água e soluções contaminadas por agentes nocivos como cloretos ocorre através dos poros capilares, em vista disso, um parâmetro essencial para caracterizar o movimento geral de fluidos através de um material é o coeficiente de permeabilidade à água. No CUADRF, o coeficiente de permeabilidade à água determinado aos 98 dias foi de cerca de 0,0005, enquanto para o concreto convencional aos 98 dias é de cerca de 0,0015 (WANG et al., 2015). Os resultados demonstram que o menor coeficiente de permeabilidade à água do CUADRF confere maior resistência a absorção de água em contraste com o concreto convencional.

O baixo coeficiente de permeabilidade à água pode ser atribuído a microestrutura densa, resultante do efeito granular do quartzo triturado na mistura, e a descontinuidade da estrutura de poros por efeito da adição de sílica ativa (TAM; TAM; NG, 2012). Estas características microestruturais podem levar a uma profundidade de penetração de umidade de apenas 2,7 mm para uma aplicação de pressão hidráulica de 1,6 MPa após 128 horas (GAO et al., 2006).

A resistência à penetração de cloretos é um dos importantes índices de degradação da durabilidade de materiais com matrizes cimentícias, pois a presença de íons cloreto próximo ao reforço metálico pode despassivar a armadura, favorecendo o processo corrosivo. Desse modo, Roux, Andrade e Sanjuan (1996) determinaram o coeficiente de difusão de cloreto do concreto convencional, CAD e CUADRF através da imersão das respectivas amostras entre duas células eletroquímicas (uma catódica, contendo uma solução de NaCl 0,5 M, e a outra anódica, com água destilada) e posterior aplicação de uma diferença de potencial de 12 Volts. Os resultados mostram que o coeficiente de difusão de cloretos do CUADRF ($0,02 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$) é significativamente menor que o do CAD ($0,6 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$) e o do concreto convencional ($1,1 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$), o que evidencia a influência da porosidade na difusão do íon cloreto.

A aplicação deste material em regiões de temperaturas baixas demonstra a capacidade da microestrutura de resistir a degradação progressiva devido às forças expansivas geradas por ciclos de congelamento e descongelamento. Por exemplo, a perda de material após

1000 ciclos de congelamento e descongelamento é de apenas 7 g/m^2 , significativamente inferior ao valor de 1000 g/m^2 para concreto convencional (VERNET, 2004). Além disso, testes experimentais demonstram que o processo de gelo-degelo no CUADRF não tratado termicamente pode levar a uma hidratação adicional, criando a possibilidade de um aumento de 10% na resistência à compressão em um cilindro mergulhado em água do dia 28 ao 56 (GRAYBEAL, 2006).

Com base em uma revisão de diferentes testes e indicadores de durabilidade, Liu et al. (2019) lista as seguintes razões para explicar a alta durabilidade apresentada pelo CUADRF:

- a) a baixa relação água-cimento que limita o número e conectividade dos poros capilares e poros de gel da microestrutura. Além disso, as heterogeneidades são minimizadas pela ausência de agregados graúdos, areia graduada e adição de aditivos com tamanho variado de partículas, o que torna a microestrutura compacta e uniforme;
- b) o efeito pozolânico da sílica ativa ou outras misturas minerais reduz a concentração de hidróxido de cálcio (Ca(OH)_2) através da reação com dióxido de silício (SiO_2) e óxido de alumínio (Al_2O_3), formando silicato de cálcio hidratado (C-S-H) estável com alta resistência. Sob condições de cura térmica a reação é potencializada com a maior parte de Ca(OH)_2 sendo convertida em C-S-H que forma uma camada protetora na superfície dos compostos que contém alumínio, reduzindo a deterioração do material;
- c) a excelente dureza e resistência do pó de quartzo em comparação com a areia comum, devido ao maior teor de SiO_2 , ajuda a melhorar a resistência ao desgaste do CUADRF. Além disso, o efeito pozolânico e a compactação devido à baixa relação água cimento e microagregados também contribuem para resistência ao desgaste.

2.9 Resistência ao fogo

Um rápido aumento de temperatura pode levar ao risco de fragmentação nos concretos. Assim, em caso de incêndio a temperatura de resistência ao fogo e resistência à compressão residual são os dois mais importantes parâmetros usados para avaliar o desempenho de um material submetido a elevadas temperaturas. Com base em resultados experimentais, Liu e Huang (2009) determinaram que o CUADRF possui maior temperatura de resistência ao fogo

e maior resistência à compressão residual após o fogo em comparação com o CAD e concreto convencional. Além disso, é verificado uma excelente resistência à propagação de chamas e um desempenho excepcional a temperaturas até 200° C, com o material preservando sua resistência a compressão sem nenhuma fragmentação aparente (NAZRI et al., 2016).

A resistência à compressão aumenta gradualmente quando a temperatura atinge a faixa de 200-300 °C mas começa a diminuir à medida que a temperatura aumenta continuamente (TAI; PAN; KUNG, 2011). Com o aumento da temperatura, a microestrutura se deteriora e a interface de ligação entre a fibra e a matriz se solta gradativamente resultando na degradação das propriedades macromecânicas (LI; LIU, 2016).

Em temperaturas mais altas, ocorre elevada acumulação de pressão de vapor no interior do CUADRF devido a sua baixa porosidade, levando ao risco de fragmentação explosiva (EIDE; HISDAL, 2012). Além disso, a possibilidade de fragmentação em decorrência da exposição ao fogo é proporcional a redução da relação água/cimento e densificação da matriz com a incorporação de adições minerais como a sílica ativa (PHAN; LAWSON; DAVIS, 2001).

O uso de fibras de polipropileno em associação com as tradicionais fibras de aço pode atenuar a fragmentação explosiva. Ao redor das fibras de polipropileno são formadas zonas de transição com a matriz cimentícia, com isso, as zonas se interligam aumentando a permeabilidade e, além disso, são criados poros capilares devido ao derretimento e queima das fibras (SCHMIDT; FEHLING, 2005). Dessa maneira, o vapor formado no interior do material é liberado através dos poros capilares que se formam quando a temperatura atinge o ponto de fusão da fibra de cerca de 170 ° C (OZAWA et al., 2019).

A adição de fibra de polipropileno provoca recessão da resistência à compressão quando exposto a temperatura mais baixa, porém tem impacto positivo quando é exposto a temperatura mais alta (ZHENG; LI; WANG, 2012). As fibras de polipropileno são eficazes no processo de aquecimento porque essas fibras ao derreterem fornecem rotas de fuga (poros capilares adicionais na matriz) para o vapor preso no interior do concreto (NAZRI et al., 2016). Em contrapartida, as fibras de aço por terem um ponto de fusão elevado se mantém intacta no interior do concreto, favorecendo a formação de gradientes térmicos e hídricos, e conseqüentemente o desenvolvimento de altas pressões nos poros, levando a fragmentação explosiva do material (DE CASTRO; TIBA; PANDOLFEG, 2011).

Para difundir a aplicação do CUADRF em aplicações passíveis de incêndios, foi desenvolvido uma nova dosagem do Ductal® a fim de se determinar a mistura correta, tipo e geometria das fibras que possam manter a ultra alta resistência do material concomitantemente com uma excelente trabalhabilidade e resistência a fragmentação devido a ação do fogo. Dessa

forma, desenvolveu-se o Ductal® - FO feito com fibras de material orgânico, quando o desempenho mecânico não é o principal requisito, e o Ductal® -AF feito com uma combinação entre fibras de aço e fibras orgânicas, com propriedades mecânicas similares ao Ductal® convencional que utiliza apenas fibras de aço (BEHLOUL et al., 2004).

2.10 Fadiga

A caracterização do comportamento a fadiga é essencial para a definição do projeto de estruturas sujeitas a cargas dinâmicas como, por exemplo plataformas marítimas, pontes rodoviárias e ferroviárias. A fadiga nessas estruturas ocorre por degradação progressiva da microestrutura devido a solicitações cíclicas de magnitude suficiente para provocar o surgimento e evolução de microfissuras no material, podendo levar a ruptura (MEDEIROS, 2012).

Ensaio experimentais revelam que para uma vida útil de um milhão de ciclos, o limite de resistência é de cerca de 80% de sua resistência à flexão estática (que corresponde a 19 MPa), quando sujeita a uma tensão cíclica média de 44,5% da resistência à flexão estática (que corresponde a 10,85 MPa) (AL-AZZAWI, 2018). Além disso, é observado que durante a vida útil a taxa de crescimento da deflexão é proporcional ao número de ciclos de carregamento (LAPPA; VEEN; WALRAVEN, 2006) . Dessa forma, verifica-se que o desempenho à fadiga a carregamentos dinâmicos elevados depende preponderantemente da resistência à flexão e do número de ciclos a que o material será submetido.

Observou-se que a adição de fibras de aço pode melhorar significativamente o desempenho à fadiga por flexão do CUADRF (CHANVILLARD et al., 2004). Isso acontece por que a adição de fibras de aço evita a propagação livre de fissuras, aumentando o limite de resistência e a vida à fadiga (RÍOS; CIFUENTES, 2018). Além disso, fibras distribuídas uniformemente na matriz podem fazer com que o limite de resistência à fadiga seja superior a 19 MPa, porém se a distribuição não for uniforme, com regiões com pouca ou nenhuma fibra, esse limite se reduz a aproximadamente 14 MPa (AL-AZZAWI, 2018).

O comportamento à fadiga do CUADRF é de significativa importância para a aplicação em elementos submetidos essencialmente à tensão de tração como alguns elementos estruturais de pontes. Um modelo bi-linear da evolução da deterioração do CUADRF por fadiga à tração proposto por Makita e Brühwiler (2015) permite em conjunto com a relação entre dano e deformação por fadiga, determinar a vida útil restante de elementos estruturais constituídos por CUADRF existentes. A superfície de fratura por fadiga nesses elementos é caracterizada

por fragmentação e pulverização da matriz, resultado de atritos locais, arrancamentos e deslizamentos de fibras, além da abrasão das fibras com a matriz devido ao desgaste superficial gerado pelos ciclos de carregamento (MAKITA; BRÜHWILER, 2014).

A análise do comportamento à fadiga à tração do CUADRF demonstra que a deterioração à fadiga se desenvolve com taxa constante até sua fratura, independentemente do nível de tensão de fadiga imposta (MAKITA, 2014). Isto pode ser atribuído a variações nas deformações locais do material submetido ao esforço de tração, que evidenciam a significativa capacidade de redistribuição de tensão e deformação, melhorando assim o comportamento à fadiga (MAKITA; BRÜHWILER, 2014).

2.11 Vantagens e aplicações

O CUADRF possui excelente trabalhabilidade, favorecendo a expansão das áreas de aplicações, pois a trabalhabilidade é o requisito essencial para aplicações em larga escala de um material de matriz cimentícia (AZMEE; SHAFIQ, 2018). Esta propriedade, combinada com uma alta resistência à compressão final e flexão à tração possui aplicação viável na área em que o concreto protendido é atualmente utilizado, como a construção de pontes, devido a possível eliminação ou redução do reforço passivo dependendo da tipologia adotada para a ponte e a possibilidade de utilização de seções transversais mais finas e com maior variedade de formas.

Devido a essas propriedades, departamentos de rodovias e empresas de diversos países desenvolveram estudos de caracterização das propriedades do Ductal® com foco nas obras de infraestrutura. Nos Estados Unidos a *Federal Highway Administration* (FHWA) iniciou as pesquisas em 2001 e desde 2002 implanta a tecnologia em pontes por diversas aplicações, como pré-moldado, vigas protendidas, painéis pré-fabricados para tabuleiro, camadas protetoras e como material de junções transversais entre painéis (RUSSEL, G; GRAYBEAL, 2013).

Na Malásia, onde o CUADRF é comercializado com o nome de Dura®, foi possível a construção de 70 pontes entre 2011 e 2015 com menor custo inicial e expectativa de vida superior a 100 anos devido a otimização da mistura e técnicas inovadoras que reduzem o ciclo de produção de pré-fabricação a um dia convencional (VOO; TADROS, 2016). Outros países que se destacam nas aplicações do CUADRF em pontes são a França (RESPLENDINO; TOUTLEMONDE, 2014), Austrália (CAVILL; CHIRGWIN, 2004), Canadá (RUSSEL, G; GRAYBEAL, 2013), Japão (TANAKA et al., 2010), Nova Zelândia e Coréia do Sul (REBENTROST; WIGHT; FEHLING, 2008).

A primeira aplicação conhecida foi a ponte para pedestres Sherbrooke na cidade de Quebec, Canadá no ano de 1997 apresentada na Figura 9. Neste projeto a maior parte do potencial do CUADRF não foi explorado por razões de segurança e por questões práticas de construção. Esta estrutura apresenta grande esbeltez com 60 metros de comprimento e apenas 3 metros de largura devido a seu sistema de treliça com seis segmentos pré-moldados de CUADRF (BLAIS; COUTURE, 1999). O conceito estrutural consiste em uma treliça espacial com um banzo superior, dois banzos inferiores e diagonais em que o CUADRF é confinado em tubos de aço inoxidável.

Figura 9 - Ponte para pedestres Sherbrooke na cidade de Quebec, Canadá, 1997



Fonte: Blais e Couture (1999)

Outra ponte para pedestres que se tornou uma das aplicações mais famosas do CUADRF em todo o mundo é a passarela Seonyu que liga a ilha de Sunyudo a capital Seoul na Coreia do Sul apresentada na Figura 10. A passarela consiste de dois vãos com um tabuleiro de apenas 3 cm que são suportados por um arco de 120 metros fabricado com Ductal®, tornando possível uma seção transversal fina e com uma forma única, constituindo um design elegante e inovador (BEHLOUL; LEE, 2003). Além da revolução arquitetônica promovida pela utilização do Ductal®, a obra ainda consumiu apenas cerca de metade da quantidade de material que teria sido utilizado caso se optasse por concreto convencional, obtendo propriedades de resistência equivalentes (VOO; FOSTER; VOO, 2015).

Figura 10 - Passarela Seonyu na Coréia Do Sul



Fonte: Ricciotti (2002)

A aplicação do CUADRF em pontes é considerada a principal utilização deste material devido as inúmeras vantagens que este material apresenta em relação ao concreto armado e ao concreto protendido. Segundo Voo, Foster e Voo (2015) uma ponte fabricada com CUADRF apresenta as seguintes vantagens:

- a) economia imediata e de custo da vida útil da estrutura;
- b) melhoria em design e vida útil das estruturas;
- c) baixa manutenção devido a sua boa durabilidade;
- d) redução do prazo total da construção e risco;
- e) redução do consumo de matérias-primas, se tornando uma boa opção ecológica;
- f) menor peso próprio da superestrutura, permitindo mesoestrutura e infraestrutura com menores dimensões e menor peso próprio;
- g) menor necessidade de mão de obra e maquinário;
- h) melhor qualidade do que o concreto moldado in situ e pré-moldado de concreto de alto desempenho;
- i) menor impacto ambiental no canteiro de obras devido a curta duração da obra.

O comportamento dúctil do CUADRF obtido pela adição de fibras torna possível a aplicação do mesmo em regiões sísmicas. O CUADRF dissipa mais energia do que o concreto armado, o que possibilita sua aplicação em combinação com o concreto normal em estruturas que estejam sujeitas a carga sísmica, impedindo o colapso (GU; YE; SUN, 2015).

O Ductal ® possui também aplicações onde as propriedades mecânicas elevadas

não são o principal requisito. A matriz Ductal® é extremamente fina, densa e apresenta excepcional capacidade de simular diversos tipos de textura superficial, sua utilização em conjunto com pigmentos gera efeitos visuais de suma importância para aplicações arquitetônicas (BEHLOUL et al., 2004). Alguns dos projetos arquitetônicos que se aproveitam dessa propriedade são os abrigos de ônibus em Tucson nos estados unidos, painéis de fachada em Mônaco e a torre do relógio de Kyoto no Japão (BEHLOUL et al., 2008).

Outra aplicação promissora do CUADRF é a reabilitação de elementos estruturais, por exemplo, pontes de elementos de superestrutura sujeitos a severas cargas ambientais e mecânicas, permitindo maior durabilidade (redução de manutenção) e proporcionando impermeabilização (BUTTIGNOL; SOUSA; BITTENCOURT, 2017). Além disso, atua aumentando a resistência da estrutura à ação dos esforços solicitantes e como proteção contra impactos, ação do fogo, desgaste devido à ação das intempéries além de também agir como barreira de proteção impedindo o ingresso de agentes agressivos (BUTTIGNOL et al., 2018).

Um exemplo da eficiência do CUADRF como material de reabilitação estrutural é exposto por Habel (2004) que avaliou o desempenho do CUADRF como material de revestimento de um elemento comum de concreto armado. O revestimento melhorou significativamente a resistência do elemento contra lascamentos, esmagamento ou fissuras além de aumenta a rigidez e minimizar as deformações. Além disso, análises por meio de microscopia eletrônica por varredura da microestrutura na zona de transição entre o concreto convencional e o CUADRF confirmam que o CUADRF adere e se interliga bem com o substrato, levando a uma forte ligação e conseqüentemente a um processo de reabilitação seguro e durável (TAYEH et al., 2012). No futuro a expectativa é que este procedimento se torne mais usual que outras técnicas de reparo em pontes devido a economia de custos em futuras reparações e redução das intervenções no tráfego de veículos.

O excelente desempenho mecânico do CUADRF é responsável por grande parte de suas potenciais aplicações. Porém, outras propriedades tornam esse material muito atrativo a indústria da construção civil, como a excelente trabalhabilidade que permite que o material seja moldado em qualquer formato e a excelente durabilidade, que permitiu sua aplicação em uma torre de resfriamento na França (BEHLOUL et al., 2004).

Quanto a excelente durabilidade verificou-se por análise probabilística que a espessura da cobertura do CUADRF pode ser um fator dez vezes menor para alcançar igual proteção das barras de aço em comparação com o concreto armado, qualificando este material para proteção de superfície em condições extremas como estradas, usinas nucleares ou estruturas marinhas (TOLEDO FILHO et al., 2012). Além disso, é uma boa opção para

construção ou reparo de infraestrutura em regiões extremamente frias (GU; YE; SUN, 2015).

Em relação a trabalhabilidade pode-se citar aplicações recorrentes do CUADRF na construção de escadas, que podem ser moldadas mais facilmente sem a necessidade de reforço passivo ou protensão. Os exemplos mais notórios são as escadas do aeroporto de Roissy, em Paris, escadas do escritório da Lafarge em Birmingham, e uma nova solução em escada helicoidal desenvolvida pela empresa Escaliers Decors apresentada na Figura 11. (BEHLOUL et al., 2008).

Figura 11 - Escada helicoidal de CUADRF



Fonte: Behloul et al. (2008)

Um exemplo da complexidade geométrica que pode ser obtida por este material é o edifício da fundação Louis Vuitton em Paris apresentado na Figura 12 em que o revestimento é criado a partir de 19000 painéis pré-fabricados de Ductal® cada um moldado individualmente (AUBRY et al., 2013). Além disso, existem outras aplicações não estruturais como fachadas, painéis de som acústico, placas de ancoragem, tubos pré-moldados e contenção para resíduos nucleares radioativos (RAHMAN; MOLYNEAUX; PATNAIKUNI, 2005).

Figura 12 - Museu de arte e centro cultural patrocinado pela fundação Louis Vuitton



Fonte: Vuitton (2015)

2.12 Limitações

Conforme o desempenho do concreto se eleva, a necessidade de cuidados especiais com o controle de execução é ainda mais significativa para que se atinja um produto de qualidade. No caso do CUADRF a produção está associada a validação de processos através de testes de adequação, monitoramento e controle da reologia dependendo das condições climáticas, limitações dos desvios do desempenho do material e conformidade com tolerâncias dimensionais e requisitos geométricos (RESPLENDINO; TOUTLEMONDE, 2014).

Segundo Torregrosa (2013) embora o CUADRF possua propriedades significativamente superior em relação ao concreto convencional, existem algumas dificuldades enfrentadas pelo CUADRF para sua difusão em larga escala na indústria como por exemplo:

- a) existem diversas formulações para o CUADRF e as dosagens variam conforme o processo de fabricação e as propriedades almejadas. Não existe uma classificação clara dos tipos de CUAD existentes, afastando potenciais usuários para aplicações diárias;
- b) o CUADRF é utilizado particularmente na indústria de pré-moldados, fabricados principalmente com a utilização de produtos patenteados, materiais exclusivos e cura térmica. Em muitos casos, o preço é alto em comparação com soluções

tradicionais, só justificando sua utilização por questão estética ou vida útil prolongada. Além disso, comumente as propriedades do CUADRF são muito mais altas do que as requeridas.

- c) alcançar as propriedades do CUADRF exige um alto controle do processo de fabricação e dos materiais. Além disso, como fornecedores locais não podem garantir propriedades constantes para os materiais, portanto, as propriedades do CUADRF podem variar. Assim, controlar a dosagem ideal de CUADRF com essa variabilidade é um grande desafio.
- d) realizar o processo de fabricação com tecnologia simples ainda necessita de uma pesquisa desenvolvida. O processo de dosagem otimizado em escala industrial é complexo devido ao uso de componentes padrões, efeito do tamanho do misturador e os parâmetros de mistura que podem afetar as propriedades mecânicas do material.

O fator preponderante que impede a difusão do CUADRF como um material acessível a grande maioria das empresas especializadas em obras de infraestrutura é a viabilidade econômica de sua aplicação devido ao custo dos insumos e técnicas de execução que envolvem cura à pressão e/ou térmica. Em busca de diminuir o custo de produção do CUADRF, diversas pesquisas estão sendo realizadas para encontrar novas formulações que reduzem seu custo como a substituição da areia sílica, normalmente mais cara, por casco de vidro reciclado (YANG et al., 2009), a substituição da sílica ativa por cinza de casca de arroz (VAN TUAN et al., 2011) e a substituição do cimento por cinzas volantes, escórias de alto forno moídas e pó de calcário (YU; SPIESZ; BROUWERS, 2015).

Apesar da gama de aplicações em que o CUADRF pode ser utilizado, existe uma desconfiança por parte das empresas devido a variabilidade das diretrizes para projeto e construção de estruturas. Embora existam recomendações técnicas publicadas por países como França e Japão, o material de ultra alta resistência se desenvolveu de modo diferente em diversos países, como na Malásia em que é comercializado sob o nome Dura® e sua produção é otimizada devido a técnicas locais (VOO; TADROS, 2016).

Desse modo um dos principais fatores que impede a escolha do CUADRF como aplicação em uma empresa de engenharia é o desconhecimento do comportamento do material e de técnicas de produção e execução não convencionais para a indústria atual. Os métodos de projeto para estruturas de CUADRF diferem das soluções tradicionais de concreto armado e/ou protendido (RESPLENDINO; TOUTLEMONDE, 2014), e o número de profissionais

especializados em projeto e construção de estruturas que utilizam CUADRF ainda são limitados (AZMEE; SHAFIQ, 2018). Assim, é necessário que as empresas desenvolvam equipes qualificadas de projetistas e arquitetos para expandir o número de potenciais aplicações e propor soluções viáveis para problemas específicos em alternativa às soluções tradicionais.

Embora o CUADRF seja uma das tecnologias mais modernas envolvendo materiais cimentícios e possua uma ampla perspectiva de aplicações, o material ainda não está amplamente disponível para a compra por empresas privadas e instituições públicas e governamentais. Apenas algumas empresas distribuídas nos Estados Unidos e na Europa podem fornecer este material (GU; YE; SUN, 2015), o que evidencia a necessidade de uma cooperação entre institutos acadêmicos, laboratórios, governos e empresas de engenharia para o avanço desta tecnologia em busca de estruturas mais duráveis e sustentáveis.

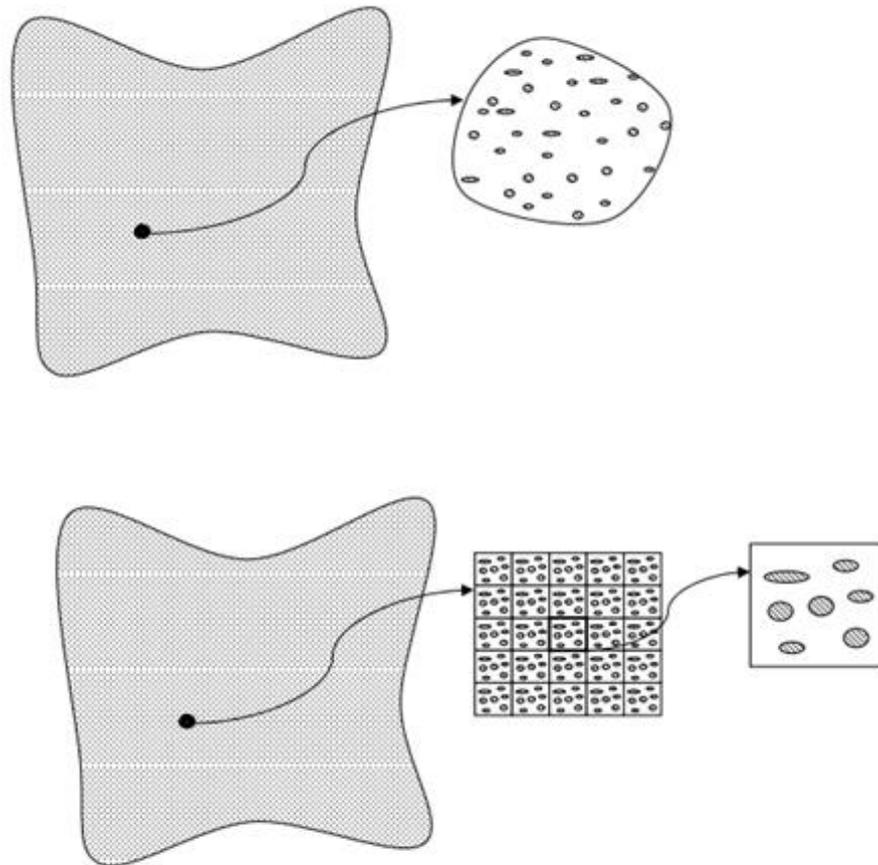
3 MICROMECAÂNICA

A análise de materiais compósitos expõe a ciência dos materiais a necessidade de obter uma abordagem teórica capaz de representar fidedignamente o comportamento do material heterogêneo, considerando de forma concisa e relevante a contribuição de suas fases constituintes na determinação das diversas propriedades que afetam o comportamento do material. Desse modo, a necessidade de obtenção das equações constitutivas macroscópicas de materiais compósitos estimula o desenvolvimento de toda uma área da mecânica dos sólidos como alternativa para aferição das propriedades efetivas (KOVAL JUNIOR, 2003). Assim, baseada no preceito de que se deve considerar o comportamento interativo entre as diferentes fases que compõe a mistura, a micromecânica surge com o objetivo de obter as propriedades efetivas de materiais multifásicos em uma escala macroscópica a partir de uma análise microscópica das propriedades já conhecidas dos componentes que o formam.

Os materiais compósitos, como o CUADRF, são a síntese da combinação de materiais de naturezas diferentes unidos em proporções pré-definidas, e por isso, são caracterizados como um material de natureza multifásica devido a sua constituição heterogênea. Dessa forma, evidencia-se que o arranjo entre as diferentes fases ocorre de forma imperfeita, acarretando anisotropia e heterogeneidades. Os efeitos destas heterogeneidades sobre as propriedades e o comportamento global de um material são a principal finalidade dos estudos micromecânicos (COSTA, 2017).

As fases podem se apresentar de diversas formas em um compósito (Figura 13). Por exemplo, em compósitos fabricados artificialmente, o elemento de volume representativo analisado se repete periodicamente no compósito para qualquer amostra observada, assim, a fase imersa (inclusão) está distribuída periodicamente na matriz. No entanto, para a maioria dos materiais compósitos as inclusões se distribuem randomicamente na matriz, necessitando de uma análise mais acurada.

Figura 13 - Compósito com microestrutura randômica e periódica



Fonte: Costa (2017)

A configuração das heterogeneidades geradas pela interação entre as fases possui grande influência nas propriedades efetivas do material compósito. Desse modo, a distribuição randômica ou periódica das fases define o método de cálculo adotado para a análise do comportamento macroscópico global. Além disso, existem materiais que embora apresentem uma distribuição aleatória de heterogeneidades, possuem uma tendência de modificar a função de probabilidade de distribuição das heterogeneidades conforme um caminho definido por uma função (AGUIAR, 2000). Logo, o método adotado para homogeneização das propriedades efetivas deve considerar critérios relevantes para que o meio microscópico analisado seja representativo da configuração microestrutural de todo o compósito.

A micromecânica é um ramo da ciência dos materiais dedicado a análise de materiais heterogêneos de duas ou mais fases. Esta análise procura estabelecer conceitos e métodos para simular numericamente o comportamento do material heterogêneo por meio de um modelo homogêneo equivalente. Por isso, a micromecânica tem possibilitado avanços concretos nas áreas de engenharia, fornecendo ferramentas simples para a análise da

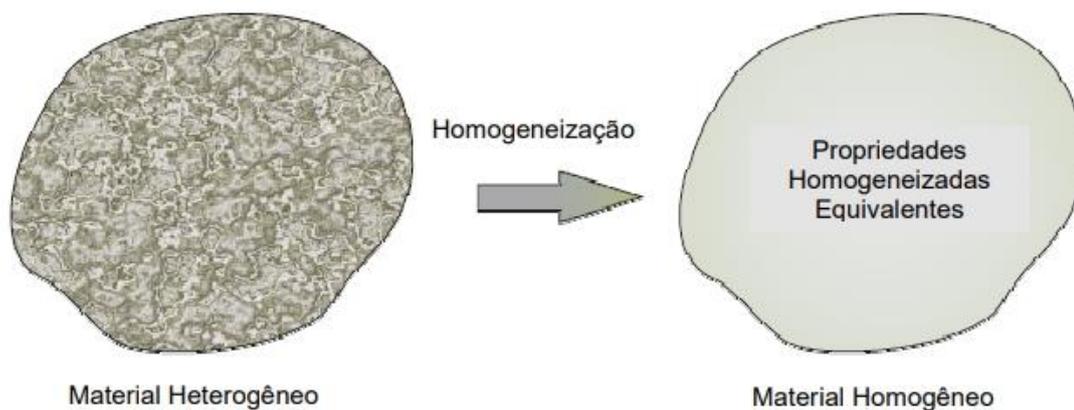
compatibilidade entre materiais e eficiência do compósito gerado.

A abordagem micromecânica é considerada ampla pois baseia-se na previsão da propriedade efetiva do material a partir do conhecimento da microestrutura, considerando além das propriedades de cada uma das fases constituintes, os detalhes microestruturais como frações volumétricas de fases, tamanho, formas, distribuição espacial dos domínios e conectividade entre as fases (TORQUATO, 1991). Dessa forma, a relação entre a configuração microestrutural e as propriedades efetivas de um determinado compósito depende, em geral, de uma precisa modelagem multiescalar. Nesta perspectiva, a metodologia micromecânica baseia-se em deduzir leis constitutiva da macroescala a partir da média do conjunto da microescala (LI; WANG, 2018).

3.1 Teoria da homogeneização

A teoria da homogeneização tem sido amplamente utilizada para caracterização de materiais heterogêneos, além de contribuir para o desenvolvimento de novos materiais com propriedades superiores aos materiais convencionais. Esta teoria fundamenta-se na substituição do meio heterogêneo por um meio homogêneo fictício cujo comportamento é equivalente (Figura 14).

Figura 14 - Processo de homogeneização



Fonte: Almeida et al. (2010)

A micromecânica dos meios contínuos se utiliza de materiais estatisticamente homogêneos para definir um volume elementar representativo e um meio homogêneo efetivo, que se comporta da mesma maneira para qualquer carga mecânica aplicada (LORENCI, 2013). Este tipo de abordagem permite a análise da influência da configuração microestrutural no comportamento macroscópico do material heterogêneo, caracterizando um comportamento

complexo por meio da morfologia da microestrutura e das características dos seus materiais constituintes (DUTRA, 2012). Dessa maneira, é possível avaliar as propriedades elásticas dos compósitos através do conhecimento prévio das propriedades elásticas de seus materiais constituintes e suas respectivas frações de volume.

A teoria da homogeneização para a obtenção das propriedades efetivas dos materiais heterogêneos pode ser considerada segundo a abordagem da teoria do campo médio. Segundo Hori e Nemat-Nasser (1999) esta teoria baseia-se na relação entre as médias volumétricas da tensão e deformação de amostras microscopicamente heterogêneas que são ditas equivalentes as propriedades mecânicas efetivas obtidas em experimentos, assim, os macrocampos são definidos como as médias de volume dos correspondentes microcampos, e as propriedades efetivas são determinadas como as relações entre os microcampos médios. Os métodos analisados no presente trabalho que seguem esta abordagem são os modelos de Mori-Tanaka e Auto Consistente abordados nas seções 3.9 e 3.10.

Em outra abordagem, as propriedades efetivas de compósitos podem ser estimadas por análises de limites teóricos previamente estabelecidos denominados limites variacionais. Os limites são obtidos por meio de princípios variacionais da teoria da elasticidade linear e então utilizados para indicar, em conjunto com outros métodos, a confiabilidade dos resultados apresentados. No presente trabalho, utiliza-se os limites variacionais de Voigt e Reuss apresentados na seção 3.11, que fornecem respectivamente o limite superior e inferior da propriedade efetiva considerada.

3.2 Elemento de volume representativo (EVR)

O conceito de elemento de volume representativo (EVR) permite subdividir o domínio do material heterogêneo preservando o comportamento mecânico. Dessa forma, para caracterizar o comportamento do material, é necessário apenas examinar as propriedades do material em um macroponto arbitrário, denominando o microespaço associado a esse macroponto de Elemento de Volume Representativo (LI; WANG, 2018).

A primeira definição de EVR é dada por Hill (1963), que utiliza o termo para se referir a uma amostra que é em média estruturalmente representativa de todo o compósito, e contém uma quantidade suficiente de inclusões para que as propriedades médias correspondentes ao EVR independam das condições de contorno aplicadas, desde que tais condições sejam macroscopicamente uniformes. Assim, em um EVR os valores das condições de contorno oscilam em torno da média com um desvio padrão muito pequeno que passa a ser

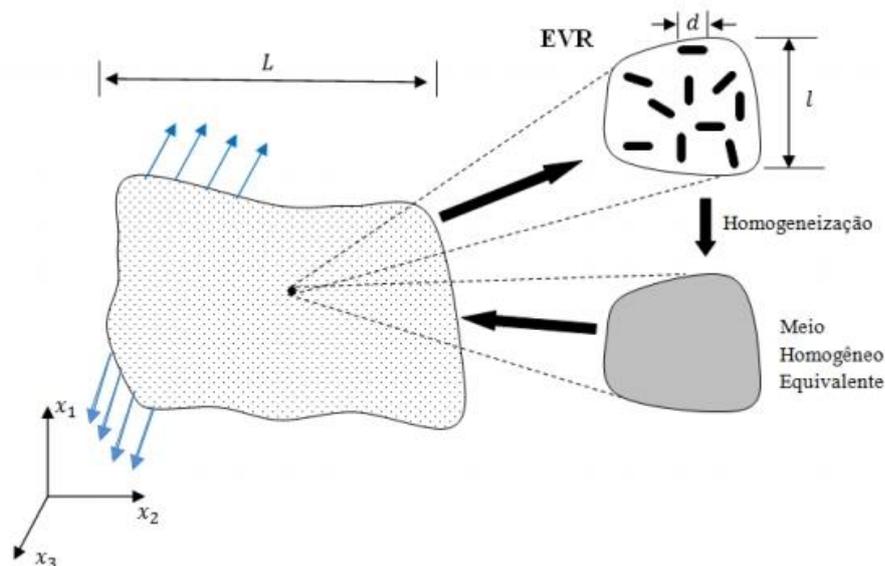
insignificante a pouca distância da superfície.

Drugan e Willis (1996) adotaram uma definição alternativa para o EVR. Eles consideram um EVR como o menor volume de material do elemento do compósito para os quais os módulos globais espacialmente constantes da representação macroscópica constitutiva representam suficientemente a resposta média constitutiva.

Para a análise micromecânica que este trabalho se propõe é necessário considerar um meio microscópico e homogêneo em que as heterogeneidades sejam bem caracterizadas e que suas respostas macroscópicas sejam equivalentes mecanicamente. Ou seja, os campos de tensão e deformação obtidos da análise macroscópica através da resolução de um problema mecânico em uma estrutura constituída por um material fictício homogêneo sejam equivalentes aos valores médios dos campos de tensão e deformação locais calculados sobre o EVR (COSTA, 2017). Estes campos locais são deduzidos da escala microscópica quando as heterogeneidades da microestrutura são consideradas no processo de cálculo (ZAOUI, 2002).

Portanto, para a aplicação do EVR no processo de homogeneização representado na Figura 15, adota-se a definição de Drugan e Willis (1996) para o EVR.

Figura 15 - EVR na homogeneização de compósitos



Fonte: Costa (2017)

Para definir o tamanho do EVR recorre-se a análises estatísticas que visam obter um meio que possua uma amostra representativa das heterogeneidades existentes no compósito. Esta abordagem visa determinar o menor EVR possível para o qual é válida a aplicação de uma teoria constitutiva efetiva macroscópica, ou seja, um domínio capaz de incluir uma amostragem de todas as possíveis configurações microestruturais existentes no compósito. (DRUGAN;

WILLIS, 1996). Assim, o EVR deve incluir um número significativo de heterogeneidades, sendo do ponto de vista estatístico uma amostra relevante do compósito.

Kanit et al. (2003) propôs uma metodologia para determinar o tamanho do EVR de um material compósito. A metodologia para obter o EVR de uma dada microestrutura pode ser resumida da seguinte forma:

- a) gerar microestruturas com 4 ou 5 tamanhos diferentes;
- b) submeter cada microestrutura ao carregamento com condições periódicas de contorno e registrar as propriedades aparentes obtidas em cada microestrutura;
- c) calcular o valor médio e a variação da propriedade aparente para os tamanhos considerados e verificar se os números de microestruturas foram suficientes para definir o tamanho;
- d) definir a precisão desejada para a estimativa das propriedades efetivas do material e conseqüentemente o número de microestruturas e o tamanho final do volume representativo;

Para representar o comportamento global do material, o EVR deve ser definido de modo a conter informações suficientes das diversas fases constituintes. Desse modo, as dimensões do EVR devem ser suficientemente grandes para que se possa assumir homogeneidade em relação a distribuição de heterogeneidades presentes, e suficientemente pequenas para evitar gradientes de grandezas locais, como a deformação (BARBOSA, 2010).

Dessa maneira, é fundamental para o processo de homogeneização que a determinação do tamanho do EVR priorize uma separação de escalas. É necessário que a dimensão característica d_h das heterogeneidades seja muito menor do que a dimensão característica l_{evr} do EVR, que por sua vez, deve ser suficientemente menor que a dimensão característica L do corpo analisado. Além disso, d deve ser superior a menor dimensão d_0 abaixo a qual a mecânica do contínuo não é mais válida. Zaoui (2002) resume através da Equação (3.1) a separação de escalas necessária ao processo de homogeneização.

$$d_0 \ll d_h \ll l_{evr} \ll L \quad (3.1)$$

3.3 Fundamentos da micromecânica

Considerando um compósito bifásico com uma fase denominada inclusão imersa em outra fase denominada matriz, admite-se na abordagem micromecânica de campos médios que os campos de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ e os campos de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ em cada fase podem ser representados por suas respectivas médias volumétricas dado um elemento de volume

representativo (EVR) do compósito. Com base nisso, Li e Wang (2018) definem as equações que representam as médias volumétricas da tensão e da deformação da matriz, $\langle \sigma_m \rangle$ e $\langle \varepsilon_m \rangle$, e da inclusão, $\langle \sigma_i \rangle$ e $\langle \varepsilon_i \rangle$, como mostrado a seguir:

$$\langle \sigma_m \rangle = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \sigma_m(x) dV \quad (3.2)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \sigma_i(x) dV \quad (3.3)$$

$$\langle \varepsilon_m \rangle = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \varepsilon_m(x) dV \quad (3.4)$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \varepsilon_i(x) dV \quad (3.5)$$

onde V_m e V_i representam respectivamente o volume da matriz e volume da inclusão no EVR e x representa um ponto arbitrário no interior da fase correspondente.

Analogamente, Li e Wang (2018) define as expressões para a tensão e deformação médias no EVR de acordo com as Equações (3.6) e (3.7).

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma(x) dV \quad (3.6)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon(x) dV \quad (3.7)$$

Se tratando de pequenas deformações a maioria dos materiais possuem comportamento elástico linear, logo a lei constitutiva para estes materiais pode ser escrita em termos do tensor Tensão de Cauchy e do tensor de Deformação Infinitesimal (QU; CHERKAOUI, 2006). Considerando que a matriz e a inclusão se comportem como materiais elásticos as relações constitutivas médias podem ser expressas da seguinte maneira (COSTA, 2017):

$$\langle \sigma \rangle = \mathbb{C} : \langle \varepsilon \rangle \quad (3.8)$$

$$\langle \sigma_m \rangle = \mathbb{C}_m : \langle \varepsilon_m \rangle \quad (3.9)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \mathbb{C}_i : \langle \varepsilon_i \rangle \quad (3.10)$$

onde \mathbb{C} , \mathbb{C}_m e \mathbb{C}_i representam os tensores de rigidez elásticos do material compósito, da matriz e da inclusão.

De forma análoga aos tensores de rigidez elásticos, os tensores de flexibilidade elásticos do material também objetivam estabelecer uma relação entre o tensor Tensão de Cauchy e o tensor de Deformação Infinitesimal. Os tensores de flexibilidade para o compósito, a matriz e a inclusão estão representados nas relações constitutivas médias apresentadas nas

Equações (3.11), (3.12) e (3.13) (BARBOSA, 2010).

$$\langle \varepsilon \rangle = \mathbb{D} : \langle \sigma \rangle \quad (3.11)$$

$$\langle \varepsilon_m \rangle = \mathbb{D}_m : \langle \sigma_m \rangle \quad (3.12)$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \mathbb{D}_i : \langle \sigma_i \rangle \quad (3.13)$$

Comparando as Equações (3.8) - (3.10) com as Equações (3.11) - (3.13) observa-se que os tensores de flexibilidade podem ser obtidos a partir da inversão do respectivo tensor de rigidez.

Os tensores de rigidez e de flexibilidade são de quarta ordem e obedecem às leis de transformações de tensores (QU; CHERKAOUI, 2006). Além disso, frequentemente a relação constitutiva entre o tensor Tensão de Cauchy e o tensor de Deformação Infinitesimal é referida como Lei de Hooke Generalizada em que se considera o material homogêneo e isótropo. Neste caso, o tensor de rigidez elástico constitutivo apresenta-se da seguinte forma (KALIAKIN, 2017):

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

onde \mathbf{E} e ν são respectivamente o módulo de elasticidade longitudinal e o Coeficiente de Poisson do material.

Com base nas Equações (3.2) - (3.7) é possível obter a tensão média em função da tensão média da matriz e da inclusão como representado na Equação (3.15) (LI; WANG, 2018).

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \left[\frac{V_m}{V} \int_{V_m} \sigma_m(x) dV + \frac{V_i}{V} \int_{V_i} \sigma_i(x) dV \right] \quad (3.15)$$

Definindo as frações volumétricas da inclusão e da matriz respectivamente como:

$$f_i = \frac{V_i}{V} \quad (3.16)$$

$$f_m = \frac{V_m}{V} = (1 - f_i) \quad (3.17)$$

Explicitando a Equação (3.15) em função das tensões médias da matriz e da inclusão e de suas respectivas frações volumétricas definidas anteriormente, obtém-se a Equação (3.18) para a tensão média no compósito.

$$\langle \sigma \rangle = (1 - f_i) \langle \sigma_m \rangle + f_i \langle \sigma_i \rangle \quad (3.18)$$

Seguindo etapas semelhantes, pode-se demonstrar que a Equação (3.19) representa deformação média no compósito.

$$\langle \varepsilon \rangle = (1 - f_i) \langle \varepsilon_m \rangle + f_i \langle \varepsilon_i \rangle \quad (3.19)$$

3.4 Problema de valor de contorno

As condições de contorno aplicadas ao EVR influenciam diretamente a taxa de convergência para um comportamento efetivo adequado (BÖHM, 2007) . Dessa forma, a resolução de um problema auxiliar de contorno aplicado sobre o EVR, também conhecido como problema de concentração, é essencial para a formulação macroscópica do comportamento do material. Este problema trata da obtenção dos campos de tensão e deformação locais presentes no EVR através do conhecimento das tensões e deformações macroscópica. Além disso, sua resolução possibilita modelar mecanicamente a interação entre as fases do material heterogêneo (DUTRA, 2012).

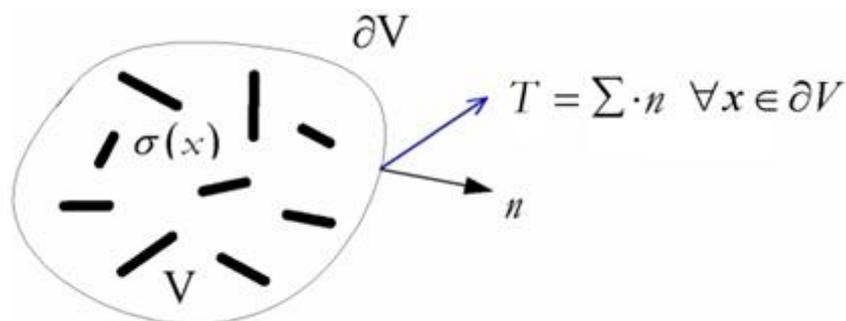
As condições de contorno adotadas para a resolução desse problema podem ser de dois tipos: de tensão homogênea ou de deformação homogênea. Ambas condições tendem a ser equivalentes quando a dimensão características das heterogeneidades é muito menor que a dimensão característica do EVR (HILL, 1967).

Adotando condições de contorno homogênea em tensão, define-se as tensões superficiais prescritas no contorno T de acordo com a Equação (3.20) (DUTRA, 2012).

$$T(x) = \Sigma n(x) \quad (3.20)$$

onde Σ é o tensor de tensão macroscópico e n é o vetor normal ao contorno do EVR como mostrado na Figura 16.

Figura 16 - Condições de contorno em tensão homogênea aplicadas ao EVR



Fonte: Dutra (2012)

Dado a Equação (3.20), Li e Wang (2018) descrevem um teorema muito útil que

estabelece a igualdade entre o campo de tensão médio no EVR $\langle \sigma \rangle$ e o tensor de tensão macroscópica Σ para condições de contorno de tensão homogênea, como apresentado a seguir:

$$\langle \sigma \rangle = \Sigma \quad (3.21)$$

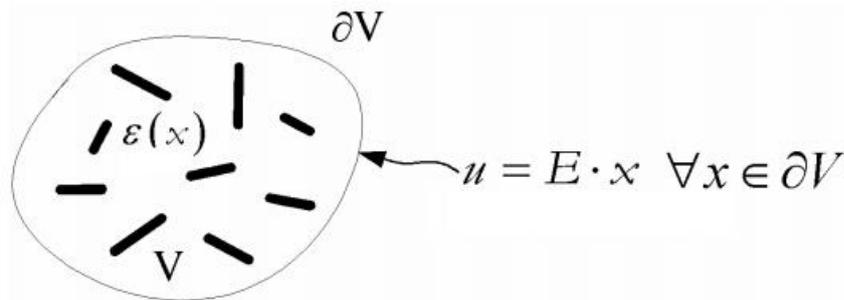
Esta equação demonstra a equivalência entre o campo de tensão médio volumétrico do meio microscópico e a tensão homogênea aplicada no contorno do EVR.

Da mesma forma, para condições de contorno homogênea em deformação, adota-se deslocamentos prescritos no contorno u de acordo com a seguinte Equação (3.22) (DUTRA, 2012).

$$u(x) = Ex \quad (3.22)$$

onde E é o tensor de deformação macroscópico e x é um vetor posição do contorno como mostrado na Figura 17.

Figura 17 - Condições de contorno em deformação homogênea aplicadas ao EVR



Fonte: Dutra (2012)

Para um EVR sujeito apenas a deslocamentos prescritos na região de seu contorno, Li e Wang (2018) apresentam um teorema que mostra que o campo de deformação médio do EVR $\langle \epsilon \rangle$ é igual ao tensor de deformação macroscópico E .

$$\langle \epsilon \rangle = E \quad (3.23)$$

Da mesma forma que as condições de tensão homogênea, verifica-se que é possível instituir uma equivalência do campo de deformação médio local com a deformação macroscópica aplicada no contorno de um EVR. Estas conclusões são de significativa importância na modelagem micromecânica do comportamento macroscópico de um material.

3.5 Lema de Hill

A abordagem micromecânica baseada na teoria do campo médio utiliza um importante lema desenvolvido por Hill (1967) através da análise do comportamento elástico de

misturas com inclusões imersas em uma matriz elástica com propriedades diferentes.

O Lema de Hill afirma que o trabalho virtual em macroescala de um ponto em um material heterogêneo é igual à média do trabalho virtual em microescala realizados pelos campos de tensão e deformação dentro do EVR correspondente (LI; WANG, 2018; LORENCI, 2013; TEIXEIRA, 2012). Estas considerações estão expressas na Equação (3.24).

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle = \langle \sigma \rangle : \langle \varepsilon \rangle \quad (3.24)$$

O lema de Hill, também chamado de condição energética de Hill, é de suma importância para o desenvolvimento dos modelos micromecânicos pois institui a equivalência energética entre o meio homogêneo idealizado no EVR e o meio heterogêneo presente na microestrutura real do compósito, sendo independente das propriedades mecânicas dos materiais constitutivos ou geometria do meio (AGUIAR, 2000).

3.6 Tensores de concentração de tensão e deformação

Os modelos de micromecânica baseados na teoria do campo médios utilizam tensores de concentração de quarta ordem para relacionar os tensores de tensão e deformação médios na matriz ou na inclusão com os respectivos tensores de tensão ou deformação médios macroscópicos do material compósito. Tais modelos, visam determinar o tensor elástico efetivo do material compósito através das propriedades elásticas dos materiais constituintes, suas frações volumétricas e da correta qualificação numérica dos tensores de concentração. Logo, o objetivo principal desses modelos é definir um tensor de concentração de tensão ou deformação que relacione a tensão ou deformação média dentro da inclusão às condições de contorno aplicadas (MEDEIROS; PARENTE; DE MELO, 2019).

A formulação a seguir descrita por Costa (2017) e Barbosa (2010) deduz os tensores de concentração de tensão e deformação para o caso de material compósito constituído por duas fases (matriz e inclusão).

Combinando as Equações constitutivas (3.8) - (3.10) e a Equação (3.18) pode-se encontrar a Equação (3.25).

$$(\mathbb{C} - \mathbb{C}_m) : \langle \varepsilon \rangle = f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \langle \varepsilon_i \rangle \quad (3.25)$$

Esta equação representa uma equação básica da micromecânica que descreve uma resposta macroscópica média sobre o EVR em função das propriedades elásticas das fases constituintes e da respectiva resposta microscópica média.

Realizando um procedimento análogo, pode-se encontrar uma equação básica da micromecânica em termos dos tensores de flexibilidade e tensões médias.

$$(\mathbb{D} - \mathbb{D}_m): \langle \sigma \rangle = fi(\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m): \langle \sigma_i \rangle \quad (3.26)$$

Explicitando os tensores de deformação e tensão média na inclusão respectivamente nas Equações (3.25) e (3.26), obtém-se as Equações (3.27) e (3.28):

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{fi} (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1}: (\mathbb{C} - \mathbb{C}_m): \langle \varepsilon \rangle \quad (3.27)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{fi} (\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m)^{-1}: (\mathbb{D} - \mathbb{D}_m): \langle \sigma \rangle \quad (3.28)$$

Comparando as Equações (3.27) e (3.28) com a definição dada de tensor de concentração, deduz-se que os tensores de concentração de tensão \mathbb{A}_i e de deformação \mathbb{B}_i para a inclusão podem ser representados respectivamente pelas seguintes equações:

$$\mathbb{A}_i = \frac{1}{fi} (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1}: (\mathbb{C} - \mathbb{C}_m) \quad (3.29)$$

$$\mathbb{B}_i = \frac{1}{fi} (\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m)^{-1}: (\mathbb{D} - \mathbb{D}_m) \quad (3.30)$$

Desse modo, pode-se expressar a tensão e deformação média na inclusão respectivamente em função da tensão e deformação média por meio das Equações (3.31) e (3.32).

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \mathbb{A}_i: \langle \varepsilon \rangle \quad (3.31)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \mathbb{B}_i: \langle \sigma \rangle \quad (3.32)$$

Analogamente, define-se os tensores de concentração de tensão e de deformação para a matriz por meio das Equações (3.33) e (3.34).

$$\mathbb{A}_m = -\frac{1}{fm} (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1}: (\mathbb{C} - \mathbb{C}_i) \quad (3.33)$$

$$\mathbb{B}_m = -\frac{1}{fm} (\mathbb{D}_i - \mathbb{D}_m)^{-1}: (\mathbb{D} - \mathbb{D}_i) \quad (3.34)$$

E logo, pode-se determinar que:

$$\langle \varepsilon_m \rangle = \mathbb{A}_m: \langle \varepsilon \rangle \quad (3.35)$$

$$\langle \sigma_m \rangle = \mathbb{B}_m: \langle \sigma \rangle \quad (3.36)$$

3.7 Método da inclusão equivalente de Eshelby

O problema da inclusão equivalente de Eshelby diz respeito à incompatibilidade entre os campos elásticos gerados pelas fases constituintes de materiais compósitos. Esta incompatibilidade ocorre quando o meio homogêneo elástico (matriz) é perturbado por uma região imersa (inclusão) que possui propriedades elásticas diferentes do meio homogêneo. Para

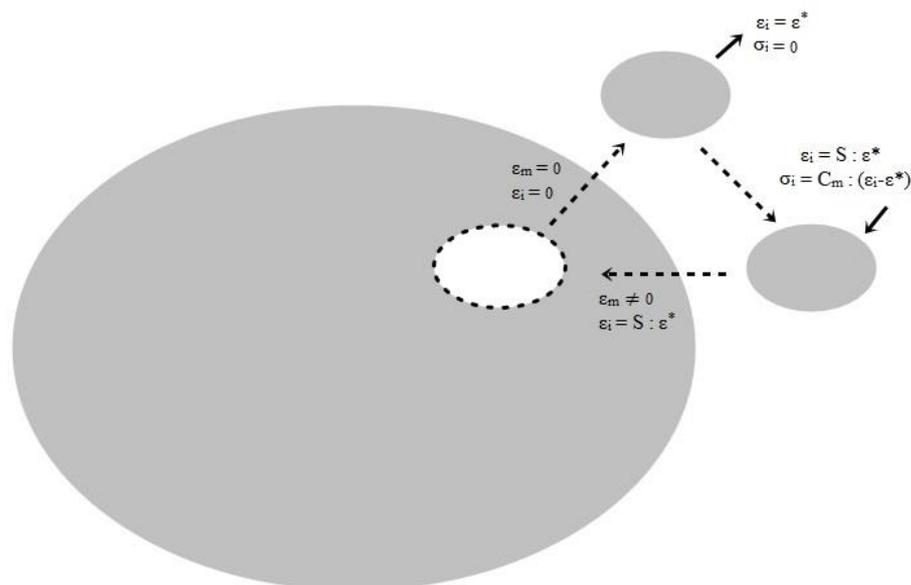
resolver este problema, Eshelby (1957) admite a existência de um campo de deformação fictício $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ denominado “eigenstrain” que, segundo Li e Wang (2018), representa a deformação devido ao arranjo de heterogeneidades, expansão, tensão plástica, tensão residual, transformação de fase, etc., todos os quais, quando aplicados homogeneamente, produzem campo de deformação sem gerar tensões.

No método da inclusão equivalente desenvolvido para resolver este problema, Eshelby (1957) inicialmente considera um corpo homogêneo contendo uma inclusão elipsoidal constituída com o mesmo material e livre de tensão e deformação. Posteriormente, utiliza-se de conceitos da teoria da elasticidade e do método da Função de Green para relacionar por meio de um tensor de quarta ordem \mathbb{S} a deformação uniforme $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ (admitida sobre a inclusão na ausência de material circundante) com a deformação sobre a inclusão $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ devido a influência restritiva imposta pela presença da matriz em seu entorno (LI; WANG, 2018; BARBOSA, 2010).

Aplicando o processo ilustrado na Figura 18, Eshelby (1957) obteve a Equação (3.37), em que \mathbb{S} é o tensor de Eshelby que depende das propriedades elásticas da matriz e da geometria da inclusão.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbb{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3.37)$$

Figura 18 - Determinação dos campos de tensão e deformação a partir de uma deformação $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ prescrita em um contorno elipsoidal

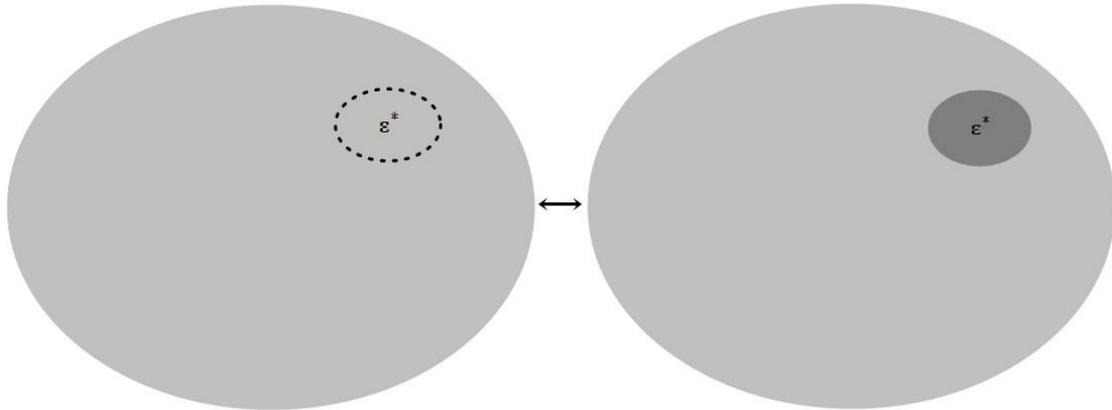


Fonte: Do Autor

Em seguida, Eshelby observou que a solução do problema da inclusão equivalente consiste em determinar a deformação $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ que deve ser imposta na inclusão elipsoidal de mesmo

material da matriz, para que os campos de deformação e tensão gerados na mesma sejam equivalentes aqueles gerados dentro da inclusão constituída com material diferente da matriz (Figura 19) (COSTA, 2017).

Figura 19 - Método da inclusão equivalente



Fonte: Do Autor

A formulação descrita por Barbosa (2010) exposta a seguir permite determinar a deformação uniforme ε^* e os tensores de concentração de tensão e deformação da inclusão, que relacionam os valores das quantidades médias no compósito com aquelas correspondentes às fases constituintes.

Inicialmente, utiliza-se a deformação elástica na inclusão descrita como a diferença entre a deformação total na inclusão e a deformação eigenstrain como apresentado na Equação (3.38).

$$\varepsilon_{elas} = \varepsilon_i - \varepsilon^* \quad (3.38)$$

Posteriormente relaciona-se a relação constitutiva para a deformação elástica com a relação constitutiva para a inclusão como representado na Equação (3.39).

$$\sigma_i = \mathbb{C}_m : (\varepsilon_i - \varepsilon^*) = \mathbb{C}_i : \varepsilon_i \quad (3.39)$$

Pode-se simplificar a Equação (3.39) para explicitar a variável correspondente a deformação eigenstrain como mostrado na Equação (3.40):

$$\varepsilon^* = \mathbb{C}_m^{-1} : (\mathbb{C}_m - \mathbb{C}_i) : \varepsilon_i \quad (3.40)$$

Esta equação é considerada a equação geral do método da inclusão equivalente visto que relaciona a deformação eigenstrain com a deformação total que ocorre na inclusão constituída com material diferente da matriz.

Combinando as Equações (3.40) e (3.37), pode-se deduzir as expressões correspondentes para os tensores de concentração de deformação e de tensão na inclusão através da consideração de uma deformação uniforme prescrita no contorno do EVR e das respectivas relações de concentração. Simplificando algebricamente, obtém-se as Equações (3.41) e (3.42).

$$\mathbb{A}_i = [I - \mathbb{S} : \mathbb{C}_m^{-1} : (\mathbb{C}_m - \mathbb{C}_i)]^{-1} \quad (3.41)$$

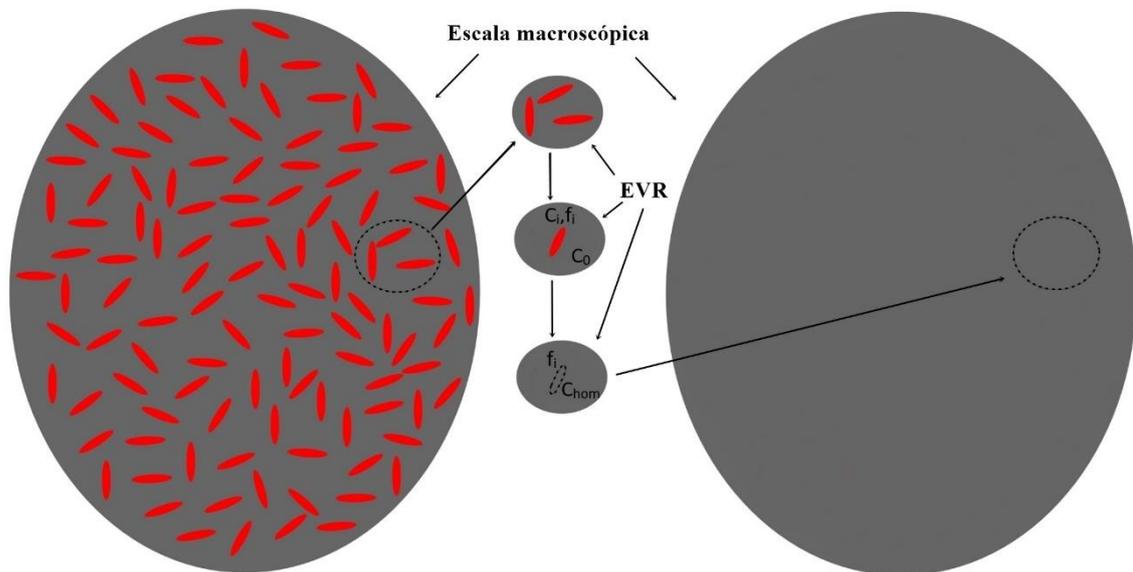
$$\mathbb{B}_i = \mathbb{C}_i : [I - \mathbb{S} : \mathbb{C}_m^{-1} : (\mathbb{C}_m - \mathbb{C}_i)]^{-1} : \mathbb{D} \quad (3.42)$$

Em que I é o tensor identidade.

Em resumo o princípio da inclusão equivalente de Eshelby substitui o corpo heterogêneo inicial por um corpo homogêneo, dentro do qual é prescrito um campo de deformação uniforme ε^* , de tal forma que os campos de tensão e deformação no campo homogeneizado são mecanicamente equivalentes aos do campo não homogêneo original (LI; WANG, 2018). Este princípio fundamental apresentado por Eshelby permitiu o desenvolvimento de modelos micromecânicos, como os modelos de Mori-Tanaka e Auto Consistente, capazes de satisfazer o equilíbrio local e garantir a compatibilidade de deformações (LORENCI, 2013).

A Figura 20 apresenta o processo de homogeneização baseado no método da inclusão equivalente de Eshelby em um meio infinito de propriedades elásticas (\mathbb{C}_0) que é utilizado pelos modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente para determinar o tensor elástico homogeneizado (\mathbb{C}_{hom}).

Figura 20 - Processo de homogeneização baseado no método da inclusão equivalente



Fonte: Do Autor

3.8 Tensor de Eshelby

O tensor de Eshelby apresentado no método da inclusão equivalente é um tensor de quarta ordem que relaciona o campo de deformações na inclusão com um campo uniforme de deformação que simula os efeitos das heterogeneidades existentes em um compósito. Para uma deformação uniforme prescrita, o tensor de Eshelby de uma inclusão elíptica ou elipsoidal é constante independentemente do tamanho da inclusão (SAUER; WANG; LI, 2008). Este tensor é necessário para a aplicação de modelos baseados no método da inclusão equivalente em um meio infinito de Eshelby, tendo sua configuração significativa influência nas propriedades efetivas do compósito.

Segundo Teixeira (2012), o tensor de Eshelby apresenta as seguintes propriedades:

a) é simétrico entre o primeiro e o segundo par de índices, porém não apresenta simetria na permutação desses pares, ou seja:

$$b) \mathbb{S}_{ijkl} = \mathbb{S}_{jikl} = \mathbb{S}_{ijlk} \text{ e } \mathbb{S}_{ijkl} \neq \mathbb{S}_{klij} \quad c) \quad (3.43)$$

d) não é influenciado pelas propriedades do material da inclusão.

e) depende apenas da geometria da inclusão e das propriedades elásticas do meio que a contém. Para o caso de uma inclusão contida em um meio homogêneo, o tensor de Eshelby depende somente do Coeficiente de Poisson da matriz (ν_m) e dos parâmetros da geometria da inclusão.

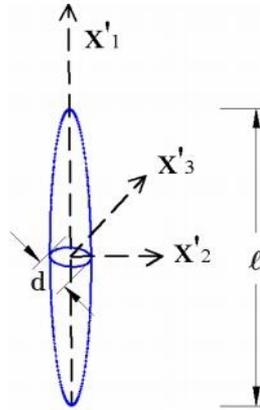
Em geral, o tensor de Eshelby se apresenta da seguinte forma (COSTA, 2017):

$$S = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 & 0 & S_{2332} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3131} & 0 & 0 & S_{3113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1212} & 0 & 0 & S_{1221} \\ 0 & 0 & 0 & S_{3223} & 0 & 0 & S_{3232} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1331} & 0 & 0 & S_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2112} & 0 & 0 & S_{2121} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Baseados em conceitos da teoria da elasticidade linear e considerando os parâmetros geométricos da inclusão elipsoidal (Figura 21), pode-se obter as componentes do tensor de Eshelby de forma geral como descritas no trabalho de Tandon e Weng (1984). A partir dessa formulação, o tensor de Eshelby pode ser generalizado para outros tipos de inclusões como inclusões cilíndricas, esféricas e em forma de discos achatados como apresentado no

trabalho desenvolvido por Suvorov e Dvorak (2002).

Figura 21 - Parâmetros geométricos de uma inclusão elipsoidal



Fonte: Dutra (2012)

No presente trabalho, considera-se fibras cilíndricas curtas com uma razão de aspecto definida por $r = d/l$, onde d é o diâmetro da fibra e l é o comprimento da fibra. Neste caso, as componentes não nulas do tensor de Eshelby podem ser obtidas da seguinte forma (COSTA, 2017):

$$S_{1111} = \frac{2 - \nu_m}{1 - \nu_m} r^2 \left(\ln\left(\frac{2}{r}\right) - \frac{5 - 2\nu_m}{2(2 - \nu_m)} \right) \quad (3.45)$$

$$S_{2222} = \frac{5 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} - \frac{1 - 2\nu_m}{4(1 - \nu_m)} r^2 \left(\ln\left(\frac{2}{r}\right) - \frac{1 - 8\nu_m}{4(1 - 2\nu_m)} \right) \quad (3.46)$$

$$S_{2211} = \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)} - \frac{1 + \nu_m}{2(1 - \nu_m)} r^2 \left(\ln\left(\frac{2}{r}\right) - \frac{3 + 2\nu_m}{2(1 + \nu_m)} \right) \quad (3.47)$$

$$S_{2233} = \frac{1 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} - \frac{1 - 2\nu_m}{4(1 - \nu_m)} r^2 \left(\ln\left(\frac{2}{r}\right) - \frac{5 - 8\nu_m}{4(1 - 2\nu_m)} \right) \quad (3.48)$$

$$S_{1122} = \frac{1 - 2\nu_m}{2(1 - \nu_m)} r^2 \left(\ln\left(\frac{2}{r}\right) - \frac{3 - 4\nu_m}{2(1 - 2\nu_m)} \right) \quad (3.49)$$

$$S_{2323} = \frac{3 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} \quad (3.50)$$

$$S_{1212} = \frac{1}{4} \quad (3.51)$$

3.9 Modelo de Mori-Tanaka

O modelo de Mori-Tanaka baseia-se no princípio da inclusão equivalente de Eshelby e em um lema desenvolvido por Mori e Tanaka (1973) que demonstra que a deformação média em uma matriz elipsoidal, a qual está circunscrita uma inclusão elipsoidal sujeita a uma deformação eigenstrain, é nula. Ademais, este modelo utiliza em seu problema

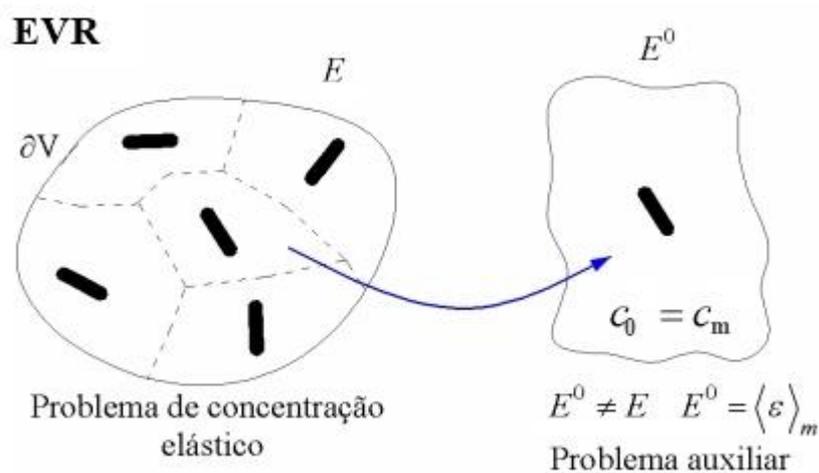
auxiliar o princípio de que a inclusão equivalente é envolta pelo meio elástico matricial e não por um meio homogeneizado (SOARES, 2010). Dessa forma, no problema auxiliar o tensor das propriedades elásticas do meio infinito (C_0) equivale ao tensor das propriedades elásticas da matriz (C_m).

Segundo Costa (2017) a metodologia do modelo consiste em substituir as inclusões do compósito por uma única inclusão com fração volumétrica e condições de contorno equivalentes, e em seguida aplicar o método da inclusão equivalente para obter o tensor de rigidez do material efetivo que permite determinar as propriedades do material.

O modelo de Mori-Tanaka visa levar em consideração a interação entre as inclusões e conseqüentemente uma significativa fração volumétrica de heterogeneidades presentes no compósito. (DUTRA, 2012) Logo, a deformação homogênea E imposta no contorno do EVR não é mais válida por não considerar as deformações perturbadoras oriundas da interação entre as inclusões. Desta forma modifica-se a condição de contorno do problema auxiliar de forma a considerar a influência das demais inclusões no EVR (AGUIAR, 2000). Isto é feito por meio da suposição da equivalência entre o campo de deformação constante E^0 no contorno do EVR e o campo de deformações médio da matriz, ou seja $E^0 = \langle \epsilon_m \rangle$ (LORENCI, 2013). Desta maneira, estabelece-se a dependência do carregamento constante em deformação de cada uma das heterogeneidades com as demais heterogeneidades existentes através da deformação média da matriz (DUTRA, 2012).

A Figura 22 ilustra o esquema de homogeneização de Mori-Tanaka descrito nos dois parágrafos anteriores.

Figura 22 - Método de homogeneização de Mori-Tanaka



Fonte: Dutra (2012)

Baseado nos conceitos apresentados, Barbosa (2010) descreve a formulação

necessária a obtenção do tensor efetivo homogeneizado de Mori-Tanaka como mostrado a seguir:

Para a inclusão do problema auxiliar, que está sujeito a condição de contorno $E^0 = \langle \varepsilon_m \rangle$, a deformação média pode ser escrita adicionando a deformação no contorno na equação de Eshelby (Equação (3.37)).

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \mathbb{S} : \varepsilon^* + \langle \varepsilon_m \rangle \quad (3.52)$$

Aplicando o método da inclusão equivalente e rearranjando os termos obtêm-se a Equação (3.53).

$$\langle \varepsilon_i \rangle = (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{C}_m : \varepsilon^* \quad (3.53)$$

Igualando a Equação (3.53) com a Equação (3.52), explicitando ε^* e substituindo-o na Equação (3.52), obtêm-se:

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \mathbb{A}_{dil} : \langle \varepsilon_m \rangle \quad (3.54)$$

Onde A_{dil} é o tensor de concentração diluído da inclusão determinado pela Equação (3.55).

$$\mathbb{A}_{dil} = [I - \mathbb{S} : \mathbb{C}_m^{-1} : (\mathbb{C}_m - \mathbb{C}_i)]^{-1} \quad (3.55)$$

Substituindo a Equação (3.54) na Equação (3.19) e expressando a deformação média na matriz em função da deformação média no EVR, pode-se escrever a Equação (3.56).

$$\langle \varepsilon_m \rangle = \mathbb{A}_m : \langle \varepsilon \rangle \quad (3.56)$$

Onde A_m é o tensor de concentração de deformação da matriz do método de Mori-Tanaka determinado pela Equação (3.57):

$$\mathbb{A}_m = [f_i \mathbb{A}_{dil} + (1 - f_i)I]^{-1} \quad (3.57)$$

Substituindo a Equação (3.56) na Equação (3.54), pode-se relacionar a deformação média na inclusão em função da deformação média no compósito por meio da Equação (3.56):

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \mathbb{A}_{dil} : \mathbb{A}_m : \langle \varepsilon \rangle \quad (3.58)$$

Substituindo as relações constitutivas médias da matriz e da inclusão (Equações (3.9) e (3.10)) na equação que representa a relação constitutiva média do compósito (Equação (3.18)) é possível obter a equação (3.59):

$$\langle \sigma \rangle = (1 - f_i) : \mathbb{C}_m : \langle \varepsilon_m \rangle + f_i \mathbb{C}_i : \langle \varepsilon_i \rangle \quad (3.59)$$

Por fim, substituindo as Equações (3.56) e (3.58) na Equação (3.59) e simplificando, obtêm-se a equação constitutiva geral do Modelo Mori-Tanaka (Equação 3.60):

$$\langle \sigma \rangle = \mathbb{C}_{hom}^{MT} : \langle \varepsilon \rangle \quad (3.60)$$

onde C_{hom}^{MT} é o tensor efetivo homogeneizado, dado pela Equação (3.61), que permite a obtenção das propriedades efetivas de materiais compósitos.

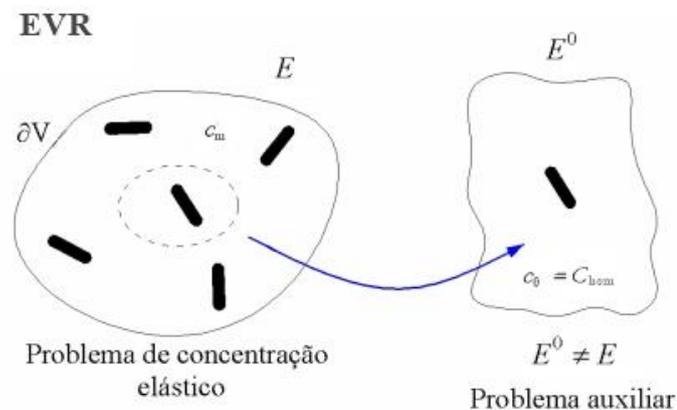
$$\mathbb{C}_{hom}^{MT} = [f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_{dil} + (1 - f_i) \mathbb{C}_m] : \mathbb{A}_m \quad (3.61)$$

3.10 Modelo Auto Consistente

Assim como o modelo de Mori-Tanaka, o modelo Auto Consistente considera o princípio da inclusão equivalente de Eshelby e uma inclusão única envolvida por um meio infinito (HILL, 1965). Porém a abordagem adotada difere-se por considerar que o meio infinito elástico é constituído pelo meio homogeneizado efetivo (BARBOSA, 2010). Ou seja, neste modelo a inclusão equivalente é envolta pelo meio cuja às propriedades elásticas são desconhecidas, desconsiderando, portanto, a existência da matriz no problema auxiliar. Tal consideração decorre da impossibilidade de aplicar a solução de Eshelby em um compósito em que não é possível identificar uma fase matriz devido a predominância e proximidade de inclusões. Por exemplo, em um policristal as inclusões estão diretamente em contato umas com as outras, impossibilitando a abordagem interativa entre as inclusões adotada no modelo de Mori-Tanaka (DUTRA, 2012).

O esquema de homogeneização do modelo Auto Consistente está representado na Figura 23.

Figura 23 - Método de homogeneização Auto Consistente



Fonte: Dutra (2012)

Dessa forma, para considerar a interação entre as inclusões no método de cálculo e consequentemente a resolução do problema de contorno, o modelo auto consistente substitui no tensor de concentração de deformação da inclusão (A_i) as propriedades elásticas da matriz pelas propriedades elásticas efetivas a serem determinadas como apresentado na Equação (3.62). Em razão disso, a interação entre as inclusões é considerada de modo implícito (DUTRA, 2012).

$$A_i = [I - S : C_{hom}^{-1} : (C_{hom} - C_i)]^{-1} \quad (3.62)$$

Com exceção da consideração do meio infinito como constituído pelas propriedades

elásticas efetivas do compósito, a metodologia deste modelo é a mesma apresentada para o modelo de Mori-Tanaka. A partir destas considerações, Barbosa (2010) descreve o processo para a determinação do tensor homogeneizado que representa as propriedades elásticas do compósito da seguinte forma:

Substituindo as relações de concentração da inclusão (Equações (3.41) e (3.42)) na equação que representa a deformação média do compósito em função da deformação média das fases (Equação (3.19)) obtêm-se:

$$\mathbb{A}_m = \frac{1}{(1 - f_i)} (I - f_i \mathbb{A}_i) \quad (3.63)$$

Substituindo as relações constitutivas (Equações (3.9) e (3.10)) e posteriormente as relações de concentração (Equações (3.41) e (3.42)) na equação que representa a tensão média no compósito em função das tensões médias das fases (Equação (3.18)) pode-se obter a equação (3.64).

$$\mathbb{C} : \langle \varepsilon \rangle = f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i : \langle \varepsilon \rangle + (1 - f_i) \mathbb{C}_m : \mathbb{A}_m : \langle \varepsilon \rangle \quad (3.64)$$

Substituindo a expressão obtida para \mathbb{A}_m anteriormente na Equação (3.64), encontra-se a equação que determina o tensor constitutivo homogeneizado do modelo auto consistente (Equação (3.65)) em que \mathbb{A}_i é o tensor de concentração de deformação definido anteriormente para este modelo na Equação (3.62).

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_m + f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \mathbb{A}_i \quad (3.65)$$

Observa-se que a solução da equação não pode ser obtida analiticamente, necessitando de uma solução iterativa para a determinação implícita do tensor homogeneizado. Dessa forma, a Equação (3.66) pode ser utilizado para a solução.

$$\mathbb{C}_{hom_{n+1}}^{AC} = \mathbb{C}_m + f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \left[I - S : \mathbb{C}_{hom_n}^{AC}{}^{-1} : (\mathbb{C}_{hom_n}^{AC} - \mathbb{C}_i) \right]^{-1} \quad (3.66)$$

onde na primeira interação, $\mathbb{C}_{hom_n}^{AC} = \mathbb{C}_m$ e n representa o passo iterativo que depende do critério de tolerância adotado como:

$$\frac{\| \mathbb{C}_{hom_n}^{AC} - \mathbb{C}_{hom_{n-1}}^{AC} \|}{\| \mathbb{C}_{hom_{n-1}}^{AC} \|} \leq tol \quad (3.67)$$

A vantagem do modelo auto consistente é que ele fornece equações relativamente simples para os parâmetros efetivos do compósito. No entanto, inconsistências podem surgir devido a consideração de uma inclusão definida apenas na escala microscópica contida em um meio infinito efetivo que está definido apenas na escala macroscópica (DUTRA, 2012). Essa hipótese contradiz diretamente o conceito de EVR tratado anteriormente, onde a separação de escalas é de fundamental importância para o processo de homogeneização.

3.11 Limites de Voigt e Reuss

Em outra abordagem, as propriedades efetivas de compósitos podem ser estimadas por análises de limites teóricos previamente estabelecidos, denominados limites variacionais. Os limites são obtidos por meio de princípios variacionais da teoria da elasticidade linear e então utilizados para estabelecer a propriedade efetiva do material.

Do ponto de vista físico, os princípios variacionais descrevem condições extremas para a mudança na energia de deformação produzida quando um corpo elástico isotrópico e homogêneo é alterado para um corpo anisotrópico e não homogêneo, enquanto deslocamentos de superfície ou trações são mantidos fixos (HASHIN; SHTRIKMAN, 1962). Com base nessa definição, obtém-se o limite superior da propriedade analisada por meio da utilização do princípio de mínimo em deformações, e de maneira análoga, obtém-se o limite inferior por meio do princípio de mínimo em tensões (AGUIAR, 2000).

Voigt (1889) e Reuss (1929) apresentaram modelos para prever as propriedades efetivas dos materiais compósitos com base em princípios variacionais. Estes modelos determinam a propriedade efetiva analisada por meio das relações entre as respectivas propriedades da matriz e da inclusão com suas frações volumétricas na mistura e pela consideração de um EVR representando a disposição das fases no compósito. No trabalho desenvolvido por Hill (1952) verifica-se que os modelos de Voigt e Reuss representam respectivamente o limite superior e inferior da propriedade efetiva analisada.

Voigt (1889) assume que as fases estão dispostas paralelamente no EVR e que possuem deformações uniformes e iguais quando submetidas a um carregamento mecânico. Assim, minimizando a energia potencial do compósito, a tensão média no EVR pode ser representada segundo a Equação (3.68).

$$\langle \sigma \rangle = \frac{V_m}{V} (\mathbb{C}_m : \varepsilon) + \frac{V_i}{V} (\mathbb{C}_i : \varepsilon) = \left(\frac{V_m}{V} \mathbb{C}_m + \frac{V_i}{V} \mathbb{C}_i \right) : \varepsilon \quad (3.68)$$

Comparando a Equação (3.68) com a equação constitutiva do material compósito, pode-se escrever o tensor constitutivo homogeneizado do compósito como:

$$\mathbb{C}_{hom}^{Voigt} = (1 - f_i) \mathbb{C}_m + f_i \mathbb{C}_i \quad (3.69)$$

Desse modo, o limite superior das propriedades elásticas do compósito pode ser obtido por meio das propriedades elásticas das fases constituintes ponderadas por suas respectivas frações volumétricas.

Reuss (1929) realiza uma análise semelhante assumindo que as fases constituintes estão dispostas em série e que suportam tensões uniformes e iguais quando submetidas a um

carregamento mecânico. Dessa forma, ao se minimizar a energia potencial do compósito, obtém-se a Equação (3.70) que representa a deformação média no EVR.

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{V_m}{V} (\mathbb{D}_m : \sigma) + \frac{V_i}{V} (\mathbb{D}_i : \sigma) = \left(\frac{V_m}{V} \mathbb{D}_m + \frac{V_i}{V} \mathbb{D}_i \right) : \sigma \quad (3.70)$$

De maneira análoga ao limite de Voigt, pode-se obter o limite inferior das propriedades elásticas do material compósito por meio da Equação (3.71).

$$\mathbb{C}_{hom}^{Reuss} = (1 - f_i) \mathbb{D}_m + f_i \mathbb{D}_i \quad (3.71)$$

As metodologias de Voigt e Reuss também são conhecidas como regra da mistura e constituem uma maneira simples e rápida de estimar as propriedades efetivas de um compósito (MEDEIROS; PARENTE; DE MELO, 2019). Porém, a utilização desses limites podem conduzir a resultados imprecisos devido a incapacidade de considerar a geometria das fases no método de cálculo, aproximando o comportamento macroscópico de maneira isotrópica (LORENCI, 2013). Em geral, a precisão destes modelos depende de condições especiais como em casos de materiais dispostos em paralelo ou em série.

Os limites de Voigt e Reuss adotam hipóteses que em geral não são válidas quando se observa o comportamento real do material compósito. Por exemplo, a hipótese de deformações constantes leva a uma violação do equilíbrio local e a hipótese de tensão constante impede a compatibilidade de deformação (GROSS; SEELIG, 2017). Devido a essas hipóteses, não é adequado determinar o Coeficiente de Poisson utilizando limites variacionais (HSIEH; TUAN, 2005).

Observa-se que o limite de Voigt pode ser interpretado como uma média aritmética e o limite de Reuss pode ser considerado como uma média geométrica (LI; WANG, 2018). Logo, na maioria dos casos, as propriedades elásticas efetivas não se apresentam próxima dos limites, uma vez que se os valores da rigidez da matriz e da inclusão diferirem muito, o intervalo definido pelos limites de Voigt e Reuss é significativamente amplo (TEIXEIRA, 2012). Portanto, estes métodos são geralmente utilizados em conjunto com outros modelos que caracterizam a forma, distribuição e morfologia de cada fase em seu método de cálculo, de modo a indicar se os resultados obtidos são razoáveis.

Devido a imprecisão característica destes limites, que muitas vezes apresentam valores muito distintos, uma abordagem pragmática para uma boa aproximação das propriedades efetivas do compósito é adotar o valor médio dos limites (Equação (3.72)) (GROSS; SEELIG, 2017).

$$\mathbb{C}_{hom}^{Médio} = \frac{1}{2} (\mathbb{C}_{hom}^{Voigt} + \mathbb{C}_{hom}^{Reuss}) \quad (3.72)$$

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma ferramenta amplamente utilizada para a resolução de diversos problemas na área da engenharia, aproximando por processos numéricos computacionais a solução desejada de problemas complexos não possíveis de serem solucionados por modelos analíticos. O desenvolvimento de sua metodologia inovadora na década de 60 em conjunto com a facilidade de acesso ao computador tornou este método viável na análise de estruturas de geometria arbitrária, constituída por materiais compósitos e sujeitas a qualquer tipo de carregamento (AZEVEDO, 2003).

Antes do surgimento do MEF, a análise dos meios contínuos era realizada por meio de séries de Fourier que por sua complexidade só eram aplicáveis a meios contínuos homogêneos e de geometria simples (AZEVEDO, 2003). A praticidade deste método tornou os métodos analíticos obsoletos na análise de sistemas heterogêneos sujeitos a diversas condições de contorno, restringindo sua aplicação ao fornecimento de soluções teóricas para validar os métodos numéricos. Para explicar a superioridade do MEF na análise estrutural, Segerlind (1976) afirma que o método dos elementos finitos se distingue de outros procedimentos numéricos por duas características:

- a) o sistema de equações algébricas é gerado através de uma formulação integral;
- b) o método utiliza funções contínuas suaves por partes para aproximar quantidades desconhecidas.

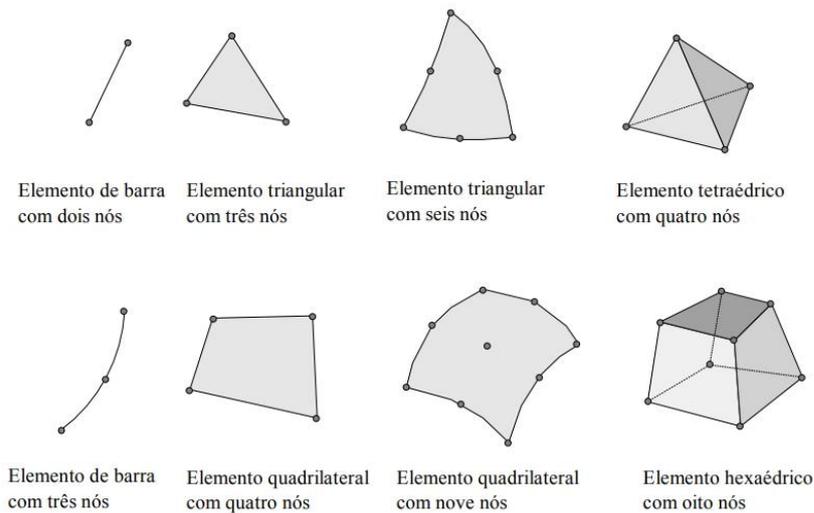
O MEF é um processo numérico que visa analisar estruturas através de conceitos fundamentais da mecânica dos meios contínuos. Este método é utilizado como um procedimento numérico para resolver problemas físicos governados por uma equação diferencial ou um teorema da energia (SEGERLIND, 1976). O princípio consiste em aproximar a solução de problemas de valor de fronteira, caracterizado por equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais, por meio da subdivisão da geometria do problema em elementos menores, chamados elementos finitos, nos quais a aproximação da solução exata pode ser obtida por interpolação de uma solução aproximada (COSTA, 2014).

Os elementos finitos são conectados entre si por pontos denominados nós, de forma que quanto maior o número de nós na composição de um elemento, maior a sua complexidade. (FARIA, 2017). Dessa forma, quanto mais discretizado for a estrutura, devido a quantidade e complexidade dos elementos a serem modelados, maior será o refinamento da malha de elementos finitos e conseqüentemente maior o tempo computacional para processar os cálculos

necessário para a resolução do problema (MORAES, 2015). No processo de refinamento, a malha de elementos finitos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho dos elementos, com o número e o tipo de funções de interpolação sobre cada elemento mantendo-se fixos (NASCIMENTO, 2005).

A malha de elementos finitos representa o conjunto de elementos finitos e nós ou pontos nodais oriundos da subdivisão realizada na estrutura, e deve se aproximar da real geometria da estrutura analisada. Os elementos podem apresentar diversas formas geométricas como triangular, quadrilateral, cúbica etc. dependendo do tipo e da dimensão do problema (Figura 24). Logo, a escolha do elemento é uma importante etapa para a eficiência geral do MEF, visto que cada elemento possui sua matriz de rigidez e sua formulação de interpolação entre nós (FARIA, 2017).

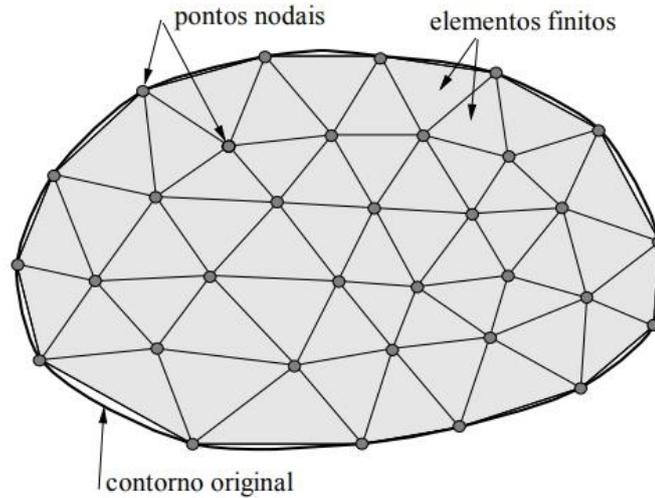
Figura 24 - Diferentes tipos de elementos finitos



Fonte: Souza (2003)

A Figura 25 apresenta a malha de elementos finitos para geometria triangular dos elementos e problema plano.

Figura 25 - Malha de elementos finitos



Fonte: Souza (2003)

Com base no processo de refinamento da malha, verifica-se que a precisão do método depende essencialmente da quantidade de nós e elementos, além do tamanho e tipo dos elementos que compõe a malha. Assim, a convergência para a solução exata do problema decorre à medida que o tamanho dos elementos finitos tende a zero, e conseqüentemente, a quantidade de nós tende a infinito (SOUZA, 2003).

Segundo Azevedo (2003) a formulação do MEF requer a existência de uma equação integral, de modo que uma integral sobre um domínio complexo (de volume V_d) seja equivalente a um somatório de integrais estendidos a sub domínios de geometria simples (de volume V_k). Tal equação pode ser representada por uma integral de volume de uma função f da seguinte forma:

$$\int_{V_d} f dV = \sum_{k=1}^n \int_{V_k} f dV \quad (4.1)$$

Tal que:

$$V_d = \sum_{k=1}^n V_k \quad (4.2)$$

O somatório representado na Equação (4.1) promove o processo denominado assemble (montagem do domínio), que apresenta muitas semelhanças com o que é efetuado no processo de produção das estruturas reticuladas, como a viga, em que os materiais são misturados até se obter uma estrutura macroscopicamente homogênea.

Em resumo, Assis (2019) lista os principais passos para a aplicação do método dos elementos finitos como descrito a seguir:

- a) pré-processamento: geração da malha de elementos finitos;
- b) formulação do elemento: desenvolvimento de equações que descrevam o comportamento do elemento;
- c) montagem: desenvolvimento de um sistema de equações para o domínio global a partir dos elementos finitos;
- d) resolução do sistema de equações;
- e) pós-processamento: determinação das grandezas de interesse.

4.1 Descrição geral do software ABAQUS ®

O MEF baseado em deslocamentos utiliza funções aproximadas nos elementos finitos criados para caracterizar os campos de deslocamento da estrutura. Portanto, para que estas funções sejam definidas e resolvidas, é necessário o cálculo do equilíbrio nos diversos elementos criados. Este processo gera um elevado número de equações algébricas que só podem ser resolvidas com o auxílio de um computador devido a capacidade de aplicar procedimentos padrões sucessivamente.

Existem diversos softwares comerciais que utilizam o MEF em suas análises estruturais como o ANSYS®, o LS-DYNA®, o SAP2000®, o STRAP® e o ABAQUS®. Esses sistemas possibilitam através do MEF uma análise de diversos problemas de valores de contorno, como por exemplo análises do tipo (SOARES, 2010):

- a) estática;
- b) modal: determinação de modos e frequências;
- c) superposição modal: avaliação de problemas de vibrações forçadas;
- d) integração direta da equação do movimento resultante na discretização espacial utilizando um esquema de integração implícito.

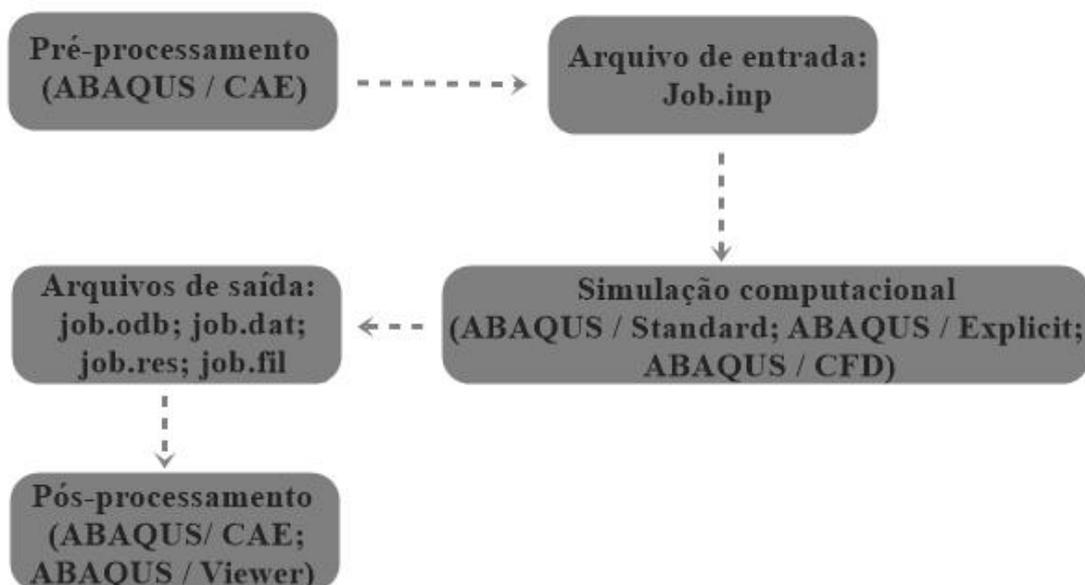
Destes softwares, utiliza-se para a avaliação dos modelos micromecânicos o software ABAQUS®, pois este, além de ser capaz de resolver análise lineares e simulações complexas, permite a implementação de sub-rotinas em uma linguagem de programação amplamente conhecida (FORTRAN 77), oferecendo maior liberdade ao usuário na modelagem estrutural.

Os principais componentes individuais do ABAQUS® são (ABAQUS, 2013):

- a) ABAQUS / Standard: ferramenta de simulação que pode solucionar uma ampla gama de problemas lineares e não lineares que envolvem a resposta estática, dinâmica, térmica, elétrica e eletromagnética dos componentes;
- b) ABAQUS / Explicit: ferramenta de simulação que realiza análise dinâmica, não linear, transitória e dinâmica de sólidos e estruturas utilizando integração explícita no tempo. Além de ser altamente eficaz para aplicações quase estáticas que envolvem comportamento não linear descontínuo;
- c) ABAQUS / CFD: ferramenta de simulação computacional da dinâmica de fluidos com amplo suporte para pré-processamento, simulação e pós processamento em ABAQUS / CAE.
- d) ABAQUS / CAE: é dividido em módulos, onde cada módulo define um aspecto lógico do processo de modelagem; por exemplo, definindo a geometria, definindo propriedades do material, gerando uma malha, enviando trabalhos de análise e interpretando resultados. Portanto, apresenta a capacidade de pré-processamento e pós-processamento.
- e) ABAQUS / Viewer: apresenta a capacidade de pós-processamento do módulo de visualização.

O modo como esses componentes são utilizados pelo usuário depende do tipo e da complexidade do problema. Em geral, uma análise completa no ABAQUS® consiste nas etapas de pré-processamento, simulação numérica e pós-processamento conforme a Figura 26.

Figura 26 - Etapas de análise estrutural do software ABAQUS®



O ABAQUS® é um software que utiliza o MEF para modelar numericamente problemas complexos de engenharia, envolvendo relações constitutivas lineares e não-lineares, estruturas com geometrias complexas, ocorrência de grandes deformações, carregamentos transientes etc. Em geral, na maioria das simulações é necessário que o usuário forneça a geometria da estrutura, as condições de apoio, o carregamento aplicado e o comportamento linear ou não-linear do material por meio do modelo constitutivo adotado ao processo de cálculo. Sua extensa biblioteca de elementos finitos permite simular o comportamento da maioria dos materiais utilizados na engenharia, incluindo metais, polímeros, materiais naturais como a madeira, solos e as rochas e até materiais compósitos como o concreto armado.

No entanto, para analisar numericamente um material pouco conhecido da indústria da construção civil (como o CUADRF), o processo de modelagem não é simples, por envolver uma grande quantidade de parâmetros que regem o comportamento de um material e que nem sempre estão disponíveis no software. Por isso, o ABAQUS® dispõe da alternativa da implementação de sub-rotinas que oferecem ao usuário a possibilidade de modificar os modelos constitutivos existentes em sua biblioteca ou incluir novos modelos (como os micromecânicos) para aproximar a simulação do comportamento real do material.

4.2 Sub-rotina UMAT

O ABAQUS® fornece aos seus usuários uma ampla variedade de sub-rotinas que permite adaptar as ferramentas de análises do software aos requisitos do problema. Dentre essas sub-rotinas pode-se citar as seguintes:

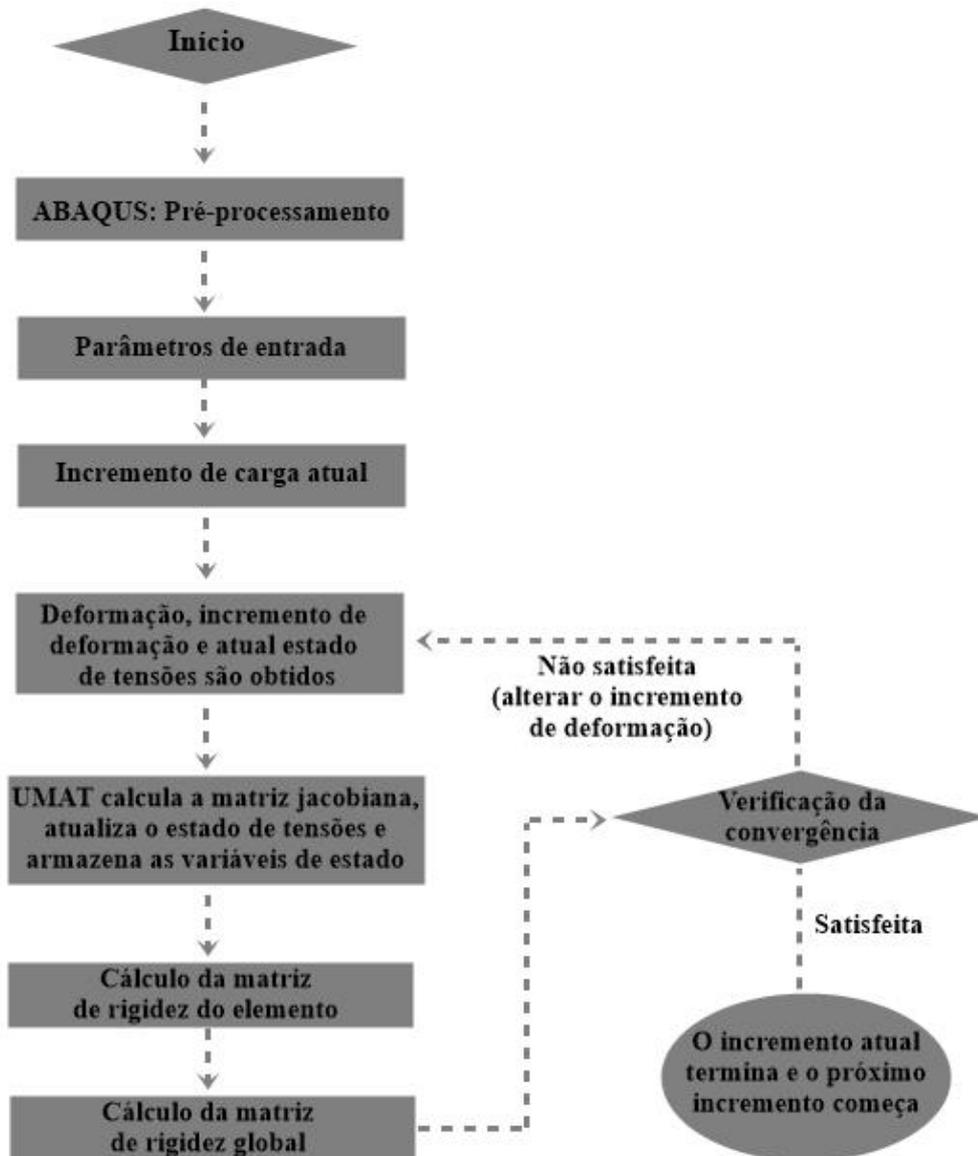
- a) CREEP: permite definir informações visco-plásticas de um material;
- b) DLOAD: permite definir funções de carregamento não uniformes;
- c) HETVAL: permite definir modelos complexos para geração de calor interno;
- d) UEL: permite criar elementos que não estão disponíveis na biblioteca do software;
- e) UEXPAN: permite definir informações térmicas incrementais de forma mais complexa que a opção EXPANSION oferecida no software;
- f) UMAT: permite definir modelos constitutivos que não estão disponíveis na biblioteca do software.

Para a análise do comportamento mecânico de uma viga constituída por CUADRF, utiliza-se a sub-rotina UMAT para fornecer ao processo de análise os modelos constitutivos

micromecânicos implementados na linguagem FORTRAN 77. Dessa forma, atribui-se à viga as propriedades do CUADRF, permitindo analisar o comportamento deste material quando sujeito a condições de contorno específicas adotadas no modelo.

Na simulação numérica realizada pelo ABAQUS® as tensões, deformações e variáveis de estados dependes da solução são calculadas de forma incremental. Neste processo, no início de cada incremento a sub-rotina UMAT é acionada para atualizar as tensões e a solução de variáveis de estados dependentes a seus valores no final do incremento, além disso, a sub-rotina fornece a matriz jacobiana do modelo constitutivo requerido para uma solução iterativa de Newton-Raphson (HUANG, 1991). Assim, a partir da matriz jacobiana (que representa a relação tensão-deformação do material) contida na sub-rotina UMAT, calcula-se a matriz de rigidez de cada elemento e posteriormente a matriz de rigidez global que é avaliada quanto a convergência de cada incremento (ENDO, 2013). Este processo incremental é representado na Figura 27 e se repete até que a análise termine.

Figura 27 - Esquema de funcionamento de uma UMAT



Fonte: Wang, Shi e Wang (2013)

4.2.1 Linguagem Fortran

O Fortran é uma linguagem de programação usada principalmente em aplicações numéricas da área da engenharia. Esta linguagem desenvolvida pela IBM em 1957 é considerada uma das mais duradoras da história recente de linguagem de programação de computador, uma vez que é uma linguagem padronizada pela ANSI (*American National Standards Institute*) e pela ISO (*Internacional Standards Organization*). Assim, sua portabilidade é garantida através da maioria dos sistemas operacionais vigentes no mercado.

Ao longo dos anos, diversas versões da linguagem foram distribuídas como o

FORTRAN 66, FORTRAN 77 e o FORTRAN 90 que posteriormente foi revisado e distribuído como FORTRAN 95. Atualmente a versão FORTRAN 77 ainda é a mais utilizada e compatíveis com vários softwares aplicados a engenharia como o ABAQUS®. Esta linguagem permite a codificação dos modelos micromecânicos para posterior implementação computacional em softwares.

Em geral, pode-se escrever os algoritmos em qualquer editor de texto desde que sejam salvos com as extensões .for (FORTRAN 77) ou .f90 (FORTRAN 90). Porém, existem compiladores disponíveis para sistemas operacionais WINDOWS que fornecem a possibilidade de se escrever o algoritmo em formato livre (desde que o modo “free form” esteja ativado), ou seja, pode ser escrito em qualquer lugar do editor, diferentemente do formato fixo que possui critérios para a escrita do algoritmo. O compilador utilizado na análise a que o trabalho se propõe e sua vinculação ao ABAQUS ® será descrito mais adiante.

4.3 Modelagem numérica de uma viga no software ABAQUS ®

No presente trabalho, utiliza-se o software ABAQUS® - versão 6.13 para a análise estrutural macromecânica dos modelos micromecânicos implementados através de sua interface UMAT, que permite que o usuário defina as propriedades do material da estrutura em análise.

No processo de modelagem da viga, adotou-se os procedimentos gerais de análises do software que consiste inicialmente na etapa de pré-processamento, onde o usuário atribui os dados de entrada através da interface gráfica do ABAQUS / CAE. Nesta etapa é definido a geometria do modelo (módulo PART), as propriedades mecânicas do material (módulo PROPERTY), a associação das partições criadas (módulo ASSEMBLY), a sequência de passos de análise (módulo STEP), as condições de apoio e de carregamentos (módulo LOAD), a geração da malha de elementos finitos (módulo MESH) e por último o arquivo de entrada (módulo JOB). O módulo PROPERTY merece atenção especial pois é através dele que é especificado ao ABAQUS / CAE que as propriedades serão fornecidas por meio de uma sub-rotina.

Após a definição das variáveis de entrada é realizado a simulação numérica pelo método dos elementos finitos utilizando o ABAQUS/ Standard que fornece a solução do problema analisado. Dependendo da complexidade do problema e da capacidade de processamento do computador, a simulação pode durar alguns segundos ou até mesmo horas para ser completamente executada. Posteriormente, o arquivo de saída pode ser visualizado e interpretado por meio do ABAQUS / CAE (módulo VISUALIZATION) que possui diversas

opções para visualização, incluindo forma deformada, animações, contorno de cores e gráficos X-Y. Ademais, a interpretação dos resultados pode ser feita com o auxílio do ABAQUS / Viewer através de uma variedade de ferramentas para visualização gráfica e animações.

De forma resumida, o procedimento para a análise numérica de uma viga de CUADRF como será realizado na seção 5.3 segue o esquema apresentado na Figura 28.

Figura 28 - Procedimento de análise de uma viga de CUADRF no ABAQUS



Fonte: Do Autor

4.4 Implementação e execução da sub-rotina UMAT no software ABAQUS®

Para que as sub-rotinas UMAT possam ser implementadas e executadas no software ABAQUS ® instalado em um computador com sistema operacional WINDOWS 10 de 64 bit, é necessário ter também instalado os softwares Microsoft Visual Studio 2008 Professional Edition e Intel Fortran Compiler Version 11.1. Estes dois softwares atuam de forma integrada, com o Microsoft Visual Studio 2008 fornecendo a interface gráfica para a implementação do algoritmo. Além disso, é necessário vincular estes softwares ao ABAQUS® para que a sub-rotina possa ser lida corretamente.

Para a implementação dos modelos micromecânicos em uma sub-rotina UMAT, inicialmente implementou-se esses modelos na linguagem MATLAB através do software Octave versão 5.1 devido a praticidade apresentada por este software na análise e correção de possíveis erros de lógica de programação. Posteriormente, estes algoritmos foram adaptados como sub-rotinas de usuário UMAT escritas em linguagem FORTRAN 77. As sub-rotinas UMAT para cada modelo micromecânico apresentado na seção 3 estão descritas nos APÊNDICES A – D.

De modo geral, a sub-rotina UMAT apresenta a estrutura mostrada na Figura 29. Esta estrutura contém as variáveis internas da UMAT, que podem ser modificadas pelo usuário conforme a necessidade, e suas dimensões. Além disso, é especificado a leitura do arquivo “ABA_PARAM.INC” instalado junto ao software para definir a precisão e o tipo das variáveis internas especificadas.

Figura 29 - Estrutura básica de uma sub-rotina UMAT

```

SUBROUTINE UMAT(STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD,
  1 RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT,
  2 STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED, CMNAME,
  3 NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT,
  4 CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL, NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)
C
  INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
  CHARACTER*80 CMNAME
  DIMENSION STRESS(NTENS), STATEV(NSTATV),
  1 DDSDE(NTENS, NTENS), DDSDDT(NTENS), DRPLDE(NTENS),
  2 STRAN(NTENS), DSTRAN(NTENS), TIME(2), PREDEF(1), DPRED(1),
  3 PROPS(NPROPS), COORDS(3), DROT(3, 3), DFGRD0(3, 3), DFGRD1(3, 3)

  user coding to define DDSDE, STRESS, STATEV, SSE, SPD, SCD
  and, if necessary, RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, PNEWDT

  RETURN
  END

```

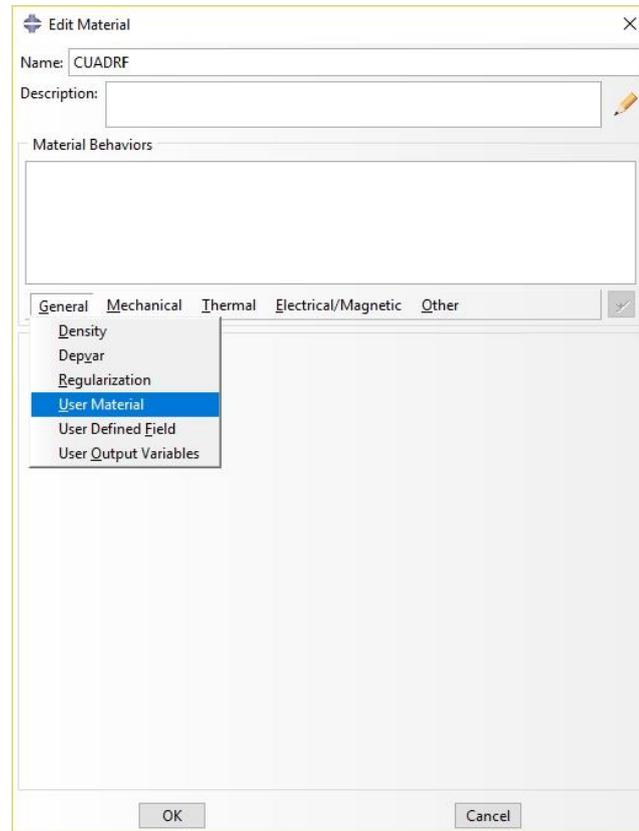
Fonte: ABAQUS (2013)

Definido as variáveis e dimensões do cabeçalho, implementa-se o algoritmo para cada modelo micromecânico apresentado considerando o princípio de funcionamento da UMAT apresentado na Figura 27. Baseado nisso, determina-se a matriz jacobiana do modelo constitutivo preenchendo-se a variável DDSDE com os valores obtidos do tensor de rigidez homogeneizado de cada modelo micromecânico. Em seguida, através da matriz jacobiana DDSDE e do vetor de incremento de deformações DSTRAIN calcula-se o vetor de tensão no final do incremento STRESS.

Ao fim deste processo, realiza-se alguns procedimentos na interface gráfica do ABAQUS / CAE para que a sub-rotina seja executada corretamente no processo de simulação numérica como mostrado a seguir:

Inicialmente, na definição das propriedades dos materiais (módulo PROPERTY) deve-se escolher a opção *user material* como mostrado na Figura 30.

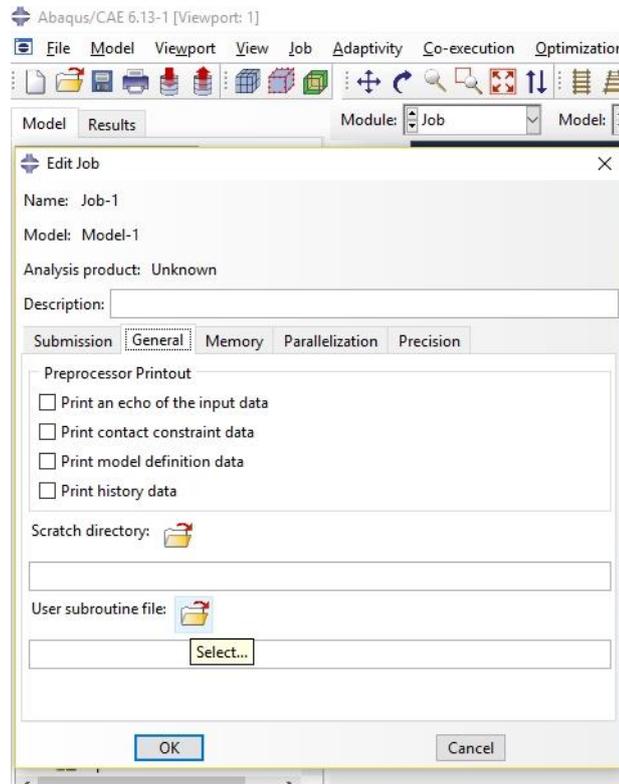
Figura 30 - Definição do material de usuário



Fonte: Do Autor

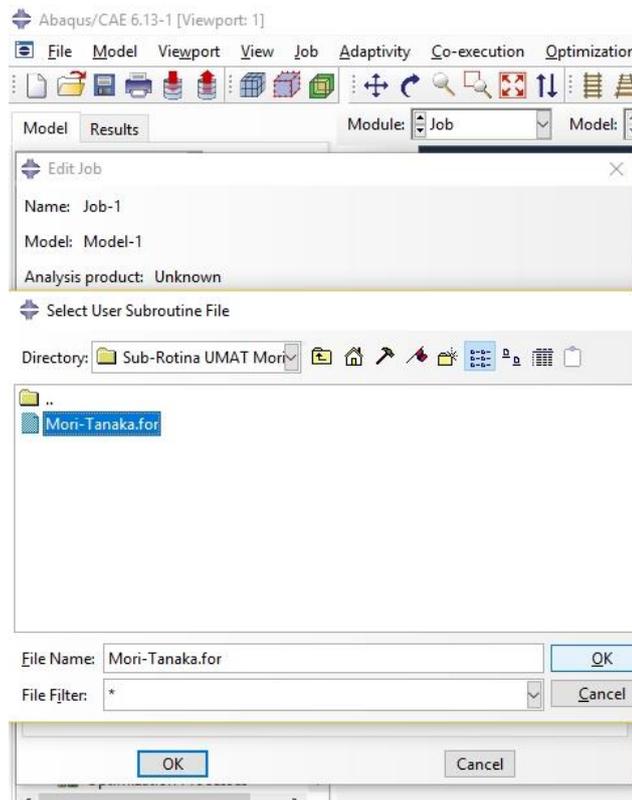
Posteriormente, indica-se qual sub-rotina UMAT será utilizada na análise por meio do módulo JOB. No final da etapa de pré-processamento cria-se um *Job* para o modelo numérico clicando na opção *create job* e em *continue*. Em seguida, seleciona-se a aba *General* na janela *Edit job*, e na opção *user subroutine file* clica-se em *select* (Figura 31). Na janela aberta indica-se a localização do arquivo UMAT, em formato *.for*, a ser empregado no modelo e por fim clica-se em *OK* (Figura 32).

Figura 31 - Etapa de vinculação da sub-rotina UMAT ao ABAQUS®



Fonte: Do Autor

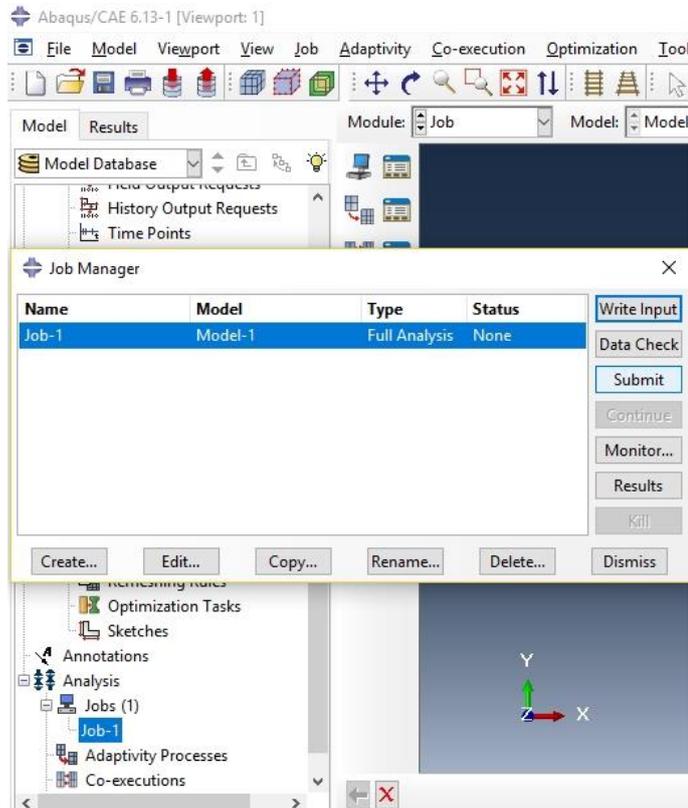
Figura 32 - Seleção do arquivo da sub-rotina UMAT



Fonte: Do Autor

Para que a simulação numérica seja executada conforme a sub-rotina selecionada, clica-se na opção Job Manager e em seguida em *submit* como mostrado na Figura 33.

Figura 33 - Execução da análise do modelo com sub-rotina UMAT



Fonte: Do Autor

5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

O presente trabalho propõe-se prever as propriedades mecânicas efetivas do CUADRF utilizando modelos micromecânicos implementados em MATLAB e posteriormente comparar os resultados obtidos com resultados experimentais obtidos da literatura. Subsequentemente implementa-se os modelos micromecânicos em linguagem Fortran como sub-rotinas de usuário (UMAT) no software ABAQUS®. Por sua vez, realiza-se uma modelagem numérica do comportamento mecânico de uma viga constituída por CUADRF por meio do método dos elementos finitos. Resulta-se, assim, uma análise macromecânica que permite prover uma avaliação acerca do comportamento mecânico do elemento estrutural frente a uma variação do teor de fibras metálicas na mistura incluídas no modelo numérico por meio da sub-rotina UMAT.

Os modelos micromecânicos apresentados na seção 3 foram implementados em MATLAB e utilizados para determinar o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do CUADRF. Em seguida, realiza-se a comparação dos resultados micromecânicos com resultados experimentais obtidos da literatura para frações volumétricas específicas. Posteriormente, os resultados obtidos para cada modelo micromecânico são analisados para toda a faixa da fração volumétrica de fibras de aço.

5.1 Validação dos modelos micromecânicos

Para a validação dos resultados micromecânicos do módulo de Elasticidade e do coeficiente de Poisson do CUADRF, considerou-se os resultados experimentais obtidos no trabalho desenvolvido por El-Din et al. (2016) a partir da modelagem de sete grupos de corpos de provas, em que cada grupo é composto por seis cubos, doze cilindros e três prismas. Os corpos de prova pertencentes ao grupo 1 foram fabricadas sem fibras de aço. Já os corpos de prova dos grupos 2, 4 e 6 foram fabricados com fibras de aço na fração volumétrica da mistura de respectivamente 1%, 2% e 3% e razão de aspecto $r = d/l = 0,03$.

Neste trabalho foram utilizadas as propriedades mecânicas dos grupos 1,2,4 e 6 para o processo de validação dos modelos micromecânicos. A Tabela 4 apresenta os resultados experimentais da resistência à compressão, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson obtidos para esses grupos aos 28 dias.

Tabela 4 - Resultados experimentais de grupos de corpos de prova aos 28 dias

Grupo	Resistência à compressão (MPa)	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson
1	124	45,20	0,198
2	137	47,90	0,199
4	148	49,00	0,200
6	154	50,10	0,200

Fonte: El-Din et al. (2016)

Para a obtenção dos resultados micromecânicos, considerou-se que o grupo 1 de amostras experimentais, que não obteve reforço de fibras, representa a matriz com valores para o módulo de elasticidade E_m e coeficiente de Poisson ν_m de respectivamente 45,2 GPa e 0,198. Além disso, as fibras de aço analisadas neste trabalho apresentam módulo de elasticidade $E_i = 210$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu_i = 0,3$.

Para obtenção dos valores do módulo de elasticidade e do Coeficiente de Poisson efetivo do CUADRF por abordagem micromecânica, considera-se que o tensor constitutivo obtido tem comportamento homogêneo, isotrópico e que as tensões de cisalhamento não afetam as deformações lineares, ou seja, o tensor obedece a Lei de Hooke generalizada. Dessa forma, é possível obter os parâmetros mecânicos do CUADRF no tensor homogeneizado com base nas componentes do tensor de rigidez elástico apresentado na Equação (3.14).

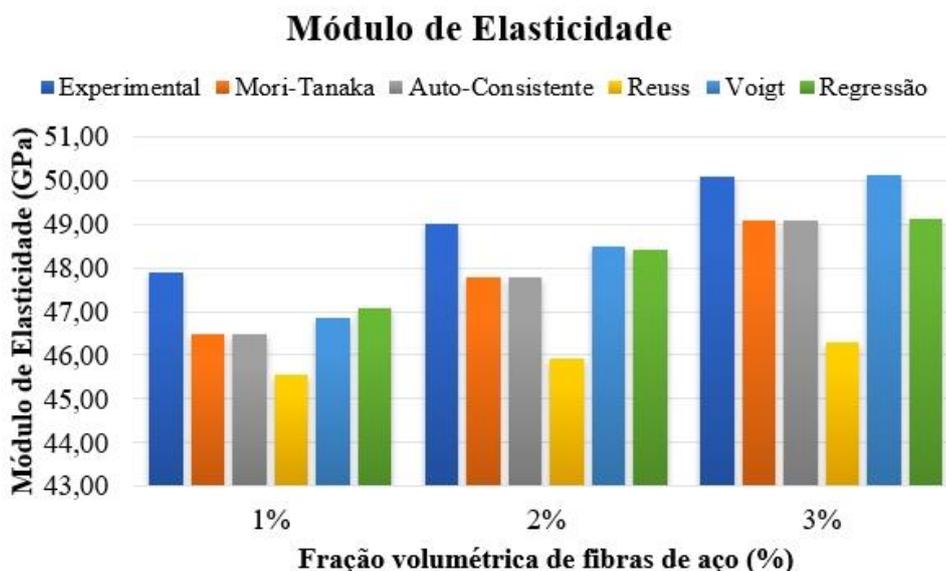
Além dos resultados experimentais, considerou-se a previsão por análise de regressão do módulo de elasticidade do CUADRF apresentado por Alsalman et al. (2017) com base na correlação entre a resistência à compressão e o módulo de elasticidade de 226 amostras coletadas de vários estudos experimentais da literatura. A previsão do módulo de elasticidade é obtida por meio da Equação (5.1) em que E_c e f_c representam o módulo de elasticidade e a resistência à compressão do CUADRF ambos em MPa.

$$E_c = 8010(f_c)^{0,36} \quad (5.1)$$

Nesta previsão, o módulo de elasticidade para cada amostra pertencente aos grupos 1,2,4 e 6 é obtido por meio do valor da resistência à compressão da respectiva amostra apresentada na Tabela 4.

A Figura 34 apresenta a comparação entre os resultados experimentais, por análise de regressão e micromecânicos para o módulo de elasticidade do CUADRF considerando frações volumétricas de fibras de aço de 1%,2% e 3% incorporadas na mistura.

Figura 34 - Resultados experimentais, micromecânicos e por análise de regressão do módulo de elasticidade do CUADRF



Fonte: Do Autor

De acordo com a Figura 34, esses modelos subestimam o módulo de elasticidade em comparação com os resultados experimentais obtidos, o que pode favorecer a adoção de projetos mais seguros, pois ao estimar o módulo de elasticidade para estruturas constituídas por CUADRF a deflexão pode ser menor do que esperado, por exemplo.

Nesta análise, os modelos de Voigt e Reuss devido a suas hipóteses adotadas deveriam representar o maior e menor valor do módulo de elasticidade respectivamente. Porém, analisando a Figura 34 observa-se que o limite de Voigt é inferior ao resultado experimental e em alguns casos é inferior ao resultado por análise de regressão e micromecânico. Isto ocorre devido a incapacidade do modelo de considerar a interação entre as fibras e a interação entre a fibra e a matriz que é diretamente afetada pela geometria da fibra. Assim, para baixas frações volumétricas de fibras tanto o modelo de Voigt quanto o de Reuss são imprecisos, visto que a influência da fibra não é incorporada na análise bifásica desses modelos. Além disso, a distribuição de fases adotadas nestes modelos para validar as hipóteses de tensão e deformação constante, em que cada camada de uma fase é separada por uma camada de outra fase, não pode ser diretamente aplicada no EVR correspondente devido à baixa presença de fibras na mistura.

A Tabela 5 apresenta a diferença percentual dos modelos de Mori-Tanaka e Auto Consistente para os resultados experimentais e resultado por análise de regressão do módulo de elasticidade do CUADRF.

Tabela 5 - Diferença percentual dos resultados dos modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente para os resultados experimentais e por regressão do módulo de elasticidade do CUADRF

Fração volumétrica de fibras de aço (%)	Diferença percentual (%) dos valores do módulo de elasticidade			
	Experimental		Regressão	
	Mori-Tanaka	Auto Consistente	Mori-Tanaka	Auto Consistente
1	3,00	3,00	1,25	1,25
2	2,52	2,52	1,29	1,28
3	2,06	2,05	0,03	0,02

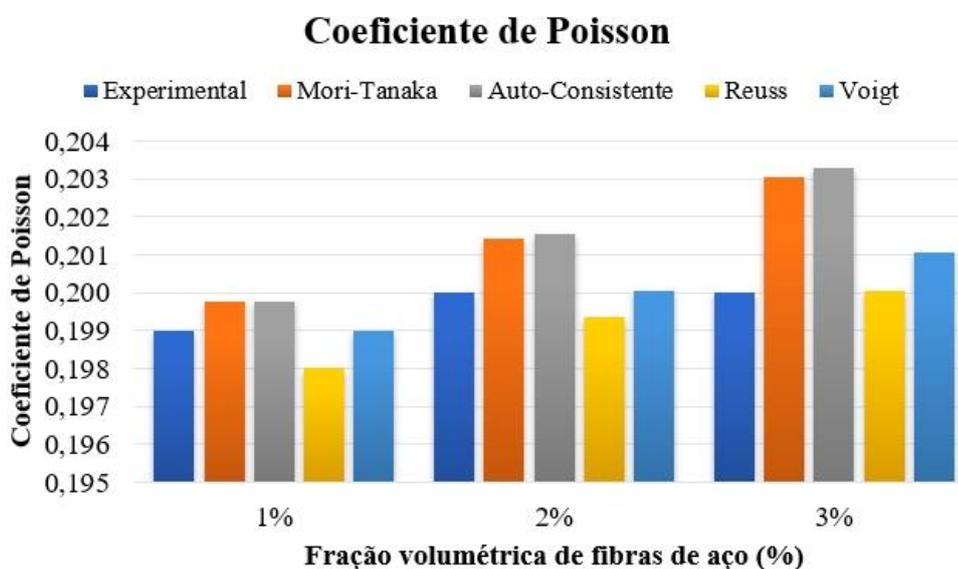
Fonte: Do Autor

Os modelos de Mori-Tanaka e Auto Consistente, que se baseiam no método da inclusão equivalente, apresentaram valores muito próximos um do outro. É verificado uma diferença percentual inferior a 0,02% entre esses modelos para as frações volumétricas analisadas. Ademais, verifica-se que a diferença percentual desses modelos para os valores experimentais varia entre 2% e 3%, diminuindo conforme se eleva a fração volumétrica de fibras.

Já em comparação com os resultados obtidos por análise de regressão, os modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente apresentam resultados com diferença percentual inferior a 1,5%, ou seja, a diferença percentual para a análise de regressão é menor do que a diferença percentual para os resultados experimentais. Isto pode ser explicado pela derivação estatística da equação utilizada que, por considerar 226 amostras diferentes para encontrar a curva de ajuste aos dados, atenua eventuais erros associados a aplicação de carga, geometria e tamanho das amostras nos ensaios. Por isso, o tratamento estatístico da análise por regressão o torna mais apropriada para a comparação com os modelos micromecânicos analisados neste trabalho, embora esteja limitada a disponibilidade dos dados de resistência à compressão das amostras.

A Figura 35 apresenta a comparação entre os resultados experimentais e micromecânicos para o coeficiente de Poisson do CUADRF considerando frações volumétricas de fibras de aço de 1%,2% e 3% incorporadas na mistura.

Figura 35 - Resultados experimentais e micromecânicos do coeficiente de Poisson do CUADRF



Fonte: Do Autor

Observa-se pela Figura 35 que para baixas frações volumétricas de fibras de aço o coeficiente de Poisson tem pouca variabilidade. Os resultados experimentais variam levemente para a elevação da fração volumétrica de 1% para 2% e se mantém constante para uma inclusão de 3% de fibras na mistura, o que indica a baixa influência da fibra de aço na deformação transversal do material

A Figura 35 mostra que os limites de Voigt e Reuss para o coeficiente de Poisson não produzem resultados adequados, pois os limites (que deveriam predizer a faixa de valores do parâmetro mecânico) se alternam ao predizer (com exatidão) o coeficiente de Poisson efetivo para frações volumétricas próximas. A exatidão desses modelos depende de condições especiais como a distribuição das fases em uma orientação preferencial, por isso, os resultados obtidos devem ser avaliados com cautela em relação a eficácia desses modelos.

Uma análise mais acurada desses modelos realizada por Gross e Seelig (2017) mostra que a hipótese de deformações constantes leva a uma violação do equilíbrio local e a hipótese de tensão constante impede a compatibilidade de deformação. Estas hipóteses conduzem a resultados inadequados para o coeficiente de Poisson pois negligência os efeitos da deformação em direções perpendiculares a aplicação da carga. Assim a análise do coeficiente de Poisson por limites variacionais deve ser evitada.

A Tabela 6 apresenta a diferença percentual dos modelos de Mori-Tanaka e Auto Consistente para os resultados experimentais e resultado por análise de regressão coeficiente de Poisson do CUADRF.

Tabela 6 - Diferença percentual dos resultados dos modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente para os resultados experimentais do coeficiente de Poisson do CUADRF

Fração volumétrica de fibras de aço (%)	Diferença percentual (%) do coeficiente de Poisson micromecânico para o experimental	
	Mori-Tanaka	Auto Consistente
1	0,37	0,38
2	0,7	0,76
3	1,49	1,61

Fonte: Do Autor

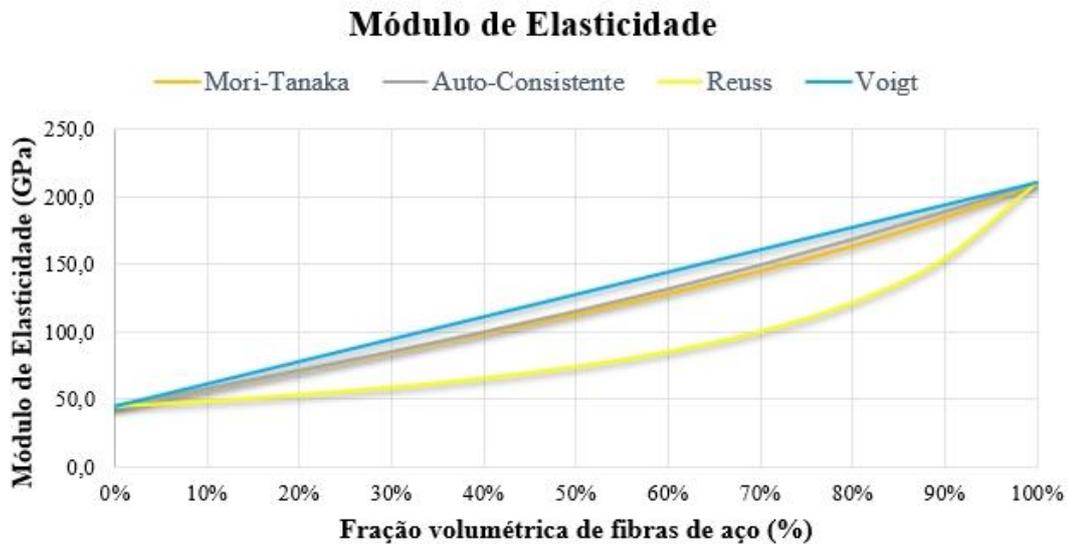
Os resultados para os modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente mostram uma tendência esperada de crescimento conforme se eleva a fração volumétrica de fibras de aço, com uma diferença percentual inferior a 2% para os resultados experimentais. Além disso, a análise dos resultados micromecânicos mostra a similaridade dos resultados do coeficiente de Poisson para os modelos de Mori-Tanaka e Auto Consistente (como já verificado anteriormente para o módulo de elasticidade).

A semelhança dos resultados dos modelos de Mori-Tanaka e Auto Consistente é esperada dada a mesma origem do método de cálculo (Ambos baseados no método da inclusão equivalente de Eshelby). Além disso, para baixa frações volumétricas o modelo Auto Consistente necessita realizar poucas interações já que o tensor homogêneo na primeira interação é igual ao tensor da matriz, esta condição inicial aproxima o resultado deste modelo ao resultado gerado pelo modelo de Mori-Tanaka. Dessa forma, para baixas frações volumétricas esses modelos tendem a apresentar valores semelhantes.

5.2 Homogeneização micromecânica dos parâmetros mecânicos do CUADRF

Com a validação dos resultados micromecânicos, procede-se a análise do módulo de elasticidade para diversas frações volumétricas de fibras de aço utilizando os mesmos dados para a matriz e para as fibras como apresentado na Figura 36.

Figura 36 - Análise micromecânica do módulo de elasticidade do CUADRF por fração volumétrica



Fonte: Do Autor

Esta análise demonstra a similaridade entre os métodos Mori-Tanaka e Auto Consistente até uma fração volumétrica de 40% de fibras de aço. A partir desta fração os modelos apresentam uma leve disparidade, com a maior diferença percentual inferior a 4%. Para 40% de fibras inclusas na mistura a diferença percentual entre os modelos é inferior a 1,4%, com os resultados do modelo Mori-Tanaka sempre abaixo dos resultados obtidos pelo modelo Auto Consistente.

Este resultado denota que o método de cálculo implícito do tensor homogeneizado do modelo Auto Consistente produz resultados superiores aos resultados do modelo de Mori Tanaka que considera as propriedades da fase matriz diretamente no método de cálculo. Ambos os modelos se apresentam dentro dos limites estabelecidos pelos modelos de Voigt e Reuss que devem ser evitados como um método efetivo de homogeneização pela amplitude apresentada entre os limites.

A Tabela 7 apresenta a análise do comportamento da diferença percentual entre os limites de Voigt e Reuss para o módulo de elasticidade do CUADRF incorporado com frações volumétricas de fibras de aço com intervalo múltiplo de 10%.

Tabela 7 - Variação percentual do módulo de elasticidade entre os limites de Voigt e Reuss

Fração volumétrica de fibras de aço (%)	Limite de Reuss (GPa)	Limite de Voigt (GPa)	Diferença percentual (%)
0	45,20	45,20	0,00
10	49,04	61,68	25,75
20	53,61	78,16	45,78
30	59,11	94,64	60,08
40	65,88	111,13	68,68
50	74,38	127,60	71,53
60	85,42	144,08	68,68
70	100,29	160,77	60,08
80	121,44	177,04	45,78
90	153,89	193,52	25,75
100	210,00	210,00	0,00

Fonte: Do autor

Observa-se pela Tabela 7 que a amplitude entre os limites de Voigt e Reuss aumenta conforme se eleva a fração volumétrica de fibras de aço até atingir uma fração de 50% de fibras, quando a amplitude começa a decair na mesma proporção. Isto ocorre devido a formulação característica destes modelos que aproximam a propriedade efetiva como uma média aritmética ou geométrica. Assim, como a fibra possui um módulo de elasticidade aproximadamente cinco vezes maior que a matriz cimentícia, quanto maior sua porcentagem em volume na mistura maior será a amplitude entre os limites e conseqüentemente maior a imprecisão do resultado para frações volumétricas de fibras até 50%.

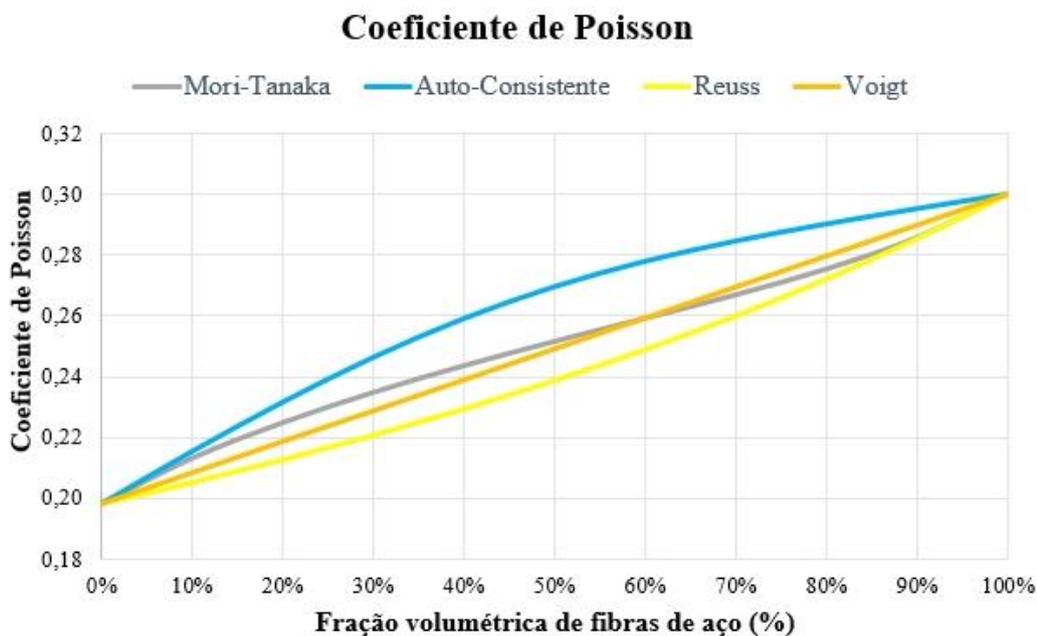
A influência da fibra na rigidez do CUADRF pode ser comprovada por meio da análise de um desses modelos. Por exemplo, o modelo Mori-Tanaka demonstra que uma incorporação de 10% de fibras de aço em volume da mistura permite obter um CUADRF com rigidez 28,7% maior do que na ausência de fibras de aço. Como o teor de fibras incorporado em um CUADRF comercial como o Ductal[®] é em torno de 6% para alcançar as propriedades de ductilidade e resistência à tração necessárias, o material que já apresenta elevada rigidez devida a sua densa matriz, tem seu módulo de elasticidade elevado de 45,2 GPa para 52,9 GPa, um aumento de cerca de 17%.

A AFGC (2013) especifica que no projeto preliminar pode-se considerar um valor mínimo de 50 GPa para o módulo de elasticidade do CUADRF, sendo necessário testes posteriores para verificar o real valor do módulo de elasticidade adotado em projeto. Baseado nisso, os projetistas podem se utilizar de um dos modelos micromecânicos para analisar o teor de fibras a ser incorporada para que o projeto executivo final respeite os parâmetros mecânicos utilizados no projeto preliminar. Nesta análise o modelo de Mori-Tanaka fornece um valor de

50,4 Gpa para um teor de 4% de fibras incorporadas na mistura, evitando um processo lento e dispendioso para verificação do teor de fibras adequado a mistura.

Da mesma forma que o módulo de elasticidade, realiza-se a análise do coeficiente de Poisson para diversos teores de fibras metálicas na mistura conforme apresentado na Figura 37.

Figura 37 - Análise micromecânica do coeficiente de Poisson do CUADRF por fração volumétrica



Fonte: Do Autor

A análise do coeficiente de Poisson para diversos teores de fibras na Figura 37 demonstra que este parâmetro mecânico sofre pouca influência para as frações volumétricas de fibras que se utilizam em compósitos de matrizes cimentícias (geralmente inferior a 10%). É constatado que a maior variação entre o coeficiente de Poisson da matriz e o coeficiente de Poisson do compósito para um teor de 10% de fibras metálicas foi inferior a 8%, em contraste com o módulo de elasticidade que apresenta uma variação de 28,7% para o mesmo teor de fibras.

O modelo Auto Consistente apresenta para o coeficiente de Poisson valores superiores aos resultados obtidos pelo modelo Mori-Tanaka. A variação percentual máxima entre esses modelos observada para o coeficiente de Poisson é de cerca de 7,3%, o que demonstra que o coeficiente de Poisson sofre maior influência, em relação ao módulo de elasticidade, da abordagem utilizada para resolver o problema de concentração elástico proposto no método de cálculo de cada modelo.

Além disso, a Figura 37 demonstra que os valores calculados para o coeficiente de

Poisson para os modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente exibiram um comportamento contrário ao comportamento esperado definido pelos limites de Voigt e Reuss. Enquanto o limite de Reuss se mantém abaixo destes modelos como esperado, o limite de Voigt não segue a tendência do limite superior da propriedade. Ou seja, os resultados comprovam que o coeficiente de Poisson não segue um método simples de homogeneização como os limites de Voigt e Reuss, na medida em que o coeficiente de Poisson efetivo do compósito nem sempre segue a tendência de crescimento características desses modelos. Estes resultados estão de acordo com os resultados apresentados por Zimmerman (1994) onde o coeficiente de Poisson efetivo não necessariamente está limitado ao coeficiente de Poisson da matriz e da inclusão, ou seja, a relação $\nu_m \leq \nu \leq \nu_i$ não é válida.

5.3 Simulação do comportamento macromecânico de uma viga de CUADRF submetida ao ensaio de flexão de quatro pontos

Os modelos constitutivos micromecânicos foram inicialmente implementados na linguagem Fortran 77, e posteriormente adaptados como uma sub-rotina de usuário UMAT (uma sub-rotina de material definida pelo usuário) a ser utilizado em conjunto com o software ABAQUS®. Este software permite, através do Método dos Elementos Finitos, a avaliação do comportamento macromecânico do elemento estrutural aplicado a diversos modelos micromecânicos via interface UMAT. O modelo numérico realizado neste trabalho simula o comportamento de uma viga submetida ao ensaio de flexão de quatro pontos cujas as propriedades referentes ao CUADRF são definidas através da interface UMAT.

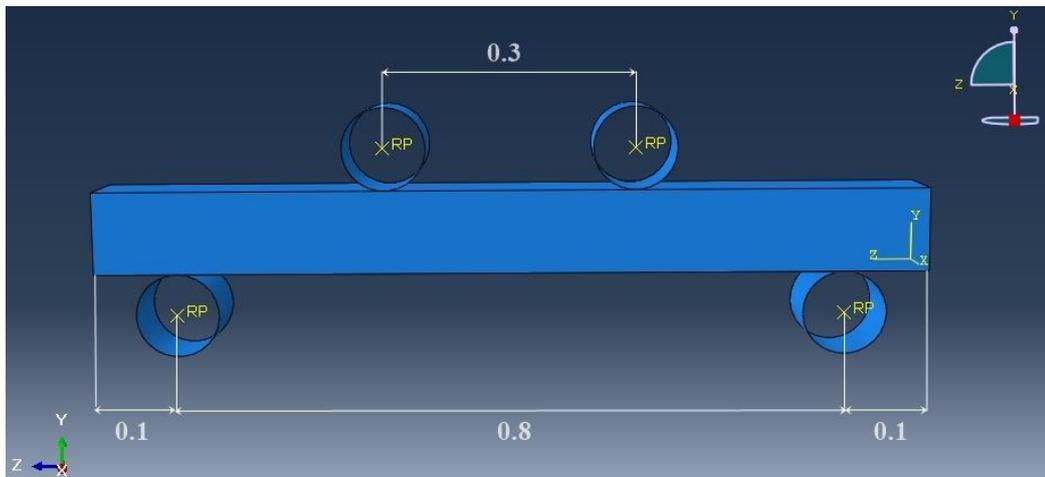
5.3.1 Modelo numérico

Na presente análise simulou-se numericamente o comportamento estrutural de uma viga constituída de CUADRF através do ensaio de flexão de quatro pontos no software ABAQUS®. Este ensaio consiste na aplicação de carga crescente em dois pontos específicos equidistantes da extremidade de uma viga biapoiados. A aplicação de carga e os apoios da viga no referido ensaio são feitas através de roletes rígidos capazes de transmitir a carga a viga e suportar os esforços do ensaio sem grandes deformações. Durante a transmissão dos esforços entre os roletes e a viga ocorrem tensões de contato que podem influenciar nos resultados do ensaio. Assim, para uma análise eficiente, é realizada a modelagem do contato entre a viga e os roletes por elementos finitos a fim de considerar todos os parâmetros envolvidos no ensaio real.

A viga em análise possui seção transversal quadrada com 0.1 metros de lado e comprimento de 1 metro enquanto os roletes possuem raio de 0.05 metros e comprimento de 0.1 metro. A posição do apoio e aplicação das cargas ocorrem respectivamente a 0.1 metros e 0.35 metros da extremidade da viga. Os apoios são biapoiados enquanto as cargas são consideradas por um deslocamento contínuo vertical dos roletes superiores até uma distância de 0.1 metros da posição inicial. Devido a esta condição de contorno este modelo não considera a análise plástica e a ruptura da viga, por isso os resultados obtidos são significativamente superiores aos resultados esperados de uma análise real. Esta condição de contorno, embora esteja em discordância de uma aplicação real, é realizada para estender a fase elástica do material de modo a auxiliar a avaliação do comportamento da viga conforme se eleva a quantidade de fibras por meio do modelo micromecânico utilizado.

A modelagem numérica deste ensaio segue estas condições de contorno e a metodologia apresentada na Figura 28 onde a sub-rotina UMAT define as propriedades do material. A Figura 38 apresenta o modelo geométrico da viga analisada.

Figura 38 - Modelo geométrico do ensaio de flexão de quatro pontos



Fonte: Do Autor

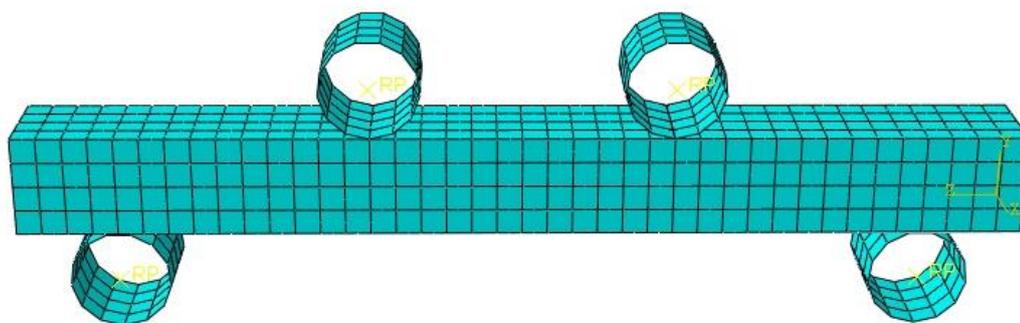
Para considerar a interação de contato entre os roletes e a viga considerou-se no módulo STEP o modelo isotrópico clássico de fricção de Coulomb que fornece a opção para o usuário definir um coeficiente de atrito estático para a superfície de contato em locais selecionados pela ferramenta *find contact pairs*, que permite encontrar os locais em que há interação entre os elementos. Além disso, aplicada as condições de contato, contorno e geométricas ativou-se o parâmetro de não linearidade geométrica (NLGEOM ON) para considerar os efeitos dos grandes deslocamentos sofridos pela viga durante o ensaio.

Na etapa de pré-processamento discretizou-se a malha de elementos finitos a um tamanho que permitisse uma boa aproximação dos resultados com um tempo computacional

conveniente para a análise do modelo numérico em conjunto com a UMAT, que por sua natureza, exige um tempo computacional considerável para cada incremento realizado na análise do comportamento da viga. A geometria da viga e dos roletes foram discretizados em uma malha com elementos finitos de 25 mm x 25 mm. No presente modelo são utilizados elementos finitos sólidos tridimensionais de vinte nós com integração reduzida (C3D20R). A precisão da malha foi verificada na medida que os resultados gerados por essa malha se apresentam próximos dos resultados gerados por malhas mais discretizadas.

A Figura 39 apresenta a malha de elementos finitos do ensaio de flexão de quatro pontos.

Figura 39 - Discretização da malha de elementos finitos do modelo numérico



Fonte: Do Autor

5.3.2 Avaliação do comportamento macromecânico de uma viga de CUADRF

A análise do comportamento da viga por meio do ensaio de flexão de quatro pontos depende das propriedades atribuídas ao modelo por meio da sub-rotina UMAT. Para a análise macromecânica optou-se por utilizar o modelo Mori-Tanaka para atribuir as propriedades do CUADRF à viga. Na seção anterior verificou-se que este modelo, devido a seu método de cálculo direto, apresenta resultados conservadores em relação ao modelo Auto Consistente. Dessa forma, para a análise de um elemento estrutural a escolha do modelo Mori-Tanaka acarreta um fator de segurança maior a análise.

Os parâmetros de entrada para a aplicação do modelo Mori-Tanaka foram os mesmos utilizados anteriormente para validação dos modelos micromecânicos. No entanto, para a avaliação da influência da fração volumétrica de fibras de aço no comportamento do material neste ensaio considerou-se frações volumétricas de 2%, 4% e 6%.

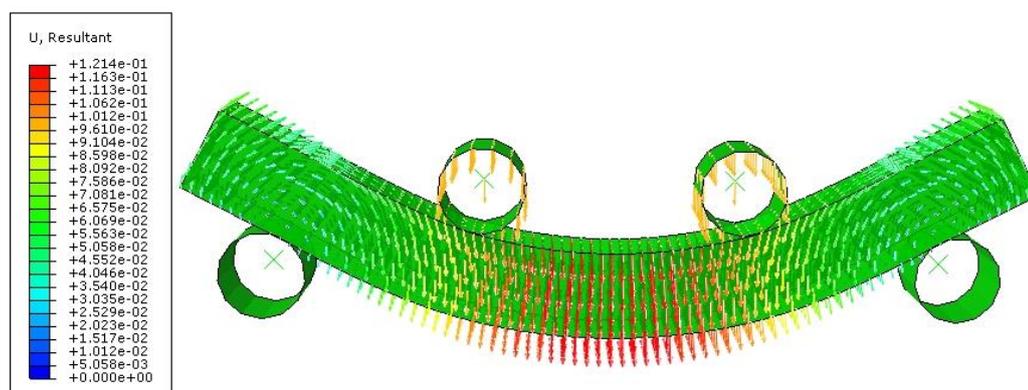
Os resultados fornecidos na análise incluem a configuração indeformada e

deformada do modelo e gráficos de contorno que exibem o modelo simulado com contorno de cores que representam os valores de uma determinada variável de análise em uma etapa selecionada da simulação. As variáveis de análises são plotadas também em gráficos de símbolos que exibem a magnitude e a direção de um determinado vetor ou variável tensorial em uma etapa. Além disso, na interface de pós-processamento plota-se gráficos bidimensionais X-Y para a análise da correlação entre variáveis.

5.3.2.1 Deslocamento resultante

Na presente análise varia-se os parâmetros da sub-rotina UMAT para frações volumétricas de 2%, e posteriormente 4% e 6% para a análise da influência do teor de fibras na configuração deformada da viga. Como resultado obtém-se a Figura 40 que apresenta o gráfico de símbolo para o deslocamento resultante que permite visualizar a magnitude e a direção variáveis vetoriais de deslocamento para as frações volumétricas de fibras de aço analisadas.

Figura 40 - Deslocamento resultante da viga de CUADRF



Fonte: Do Autor

Observa-se que o deslocamento máximo ocorre no centro da viga, ou seja, nos pontos mais afastados dos apoios. Nesta região o deslocamento máximo ultrapassa o deslocamento de 0,1 metros imposto aos roletes superiores. Isto ocorre devido aos efeitos da não linearidade geométrica considerados na análise devido aos grandes deslocamentos impostos da estrutura. Estes efeitos produzem uma significativa distorção da malha de elementos devido aos inúmeros deslocamentos considerados no cálculo, que prejudicam a aproximação da solução feita a partir do MEF.

A diferença entre o deslocamento imposto e o deslocamento máximo obtido numericamente foi de 21,4 mm que embora seja um valor pequeno em termos de comparação com o comprimento do elemento, é um valor considerável a se considerar no processo de

cálculo estrutural em que a redistribuição de esforços e a estabilidade global dependem da aproximação dos efeitos não lineares em termos incrementais.

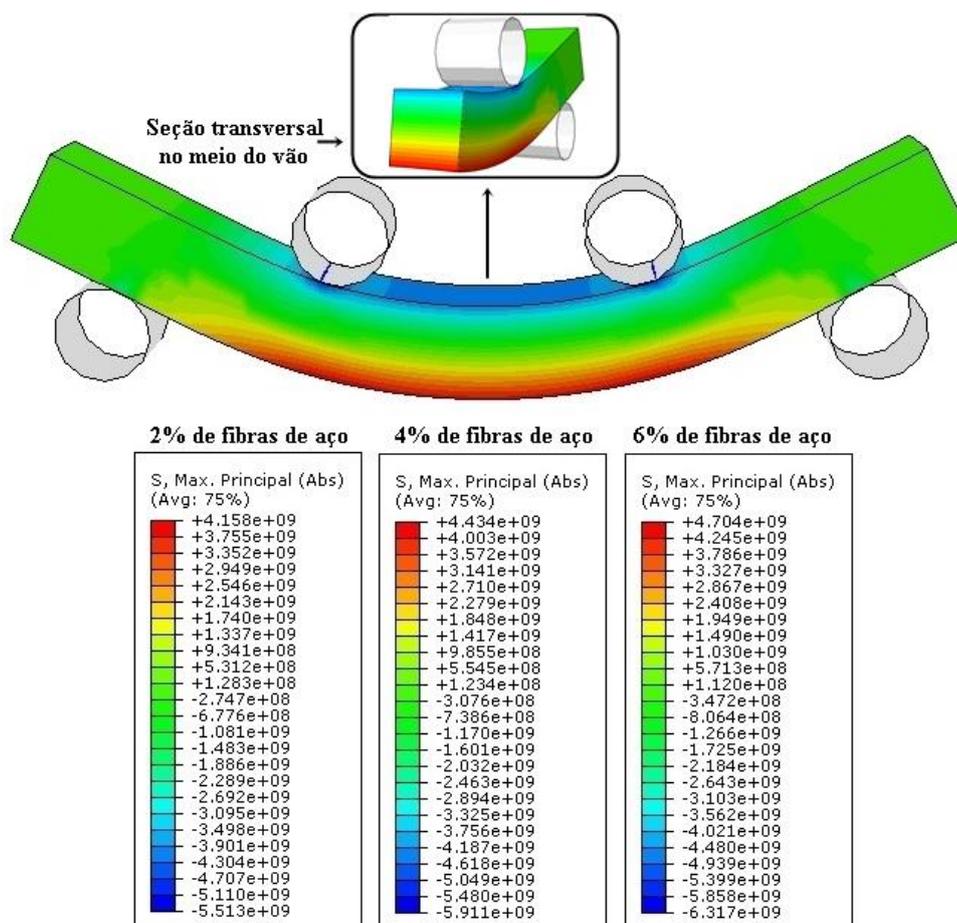
A distribuição dos vetores de deslocamento na viga mostra que os vetores de deslocamentos rotacionam na direção do deslocamento aplicado aos roletes superiores conforme se aproximam do centro da viga. Nas regiões entre os roletes superiores e as extremidades da viga a intensidade dos vetores é baixa devido aos roletes rígidos de apoio que restringem os deslocamentos, enquanto na região entre os roletes os vetores de deslocamentos se aproximam da direção do deslocamento imposto com os maiores deslocamentos observados na simulação.

5.3.2.2 Tensões principais máximas absolutas

As tensões principais são tensões máximas a que a viga está submetida e por isso podem ser utilizadas em diversos tipos de análises.

A Figura 41 apresenta os resultados obtidos para as tensões principais absolutas na viga de acordo com a fração volumétrica de fibras de aço incorporada.

Figura 41 - Tensões principais absolutas na viga de CUADRF



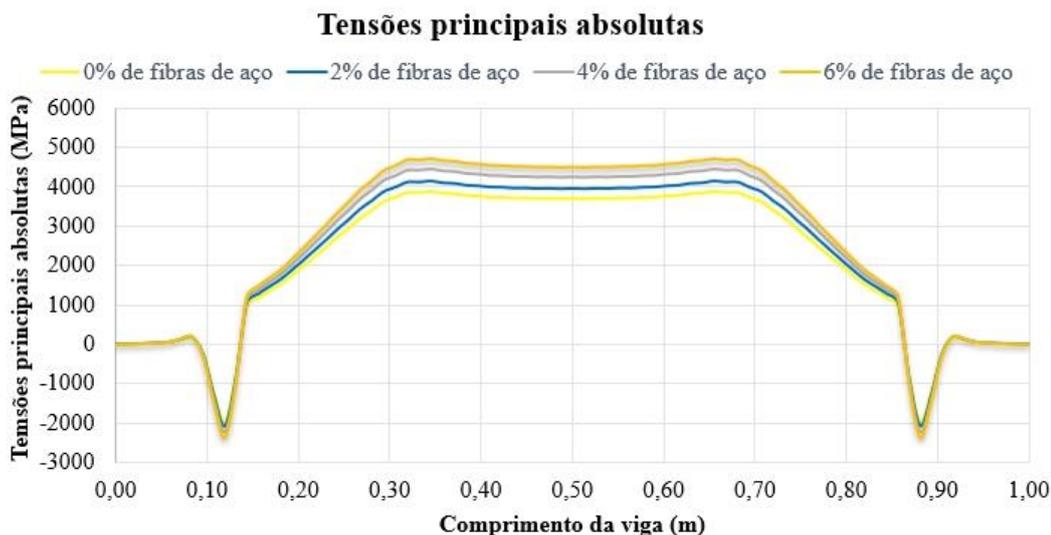
Fonte: Do Autor

A análise da figura 41 mostra que as tensões principais absolutas de tração observadas na viga se encontram na região central inferior da viga. Esta região em especial sofre as maiores deflexões do modelo e, portanto, deve ser a região crítica analisada para a ruptura por tração. Ou seja, nessas regiões as fibras de aço devem atuar de modo a suportar as tensões de tração com margem de segurança adequada. Além disso, a região central superior suporta as maiores tensões de compressão.

Observa-se que quanto mais elevada a fração volumétrica de fibras de aço na mistura, maiores são as tensões que o modelo numérico apresenta, ou seja, maiores as tensões necessárias para proporcionar o deslocamento imposto como condição de contorno. É verificado para a máxima tensão principal de tração uma diferença percentual de 6,0% e 6,4% para a elevação da fração volumétrica de fibras de aço de 2% para 4% e posteriormente para 6%.

A Figura 42 apresenta a intensidade das tensões principais absolutas ao longo do comprimento da viga em sua região inferior para as frações volumétricas analisadas.

Figura 42 - Tensões principais absolutas ao longo da viga



Fonte: Do Autor

A análise da Figura 42 revela que as tensões principais absolutas de maior intensidade estão localizadas na região próxima aos roletes superiores, responsáveis pela aplicação do carregamento/deslocamento da viga. Na região entre os roletes observa-se um leve decréscimo nos valores das tensões principais ao se aproximar do centro da viga. Além disso, observa-se que a curva das tensões principais absolutas apresenta uma inclinação descendente ao se aproximar da região dos roletes de apoio, apresentando nestas regiões as maiores tensões principais de compressão da simulação.

É observado que a influência da fibra nos resultados das tensões principais de tração na simulação numérica aumenta na medida que as tensões principais de trações crescem ao longo do comprimento da viga. Na região central, que concentra as maiores tensões principais de tração da simulação, é observado as tensões principais de tração na simulação aumenta de forma aproximadamente proporcional conforme se eleva a fração volumétrica de fibras de aço.

Para validar esta afirmação, a Tabela 8 apresenta a comparação entre a diferença percentual das tensões principais de tração nos comprimentos de 0,3 metros, 0,5 metros e 0,7 metros da viga conforme se eleva a fração volumétrica de fibras de aço. Estes comprimentos foram escolhidos de forma a avaliar se os resultados obtidos em pontos diferentes da viga apresentam semelhanças.

Tabela 8 - Diferença percentual entre as tensões principais de tração das frações volumétricas de fibras de aço analisadas

Frações volumétrica de fibras de aço comparadas (%)	Diferença percentual (%) das tensões principais de tração nos comprimentos de 0,3, 0,5 e 0,7 metros da viga		
	0,3 metros	0,5 metros	0,7 metros
0-2	7,76	7,67	7,83
2-4	6,61	6,67	6,67
4-6	6,16	6,10	6,17

Fonte: Do Autor

Analisando a Tabela 8 observa-se que nos três comprimentos analisados as tensões principais de tração obtidas tiveram um aumento similar para a elevação da fração volumétricas de fibras em 2%. Dessa forma, verifica-se que o modelo Mori-Tanaka introduz os efeitos da fibra de forma homogênea em todo corpo através do conceito de EVR definido anteriormente, não considerando locais de concentração ou ausência de fibras.

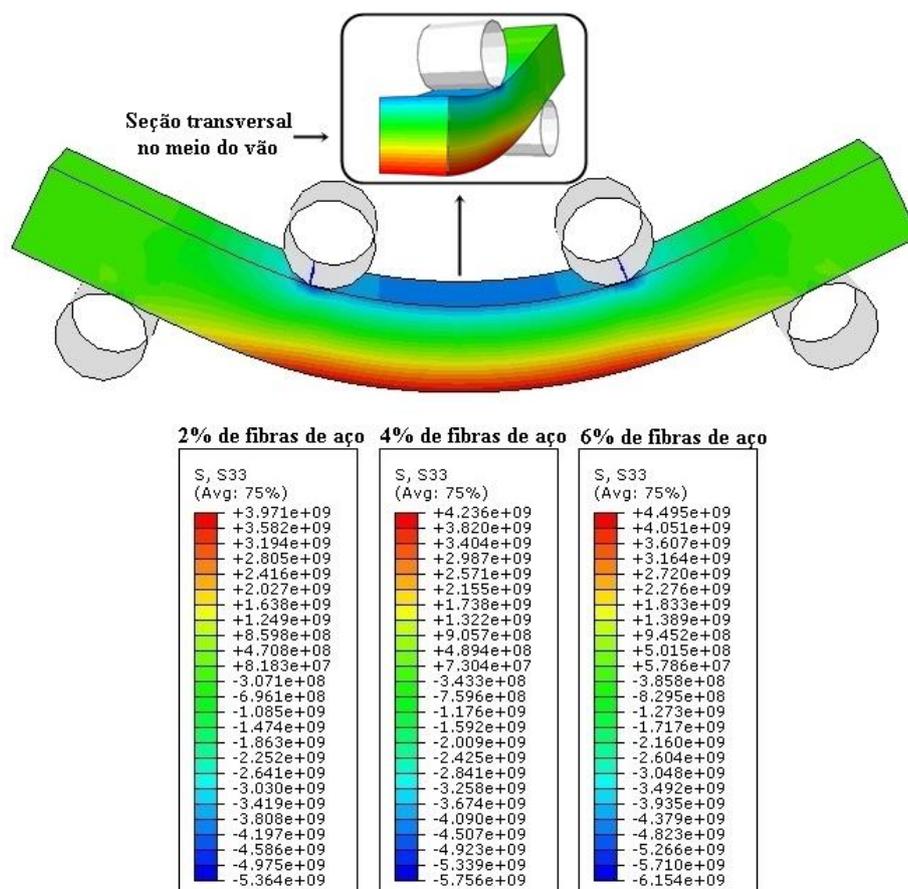
Além disso, é verificado que a diferença percentual das tensões principais de tração para a elevação sucessiva em 2% da fração volumétricas de fibras no material apresenta valores semelhantes. Este resultado demonstra que as tensões principais de tração para as frações volumétricas de fibras de aço comparadas progridem de forma aproximadamente proporcional para o modelo Mori-Tanaka, com um crescimento percentual entre 6,1% e 7,9% para cada 2% da fração volumétrica de fibras de aço incluídas na mistura. A generalização deste resultado para toda a faixa da fração de volume de fibras ainda requer uma análise mais ampla com mais intervalos de acréscimos de fibras.

5.3.2.3 Tensões longitudinais (SS3)

Além dessas tensões, é obtido também a distribuição de tensões na viga em cada eixo. Esta análise permite determinar as tensões segundo o eixo longitudinal da viga (tensões SS3 na presente análise no ABAQUS®) obtidas para cada fração volumétrica de fibra, identificando os locais em que a concentração de fibras deve ser maior para um melhor desempenho estrutural.

A Figura 43 apresenta as tensões na viga na configuração deformada segundo o eixo longitudinal para as frações volumétricas de fibras de aço analisadas.

Figura 43 - Tensões longitudinais (SS3) na viga de CUADRF



Fonte: Do Autor

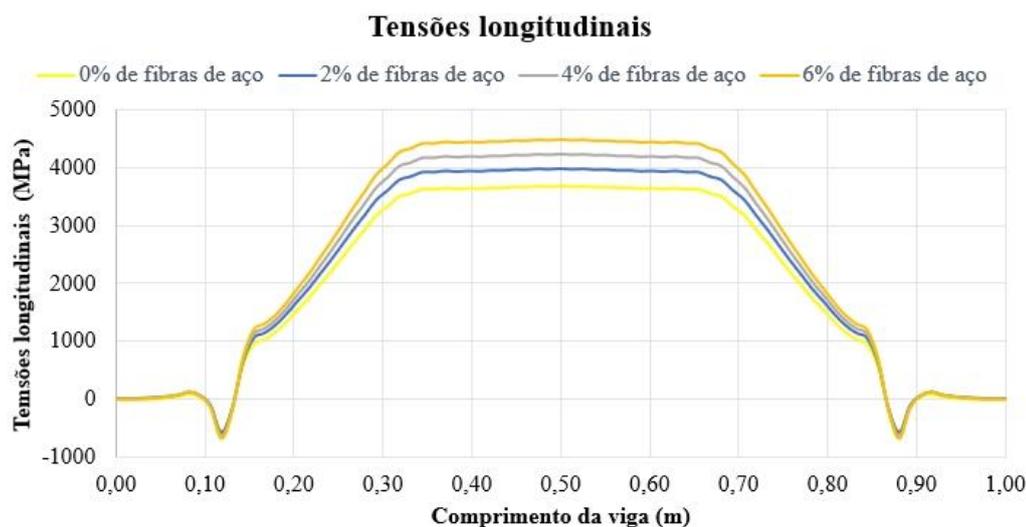
As tensões de trações de maior intensidade localizam-se próximo à superfície convexa, esta região é crítica pois está propensa a apresentar as primeiras fissuras na viga. Em vista disso, o reforço por fibras é essencial para elevar a capacidade resistente à tração do material. Em contrapartida a região próxima à superfície côncava apresenta-se comprimida, neste caso a densa matriz cimentícia do CUADRF é responsável por suportar estes esforços, embora a inclusão de fibras possa elevar a capacidade resistente.

Além disso, é verificado que para todas as frações volumétricas analisadas a viga apresenta o mesmo comportamento, diferindo-se apenas na intensidade das tensões apresentadas. Em razão da semelhança da distribuição de tensão de tração ao final do ensaio para todas as frações volumétricas analisadas neste estudo, verifica-se que o modelo Mori-Tanaka falha na simulação do comportamento do CUADRF ao não considerar o processo de multi-microfissuramento resultante da interação entre matriz e fibra ao ser submetido a uma carga/deslocamento elevado. Diante de tal processo, era esperado que a distribuição de tensões de tração na região mais tracionada tivesse alterações significativas ao se elevar a fração volumétrica de fibras da mistura.

Diante disso, uma análise mais acurada considerando-se as propriedades de uma fase adicional na zona de interface entre a matriz e fibra pode obter resultados mais precisos, visto que a interação entre a matriz e fibra é considerada de modo efetivo nesta zona.

A Figura 44 apresenta a intensidade das tensões longitudinais ao longo do comprimento da viga em sua região inferior para as frações volumétricas analisadas.

Figura 44 - Tensões longitudinais (SS3) ao longo da viga



Fonte: Do Autor

A Figura 44 mostra que as tensões que atuam no eixo longitudinal da viga apresentam um comportamento similar as tensões principais analisadas anteriormente com tensões de compressão nos apoios e tensões de tração crescentes até a região próxima aos roletes superiores. Porém, neste caso observa-se que a região central da viga apresenta tensões de tração superiores às tensões de trações observadas na região próxima aos roletes superiores.

Além disso, observa-se por meio da Figura 44 que os resultados obtidos para as frações volumétricas de 2%, 4% e 6% progredem de forma aproximadamente linear dado um ponto analisado na região central da viga. Esta constatação preliminar com base na análise visual da Figura 44 reforça a hipótese da linearidade aproximada do modelo de Mori-Tanaka para faixas de valores de variáveis mecânicas do CUADRF de acordo com a elevação de um teor de 2% de fibras de aço.

Para atestar quantitativamente o comportamento da Figura 44 descrito no parágrafo anterior, a Tabela 9 apresenta a diferença percentual das tensões longitudinais para as frações volumétricas de fibras de aço da mesma forma que foi analisado anteriormente na Tabela 8.

Tabela 9 - Diferença percentual entre as tensões longitudinais de tração das frações volumétricas de fibras de aço analisadas

Frações volumétrica de fibras de aço comparadas (%)	Diferença percentual (%) das tensões longitudinais de tração nos comprimentos de 0,3, 0,5 e 0,7 metros da viga		
	0,3 metros	0,5 metros	0,7 metros
0-2	7,72	7,67	7,78
2-4	6,64	6,67	6,74
4-6	6,21	6,10	6,24

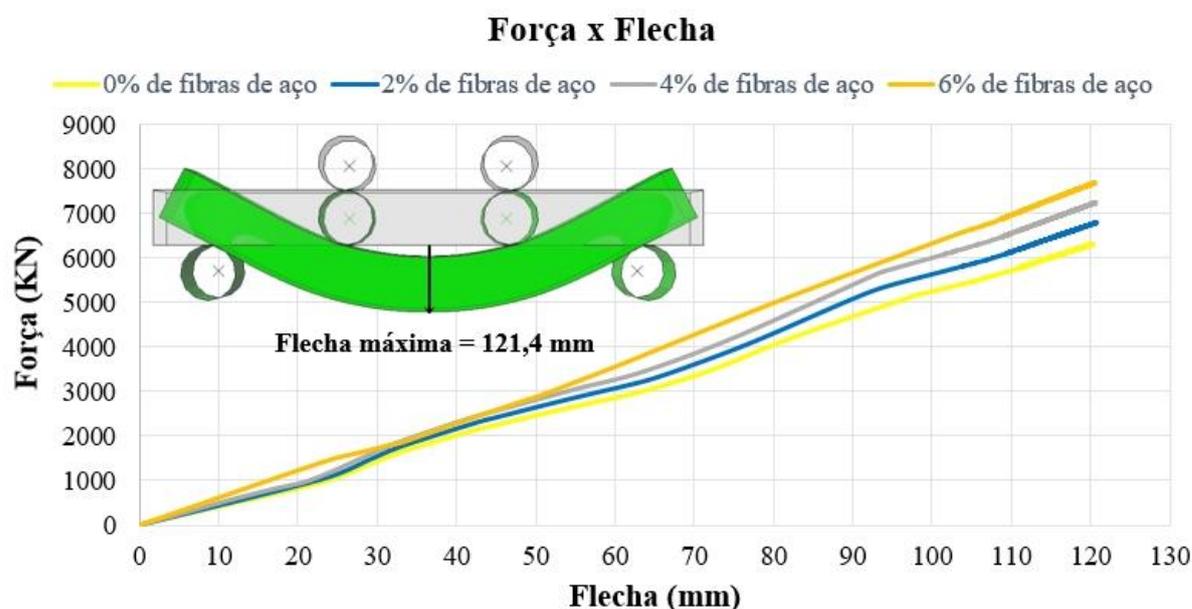
Fonte: Do Autor

Analisando a Tabela 9 verifica-se que os resultados obtidos foram similares aos resultados apresentados pela Tabela 8 para as tensões principais de tração. Esta comparação demonstra que o modelo Mori-Tanaka considera o efeito da interação bifásica entre a matriz e a fibra de forma aproximadamente linear se for considerado a comparação entre frações volumétricas próximas na faixa de volume de inclusão como no caso analisado. Esta afirmação está de acordo com as Figuras 36 e 37 que apresentam análise micromecânica do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson para toda a faixa da fração volumétrica de fibras de aço.

5.3.2.4 Diagrama força x flecha

Outra análise bastante utilizada pelos projetistas é a verificação da flecha máxima no vão central da viga para uma carga específica aplicada. A Figura 45 mostra a flecha no meio do vão em função da força total aplicada no ensaio por meio dos roletes superiores. Salienta-se que nesta simulação não se considerou a eventual ruptura da viga e a análise plástica, portanto, os resultados obtidos devem servir a comparação da influência da fibra no diagrama, desconsiderando qualquer possibilidade de análise para projeto estrutural.

Figura 45 - Diagrama força x flecha do CUADRF



Fonte: Do Autor

Diante da análise da Figura 45 pode-se verificar a significativa rigidez do CUADRF em relação ao deslocamento máximo da viga ao longo da simulação. Verifica-se a necessidade de uma força superior a 800 KN para uma flecha máxima de 20 mm para todas as frações volumétricas analisadas.

Os resultados apresentados na Figura 45 mostram que para deslocamentos até 30 mm a elevação do teor de fibras de aço de 4% para 6% produz resultados mais significativos do que a elevação de 2% para 4%. Observa-se que a curva com um teor de 4% de fibras de aço apresentou pouca variabilidade em relação a curva com 2% para essa faixa de deslocamentos, enquanto a variação da curva do material com 6% de fibras de aço para a mesma faixa de deslocamentos foi significativamente maior em relação ao material com 4% de fibras de aço. Por exemplo, é verificado que enquanto para as frações volumétricas de 4% e 6% de fibras de aço a diferença percentual entre a carga aplicada para uma flecha de 6 mm na viga é de 7,5%, para as frações volumétricas de 2% e 4% essa diferença percentual é de apenas 1,4%.

Devido a análise elástica do modelo numérico, é esperado que o comportamento da curva Força x Flecha se aproximasse de uma reta independente da fração volumétricas de fibras na mistura. No entanto, observa-se que a curva apresenta variações inconcebíveis com a linearidade esperada em determinadas regiões da análise. Este comportamento pode ser atribuído a erros do modelo numérico e será avaliado na seção 5.3.3.

5.3.2.5 Análise comparativa entre CAD, CUAD e CUADRF

Realiza-se através da Tabela 10 uma análise comparativa das variáveis analisadas neste trabalho para o CAD, CUAD e CUADRF com frações volumétricas de fibras de aço de 2%, 4% e 6%. Analisa-se o valor máximo encontrado para a variável na simulação numérica, ou seja, o valor máximo da variável observada na viga para atingir o deslocamento vertical de 0,1 metros dos roletes superiores. Além disso, considera-se para a avaliação da flecha máxima na viga uma força de 1600 KN aplicada no ensaio (800 KN em cada rolete superior).

Além das tensões analisadas neste trabalho, considerou-se para a análise comparativa as tensões de Von Mises que, embora não sejam avaliadas para o CUADRF devido ao seu comportamento pseudo-plástico, podem auxiliar na avaliação da influência das fibras introduzidos pelo modelo Mori-Tanaka na análise numérica.

A análise considerou para o CAD com módulo de elasticidade de 37 GPa e coeficiente de Poisson de 0,2. Para o CUAD e CUADRF os parâmetros mecânicos considerados para a matriz e a fibra de aço foram os mesmos utilizados na seção 5.1.

Tabela 10 - Comparação entre variáveis mecânicas do CAD, CUAD e CUADRF

Variável analisada (Valor máximo)	Material				
	CAD	CUAD	CUADRF		
			2% de fibras de aço	4% de fibras de aço	6% de fibras de aço
Tensão de Von Mises (MPa)	3523	4185	4526	4840	5160
Tensão principal de tração (MPa)	3199	3861	4158	4434	4704
Tensão longitudinal (MPa)	3014	3689	3971	4236	4495
Flecha em mm para uma força de 1600 KN	32,5	31,4	30,9	29,7	27,4

Fonte: Do Autor

Os resultados apresentados pela Tabela 10 demonstram que a diferença das tensões analisadas do CAD para o CUAD é significativa, com diferença percentual de 18,79% para as tensões de Von Mises, de 20,79% para as tensões principal de tração e 22,40% para a tensão SS3 superior. Já a flecha obtida para o CUAD quando aplicado uma força 1600 KN reduz em 3,5% em comparação ao CAD graças a maior compactação da matriz cimentícia que esse material possui.

Adicionando-se fibras de aço a mistura do CUAD verifica-se para a tensão de Von

Mises máxima uma diferença percentual de 8,15%, 15,65% e 23,30% para a incorporação de respectivamente 2%, 4% e 6% de fibras de aço. Para as mesmas frações volumétricas é verificado uma diferença percentual de 7,69%, 14,84% e 21,83% para a tensão principal absoluta máxima. Já para a tensão de tração SS3 a diferença percentual para as mesmas quantidades de fibras de aço é de 7,64%, 14,83% e 21,85%. Diante da semelhança dos resultados e da possibilidade de se determinar um incremento percentual fixo a cada elevação de um teor de 2% de fibras na mistura infere-se mais uma vez a linearidade aproximada do modelo de Mori-Tanaka para as frações volumétricas analisadas.

Para a análise da flecha máxima obtida para uma força de 1600 KN, observa-se que a incorporação de 2% reduz a flecha em 1,59% enquanto a incorporação de 4% e 6% de fibras de aço reduz a flecha em respectivamente 5,41% e 12,74%. O que demonstra a significativa influência das fibras, considerada no modelo de Mori-Tanaka, para resistir ao deslocamento vertical diante dos esforços de flexão que uma viga normalmente está submetida.

5.3.3 Erros associados ao modelo numérico proposto

O modelo numérico proposto para o ensaio de flexão de quatro pontos está sujeito a eventuais erros numéricos como erros inerentes ao modelo, já que o modelo é idealizado e não reflete alguns parâmetros típicos do ensaio de flexão de quatro pontos como o controle de deslocamento dos roletes superiores por exemplo. Além disso, embora o modelo Mori-Tanaka forneça as propriedades efetivas do compósito de acordo com a influência das propriedades das fibras, ele não é capaz de simular a influência do comportamento mecânico da fibra na matriz. Por exemplo, o processo de deformação das fibras influencia diretamente nos deslocamentos apresentados pelo material e conseqüentemente na análise geral.

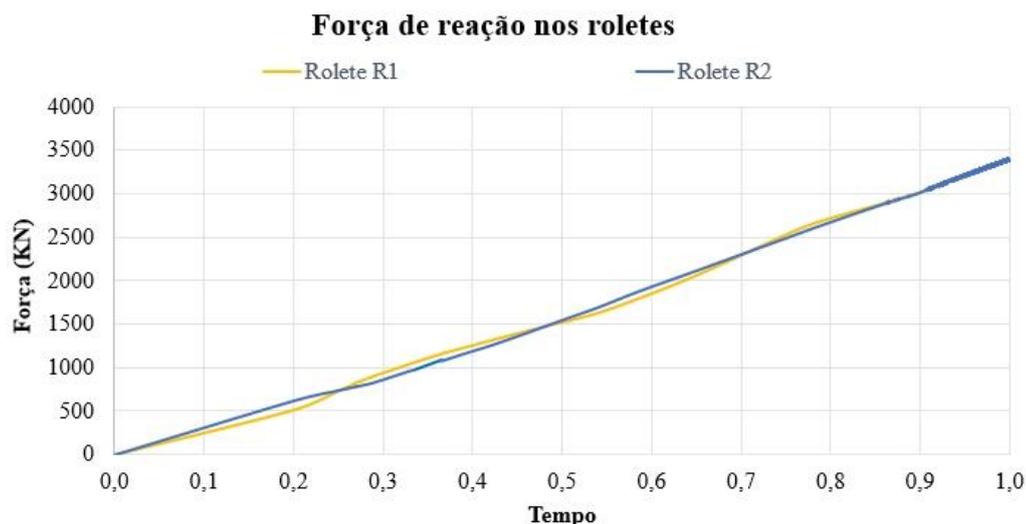
Os erros de modelagem também se originam na simplificação de hipóteses de apoio e da análise ineficiente do contato entre as superfícies dos roletes e da viga. O método escolhido para a interação de contato entre elementos na presente análise é um método simples e direto, visto que a região de contato entre os roletes e a viga necessita de uma análise mais acurada.

Os erros numéricos também podem ser atribuídos a discretização inadequada do domínio, visto que para um resultado mais preciso a malha de elementos finitos deve representar a geometria real do problema. Uma discretização insuficiente pode produzir funções de aproximação inadequadas para a determinação da solução exata do modelo numérico.

Uma forma de analisar a influência dos erros numéricos associadas a convergência do método dos elementos finitos para a solução exata no presente problema é a análise das

forças de reação geradas pelos roletes. A simetria do modelo numérico indica que para um mesmo deslocamento estes devem apresentar a mesma força ao longo da simulação. A Figura 46 apresenta as forças em cada rolete para a análise macromecânica com incorporação de 2% de fibras metálicas, em que o tempo 0 representa o início da análise e o tempo 1 representa o final da análise.

Figura 46 - Forças de reação nos roletes durante o ensaio de flexão de quatro pontos



Fonte: Do Autor

A Figura 46 mostra que as forças nos roletes apresentam diferenças em faixas de tempo consideráveis da simulação. Estas diferenças são explicadas pelos erros numéricos associados a aplicação do MEF na convergência da solução exata do problema, ou seja, dos erros associados ao processo de cálculo efetuado no MEF. A existência desses erros sugere uma análise mais profunda da convergência da solução de acordo com os incrementos gerados.

A tabela 11 apresenta os erros números percentuais máximos entre as forças nos roletes para diversas faixas de tempo de acordo com as frações volumétricas de fibras de aço analisadas neste trabalho.

Tabela 11 - Erro percentual máximo entre as forças de reações nos roletes para as frações volumétricas de fibras de aço analisadas

Tempo de Análise	Erro percentual máximo na determinação das forças de reações nos roletes		
	Análise com 2% de fibras de aço	Análise com 4% de fibras de aço	Análise com 6% de fibras de aço
0-0,2	16,89%	18,85%	19,91%
0,2-0,5	8,65%	7,91%	7,58%
0,5-0,8	2,52%	1,62%	2,28%
0,8-1,0	0,32%	0,37%	0,32%

Fonte: Do Autor

Os resultados apresentados pela Tabela 11 e pela figura 46 mostram que a

convergência da determinação das forças de reações ocorre principalmente após a faixa de tempo de 0,2 - 0,5. Foi verificado com inúmeros testes no modelo que estes erros numéricos de convergência estão relacionados a utilização da sub-rotina UMAT Mori-Tanaka. Verifica-se que a matriz jacobiana fornecido por essa sub-rotina gera demasiadas iterações para atingir o equilíbrio global em comparação com a análise com ausência da sub-rotina (Propriedades do material definidas no módulo PROPERTY da interface do ABAQUS/CAE), afetando a convergência do modelo e conseqüentemente o custo computacional da análise. O modo como isso ocorre deve ser investigado por uma análise mais ampla acerca da influência da sub-rotina micromecânica no modelo numérico.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi utilizado uma abordagem micromecânica para a avaliação do comportamento macromecânico do CUADRF, um material pouco explorado no âmbito da construção civil. Diante disso, os resultados do estudo apontam as seguintes conclusões:

- a) Os modelos micromecânicos Mori-Tanaka e Auto Consistente, ambos baseados na teoria do campo médio, subestimam o módulo de elasticidade experimental e a previsão do módulo de elasticidade por análise de regressão do CUADRF a uma diferença percentual tolerável para a elaboração de projetos estruturais.
- b) Os modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente determinam o coeficiente de Poisson do CUADRF com diferença percentual inferior a 2% para os resultados experimentais, enquanto os limites de Voigt e Reuss não devem ser utilizados para prever o coeficiente de Poisson efetivo devido as hipóteses adotadas em sua formulação.
- c) Os limites de Voigt e Reuss devido a sua imprecisão não devem ser utilizados como um método de homogeneização para prever as propriedades efetivas do CUADRF, porém podem indicar a confiabilidade dos resultados apresentados por outros modelos micromecânicos, pois constituem o limite superior e inferior da propriedade em uma análise bifásica.
- d) Para o CUADRF os modelos Mori-Tanaka e Auto Consistente apresentam resultados similares para baixa frações volumétricas de fibras de aço incluídas na mistura, porém o modelo Auto Consistente produz resultados ligeiramente superiores aos resultados obtidos pelo Modelo Mori-Tanaka. Isto implica que o modelo Mori-Tanaka deve ser preferencialmente utilizado na análise macromecânica do material por apresentar resultados mais conservadores.
- e) Os resultados obtidos para as tensões de tração na viga devem ser analisados com cautela pois os modelos micromecânicos analisados não consideram o processo de multi-microfissuramento resultante da interação entre matriz e fibra ao ser submetido a um carregamento elevado.
- f) É verificado que para o modelo numérico do ensaio de flexão de quatro pontos, a incorporação de uma fração volumétrica de 6% de fibras de aço proporciona um aumento superior a 21% da máxima tensão principal de tração e da máxima tensão longitudinal de tração observadas ao final da simulação, o que mostra a significativa influência das fibras de aço introduzidas no modelo numérico pelo

modelo micromecânico de Mori-Tanaka.

- g) Para a homogeneização da matriz de CUAD e fibra de aço analisadas neste trabalho, o modelo Mori-Tanaka produz resultados macromecânicos aproximadamente lineares conforme se eleva a fração volumétrica de fibras de aço na mistura em 2%.

Diante dos resultados e conclusões apresentados evidencia-se que a análise micromecânica é de grande utilidade na determinação das propriedades efetivas pois pode facilmente ser estendida a inúmeras aplicações do CUADRF necessitando apenas dos dados iniciais da matriz e da fibra utilizada na mistura. Dessa forma, como o material é de alto custo e os ensaios experimentais para aferição de suas propriedades não são padronizados recorrendo a modificações de ensaios criados para concretos de baixa resistência, os modelos micromecânicos podem auxiliar o projetista na tomada de decisão do teor de fibras adequado para alcançar as propriedades requeridas pelo projeto.

REFERÊNCIAS

ABAQUS. **ABAQUS User's Manual**. Providence, Rhode Island, USA: Dassault Systèmes. Simulia Corporation ABAQUS vs. 6.13. 2013

ABAQUS. **Abaqus 6.13 Release Notes**, 2013.

AFGC-BFUP, Ultra High Performance Fibre. Reinforced Concretes–Interim Recommendations. **AFGC publication, Paris, France**, 2002.

AFGC, SETRA. Bétons fibrés à ultra-hautes performances–Recommandations. **AFGC, France**, 2013.

AFNOR. NF P18-470. Ultra-High Performance Fiber Reinforced Concrete – Specifications, Performance, Production and Conformity, **AFNOR**, 2016.

AGUIAR, Cássio Barros de. **Abordagem micromecânica da propagação de fraturas em meios elásticos e viscoelásticos**. 2016. 180f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2016.

AÏTCIN, Pierre-Claude. **Binders for durable and sustainable concrete**. CRC Press, 2007.

AÏTCIN, Pierre-Claude. **High performance concrete**. CRC press, 1998.

AL-AZZAWI, Bakr. **Fatigue of Reinforced Concrete Beams Retrofitted with Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete**. 2018. Tese de Doutorado. Cardiff University.

ALMEIDA, F. P. A. et al . Avaliação numérica do erro de modelagem global em estruturas constituídas por materiais heterogêneos. **Proceedings of the IX Argentine Congress on Computational Mechanics and II South American Congress on Computational Mechanics**. v. XXIX, p. 1871–1885, 2010.

ALSALMAN, A. et al. Evaluation of modulus of elasticity of ultra-high performance concrete. **Construction and Building Materials**, v. 153, p. 918–928, 2017.

ACI Committee 363. State-of-the-Art Report on High-Strength Concrete, 363R-92, reapproved 1997. **American Concrete Institute**, Farmington Hills, Michigan, p. 55, 1997.

ANDREASEN, V. A. H. M.; ANDERSEN., V. J. Ueber die Beziehung zwischen Kornabstufung und Zwischenraum in Produkten aus losen Körnern (mit einigen Experimenten). **Kolloid-Zeitschrift**, v. 50, n. 3, p. 217-228, 1930.

ASSIS, L. S. **Avaliação da influência da temperatura no dano do concreto via modelagem computacional**. 2019. 86f. Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de fora, Faculdade de Engenharia, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, 2019.

ASTM. **Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens**. p. 1–7, 1994.

AUBRY, Simon et al. A UHPFRC cladding challenge: the foundation Louis Vuitton pour la création" Iceberg. In: **RILEM-fib-AFGC Int. Symposium on Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete**. p. 37-48, 2013.

AZEVEDO, Alvaro Ferreira Marques. **Método dos Elementos Finitos**. 1º Edição, Portugal: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.

AZMEE, N. M.; SHAFIQ, N. Ultra-high performance concrete: From fundamental to applications. **Case Studies in Construction Materials**, v. 9, 2018.

BARBOSA, A. H. **Contribuição Ao Estudo Sobre a Obtenção Do Módulo De Elasticidade Do Concreto**. 2010. 203f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2010.

BARNETT, Stephanie J. et al. Assessment of fibre orientation in ultra high performance fibre reinforced concrete and its effect on flexural strength. **Materials and Structures**, v. 43, n. 7, p. 1009-1023, 2010.

BEHLOUL, M. et al. Ductal®: Ultra High-Performance concrete technology with ductility. **6th RILEM Symposium on Fibre-Reinforced Concretes (FRC) - BEFIB - 2004**, n. September, p. 1281–1290, 2004.

BEHLOUL, M. et al. Ductal® Pont du Diable footbridge, France. **Proceedings of the International FIB Symposium 2008 - Tailor Made Concrete Structures: New Solutions for our Society**, p. 95, 2008.

BEHLOUL, M.; LEE, K. C. Ductalr Seonyu footbridge. **Structural Concrete**, v. 4, n. 4, p. 195–201, 2003.

NEMATOLLAHI, Behzad et al. A review on ultra high performance 'ductile' concrete (UHPdC) technology. **International journal of civil and structural engineering**, v. 2, n. 3, p. 994, 2012.

BENETON, A. C. et al. Concreto de pós-reativos ecoeficiente. **Applied Microbiology and Biotechnology**, v. 85, n. 1, p. 2071–2079, 2014.

BLAIS, P. Y.; COUTURE, M. Precast , Prestressed Pedestrian Bridge — World ' s First Reactive. **PCI Journal**, v. 44, n. 5, p. 60–71, 1999.

BÖHM, Helmut J. A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics. **Cdl-fmd Report**, v. 3, 1998.

BONNEAU, O. et al. Characterization of the granular packing and percolation threshold of reactive powder concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 30, n. 12, p. 1861–1867, 2000.

BUTTIGNOL, T. E. T. et al. Aplicações do Concreto de Ultra Alto Desempenho (CUAD) em obras de reforço e recuperação de estruturas. **Anais do 60º Congresso Brasileiro do Concreto**, n. 1, p. 1–14, 2018.

BUTTIGNOL, T. E. T.; SOUSA, J. L. A. O.; BITTENCOURT, T. N. UHPFRC : a review of material properties and design procedures. **IBRACON structures and materials**, v. 10, n. 4, p. 957–971, 2017.

CAVILL, B.; CHIRGWIN, G. The world's first RPC road bridge at Shepherds Gully Creek, NSW. **Austrroads Bridge Conference, 5th, 2004, Hobart, Tasmania, Australia, 2004.**

CHANVILLARD, G. et al. Fatigue flexural behaviour of pre-cracked specimens of Ductal® UHPFRC. **6th International RILEM Symposium on Fibre-Reinforced Concretes (BEFIB'2004)**, n. January, p. 16, 2004.

COSTA, E. J. H. **Homogeneização de compósitos reforçados por fibras considerando efeitos de interfaces**. 2017. 151 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) - Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2017.

COSTA, Marcelo Sidney Mendes. **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A ENGENHARIA CIVIL**. 2014.

CWIRZEN, A.; PENTTALA, V.; VORNANEN, C. Reactive powder based concretes: Mechanical properties, durability and hybrid use with OPC. **Cement and Concrete Research**, v. 38, n. 10, p. 1217–1226, 2008.

DE CASTRO, A. L.; TIBA, P. R. T.; PANDOLFEG, V. C. Fibras de polipropileno e sua influência no comportamento de concretos expostos a altas temperaturas. Revisão. **Ceramica**, v. 57, n. 341, p. 22–31, 2011.

DE LARRARD, F.; SEDRAN, T. Optimization of ultra-high-performance concrete by the use of a packing model. **Cement and Concrete Research**, v. 24, n. 6, p. 997–1009, 1994.

DE LARRARD, F.; SEDRAN, T. Mixture-proportioning of high-performance concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 32, n. 11, p. 1699–1704, 2002.

DE SOUZA, Remo Magalhães. O método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor. **Apostila, Universidade Federal do Pará, Belém, 2003.**

DRUGAN, W. J.; WILLIS, J. R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 44, n. 4, p. 497–524, 1996.

DUTRA, V. F. P. **Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras de aço via teoria da homogeneização**. 2012. Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre BR-RS, 2012.

EIDE, Mari Bøhnsdalen; HISDAL, Jorun-Marie. Ultra High Performance Fibre Reinforced Concrete (UHPFRC). **SINTEF Building and Infrastructure**. 2012.

EL-DIEB, A. S. Mechanical, durability and microstructural characteristics of ultra-high-strength self-compacting concrete incorporating steel fibers. **Materials and Design**, v. 30, n. 10, p. 4286–4292, 2009.

EL-DIN, H. S. et al. Effect of Steel Fibers on Behavior of Ultra High Performance Concrete. **First International Interactive Symposium on UHPC**.n. 2004, p. 1–10, 2016.

ENDO, V. T. **Implementação de modelo constitutivo de viscoelasticidade linear ortotrópica associada à técnica de identificação de parâmetros**. 2013. 105 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. 2013.

ESHELBY, John Douglas. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 241, n. 1226, p. 376-396, 1957.

FARIA, R. P. **Simulação numérica de um material hiperelástico anisotrópico submetido a cisalhamento simples**. 2017. 48 f. Projeto Final (Bachalerado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal Fluminense, 2017.

FEHLING, E.; LEUTBECHER, T.; BUNJE, K. Design relevant properties of hardened ultra high performance concrete. **Proceedings of the International Symposium on Ultra High Performance Concrete**, p. 327–338, 2004.

FENNIS, S. A. A. M.; WALRAVEN, J. C.; DEN UIJL, J. A. The use of particle packing models to design ecological concrete. **Heron**, v. 54, n. 2–3, p. 183–202, 2009.

GAO, R. et al. Static properties of plain reactive powder concrete beams. **Key Engineering Materials**, v. 302–303, p. 521–527, 2006.

GEISENHANSLÜKE, Carsten; SCHMIDT, Michael. Methods for modelling and calculation of high density packing for cement and fillers in UHPC. **In: Proceedings of the International Symposium on Ultra-High Performance Concrete, Kassel, Germany**. p. 303-312. 2004.

GHAFAARI, E. et al. The effect of nanosilica addition on flowability, strength and transport properties of ultra high performance concrete. **Materials and Design**, v. 59, p. 1–9, 2014.

GHAFAARI, E.; COSTA, H.; JÚLIO, E. RSM-based model to predict the performance of self-compacting UHPC reinforced with hybrid steel micro-fibers. **Construction and Building Materials**, v. 66, p. 375–383, 2014.

GHAFAARI, E.; COSTA, H.; JÚLIO, E. Statistical mixture design approach for eco-efficient UHPC. **Cement and Concrete Composites**, v. 55, p. 17–25, 2015.

GRAYBEAL, Benjamin A. et al. **Material property characterization of ultra-high performance concrete**. United States. Federal Highway Administration. Office of Infrastructure Research and Development, 2006.

GRAYBEAL, B.; STONE, B. **Compression Response of a Rapid-Strengthening Ultra-High Performance Concrete Formulation**. United States. Federal Highway Administration. Office of Infrastructure Research and Development, 2012.

GRAYBEAL, Benjamin. UHPC in the US Highway Infrastructure. In: **International Workshop on UHPFRC. Marseille (France)**. 2009.

GROSS, Dietmar; SEELIG, Thomas. **Fracture mechanics: with an introduction to micromechanics**. Springer, 2017.

GU, C. P.; YE, G.; SUN, W. Ultrahigh performance concrete-properties, applications and perspectives. **Science China Technological Sciences**, v. 58, n. 4, p. 587–599, 2015.

GUERRINI, G. L. Applications of high-performance fiber-reinforced cement-based composites. **Applied Composite Materials**, v. 7, n. 2, p. 195–207, 2000.

HABEL, K. Structural Behaviour of Elements Combining Ultra-High Performance Fibre Reinforced Concretes (Uhpfrc) and Reinforced Concrete. **Fifth RILEM Symposium on Fibre-Reinforced Concretes (FRC) - BEFIB' 2000**, v. 3036, p. 87–100, 2004.

HALE, D. K. The physical properties of composite materials. **Journal of materials science**, v. 11, n. 11, p. 2105-2141, 1976.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 10, n. 4, p. 335-342, 1962.

HASSAN, A. M. T.; JONES, S. W.; MAHMUD, G. H. Experimental test methods to determine the uniaxial tensile and compressive behaviour of Ultra High Performance Fibre Reinforced Concrete(UHPFRC). **Construction and Building Materials**, v. 37, p. 874–882, 2012.

HEROLD, G.; MÜLLER, H. S. Measurement of porosity of ultra high strength fibre reinforced concrete. In: **Proceedings of the International Symposium on Ultra-High Performance Concrete, Kassel, Germany**. p. 685-694. 2004.

HILL, R. The elastic behaviour of a crystalline aggregate. **Proceedings of the Physical Society**. Section A, v. 65, n. 5, p. 349, 1952.

HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, n. 5, p. 357–372, 1963.

HILL, R. A self-consistent mechanics of composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 13, n. 4, p. 213–222, 1965.

HILL, R. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 15, p. 79–95, 1967.

HORI, M.; NEMAT-NASSER, S. On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids. **Mechanics of Materials**, v. 31, n. 10, p. 667–682, 1999.

HSIEH, C. L.; TUAN, W. H. Elastic properties of ceramic-metal particulate composites. **Materials Science and Engineering A**, v. 393, n. 1–2, p. 133–139, 2005.

HUANG, Yonggang. **A user-material subroutine incorporating single crystal plasticity in the ABAQUS finite element program**. Harvard Univ., 1991.

IPEK, M. et al. Effect of pre-setting pressure applied to mechanical behaviours of reactive powder concrete during setting phase. **Construction and Building Materials**, v. 25, n. 1, p. 61–68, 2011.

JSCE. **Recommendations for Design and Construction of High Performance Fiber Reinforced Cement Composites with Multiple Fine Cracks (HPFRCC)**. 2008.

KOVAL JUNIOR, G. **Aplicação da teoria da homogeneização em materiais compósitos viscoelásticos**. 2003. 180 f. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003

JUSTS, J. et al. Ultra high performance concrete hardening under pressure. **Civil Engineering '11 - 3rd International Scientific Conference, Proceedings**, v. 3, p. 38–43, 2011.

KALIAKIN, Victor. **Soil mechanics: calculations, principles, and methods**. Butterworth-Heinemann, 2017.

KANIT, T. et al. Determination of the size of the representative volume element for random composites: Statistical and numerical approach. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 13–14, p. 3647–3679, 2003.

LAPPA, E.; VEEN, C. VAN DER; WALRAVEN, J. Fatigue Failure Properties of High and Ultra High Strength Fibre Reinforced Concrete. **6th International PhD Symposium in Civil Engineering**, p. 86–87, 2006.

LEE, N. P.; CHISHOLM, D. H. Reactive Powder Concrete. Study Report SR 146. **Judgeford: BRANZ**, 2005.

LEE, Y.; KANG, S. T.; KIM, J. K. Pullout behavior of inclined steel fiber in an ultra-high strength cementitious matrix. **Construction and Building Materials**, v. 24, n. 10, p. 2030–2041, 2010.

LI, H.; LIU, G. Tensile Properties of Hybrid Fiber-Reinforced Reactive Powder Concrete After Exposure to Elevated Temperatures. **International Journal of Concrete Structures and Materials**, v. 10, n. 1, p. 29–37, 2016.

LI, Shaofan; WANG, Gang. **Introduction to micromechanics and nanomechanics**. World Scientific Publishing Company, 2018.

LI, V. C.; WANG, Y.; BACKER, S. Effect of inclining angle, bundling and surface treatment on synthetic fibre pull-out from a cement matrix. **Composites**, v. 21, n. 2, p. 132–140, 1990.

LIU, C. T.; HUANG, J. S. Fire performance of highly flowable reactive powder concrete. **Construction and Building Materials**, v. 23, n. 5, p. 2072–2079, 2009.

LIU, S. G. et al. The durability of reactive powder concrete: A review. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, v. 474, n. 1, 2019.

LIVI, C. N. **Influência da temperatura e pressão na hidratação e desempenho mecânico de pastas para concreto de ultra-alto desempenho**. 2017. 354 f. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2017.

LORENCI, G. V. S. **Formulação micromecânica do comportamento poroelástico de um meio rochoso fraturado**. 2013. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande Do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2013.

MÁCA, P.; SOVJÁK, R.; KONVALINKA, P. Mix design of UHPFRC and its response to projectile impact. **International Journal of Impact Engineering**, v. 63, p. 158–163, 2014.

MAKITA, T. **Fatigue behaviour of UHPFRC and R-UHPFRC – RC composite members**. Thèse N° 6068, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. 2014.

MAKITA, T.; BRÜHWILER, E. Tensile fatigue behaviour of ultra-high performance fibre reinforced concrete (UHPFRC). **Materials and Structures/Materiaux et Constructions**, v. 47, n. 3, p. 475–491, 2014.

MAKITA, T.; BRÜHWILER, E. Damage models for UHPFRC and R-UHPFRC tensile fatigue behaviour. **Engineering Structures**, v. 90, p. 61–70, 2015.

MEDEIROS, A. **Estudo do comportamento à fadiga em compressão do concreto com fibras**. Tese (doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro., p. 201, 2012.

MEDEIROS, M. S.; PARENTE, E.; DE MELO, A. M. C. Influence of the micromechanics models and volume fraction distribution on the overall behavior of SiC/Al functionally graded pressurized cylinders. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 16, n. 4, p. 1–15, 2019.

MORAES, A. J. O Método dos Elementos Finitos e a Engenharia Civil. **Especialize On-line IPOG**, v. 01, 2015.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. **Acta Metallurgica**, v. 21, n. 5, p. 571–574, 1973.

NASCIMENTO, R. F. DO. **Análise dinâmica de vigas utilizando o elemento finito de timoshenko com refinamento p-adaptativo**. 2005. 212 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2005.

NAZRI, F. M. et al. Fire resistance of ultra-high performance fibre reinforced concrete due to heating and cooling. **MATEC Web of Conferences**, v. 87, n. January, 2016.

OZAWA, M. et al. Preventive effects of polypropylene and jute fibers on spalling of UHPC at high temperatures in combination with waste porous ceramic fine aggregate as an internal curing material. **Construction and Building Materials**, v. 206, p. 219–225, 2019.

PARK, S. H. et al. Tensile behavior of ultra high performance hybrid fiber reinforced concrete. **Cement and Concrete Composites**, v. 34, n. 2, p. 172–184, 2012.

PHAN, L. T.; LAWSON, J. R.; DAVIS, F. L. Effects of elevated temperature exposure on heating characteristics, spalling, and residual properties of high performance concrete. **Materials and Structures/Materiaux et Constructions**, v. 34, n. 236, p. 83–91, 2001.

RAHMAN, S.; MOLYNEAUX, T.; PATNAIKUNI, I. Ultra high performance concrete: recent applications and research. **Australian Journal of Civil Engineering**, v. 2, n. 1, p. 13–20, 2005.

QU, Jianmin; CHERKAOUI, Mohammed. **Fundamentals of micromechanics of solids**. Hoboken: Wiley, 2006.

MANASA, G. K.; RAMANA, CH VENKATA; PRADEEP, PSAI. Study on Properties of Modified Reactive Powder Concrete. **International Journal of Engineering Research & Technology**, v. 3, n. 10, p. 937–940, 2017.

RAMGE, P.; LOHAUS, L. Robustness by Mix Design – A New Approach for Mixture Proportioning of SCC. **RILEM Bookseries**, v. 1, n. June 2015, 2010.

REBENTROST, M.; WIGHT, G.; FEHLING, E. Experience and Applications of Ultra-high Performance Concrete in Asia. **2nd International Symposium on Ultra High Performance Concrete**, p. 19–30, 2008.

REDA, M. M.; SHRIVE, N. G.; GILLOTT, J. E. Microstructural investigation of innovative UHPC. **Cement and Concrete Research**, v. 29, n. 3, p. 323–329, 1999.

RESPLENDINO, J.; TOUTLEMONDE, F. The UHPFRC revolution in structural design and construction. **Indian Concrete Journal**, v. 88, n. 4, p. 72–83, 2014.

REUSS, András. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 9, n. 1, p. 49–58, 1929.

RICCIOTTI, R. **The Footbridge of Peace , Seoul – Korea**, 2002.

RICHARD, P.; CHEYREZY, M. Composition of reactive powder concretes. **Cement and Concrete Research**, v. 25, n. 7, p. 1501–1511, 1995.

RÍOS, J. D.; CIFUENTES, H. Probabilistic fatigue analysis of ultra-high-performance fibre-reinforced concrete under thermal effects. **MATEC Web of Conferences**, v. 165, 2018.

ROUX, N.; ANDRADE, C.; SANJUAN, M. A. EXPERIMENTAL STUDY OF DURABILITY OF REACTIVE POWDER CONCRETES By N. Roux,t C. Andrade,z and M. A. Sanjuan 3. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 8, n. February, p. 1–6, 1996.

RUSSELL, Henry GRAYBEAL. et al. **Ultra-high performance concrete: a state-of-the-art report for the bridge community**. United States. Federal Highway Administration. Office of Infrastructure Research and Development, 2013.

SAUER, R. A.; WANG, G.; LI, S. The composite Eshelby tensors and their applications to homogenization. **Acta Mechanica**, v. 197, n. 1–2, p. 63–96, 2008.

SCHMIDT, M.; FEHLING, E. Ultra-high-performance concrete: Research, development and application in Europe. **Seventh International Symposium on the Utilization of High Strength/High-Performance Concrete**, v. 5, n. September 2015, p. 51–78, 2005.

SEGERLIND, Larry J. **Applied finite element analysis**. New York: Wiley, 1976

SHI, C. et al. A review on ultra high performance concrete: Part I. Raw materials and mixture design. **Construction and Building Materials**, v. 101, p. 741–751, 2015.

SMARZEWSKI, P.; BARNAT-HUNEK, D. Property Assessment of Hybrid Fiber-Reinforced Ultra-High-Performance Concrete. **International Journal of Civil Engineering**, v. 16, n. 6, p. 593–606, 2018.

SOARES, G. F. P. **Homogeneização de um material composto formado por uma matriz polimérica com uma segunda fase particulada**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica., v. 9, n. 1, p. 76–99, 2010.

SOHAIL, M. G. et al. Advancements in Concrete Mix Designs: High-Performance and Ultrahigh-Performance Concretes from 1970 to 2016. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 30, n. 3, p. 04017310, 2017.

SPASOJEVIĆ, A. **Structural implications of ultra-high performance fibre-reinforced concrete in bridge design**. Ph.D thesis, École Polytechnique Federale de Lausanne, Switzerland:Publisher. v. 4051, 2008.

SUGANO, S.; KIMURA, H.; SHIRAI, K. Study of new RC structures using ultra-high-strength fiber-reinforced concrete (UFC)-the challenge of applying 200 MPa UFC to earthquake resistant building structures. **Journal of Advanced Concrete Technology**, v. 5, n. 2, p. 133–147, 2007.

SUVOROV, A. P.; DVORAK, G. J. Rate form of the Eshelby and Hill tensors. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, n. 21–22, p. 5659–5678, 2002.

TAGHADDOS, H. et al. Prediction of compressive strength behaviour in RPC with applying an adaptive network-based fuzzy interface system. **In: Proceedings of the International Symposium on Ultra High Performance Concrete, Kassel, Germany**. p. 273-284. 2004.

- TAI, Y. S.; PAN, H. H.; KUNG, Y. N. Mechanical properties of steel fiber reinforced reactive powder concrete following exposure to high temperature reaching 800 °c. **Nuclear Engineering and Design**, v. 241, n. 7, p. 2416–2424, 2011.
- TAM, C. M.; TAM, V. W. Y.; NG, K. M. Assessing drying shrinkage and water permeability of reactive powder concrete produced in Hong Kong. **Construction and Building Materials**, v. 26, n. 1, p. 79–89, 2012.
- TANAKA, Y. et al. Recent innovative application of UFC bridges in Japan. **Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures - High Performance, Fiber Reinforced Concrete, Special Loadings and Structural Applications**, 2010.
- TANDON, G. P.; WENG, G. J. The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites. **Polymer Composites**, v. 5, n. 4, p. 327–333, 1984.
- TAYEH, B. A. et al. Mechanical and permeability properties of the interface between normal concrete substrate and ultra high performance fiber concrete overlay. **Construction and Building Materials**, v. 36, p. 538–548, 2012.
- TEIXEIRA, M. R. **Uma Contribuição Para a Modelagem Numérica Da Heterogeneidade Do Concreto Com O Método De Galerkin Livre De Elementos**. 2012. 115 f. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotecnia. 2012.
- TOLEDO FILHO, R. D. et al. Performance assessment of Ultra High Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites in view of sustainability. **Materials and Design**, v. 36, p. 880–888, 2012.
- TORQUATO, Salvatore. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties. 1991.
- TORREGROSA, Esteban Camacho. **Dosage optimization and bolted connections for UHPFRC ties**. 2013. Tese de Doutorado. Universitat Politècnica de València.
- TUTIKIAN, B. F.; ISAIA, G. C.; HELENE, P. **Concreto de Alto e Ultra-Alto Desempenho**. In: ISAIA, G. C. **Concreto: Ciência e Tecnologia**. São Paulo: Ibracon, 2011. v. 2. v. 2, n. 1990, p. 1283–1325, 2011.
- VOIGT, Woldemar. Ueber adiabatische Elasticitätsconstanten. **Annalen der Physik**, v. 272, n. 3, p. 743-759, 1889.
- VAN TUAN, N. et al. The study of using rice husk ash to produce ultra high performance concrete. **Construction and Building Materials**, v. 25, n. 4, p. 2030–2035, 2011.
- VERNET, C. P. Ultra-durable concretes: Structure at the micro- and nanoscale. **MRS Bulletin**, v. 29, n. 5, p. 324–327, 2004.

- VOO, Y. L.; FOSTER, S. J.; VOO, C. C. Ultrahigh-Performance Concrete Segmental Bridge Technology: Toward Sustainable Bridge Construction. **Journal of Bridge Engineering**, v. 20, n. 8, 2015.
- VOO, Y. L.; TADROS, M. Taking Ultra-High-Performance Concrete to New Heights. **ASPIRE**. The Malaysian Wissahickon Memorial Bridge Philadelphia , Pennsylvania. n. May, 2016.
- VUITTON, L. The Fondation. 2015.
- WANG, C. et al. Preparation of Ultra-High Performance Concrete with common technology and materials. **Cement and Concrete Composites**, v. 34, n. 4, p. 538–544, 2012.
- WANG, D. et al. A review on ultra high performance concrete: Part II. Hydration, microstructure and properties. **Construction and Building Materials**, v. 96, p. 368–377, 2015.
- WANG, M.; SHI, Y.; WANG, Y. Study on equivalent constitutive model of steel with cumulative degradation and damage. **Jianzhu Jiegou Xuebao/Journal of Building Structures**, v. 34, n. 10, p. 73–83, 2013.
- WILLE, K.; KIM, D. J.; NAAMAN, A. E. Strain-hardening UHP-FRC with low fiber contents. **Materials and Structures/Materiaux et Constructions**, v. 44, n. 3, p. 583–598, 2011.
- YANG, I. H.; JOH, C.; KIM, B. S. Structural behavior of ultra high performance concrete beams subjected to bending. **Engineering Structures**, v. 32, n. 11, p. 3478–3487, 2010.
- YANG, S. L. et al. Influence of aggregate and curing regime on the mechanical properties of ultra-high performance fibre reinforced concrete (UHPFRC). **Construction and Building Materials**, v. 23, n. 6, p. 2291–2298, 2009.
- YOO, D. Y.; BANTHIA, N. Mechanical and structural behaviors of ultra-high-performance fiber-reinforced concrete subjected to impact and blast. **Construction and Building Materials**, v. 149, p. 416–431, 2017.
- YU, R.; SPIESZ, P.; BROUWERS, H. J. H. Mix design and properties assessment of Ultra-High Performance Fibre Reinforced Concrete (UHPFRC). **Cement and Concrete Research**, v. 56, n. March 2019, p. 29–39, 2014.
- YU, R.; SPIESZ, P.; BROUWERS, H. J. H. Development of an eco-friendly Ultra-High Performance Concrete (UHPC) with efficient cement and mineral admixtures uses. **Cement and Concrete Composites**, v. 55, p. 383–394, 2015.
- ZAOUI, A. Continuum Micromechanics: Survey. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, n. 8, p. 808–816, 2002.
- ZHANG, J. et al. Mechanical properties and durability of fiber-reinforced concrete. **Journal of Engineering Science and Technology Review**, v. 10, n. 5, p. 68–75, 2017.

ZHENG, W.; LI, H.; WANG, Y. Compressive behaviour of hybrid fiber-reinforced reactive powder concrete after high temperature. **Materials and Design**, v. 41, p. 403–409, 2012.

ZHOU, M. et al. Application of Ultra-High Performance Concrete in bridge engineering. **Construction and Building Materials**, v. 186, p. 1256–1267, 2018.

ZIMMERMAN, R. W. Behavior of the poisson ratio of a two-phase composite material in the high-concentration limit. **Applied Mechanics Reviews**, v. 47, n. 1, p. 38–44, 1994.

APÊNDICE A – SUB-ROTINA UMAT MORI-TANAKA

```

!DEC$ FREEFORM
SUBROUTINE UMAT(STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD, RPL,      &
& DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP,    &
& DTEMP,PREDEF, DPRED, CMNAME, NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, &
& NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT, CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL,  &
& NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)

INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

CHARACTER*8 CMNAME

DIMENSION STRESS(NTENS), STATEV(NSTATV), DDSDE(NTENS, NTENS),  &
& DDSDDT(NTENS), DRPLDE(NTENS), STRAN(NTENS), DSTRAN(NTENS),  &
& PREDEF(1), DPRED(1), PROPS(NPROPS), COORDS(3), DROT(3, 3),  &
& DFGRD0(3, 3), DFGRD1(3, 3)
!Definições dos tensores utilizados na formulação do modelo e dos
tensores auxiliares utilizados para resolução
Double Precision Ci, Cm, IND, S, Em, Ei, fi, vm, vi, r, f, e
integer K1, K2, k, n, i, j
DIMENSION Ci(NTENS, NTENS), Cm(NTENS, NTENS), IND(NTENS, NTENS), &
& S(NTENS, NTENS)
Real*8 L, U, b, d, x, coeff, C, Aux1, A, AUX2, AUX3, AUX4, CHOM
DIMENSION L(NTENS,NTENS), U(NTENS,NTENS), b(NTENS), d(NTENS),  &
& x(NTENS), C(NTENS,NTENS), Aux1(NTENS,NTENS), A(NTENS,NTENS),  &
& AUX2(NTENS,NTENS), AUX3(NTENS,NTENS), AUX4(NTENS,NTENS),  &
& CHOM(NTENS,NTENS)

!Parâmetros de entrada
fi=0.02           !Fração volumétrica de fibras na mistura
Ei = 210000000000 !Módulo de Elasticidade das fibras
vi= 0.3           !Coeficiente de Poisson das fibras
Em = 452000000000 !Módulo de elasticidade da matriz
vm= 0.198        !Coeficiente de Poisson da matriz
e= 12             !Comprimento da fibra em mm
f= 0.4            !Diâmetro da fibra em mm
r=f/e             !Razão de aspecto
!Preenchimento preliminar dos tensores com valores nulos para
evitar possíveis erros de compilação
DO K1=1, NTENS
DO K2=1, NTENS
AUX1(K1,K2)=0D0
AUX2(K1,K2)=0D0
AUX3(K1,K2)=0D0
AUX4(K1,K2)=0D0
A(K1,K2)=0D0
CHOM(K1,K2)=0D0
C(K1,K2)=0D0
x(K1)=0D0
d(K1)=0D0
b(K1)=0D0
U(K1,K2)=0D0
L(K1,K2)=0D0
S(K1,K2)=0D0
Ci(K1,K2)=0D0
Cm(K1,K2)=0D0
IND(K1,K2)=0D0
ENDDO
ENDDO

```

!Preenchimento dos tensor de Eshelby e dos constitutivos da matriz e das fibras de aço

```

DO K1=1,NDI
  DO K2=1, NDI
    Ci (K2,K1)=(Ei*vi)/((1+vi)*(1-2*vi))
    Cm (K2,K1)=(Em*vm)/((1+vm)*(1-2*vm))
    S (K1,K2)=0
  END DO
  Ci (K1,K1)=(Ei*(1-vi))/((1+vi)*(1-2*vi))
  Cm (K1,K1)=(Em*(1-vm))/((1+vm)*(1-2*vm))
  IND(K1,K1)=1
  END DO
  DO K1=NDI+1, NTENS
    Ci (K1,K1)=(Ei*((1-2*vi)/2))/((1+vi)*(1-2*vi))
    Cm (K1,K1)=(Em*((1-2*vm)/2))/((1+vm)*(1-2*vm))
    IND(K1,K1)=1
  END DO
  S(1,1)= ((2-vm)/(1-vm))*(r**2)*(log(2/r)-((5-2*vm)/(2*(2-2*vm))))
  S(2,2)= ((5-4*vm)/(8*(1-vm)))-((1-2*vm)/(4*(1-vm)))*r**2*(log(2/r)-((1-8*vm)/(4*(1-2*vm))))
  S(2,1)= (vm/(2*(1-vm)))-((1+vm)/(2*(1-vm)))*r**2*(log(2/r)-((3+2*vm)/(2*(1+vm))))
  S(2,3)= ((1-4*vm)/(8*(1-vm)))-((1-2*vm)/(4*(1-vm)))*r**2*(log(2/r)-((5-8*vm)/(4*(1-2*vm))))
  S(1,2)= ((1-2*vm)/(2*(1-vm)))*r**2*(log(2/r)-((3-4*vm)/(2*(1-2*vm))))
  S(4,4)= ((3-4*vm)/(8*(1-vm)))
  S(6,6)= 1.0/4.0

```

!Preenchimento de tensor auxiliar utilizando para resolver a formulação do modelo e tensor "a" utilizado para inversão do tensor constitutivo

```

DO K1=1,NTENS
  DO K2=1,NTENS
    AUX1 (K1,K2)=Cm (K1,K2)-Ci (K1,K2)
    a (K1,K2)=Cm (K1,K2)
  ENDDO
ENDDO

n=NTENS
L=0.0
U=0.0
b=0.0
!Inversão do tensor auxiliar "a"
do k=1, n-1
  do i=k+1,n
    coeff=a (i,k)/a (k,k)
    L(i,k) = coeff
    do j=k+1,n
      a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)
    end do
  end do
end do

do i=1,n
  L(i,i) = 1.0
end do
do j=1,n
  do i=1,j
    U(i,j) = a(i,j)
  end do
end do

do k=1,n

```

```

b(k)=1.0
d(1) = b(1)
do i=2,n
  d(i)=b(i)
  do j=1,i-1
    d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
  end do
end do
x(n)=d(n)/U(n,n)
do i = n-1,1,-1
  x(i) = d(i)
  do j=n,i+1,-1
    x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
  end do
  x(i) = x(i)/u(i,i)
end do
do i=1,n
  c(i,k) = x(i)
end do
b(k)=0.0
end do
!O tensor "c" é inverso do tensor "a"
!Preenchimento de tensores auxiliares de acordo com a formulação do modelo
de Mori-Tanaka
DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS
    DO K=1, NTENS
      AUX2 (K1,K2)=AUX2 (K1,K2)+C (K1,K) *AUX1 (K,K2)
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS
    DO K=1, NTENS
      AUX3 (K1,K2)=AUX3 (K1,K2)+S (K1, K) *AUX2 (K,K2)
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS
    AUX3 (K1,K2)=IND (K1,K2)-AUX3 (K1,K2)
    A (K1,K2)=AUX3 (K1,K2)
  ENDDO
ENDDO
L=0.0
U=0.0
b=0.0
  !Inversa do tensor auxiliar "a":
do k=1, n-1
  do i=k+1,n
    coeff=a(i,k)/a(k,k)
    L(i,k) = coeff
    do j=k+1,n
      a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)
    end do
  end do
end do
do i=1,n
  L(i,i) = 1.0
end do

```

```

do j=1,n
  do i=1,j
    U(i,j) = a(i,j)
  end do
end do

do k=1,n
  b(k)=1.0
  d(1) = b(1)
  do i=2,n
    d(i)=b(i)
    do j=1,i-1
      d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
    end do
  end do
  x(n)=d(n)/U(n,n)
  do i = n-1,1,-1
    x(i) = d(i)
    do j=n,i+1,-1
      x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
    end do
    x(i) = x(i)/u(i,i)
  end do
  do i=1,n
    c(i,k) = x(i)
    AUX1(i,k)=C(i,k)
  end do
  b(k)=0.0
end do
!O tensor "AUX1" é a inversa do tensor "a"
!Preenchimento de tensores auxiliares para resolução do problema
DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS
    AUX3(K1,K2)=fi*C(K1,K2)
    AUX2(K1,K2)=(1-fi)*IND(K1,K2)
    AUX3(K1,K2)=AUX3(K1,K2)+AUX2(K1,K2)
    A(K1,K2)=AUX3(K1,K2)
    AUX3(K1,K2)=0
  ENDDO
ENDDO
L=0.0
U=0.0
b=0.0
!Inversa do tensor auxiliar "a":
do k=1, n-1
  do i=k+1,n
    coeff=a(i,k)/a(k,k)
    L(i,k) = coeff
    do j=k+1,n
      a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)
    end do
  end do
end do

do i=1,n
  L(i,i) = 1.0
end do
do j=1,n
  do i=1,j
    U(i,j) = a(i,j)
  end do

```

```

end do

do k=1,n
  b(k)=1.0
  d(1) = b(1)
  do i=2,n
    d(i)=b(i)
    do j=1,i-1
      d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
    end do
  end do
  x(n)=d(n)/U(n,n)
  do i = n-1,1,-1
    x(i) = d(i)
    do j=n,i+1,-1
      x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
    end do
    x(i) = x(i)/u(i,i)
  end do
  do i=1,n
    c(i,k) = x(i)
  end do
  b(k)=0.0
end do
!o tensor "c" utilizado posteriormente é a inversa do tensor "a"
!Preenchimento de tensores auxiliares para resolução do problema
DO K1=1,NTENS
  DO K2=1, NTENS
    Ci(k1,k2)= fi*Ci(K1,K2)
  ENDDO
  ENDDO
DO K1=1,NTENS
  DO K2=1, NTENS
    DO K=1, NTENS
      AUX3(K1,K2)=AUX3(K1,K2)+Ci(K1,K)*AUX1(K,K2)
      AUX4(K1,K2)=(1-fi)*Cm(K1,K2)
      A(K1,K2)=AUX4(K1,K2)+ AUX3(K1,K2)
    ENDDO
  ENDDO
  ENDDO
!Tensor Homogeneizado efetivo do modelo Mori-Tanaka CHOM e Definição
do jacobiano constitutivo DDSDE
DO K1=1,NTENS
DO K2=1, NTENS
  DO K=1, NTENS
    CHOM(K1,K2)=CHOM(K1,K2)+A(K1,K)*C(K,K2)
    DDSDE(K1,K2)=CHOM(K1,K2)
  ENDDO
ENDDO
ENDDO
!Atualização do estado de tensões
DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS
    STRESS(K2)=STRESS(K2)+DDSDE(K2, K1)*DSTRAN(K1)
  END DO
END DO
RETURN
END

```

APÊNDICE B – SUB-ROTINA UMAT AUTO CONSISTENTE

```

!DEC$ FREEFORM
SUBROUTINE UMAT(STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD, RPL,      &
& DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP,    &
& DTEMP,PREDEF, DPRED, CMNAME, NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, &
& NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT, CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL,  &
& NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)

INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

CHARACTER*8 CMNAME

DIMENSION STRESS(NTENS), STATEV(NSTATV), DDSDE(NTENS, NTENS),  &
& DDSDDT(NTENS), DRPLDE(NTENS), STRAN(NTENS), DSTRAN(NTENS),  &
& PREDEF(1), DPRED(1), PROPS(NPROPS), COORDS(3), DROT(3, 3),  &
& DFGRD0(3, 3), DFGRD1(3, 3)
!Definição dos tensores utilizados na formulação do modelo e dos
tensores auxiliares utilizados em sua formulação.
Double Precision Ci, Cm, IND, AINV, S, Em, Ei, fi, vm, vi, r,    &
& f, e, q, w, t, y, p
integer K1, K2, k, n, i, j
DIMENSION Ci(NTENS, NTENS), Cm(NTENS, NTENS), IND(NTENS, NTENS), &
& S(NTENS, NTENS)
Real*8 L, U, b, d, x, coeff, C, Aux1, A, AUX2, AUX3, AUX4, CHOM, &
& CMTn, TOL, AUX5, AUX6
DIMENSION L(NTENS,NTENS), U(NTENS,NTENS), b(NTENS), d(NTENS),  &
& x(NTENS), C(NTENS,NTENS), Aux1(NTENS,NTENS), A(NTENS,NTENS),  &
& AUX2(NTENS,NTENS), AUX3(NTENS,NTENS), AUX4(NTENS,NTENS),    &
& AUX5(NTENS,NTENS), AUX6(NTENS,NTENS), TOL(NTENS,NTENS),    &
& CMTn(NTENS,NTENS), CHOM(NTENS,NTENS)
!Parâmetros de entrada
fi=0.02                !Fração volumétrica de fibras na mistura
Ei = 210000000000      !Módulo de Elasticidade das fibras
vi= 0.3                !Coeficiente de Poisson das fibras
Em = 45200000000      !Módulo de elasticidade da matriz
vm= 0.198             !Coeficiente de Poisson da matriz
e= 12                  !Comprimento da fibra em mm
f= 0.4                 !Diâmetro da fibra em mm
r=f/e                  !Razão de aspecto
!Preenchimento preliminar dos tensores com valores nulos para
evitar possíveis erros de compilação
w=0.00001 !erro tolerado
q=1
t=0
y=w
!Preenchimento preliminar dos tensores com valores nulos para
evitar possíveis erros de compilação
DO K1=1, NTENS
DO K2=1, NTENS
AUX1(K1,K2)=0.0D0
AUX2(K1,K2)=0.0D0
AUX3(K1,K2)=0.0D0
AUX4(K1,K2)=0D0
AUX5(K1,K2)=0.0D0
AUX6(K1,K2)=0D0
A(K1,K2)=0D0
CHOM(K1,K2)=0D0
C(K1,K2)=0D0
x(K1)=0D0

```

```

d(K1)=0D0
b(K1)=0D0
U(K1,K2)=0D0
L(K1,K2)=0D0
S(K1,K2)=0D0
Ci(K1,K2)=0D0
Cm(K1,K2)=0D0
IND(K1,K2)=0D0
CMTn(K1,K2)=0.0D0
TOL(K1,K2)=0.0D0
ENDDO
ENDDO
!Preenchimento dos tensor de Eshelby e dos constitutivos da matriz
e das fibras de aço
DO K1=1,NDI
DO K2=1, NDI
Ci(K2,K1)=(Ei*vi)/((1+vi)*(1-2*vi))
Cm(K2,K1)=(Em*vm)/((1+vm)*(1-2*vm))
S(K1,K2)=0
END DO
Ci(K1,K1)=(Ei*(1-vi))/((1+vi)*(1-2*vi))
Cm(K1,K1)=(Em*(1-vm))/((1+vm)*(1-2*vm))
IND(K1,K1)=1
END DO
DO K1=NDI+1, NTENS
Ci(K1,K1)=(Ei*((1-2*vi)/2))/((1+vi)*(1-2*vi))
Cm(K1,K1)=(Em*((1-2*vm)/2))/((1+vm)*(1-2*vm))
IND(K1,K1)=1
END DO
S(1,1)=((2-vm)/(1-vm))*(r**2)*(log(2/r)-((5-2*vm)/(2*(2-2*vm))))
S(2,2)=((5-4*vm)/(8*(1-vm)))-((1-2*vm)/(4*(1-vm)))*r**2*(log(2/r)-((1-8*vm)/(4*(1-2*vm))))
S(2,1)=(vm/(2*(1-vm)))-((1+vm)/(2*(1-vm)))*r**2*(log(2/r)-((3+2*vm)/(2*(1+vm))))
S(2,3)=((1-4*vm)/(8*(1-vm)))-((1-2*vm)/(4*(1-vm)))*r**2*(log(2/r)-((5-8*vm)/(4*(1-2*vm))))
S(1,2)=((1-2*vm)/(2*(1-vm)))*r**2*(log(2/r)-((3-4*vm)/(2*(1-2*vm))))
S(4,4)=((3-4*vm)/(8*(1-vm)))
S(6,6)=1.0/4.0
!inicialmente o tensor constitutivo CMTn recebe o tensor da matriz
!tensor "a" é utilizado para inversão do tensor constitutivo
DO K1=1,NTENS
DO K2=1,NTENS
CMTn(K1,K2)=Cm(K1,K2)
a(K1,K2)=Cm(K1,K2)
ENDDO
ENDDO
!Inversão do tensor a
n=NTENS
L=0.0
U=0.0
b=0.0
do k=1, n-1
do i=k+1,n
coeff=a(i,k)/a(k,k)
L(i,k)=coeff
do j=k+1,n
a(i,j)=a(i,j)-coeff*a(k,j)
end do
end do

```

```

end do

do i=1,n
  L(i,i) = 1.0
end do
do j=1,n
  do i=1,j
    U(i,j) = a(i,j)
  end do
end do

do k=1,n
  b(k)=1.0
  d(1) = b(1)
  do i=2,n
    d(i)=b(i)
    do j=1,i-1
      d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
    end do
  end do
  x(n)=d(n)/U(n,n)
  do i = n-1,1,-1
    x(i) = d(i)
    do j=n,i+1,-1
      x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
    end do
    x(i) = x(i)/u(i,i)
  end do
  do i=1,n
    c(i,k) = x(i)
  end do
  b(k)=0.0
end do
  !Início do processo iterativo até atingir a tolerância estabelecida
do while (y.GE.w)
DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS
  DO K=1, NTENS
    AUX1(K1,K2)=AUX1(K1,K2)+S(K1, K)*C(K,K2)
    AUX2(K1,K2)=CMTn(K1,K2)-Ci(K1,K2)
  ENDDO
  ENDDO
  ENDDO
  DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS
    DO K=1, NTENS
      AUX3(K1,K2)=AUX3(K1,K2)+AUX1(K1, K)*AUX2(K,K2)
      AUX4(K1,K2)=IND(K1,K2)-AUX3(K1,K2)
      A(K1,K2)=AUX4(K1,K2)
      AUX5(K1,K2)=fi*(Ci(K1,K2)-Cm(K1,K2))
    ENDDO
  ENDDO
  ENDDO
  !inversão do tensor a
  L=0.0
U=0.0
b=0.0
do k=1, n-1
  do i=k+1,n
    coeff=a(i,k)/a(k,k)
    L(i,k) = coeff

```

```

        do j=k+1,n
            a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)
        end do
    end do
end do

do i=1,n
    L(i,i) = 1.0
end do
do j=1,n
    do i=1,j
        U(i,j) = a(i,j)
    end do
end do
do k=1,n
    b(k)=1.0
    d(1) = b(1)
    do i=2,n
        d(i)=b(i)
        do j=1,i-1
            d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
        end do
    end do
    x(n)=d(n)/U(n,n)
    do i = n-1,1,-1
        x(i) = d(i)
        do j=n,i+1,-1
            x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
        end do
        x(i) = x(i)/u(i,i)
    end do
    do i=1,n
        c(i,k) = x(i)
    end do
    b(k)=0.0
end do
!Definição do tensor constitutivo homogêneo (CHOM) na interação
DO K1=1, NTENS
    DO K2=1, NTENS
        DO K=1, NTENS
            AUX6(K1,K2) = AUX6(K1,K2)+AUX5(K1, K)*C(K,K2)
            CHOM(K1,K2)=CM(K1,K2)+AUX6(K1,K2)
        ENDDO
    ENDDO
    ENDDO
!Verificação se a tolerância foi atingida
DO K1=1, NTENS
DO K2=1, NTENS
IF ((CMTn(K1,K2)).EQ. 0) THEN
q=1
ELSE
q=abs((CHOM(K1,K2)-CMTn(K1,K2))/(CMTn(K1,K2)))
t=q
TOL(K1,K2)=t
ENDIF
ENDDO
ENDDO
p=0
DO K1=1, NTENS
DO K2=1, NTENS
if (TOL(K1,K2) .LT. w) then

```

```

p=p+1
endif
CMTn(K1,K2)=CHOM(K1,K2)
A(K1,K2)= CMTn(K1,K2)
AUX1(K1,K2)=0
AUX2(K1,K2)=0
AUX3(K1,K2)=0
AUX4(K1,K2)=0
AUX5(K1,K2)=0
AUX6(K1,K2)=0
ENDDO
ENDDO
if (p .GE. 36) THEN
y=0
ENDIF
!Caso a tolerância seja atingida a interação acaba
!Caso não tenha sido atingida inverte-se o tensor homogêneo para a
próxima interação
L=0.0
U=0.0
b=0.0

do k=1, n-1
do i=k+1,n
coeff=a(i,k)/a(k,k)
L(i,k) = coeff
do j=k+1,n
a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)
end do
end do
end do

do i=1,n
L(i,i) = 1.0
end do
do j=1,n
do i=1,j
U(i,j) = a(i,j)
end do
end do

do k=1,n
b(k)=1.0
d(1) = b(1)
do i=2,n
d(i)=b(i)
do j=1,i-1
d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
end do
end do
x(n)=d(n)/U(n,n)
do i = n-1,1,-1
x(i) = d(i)
do j=n,i+1,-1
x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
end do
x(i) = x(i)/u(i,i)
end do
do i=1,n
c(i,k) = x(i)
end do

```

```
      b(k)=0.0
end do
  enddo
  !Após determinar o tensor homogêneo, define-se o jacobiano
  constitutivo DDSDE na sub-rotina
  DO K1=1,NTENS
  DO K2=1, NTENS
    DDSDE(K1,K2)=CHOM(K1,K2)
  ENDDO
  ENDDO
  !Atualização do estado de tensões
  DO K1=1, NTENS
    DO K2=1, NTENS
      STRESS(K2)=STRESS(K2)+DDSDE(K2, K1)*DSTRAN(K1)
    END DO
  END DO
RETURN
end
```

APÊNDICE C – SUB-ROTINA UMAT VOIGT

```

!DEC$ FREEFORM
SUBROUTINE UMAT(STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD, RPL,      &
& DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP,    &
& DTEMP,PREDEF, DPRED, CMNAME, NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, &
& NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT, CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL,  &
& NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)

  INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

  CHARACTER*8 CMNAME

  DIMENSION STRESS(NTENS), STATEV(NSTATV), DDSDE(NTENS, NTENS), &
& DDSDDT(NTENS), DRPLDE(NTENS), STRAN(NTENS), DSTRAN(NTENS), &
& PREDEF(1), DPRED(1), PROPS(NPROPS), COORDS(3), DROT(3, 3), &
& DFGRD0(3, 3), DFGRD1(3, 3)

  Double Precision Ci, Cm, Em, Ei, fi, vm, vi, CHOM
  integer K1, K2
  DIMENSION Ci(NTENS, NTENS), Cm(NTENS, NTENS), CHOM(NTENS,NTENS)
  !Parâmetros de entrada
  fi=0.02          !Fração volumétrica de fibras na mistura
  Ei = 210000000000 !Módulo de Elasticidade das fibras
  vi= 0.3          !Coeficiente de Poisson das fibras
  Em = 452000000000 !Módulo de elasticidade da matriz
  vm= 0.198       !Coeficiente de Poisson da matriz
  !Preenchimento preliminar dos tensores com valores nulos para
  evitar possíveis erros de compilação
  DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS
  Ci(K1,K2)=0D0
  Cm(K1,K2)=0D0
  CHOM(K1,K2)=0.0D0
  ENDDO
  ENDDO
  !Preenchimento dos tensores constitutivos da fibra e da matriz
  DO K1=1,NDI
  DO K2=1, NDI
  Ci(K2,K1)=(Ei*vi)/((1+vi)*(1-2*vi))
  Cm(K2,K1)=(Em*vm)/((1+vm)*(1-2*vm))
  END DO
  Ci(K1,K1)=(Ei*(1-vi))/((1+vi)*(1-2*vi))
  Cm(K1,K1)=(Em*(1-vm))/((1+vm)*(1-2*vm))
  END DO
  DO K1=NDI+1, NTENS
  Ci(K1,K1)=(Ei*((1-2*vi)/2))/((1+vi)*(1-2*vi))
  Cm(K1,K1)=(Em*((1-2*vm)/2))/((1+vm)*(1-2*vm))
  END DO
  !Definição do tensor constitutivo homogêneo pelo modelo de Voigt e
  preenchimento do jacobiano constitutivo DDSDE na sub-rotina
  DO K1=1,NTENS
  DO K2=1,NTENS
  CHOM(K1,K2)=Cm(K1,K2)*(1-fi)+Ci(K1,K2)*fi
  DDSDE(K1,K2)=CHOM(K1,K2)
  ENDDO
  ENDDO
  !Atualização do estado de tensões
  DO K1=1, NTENS
  DO K2=1, NTENS

```

```
        STRESS (K2) =STRESS (K2) +DDSDDE (K2, K1) *DSTRAN (K1)
    END DO
END DO
RETURN
END
```

APÊNDICE D – SUB-ROTINA UMAT REUSS

```

!DEC$ FREEFORM
SUBROUTINE UMAT(STRESS, STATEV, DDSDE, SSE, SPD, SCD, RPL,      &
& DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, STRAN, DSTRAN, TIME, DTIME, TEMP,    &
& DTEMP,PREDEF, DPRED, CMNAME, NDI, NSHR, NTENS, NSTATV, PROPS, &
& NPROPS, COORDS, DROT, PNEWDT, CELENT, DFGRD0, DFGRD1, NOEL,   &
& NPT, LAYER, KSPT, KSTEP, KINC)

INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

CHARACTER*8 CMNAME

DIMENSION STRESS(NTENS), STATEV(NSTATV), DDSDE(NTENS, NTENS),  &
& DDSDDT(NTENS), DRPLDE(NTENS), STRAN(NTENS), DSTRAN(NTENS),  &
& PREDEF(1), DPRED(1), PROPS(NPROPS), COORDS(3), DROT(3, 3),  &
& DFGRD0(3, 3), DFGRD1(3, 3)

Double Precision Ci, Cm, Di, Dm Em, Ei, fi, vm, vi, CHOM
integer K1 , K2
DIMENSION Ci(NTENS, NTENS), Cm(NTENS, NTENS), CHOM(NTENS,NTENS) &
& Di(NTENS, NTENS), Dm(NTENS, NTENS)
!Parâmetros de entrada
fi=0.02           !Fração volumétrica de fibras na mistura
Ei = 210000000000 !Módulo de Elasticidade das fibras
vi= 0.3           !Coeficiente de Poisson das fibras
Em = 452000000000 !Módulo de elasticidade da matriz
vm= 0.198        !Coeficiente de Poisson da matriz
!Preenchimento preliminar dos tensores com valores nulos para
evitar possíveis erros de compilação
DO K1=1, NTENS
DO K2=1, NTENS
Ci(K1,K2)=0D0
Cm(K1,K2)=0D0
Di(K1,K2)=0D0
Dm(K1,K2)=0D0
CHOM(K1,K2)=0.0D0
ENDDO
ENDDO
!Preenchimento dos tensores constitutivos da fibra e da matriz
DO K1=1,NDI
DO K2=1, NDI
Ci(K2,K1)=(Ei*vi)/((1+vi)*(1-2*vi))
Cm(K2,K1)=(Em*vm)/((1+vm)*(1-2*vm))
END DO
Ci(K1,K1)=(Ei*(1-vi))/((1+vi)*(1-2*vi))
Cm(K1,K1)=(Em*(1-vm))/((1+vm)*(1-2*vm))
END DO
DO K1=NDI+1, NTENS
Ci(K1,K1)=(Ei*((1-2*vi)/2))/((1+vi)*(1-2*vi))
Cm(K1,K1)=(Em*((1-2*vm)/2))/((1+vm)*(1-2*vm))
END DO
DO K1=1,NTENS
DO K2=1,NTENS
a(K1,K2)=Cm(K1,K2)
ENDDO
ENDDO
!inversão do tensor elástico Cm da matriz para determinar o tensor de
flexibilidade Dm da matriz
n=NTENS

```

```

L=0.0
U=0.0
b=0.0

do k=1, n-1
  do i=k+1,n
    coeff=a(i,k)/a(k,k)
    L(i,k) = coeff
    do j=k+1,n
      a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)
    end do
  end do
end do

do i=1,n
  L(i,i) = 1.0
end do
do j=1,n
  do i=1,j
    U(i,j) = a(i,j)
  end do
end do

do k=1,n
  b(k)=1.0
  d(1) = b(1)
  do i=2,n
    d(i)=b(i)
    do j=1,i-1
      d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
    end do
  end do
  x(n)=d(n)/U(n,n)
  do i = n-1,1,-1
    x(i) = d(i)
    do j=n,i+1,-1
      x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
    end do
    x(i) = x(i)/u(i,i)
  end do
  do i=1,n
    c(i,k) = x(i)
  end do
  b(k)=0.0
end do
!c é o tensor Cm invertido
DO K1=1,NTENS
DO K2=1,NTENS
Dm(K1,K2)=c(K1,K2)
a(K1,K2)=Ci(K1,K2)
ENDDO
ENDDO

!inversão do tensor elástico Ci da fibra para determinar o tensor de
flexibilidade Di da matriz
n=NTENS

L=0.0
U=0.0
b=0.0

do k=1, n-1
  do i=k+1,n

```

```

        coeff=a(i,k)/a(k,k)
        L(i,k) = coeff
        do j=k+1,n
            a(i,j) = a(i,j)-coeff*a(k,j)
        end do
    end do
end do

do i=1,n
    L(i,i) = 1.0
end do
do j=1,n
    do i=1,j
        U(i,j) = a(i,j)
    end do
end do

do k=1,n
    b(k)=1.0
    d(1) = b(1)
    do i=2,n
        d(i)=b(i)
        do j=1,i-1
            d(i) = d(i) - L(i,j)*d(j)
        end do
    end do
    x(n)=d(n)/U(n,n)
    do i = n-1,1,-1
        x(i) = d(i)
        do j=n,i+1,-1
            x(i)=x(i)-U(i,j)*x(j)
        end do
        x(i) = x(i)/u(i,i)
    end do
    do i=1,n
        c(i,k) = x(i)
    end do
    b(k)=0.0
end do
!c é o tensor Ci invertido
DO K1=1,NTENS
DO K2=1,NTENS
Di(K1,K2)=c(K1,K2)
ENDDO
ENDDO
!Definição do tensor constitutivo homogêneo pelo modelo de Reuss e
preenchimento do jacobiano constitutivo DDSDE na sub-rotina
DO K1=1,NTENS
DO K2=1,NTENS
CHOM(K1,K2)=Dm(K1,K2)*(1-fi)+Di(K1,K2)*fi
DDSDE(K1,K2)=CHOM(K1,K2)
ENDDO
ENDDO
!Atualização do estado de tensões
DO K1=1, NTENS
DO K2=1, NTENS
STRESS(K2)=STRESS(K2)+DDSDE(K2, K1)*DSTRAN(K1)
END DO
END DO
RETURN
END

```