UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PEDRO UCHOA ARAÚJO SILVA

VERY SPECIAL RELATIVITY: UMA PROPOSTA DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ

FORTALEZA
2019

PEDRO UCHOA ARAÚJO SILVA

VERY SPECIAL RELATIVITY: UMA PROPOSTA DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S582v Silva, Pedro Uchoa Araújo.
Very Special Relativity : uma proposta de violação de Lorentz / Pedro Uchoa Araújo Silva. – 2019.
47 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto de Almeida Santos.

1. Violação de Lorentz. 2. Very Special Relativity. 3. Grupo de Lorentz. 4. Neutrino. 5. Oscilador de Dirac. I. Título.

CDD 530

PEDRO UCHOA ARAÚJO SILVA

VERY SPECIAL RELATIVITY: UMA PROPOSTA DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ramos Goncalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Aos meus avós.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, Taumaturgo e Valdeleda, por garantirem a minha liberdade para fazer o que amo. Aos meus demais familiares pelo afeto e pela compreensão.

A todos os professores do departamento de física da UFC, em especial o Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida por me orientar em minha monografia e em meus anos de Iniciação Científica, o Prof. Dr. Roberto Maluf pelo amparo como coordenador e pela acessibilidade desde o primeiro ano de curso como pesquisador, o Prof. Dr. Saulo-Davi Soares e Reis e o Prof. Dr. Carlos William de Araújo Paschoal pelas conversas informais e instrutivas. Além, é claro, dos membros da banca Prof. Dr. José Ramos Goncalves e Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva pela disponibilidade.

A todos do Laboratório de Análise de Sistemas Simétricos Coerentes (LASSCO) por todos os conhecimentos passados nos diversos , em espacial Bárbara Sales, uma guerreira.

Ao Germano, à Dávila e à Sara, minha irmã, pelo enorme suporte não só emocional, mas também textual.

A todos meus amigos de outros carnavais: a Ivne, o Zeno, a Fabiana, o Gladstone, o Marcelo, o Bilzim, o Prof, o Pirão, a Lara entre tantos outros fundamentais para mim.

Aos meus companheiros de curso e de assessoria que dividiam as dificuldades e os conhecimentos, sem os quais o graduação seria bem mais difícil: Afonso, Brehmer, Cássio, Edinaldo, Eduardo, Higor, Igor, Jessé, Júnior, Luan, Lucas Saraiva, Matheus, Robert, Victor, William e todos outros que compartilharam esse Departamento.

Gostaria de agradecer também aos funcionários da Universidade Federal do Ceará pelo esplendido serviço prestado durante todo o meu tempo de curso. E ao Doutorando em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, aluno de graduação em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que o mesmo ficasse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Por fim, gostaria de agradecer, ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, por proporcionar uma formação acadêmica de excelência, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo financiamento à pesquisa científica.

“A vida em seus métodos diz calma”

(Di Melo)

RESUMO

Em ***Very Special Relativity*: uma proposta de violação de Lorentz**, estuda-se o modelo de violação de Lorentz, idealizado por Andrew G. Cohen e por Sheldon L. Glashow, em suas diversas características e aplicações. O início deste trabalho é uma breve revisão de conceitos de Relatividade Restrita e de Teoria de Grupos, associada com a construção do grupo de simetria da *"Very Special Relativity"*, focando-se no subgrupo próprio SIM(2) do grupo de Lorentz e na replicabilidade das propriedades da Relatividade de Einstein por esse novo paradigma. Posteriormente, aprofunda-se nas correções dessa nova modelagem para a equação de Dirac, em especial no operador não-local que carrega a correção e o surgimento da massa do neutrino de maneira natural. Em seguida, realiza-se uma discussão sobre como o modelo em questão reage a interações eletromagnéticas, revisando ideias de campos de calibre e explorando acoplamentos mínimos do campo eletromagnético. Para, então, propor um termo de acoplamento não-mínimo tentando-se reproduzir o Oscilador de Dirac. Por fim, espera-se motivar futuros trabalhos com o modelo de Glashow e Cohen ou outras ideias de violação de Lorentz, além de reforçar a importância da Teoria de Grupos na física de altas energia contemporânea.

Palavras-chave: Violação de Lorentz, Grupos de Simetrias, Neutrinos, *Very Special Relativity*, Relatividade Restrita, Acoplamento não-mínimo, Oscilador de Dirac.

ABSTRACT

In ***Very Special Relativity*: a idea of Lorentz violation**, we address the new relativity theory proposed by Andrew G. Cohen and Sheldon L. Glashow, its various applications and unique features. In the beginning, we briefly review the main concepts of Special Relativity and Group Theory, tools needed for building the Very Special Relativity (VSR) symmetry group, especially SIM(2), a proper subgroup of Lorentz group, which replicates all fundamental properties of Einsteinian Relativity. Subsequently, we deepen the corrections of the Dirac Equation, specifically nonlocal operator that carries out such corrections and the naturally appearance of the neutrino's mass. After that, we discuss how the Cohen and Glashow's model operates as electromagnetic interactions are taken into account; in this regard, we refer to ideas of gauge fields and explore minimal coupling of electromagnetic fields for VSR. With these two notions, we can propose a nonminimmal coupling term in an attempt to replicate the Dirac Oscillator potential. Finally, we expect this work to encourage future productions in Very Special Relativity or in other models of Lorentz Violation, besides we expect to extol the importance of Group Theory in the high-energy physics.

Keywords: Lorentz violation. Symmetry Groups. Neutrinos. Very Special Relativity. Special Relativity. Nonminimal coupling. Dirac Oscillator.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Depois do século XX, a Teoria de Grupos tornou-se parte fundamental da física, tanto os grupos discretos no estudo de cristais quantos os grupos contínuos para o estudo de partículas elementares.

O grupo de Lorentz, em particular, está nas bases de grande porção da física contemporânea, principalmente o Modelo Padrão (SCHWICHTENBERG, 2018) e a Relatividade Geral (RINDLER, 2016). Existem, todavia, uma série de situações em que essas modelagens, muito bem sucedidas em vastidão de casos, não correspondem aos resultados experimentais. O problema da massa do Neutrino (LICCIARDI, 2007), da matéria escura (Rubin; Ford W. KENT, 1970) e da Hierarquia (KIM *et al.*, 2003) são alguns exemplos. Sendo assim, cria-se um campo propício a inovações teóricas e fenomenológicas.

Um modelo promissor proposto por Glashow e Cohen é a "Very Special Relativity"(COHEN; GLASHOW, 2006a), abordagem na qual o grupo de Lorentz não é fundamental para a descrição da natureza, um subgrupo do grupo de Lorentz possui tal função, ou seja um modelo de violação de Lorentz.

O novo grupo de simetria deve ser escolhido de forma a reproduzir os resultados da Relatividade Restrita e, ainda assim, ser uma violação da simetria de Lorentz para haver espaço para solucionar problemas já citados. A VSR foi elaborada, mais especificamente, para solucionar o problema da massa do neutrino, visto que a princípio o neutrino é uma partícula sem massa e esta já foi medida experimentalmente por causa do fenômeno de oscilação de neutrino (ADAMSON *et al.*, 2011).

Neste trabalho, propõe-se a construção do modelo de Glashow e Cohen, além de uma discussão de uma possível aplicação dessa nova modelagem para o potencial do oscilador de Dirac sempre embasando os desenvolvimentos em grupos e simetrias.

O oscilador de Dirac é um sistema quântico e relativístico, idealizado em (MOSHINSKY; SZCZEPANIAK, 1999), que possui solução analítica e reproduz os resultados do oscilador quântico no limite não-relativístico (CAVALCANTE, 2008).

A estrutura do trabalho inicia-se em uma revisão de tópicos importantes de Teoria de Grupos, em especial, da Teoria de Lie de grupos contínuos. Em seguida, uma aplicação desses conceitos para discutir a Relatividade Restrita e a *"Very Special Relativity"* finalizam o capítulo dois.

Já no terceiro capítulo, constrói-se a equação de Dirac para férmions livre para a

Relatividade Restrita e para a VSR, utilizando as ideias do segundo capítulo juntamente com o formalismo lagrangiano para campos.

Por fim, estuda-se como a equação de Dirac é alterada por termos de interação para entender como um potencial eletromagnético altera o comportamento de férmions no paradigma do VSR. A base dessa análise são os campos e grupos de calibre, método utilizado na construção interações na Teoria Quântica de Campos.

Adotou-se essa ordem e estrutura de capítulos para valorizar a Teoria de Grupos e as simetrias na descrição de partículas elementares e suas interações.

2 TEORIA DE GRUPOS E VSR

2.1 Introdução

No século passado, Emmy Noether demonstra seus dois teoremas (NOETHER; TAVEL, 2005), estabelecendo uma relação direta entre simetrias e uma grandeza conservada. Com isso, as simetrias ganharam ainda mais importância para Física.

Em paralelo, a compreensão sobre transformações de referenciais viveu duas épocas bem distintas na história da Física, sendo a primeira a relatividade de Galileu, base de toda a mecânica não-relativística, inclusive da Mecânica Quântica, tendo como principal característica o tempo absoluto.

Einstein, de maneira contemporânea à Noether, estabeleceu, baseada nas simetrias das Equações de Maxwell, a Relatividade Restrita (RINDLER, 2016). Uma consequência de grande importância é a Transformada de Lorentz como ente matemático de mudança entre referenciais inerciais (NETO, 2010). Essa, por sua vez, pode ser melhor estudada com o formalismo matemático da Teoria de Grupos, em particular dos grupos de Lie, ou grupos contínuos e diferenciáveis (TUNG, 1985). Sendo o Grupo de Lorentz o conjunto das Transformadas de Lorentz.

Foi no contexto de Teoria de Grupos que Cohen e Glashow propuseram o VSR como uma nova relatividade (COHEN; GLASHOW, 2006a), relacionada a um subgrupo próprio do grupo de Poincaré (grupo de Lorentz mais o grupo das translações), tal que ainda seja preservada a relação de dispersão de Einstein (RINDLER, 2016), dado por $p_\mu p^\mu$ ou

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2, \tag{2.1}$$

Na qual, E é a energia, m a massa, $\vec{p}$ o momento e c é a velocidade da luz.

Para construção da "Very Special Relativity"são necessários, portanto, conhecimentos de Teoria de Grupos e simetrias, em particular do grupo de Lorentz. Este capítulo trata de uma revisão desses conteúdos e do desenvolvimento do grupo relacionado ao VSR seguindo a linha argumentativa de Glashow e Cohen.

Sempre utilizando a chamada notação de Einstein para soma com índices letras do alfabeto latino representando variação entre 1, 2 e 3 e letras gregas representando variações entre 0, 1, 2 e 3.

2.2 Simetrias e grupos

Para entender as relações entre simetrias e grupos, as definições a seguir são necessárias (SCHWICHTENBERG, 2018).

Definição 2.2.1 *Seja função genérica F de uma conjunto de variáveis $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$ com $F = F(A_1, A_2, ..., A_n)$. F é dita invariante se, dada uma transformação tal que $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\} \rightarrow \{A'_1, A'_2, A'_3, ..., A'_n\}$, então*

$$F(A_1, A_2, ..., A_n) = F(A'_1, A'_2, ..., A'_n). \tag{2.2}$$

Definição 2.2.2 *Duas equações são ditas covariantes se elas tomam a mesma forma em diferentes referenciais inerciais.*

Definição 2.2.3 *Um sistema é dito simétrico sobre uma classe de transformações se as funções que o caracterizam são invariantes sobre essas transformações.*

Sendo invariantes, covariantes e simetrias três conceitos semelhantes e igualmente revelantes para toda a Física, desde invariâncias mais simples como a conservação da energia de um sistema massa-mola até a quebra espontânea de simetria do mecanismo de Higgs (SCHWICHTENBERG, 2018), tem-se interesse em desenvolver mecanismos matemáticos para tratar adequadamente esses dois conceitos. A Teoria de Grupos, uma área bastante ampla da matemática, é capaz descrever e trabalhar os conceitos em questão.

A base dessa teoria é uma estrutura algébrica denominada de Grupo, tem-se então a seguinte definição, (TUNG, 1985)

Definição 2.2.4 *Define-se um grupo $(G, \cdot)$ com G sendo um conjunto dotado de uma operação $(\cdot)$, frequentemente chamada de multiplicação de grupo, com as seguintes propriedades,*

1. *Fechamento:* $a \cdot b \in G \;\forall\, a, b \in G$;
2. *Associatividade:* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \;\forall\, a, b, c \in G$;
3. *Elemento identidade:* $\exists e \mid a \cdot e = e \cdot a = a \;\forall a \in G$;
4. *Inversividade:* $\forall\, a \in G \;\; \exists\, a^- \in G \mid a \cdot a^- = a^- \cdot a = e$.

A fundamental ligação entre as quatro definições anteriores são as transformações, essenciais para definição tanto de invariância e covariância quanto de simetria. Em adição, as classes de transformações mais relevantes para Física podem ser entendidas como um grupo, tendo em vista que as quatro propriedades necessárias para caracterizar um grupo são facilmente satisfeitas para um enorme variedade de classes de transformações.

Por exemplo, uma translação espacial por uma distância $n \in \mathbb{R}$ em uma dimensão pode ser expressa por uma matriz de ordem um $T(n)$, daí pode-se mostrar que essa matriz satisfaz as condições de grupo. Sejam $n, m, l \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{cases} T(n) + T(m) = T(n+m); \\ [T(n) + T(m)] + T(l) = T(n+m+l) = T(n) + [T(m) + T(l)]; \\ T(n) + T(0) = T(0) + T(n); \\ T(n) + T(-n) = T(-n) + T(n) = T(0). \end{cases}.$$

A forma matricial com a qual o grupo de translações foi exposto é apenas uma possibilidade para este grupo específico. Qualquer outro conjunto que opere de modo equivalente é uma descrição para o grupo em questão, devido à definição de grupos (2.2.4). Com isso em mente, o conceito de representação se faz necessário (HALL, 2015).

Definição 2.2.5 *Seja um grupo $(G, \cdot)$, uma representação D deste grupo associa uma matriz quadrada $D(g)$ a cada elemento de G, isto é,*

$$g \in G \xrightarrow{D} D(g). \tag{2.3}$$

Nota-se que esse conceito de representação forma um grupo que possui comportamento semelhante ao original, tendo em vista que $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$ (NETO, 2010).

Dados os postulados da relatividade de Einstein, o espaço-tempo é equivalente em todos os pontos (RINDLER, 2016), em outras palavras, as transformações de referenciais são parametrizadas por uma variável contínua e, por isso, os grupos de interesse da Física de altas energias são os grupos contínuos e diferenciáveis (TUNG, 1985). Essa classe de grupos foi estudada pelo matemático norueguês Sophus Lie, que introduziu o conceito de grupos de Lie.

Uma definição formal e completa desses grupos, todavia, sai do escopo deste trabalho, tendo em vista que passa por ideias como variedade diferenciável e mapeamentos suaves, o estudo de uma classe reduzida dos grupos de Lie é suficiente. A natureza matricial dos elementos do grupo e a parametrização contínua e diferenciável desses são características hábeis para as analisar a maior parte dos fenômenos físicos. Assim, as sutilezas derivadas da definição mais formal desnecessárias. Com isso tem-se a seguinte definição (TUNG, 1985),

Definição 2.2.6 *Grupo de Lie clássico é um grupo matricial que pode ser parametrizado de forma contínua e analítica.*

Por causa da continuidade e da propriedade analítica pode-se pensar um elemento de grupo como uma soma infinita de elementos infinitesimais partindo da identidade. Com isso pode-se escrever (SCHWICHTENBERG, 2018):

$$g(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{I} + i\frac{\omega}{n}\mathbb{X}\right)^n = exp\left(i\omega\mathbb{X}\right). \tag{2.4}$$

Onde ω é o parâmetro do grupo, ou o conjunto de parâmetros contínuos do grupo, $i\omega\mathbb{X}/n$ simboliza um elemento infinitesimal do grupo G em questão, $\mathbb{I}$ é uma matriz identidade e g pertence a G.

A ideia de trabalhar com os termos $\mathbb{X}$, nomeados elementos da álgebra ou geradores do grupo, é promissora por omitir a dependência de com os parâmetros ω, assim apresentando uma análise de características mais basilares dos grupos. Com essa motivações inicia-se o estudo dos geradores reescrevendo (2.4) no teorema (SCHWICHTENBERG, 2018),

Teorema 2.2.1 *Se $g \in G$, onde $(G,\cdot)$ é um grupo de Lie de N dimensões, portanto, sendo os parâmetros do grupo $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N)$, os geradores $(\mathbb{X}_j)$ do grupos são dados por*

$$\mathbb{X}_j = -i\left.\frac{dg}{d\omega_j}\right|_0 \quad N \geq j \in \mathbb{N}^*, \tag{2.5}$$

Associado à isto defini-se Álgebra de Lie,

Definição 2.2.7 *Seja $(G,\cdot)$ um grupo de Lie, então sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é o conjunto de todas as matrizes $\mathbb{X}$ que satisfazem a equação (2.4).*

Constata-se que $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais ou dos complexos com uma operação binária $(\lfloor,\rfloor)$, os chamados parênteses de Lie. Isso posto, o fechamento do espaço vetorial pode ser reescrito como (HALL, 2015),

$$\lfloor\mathbb{X}_a, \mathbb{X}_b\rfloor = if_{abc}\mathbb{X}_c. \tag{2.6}$$

Nota-se que para grupos matriciais, e por consequência os grupos de Lie Clássicos, a operação binária é equivalente ao comutador $([,])$, pela referência (HALL, 2015).

Nomeia-se f_{abc} de constante de estrutura, sendo esta de enorme importância, pois caracteriza o grupo independente da representação, dado o seguinte teorema (HALL, 2015):

Teorema 2.2.2 *Seja uma representação Π de um grupo de Lie matricial $(G,\cdot)$, cuja a álgebra é $\mathfrak{g}$ com $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ pertencem a esta, a representação da álgebra Π' é definido por $\Pi' : \mathbb{X} \to \Pi'(\mathbb{X})$, então*

$$\Pi'\left([\mathbb{X},\mathbb{Y}]\right) = \left[\Pi'\left(\mathbb{X}\right), \Pi'\left(\mathbb{Y}\right)\right]. \tag{2.7}$$

2.3 Rotações tridimensionais

Com as informações da seção anterior, constrói-se os grupos de Lie clássicos SO(3) e SU(2), ambos podem descrever rotações em três dimensões e a diferença entre eles tem papel fundamental na descrição de partículas.

O grupo SO(3) é formado pelas matrizes reais de rotação em três dimensões ortogonais e de determinante um. Usando as matrizes de rotação de Euler (TAYLOR, 2002) para descrever uma rotação genérica em três dimensões utiliza-se três rotações independentes, tem-se que uma rotação genérica pode ser escrita como função de R_1, R_2 e R_3 associadas a três parâmetros θ_1, θ_2 e θ_3, na forma

$$R_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}; \tag{2.8}$$

$$R_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}; \tag{2.9}$$

$$R_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Com isso, os geradores pela equação (2.5) são da forma,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.11}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.12}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Dessa forma a álgebra pode ser dada pela relação de fechamento com constante de estrutura ε_{abc}, o símbolo de Levi-Civita para três dimensões. Segue da equação (2.6) (HALL, 2015),

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \tag{2.14}$$

Já SU(2) é o grupo das matrizes U complexas de ordem dois, unitárias com determinante um, sendo a condição de unitariedade ($U^\dagger U = \mathbb{I}$) e a operação $A^\dagger$ para uma matriz A é o complexo conjugado da matriz A transposta.

Para uma matriz U os quatro elementos que a constituem implicam em oito variáveis, para a condição de unitariedade consegue quatro equações relacionando essas oito variáveis. Já com o determinante consegue-se a quinta relação. Com isso, existem três parâmetros para esse grupo.

Para calcular os geradores, aplica-se a equação (2.4) para uma matriz U e seu transposto conjugado, em seguida explora-se a condição de unitariedade,

$$U^\dagger U = (\mathbb{I} - i\omega_a\mathbb{X}_a + ...)(\mathbb{I} + i\omega_a\mathbb{X}_a....) \Rightarrow \tag{2.15}$$

$$\mathbb{I} = I + i\omega_a\left(\mathbb{X}_a - \mathbb{X}_a^\dagger\right) + O(2) \tag{2.16}$$

Como ω_a é um parâmetro livre, os termos de todas as ordem devem se anular de maneira independente, sendo assim $\mathbb{X}_a = \mathbb{X}_a^\dagger$. Aplicando essa nova condição para geradores, tem-se

$$\omega_a\mathbb{X}_a = \begin{pmatrix} a & b - ci \\ b + ci & d \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Para a condição de determinante um, os geradores tem de ter traço nulo, pois toda matriz unitária é diagonalizável por uma transformação de semelhança (NETO, 2010). Portanto, usando a equação (2.4)

$$SUS^{-1} = S\exp(A)S^{-1} \tag{2.18}$$

$$= S\left(1 + A + \frac{A^2}{2} + ...\right)S^{-1} \tag{2.19}$$

$$= \left(1 + SAS^{-1} + S\frac{A^2}{2}S^{-1} + ...\right). \tag{2.20}$$

Nota-se que cada elemento SA^nS^{-1} é diagonal, sendo assim, cada elemento de SUS^{-1} é uma exponencial, portanto

$$SUS^{-1} = \begin{pmatrix} \exp(a) & 0 \\ 0 & \exp(b) \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Finalmente,

$$det\left(SUS^{-1}\right) = \exp(trA) = 1 \Rightarrow \tag{2.22}$$

$$trA = 0. \tag{2.23}$$

Onde trA é o traço da matriz A. Então os geradores são descritos como,

$$\omega_a \mathbb{X}_a = \begin{pmatrix} a & b-ci \\ b+ci & -a \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Ao eliminar os parâmetros ω_a, ω_b e ω_c obtém-se as matrizes de Pauli como geradores,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.25}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.26}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Se o geradores forem adotados como as próprias matrizes de Pauli, o fechamento da álgebra fornece,

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c. \tag{2.28}$$

É possível, contudo, escolher $\mathbb{X}_a = \dfrac{\sigma_a}{2}$ para reproduzir a constante de estrutura do grupo SO(3), vide

$$\left[\frac{\sigma_a}{2}, \frac{\sigma_b}{2}\right] = i\varepsilon_{abc}\frac{\sigma_c}{2}. \tag{2.29}$$

Por causa do teorema (2.7), SO(3) e SU(2) são representações de um mesmo grupo, quando utiliza-se SU(2) disse que a representação é espinorial, já para SO(3), a representação é vetorial.

2.4 Transformada de Lorentz

A Relatividade Restrita fixa a velocidade da luz para todo referencial inercial (RINDLER, 2016). Uma implicação que surge daí é a promoção do tempo para coordenada, ou seja, cada ponto do espaço-tempo possui um valor de tempo específico. Matematicamente, significa que espaço não é mais euclidiano tridimensional com tempo constante, e sim, um espaço-tempo quadridimensional de Minkowski (em homenagem ao matemático alemão Hermann Minkowski que estudou o espaço em questão). Nessa nova estrutura, o equivalente ao elemento de comprimento do caso euclidiano é o chamado Intervalo, dado por

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dr^{\mu} dr^{\nu}} \tag{2.30}$$

Onde, as coordenadas são dadas pelo quadrivetor $R = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ e $\eta_{\mu\nu}$ foi escolhido como um elemento do tensor de Bjorken-Drell (N) (NETO, 2010), métrica para o espaço de Minkowski escrita como,

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Para explorar e caracterizar a transformação acompanha-se a referência (NETO, 2010). Inicia-se pela manipulação da equação (2.30) utilizando a invariância de ds^2. Uma mudança de variável é o primeiro passo para tal,

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} &= \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} && (2.32) \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} dx^{\rho} dx^{\sigma} \\ \Rightarrow \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}. && (2.33) \end{aligned}$$

Diferenciando em relação a x^{λ} e usando a simetria de índice de $\eta_{\mu\nu}$,

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\sigma}} = 0 \Rightarrow \tag{2.34}$$

$$2\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} = 0. \tag{2.35}$$

A última passagem é permitida devida ao fato da métrica ser diagonal com determinante não-nulo e da hipótese fisicamente coerente de inversibilidade da transformação

$(x' \to x \Rightarrow x \to x')$. Com isso,

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \tag{2.36}$$

Onde $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ e a^{μ} são elementos de matrizes. Uma transformação da forma (2.36), é similar a uma rotação, trecho linear $\left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\right)$, e de translação, trecho constante (a^{μ}). A princípio, impõe-se o termo translacional nulo, dessa forma conclui-se,

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}, \tag{2.37}$$

Ou na forma diferencial,

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu} dx^{\nu}. \tag{2.38}$$

Retomando a invariância do Intervalo dado por (2.30),

$$\begin{aligned} ds'^2 = ds^2 \quad &\Rightarrow \quad \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, dx^{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\lambda}\, dx^{\lambda} \\ &\Rightarrow \quad \eta_{\rho\lambda} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\lambda} \qquad (2.39) \\ &\Rightarrow \quad N = \widetilde{\Lambda} N \Lambda. \qquad (2.40) \end{aligned}$$

Finalmente, pode-se com facilidade expressar as novas simetrias da relatividade de Einstein por uma transformada Λ. Opta-se por descrever um movimento para direção preferencial e sem rotação uma transformação chamada *"boost"*. Para esse fim, utiliza-se $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ e $V = dx/dt$ a soma explícita descrita pelas equações (2.38) e (2.39) fornece

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Porém, Λ não é unicamente definida, tendo em vista que uma rotação nas coordenadas espaciais também satisfaz as equações (2.37) e (2.39). De modo mais geral percebe-se essa não unicidade em (2.39) para $(\rho = \lambda = 0)$, pois

$$\begin{aligned} \left(\Lambda^{0}{}_{0}\right)^2 - \left(\Lambda^{1}{}_{1}\right)^2 - \left(\Lambda^{2}{}_{2}\right)^2 - \left(\Lambda^{3}{}_{3}\right)^2 = 1 \\ \Rightarrow \left(\Lambda^{0}{}_{0}\right)^2 = 1 + \delta_{ij} \Lambda^{i}{}_{0} \Lambda^{j}{}_{0} \\ \Rightarrow \left(\Lambda^{0}{}_{0}\right)^2 \geq 1 \\ \Rightarrow \Lambda^{0}{}_{0} \geq 1 \;\; ou \;\; \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ademais, o determinante de Λ também não é unicamente definido, por causa de (2.40), observa-se que

$$N = \widetilde{\Lambda} N \Lambda \Rightarrow detN = det\left(\widetilde{\Lambda} N \Lambda\right) \Rightarrow$$
$$detN = (det\Lambda)^2 detN \Rightarrow$$
$$det\Lambda = \pm 1. \tag{2.43}$$

Com (2.42) e (2.43), segrega-se as transformações em quatro tipos com bases nessas equações (SCHWICHTENBERG, 2018).

Tabela 1 – Classificação da transformada de Lorentz

	$L_+^\uparrow$	$L_-^\uparrow$	$L_-^\downarrow$	$L_+^\downarrow$
$det\Lambda$	$+1$	-1	-1	$+1$
$\Lambda^0{}_0$	$\leq +1$	$\leq +1$	≥ -1	≥ -1

Fonte: (SCHWICHTENBERG, 2018).

Por outro lado, impondo a invariância das equações de Maxwell sobre transformação de Lorentz, pode-se obter a ortogonalidade da transformação. Sejam as equações de Maxwell no sistema gaussiano (NETO, 2010):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{2.44}$$
$$\partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0 \tag{2.45}$$

Onde F é o tensor eletromagnético - com $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, com A o quadrivetor potencial- e J é a quadricorrente. A invariância de (2.45) não fornece muita informação sobre a transformação, contudo a equação (2.44) fornece

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j'^\nu \Rightarrow \tag{2.46}$$
$$\Lambda_\mu{}^\lambda \partial_\lambda \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\varphi F^{\alpha\varphi} = \frac{4\pi}{c} \Lambda^\nu{}_\varphi j^\varphi$$
$$\Rightarrow \Lambda_\mu{}^\lambda \Lambda^\mu{}_\alpha = \delta_\alpha^\lambda \Rightarrow \Lambda_{\mu\alpha} \Lambda^{\mu\lambda} = \delta_\alpha^\lambda \Rightarrow \tag{2.47}$$
$$\widetilde{\Lambda}\Lambda = \mathbb{I} \tag{2.48}$$

Onde δ_α^λ é o delta de Kronecker, portanto a transformada de Lorentz é ortogonal.

Com o vasto arcabouço teórico construído nesta seção é possível prosseguir para a compreensão do conjunto das transformadas de Lorentz como um grupo Lie, podendo assim obter uma estrutura essencial que independe da representação de grupo.

2.5 Grupo de Lorentz

O primeiro passo para construção do grupo de Lorentz é garantir que as transformações de Lorentz formam um grupo, no entanto é suficiente mostrar que as transformação com característica $L_+^\uparrow$ são grupo, o chamado grupo de Lorentz homogêneo, pois os demais grupos pode ser acessados via inversões discretas. Para tanto, Λ tem que respeitar 2.2.4, é conveniente aqui interpretar os *"boosts"* como as rotações de ângulos hiperbólicos, por exemplo o equivalente de (2.41) é

$$\Lambda(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

A substituição do parâmetro β por χ é coerente, porque γ e $\beta\gamma$ são tais que a relação fundamental das funções hiperbólicas,

$$\begin{cases} \cosh^2\chi - \sinh^2\chi = 1 \\ \gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1 \end{cases}.$$

Além de estar coerente com os domínios das funções *cosh* e *senh*, pois $cosh(x) \leq 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$, como $\beta < 1 \rightarrow \gamma > 1$.

Com essa nova notação, as propriedades exigidas pela definição 2.2.4 são facilmente visualizadas, haja vista a independência entre as direções espaciais observada tanto nos *"boosts"* quanto nas rotações. Outrossim, a definição 2.2.6 também é obedecida, uma vez que as rotações e os *"boosts"* são definidas para todos os valores reais. Possui-se, portanto, um grupo de Lie chamado de homogêneo de Lorentz, sendo o conjunto das matrizes rotação e *"boost"* em três dimensões.

Por conseguinte, é natural a construção dos seis geradores, três para cada grau de liberdade das rotações e três para cara grau de liberdade dos *"boosts"*, desse novo grupo de Lie.

Na seção 2.3 já foram discutidos as rotações especiais e seus geradores, com a mudança para um espaço de Minkowski a constante de estrutura não se altera e os geradores são da forma,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.50}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.51}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Para os *"boosts"*, opta-se por usar a inversa de (2.5) no cálculo dos geradores, pois é mais conveniente obter as transformadas de Lorentz para o referencial do observador vide (BELICH *et al.*, 2007). Os geradores (K), por consequência, são

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.53}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.54}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.55}$$

Os geradores possuem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{cases} [J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c \\ [K_a, K_b] = -i\varepsilon_{abc}J_c \\ [K_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}K_c \end{cases} . \tag{2.56}$$

Pode-se reparametrizar J e K como $N_a^{\pm} = (J_a \pm iK_a)/2$ de forma a adquirir relações semelhantes a (2.6) (SCHWICHTENBERG, 2018), com isso

$$\begin{cases} \left[N_a^+, N_b^+\right] = i\varepsilon_{abc}N_c^+ \\ \left[N_a^-, N_b^-\right] = i\varepsilon_{abc}N_c^- \\ \left[N_a^+, N_b^-\right] = 0 \end{cases} . \tag{2.57}$$

Com as equações de coeficientes de estrutura pode-se entender o grupo de Lorentz para diversas representações com maior facilidade, isto significa a possibilidade de garantir a simetria de Lorentz para as mais diversas partículas somente impondo que a equação de movimento, lê-se equação de campo, seja covariante sobre transformações derivadas de alguma representação do grupo de Lorentz.

Para uma representação espinorial do grupo de Lorentz, a parametrização $N^{\pm}$ é muito útil, haja vista que dois tipos distintos de geradores N^+ e N^- comutam e cada um possui coeficiente de estrutura semelhante ao grupo SU(2). Ou seja, o grupo de homogêneo Lorentz pode ser pensado como dois grupos de SU(2) juntos, característica de uma representação espinorial (NETO, 2010).

Essa representação é usada para descrever partículas com spin meio (RYDER, 2014). Cujos os geradores são uma releitura da matrizes de Pauli, sendo esta representação o emprego direto do grupo de Lorentz como dois grupos SU(2) juntos. A tradução matemática dessas partículas para geradores é

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \rightsquigarrow \begin{cases} N_a^- = 0 \\ N_a^+ = \dfrac{\sigma_a}{2} \Rightarrow J_a = \dfrac{\sigma_a}{2} \; e \; K_a = -i\dfrac{\sigma_a}{2} \end{cases} \tag{2.58}$$

e

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} N_a^+ = 0 \\ N_a^- = \dfrac{\sigma_a}{2} \Rightarrow J_a = \dfrac{\sigma_a}{2} \; e \; K_a = i\dfrac{\sigma_a}{2} \end{cases} . \tag{2.59}$$

Cabe pontuar que, por causa da definição de representação 2.2.5, as representações espinoriais não são unicamente definidas.

É necessário, então, um objeto que parte se transforme como (2.58) e parte como (2.59), esses são chamados de bi-espinores, daí usando a equação (2.4) tem-se por (SCHWICHTENBERG, 2018),

$$\begin{pmatrix} \chi' \\ \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i\sigma_a\theta^a}{2}\right)\exp\left(\frac{-\sigma_a\phi^a}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{i\sigma_a\theta^a}{2}\right)\exp\left(\frac{\sigma_a\phi^a}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

Com θ_a e ϕ_a sendo os parâmetros da transformação e $S(\Lambda)$ é a transformada de Lorentz para espinores. Por causa da diferença entre $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2},0\right)$ os elementos χ e ξ são ditos de quiralidade esquerda e direita, respectivamente (RYDER, 2014).

Pode resumir (2.60) pelas duas equações,

$$\Psi' = S(\Lambda)\Psi; \tag{2.61}$$

$$\Psi = S^{-1}(\Lambda)\Psi' \tag{2.62}$$

Onde $S(\Lambda)$, $S^{-1}(\Lambda)$ são as transformada de Lorentz espinoral, sua inversa e ψ é um bi-espinor. Vale ressaltar que não há termo mistos, portanto a matriz S é diagonal.

Dissecando a equação (2.60), os termos em função de θ_a, transformam os dois espinores da mesma forma e se relacionam com as rotações, pois nas equações (2.58) e (2.59) os J_a são iguais. Por outro lado, os termos em função ϕ na transformada espinorial, está relacionado com os *"boost"*. Ou seja, se a velocidade relacionada ao ”*boost*” sofrer uma inversão $(v \to -v)$, o termo que tinha quiralidade direita passa a ter esquerda e vice-versa (RYDER, 2014).

2.6 Grupos da Very Special Relativity

A quebra de simetria de Lorentz é parte de diversas abordagens que procuram resolver os problemas da Física contemporânea de altas energias, o diferencial de Cohen e Glashow é a substituição do Grupo de Poincaré por um subgrupo próprio do mesmo que ainda preserva a relação de dispersão de Einstein.

O grupo das translações no espaço-tempo de Minkowski possui papel fundamental, porque a simetria em relação as transformações desse grupo acarretam na conservação do quadrimomento $P = (E/c, \vec{p})$, isto é, a dispersão de Einstein (2.1). Esse resultado, nada mais é, que a aplicação do Teorema de Noether para o grupo das translações (SCHWICHTENBERG, 2018).

Com esse objetivo, qualquer um dos seguintes grupos: T(2), E(2), HOM(2) e SIM(2), em adição ao grupo das translações espaço-temporais, pode se enquadrar como *"Very Special Relativity"* (COHEN; GLASHOW, 2006a).

Os subgrupos próprios de Lorentz citados acima são descritos por seus geradores da forma subsequente: T(2) é o grupo cujo os geradores são $\tau_1 = K_1 + J_2$ e $\tau_2 = K_2 - J_1$, E(2) tem como geradores τ_1, τ_2 e J_3, HOM(2) possui os geradores de T(2) acompanhados de K_3, por fim SIM(2) é constituído pelos geradores de HOM(2) em conjunto com J_3. Nota-se que a escolha dos geradores implica em uma direção preferencial, adotou-se o eixo Z para tal.

Estes quatro subgrupos possuem a interessante propriedade de retornar ao grupo de Lorentz quando há a imposição de uma ou mais simetrias P, T, CP e CT. Com simetria P sendo invariância por inversão das coordenadas espaciais (transformação de paridade), simetria T sendo invariância por inversão temporal, simetria CP sendo invariância simultânea por transformação de paridade e por inversão de carga, finalmente simetria CT sendo invariância simultânea por inversão de carga e de tempo (COHEN; GLASHOW, 2006a).

Nesse conjunto de quatro possibilidades de VSR, uma característica de E(2) se destaca, o quadrivetor $n^\mu = (1,0,0,1)$ é invariante para as transformações desse grupo. Observa-se que,

$$n' = \exp\left[-i(\tau_1\zeta^1 + \tau_2\zeta^2 + J_3\theta)\right] n \tag{2.63}$$

Separando os elementos de cada gerador, tem-se três equações

$$n' = exp(-i\tau_1\zeta^1)n = n; \tag{2.64}$$

$$n' = exp(-i\tau_2\zeta^2)n = n; \tag{2.65}$$

$$n' = exp(-iJ_3\theta)n = n. \tag{2.66}$$

Como T(2) é subgrupo de E(2), então n também é invariante para T(2). Para T(2) e E(2) pode-se construir um operador covariante e local que quebre a simetria de Lorentz partindo de n. Por outro lado, HOM(2) e SIM(2) não possuem tensores invariantes, portanto não se pode construir um operador que a simetria de Lorentz.

Ou seja, todos os operadores locais covariantes para SIM(2) ou HOM(2) também são covariantes para Lorentz. Isso somado à garantia da dispersão de Einstein como consequência da simetria de translação e da quantização do momento por operador diferencial (GRIFFITHS, 2005), então o único invariante que pode construído é $p_\mu p^\mu$, relacionado à massa, exatamente como na Relatividade Restrita. Essa equivalência é crucial, visto que é possível mostrar que para o VSR, a velocidade da luz é invariante para todos os referenciais, ocasionando todos os efeitos mais usuais da Relatividade Restrita (COHEN; GLASHOW, 2006a).

Vale ressaltar que, o desenvolvimento feito adiante sobre o VSR, baseia-se o grupo SIM(2), pois esse é o subgrupo com maior número de geradores, além disso os demais subgrupos são subgrupos próprios de SIM(2). Com isso, toda simetria preservada para SIM(2) também é preservada para T(2), E(2) e HOM(2).

A maior vantagem, porém, da modelagem em questão é na construção de um operador invariante SIM(2) que quebra a simetria de Lorentz. Para tal o termo não-local é escolhido como (COHEN; GLASHOW, 2006b)

$$N_\mu = \frac{n_\mu}{n \cdot \partial} \tag{2.67}$$

Onde, o operador $1/(n \cdot \partial)$ é equivalente ao operador integral (MALUF *et al.*, 2014)

$$\frac{1}{n \cdot \partial} = \int_0^\infty \exp(-an\partial)\, da. \tag{2.68}$$

Novamente, essa escolha é feita tendo em vista que n se transforma para SIM(2) e HOM(2). Como n é invariante para as transformações originadas pelos geradores de E(2), para HOM(2) e SIM(2) só ocorre a transformação derivada de K_3.

$$n \to \exp(-i\zeta K_3)n = \exp(\zeta)n \tag{2.69}$$

$$\Rightarrow n \to \exp(\zeta)n. \tag{2.70}$$

Cabe destacar que a representação utilizada não foi espinorial, vide que n é um quadrivetor e o geradores foram apresentados como J_a e K_a.

Essa escolha de operador (2.67) será melhor entendida no contexto da equação de Dirac e do neutrino. Durante os próximos capítulos, com a construção de uma equação de Dirac SIM(2) o operador não-local torna-se mais convincente.

Todavia, as particularidades do VSR foram suficientemente descritas para justificar a construção de uma equação de movimento baseada nessas propriedades. Pode-se, portanto, comparar as previsões tanto do VSR quanto da Relatividade Restrita com os dados experimentais.

3 PARTÍCULA DE SPIN-1/2 LIVRE

3.1 Introdução

No contexto do agitado século XX, logo após a Mecânica Quântica e a Relatividade Especial se firmarem, emerge a Mecânica Quântica Relativística (MQR), com ela o físico inglês Paul Dirac e a equação que leva seu nome. Os principais êxitos dessa modelagem foram a aparição natural do spin e da helicidade, além da grandiosa previsão do pósitron (antipartícula do elétron) e com isso o conceito de antimatéria.

Os grandes feitos da MQR não a exime de falhas, estas são amplamente conhecidas, cabe destacar a incoerência entre o conceito de mar de Dirac - fundamental para a consistência da teoria - e os bósons, tendo em vista que esse tipo de partícula não segue o Principio da exclusão de Pauli (GRIFFITHS, 2005). Tal fato, dentre outras novidades na física de partículas no meio do século XX, favoreceu a criação de um novo paradigma, a Teoria Quântica de Campos (TQC) e seus infinitos graus de liberdade tomaram o lugar de MQR.

Essa modelagem mais moderna possui resultados extremamente acertados com observações experimentais modernas e constitui um arcabouço teórico mais completo pra lidar com as mais diversas partículas elementares observadas na atualidade, tanto que essa é uma das bases para o Modelo Padrão (MP) - este é um dos alicerces da física teórica de altas energias contemporânea.

Mesmo com uma aparente substituição, a mecânica de Dirac ainda descreve férmions - partículas de spin semi-inteiro - para sistemas de poucas partículas. Dessa forma as aplicações para matéria condensada, sobretudo para o grafeno (DARTORA *et al.*, 2015), formam um ambiente propício para exploração. Outra possibilidade são estudos de física além do Modelo Padrão, esses ocorrem das mais diversas formas com objetivos distintos, por exemplo o estudo de oscilações de neutrinos em ondas gravitacionais de (DVORNIKOV, 2019).

Neste capítulo, a equação de Dirac será construída por dois métodos chegando a resultados equivalentes, uma abordagem histórica e a abordagem de campos clássicos. Nesta, serão utilizadas as ideias de Teoria de Grupos anteriormente citadas para construir duas equações de Dirac para uma partícula livre, a primeira covariante de Lorentz e a segunda SIM(2) covariante. Para reforçar a escolha do operador N_μ, SIM(2) covariante, dado pela equação (2.67), a última seção tem como objetivo discutir o surgimento de massa para o neutrino.

3.2 Equação de Dirac

A primeira tentativa mais notável para a união da Mecânica Quântica com a Relatividade Restrita é a proposta por Oskar Klein e Walter Gordon em 1926 com a equação de Klein-Gordon. Sendo essa uma aplicação direta da relação de dispersão relativística na equação de Schrödinger seguindo a quantização do momento. Encontra-se uma equação de onda de segunda ordem tanto no tempo quanto na posição.

Apesar de muito intuitivo, esse modelo apresenta dois problemas estruturais: a energia não é positiva definida e a densidade de probabilidade também não o é. Depois dessa primeira experiência falha de construção de uma MQR, Dirac desenvolve suas ideias partindo da equação de Schrödinger, da relação de dispersão relativística e de um hamiltoniano (H) definido linear no momento. Uma equação espinorial de primeira ordem e covariante é o resultado do trabalho do inglês.

Para chegar nessa equação parti-se da quantização do momento e da equação de Schrödinger da forma mais genérica (GRIFFITHS, 2005),

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}; \tag{3.1}$$

$$\vec{p}\,\psi = -i\hbar\vec{\nabla}\Psi. \tag{3.2}$$

O truque de Dirac foi impor um hamiltoniano de primeira ordem que tenha como quadrado a relação de dispersão de relativística (2.1) quantizada (ALDROVANDI; PEREIRA,), tendo em vista que $\partial H/\partial t = 0$ implica que $H\Psi = E\Psi$ tem-se

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(-\hbar^2 c^2\vec{\nabla}^2 + m^2c^4\right)\psi \Rightarrow \tag{3.3}$$

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0 \tag{3.4}$$

Onde o operador $\Box$ o chamado d'alambertiano, dado por

$$\Box\psi = \partial_\mu\partial^\mu\psi.$$

A equação (3.4) acima é exatamente a equação encontrada por Klein-Gordon (NETO, 2010), contudo o operador hamiltoniano teste de Dirac é de primeira ordem da forma,

$$H = c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 \tag{3.5}$$

Desse modo, não possui o problema da densidade de probabilidade negativa (GREINER, 2003).

Por causa da condição de que a o hamiltoniano escolhido por Dirac deve reescrever a equação (3.4) quando aplicado duas vezes, tem-se a seguintes condições sobre $\vec{\alpha}$ e β (NETO, 2010):

$$\begin{cases} \alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a = 2\delta_{ab} \\ \alpha_a\beta + \beta\alpha_a = 0 \\ \alpha_a^2 = \beta^2 = 0 \end{cases} . \tag{3.6}$$

Dadas as condições, é simples ver que nem α_a nem β são números, todavia é suficiente que

$$\alpha_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ \sigma_a & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Pode-se, então, escrever o hamiltoniano de Dirac como,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(i\hbar c\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta mc^2\right)\psi \tag{3.8}$$

Ou de forma covariante, multiplicando a equação acima β, dividindo por c e colocando na notação relativística,

$$\begin{gathered} \beta i\hbar\partial_0\psi = \left(-i\hbar\beta\vec{\alpha}\vec{\nabla} + mc\right)\psi \Rightarrow \\ i\hbar\left(\gamma^0\partial_0 + \gamma^0\vec{\alpha}\vec{\nabla}\right)\psi = mc\psi \Rightarrow \\ \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi = 0 \end{gathered} \tag{3.9}$$

Onde as matrizes de Dirac γ são dadas por,

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \gamma^a = \beta\alpha^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^a \\ -\sigma^a & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Sendo (3.9) a equação de Dirac na sua forma mais famosa.

3.3 Lagrangiana de Dirac

Uma forma mais moderna de chegar nos resultados da seção anterior é tomar como base os grupos de simetria da teoria em questão para construir uma densidade lagrangiana e depois usar as equações de Euler-Lagrange para encontrar a equação com informações sobre a dinâmica do sistema, essa metodologia é uma abordagem de campos clássicos, interpretando a equação de onda como equação de campo.

O primeiro passo para construção dessa densidade lagrangiana é a compreensão das invariâncias da equação de Dirac. Ou seja, quais grupos de simetria estão relacionados com ela. Tendo em vista que a novidade da MQR é uma descrição relativística de uma partícula quântica o grupo de simetria é o grupo de Lorentz. Resta saber qual a representação do grupo a ser utilizada. Sendo a equação de Dirac direcionada a partículas de spin $\frac{1}{2}$, logo a representação de $\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus \left(0,\frac{1}{2}\right)$ do grupo de Lorentz, a representação espinorial numa representação quiral Γ^{μ} (RYDER, 2014).

Sabendo o grupo de simetria e sua representação, tem-se, agora, que considerar as características essenciais para uma densidade lagrangiana eficiente, vale ressaltar que pelo do Princípio de Hamilton (GOLDSTEIN *et al.*, 2001) para um dado sistema a lagrangiana não é unicamente definida, logo a densidade lagrangiana também não o é.

A densidade lagrangiana é uma função real - pois observa-se valores reais de energias -, uma função apenas do campo e de suas primeiras derivadas - por que a equação de Dirac é de primeiro grau. Assume-se também uma função local por simplicidade (RYDER, 2014).

Reunindo todas essas características pode-se definir os invariantes para construção da lagrangiana. Sendo a função de onda na forma espinorial,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Onde ξ, χ são espinores de quiralidade direta e esquerda, respectivamente, e Ψ é chamado de bi-espinor que se transforma por (2.60). Tem-se então quatro invariantes são dados por

$$\begin{aligned} I_1 &= \chi^{\dagger}\xi \\ I_2 &= \xi^{\dagger}\chi \\ I_3 &= \xi^{\dagger}\partial_{\mu}\sigma^{\mu}\xi \\ I_4 &= \chi^{\dagger}\partial_{\mu}\check{\sigma}^{\mu}\chi \end{aligned} \tag{3.12}$$

Com $\sigma_0 = \sigma^0 = \mathbb{I}$ e $\sigma^a = -\sigma_a$.

Os quatro invariantes possuem como características comuns o fato de duas quiralidades sempre estarem pareada. Tanto I_1 quanto I_2 são consequências diretas da diferença de quiralidade entre os espinores ξ e χ. Por exemplo para σ_3 com ϕ de parâmetro, tem-se

$$\xi' = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \xi \tag{3.13}$$

$$\chi' = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \chi \tag{3.14}$$

Ou,

$$\begin{gathered} \xi' = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\phi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \xi \\ \chi' = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{\phi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \chi \end{gathered} . \tag{3.15}$$

Por fim, é está explícito que $\chi'^{\dagger}\xi' = \chi^{\dagger}\xi$, tendo em vista, que as exponenciais se cancelam. Pode-se, portanto, transcrever essas duas relações em função de Ψ, o simples produto $\Psi^{\dagger}\Psi$ é suficiente, ao multiplicar por Γ^0 não há alteração, escreve-se assim o termo $\Psi^{\dagger}\Gamma_0\Psi$. Onde Γ são as matrizes de Weyl,

$$\Gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \check{\sigma}^{\mu} \\ \sigma^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \; e \; \Gamma_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \check{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Com $\sigma_0 = \sigma^0 = \check{\sigma}^0 = \mathbb{I}$ e $\check{\sigma}^a = -\sigma^a = \sigma_a$.

Por outro lado, em I_3 e I_4 o termo $\partial_{\mu}\sigma^{\mu}$ e $\partial_{\mu}\check{\sigma}^{\mu}$ são diferenciais na forma espinorial e se comportam como spinores de dois índices (SCHWICHTENBERG, 2018), alterando a quiralidade dos espinores, reforçando sempre que as quiralidades opostas ficam pareadas. Novamente, os dois invariantes podem ser resumidos pelo produto $\Psi^{\dagger}\Gamma_0\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi$, o chamado termo cinético,

$$\begin{aligned} \Psi^{\dagger}\Gamma_0\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi &= \begin{pmatrix} \chi^{\dagger} & \xi^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \check{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \partial_{\mu} \begin{pmatrix} \chi & \xi \end{pmatrix} && (3.17) \\ &= \begin{pmatrix} \chi^{\dagger} & \xi^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \check{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} & 0 \\ 0 & \sigma^{\mu}\partial_{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi & \xi \end{pmatrix} && (3.18) \\ &= \chi^{\dagger}\check{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi + \xi^{\dagger}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\xi . && (3.19) \end{aligned}$$

Com isso, a função densidade lagrangiana ($\mathscr{L}$) pode ser escrita resumindo (3.12) e escolhendo as constantes corretas tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -mc\Psi^{\dagger}\Gamma_0\Psi + i\hbar\Psi^{\dagger}\Gamma_0\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi \\
\Rightarrow \mathscr{L} &= \bar{\Psi}\left(-mc + i\hbar\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\right)\Psi
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Onde o termo $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger}\Gamma^{0}$ é chamado de bispinor adjunto. Utilizou-se integração por partes eliminando o termo de fronteira para simplificar a densidade lagrangiana (GOLDSTEIN *et al.*, 2001).

Como equação de Euler-Lagrange para campos é dada por (SCHWICHTENBERG, 2018)

$$
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \tag{3.21}
$$

Onde φ é o campo em questão e $\dot{\varphi}$ é a derivada temporal do campo. Aplicando este resultado para equação (3.20) com $\varphi = \bar{\Psi}$, tem-se a seguinte equação,

$$
\left(-mc + i\hbar\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\right)\Psi = 0 \tag{3.22}
$$

Se $\varphi = \Psi$, encontra-se a equação para o bispinor ajdunto.

Agora uma discussão se faz necessária, a divergência entre a equação de Dirac com as matrizes Γ de Weyl e com as matrizes de γ de Dirac intriga. Todavia, a referência (SREDNICKI, 2007) esclarece que na (3.9) a função de onda (ψ) é diferente da equação da função de onda Ψ na (3.22). A primeira trata-se do chamado campo de Dirac, já o segundo de um campo de fermiônico genérico da forma espinor com quiralidade esquerdo χ depois espinor com quiralidade ξ. Ambas as estruturas são equivalentes, pode-se, portanto, escolher a que for mais conveniante para cada situação. Ressalta-se que ambas as representações são espinoriais.

Essa equidade torna-se mais visível quando se enfatiza a relação entre a as matrizes γ e Γ, dada pela transformação de semelhança (ALDROVANDI; PEREIRA,),

$$
\Gamma^{\mu} = U\gamma^{\mu}U^{-1} \;\text{ com }\; U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{3.23}
$$

Portanto, usando a equação (3.23) e a (3.9) e o resultado com (3.22), tem-se

$$
\begin{gathered}
\left(i\hbar\partial_{\mu}\gamma^{\mu} - m\right)\psi = 0 \Rightarrow \\
i\hbar\partial_{\mu}U^{-1}\Gamma^{\mu}U\psi = m\psi \Rightarrow \\
i\hbar\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}U\psi = mU\psi \Rightarrow \\
U\psi = \Psi.
\end{gathered} \tag{3.24}
$$

Nesta seção, conseguiu-se partir de uma representação do grupo de Lorentz para escrever a equação de movimento de um férmion sem nenhuma interação externa, discutindo aspectos relevantes sobre quiralidade e sutilezas sobre a utilização da equação de Dirac.

3.4 Equação de Dirac para VSR

Nesta seção, Aplica-se um processo análoga à seção anterior pra o grupo SIM(2), a fim de encontrar uma equação de Dirac livre corrigida por um termo não-local. Sabendo que todos os termos que são invariantes para Lorentz também o são para o VSR já inicia-se a nova densidade lagrangiana com os dois termos da equação (3.20).

O novo termo deve ser não-local, dadas as considerações da seção 2.6 sobre os operadores SIM(2) e Lorentz invariantes. Uma pista sobre por onde começar a construção do termo invariante em questão é o vetor n e a equação (2.69). Outro ponto a ser analisado é qual representação espinorial adotada, opta-se por acompanhar os termos (3.12), ou seja, utiliza-se como base a representação quiral e as matrizes Γ^0.

O operador não-local pode ser explorada partindo do termo nP/nQ, onde P e Q são quadrimomentos de duas partículas, no contexto de um decaimento de duplo de partículas de spin nulo (COHEN; GLASHOW, 2006a). Essa fração é invariante para E(2), dada a transformação de n, e servirá de inspiração para construção do termo invariante SIM(2).

Testa-se o operador $N_\mu = n_\mu/(n \cdot \partial)$ baseado nas semelhanças com a fração invariante de E(2), atentando-se à quantização do quadrimomento dada pelas equações (3.2) e (3.1). Observa-se que N_μ transforma-se para SIM(2), da mesma forma que o operador ∂_μ para Lorentz. Sendo assim, o termo invariante é dado por $\Psi \dagger \Gamma^0 \Gamma^\mu N_\mu \Psi$ e a lagrangiana de Dirac livre é

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -mc\Psi^\dagger\Gamma^0\Psi + i\hbar\Psi^\dagger\Gamma^0\Gamma\partial_\mu\Psi + i\hbar\frac{\lambda}{2}\Psi^\dagger\Gamma^0\Gamma^\mu N_\mu\Psi \Rightarrow \\
\mathscr{L} &= \Psi^\dagger\Gamma^0\left[-mc + i\hbar\Gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{\lambda}{2}N_\mu\right)\right]\Psi. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Aplicando a equação (3.21) de Euler-Lagrange para campos da seção anterior, a equação de Dirac SIM(2) covariante é

$$\left[-mc + i\hbar\Gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{\lambda}{2}N_\mu\right)\right]\Psi = 0 \qquad (3.26)$$

Ou, com as matrizes de Dirac,

$$\left[-mc + i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{\lambda}{2}N_\mu\right)\right]\psi = 0. \qquad (3.27)$$

O fator λ é uma constante relacionada a intensidade das correções ocasionados pelo modelo de Cohen e Glashow. Por causa do sucesso do Modelo Padrão, λ deve ser pequeno. Essa escala será discutida na seção seguinte, junto com a massa do neutrino.

3.5 Massa do Neutrino

Desde de sua idealização no inicio da década de trinta por Wolfgang Pauli (SOLOMEY, 1997) , o neutrino tem sido uma partícula especialmente complicada para física. Em 2019, no contexto do Modelo Padrão de partículas, os neutrinos podem ser de três tipos: Neutrino do elétron, do múon e do tau, mas a massa é um problema não importa o tipo o neutrino.

Sendo todos os neutrinos partículas de quiralidade puramente esquerda, não é possível construir termos como I_1 e I_2 como (3.12), ou seja, neutrinos não possuem massa pelo Modelo Padrão. Não se considerou o termos de Majorana, haja vista a não conservação do número leptônico na abordagem (PAL, 2011).

Contudo, devido a um fenômeno chamado de oscilações de neutrinos, estabelecida por Maki, Nakagawa e Sakata em (MAKI *et al.*, 1962), a massa do neutrino passa a ser não-nula (LICCIARDI, 2007). Uma diversidade de experimentos podem ser realizados com objetivo de medir direta ou indiretamente a massa do neutrino, por exemplo o experimento KATRIN do Instituto de Tecnologia Karlsruhe (KIT), uma colaboração internacional que encontrou um limite superior de massa para neutrinos (AKER *et al.*, 2019).

Para o VSR, a massa do neutrino surge de forma simples e direta, pois o operador não-local se transforma como quadrimomento e não some quando impõe-se a quiralidade do neutrino puramente esquerda. Fazendo $\xi = 0$, tem-se Ψ somente com o termo de quiralidade esquerda, logo na equação (3.26) o termo de massa pode ser ignorado, tornando-se

$$\Gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}+\frac{\lambda}{2}N_{\mu}\right)\Psi=0. \tag{3.28}$$

Pode-se usar a equação acima para encontrar uma equação semelhante à (3.4), de forma a retornar à dispersão de Einstein, basta aplicar o termo $\Gamma^{\nu}\left(\partial_{\nu}+\frac{\lambda}{2}N_{\nu}\right)$, como segue

$$\Gamma^{\nu}\left(\partial_{\nu}+\frac{\lambda}{2}N_{\nu}\right)\Gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}+\frac{\lambda}{2}N_{\mu}\right)\Psi=0\Rightarrow \tag{3.29}$$

$$\Gamma^{\nu}\Gamma^{\mu}\left[\partial_{\nu}\partial_{\mu}+\frac{\lambda}{2}\left(\partial_{\nu}N_{\mu}+N_{\nu}\partial_{\mu}\right)+\frac{\lambda^{2}}{4}N_{\nu}N_{\mu}\right]\Psi=0\Rightarrow \tag{3.30}$$

$$\left(\eta^{\mu\nu}+\frac{1}{2}[\Gamma^{\nu},\Gamma^{\mu}]\right)\left[\partial_{\nu}\partial_{\mu}+\frac{\lambda}{2}\left(\partial_{\nu}N_{\mu}+N_{\nu}\partial_{\mu}\right)+\frac{\lambda^{2}}{4}N_{\nu}N_{\mu}\right]\Psi=0\Rightarrow \tag{3.31}$$

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}+\lambda\right)\Psi=0. \tag{3.32}$$

Neste processo, utilizou-se algumas propriedades tanto das matrizes Γ^{μ}, do operador ∂_{μ} e do operador N_{μ}, as propriedades usadas são

$$\begin{cases} \Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}=\frac{1}{2}\left[\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}\right]+\frac{1}{2}\left\{\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}\right\}=\eta^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\left[\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}\right] \\ \left[\Gamma^{\mu},\Gamma^{\nu}\right]=-\left[\Gamma^{\nu}\Gamma^{\mu}\right] \\ n^{\mu}n_{\mu}=0 \\ \partial^{\mu}N_{\mu}=1 \end{cases} \tag{3.33}$$

Com $\{,\}$ sendo o anticomutador, dado por $\{A,B\}=AB+BA$.

Utilizou-se, além disso, o fato do produto de um termo simétrico nos índices com um termo anti-simétrico nos índices na soma de Einstein ser nula. Todas as propriedades apresentadas em (3.33) são de simples demonstração utilizando as definições de Γ^{μ}, N_{μ} e n_{μ}.

Examinando a equação (3.32), observa-se que a constante λ atua como o termo de massa na equação (3.4). Portanto, a massa do neutrino está no centro das propriedades *"Very Special Relativity"*, não só por possuir uma explicação natural nesse modelo, mas o limite superior da massa do neutrino também é limite superior dos efeitos do VSR, isto é, a modelagem de Glashow e Cohen, além de possivelmente revolucionar a física de neutrinos, possui falseabilidade relativamente simples de ser testada.

4 ACOPLAMENTO MINIMO E NÃO-MÍNIMO SIM(2)-COVARIANTE

4.1 Introdução

O sucesso do modelo, em especial da construção da massa do neutrino, motiva a aplicação da VSR para outros casos. Constata-se que a exploração desse novo modelo pode ser divididas em duas classes. A primeira é da VSR replicando resultados bem conhecidos pelo Modelo Padrão para estimar as correções e discutir possíveis verificações experimentais - como pode ser observado em (MALUF *et al.*, 2014), com o estudo do potencial do átomo de hidrogênio, e em (ALFARO; RIVELLES, 2013b), com a análise do comportamento de campos de calibre não abelianos. A segunda são discussões sobre diversos problemas do Modelo Padrão, avaliando possíveis efeitos da simetria SIM(2) na solução desses problemas, por exemplo: a possibilidade de VSR no setor da matéria escura (AHLUWALIA; HORVATH, 2010) e da aplicação desse modelo para descrever o axion, partícula de interação relacionada à simetria CP forte (BUFALO; UPADHYAY, 2017).

Seguindo o primeiro tipo de pesquisa, neste capítulo será discutido a relação entre a simetria SIM(2) com o potencial do oscilador de Dirac, desenvolvido por Moshinsky e Szczepaniak (MOSHINSKY; SZCZEPANIAK, 1999).

Para a equação de Dirac covariante de Lorentz esse potencial induz um hamiltoniano linear tanto no momento quanto na posição, além de possuir solução analítica. Tornando-se, assim, um tema recorrente na física contemporânea vide a aplicação para um espaço-tempo não-comutativo de cordas cósmicas (CUZINATTO *et al.*, 2019) e a construção de hamiltonianos isoespectarais para o oscilador de Dirac (HARITHA; CHAITANYA, 2019).

A estrutura deste capítulo é composta pela contextualização do Oscilador de Dirac e seus aspectos matemáticos e fenomenológicos, pela revisão de teorias de calibre e eletromagnetismo, pelo desenvolvimento de um acoplamento mínimo para o VSR e, por fim, por uma discussão sobre um possível termo de interação que carregue um acoplamento não-mínimo similar ao acoplamento do Oscilador de Dirac.

4.2 Oscilador de Dirac Lorentz covariante

A base para o potencial de Moshinsky e Szczepaniak é o oscilador harmônico, um problema fundamental da física clássica (GOLDSTEIN *et al.*, 2001) que possui um equivalente quântico igualmente importante (GRIFFITHS, 2005). A característica comum para ambos os casos é o termo de momento e de posição são funções quadráticas.

A ideia do Oscilador de Dirac, então, é a construção de um hamiltoniano que seja de primeira ordem no quadrimomento e no quadrivetor posição, para tal utiliza-se uma interação eletromagnética, mais especificamente, um acoplamento não-mínimo do tipo $\vec{p} \to \vec{p} - im\omega\beta\vec{r}$ (MOSHINSKY; SZCZEPANIAK, 1999), onde ω é uma constante. Com isso pode-se reescrever a equação do hamiltoniano de Dirac (3.5) como

$$H = c\vec{\alpha}\left(\vec{p} - im\omega\vec{r}\beta\right) + \beta mc^2. \tag{4.1}$$

Vale pontuar que o termo mais usual para descrever uma interação eletromagnética é o chamado acoplamento mínimo dado por $P \to P - qA$, onde P é o quadrimomento, A o quadripotencial e q a carga. Assumiu-se, então, uma partícula neutra, pois o termo de interesse é linear na posição.

Na notação covariante fica mais simples de visualizar o elo do acoplamento não-mínimo com o uma interação eletromagnética (GREINER, 2003). Segue,

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{i\kappa}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]F^{\mu\nu} - mc\right)\psi = 0 \tag{4.2}$$

Ou na forma lagrangiana,

$$\mathscr{L}_{OCD} = \bar{\psi}\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{i\kappa}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]F^{\mu\nu} - mc\right)\psi = 0 \tag{4.3}$$

Onde κ é uma constante chamada de momento magnético anômalo, expandindo o termo de $F^{\mu\nu}$ tem-se,

$$\begin{aligned}
\frac{i\kappa}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]F^{\mu\nu} &= \frac{i\kappa}{4}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\mu F^{\nu\mu}\right) &(4.4)\\
&= \frac{i\kappa}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}\right) &(4.5)\\
&= \frac{i\kappa}{2}\left(2\gamma_0\gamma_a F^{0a} + \gamma_a\gamma_b F^{ab}\right) &(4.6)\\
&= \frac{i\kappa}{2}\left(2\vec{\alpha}\vec{E} + \gamma_a\gamma_b\varepsilon^{ab}{}_c B^c\right) &(4.7)
\end{aligned}$$

Impondo campo magnético nulo e retornando da equação (4.2) à (4.1),

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - i\kappa\vec{\alpha}\vec{E} - mc\right)\psi = 0 \Rightarrow \tag{4.8}$$

$$i\hbar\left(\beta\frac{\partial}{\partial ct} + \beta\vec{\alpha}\vec{\nabla}\right)\psi = \left(+i\kappa\vec{\alpha}\vec{E} + mc\right)\psi \tag{4.9}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-i\hbar c\vec{\alpha}\vec{\nabla} - ic\kappa\vec{\alpha}\beta\vec{E} + \beta mc^2\right]\psi \tag{4.10}$$

$$H\psi = \left[c\vec{\alpha}\left(\vec{p} - i\kappa\beta\vec{E}\right) + mc^2\right]\psi \tag{4.11}$$

Comparando a equação (4.11)com a (4.1) é suficiente que $\vec{E} = m\omega\vec{r}/\kappa$. Pode-se, então, afirmar que o oscilador de Dirac aparece quando um férmion neutro é exposto a um campo elétrico radial e linear em $\vec{r}$.

Interessante citar que um campo elétrico linear, nada mais é do que campo no interior de uma distribuição de carga uniforme e esférica, uma aplicação direta da Lei de Gauss (CAVALCANTE, 2008).

Já o termo de interação completo $\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right] F^{\mu\nu}$, pode ser interpretado como o efeito residual da interação entre um campo eletromagnético com uma partícula neutra formada por elementos carregados (ROMERO *et al.*, 1999).

4.3 Teoria tipo Proca e simetrias de calibre

Como apresentado na seção anterior, a relação entre o oscilador de Dirac e o eletromagnetismo é íntima. Sendo assim, antes de discutir precisamente o acoplamento não-mínimo na forma SIM(2) covariante para um campo espinorial é necessário estabelecer uma estrutura formal para interações eletromagnéticas. A interpretação baseada em campos de calibre é altamente conveniente para estudar interações, utilizando-se do formalismo lagrangiano e da teoria de grupos para construir os termos de interação (ALDROVANDI; PEREIRA,).

O processo de construção dessa lagrangiana parte de um campo ϕ e considera uma grupo de simetria interna $(G, \cdot)$ com elementos $\exp[i\theta_a \mathbf{X}^a]$, nomeado de grupo de calibre. Utiliza-se técnicas de cálculo variacional para calcular a variação da densidade lagrangiana e, pelo princípio da miníma ação (GOLDSTEIN *et al.*, 2001), essa variação deve ser nula.

Tendo em vista o eletromagnetismo, opta-se por assumir que $(G, \cdot)$ é um grupo abeliano e local, ou seja, a operação do grupo é comutativa e os elementos são funções da posição. Essas são características do grupo U(1), o grupo de calibre do eletromagnetismo (SCHWICHTENBERG, 2018).

Começa-se a estudar a variação da lagrangiana pela variação do campo ϕ usando a equação 2.4 para o caso infinitesimal.

$$\phi'(r) = (\mathbf{I} + \delta\theta_a \mathbf{X}^a)\,\phi(r) \Rightarrow \tag{4.12}$$

$$\bar{\delta}\phi = \phi' - \phi = \delta\theta_a(x)\mathbf{X}^a\phi \tag{4.13}$$

Com o índice a variando no número de parâmetros do grupo, θ os parâmetros do grupo, $\mathbf{X}$ os geradores, $\bar{\delta}\phi$ a variação funcional do campo e $\delta\theta$ a variação total do parâmetro.

Seguindo o desenvolvimento apresentado na referência (ALDROVANDI; PEREIRA,), a variação total da densidade lagrangiana é

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\frac{\bar{\delta}\phi}{\delta\theta_a} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\frac{\bar{\delta}\left(\partial_\mu\phi\right)}{\delta\theta_a}. \tag{4.14}$$

Utilizando as relações, originadas de uma derivação por partes e da equação de Euler-Lagrange,

$$\begin{cases} \bar{\delta}\left(\partial_\mu\phi\right) = (\delta\theta^a)\mathbf{X}_a\partial_\mu\phi + \left(\partial_\mu\delta\theta^a\right)\mathbf{X}_a\phi \\ \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\mathbf{X}_a\phi + \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\mathbf{X}_i\partial_\mu\phi = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

Tem-se a variação da densidade lagrangiana não é nula,

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\left(\partial_\mu\delta\theta^a\right)i\mathbf{X}_a\phi \neq 0. \tag{4.16}$$

Para construir uma densidade lagrangiana invariante uma modificação é necessária. Em geral, faz-se uso de uma correção nos operadores derivadas, na forma de uma campo dito campo de calibre, a união das derivadas com o campo de calibre é o operador chamado de derivada covariante. Esse operador, para garantir a invariância da lagrangiana deve se transformar da mesma forma que o campo ϕ. Portanto, para a derivada covariante,

$$\bar{\delta}\left(D_\mu\phi\right) = (\delta\theta^a)i\mathbf{X}_a D_\mu\phi \tag{4.17}$$

A nova densidade lagrangiana é escrita como função das derivadas covariantes $\mathscr{L}' = \mathscr{L}'\left(\phi, D_\mu\phi\right)$ e é invariante sobre transformações da forma $\exp(i\theta_a\mathbf{X}^a)$. Vale ressaltar que ainda não foi definido a natureza do campo ϕ em questão.

Na prática, pode-se usar essas ideias para construir a lagrangiana de Proca que é uma generalização do eletromagnetismo de Maxwell. As duas simetrias a serem consideradas são a simetria de Lorentz, com uma representação vetorial ou $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (SCHWICHTENBERG, 2018), e simetria U(1)-local, com um elemento desse grupo dado por $\exp[if(R)]$ (um número complexo de módulo que é função do quadrivetor posição, onde f é uma função real).

Os invariantes são fáceis de serem construídos, tendo em vista que a representação vetorial é mais intuitiva. Os escalares são dados pela supressão dos índices do quadrivetor potencial (o campo que calibre em questão), consequências da transformação de Lorentz (2.37) (SCHWICHTENBERG, 2018). Desconsiderou-se os termos com $\partial^\mu A_\mu$, pois, podendo ser integrados, esses termos não afetam a ação e podem ser retirados da densidade lagrangiana

(GOLDSTEIN *et al.*, 2001). Os termos invariantes são

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_1 &= \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu; \\
\mathscr{I}_2 &= \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu; \\
\mathscr{I}_3 &= A^\mu A_\mu.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Sendo o tensor eletromagnético definido como $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, pode-se resumir os termos $\mathscr{I}_1$ e $\mathscr{I}_2$ como $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, dessa forma a densidade lagrangiana de Proca é dada pela a equação

$$\mathscr{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_\mu \nu + m^2 A_\mu A^\mu \tag{4.19}$$

Juntando com a lagrangiana de Dirac dada pela equação (3.20) cria-se uma lagrangiana não invariante,

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}\left(-mc + i\hbar\Gamma^\mu \partial_\mu\right)\Psi + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_\mu \nu + m^2 A_\mu A^\mu. \tag{4.20}$$

A derivada covariante que corrige essa lagrangiana deve ser tal que a equação (4.17) seja satisfeita, é suficiente que

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu. \tag{4.21}$$

Então, a lagrangiana invariante é

$$\mathscr{L}' = \bar{\Psi}\left(-mc + i\hbar\Gamma^\mu D_\mu\right)\Psi + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu \tag{4.22}$$

$$= \bar{\Psi}\left(-mc + i\hbar\Gamma^\mu \partial_\mu + i\hbar\Gamma^\mu A_\mu\right)\Psi + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu \tag{4.23}$$

Com o termo de interação que relaciona A_μ e Ψ sendo,

$$\mathscr{L}_{int} = \bar{\Psi} i\hbar\Gamma^\mu A_\mu \Psi \tag{4.24}$$

4.4 Acoplamento mínimo para o VSR

Como discutido na seção 2.6, os operadores locais invariante para SIM(2) também são invariantes para Lorentz, porém o operador não-local N_μ é invariante SIM(2) e não é para Lorentz, sendo assim esse operador possui papel fundamental na construção dos termos de interação.

Explorando a abordagem de campos de calibre e seguindo os artigos (ALFARO; RIVELLES, 2013a) (CHEON *et al.*, 2009) para um grupo de calibre U(1)-local, fixa um campo de calibre A_μ que se transforma como:

$$\bar{\delta}(A_\mu) = \left(\partial_\mu + \frac{\lambda N_\mu}{2}\right)\Phi \tag{4.25}$$

Onde λ é a constante que foi discutida no capítulo 3 e $\Phi(R)$ é o gerador do grupo U(1), isto é, um função qualquer da posição.

Um campo espinorial, nesse paradigma, se transforma por $\delta\Psi = \exp(-iq\Phi)\Psi$ (MALUF *et al.*, 2014), onde a exponencial complexa é exatamente um elemento do grupo U(1)-local. Sendo assim, a equação (4.17) deve ser reescrita como em (MALUF *et al.*, 2014),

$$\bar{\delta}\left(D_\mu\Psi\right) = (\delta\theta)\exp(-iq\Phi)D_\mu\Psi. \tag{4.26}$$

Como para $\lambda = 0$, deve-se retornar ao acoplamento mínimo de Lorentz da equação (4.21), tem-se então que a derivada covariante pode ser escrita como,

$$D_\mu\Psi = \left[\partial_\mu + iqA_\mu - \frac{iq\lambda n_\mu}{2}\left(\frac{nA}{(n\cdot\partial)^2}\right)\right]\Psi. \tag{4.27}$$

Associada à derivada covariante em questão, tem-se outro operador essencial para a construção da densidade lagrangiana, dado por

$$\widetilde{D}_\mu = \left[\partial_\mu + iqA_\mu - \frac{iq\lambda n_\mu}{2}\left(\frac{nA}{(n\cdot\partial)^2}\right)\right] + \frac{\lambda}{2}\frac{n_\mu}{n\cdot D} \tag{4.28}$$

Pois, quando se transcreve a lagrangiana livre para a lagrangiana com interação substituindo os termos de ∂_μ por D_μ surge o termo não-local $\frac{\lambda}{2}\frac{n_\mu}{n\cdot D}$, vide (CHEON *et al.*, 2009) e a discussão da seção anterior.

Com isso a densidade lagrangiana invariante segue a mudança $\partial_\mu \to \widetilde{D}_\mu$, então tem-se

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}\left(i\Gamma^\mu\widetilde{D}_\mu - m\right)\Psi. \tag{4.29}$$

4.5 Ideias para acoplamentos não-mínimos no VSR

A princípio, uma aplicação direta do padrão desenvolvido neste capítulo seria suficiente para encontrar a lagrangiana na interação, porém, como discutido na seção 4.2, fenomenologicamente é mais interessante estudar o oscilador de Dirac para férmions neutros, já que a equação 4.2 é um acoplamento não-mínimo.

Consequentemente, faz-se necessário a construção de mais um termo, um equivalente ao no tensor eletromagnético. Objetiva-se, dessa forma, construir um campo de força (*"field* *strenght"*) que seja invariante sobre transformações de calibre e seja não-local. O ponto de partida é observar que o termo $\widetilde{D}_\mu$ é equivalente a derivada covariante na seção 4.3. Baseando nisso o operador é $\widetilde{\partial}_\mu$ definido de forma semelhante a $\widetilde{D}_\mu$ como em (ALFARO; RIVELLES, 2013a), dado por:

$$\widetilde{\partial}_\mu = \partial_\mu + \frac{\lambda}{2} N_\mu. \tag{4.30}$$

E o termo de campo de força referente a esse novo operador derivada é

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{\mu\nu} = \widetilde{\partial}_\mu A_\nu - \widetilde{\partial}_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu + \frac{\lambda}{2} N_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{\lambda}{2} N_\nu A_\mu. \tag{4.31}$$

Sendo assim, um possível termo para o acoplamento não-mínimo é $\widetilde{\mathscr{F}}_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. A equação de movimento fica da forma,

$$\left(i\Gamma^\mu \widetilde{D}_\mu - \frac{i\kappa}{4} \widetilde{\mathscr{F}}_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] - m \right) \Psi = 0. \tag{4.32}$$

Resta resolver a equação diferencial e saber se os resultados replicam o oscilador de Dirac para a mecânica quântica relativística. Tal desenvolvimento pode ser efetuado em outros trabalhos.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

No presente trabalho, focou-se em apresentar a *"Very Special Relativity"*, justificar o interessante em futuras explorações dessa modelagem e até discutir possíveis equações de movimento para o oscilador de Dirac nesse contexto. Sempre reafirmando a relevância da Teoria de Grupos na construção da física de altas energias contemporânea.

Sendo o primeiro capítulo focado em motivar o trabalho e comentar a estrutura adotada. Os destaques do segundo capítulo foram a construção dos geradores do VSR e a exposição das propriedades dessa modelo, em especial o operador não-local N_μ.

Já no terceiro capítulo, buscou-se por garantir que a equação de Dirac livre fosse apresentada como uma consequência natural da escolha da representação do grupo de simetria no formalismo lagrangiano, tanto para a relatividade restrita quanto para a VSR.

Por fim, enfatiza-se a aplicação do grupo da **"Very Special Relativity"** para construção de um acoplamento mínimo e a discussão sobre um acoplamento não-mínimo que possivelmente reproduza o oscilador de Dirac.

Este trabalho cria inúmeras possibilidades para futuras aplicações do VSR. Algumas possibilidades são aplicações para potenciais eletromagnéticos distintos, para partículas de spin inteiro e discussões sobre os resultados do experimento KATRIN (AKER *et al.*, 2019).

REFERÊNCIAS

ADAMSON, P.; ANDREOPOULOS, C.; ARMSTRONG, R.; AUTY, D. J.; AYRES, D. S.; BACKHOUSE, C.; BARR, G.; BISHAI, M.; BLAKE, A.; BOCK, G. J.; BOEHNLEIN, D. J.; BOGERT, D.; CAVANAUGH, S.; CHERDACK, D.; CHILDRESS, S.; CHOUDHARY, B. C.; COELHO, J. A. B.; COLEMAN, S. J.; CORWIN, L.; CRONIN-HENNESSY, D.; DANKO, I. Z.; JONG, J. K. de; DEVENISH, N. E.; DIWAN, M. V.; DORMAN, M.; ESCOBAR, C. O.; EVANS, J. J.; FALK, E.; FELDMAN, G. J.; FROHNE, M. V.; GALLAGHER, H. R.; GOMES, R. A.; GOODMAN, M. C.; GOUFFON, P.; GRAF, N.; GRAN, R.; GRANT, N.; GRZELAK, K.; HABIG, A.; HARRIS, D.; HARTNELL, J.; HATCHER, R.; HIMMEL, A.; HOLIN, A.; HUANG, X.; HYLEN, J.; ILIC, J.; IRWIN, G. M.; ISVAN, Z.; JAFFE, D. E.; JAMES, C.; JENSEN, D.; KAFKA, T.; KASAHARA, S. M. S.; KOIZUMI, G.; KOPP, S.; KORDOSKY, M.; KREYMER, A.; LANG, K.; LEFEUVRE, G.; LING, J.; LITCHFIELD, P. J.; LITCHFIELD, R. P.; LOIACONO, L.; LUCAS, P.; MANN, W. A.; MARSHAK, M. L.; MAYER, N.; MCGOWAN, A. M.; MEHDIYEV, R.; MEIER, J. R.; MESSIER, M. D.; MICHAEL, D. G.; MILLER, W. H.; MISHRA, S. R.; MITCHELL, J.; MOORE, C. D.; MORFÍN, J.; MUALEM, L.; MUFSON, S.; MUSSER, J.; NAPLES, D.; NELSON, J. K.; NEWMAN, H. B.; NICHOL, R. J.; NOWAK, J. A.; OLIVER, W. P.; ORCHANIAN, M.; OSPANOV, R.; PALEY, J.; PATTERSON, R. B.; PAWLOSKI, G.; PEARCE, G. F.; PETYT, D. A.; PHAN-BUDD, S.; PLUNKETT, R. K.; QIU, X.; RATCHFORD, J.; RAUFER, T. M.; REBEL, B.; RODRIGUES, P. A.; ROSENFELD, C.; RUBIN, H. A.; SANCHEZ, M. C.; SCHNEPS, J.; SCHREINER, P.; SHANAHAN, P.; SMITH, C.; SOUSA, A.; STAMOULIS, P.; STRAIT, M.; TAGG, N.; TALAGA, R. L.; THOMAS, J.; THOMSON, M. A.; TINTI, G.; TONER, R.; TZANAKOS, G.; URHEIM, J.; VAHLE, P.; VIREN, B.; WEBER, A.; WEBB, R. C.; WHITE, C.; WHITEHEAD, L.; WOJCICKI, S. G.; YANG, T.; ZWASKA, R. *Measurement of the Neutrino Mass Splitting and Flavor Mixing by MINOS*. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 106, p. 181801, May 2011. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.181801>.

AHLUWALIA, D.; HORVATH, S. *Very special relativity as relativity of dark matter: The Elko connection*. **Journal of High Energy Physics**, v. 2010, p. 1–19, 11 2010.

AKER, M.; ALTENMüLLER, K.; ARENZ, M.; BABUTZKA, M.; BARRETT, J.; BAUER, S.; BECK, M.; BEGLARIAN, A.; BEHRENS, J.; BERGMANN, T.; BESSERER, U.; BLAUM, K.; BLOCK, F.; BOBIEN, S.; BOKELOH, K.; BONN, J.; BORNSCHEIN, B.; BORNSCHEIN, L.; BOUQUET, H.; BRUNST, T.; CALDWELL, T. S.; CASCIO, L. L.; CHILINGARYAN, S.; CHOI, W.; CORONA, T. J.; DEBOWSKI, K.; DEFFERT, M.; DESCHER, M.; DOE, P. J.; DRAGOUN, O.; DREXLIN, G.; DUNMORE, J. A.; DYBA, S.; EDZARDS, F.; EISENBLäTTER, L.; EITEL, K.; ELLINGER, E.; ENGEL, R.; ENOMOTO, S.; ERHARD, M.; EVERSHEIM, D.; FEDKEVYCH, M.; FELDEN, A.; FISCHER, S.; FLATT, B.; FORMAGGIO, J. A.; FRäNKLE, F. M.; FRANKLIN, G. B.; FRANKRONE, H.; FRIEDEL, F.; FUCHS, D.; FULST, A.; FURSE, D.; GAUDA, K.; GEMMEKE, H.; GIL, W.; GLüCK, F.; GöRHARDT, S.; GROH, S.; GROHMANN, S.; GRöSSLE, R.; GUMBSHEIMER, R.; MINH, M. H.; HACKENJOS, M.; HANNEN, V.; HARMS, F.; HARTMANN, J.; HAUßMANN, N.; HEIZMANN, F.; HELBING, K.; HICKFORD, S.; HILK, D.; HILLEN, B.; HILLESHEIMER, D.; HINZ, D.; HöHN, T.; HOLZAPFEL, B.; HOLZMANN, S.; HOUDY, T.; HOWE, M. A.; HUBER, A.; JANSEN, A.; KABOTH, A.; KARL, C.; KAZACHENKO, O.; KELLERER, J.; KERNERT, N.; KIPPENBROCK, L.; KLEESIEK, M.; KLEIN, M.; KöHLER, C.; KöLLENBERGER, L.; KOPMANN, A.; KORZECZEK, M.; KOSMIDER, A.; KOVALí, A.; KRASCH, B.; KRAUS, M.; KRAUSE, H.; KUCKERT, L.; KUFFNER, B.; KUNKA, N.;

LASSERRE, T.; LE, T. L.; LEBEDA, O.; LEBER, M.; LEHNERT, B.; LETNEV, J.; LEVEN, F.; LICHTER, S.; LOBASHEV, V. M.; LOKHOV, A.; MACHATSCHEK, M.; MALCHEREK, E.; MüLLER, K.; MARK, M.; MARSTELLER, A.; MARTIN, E. L.; MELZER, C.; MENSHIKOV, A.; MERTENS, S.; MINTER, L. I.; MIRZ, S.; MONREAL, B.; GUZMAN, P. I. M.; MüLLER, K.; NAUMANN, U.; NDEKE, W.; NEUMANN, H.; NIEMES, S.; NOE, M.; OBLATH, N. S.; ORTJOHANN, H. W.; OSIPOWICZ, A.; OSTRICK, B.; OTTEN, E.; PARNO, D. S.; II, D. G. P.; PLISCHKE, P.; POLLITHY, A.; POON, A. W. P.; POURYAMOUT, J.; PRALL, M.; PRIESTER, F.; RöLLIG, M.; RöTTELE, C.; RANITZSCH, P. C. O.; REST, O.; RINDERSPACHER, R.; ROBERTSON, R. G. H.; RODENBECK, C.; ROHR, P.; ROLL, C.; RUPP, S.; RYSAVY, M.; SACK, R.; SAENZ, A.; SCHäFER, P.; SCHIMPF, L.; SCHLöSSER, K.; SCHLöSSER, M.; SCHLüTER, L.; SCHöN, H.; SCHöNUNG, K.; SCHRANK, M.; SCHULZ, B.; SCHWARZ, J.; SEITZ-MOSKALIUK, H.; SELLER, W.; SIBILLE, V.; SIEGMANN, D.; SKASYRSKAYA, A.; SLEZAK, M.; SPALEK, A.; SPANIER, F.; STEIDL, M.; STEINBRINK, N.; STURM, M.; SUESSER, M.; SUN, M.; TCHERNIAKHOVSKI, D.; TELLE, H. H.; THüMMLER, T.; THORNE, L. A.; TITOV, N.; TKACHEV, I.; TROST, N.; URBAN, K.; VENOS, D.; VALERIUS, K.; VANDEVENDER, B. A.; VIANDEN, R.; HERNANDEZ, A. P. V.; WALL, B. L.; WüSTLING, S.; WEBER, M.; WEINHEIMER, C.; WEISS, C.; WELTE, S.; WENDEL, J.; WIERMAN, K. J.; WILKERSON, J. F.; WOLF, J.; XU, W.; YEN, Y. R.; ZACHER, M.; ZADOROZHNY, S.; ZBORIL, M.; ZELLER, G. ***An improved upper limit on the neutrino mass from a direct kinematic method by KATRIN***. 2019.

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. *Notes for a Course on Classical Fields* . **Apostila, IFT (Instituto de Física Teórica), Sao Paulo, Brazil**.

ALFARO, J.; RIVELLES, V. *Non Abelian Fields in Very Special Relativity*. **Physical Review D**, v. 88, 05 2013.

ALFARO, J.; RIVELLES, V. *Very Special Relativity and Lorentz Violating Theories*. **Physics Letters B**, v. 734, 06 2013.

BELICH, H.; COSTA-SOARES, T.; SANTOS, M.; ORLANDO, M. Violação da simetria de lorentz. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, 01 2007.

BUFALO, R.; UPADHYAY, S. *Axion Mass Bound in Very Special Relativity*. **Physics Letters B**, v. 772, 07 2017.

CAVALCANTE, R. V. M. **Oscilador de Dirac: Implicações da Violação da Simetria de Lorentz e da Massa Dependente da Posição.** 2008. Dissertação (Mestrado em Física) — Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008.

CHEON, S.; LEE, C.; LEE, S. J. *SIM(2)-invariant modifications of electrodynamic theory*. **Physics Letters B**, v. 679, n. 1, p. 73–76, 2009.

COHEN, A.; GLASHOW, S. *Very Special Relativity*. **Physical review letters**, v. 97, p. 021601, 08 2006.

COHEN, A. G.; GLASHOW, S. L. ***A Lorentz-Violating Origin of Neutrino Mass?*** 2006.

CUZINATTO, R. R.; MONTIGNY, M. de; POMPEIA, P. J. *Non-commutativity and non-inertial effects on the Dirac oscillator in a cosmic string space–time*. **General Relativity and Gravitation**, Springer Science and Business Media LLC, v. 51, n. 9, Aug 2019.

DARTORA, C.; JIMENEZ, M. J. S.; ZANELLA, F. Os fundamentos da física dos férmions de Dirac sem massa em (1+ 2)-d e o grafeno. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 3, p. 3301, 2015.

DVORNIKOV, M. ***Neutrino oscillations in gravitational waves***. 2019.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. L. ***Classical mechanics***. 3. ed. [S.l.]: Pearson, 2001. v. 1.

GREINER, W. ***Relativistic quantum mechanics: wave equations***. 3. ed. [S.l.]: World Pub. Corporation, 2003.

GRIFFITHS, D. ***Introduction to Quantum Mechanics***. Pearson Prentice Hall, 2005. (Pearson international edition). ISBN 9780131118928. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-BsvAQAAIAAJ>.

HALL, B. C. ***Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction***. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2015.

HARITHA, K.; CHAITANYA, K. V. S. S. ***Relativistic Potentials with Rational Extensions***. 2019.

KIM, Y.; LEE, C.; LEE, I.; LEE, J. *Brane World of Warp Geometry: An Introductory Review*. **Journal of the Korean Astronomical Society**, 08 2003.

LICCIARDI, C. A. P. D. B. **Estudo Analítico da Probabilidades de Oscilações de Neutrinos na Matéria em Três Gerações.** 2007. Dissertação (Mestrado em Física) — Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, 2007.

MAKI, Z.; NAKAGAWA, M.; SAKATA, S. *Remarks on the Unified Model of Elementary Particles*. **Progress of Theoretical Physics**, v. 28, 11 1962.

MALUF, R.; SILVA, J.; CRUZ, W.; ALMEIDA, C. *Dirac equation in very special relativity for hydrogen atom*. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 738, p. 341–345, Nov 2014. ISSN 0370-2693. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2014.09.059>.

MOSHINSKY, M.; SZCZEPANIAK, A. T*he Dirac oscillator*. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 22, p. L817, 01 1999.

NETO, J. B. **Matemática para físicos com aplicações**. 1. ed. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. v. 1.

NOETHER, E.; TAVEL, M. *Invariant Variation Problems*. **Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse 1918: p. 235-237**, -1, 03 2005.

PAL, P. B. *Dirac, Majorana, and Weyl fermions*. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 79, n. 5, p. 485–498, May 2011. ISSN 1943-2909. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1119/1.3549729>.

RINDLER, W. ***Relativity special,general, and cosmological***. 2. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2016.

ROMERO, R. Martínez-y; NUñEZ-YEPEZ, H.-N.; SALAS-BRITO, A. *Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator*. **European Journal of Physics**, v. 16, 08 1999.

Rubin, V. C.; Ford W. KENT, J. *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*. v. 159, p. 379, fev. 1970.

RYDER, L. H. ***Quantum field theory***. w. [S.l.: s.n.], 2014.

SCHWICHTENBERG, J. ***Physics from symmetry***. [S.l.]: Springer., 2018.

SOLOMEY, N. ***The elusive neutrino: a subatomic detective story***. 1. ed. [S.l.]: Scientific American Library, 1997.

SREDNICKI, M. A. ***Quantum field theory***. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

TAYLOR, J. R. **Mecânica Clássica**. 1. ed. [S.l.]: University Science Books, 2002.

TUNG, W.-K. ***Group theory in physics***. 1. ed. [S.l.]: World Scientific, 1985.