

## UMA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA FEDATHI NO ENSINO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR NO IFCE

**Francisco Regis Vieira Alves<sup>1</sup>**

Endereço: Rua Monsenhor Otávio de Castro, nº 21, ap.  
402, CEP: 60.150-050  
fregis@ifce.edu.br

**Hermínio Borges Neto<sup>2</sup>**

Endereço: Rua Leonardo Brandão, nº 188, apt. 200,  
CEP: 60.170-040  
herminio@ufc.br

**Marcília Chagas Barreto<sup>3</sup>**

Endereço: Conselheiro Tristão, nº 25. CEP: 60.120.100  
marcilia\_barreto@yahoo.com.br

### RESUMO

O presente artigo constitui-se uma discussão teórica a respeito de alguns elementos didáticos e metodológicos relacionados à noção de progressões geométricas. Tal conteúdo de estudo, obrigatório no ensino escolar, constitui-se elemento importante do saber específico do futuro professor de Matemática. Parte dos aspectos metodológicos discutidos aborda inclusive a questão da qualidade do livro didático e do uso de tecnologias no ensino intuitivo do referido conceito. São apresentadas também algumas considerações relacionadas à aplicação da metodologia de ensino chamada Sequência Fedathi. Sua utilização exemplifica determinados momentos do ensino/aprendizagem que promovem a intuição do estudante e buscam responder a determinados questionamentos corriqueiros no ambiente de formação de professores de Matemática, tais como: De que modo ensinar progressões geométricas? Que metodologia se deve empregar? Estas perguntas parecem naturais para um futuro professor,

<sup>1</sup> Licenciado e Bacharel em Matemática (UFC), Mestre em Matemática Pura e Mestre em Educação com ênfase no ensino de Matemática. Doutorando em Educação com ênfase no ensino de Matemática em nível superior (UFC) e professor do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE.

<sup>2</sup> Mestre em Matemática Pura, Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Pós-doutorado em Educação Matemática na Universidade Paris V e coordenador do programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará – UFC.

<sup>3</sup> Professora do departamento de Educação da Universidade Estadual do Ceará – UECE. Coordenadora do programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (UECE), doutora em Educação com ênfase no ensino de Matemática (UFC).

entretanto discutem-se também algumas dissertações e teses, inclusive produzidas em outros países, que apontam problemas na formação acadêmica e não preparam o licenciando para responder a estes e a outros questionamentos específicos. Por fim, apresentam-se as considerações finais e recomendações para o futuro professor egresso do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

**Palavras-Chave:** Progressões Geométricas, Ensino, Formação do Professor.

### ABSTRACT

*This article provides a theoretical discussion about teaching and methodological elements related to the concept of geometric progressions. This content of study, compulsory in school education, is an important element of specific knowledge for future Mathematics teachers. Some of the methodological aspects discussed include the issues of quality of textbooks and the use of technology in the intuitive teaching of the referred concept. Some considerations related to the application of the learning methodology called Fedathi's Sequence are also presented. Its use exemplifies certain moments of the teaching/learning process which promote student's intuition and try to answer particular questions which are recurrent in the training environment of Mathematics teachers, such as: How do you teach geometric progressions? Which methodology should be employed? These questions seem natural for a future teacher. However, theses and dissertations are also discussed, some of them produced in other countries, which indicate problems in the academic studies and do not prepare the teachers-to-be to answer these and other specific questions. Finally, there are the final considerations and recommendations for the future teacher who graduates from the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceará - IFCE.*

**Keywords:** Geometric progression, Education, Teacher Training.

## 1 O ENSINO DE *PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS* E O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

Na maioria dos casos, ao finalizar um período árduo de estudo no ambiente acadêmico, com duração entre 3 a 4 anos, caracterizado por um contato com teorias de natureza específica e pedagógica, o professor recém-formado adota, tradicionalmente, como principal instrumento e recurso em sala de aula, o livro didático.

Lima (2001, p. 462) reforça nosso argumento ao caracterizar, o hábito do professor, quando declara que:

*O livro didático é o instrumento essencial utilizado pelo professor para realizar o seu trabalho. Dele são tiradas as listas de exercícios, é nele que estão as definições, os exemplos, as observações, as demonstrações e a linguagem a ser usada na comunicação com a classe.*

Será neste momento também que o professor de Matemática viverá o ápice de sua formação, que se caracteriza pelo encontro e o estabelecimento da relação do seu *saber científico*, construído na academia, com um *saber prático*, situacional, dinâmico e improvisado na realidade escolar.

Para nós esta será justamente a ocasião do desvelamento de um problema relacionado com a sua formação que evolui paulatinamente, e que cresce como uma “bola de neve” desde o início da graduação. Tal problema diz respeito a uma formação dicotômica e estanque

Por outro lado, não estamos interessados neste trabalho de modo específico na análise da formação (*disciplinas específicas x disciplinas pedagógicas*). Nosso interesse se volta de modo especial ao principal e único instrumento de trabalho do professor de Matemática, que, como já mencionamos, é o livro didático. Desde que se torna inexequível uma análise que abrangesse todo o conteúdo do ensino médio, nos restringiremos ao conceito ordinariamente chamado *progressões geométricas* P. G. contido no bojo das *disciplinas específicas*.

Que sabemos sobre a qualidade do livro didático? Que cursos de licenciatura, no Brasil, dedicam disciplinas ou pelo menos um espaço da carga horária destinada à aproximação, compreensão, análise e reflexão sobre o livro didático? De que modo a adoção acrítica deste instrumento didático

compromete o ensino/aprendizagem? Por fim, como anda a qualidade do livro didático e de que modo esta qualidade influenciará e condicionará a *práxis* do recém-professor relativa ao ensino de *progressões* ?

Este último questionamento adquire significado destacado diante das colocações de Lima (2001, p. 462) quando alerta para a noção de que *a qualidade do ensino e, conseqüentemente, a formação adquirida pelo aluno dificilmente serão superiores ao nível e à qualidade média dos livros didáticos disponíveis.*

Para formarmos uma opinião mais abalizada sobre o assunto, vejamos o que o matemático brasileiro Elon Lages Lima nos informa quando faz referência ao conteúdo de *progressões geométricas*. Lima (2001, p. 464) afirma que *não é feita a conexão entre P.G. e função exponencial nem são oferecidos problemas não artificiais que exibam situações de fato onde se poderia usar P.G. s ou funções exponenciais.*

Ao analisar a obra de Bonjorno & Giovanni, vol. 1, Lima (2001, p. 177) afirma que:

*Tal como acontecia nas progressões aritméticas, a classificação das progressões geométricas é extravagante: uma progressão não é crescente por ser uma sequência crescente; é crescente, por definição, por ter  $q > 1$  e  $a_1 > 0$  (ou  $0 < q$  e  $a_1 < 0$ ), e não se faz nenhuma ligação com as noções de função crescente e decrescente, já vistas no mesmo volume. [...] O termo geral é apenas conjecturado a partir de exemplos, e indevidamente generalizado. (p. 177)*

Os excertos acima constituem pequena parte da análise dos livros do ensino médio, realizada por Lages, e uma equipe de professores e pesquisadores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada – (IMPA). Não pressupomos que este grupo de renomados pesquisadores, conhecidos internacionalmente, detenham a verdade. O ponto que nos chama a atenção é que, de um modo ou de outro, o professor recém-formado em curso de licenciatura deveria adquirir, na graduação, uma capacidade suficiente para perceber os elementos apontados por estes especialistas e, principalmente, as conseqüências para o ensino/aprendizagem da Matemática na escola.

Por exemplo, as conseqüências de um aprendizado baseado *na relutância dos autores*

em apresentar sequências como funções, pois estão sempre usando fórmulas para exprimir o *n*-ésimo termo como função de *n* (LIMA, 2001, p. 279); ou as consequências de o aluno adquirir a concepção de que toda “lei de formação” é a mesma coisa que “fórmula algébrica”; ou, ainda, o efeito nocivo da aprendizagem baseada na aplicação de fórmulas em que, quase sempre, se desconhecem os argumentos lógico-formais, que garantem determinada propriedade ou comportamento conceitual de determinado objeto matemático, dentro de uma teoria.

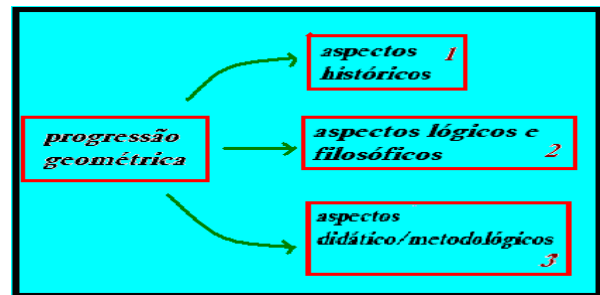
Os elementos que indicamos podem constituir-se erros conceituais, e uma má aprendizagem influenciada pelo livro didático comprometerá a formação do profissional. A consequência disto se manifestará dentro da sala de aula, e é ali, conforme nos adverte Sfard (2008, p. 202) que *o discurso é estabelecido pelo professor, que é a pessoa cuja especialidade no discurso cria uma posição de relativo poder e autoridade*. Deste modo, equivocado ou não, os alunos sempre acreditam na palavra do mestre.

A realidade é que este professor<sup>1</sup> recém-formado (e mesmo os que já se encontram em serviço há tempos) não percebe a gravidade ou os entraves que podem incidir sobre, por exemplo, a aprendizagem de uma *definição matemática* incorreta. Este e outras temas são consequência de uma formação acadêmica centrada no ensino, em detrimento da aprendizagem. Todo o conteúdo pedagógico estudado no curso de licenciatura em Matemática lhe fornece respostas abundantes a questões teóricas, extrassala e num âmbito geral, mas em nada esclarecem sobre uma aprendizagem matemática incorreta ou uma técnica inadequada de metodologia, muito menos uma avaliação específica sobre *progressões geométricas*.

Neste trabalho, não tencionamos entrar em temas de natureza mais geral. Nossa preocupação aqui se restringe a determinados aspectos didáticos e metodológicos sobre o ensino de *progressões geométricas*. Perspectivando tal assunto com um olhar de um não incipiente, contudo, afirmamos que, para se compreender determinados aspectos relacionadas ao ensino de um conteúdo

determinado, torna-se premente a compreensão de sua gênese histórica.

Uma vez surgido um conceito, necessitamos da análise lógica e filosófica, de um exame do porquê e da natureza de sua existência. Finalizada esta etapa, o objeto matemático, que, neste caso, se chama *progressões geométricas*, receberá um tratamento com vistas ao ensino. Por fim, intervêm os componentes didáticos.



**Ilustração 1:** Trajetória requerida para a compreensão do conceito

A trajetória<sup>2</sup> descrita na ilustração 1 indica o que deveria ocorrer na formação acadêmica deste professor, todavia, este percurso é frequentemente ignorado. De fato, sabe-se que, na prática, conceito de P.G. é apresentado ao aluno *en passant*, uma vez que se trata de um conteúdo estudado na escola.

Mesmo quando é realizado o estudo aprofundado nos conteúdos do Ensino Médio, o licenciando continua seguindo o mesmo roteiro curricular, escolar, ou seja, ele estuda, por exemplo, o conteúdo de *funções* desarticulado do conteúdo de *progressões*. Aí, diante de uma formação específica pobre em relações conceituais dentro da própria matemática, deparamos um discurso ingênuo na mídia, que busca compreender por que o ensino de Matemática vai de mal a pior. Por que o pensamento predominante no ensino escolar é o *algorítmico* e não o conceitual?

O filósofo, matemático e educador Michael Otte explica que:

*Diametralmente oposto ao pensamento conceitual e a evidência intuitiva, está o pensamento algorítmico. [...] O pensamento algorítmico não se objetiva na evidência, mas no sucesso, e ele não pode saber de antemão se será bem sucedido ou falhará. O*

<sup>1</sup> Gomez (2007) sublinha em sua tese que *o tratamento dos conteúdos matemáticos escolares surge da consideração sobre a noção de currículo. Se analisam e discutem diversas posições acerca da Matemática como disciplina, a Matemática escolar, a aprendizagem e a avaliação. A reflexão sobre o ensino é permanente, uma vez que se começa a trabalhar sobre as diferentes fases da análise didática*. A realidade da formação do professor no Estado do Ceará ainda se encontra distante do quadro descrito pelo espanhol Pedro Gomez.

<sup>2</sup> A trajetória acima foi inspirada nas considerações de Gondino (2003, p. 17), quando explica que *a principal característica da Didática da Matemática é sua extrema complexidade*. Gondino adota o enfoque antropológico na Didática, com influência de Yves Chevallard, que *considera a Matemática como uma atividade humana, que se desenvolve no seio de certas instituições e com o concurso de determinados instrumentos*.

*conhecimento algorítmico é o conhecer sem a percepção. Os algoritmos são relacionados apenas funcionalmente à realidade objetiva; eles não explicam nada* (OTTE, 1991, p. 285).

*educação, para alguns autores, estes projetos não tiveram êxito e não provocaram mudanças no sentido de romper o hábito milenar da educação do falar/ditar dos professores. (p. 12)*

Em nossa discussão, o argumento trazido por Otte ganha significação nas situações em que o aluno pode adquirir a habilidade de formular inúmeras questões envolvendo a *soma dos termos* de uma P.G. ou uma grande quantidade de questões, principalmente dos concursos vestibulares, entretanto, não necessariamente ele saberá fornecer uma significação maior do objeto matemático em tese, muito menos com que conceitos a noção de *progressões* se relaciona e/ou depende.

Perspectiva semelhante é encontrada em Brousseau (2005), Duval (1996) e Gondino (2003; 2004). Gondino (2004) lembra que, do ponto de vista da Educação Matemática, um tema fundamental consiste na determinação de uma didática efetiva de técnicas de resolução de problemas associadas com uma *definição matemática*. A eficiência, conforme Gondino, Lacasta & Wilhelmi (2007, p. 73) é atingida levando-se em conta o *epistêmico* (campo de aplicação das técnicas), o *cognitivo* e o *instrucional* (fontes materiais e tempo necessário para o ensino). Até certo ponto, o fracasso no ensino de Matemática é conseqüência do privilegiamento extremo do componente *epistêmico*. Na próxima seção, traremos alguns argumentos que poderiam auxiliar na diminuição dos efeitos nocivos do privilegiamento do *campo epistêmico*.

## 2 O ENSINO DE MATEMÁTICA COM O RECURSO TECNOLÓGICO

Valente (2002) analisa e compara a inserção do aparato tecnológico no contexto da formação de professores em países como França, Estados Unidos e Brasil. Ele lembra que *a formação de professores voltada para o uso pedagógico do computador nos Estados Unidos não aconteceu de maneira sistemática e centralizada como na França.* (p. 8), destaca, no entanto, que nestes dois países, os professores participaram de um profundo processo de formação, diferentemente do caso brasileiro.

Mais adiante, Valente (2002) ressalta que:

*Embora na França tenham sido propostos inúmeros projetos de informática na*

Diante das colocações de Valente, que permite nossa realidade afirmar no que diz respeito ao ensino de Matemática aliado à tecnologia? Como anda a formação, em nossas instituições, do professor de Matemática com vistas ao domínio desta tecnologia no sentido de potencializar o seu ensino?

Valente descreve um pressuposto interessante no seu livro, ao lembrar que o ensino assistido ou auxiliado por computador parte do pressuposto de que a informação é a unidade fundamental no ensino e, *portanto, preocupa-se com os processos de como adquirir, armazenar, representar e principalmente transmitir informação.* (2002, p. 52)

Esta perspectiva deveria influenciar o olhar do professor não apenas no momento de utilização do computador, mas também, em todos os momentos. De modo equivocado, a unidade fundamental do ensino de Matemática é o próprio conteúdo, como um resquício da influencia da corrente *filosófica formalista*<sup>1</sup>.

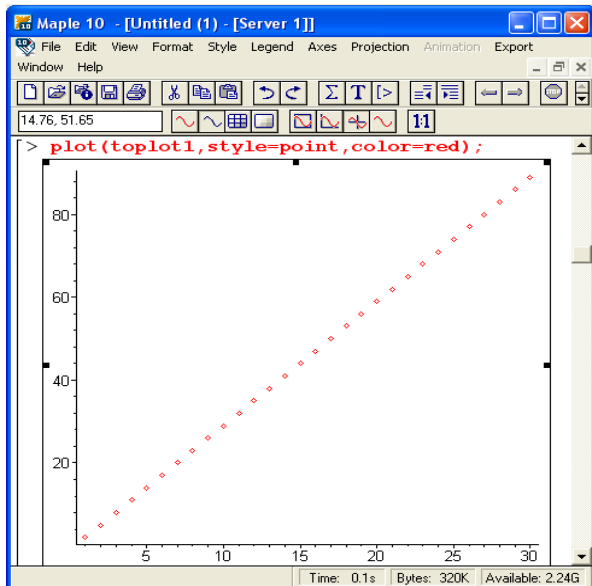
Como conseqüência nefasta desta corrente, vemos uma predominante preocupação com o *produto* do que com o *processo matemático*. Assim, o ensino presencial de Matemática escolar continua a ser guiado e pautado pelo *pensamento algorítmico*, tal qual descrito por Otte, com ênfase na *dimensão epistêmica* do saber.

Outro dado recente e preocupante diz respeito ao fato de alguns estudos indicarem que as dificuldades dos alunos no ambiente presencial se mantém no ambiente virtual. De fato, Lorezón (2009, p. 234) ao se referir a este ambiente, nos informa que:

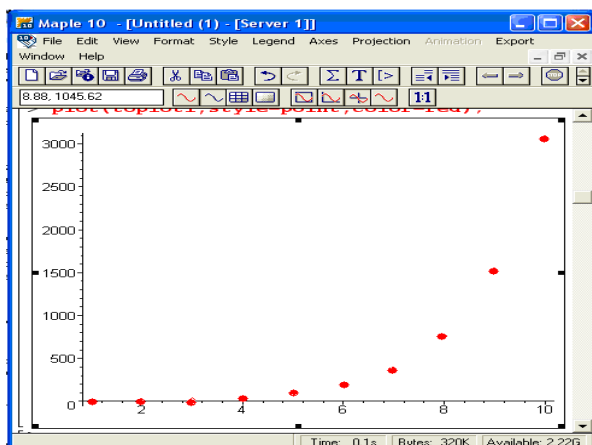
*Uma das dificuldades se radica na ideia de demonstração matemática é não apenas um conceito novo mas por demais complexo, os alunos consideram que a análise de um caso particular, o estudo de alguns exemplos, a realização de medições e a visualização, são suficientes para se demonstrar.*

<sup>1</sup> Ernest (1991, p. 10) explica que, na perspectiva formalista, *a Matemática é um jogo formal sem significado, que usa marcas no papel e que obedece regras.* Deste modo, para um professor que privilegia tal ponto de vista, não há uma preocupação com a construção do significado dos conceitos por parte do aluno, contrariando vários pressupostos piagetianos.

Parece evidente, mas vale destacar que o formador de professores num curso de Licenciatura, no ambiente virtual, além de uma formação razoável em Matemática<sup>1</sup>, deve dominar as tecnologias, ao ponto de identificar suas potencialidades e limitações. Por exemplo, na ilustração abaixo, vemos o gráfico das funções  $f(n) = 3n - 1$  e  $g(n) = 3 \cdot 2^n$ . No computador, temos a vantagem de transmitir o caráter linear (ilustração 2) e o caráter exponencial (ilustração 3) que se prolonga no plano.



**Ilustração 2:** Comparação geométrica do crescimento de uma P.A.



**Ilustração 3:** Crescimento da P. G. gerada por software

Uma vantagem inquestionável do *software* é a possibilidade de promoção da aprendizagem por

<sup>1</sup> Quando mencionamos formação razoável, fazemos referência explícita ao nível de mestrado/doutorado. Afinal, um especialista sabe que determinados conteúdos do curso de graduação só são compreendidos e bem fixados/amadurecidos com uma formação de pós-graduação.

meio da visualização. Borba & Villareal (2005, p. 165) lembram que *escutam na voz dos próprios estudantes ao expressarem a sua opinião sobre o uso do computador em Matemática, acrescentando que a visualização é a sua principal vantagem.*

Por outro lado, mesmo diante do extremo avanço tecnológico e a diversidade de experiências educacionais no ensino da Matemática aliada à tecnologia, aparentemente, no ambiente acadêmico, continuamos no *Paleolítico*. De fato, qual instituição no Estado do Ceará, forma o licenciado em Matemática, preparando-o, de modo concreto e efetivo, para o uso da tecnologia em sala de aula?<sup>2</sup>

O fato é que é bem mais cômodo para o professor apertar o “piloto automático”<sup>3</sup> e desenvolver todo o seu curso de modo pragmático, restrito ao livro didático, este que já apresenta uma qualidade duvidosa, segundo Lima. Encontramos uma questão semelhante suscitada por Borba & Villareal (2005, p. 171) quando questionam:

*Os professores estabelecem uma abordagem tradicional, isto é, começando com a teoria e progredindo para os exemplos e exercícios, no caso da Matemática, ou simplesmente eles empregam abordagens alternativas?*

A resposta para esta pergunta é óbvia, uma vez que, o ensino investigativo de Matemática requer tempo, paciência e dedicação. E estes elementos e hábitos nem sempre são construídos no ambiente de formação de professores. Além disto, abordagem subsidiada com um recurso tecnológico exige um saber e compreensão da natureza, potencialidades e características pedagógicas do *software*. Neste sentido, Valente (2002, p. 89) explica que *a aprendizagem por ocorrer de duas maneiras: a informação é memorizada ou é processada pelos esquemas mentais e esse processamento acaba enriquecendo esses esquemas.*

O fato de ocorrer o uso do computador na sala de aula, ou, de modo mais específico, numa aula de *progressões*, como damos ênfase aqui, não evita completamente uma aula tradicional de

<sup>2</sup> Figueiredo (2007, p. 272) identifica no relato dos licenciandos que participaram de sua investigação a necessidade de uma formação que os prepare para abordagens didáticas dos conteúdos de Álgebra, da Educação Básica. Imaginemos, então, como deve ser a carência de uma didática para o uso da informática na aula de Matemática.

<sup>3</sup> Utilizamos este termo fazendo referência ao ritual desenvolvido nas aulas de Matemática, descrito de forma interessante na tese de Caruso (2002, p. 42).

Matemática, fundada no primeiro tipo de aprendizagem descrita por Valente. Embora o seu uso pelo professor e a dificuldade em integrá-lo nas atividades de sala de aula continua sendo tímido, *como consequência* de uma compreensão limitada do conteúdo que ministram. (VALENTE, 2002, p. 23)

Na próxima parte, discutiremos a maneira como o conhecimento matemático pode ser mediado de modo intuitivo/formal, inclusive com o uso da tecnologia.

### 3 A INTUIÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A espécie de raciocínio intuitivo, conforme Fischbein (1999, p. 11) foi o objeto de interesse de vários filósofos. Dentre eles, merecem destaque: René Descartes, Spinoza, Emanuel Kant, Henri Bergson, Hans Hahn e Mario Bunge. Por outro lado, psicólogos têm demonstrado pouco interesse pela teoria do conhecimento intuitivo.

Não vamos aprofundar-nos na perspectiva filosófica das figuras emblemáticas destacadas pelo não menos importante pesquisador israelense Efrain Fishbein. Deter-nos-emos ao viés filosófico do termo *intuição*, segundo a perspectiva de Parsons (2008). Suas concepções podem fornecer elementos auspiciosos para o professor de Matemática.

Parsons (2008, p. 139) destaca a ideia de que em Matemática, existem aqueles que defendem o poder da intuição matemática e os que a atacam. Ele explica que *na tradição filosófica, a intuição é mencionada na relação com os objetos e na relação com as proposições*. Parsons adota os termos “*intuition of*” e “*intuition that*”.

Lembra que, *quando um filósofo fala de sua ou suas intuições, usualmente isto significa que uma pessoa interessada é inclinada a acreditar no princípio de sua inquirição; ou como um matéria do sentido comum, uma intuição não precisa ser verdadeira* (2008, p. 140).

Além disto, menciona a possibilidade de encontrarmos várias definições para as classes de intuições citadas, mas uma característica marcante em todas elas é que a intuição se caracteriza por um conhecimento imediato, tácito, não precedido por inferência. Parsons lembra que *Descartes contrastava intuição e dedução. No seu uso, a conclusão de uma inferência não poderia ser uma*

*intuição*. (2008, p. 142)

Por outro lado, Parsons comenta que a descrição de Kant do mesmo vocábulo se aproxima mais do significado “*intuition of*”, ou seja, intuição de objetos. Nesta perspectiva, *uma intuição é uma representação do singular, contrastando com o conceito que é geral*. Numa situação em que o sujeito percebe o objeto e, *em particular, ele é afetado por ele*. (PARSONS, 2008, p. 144)

Já a *concepção de Kant para a noção de intuição generaliza o conceito de representação surgindo a partir da percepção*. (PARSONS, 2008, p. 144) A *percepção* agora assume um papel de maior destaque; mas do ponto de vista cognitivo, como se relacionam *percepção e intuição*? Como discutir com o aluno uma situação-problema relacionada a *progressões*, conduzindo-o a uma percepção desejada? Como estimular o *raciocínio heurístico* num problema de P. G.?

Antes de responder estas perguntas estratégicas para um professor que atua em qualquer nível de ensino, vamos sair um pouco do campo filosófico e enveredar pela seara da investigação cognitiva. Neste ramo de estudos, Davidson (2003, p. 157) pergunta: se as mudanças nas *representações mentais* de problemas são culminantes para a compreensão na resolução de problemas, como tais mudanças ocorrem?

Davidson explica, que *quando um indivíduo não possui um conjunto de procedimentos para a solução de um problema, ele frequentemente busca por meio de um espaço de modos alternativos para a solução*. “*Selective encoding*”, “*selective combination*” e “*selective comparison*” auxiliam e o guiam na busca desejada.

O primeiro processo, nomeado por Davidson de “*selective encoding*” traduziremos por *decodificação seletiva*. Constitui-se quando uma pessoa encontra um estímulo, ou um conjunto de estímulos, de um ou mais elementos não evidentes. Podem ser problemas significantes e, geralmente, apresentam para o indivíduo um largo número de informações. O processo de *decodificação seletiva* contribui para uma reestruturação mental da informação originária.

O segundo processo, nomeado de “*selective combination*”, que traduziremos por *combinação seletiva*, se caracteriza quando um indivíduo descobre uma estrutura prévia não evidente em relação aos elementos da situação-problema. Em muitos problemas, de modo semelhante, os aspectos relevantes precisam ser identificados.



Geralmente é difícil a) saber como tais aspectos podem ser *combinados*, b) encontrar um *procedimento apropriado* de combinação.

Por último, o processo de “*selective comparison*”, que, conforme Davidson, se caracteriza por uma compreensão subida de descoberta de uma relação não óbvia entre a nova informação e o conhecimento prévio. Nesta, vemos analogias, metáforas e modelos usados para a solução do problema. Traduziremos este processo por *comparação seletiva*.

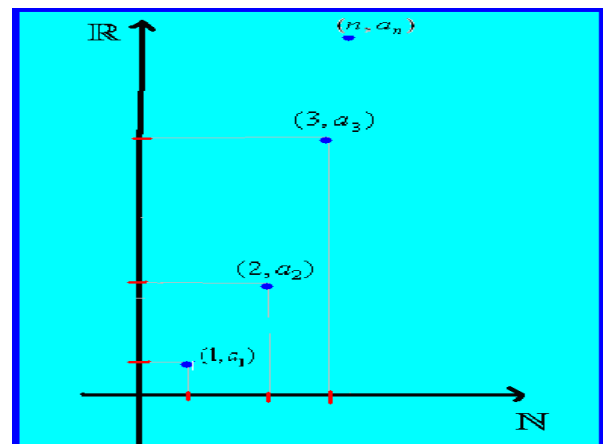
Vamos, agora, extrair algumas implicações com base tanto nas considerações do filósofo Charles Parsons, como da psicóloga norte-americana Janet Davidson, que publicou vários livros sobre a psicologia da resolução de problemas. Inicialmente, as noções de “*intuition of*” e “*intuition that*” são riquíssimas para um professor que, ao menos, conhece o significado do vocábulo *intuição*.

Admitindo a suposição, vale esclarecer que “*intuition of*”, ou *intuição dos objetos*, é uma habilidade frequentemente requerida pelos incipientes. Por outro lado, os matemáticos adoram lançar mão da “*intuition that*”, que diz respeito à faculdade intuitiva tendente a setenças proposicionais, voltada e fundada num *corpus* teórico que já subsiste na mente do sujeito.

Podemos observar isto se requisitar-mos de um matemático a explicação sobre *sequencias* de números reais, que é o conceito basilar de *progressões*. Na maioria dos casos, ele iniciará sua explanação com a *definição formal* do objeto. Para compreendê-la, precisamos da “*intuition that*”. O recurso da “*intuition that*” é muito fácil para quem já está familiarizado com o objeto que chamamos de *progressões*, mas, para o iniciante, o mais adequado metodologicamente é a exploração da “*intuition of*”. Para tal, não podemos abusar de notações e fórmulas. Por exemplo, podemos explorar a *intuição geométrica*, levar o aluno a ver, acreditar na existência e compreender o objeto matemático em foco (ilustração 4).

Assim, quando requisitamos ao aluno observar as propriedades dos pares ordenados e, a partir deles, extrair uma relação generalizante, que caracteriza uma P.G., a *intuição* recai sobre o objetos, que, neste caso são pares ordenados. Deste modo, a ideia que sugerimos ao professor para explorar a *intuição* é a de levar o aluno a “ver” e a “enxergar” os objetos matemáticos com os quais

quer realizar inferências, o que estimula a “*intuition of*”. Deste modo podemos relacionar *intuição e percepção*.



**Ilustração 4:** Interpretação geométrica da P.G. (Elaboração própria).

É completamente diferente de uma situação em que o aluno é condicionado a *interpolar os termos intermediários* de um P.G.  $(a_1; \dots; a_n)$ , de razão  $q > 0$ . Em tarefas desta natureza, como vemos em Machado (2002), o aluno executa o processo mas não constrói um significado para o processo executado. Nestas tarefas, não ocorre uma compreensão resultante da qualidade da *interação do sujeito com o objeto, como aconselhava Piaget* (VALENTE, 2002, p. 41). O aluno executa algorítmicamente o procedimento esperado pelo professor, mas os processos mentais caracterizados por Janet Davidson não são estimulados de modo adequado.

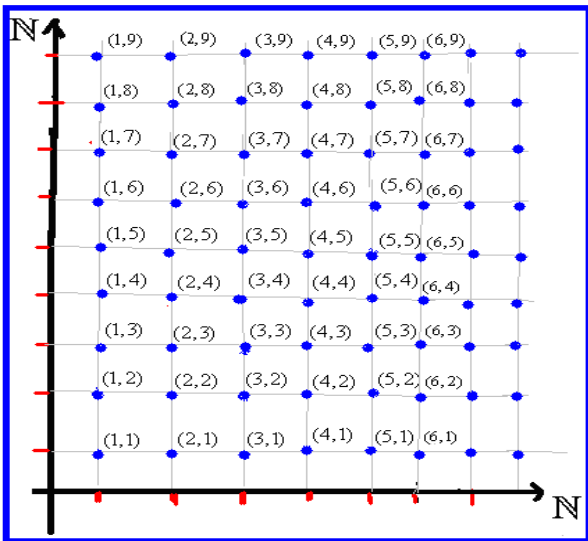
#### 4 EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA FEDATHI – SF

Passamos a uma discussão de natureza teórica de aplicação da metodologia de ensino *Sequência Fedathi*. Utilizaremos o conceito de *progressões geométricas* – P.G. em caráter teórico de aplicação. A escolha deste conceito decorre das advertências preocupantes sobre os livros didáticos de Matemática, formuladas por Lima (2001). Além disso, empregaremos as noções caracterizadas por Davidson e Parsons.

➤ **Nível 1 Tomada de posição – apresentação do problema ou de um teorema.** Neste nível, o pesquisador-professor apresenta uma situação-problema para o grupo de alunos, que deve

possuir meios de atacá-lo, mediante a aplicação do conhecimento matemático previamente conhecido ou não.

**Comentário.** Sfard (2008, p. 147) cunha a expressão “mediadores visuais”, significando elementos que fornecem imagens nas quais o discursantes identificam o objeto sobre o qual falam e coordenam sua comunicação. Concebemos, pois, a situação abaixo que encerra diversos mediadores visuais (ilustração 5), o que possibilita a operação de *decodificação seletiva*.

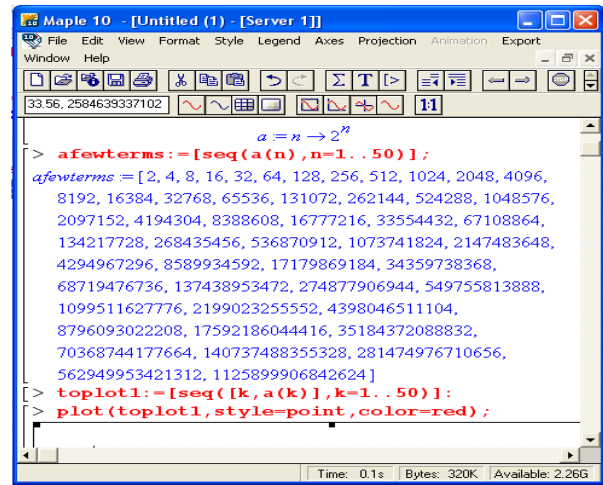


**Ilustração 5:** Situação geométrica relacionado ao problema de P. G (Elaboração própria)

Vamos assumir hipoteticamente a ideia de que o aluno escolhe e liga os pontos (ilustração 5): (1,2); (2,4); (3,8); (4,16); (5,32); .... Podemos, no entanto, propor aos estudantes conjecturar o valor de (7,?) ou (12,?), ou ainda (50,?). Em operações deste tipo, podemos recorrer ao *software Maple 10*, e fornecer uma grande listagem dos elementos da P.G. acima, descrita por  $a_n = 2^n$ , para  $n \geq 0$ .

Lembramos que não há necessidade da precipitação do fornecimento da fórmula analítica ao aluno. Conduzimos, deste modo, seu raciocínio por meio da interpretação geométrica e a intuição voltada ao comportamento numérico dos objetos no plano cartesiano. Temos aqui oportunidade de explorar a “*intuition of*” relativa aos objetos considerados. A importância da interpretação geométrica é extremamente defendida na tese de Garcia (2005). Ele lembra que *as investigações mostram que as representações gráficas facilitam o julgamento perceptivo do indivíduo, no que se traduz*

*num menor esforço e o possibilita manter a atenção em determinadas partes do problema.* (GARCIA, 2005, p. 123)



**Ilustração 6:** Tela do computador exibindo uma listagem dos valores assumidos pela progressão

Duval (1996) destaca a importância da *coordenação* e o uso das *múltiplas representações* de um conceito como um apoio à cognição. Além disso, o significado do conceito de *progressões* depende, segundo a perspectiva de Duval, do domínio e da compreensão de sua diversidade de *representações*. As concepções de Duval nos influenciaram no momento da estruturação da situação-problema descrita na ilustração 5.

➤ **Nível 2** Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. (Destinado à discussão e debate, envolvendo os elementos: *professor-alunos-saber*).

**Comentário.** Neste nível, a formulação e a adoção da simbologia conveniente podem ser estimuladas; lembrando que, segundo o modelo *standard* dos livros didáticos, designamos uma sequência por  $(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots)$ . Em nosso caso, conduzimos, por meio do diagrama da ilustração (1) o aluno a realizar a ligação conceitual entre  $a_n = f(n) \equiv (n, f(n)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Neste nível, permanecemos explorando a “*intuition of*”, entretanto, a atenção recai paulatinamente sobre uma simbologia que remete ao conceito, ao objeto. Aqui, fazemos uso do processo mental chamado de *comparação seletiva*.



**Nível 3 Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema.** Aqui os alunos, organizados em grupos de cinco, devem apresentar soluções que possam conduzir aos objetivos solicitados e convencer com suas *argumentações* outros grupos (exploração da *combinação seletiva*).

**Comentário.** Neste nível, estabelecemos uma notação. Vale esclarecer que, apesar de a notação  $(n, f(n))$  ser pouco operacional, ela explicita a relação funcional que define a *progressão*, como uma função do tipo  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , o que estimula a *combinação seletiva*. Por outro lado, Gondino (2004, p. 20) lembra que *uma das concepções comuns em muitos matemáticos, caracteriza em considerar que o aluno deve adquirir primeiro as estruturas matemáticas fundamentais de forma axiomática. Supõe-se que uma vez adquirida esta base, será fácil que o aluno por si só possa resolver aplicações e resolver exercícios.*

Somente neste nível, começamos a adotar os instrumentos matemáticos conceituais relacionados à situação-problema. Aqui, familiarizamos de modo gradual os estudantes, explorando a habilidade intuitiva relacionada ao que Parsons chama de “*intuition that*”; ou seja, neste nível, o aluno deve saber, ou pelo menos desconfia, que existe uma teoria formal subjacente à cada situação. Suas operações de pensamento, inclusive, sua percepção, guiam-se com referência à tal teoria.

Neste nível, o licenciando e futuro professor de Matemática deveria saber que a única função que pode apresentar a propriedade do conjunto  $(1, 2)$ ;  $(2, 4)$ ;  $(3, 8)$ ;  $(4, 16)$ ;  $(5, 32)$ ; ... inicial escolhido, é uma *função exponencial*. Uma *função afim* ou uma *função polinomial do 2º grau* não satisfazem esta propriedade.

➤ **Nível 4 Prova – apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado.** Aqui, a didática do professor indicará em que condições ocorrerá a aquisição de um novo *saber*. Além disto, todas as argumentações devem ser revistas e testadas e identificados os elementos que podem causar maior incompreensão.

**Comentário.** Neste nível, discutiremos, de modo particular, as afirmações e detalharemos as argumentações fornecidas por Lima (2004, p. 183). A premissa, comumente usada em

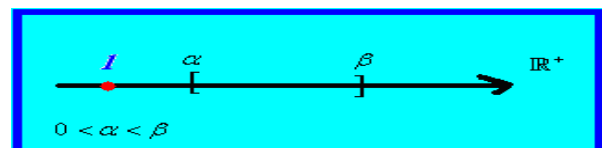
Matemática, consiste em preencher as lacunas. Nossa intenção é fornecer indicações do modo pelo qual o licenciando deve aprender a estudar Matemática pois, se ele não consegue completar as lacunas de uma obra didática que, em geral, são muitas, em virtude da economia e otimização do custo, ele não aprende. Consequentemente, ensinará de um modo restrito e deficitário. Apresentamos, então, o primeiro teorema.

**Teorema<sub>1</sub>:**<sup>1</sup> Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona e injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes: (1)  $f(n \cdot x) = (f(x))^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ ; (2)  $f(x) = a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $a = f(1)$ ; (3)  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Enunciamos um exemplo de teorema com o qual o aluno de graduação sente dificuldades para compreender. A ideia é realizar o ciclo de implicações  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ . Muitos teoremas da Matemática escolar podem ser considerados dentro deste tipo de raciocínio. Curiosamente, esta formulação é banida dos livros-textos. Um exemplo disto, para ilustrar, é o caso de *definições formais* equivalentes do mesmo objeto matemático, que nomeamos como função injetiva.

A demonstração do **Teorema<sub>1</sub>** requer a utilização do seguinte lema.

**Lema:** Fixando o número real positivo  $a \neq 1$ , em todo intervalo de  $\mathbb{R}^+$ , existe alguma potência  $a^r$ , com  $r \in \mathbb{Q}$ .

**Demonstração:** de acordo com o enunciado, vamos tomar um intervalo qualquer  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$ , onde assumimos que  $0 < \alpha < \beta$ . A ideia deste teorema é provar a existência de certo  $a^r \in [\alpha, \beta]$ .

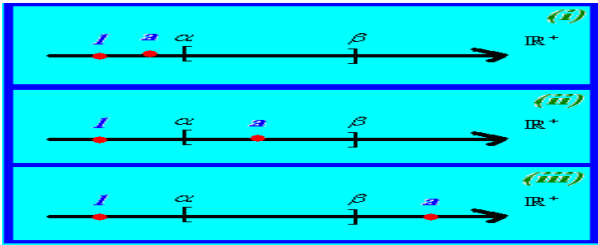


**Ilustração 7:** Disposição na reta

O primeiro caso, analisado por Lima (2004, p. 177) diz respeito à situação  $a, \alpha > 1$ . Assim, sabemos que o comportamento das potências de

<sup>1</sup> Lima (2004, p. 183) chama este teorema de *Caracterização da Função Exponencial*.

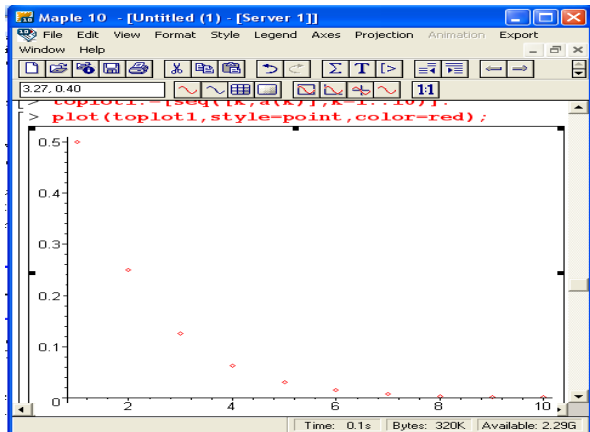
expoentes naturais maiores do que 1 crescem de modo ilimitado. Assim, desde o início, fornecemos um  $1 < a$ ; mas temos três possibilidades: (i)  $1 < a < \alpha < \beta$ ; (ii)  $1 < \alpha < a < \beta$  ou (iii)  $1 < \alpha < \beta < a$ . Representamos a situação abaixo.



**Ilustração 8:** Casos possíveis.

Em qualquer situação sabemos por indução matemática, que:

$1 < a < a^2 < a^3 < \dots < a^n < a^{n+1} < \dots$  é uma sequência de números reais *ilimitada superiormente*<sup>1</sup>. De fato, intuitivamente, vemos na ilustração 3, na seção inicial, o comportamento similar ao de  $g(n) = 3 \cdot 2^n$ , onde  $a = 2$ . Se consideramos, contudo, por exemplo, a função  $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  vemos seu comportamento decrescente descrito abaixo pelo *software* Maple 10 (ilustração 9).



**Ilustração 9:** Comportamento decrescente a P. G. exibido pelo computador

Assim voltando à nossa demonstração, podemos prever que, na pior das hipóteses (i), (ii) ou (iii), existirá um  $M_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < 1 < \alpha < \beta < a^{M_0}$ . Por outro lado, reparemos que, desde o início, consideramos  $\alpha < \beta \Leftrightarrow 0 < \beta - \alpha$ . Assim,

consideramos a seguinte fração  $\frac{\beta - \alpha}{a^{M_0}}$ . Podemos inferir rapidamente que  $0 < \frac{\beta - \alpha}{a^{M_0}}$ , uma vez que tanto o numerador como o denominador são maiores do que 0; mas, se adicionarmos a esta grandeza  $0 + 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^{M_0}} + 1 \cdot 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^{M_0}} + 1$ . Usando o mesmo argumento que usamos há pouco aplicado para potências de  $1 < \left(\frac{\beta - \alpha}{a^{M_0}} + 1\right)$ , pode-se encontrar uma potência  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1 < a < \left(\frac{\beta - \alpha}{a^{M_0}} + 1\right)^{n_0}$ . Assim, extraindo a raiz, segue que  $0 < 1 < a^{1/n_0} < \left(\frac{\beta - \alpha}{a^{M_0}} + 1\right) \Leftrightarrow 0 < a^{M_0/n_0} \cdot a^{1/n_0} < \beta - \alpha + a^{M_0/n_0}$ .

Ou ainda:

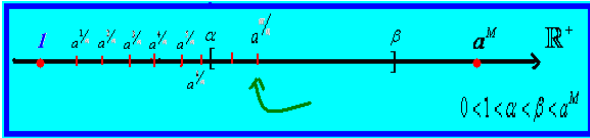
$0 < a^{M_0/n_0} \cdot (a^{1/n_0} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < (a^{M_0/n_0} - 1) < \beta - \alpha$ . Observamos, agora, o comportamento da expressão  $a^{M_0/n_0}$ . Com respeito ao seu expoente, Lima (2004, p. 178) impõe a seguinte condição  $\frac{m}{n_0} \leq M_0 \Rightarrow 1 < a^{m/n_0} \leq a^{M_0}$ . Temos portanto, temos:

$0 < a^{m/n_0} \cdot (a^{1/n_0} - 1) \leq a^{M_0} \cdot (a^{1/n_0} - 1) < \beta - \alpha$ , assim, fazendo as contas, escrevemos  $0 < a^{m/n_0} - a^{1/n_0} < \beta - \alpha$ ; note-se, porém, que  $\beta - \alpha$  é a amplitude do intervalo inicial  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$ . Fazendo variar as frações, sob a condição  $\frac{m}{n_0} \leq M_0$ , poderemos obter os expoentes  $\left\{0, \frac{1}{n_0}, \frac{2}{n_0}, \frac{3}{n_0}, \dots, \frac{m}{n_0}, M_0\right\}$  dos números  $\{1 = a^{0/n_0}, a^{1/n_0}, a^{2/n_0}, a^{3/n_0}, \dots, a^{m/n_0}, a^{M_0}\}$ . Estes números são os extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que a amplitude  $\beta - \alpha$  (ilustração 8).

Lembrando a condição inicial  $0 < 1 < \alpha < \beta < a^{M_0}$ , segue que algum destes

<sup>1</sup> Esta noção de sequência ilimitada superiormente que se relaciona com a noção de supremo poderia ser estudada num 3º curso de Fundamentos da Matemática, antes da disciplina de Análise Real.

números, digamos  $a^{m/n_0}$ , pertencerá ao intervalo  $[\alpha, \beta]$ . Para um leitor curioso, sugerimos a comparação entre o texto da demonstração deste lema, que ocupa menos de 15 linhas; sem mencionar que Lima (2004, p. 178) deixa os casos: (a)  $a, \alpha < 1$ ; (b)  $\alpha < 1 < a$  e (c)  $a < 1 < \alpha$  a cargo do leitor.



**Ilustração 10:** Situação geométrica (elaboração própria)

Uma tarefa desta natureza para um licenciando em Matemática é mais importante do que calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3y}{x^2 + y^2}$$

Afinal, tal tarefa envolve um saber que será ministrado efetivamente na escola; mas vejamos o próximo teorema.

Na sequência, Lima demonstra a implicação mais difícil  $(1) \rightarrow (2)$ , usando este lema. De fato, admitindo (1), ou seja,  $f(n \cdot x) = (f(x))^n$ ,

tomamos  $r = \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}) \therefore n \cdot r = m$ .

Assim, temos

$$(f(r \cdot x))^n \stackrel{(1)}{=} f(n \cdot r \cdot x) = f(m \cdot x) \stackrel{(1)}{=} f(x)^m$$

Obtemos então:

$$(f(r \cdot x))^n = f(x)^m \Leftrightarrow f(r \cdot x) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$$

Lima, na sequência, comenta que quando colocamos  $f(1) = a$ , escrevemos:

$$f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}, \text{ o que verifica a propriedade desejada em } \mathbb{Q}.$$

Para completar a demonstração de que  $(1) \rightarrow (2)$ , suponhamos, afim de fixar as ideias que  $f$  seja crescente, logo  $1 = f(0) < f(1) = a$ . Admitamos, por absurdo, que exista um  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \neq a^x$ . Digamos, por exemplo que seja  $f(x) < a^x$  (LIMA, 2001, p. 184).

Assim, considerando o intervalo  $[f(x), a^x]$  e empregando o mesmo raciocínio de o lema

anterior, encontramos  $r \in \mathbb{Q}$  tal que :

$a^r \in [f(x), a^x] \Leftrightarrow f(x) < a^r < a^x$ ; mas, desde que a função é crescente, e tendo que  $f(x) < a^r = f(r) \Leftrightarrow x < r$ . Por outro lado, desde que  $a^r < a^x$  e lembrando que  $1 < a$ , devemos ter que  $r < x$ . Esta contradição prova que  $(1) \rightarrow (2)$ . Ele finaliza a demonstração do teorema dizendo que as implicações  $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$  são óbvias.

De fato, admitindo a condição  $f(x) = a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (2), de imediato, teremos  $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$ , o que demonstra a condição (3). Passamos a apresentar o segundo teorema.

**Teorema<sub>2</sub>**: Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona e injetiva tal que, para  $x, h \in \mathbb{R}$  quaisquer, o acréscimo relativo  $\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$

depende apenas de  $h$ , mas não de  $x$ . Então, se  $b = g(0) \in \mathbb{R}^+$  e  $a = \frac{g(1)}{g(0)}$ , tem-se  $g(x) = b \cdot a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Após apresentar e demonstrar o *teorema<sub>2</sub>*, Lima (2004, p. 185) considera um P.A.  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , de razão  $h$ , ou seja,  $x_{n+1} - x_n = h$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . Então, os valores  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , segundo Lima, formam uma P.G.

De fato, observamos que:

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{f(x_3)}{f(x_2)} = \dots = \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = \dots = \text{ ou ainda,}$$

$$\frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{b \cdot a^{x_3}}{b \cdot a^{x_2}} = \dots = \frac{b \cdot a^{x_{n+1}}}{b \cdot a^{x_n}} = \dots =, \text{ que}$$

equivale a (com  $b \neq 0$ ),  $a^h = a^{x_2 - x_1} = a^{x_3 - x_2} = \dots = a^{x_{n+1} - x_n} = \dots$ . Portanto, de razão  $q = a^h$ , lembrando que  $h$  é a razão da P.A.

**Teorema<sub>3</sub>**: Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  numa progressão

geométrica  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  onde  $y_i = f(x_i)$  para  $i \in \mathbb{N}$ .

Se pusermos  $b = f(0)$  e  $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ , teremos que

$$f(x) = b \cdot a^x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Após descrever brevemente suas hipóteses, Lima (2004, p. 186) toma  $x \in \mathbb{R}$  um elemento fixo mas arbitrário e admite que os termos  $(x, 0, -x)$  formam uma P.A.; por definição, porém, temos:  $0 - x = -x - (0) = -x = (\text{razão})$ . Assim, tal P.A. é levada por hipótese em uma P. G. Assim, temos a P. G.  $(g(x), g(0), g(-x))$ .

Se esta última sequência é uma P.G., devemos ter a condição  $\frac{g(0)}{g(x)} = \frac{g(-x)}{g(0)} = q$  (cte); mas isto

equivale a  $\frac{g(-x)}{g(0)} = \frac{g(0)}{g(x)}$ , onde  $g$  é uma função

definida inicialmente por  $g(x) = \frac{f(x)}{f(0)}$ . Assim,

$$g(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1 \therefore g(-x) = \frac{1}{g(x)} = (g(x))^{-1}.$$

Na sequência, Lima considera a sequência  $(0, x, 2x, 3x, 4x, \dots, nx, \dots)$  uma P.A. Assim, por hipótese, teremos a P.G. descrita por  $(g(0), g(x), g(2x), g(3x), g(4x), \dots, g(nx), \dots)$  é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é  $g(x)$  (LIMA, 2004, p. 186). O sentimento de *evidência matemática* para o matemático é bem diferente do sentimento de evidência de um licenciando. Assim, verificamos que

$$g(x) = \frac{g(x)}{g(0)} = \frac{g(2x)}{g(x)} = \frac{g(3x)}{g(2x)} = \dots = \frac{g((n+1)x)}{g(nx)} = \dots$$

; visto que  $g(0) = 1$ .

Mais adiante, ele afirma que  $g(n \cdot x) = (g(x))^n$  para  $n \in \mathbb{N}$ ; mas o licenciando precisa verificar esta propriedade por indução. De fato, temos que

$$g(x) = \frac{g(x)}{g(0)} \rightarrow g(x) = g(0) \cdot g(x) = 1 \cdot g(x) = g(x)^1$$

Escrevemos em seguida que

$$\frac{g(x)}{g(0)} = \frac{g(2x)}{g(x)} \rightarrow g(2x) = (g(x))^2. \text{ Assim,}$$

continuamos nossa argumentação, usando a igualdade

$$\frac{g(2x)}{g(x)} = \frac{g(3x)}{g(2x)} \rightarrow g(3x) = \frac{g(2x) \cdot g(2x)}{g(x)} = \frac{(g(x))^2 \cdot (g(x))^2}{g(x)}$$

, segue que  $g(3x) = (g(x))^3$ . Assumindo a hipótese

de indução, temos:  $g(n \cdot x) = (g(x))^n$ ,

entretanto, para verificar o próximo passo, observamos que  $g(x) = \frac{g((n+1)x)}{g(nx)}$ .

Segue que:  $g(nx) \cdot g(x) = ((g(x))^n) \cdot g(x) = (g(x))^{n+1}$ .

Na sequência, Lima (2004, p. 186) usando a igualdade  $g(-x) = (g(x))^{-1}$  verifica a

propriedade para valores em  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Este último teorema é essencial para o conhecimento do futuro professor, Ele nos diz que a única função que leva uma P.A. numa P.G. é uma *função exponencial*, do tipo  $f(x) = b \cdot a^x$ ; bem como, vale lembrar que a única função que leva uma P.A. numa P. A. é do tipo  $f(x) = ax + b$ .

Esse *conhecimento conceitual* que relaciona modelos e objetos da Matemática deveria ser natural na formação de um professor. Por outro lado, se ele adquire um conhecimento fragmentado e sem conexão, o mesmo ocorrerá na sala de aula durante a sua regência.

Por fim, salientamos que, embora o *nível 4* referencie um *saber* nem sempre discutido no ambiente escolar, todavia, o professor deve conhecê-lo a ponto de modificá-lo a adaptá-lo ao nível de sua clientela. Foi o que fizemos ao propor a situação da ilustração 5.

## 5 CONSIDERAÇÕES E RECOMENDAÇÕES FINAIS

Sabemos que alguns historiadores da Matemática discutem como a História da Matemática é apresentada nos livros didáticos, mencionando muitas vezes que *estes itens se encontram soltos no livro didático, sem uma articulação com o conteúdo.* (BIANCHI, 2006, p. 84)

Aparentemente, esta situação descrita por Bianchi é posterior a outra mais grave, que discutimos nas seções iniciais. A situação diz respeito à própria falta de articulação entre os conteúdos matemáticos regulares da escola, tais como: *funções e progressões*. Como evidenciamos, seu tratamento permanece estanque, mecanizado, “algoritmizado” e de significado pobre.

Torna-se imperioso, para que possamos

compreender a constituição atual dos cursos de Licenciatura em Matemática, inclusive o nosso, um olhar direcionado ao passado, no momento de criação e estruturação destes cursos. Pietrolato (2005, p. 124) nos fornece um dado interessante ao declarar que:

*Na sua origem os cursos de Licenciatura em Matemática caracterizavam-se por oferecer uma visão de Matemática como disciplina abstrata e a-histórica, com pouca relação com os entornos socioculturais em que ela é engendrada.*

Pietrolato faz referência a um fator condicionante específico do *saber matemático*, que constitui parte da formação do futuro professor; o problema, todavia, não reside apenas neste; de fato, na tese de Gomez (2007) produzida na Espanha, nos capítulos 2 e 3, encontramos uma interessante discussão sobre o *conhecimento pedagógico geral* e o *conhecimento pedagógico específico* do professor de Matemática.

Diante esta discussão e de muitos outros estudos desenvolvidos na Europa, compreendemos a obsolescência, o anacronismo e mesmo a negligência das concepções de formação de professores no Brasil; concepções predominantes no ambiente acadêmico, que desconsideram a importância da construção e formação do *conhecimento pedagógico específico*; um conhecimento que poderia instrumentalizar o docente na mediação dos conteúdos matemáticos dentro da sala de aula. Afinal, este é o local onde o professor despenderá a maior parte do seu tempo na escola; e não discutindo teorias em *Didática Geral*<sup>1</sup> ou *Correntes Educacionais*<sup>2</sup> que nunca refletiram diretamente no ensino da Matemática no Brasil.

O problema no ensino de *progressões geométricas*, em nossa perspectiva, é apenas a ponta de um *iceberg*. E num contexto geral, encontramos informações interessantes, como na tese de Pietrolato (2005), ao esclarecer que

*Embora não tenhamos dados sobre quantas*

<sup>1</sup> Que teorias o aluno estuda em Didática Geral que lhe forneçam subsídio e uma explicação consistente e não apenas retórica sobre o porquê da dificuldade maior na aprendizagem em P.G. do que em P.A? Sobre o modo pelo qual as *definições matemáticas* podem complicar e fornecer entraves metodológicos? Por que umas *definições matemáticas* são mais intuitivas do que outras? Perguntas e respostas desta natureza se relacionam ao *conteúdo pedagógico específico*, e são o objeto de estudo da Didática da Matemática.

<sup>2</sup> Na tese de Zimer (2008, p. 81), encontramos uma interessante explicação a respeito das influências da *Didática Magna*, de Comenius. Mais adiante a autora lembra que o ensino da Matemática não foi influenciado pelas ideias de Comenius, nem pelo novo papel da Ciência.

*universidades brasileiras oferecem cursos de Licenciatura, baseados nesta concepção formalista, é possível considerar que essa concepção continue sendo uma “meta” valorizada, embora cada vez mais difícil de atingir pelas condições “de entrada” desses alunos no ensino superior, com pouco domínio dos conteúdos matemáticos tradicionalmente ensinados na Educação Básica. Em função desta situação as licenciaturas foram abandonando as demonstrações em seus cursos.* (2005, p. 126)

Vale lembrar que as demonstrações da Matemática escolar nos cursos de Licenciatura foram abandonadas, mas a Matemática avançada, que possui interseção com o de Bacharelado, preserva seu espaço e um intenso vigor, ou, melhor dizendo, é a preferida para ser exposta e discutida no *locus acadêmico*.

Para concluir, outro problema relacionado à formação do professor de Matemática diz respeito à pouca intimidade e familiaridade na leitura de livros de Matemática editados pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM. De fato, nestes livros, na coleção do professor de Matemática, encontramos inclusive os conteúdos do Ensino Médio<sup>3</sup>, porém, descritos e apresentados de modo axiomático e formal. É este formalismo que discutimos na seção anterior, no *nível 4 da Sequência Fedathi*, na qual o professor deveria apresentar um domínio máximo. Afinal, será em relação à Matemática que ele tem a missão de promover uma mediação adequada na escola.

Uma situação periclitante, lembramos, facilmente encontrada, se refere ao momento em que o professor não apresenta um domínio conceitual e lógico-formal maior do que o do próprio aluno, principalmente das *demonstrações*. De modo mais claro, situações em que o docente emprega as fórmulas relacionadas às noções de P.A. e P.G. e não sabe demonstrá-las por *indução matemática*, mas apenas por manipulação algébrica, como é discutida nos livros didáticos.

Vimos na última seção exemplos de teoremas que não deveriam ser novidade para um recém-

<sup>3</sup> Encontramos uma exposição e a discussão diferenciada dos conteúdos nesta coleção da SBM. A ideia de que o professor, recém formado ou não deveria dominar tais argumentações e formalismos. Uma situação corriqueira no ensino escolar ocorre quando o docente não conhece a Matemática além do que aquela que o livro didático apresenta de modo precário e questionado. Na seção anterior, por exemplo, apresentamos alguns teoremas que deveriam ser do conhecimento de um recém-formado. E o caso das *progressões* é apenas um exemplo do que ocorre também em *Geometria Plana, Analítica, Análise Combinatória, Matrizes* etc.

formado, embora esta seja a regra geral. Mesmo quando aprende esses formalismos e argumentos formais relacionados aos conteúdos do ensino escolar, o recém-formado depara na escola outro professor de Matemática, na maioria das vezes, mais experiente, que ganha um salário irrisório, responsável por cerca de 150 alunos e trabalha pelo menos dois expedientes. Consequentemente, o que restará a ambos será continuar as “aulinhas”, seguindo o livro didático de qualidade duvidosa e aplicando cansativamente fórmulas e exercícios decorados para o exame vestibular.

O que impede na maioria das vezes, uma mudança do hábito de aprendizagem do licenciando é explicado por Silva (2009, p. 36) quando adverte para o fato de que *na Licenciatura aparecem as disciplinas: Fundamentos da Análise, Fundamentos da Álgebra, e Fundamentos da Geometria demonstram que estes assuntos não serão aprofundados e que os conteúdos de Física não serão obrigatórios.* (2009, p. 36)

Silva faz considerações no âmbito de formação específica, todavia, no que diz respeito à *formação pedagógica*, a situação não é das melhores. De fato, Serralheiro esclarece que:

*Não é difícil encontrarmos professores que defendem a ideia de que os conhecimentos da matéria e a capacitação pedagógica podem ser, muitas vezes, modificadas, para melhor, por meio de aconselhamentos e exemplos. A ideia traduz que as dificuldades de ensino são geradas pelo preparo insuficiente do professor. Para que o problema geral do ensino fosse resolvido, bastaria uma melhor formação deste profissional.* (2007, p. 23)

A modificação da capacitação pedagógica, para nós, envolve: instrumentalização em teorias de base didática e filosófica, desenvolvidas para a aplicação na Matemática; conhecimento de metodologias de ensino (*Sequência Fedathi*) de *progressões* e outros conteúdos; estudo da perspectiva histórica e filosófica (ALVES & BORGES NETO, 2010), relacionado ao campo das *progressões* e conhecimento de trabalhos acadêmicos que informem as dificuldades e erros dos estudantes

Por outro lado, estas pequenas informações e dados discutidos em trabalhos acadêmicos não deveriam ser, de forma alguma, novidade para professores formadores, “comprometidos” com a evolução profissional do professor de Matemática. Afinal, são pesquisas em nível de

mestrado<sup>1</sup> e doutorado, acessíveis na *internet*<sup>2</sup> e que poderiam ser objeto de reflexão para os licenciandos. Paradoxalmente, estas informações, aparentemente, não são objeto de reflexão nem dos próprios formadores, muito menos são contemplados nos currículos.

Para finalizar nossa discussão, Nunes (2001, p. 11) sublinha que existem muitos meios de se tornar mais eficaz a aprendizagem de quaisquer conceitos, mas a questão é: que meios são estes? Como obtê-los? Estamos há tanto tempo acostumados com o estilo “*bourbakiano*” de lecionar, que se torna, para nós, muito difícil uma mudança radical na dinâmica da aula, do condicionamento epistemológico do saber matemático.

Assim, sugerimos ao longo do texto a compreensão da natureza dos tipos de intuição, na perspectiva de Parsons, que poderiam suavizar pelo menos esta influência secular do *grupo bourbaki*. Não que ela seja completamente maléfica, porém, ninguém aprende *progressão geométrica* pela primeira vez buscando compreender suas fórmulas usuais. Por outro lado, o professor deve estar consciente de que *manter uma prática centrada na transmissão oral traz para si toda a possibilidade de qualquer tipo de ação* (CARUSO, 2002, p. 300); o computador, porém, pode proporcionar um processo de descentralização e o maior entendimento da interrelação dos conteúdos escolares, além de modificar sua metodologia.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALVES. Francisco. R. V. & BORGES NETO. Hermínio. Sequencias de Fibonacci e de Lucas: uma aplicação da Sequencia Fedathi. In: **V Colóquio de História de Tecnologia no ensino da Matemática.** 2010, 1-10. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/hitem5/>, Acesso em: 01/092010.
- [2] ARCHILIA, S. **A construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões.** Dissertação (Mestrado profissional) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2008.

<sup>1</sup> Encontramos um interessante trabalho desenvolvido no mestrado profissionalizante da PUC/SP, de Archilia (2008) onde podemos observar problemas, entraves cognitivos e metodológicos específicos no ensino de *progressões aritméticas*.

<sup>2</sup> No site: [http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/principal\\_acad.html](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/principal_acad.html)



- [3] BALACHEFF, N. **Une étude du processus de prevue em Mathématique chez des élèves des Collègue**. 1988. Thèse (Doutorado em Educação Matemática), Institute Foseph Fourier. Grenoble.
- [4] BIANCHI, M. I. Z. **Uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos Livros Didáticos**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.
- [5] BORBA, M. C. & VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media ant the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation**. New York: Springer, 2005.
- [6] BROUSSEAU, Guy. **Theory of Didactical Situations in Mathematics: 1970-1990**, New York: Klumer Academic Press. 2005.
- [7] CARUSO, P. D. **Professor de Matemática: transmissão de conhecimento ou construção de significados?** 2002. Tese (Doutorado em Educação)-Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2002.
- [8] CIRADE, G. **Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM Les mathématiques comme problème professionnel**. 2006. Thèse (Doutorado em Educação Matemática)-Université de Marseille. Provence. 2006.
- [9] DAVIDSON, J. E. Insights about Insightful Problem Solving. In: DAVIDSON, J. & STERNBERG, R. J. **The Psychology of Problem Solving**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 149-174.
- [10] DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Pensée Humaine: registre sémiotiques et apprentisages intellectuels**, Paris: Perter Lang Édition. 1996.
- [11] ERNEST, Paul. **The Phylosophy of Mathematics Education**, London: The Palmer Press. 1991.
- [12] FIGUEIREDO, A. C. **Saberes e concepções de Educação Algébrica em um curso de Licenciatura em Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.
- [13] FISCHBEIN, Efrain. **Intuition in science and mathematics: an educational approach**. Netherlands: Reidel Public, Mathematics Educational. 1987.
- [14] FISCHBEIN, Efrain. Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. In: TIROSH, D. **Forms of Mathematical Knowledge: learning and teaching with understanding**. London: Klumer Academic Publishers, 1999, 10-50.
- [15] GARCIA, J. J. **La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sur características y el uso que se hace de ellas en el aula** (tesis de doctoral), Granada: Universidad de Granada. 2005.
- [16] GOMEZ, P. **Desarrollo del Conocimiento Didático en un Plano de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundária**. Thesis (Doctoral en Educacion Matematica)- Universidad de Granada. Granada, 2007.
- [17] GONDINO, Juan. D. **Teoria de las Funciones Semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática**. Thesis (Doctoral en Educacion Mathematicas)- Universidad de Granada. Granada, 2003.
- [18] GONDINO, Juan. D. **Didáticas de las Matemáticas para Maestros**, Granada: Universidad de Granada. 2004.
- [19] GONDINO, J. D. LACASTA, E. & WILHELMI, M. R. Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value, In: **Internacional Eletronic Journal**, Vol. 2, Nº2, 2007, 72-90. Disponível em: [www.iejme.com](http://www.iejme.com) Acesso em: 11/02/2009.
- [20] GIOVANNI, J. R. & BONJORNO, J. R. **Coleção Matemática**, São Paulo: STD Editora. 2000
- [21] LOREZÓN, G. M. **Um modelo de competências matemáticas em un entorno interactivo**. 2009. Thesis (Doctoral em Educacion Matematica)- Universidad de La Rioja, Espanha. 2009.
- [22] LIMA, Elon. L. **Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o ensino**

- médio IMPA, SBM, Rio de Janeiro. 2001.
- [23] LIMA, Elon. Lages. **A matemática do ensino médio, Sociedade Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro: IMPA, vol 1. 2004.
- [24] MACHADO, A. S. **Matemática na Escola do Segundo Grau**, São Paulo: Atual. 2002.
- [25] NUNES. M. N. **Sequencias o estudo de convergência através de atividades**. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2001.
- [26] OTTE, Michael. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**, Editora UNESP, São Paulo. 1991.
- [27] PARSONS, Charles. **Mathematical Thoughts and Its Objects**, Cambridge: Cambridge University Press. 2008.
- [28] PIETROLATO, R. C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática**. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
- [29] SFARD. Anna. **Thinking as Communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing**, New York: Cambridge University Press. 2008.
- [30] SERRALHEIRO, T. D. **Formação de professores: discurso de mudanças na prática das demonstrações**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2007.
- [31] SILVA, M. A. **A atual legislação educacional brasileira para a formação de professores: origens, influencias e implicações nos cursos de formação de Licenciatura em Matemática**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica. São Paulo. 2004.
- [32] SILVA, S. R. L. **Os professores formadores do curso de Licenciatura em Matemática: condições de docência**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2009.
- [33] SIERPINSKA, Anna. **Understanding in Mathematics, Studies in Mathematics Education**, London: Palmer Press. 1994.
- [34] VALENTE, J. A. **O computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas: Universidade de Campinas. 2002.
- [35] ZIMER, T. T. **Aprendendo a ensinar matemática nas séries iniciais do ensino fundamental**. 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Universidade de São Paulo. São Paulo, 2008.