

Uma Sequência Didática para explorar a regra de L'Hospital com o uso da Tecnologia

A Didactical Sequence to explore the rule of L'Hospital with the use of technology

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES¹
HERMÍNIO BORGES NETO²

Resumo

Apresenta-se uma Engenharia Didática – ED, com o tema envolvendo situações de ensino, no contexto de uso regra de L'Hospital no curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE. A fase de experimentação e validação da ED é apoiada na metodologia de ensino nominada Sequência Fedathi. Deste modo, produziu-se um clima de investigação em duas atividades, com a participação de quatro duplas de alunos da licenciatura em Matemática, nas quais, o uso do Geogebra se mostrou essencial. Na etapa de análise a posteriori, destacamos: com a exploração do software, os alunos comparam os dados de natureza geométrica com os de natureza analítico-algébrica; o software possibilitou um entendimento, mediante a natureza da mediação didática, da manifestação de indeterminações de natureza geométrica, além de evitar a aplicação irrefletida da regra, o que é recorrente num ensino que se limita ao quadro algébrico.

Palavras-chave: Engenharia Didática; Regra de L'Hospital; Geogebra.

Abstract

It presents an Didactical Engineering – DE, with situations involving the issue of education, in the context of the use of L'Hospital rule, in the course of a degree in Mathematics from the Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE. The phase of experimentation and validation of DE is supported in the teaching methodology nominated Fedathi sequence. Thus, there has been a research climate in two activities, with the participation of four pairs of undergraduate students in Mathematics, in which the use of GeoGebra proved essential. In the subsequent analysis, include: the exploitation of software, students compare the datas with the geometric nature of the analytic-algebraic nature, the software enabled an understanding, through the didactic nature of mediation, the manifestation of indeterminacies in nature geometric, and avoid the unthinking application of the rule, which the applicant is a teaching that is limited to the algebraic framework.

Key words: Didactical Engineering; L'Hospital Rule; Geogebra.

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. Doutor em Educação com ênfase no ensino superior. E-mail: fregis@ifce.edu.br

² Universidade Federal do Ceará – UFC. Pós doutor em Educação Matemática. E-mail: herminio@multimeios.ufc.br

Introdução

Este trabalho apresenta os resultados pertinentes a um estudo desenvolvido num contexto de aplicação particular de ensino do Cálculo. Assim, desenvolvemos no curso de licenciatura em Matemática uma investigação que teve como objetivo conceber uma *Engenharia Didática* – ED com vistas à estruturação/exploração de atividades de ensino apoiadas, em suas fases de *experimentação*, nos pressupostos da *Sequência Fedathi* – SF, envolvendo a *regra de L'Hospital*.

Neste artigo, identificamos determinados elementos abordados pelos livros didáticos que podem atuar, quer seja pela sua natureza metodológica, que seja pela sua própria natureza epistemológica, como entraves, no ensino/aprendizagem. Em seguida, evidenciamos uma perspectiva diferenciada em decorrência da exploração didática da tecnologia. Descrevemos, por fim, algumas fases da ED, com o tema *regra de L'Hospital*. A escolha de tal temática é em decorrência da aparente escassez de estudos no Brasil que busquem compreender dificuldades específicas com respeito ao ensino/aprendizagem desta regra.

1. Sobre a Regra de L'Hospital nos livros de Cálculo

No Brasil, os livros didáticos usuais (GUIDORIZZI, 2010; LEITHOLD, 1994; STEWART, 2001; SIMMONS, 1988) adotados no ensino deste conteúdo, privilegiam, de modo tradicional (ARTIGUE, 2002), o caráter algorítmico e a aplicação automática do teorema que possibilita evitarmos o tratamento direto de indeterminações ou formas indeterminadas do tipo 0^0 , $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 , ∞^∞ , 1^∞ etc..

Nos cursos de Cálculo, a técnica conhecida que permite eliminar indeterminações como estas é conhecida como *regra de L'Hospital*. Reparemos, entretanto, que a mesma “é utilizada como ferramenta para calcular limites indeterminados, sem a preocupação de uma justificativa, o que para o aprendizado matemático é de certa forma um problema.”. (BARBOSA, 2008, p. 12).

Destacamos então seu enunciado: supondo que f e g são diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ próximo do ponto $x=a$ (exceto possivelmente em a). Considerando ainda que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \end{array} \right. , \text{ temos uma forma indeterminada do tipo}$$

$0/0$ ou ∞/∞ . Então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se o limite do lado direito existir (ou é $+\infty$ ou $-\infty$).

O que se sobressai neste enunciado diz respeito à quantidade de hipóteses e outras noções matemáticas relativas ao cálculo intrincado de limites (MAURICE, 2000, p. 26). Ademais, uma condição importante e de difícil entendimento refere-se justamente à condição de *existência* de um limite, como vemos a indicação no enunciado acima.

Reparemos que muitos autores de livros didáticos no Brasil limitam-se a analisar a condição suficiente para a *existência*, caracterizada pela condição analítica $(*) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, desprovida de qualquer interpretação topológica. O entendimento da noção de existência é requerido, por exemplo, quando Stewart (2001), ao explicar o comportamento de limites do quociente de funções que se aproximam da expressão $\frac{0}{0}$, acrescenta, de modo peremptório que “o símbolo $\frac{0}{0}$ não está definido” (STEWART, 2001, p. 304), portanto, não existe.

Em sua dissertação, Barbosa (2008, p. 41) pontua uma atribuição histórica mais coerente à descoberta da regra para o tratamento da *indeterminação* $\frac{0}{0}$ ao jovem Johanen Bernoulli (1667-1748). Em outros casos envolvendo a noção de *indeterminação*, como na situação de $\frac{\infty}{\infty}$, a verificação da possibilidade de cálculo de um limite pode reduzir a compreensão da noção de *existência* à verificação da ocorrência de uma igualdade (*). Além disso, uma condição necessária, todavia, não suficiente, para a existência do limite num ponto $x = a$ refere-se ao caráter limitado da imagem da função f .

Por exemplo, nos gráficos das figuras 7 e 8, divisamos o comportamento das funções que se apresentam no numerador e denominador, respectivamente, do limite

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$. Com apoio na visualização, depreendemos que tanto a função

$[e^x + e^{-x} - 2]$ como $[1 - \cos(x)]$ possuem uma imagem limitada numa vizinhança do ponto $x = 0$, pois, na medida em que $x \rightarrow 0^-$ ou $x \rightarrow 0^+$, suas respectivas imagens assumem valores pequenos, o que se caracteriza como uma condição apenas necessária, e não suficiente (*), para a *existência* do mesmo (ver figura 8).

Outra situação didática importante é a exploração de contraexemplos. De fato, considerando o seguinte limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \text{sen}(x)}{x}$, quando nos restringimos aos procedimentos analíticos, deparamos a seguinte indeterminação $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \text{sen}(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$, onde vale destacar que o comportamento de crescimento é devido à componente linear, pois $|\text{sen}(x)| \leq 1$. Por outro lado, se tentamos aplicar a ideia da *regra de L'Hospital*, concluiremos que $\frac{1 + \cos(x)}{1} = 1 + \cos(x)$, entretanto, a imagem desta função trigonométrica oscila entre $[0, 2]$ ($x \rightarrow +\infty$), o que nos impede de elaborar qualquer ilação sobre ela.

Está registrado em alguns livros o esforço no sentido de se atribuir um significado metafórico (intuitivo) para alguns casos de *indeterminações*. Stewart (2001, p. 306) explica que “Há uma luta violenta entre o numerador e o denominador. Se o numerador ganhar, o limite será ∞ ; se o denominador ganhar, a resposta será 0. Ou algum equilíbrio, e, nesse caso, a resposta pode ser algum número positivo, finito.”. Stewart explica o surgimento de indeterminações semelhantes ao caso dos seguintes limites que estudaremos em seguida, descritos por $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\text{sen}^2(x)}$.

Apesar de positiva e de ser observada como o esforço particular de certos autores de livros, a valorização do *metaphorical insight* (OTTE, 2008), a interpretação dinâmica descrita por Stewart, entretanto, pode proporcionar também dificuldades, sobretudo, quando saber se a resposta final do comportamento do quociente é um número não nulo, se é simplesmente infinito ou ainda, pelo fato das funções presentes na fração $\frac{f}{g}$ serem ambas contínuas no ponto $x = 0$, a fração $\frac{0}{0}$ indicar exatamente os valores assumidos.

Uma noção estreitamente vinculada à *regra de L'Hospital* e que recebeu atenção há séculos antes de Cristo, é denotada em Matemática por ∞ e simboliza o infinito, o qual foi definido de maneiras diferentes, segundo épocas diferentes (MAURICE, 2000, p. 27). Vale mencionar que, pela aplicação da *regra de L'Hospital*, que hora discutimos, os alunos deparam noções de difícil entendimento. Com efeito, tal entidade conceitual, dependendo da noção adotada (MAURICE, 2000, p. 28) é passível de uma análise e descrição lógica, aritmética, algébrica e geométrica (COUTURAT, 1973), que pode atuar como um entrave ou obstáculo epistemológico (ARTIGUE, 1995b, p. 111).

Couturat (1973, p. 341) evidencia ainda um papel recorrentemente assumido pelo matemático ao recordar que “o matemático não define, de modo profundo, e não definiu o número; ele define somente a igualdade de números, e isto lhe fornece condições suficientes para a construção de toda a Aritmética.”. Mais adiante, Couturat lembra que tal modo de definição implica uma ideia filosófica, todavia, “esta não é a principal ocupação do matemático.” (COUTURAT, 1973, p. 342).

Ora, as considerações do matemático e lógico Louis Couturat (1868-1914) preservam vigor e adequação à nossa realidade atual. De fato, no ensino acadêmico, tanto por parte de professores, como por parte do relato de investigadores (HEREDIA, 2007), registra-se a ênfase nas manipulações algébricas em detrimento do significado conceitual e a compreensão intuitiva dos conceitos, incluindo-se aí as noções topológicas (BRIDOUX, 2011) das definições matemáticas formais.

Por outro lado, vale evidenciar que “as definições matemáticas são puramente nominais e, em consequência, pressupõem sempre os conceitos que elas tencionam construir.” (COUTURAT, 1973, p. 342), todavia, num contexto inicial do primeiro contato com o Cálculo, a ênfase no ensino poderia ser dada ao significado, uma vez que o domínio puramente lógico-matemático não é fator suficiente garantidor de uma compreensão satisfatória deste *corpus* teórico.

Em todo caso, sabemos que esta ou aquela forma de abordar o Cálculo dependerá da expectativa dos professores desta disciplina (SILVA, 2011, p. 400). No próximo segmento, introduziremos em nossa discussão a tecnologia. Seu papel se destaca no sentido de proporcionar a evolução de habilidades cognitivas pertinentes à visualização e percepção de propriedades geométricas e topológicas no IR^2 .

1.1. O uso da tecnologia no ensino do Cálculo e um pouco de História

Concordamos com Artigue (2007, p. 69) quando acentua que “a escolha de uma tecnologia envolve uma razão pessoal.”. Um pouco mais adiante, a pesquisadora explica ainda que a exploração de instrumentos tecnológicos possibilita a exploração de situações inimagináveis quando restritas ao lápis/papel (ARTIGUE, 2007, p. 73).

Neste contexto de discussão, destacamos o *software Geogebra* que tem sido instrumento empregado na mediação envolvendo o ensino, adotado em inúmeras investigações (ALVES, 2012) que envolvem uma preocupação em torno de problemas e entraves registrados nas práticas docentes no *locus* acadêmico (ARTIGUE, 1995c).

Cabe aqui um pequeno comentário de natureza histórica, no intuito de divisarmos dois pontos de vista. O primeiro, diz respeito ao modo pelo qual os matemáticos do passado

atacaram problemas importantes. Alonso (2004, p. 135), por exemplo, comenta que o esforço de *L'Hospital* em representar geometricamente as diferenças de ordem maiores do que um, ao descrever a noção de *ponto de inflexão*. Na figura 1 destacamos os diagramas fornecidos pelo próprio *L'Hospital*, o que possibilitou a transmissão de suas ideias a outros matemáticos.

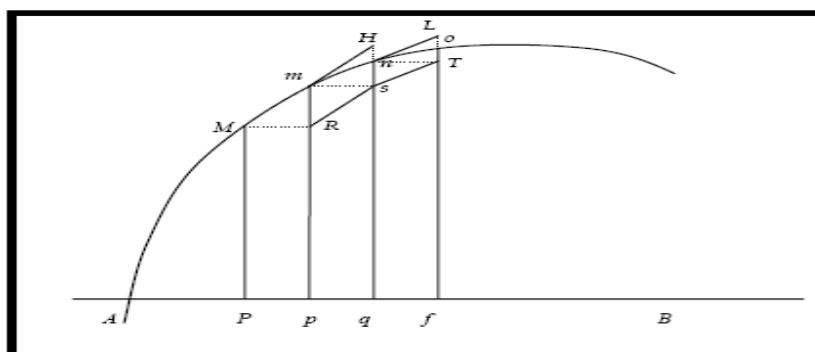


Figura 1: Alonso (2004) explica o esforço de *L'Hospital* em representar geometricamente certos conceitos. O mesmo expediente pode ser verificado na descrição de Barbosa (2008) sobre o trabalho do *L'Hospital*. Além disso, Barbosa (2008, p. 38-39) acrescenta alguns gráficos computacionais para explicar trechos escritos pelo matemático no livro intitulado *Analysis des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Ademais, com o livro *Analyse des infiniment petit* em 1694, *L'Hospital* introduziu ideias inovadoras que marcaram o novo Cálculo, segundo Hairer & Wanner (2008, p. 83).

Hodiernamente, presenciamos o mesmo expediente no que concerne a exploração de uma diversidade de representações para os conceitos - notadamente, os de natureza gráfica, seguindo-se a uma mudança das práticas educativas e da dialética da mediação do professor, graças à inserção da tecnologia em sala de aula (ARTIGUE, 1997; 2007). No contexto de ensino específico do Cálculo, a exploração de *softwares* no ensino de Matemática tem sido registrada há décadas (ARTIGUE, 1997), mesmo assim, a persistência de dificuldades específicas na aprendizagem é marcada por aspectos intrínsecos ao próprio saber (ARTIGUE, 1995c) ou o modo de sua apresentação no *locus* acadêmico. Bridoux (2011, p. 31) aponta um dos elementos intrínsecos a esse saber quando menciona que, no caso da topologia da reta ou topologia do espaço \mathbb{R}^n , “mostramos que o trabalho técnico de manipulação de definições implica numerosas adaptações que colocam em jogo números conhecimentos prévios sobre números reais.” (BRIDOUX, 2011, p. 31). Artigue (1995c) aponta ainda elementos como: números reais, função e limite, vinculados às dificuldades de conceitualização.

Neste sentido, destacamos a importância da compreensão das noções de vizinhança e de conjuntos abertos. A tecnologia proporciona a produção de sentenças proposicionais relativas à visualização e ao entendimento de propriedades do gráfico (em azul) de funções como $\frac{x + \text{sen}(x)}{x}$. Quando aplicamos a *regra de L'Hospital*, obtemos $1 + \text{cos}(x)/1$ e, tal função não possui um único valor como limite, quando $x \rightarrow \infty$; mas, se mantém limitada ao longo de toda a reta real (gráfico em vermelho). Este exemplo funciona como advertência para estudantes que procuram aplicar teoremas e formulações, de modo precipitado, irrefletido e sem atenção às hipóteses e a seu significado geométrico (figura 2). Destaquemos, ainda, que o *software* não evidencia o ponto de descontinuidade da função inicial no ponto $x = 0$.

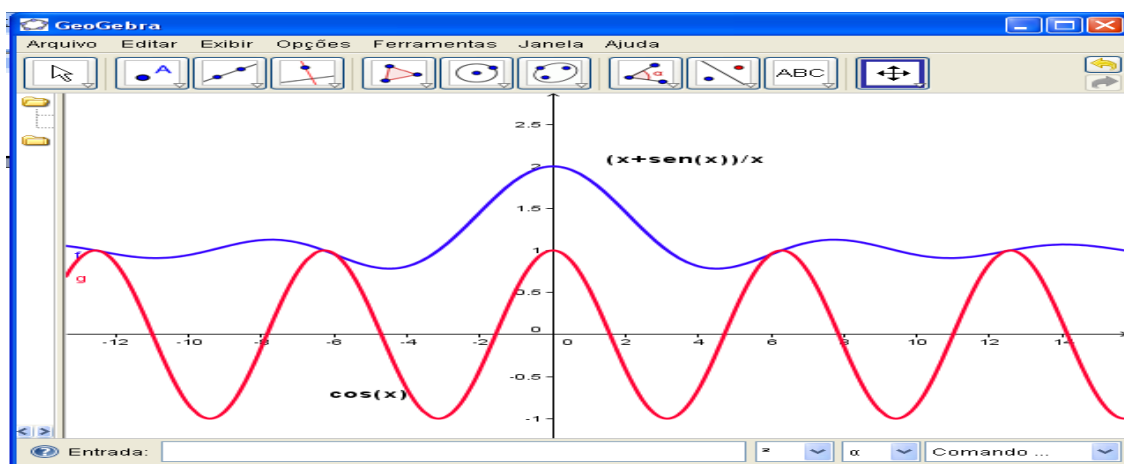


Figura 2: Exploração de contraexemplos com apoio na tecnologia

2 Problema da Pesquisa

O problema de investigação diz respeito à abordagem didática da *regra de L'Hospital* e ao entendimento da manifestação (no quadro geométrico) de *formas indeterminadas* no cálculo de limites. Assim, a formulação deste problema indica uma dificuldade que pretendemos resolver ou, pelo menos, compreender no contexto de um curso de graduação em Matemática (licenciatura). Por outro lado, diante dos entraves (de natureza epistemológica, histórica e didática) apontados nas seções anteriores, levantaremos algumas hipóteses que tencionamos averiguar ao decorrer do estudo.

2.1 Hipóteses da Pesquisa

Desde que apoiamos nossas ações nos pressupostos da ED, então assumimos determinadas hipóteses de trabalho ao longo de todo o processo investigativo:

1ª) com o uso da tecnologia os alunos reveem suas estratégias empregadas nas atividades que passam a ser não apenas apoiadas na atividade algébrica;

2^a) o *software* proporciona a exploração de habilidade pertinentes à visualização e percepção no sentido de extrair conclusões para a aplicação de *regra de L'Hospital* e

3^a) o *software* proporciona a formulação de sentenças proposicionais extraídas da visualização e percepção das propriedades topológicas dos gráficos das funções presentes no numerador e no denominador da fração que se tenciona analisar e calcular os limites laterais e sua condição de existência (*).

2.2 Objetivos da Pesquisa

Este trabalho teve como objetivo geral implementar uma ED como metodologia de pesquisa, envolvendo a exploração de situações didáticas relacionadas com a *regra de L'Hospital*. Para alcançar este objetivo geral, descrevemos ainda os seguintes objetivos específicos: promover a habilidade de visualização da identificação de *indeterminações* do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$; explorar a tecnologia no sentido de provocar a revisão das estratégias (na *fase de prova* da SF) e a manifestação de erros; com intermédio do uso do *software*, evitar o emprego automático da *regra de L'Hospital* nas fases de *tomada de posição* e de *maturação*. Com respeito a este último objetivo específico, sua discussão e descrição serão retomadas na próxima seção.

3. Metodologia da Pesquisa

A metodologia de pesquisa adotada foi a *Engenharia Didática* - ED, que surgiu, oficialmente, na área de investigação da Didática da Matemática, no início dos anos 80 (ARTIGUE, 2008, p. 10). Esse termo é explicado por Artigue (1995a, p. 243), com vista a caracterizar “uma forma de trabalho didático, semelhante ao trabalho de um engenheiro que para realizar um projeto preciso, apoia-se sobre conhecimentos científicos de seu domínio e aceita se submeter a um controle do tipo científico”, todavia, ao mesmo tempo, encontra-se obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos que os já depurados pela ciência e, assim, ataca, com todos os meios de que dispõe, os problemas que a ciência ainda não levou em consideração.

A metodologia de pesquisa por nós adotada “se caracteriza como um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e análise de sequências de ensino.” (ARTIGUE, 1995a, p. 247). Almouloud (2007, p. 171) destaca que tal esquema experimental apresenta como um modo de *validação* “a comparação entre *análise a priori* e *análise a posteriori*” e, em virtude de apresentar uma *validação interna*, não há a necessidade de aplicação de pré-teste ou pós-teste.

A ED apresenta dois níveis de pesquisa: a *microengenharia* e a *macroengenharia*. A pesquisa em *microengenharia* (com variáveis de comando locais) apresenta um olhar mais restrito, na medida em que se interessa pelas relações e fenômenos que ocorrem em sala de aula e “são mais fáceis de desenvolver na prática” (ARTIGUE, 1995b, p. 36). Neste nível, podemos estudar determinado assunto no âmbito da complexidade da classe. No outro nível (variáveis macro-didáticas ou globais), deparamos dificuldades metodológicas e institucionais que não foram objeto de nossa atenção.

Esta pesquisa é uma *microengenharia* que busca desenvolver uma *Engenharia Didática* no contexto do ensino do Cálculo em Uma Variável Real (CUV), relativo à estruturação e exploração didática de situações problema envolvendo a *regra de L'Hospital*. Deste modo, a *regra de L'Hospital* constituiu nosso objeto matemático e procuramos investigar os processos de ensino e aprendizagem em torno deste objeto, com o arrimo da *Sequência Fedathi* – SF.

Como já mencionamos, nossa ED apresenta um método de *validação interna* e não emprega métodos estatísticos comparativos, fundamentados em comparação externa, aplicados em grupos experimentais ou de controle (ARTIGUE, 1995b, p. 37). Apresenta também *variáveis macrodidáticas* e *variáveis microdidáticas*. Por fim, esclarecemos que as primeiras *variáveis de comando*, dizem respeito à organização global da ED, enquanto que as *variáveis microdidáticas* relacionam-se com uma fase específica.

4 Fases da Engenharia

4.1 Análises preliminares

De modo sistemático, conforme Artigue (1995a, p. 249-250), nesta etapa consideramos: uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino; análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; exame das concepções e conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual e seus efeitos. Por fim, todos os elementos anteriores levaram em consideração os objetivos desta investigação.

No que se refere ao exame das concepções e conhecimentos prévios dos estudantes que participaram do estudo (*análises preliminares* ou *análise teórica*), destacamos dois conhecimentos específicos que devem proporcionar a ação e o engajamento dos mesmos nas atividades que propomos. O primeiro, diz respeito ao fato de que a eles apresentamos o teorema que enunciamos na seção 1 e, as duas demonstrações possíveis da regra, todavia, numa perspectiva de análise cognitiva, os mesmo apresentaram

dificuldades inerentes ao entendimento dos argumentos formais, sobretudo, envolvendo a formulação $\varepsilon - \delta$ (ARTIGUE, 2002, p. 174) e com respeito à noção de limite, em consonância ao que prevê Artigue (1995b, p. 114).

Segundo, a partir da figura 4 (p. 11), proporcionamos sua familiarização pertinente à exploração e obtenção de gráficos de funções no *Geogebra*. Deste modo, exploramos a manipulação e entendimento do comportamento do crescimento de funções que, geralmente, comparecem nos cálculos envolvendo o uso da regra.

Parte das *análises preliminares* é constituída também, segundo Almouloud (2007, p. 172), de uma análise da organização didática referente ao objeto matemático escolhido. Deste modo, realizamos uma pesquisa em livros didáticos de CUV (GUIDORIZZI, 2010; LEITHOLD, 1994; SIMMONS, 1988; STEWART, 2001), com o objetivo precípuo de compreender e comparar a abordagem e a demonstração formal do teorema que caracteriza a *regra de L'Hospital*. O objetivo desta revisão bibliográfica foi encontrar atividades didáticas potencializadoras e diferenciadas dos conceitos matemáticos envolvendo nosso objetivo geral.

A *parte preditiva* desta fase centra-se nas características das situações didáticas que tencionamos levar aos estudantes e que serão descritas na próxima seção. Consideramos também o que pode ser posto em funcionamento pelos sujeitos em circunstância de ação, seleção, decisão, controle e validação dos resultados. Neste caso, por exemplo, os estudantes dispõem da aplicação do teorema enunciado no início da seção 1. Reparemos, entretanto, que “os elementos considerados nesta fase podem ser retomados na etapa seguinte” (ALMOULOU, 2010, p. 173).

4.2 Concepção e Análise *a priori*

Salientamos que a ED é uma metodologia de pesquisa, sendo assim, torna-se indispensável o uso de teorias que servem para fundamentar nossa investigação e para a leitura/interpretação dos dados. Ademais, na *análise a priori*, determinaremos o controle do “comportamento dos alunos e seu sentido” (ARTIGUE, 1995a, p. 258).

Artigue (2008, p. 12-13), ao descrever as mudanças atuais e a evolução da ED, evidencia a contribuição e influência de outras teorias empregadas de modo conjunto com a ED, o que condiciona um *design* didático privilegiado. Deste modo, adotamos como metodologia de ensino conhecida como *Sequência Fedathi* (SF), a qual tem sido utilizada em trabalhos (ALVES, 2011) desenvolvidos no Estado do Ceará.

A exploração de um problema, por parte do professor de Matemática, influenciado pelos fundamentos assumidos na *Sequência Fedathi – SF* (BORGES NETO et al, 2001; BORGES NETO & SANTANA, 2001), não orienta sua explicitação imediata do mesmo. Além disso, as situações devem ser portadoras de um potencial capaz de fazer surgir as concepções, produção de conjecturas, ações e decisões dos estudantes em situação que são objeto de nossa atenção.

No que se refere ao funcionamento do sistema pedagógico, a SF valoriza a investigação matemática por parte do estudante, de modo semelhante à atividade do matemático profissional (BORGES NETO et al, 2001). Assim, orienta a atividade da mediação do professor no sentido de evitar o fortalecimento de um ritual de ensino indefectível, que condiciona a ação do estudante (ou grupos de estudantes) ao emprego automático de modelos formais matemáticos, desprovidos de sentido e de um real entendimento.

De modo sistemático, com o objetivo precípuo de estruturação da sequência, seguimos as etapas a seguir expressas.

Fase 1 Tomada de posição – apresentação do problema.

No que se refere aos alunos, faz parte do seu papel a descoberta/identificação de um problema relevante. No caso das duas atividades propostas e a exploração do recurso computacional, os estudantes vivenciam um clima de debate em sala de aula. Cabe ao professor estimular os aprendizes à formulação de conjecturas. Por outro lado, a proposta metodológica apoiada nos pressupostos da SF valoriza o papel do erro. Deste modo, na atividade 1 (figura 7), apresentamos aos estudantes um gráfico incorreto da função $\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$ (atividade 1). Com efeito, o gráfico correto é exibido na figura 3

(lado esquerdo) e inferimos que o limite vale 2, de acordo com os limites laterais.

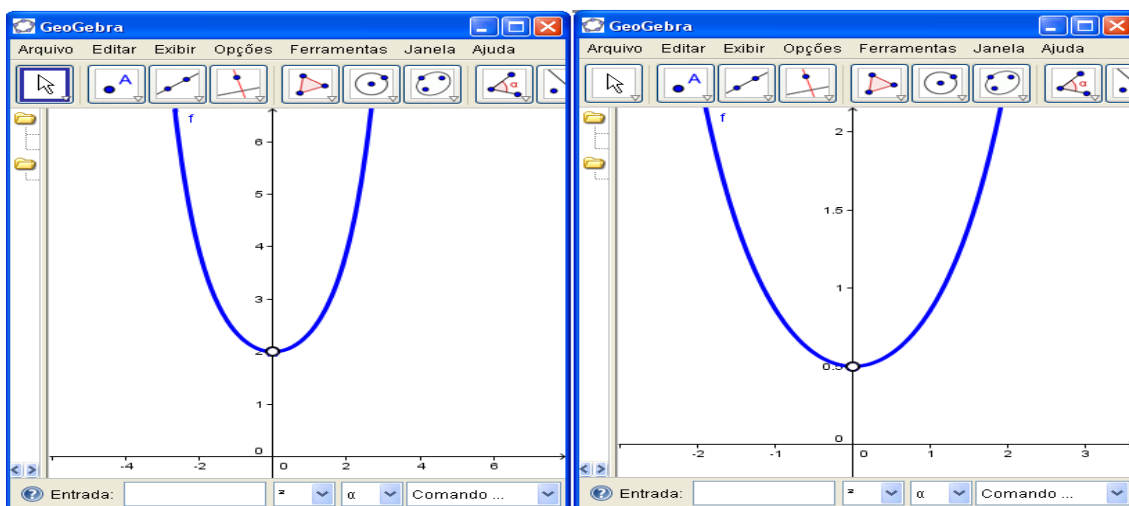


Figura 3: Exploração e valorização didática do erro nas fases de mediação da SF

Nessa fase, a visualização e entendimento acerca do crescimento/decrescimento das funções (e suas combinações) envolvidas no quociente $\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$ é essencial. Aqui, empregamos a situação discutida por Alves (2012, p. CLXXIV). Nessa situação didática, nos apoiando-nos na descrição de Artigue (1995b, p. 38), identificamos as possíveis concepções e obstáculos que podem atuar com entraves às situações propostas na *experimentação*.

Sendo assim, com base na análise e exploração das funções que exibimos na figura 4, os alunos adquiriram o entendimento sobre a razão de crescimento/decrescimento pertinente ao quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ e a verificação da condição (*) (ver página 3).

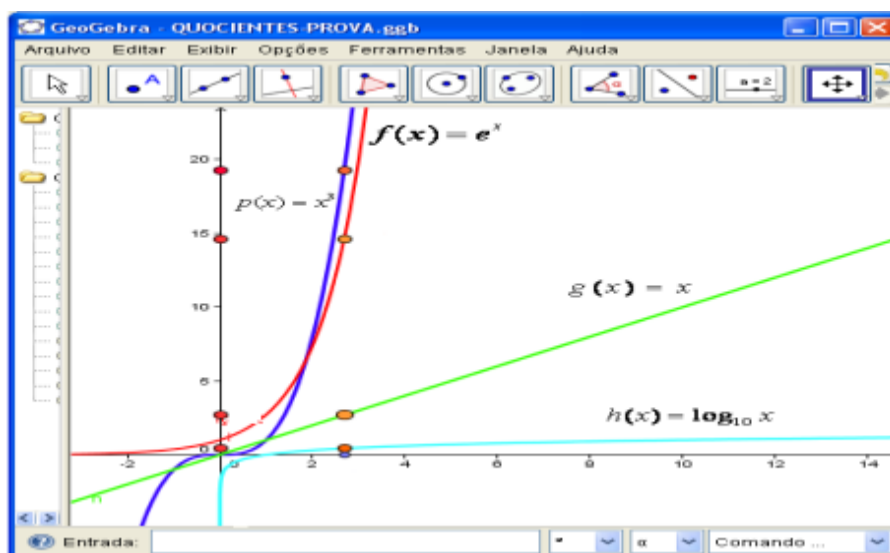


Figura 4: Exploração e entendimento sobre o comportamento de funções (ALVES, 2012, p. CLXXIV)

Na próxima fase, explicitamos o problema em foco.

Fase 2 Maturação – entendimento e identificação das variáveis envolvidas no problema. Nesta fase, os alunos são estimulados à identificação das variáveis mais pertinentes (com a exploração do *software*), ou melhor, expressando, os elementos invariantes das situações. Parte destes elementos diz respeito aos teoremas que podem ser empregados para a aplicação de uma estratégia que pode possuir maior chance de êxito. Devido ao uso da tecnologia, as possíveis estratégias implementadas na próxima fase não devem se restringir apenas ao quadro analítico-algébrico.

Fase 3 Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema.

Nesta fase, os alunos devem empregar uma estratégia com vistas à solução das

atividades propostas. Reparemos que por opção e limites de síntese deste artigo, casos de indeterminações do tipo 0^0 , ∞^0 , ∞^∞ ou 1^∞ não serão analisadas aqui. Cabe destacar ainda que as indeterminações aqui analisadas são do tipo $0/0$ e ∞/∞ . Todavia, podem

ocorrer duas possibilidades: (i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, com f, g contínuas no ponto $x = a$ e

$f(a) = 0 = g(a)$; (ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Nesta fase ainda,

simbologias que podem provocar confusões dizem respeito, por exemplo, à simbologia

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ que detalharemos, do ponto de vista formal, na próxima fase. Vale

sublinhar, entretanto, que os problemas (ARTIGUE, 2002) pertinentes ao símbolo $f'(a)$ são bastante conhecidos na literatura, bem como as incompreensões e erros

usuais manifestados pelos alunos quando lidam com expressões do tipo $\frac{a}{0} (a \neq 0)$ e $\frac{0}{0}$,

relatada na tese de Maurice (2000, p. 32).

Vale comentar ainda que, no ensino ordinário, sem o uso das tecnologias, as tarefas em torno do uso da *regra de L'Hospital* apresentam, do ponto de vista da mediação didática, apenas a *fase de solução*. Para exemplificar, encontramos em Bourchtein &

Bourchtein (2010, p. 285) os seguintes limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{2008}}{(x^2+3x+5)^{1004}}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\text{sen}(x)}$.

No primeiro caso, apesar de se apresentar como um caso extremo, o aluno necessitaria empregar a *regra de L'Hospital* 2008 vezes sucessivas (BOURCHTEIN & BOURCHTEIN, 2008, p. 285), com ênfase no viés procedimental. Outrossim, o conhecimento conceitual é negligenciado em detrimento do procedimental. Enquanto

que no caso de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\text{sen}(x)}$, temos um contraexemplo enriquecedor. Nesse sentido,

a impossibilidade da aplicação da regra é devida ao fato de que não contamos com a

existência do seguinte limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)}$ exigido no enunciado (p. 2).

Geometricamente, podemos instigar o estudante ao entendimento acerca da não existência desse último limite, graças ao crescimento/decrescimento indefinido da

declividade, na medida em que $x \rightarrow 0^-$ ou $x \rightarrow 0^+$ (ver figura 5, lado direito).

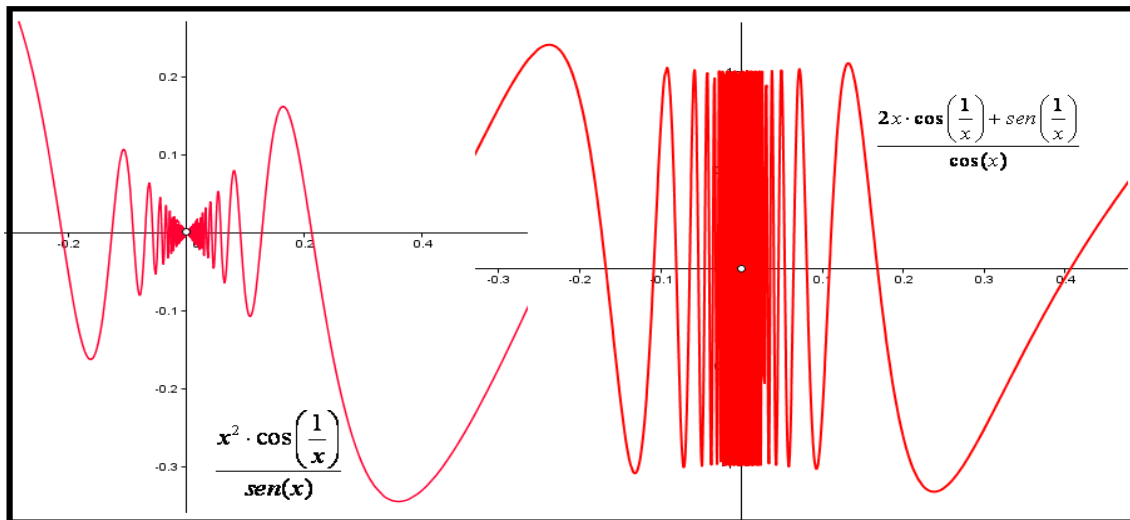


Figura 5: Contraexemplo para a regra de L'Hospital com apoio computacional

Fase 4 Prova – formalização do modelo matemático a ser ensinado.

Na última fase, o professor deve retomar a condução do debate com a intenção de evidenciar e indicar a adequação dos argumentos válidos aplicados na resolução das atividades propostas, os limites de aplicabilidade destes e a possibilidade de restrições e/ou inconsistências com o modelo formal aqui adotado (teorema, seção 1).

Sublinhamos que nosso contexto de discussão diz respeito a um curso de licenciatura em Matemática. Deste modo, nas situações didáticas em que exploramos a *regra de L'Hopital*, o conhecimento e domínio das demonstrações não são essenciais e, sim, o entendimento de suas limitações e possíveis interpretações geométricas. Ademais, vale observar que nas duas demonstrações mais divulgadas (BARBOSA, 2008; BOURCHTEN & BOURCHTEN, 2010; LIMA, 2006), os conhecimentos de *Análise Real* são exigidos.

Bourchten & Bourchten (2010, p. 275-276) apresenta a demonstração da regra em toda a sua generalidade, como consequência do *teorema de Cauchy*. Cabe mencionar, entretanto, um caso especial da regra (STEWART, 2001, p. 307) quando sabemos a priori que no cálculo do limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ ocorra que $f(a) = g(a) = 0$, com f' e g' contínuas e vale $g'(a) \neq 0$. Diante destas hipóteses, escrevemos:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} &\stackrel{(i)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)} \stackrel{(ii)}{=} \frac{f'(a)}{g'(a)} \stackrel{(iii)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \stackrel{(iv)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - 0}{x - a}} \stackrel{(v)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \\ &\stackrel{(vi)}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Certamente todas as inferências partiram da condição inicial em que o limite $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ existe. E usando ainda a continuidade das derivadas, estabelecemos

ainda que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{(vii)}{=} \frac{f'(a)}{g'(a)}$ possui um significado geométrico importante,

que descreve o comportamento das declividades de retas tangentes ao gráfico das funções presentes no numerador e no denominador da fração f/g . Por outro lado, Lima (2006, p. 91) enfraquece as hipóteses acima, tomando apenas funções f e g deriváveis, com $f(a) = g(a) = 0$. Segue então sua demonstração:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)-0}{x-a}}{\frac{g(x)-0}{x-a}} \stackrel{\text{definição}}{=} \frac{f'(a)}{g'(a)} \therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Cabem alguns comentários para que possamos comparar as duas deduções formais. Inicialmente, na primeira dedução, empregamos seis passagens dedutivas (inferências lógicas) apoiadas em propriedades garantidas pelas hipóteses assumidas *a priori*. Neste caso ainda, as funções $f, g \in C^1$, ou seja, possuem as derivadas de primeira ordem contínuas, enquanto que no segundo caso, elas são apenas diferenciáveis no ponto $x = a$.

Quando comparamos os gráficos das figuras 11, 12, 13 e 14, visualizamos que no caso da figura 12, tanto a imagem da função do numerador como $e^{2x^2} - 1$ como a imagem da função do denominador $\text{sen}^2(x)$ tanto se aproximam de zero como, em virtude da continuidade de ambas, assume o valor 0, daí, surge a indeterminação $\frac{0}{0}$ e nada se

pode concluir. Todavia, pela figura 11, concluímos que o limite do quociente $(e^{2x^2} - 1) / (\text{sen}^2(x))$ existe e tende para o quociente $\frac{4}{2} = 2$ (pelo gráfico 14).

Observamos que, segundo Stewart (2001, p. 307), contamos com a continuidade das funções f' e g' , assim a fração $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ designa os valores precisamente assumidos pelas mesmas. Por outro lado, de acordo com o que é assumido por Lima (2006, p. 91),

na igualdade $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, os símbolos $f'(a)$ e $g'(a)$ representam dois limites a

calcular do tipo $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ e, neste caso, não nos importa a função $f'(x)$

estar ou não definida neste ponto, embora, uma função diferenciável no ponto, *a fortiori*, será também contínua no ponto. Em relação a este fato, Lima (2006, p. 91) indica uma importante observação e o equívoco frequente no processo desse cálculo.

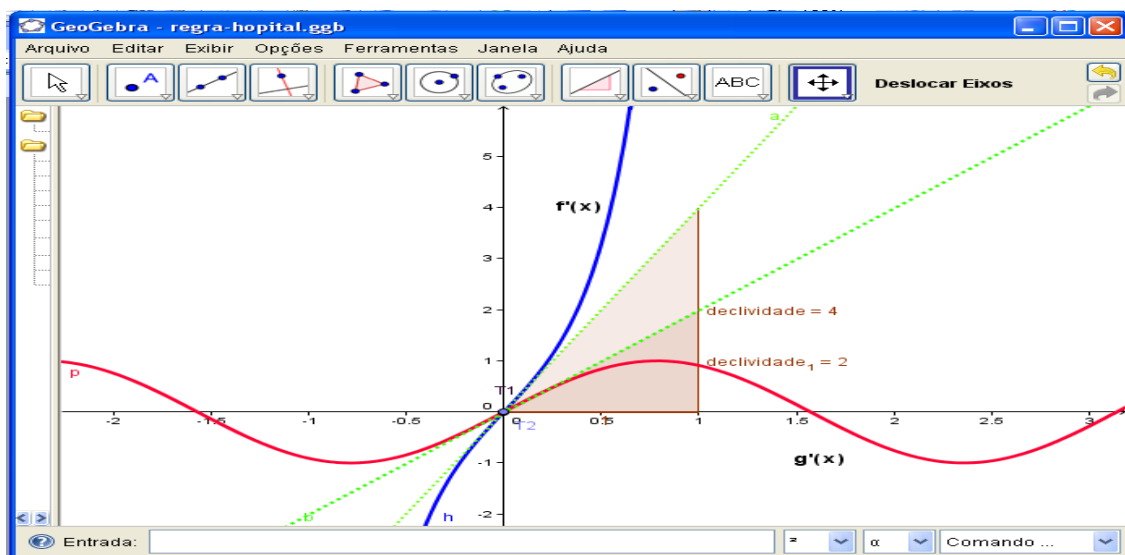


Figura 6: Interpretação geométrica da regra de L'Hospital

Por fim, na demonstração de Lima (2006, p. 91) não contamos com a existência do

limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Neste caso, o argumento de Stewart (2001, p. 307) garante que o

aluno pode passar à investigação do limite do quociente das derivadas de ordem imediatamente superior. Já no caso de Lima (2006, p. 91), temos a indicação precisa do

valor do limite $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ que, geometricamente, representa o quociente entre dois números

os quais fornecem o valor das declividades de duas retas tangentes, no ponto $x = a$, aos gráficos das funções f e g , como já explicamos há pouco.

As atividades que apresentamos possuem um elemento diferenciado, em relação ao estilo de questões que observamos nos livros de Cálculo (GUIDORIZZI, 2010; LEITHOLD, 1994; SIMMONS, 1988; STEWART, 2001) aqui consultados. De fato, a extração e a comparação dos dados de natureza analítica e geométrica é recorrente em cada situação proposta. Apresentamos, pois, a *análise a priori* das situações-problema, na perspectiva de Almouloud (2007, p. 176), quando evidencia a relevância de uma *análise matemática*, bem como uma *análise didática*.

Atividade 1. Considerando o seguinte limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$, observe seu gráfico (fig. 7) e (a) analise de modo convincente sua existência (sem realizar cálculos) em um ponto.

Comentário: Reparemos que neste caso, quando restrito ao ambiente lápis/papel, o solucionador de problemas deve identificar uma *indeterminação* do tipo $\frac{0}{0}$, uma vez

que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \frac{e^0 + e^{-0} - 2}{1 - \cos(0)}$ e as funções do numerador e denominador são contínuas no ponto $x = 0$. Tal indeterminação pode ser evitada pela aplicação da regra.

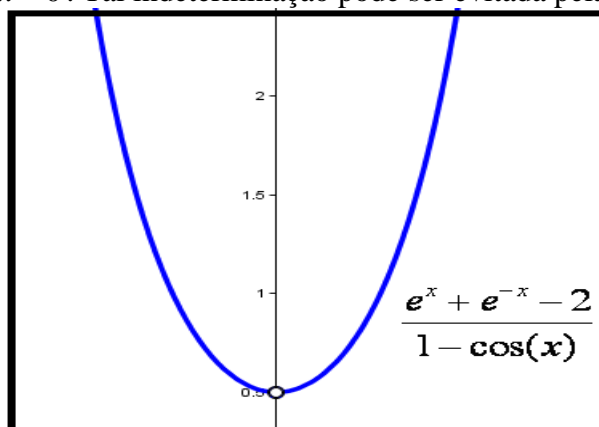


Figura 7: Comportamento do quociente das funções na origem

(b) Analisando o comportamento dos gráficos das funções f e g explique (justifique) se há alguma indeterminação e indique o ponto escolhido.

Comentário: Nesta situação, com apoio na visualização (fase de *tomada de posição e maturação*), o solucionador de problemas deve comparar os gráficos exibidos nas figuras 8 e 9. Concluir do gráfico 7 que há uma indeterminação, uma vez que tanto a função do numerador como a função do denominador se aproximam de zero, na medida em que $x \rightarrow 0$, todavia, o limite (figura 7) existe. Assim, na *fase de solução*, deverá usar a *regra de L'Hospital*. A situação de conflito aqui (na *fase de maturação*) se caracteriza pelo fato de que se consegue prever o valor do limite geometricamente, todavia, analiticamente, o solucionador deve perceber a necessidade de uso da regra.

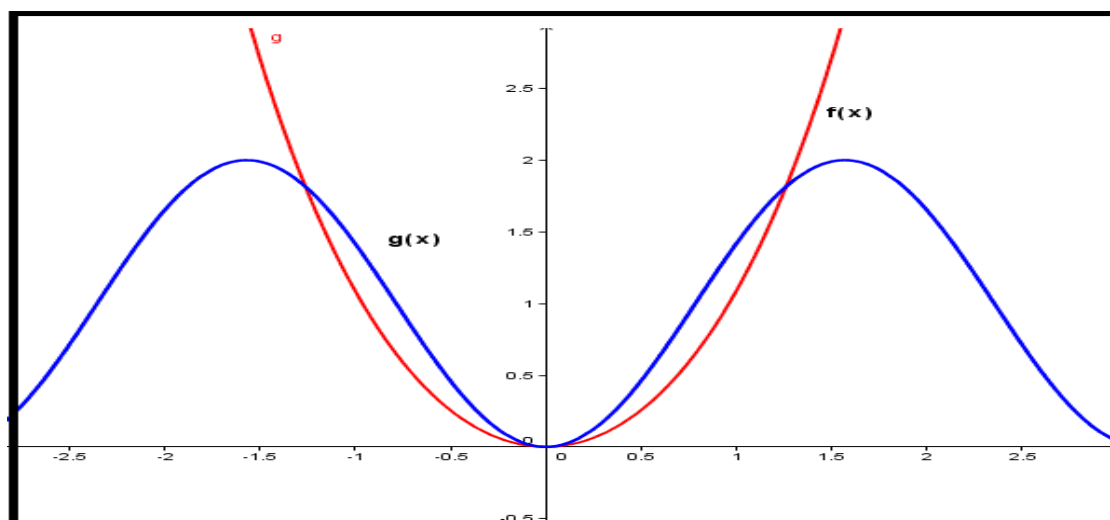


Figura 8: Comportamento da imagem das funções quando $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0^+$ e a indeterminação

c) Analisando o comportamento dos gráficos das funções f' e g' explique (justifique) se há alguma indeterminação e indique o ponto escolhido.

Comentário: Neste item, com apoio na visualização do gráfico, o solucionador deve compreender que a indeterminação em $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen}(x)}$ persiste, pois suas imagens tendem para zero. O solucionador deve buscar, então, informações das derivadas de 2ª ordens na *fase de solução* e deve compreender que existe o limite do quociente.

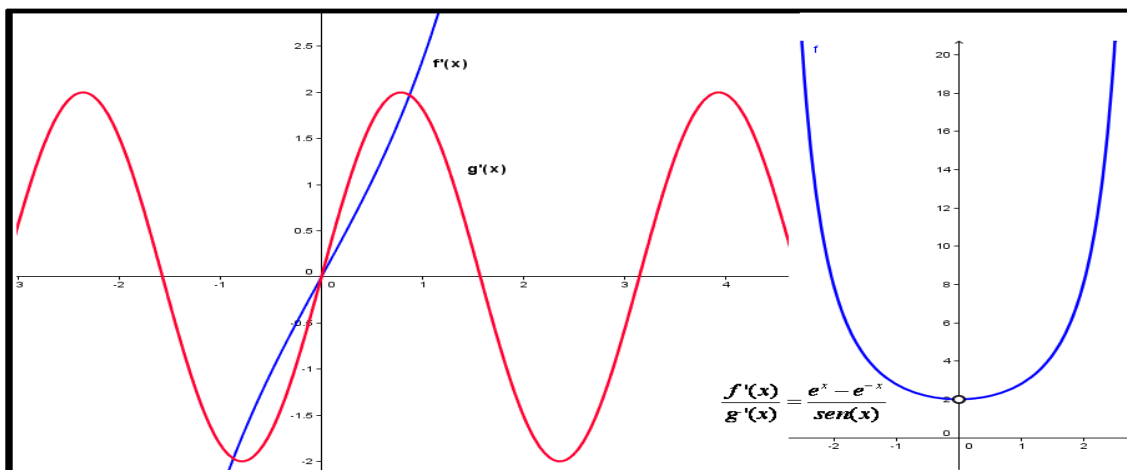


Figura 9: Comportamento da imagem das funções quando $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0^+$ e a indeterminação

d) Analisando o comportamento dos gráficos das funções f'' e g'' explique (justifique) se há a ocorrência de alguma indeterminação e indique o ponto escolhido.

Comentário: Com base na figura 10, os alunos devem perceber que nas vizinhanças da origem, a imagem da 2ª derivada da função do denominador se aproxima de 2, enquanto que a imagem da 2ª derivada da função do numerador se aproxima de 4, na medida em que $x \rightarrow 0^-$ e $x \rightarrow 0^+$. Aqui o solucionador deve compreender, com apoio no gráfico, que é necessário derivar as funções do numerador e denominador.

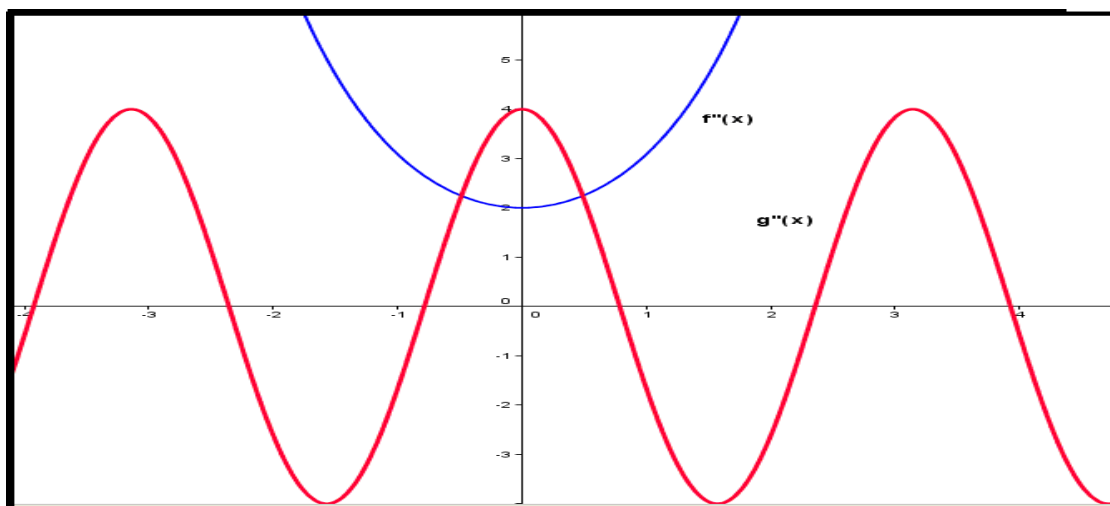


Figura 10: A indeterminação não se manifesta mais no quadro geométrico

e) Baseando-se nos itens anteriores e nos gráficos em questão, justifique quantas vezes devemos aplicar a *regra de L'Hospital* na avaliação do limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$.

Finalmente, calcule o limite indicado analiticamente pelo uso de teoremas.

Comentário: Quando restrita ao contexto lápis e papel, a resolução do limite acima envolve a aplicação de procedimentos previstos pela *regra de L'Hospital*. Neste caso, as inferências são produzidas também a partir de informações extraídas dos gráficos.

Atividade 2. Considerando o seguinte limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\text{sen}^2(x)}$, observe seu gráfico (fig. 11) e (a) analise de modo convincente sua existência (sem realizar cálculos).

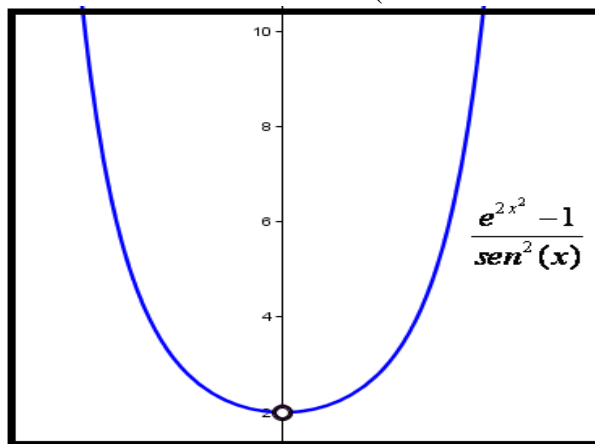


Figura 11: Comportamento do quociente das funções na origem

(b) Analisando o comportamento dos gráficos das funções f e g explique se há ocorrência de alguma indeterminação e indicar no \mathbb{R}^2 o ponto escolhido.

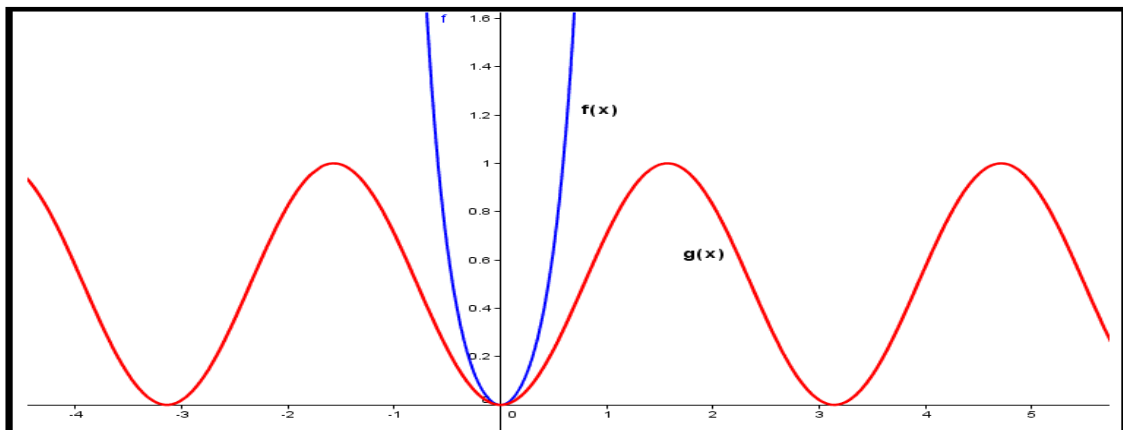


Figura 12: Comportamento da imagem das funções quando $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0^+$ e a indeterminação

c) Analisando o comportamento dos gráficos das funções f' , g' e f'/g' explique se há alguma indeterminação e indicar no \mathbb{R}^2 ponto escolhido.

Comentário: Com o apoio visual o estudante deve prever o comportamento dos limites laterais $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)/g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)/g'(x)$ e verificar a condição (*) (ver página 3).

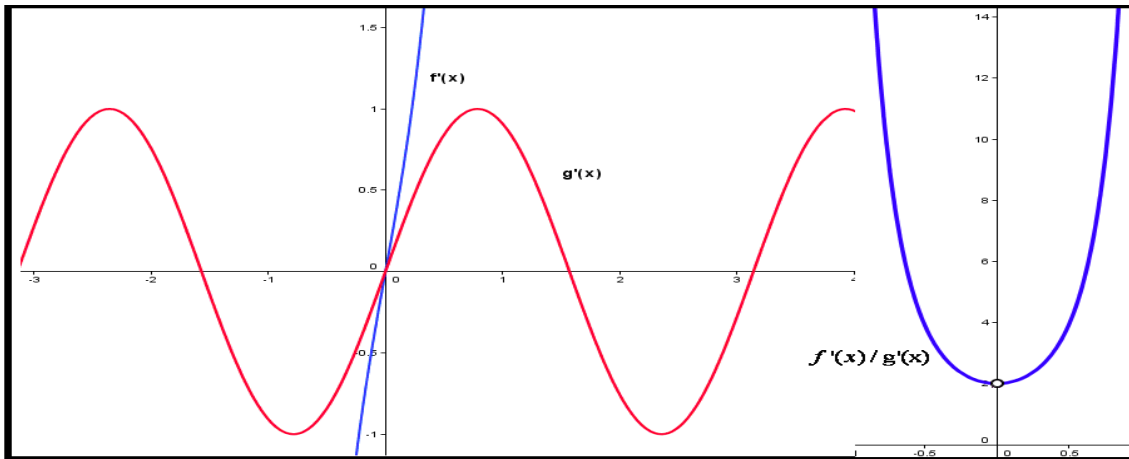


Figura 13: Comportamento da imagem das funções quando $x \rightarrow 0$ e a indeterminação

d) Baseando-se nos itens anteriores e nos gráficos em questão, justificar quantas vezes

devemos aplicar a *regra de L'Hospital* na avaliação do limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\sin^2(x)}$? Finalmente

calcule o limite indicado analiticamente, caso exista.

Comentário: Quando restrita ao contexto lápis e papel, é difícil a tarefa de relacionar o

limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}$ com a descrição geométrica que exibimos na figura 14. Esta

igualdade pode ser deduzida a partir dos argumentos utilizados em conjunto de Stewart (2001, p. 307) e Lima (2006, p. 91).

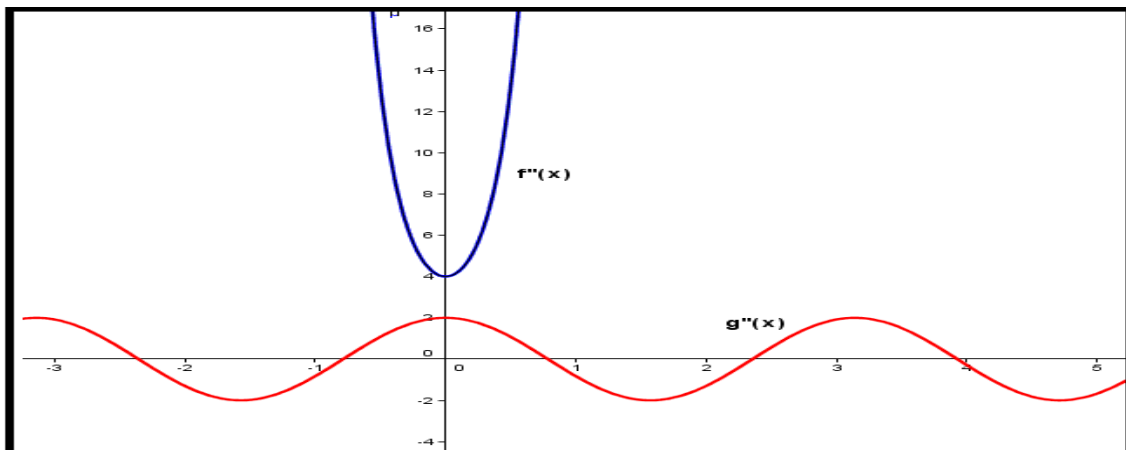


Figura 14: Na *fase de solução* os alunos comparam os dados analíticos com os dados extraídos do gráfico

Na próxima seção, apresentamos o conjunto dos dados recolhidos com consequência da *experimentação* desenvolvida no contexto de um curso de Licenciatura em Matemática, com a participação de 8 alunos. Não houve atividades de *reinvestimento* dos conhecimentos construídos, como resultado da mediação fundamentada na SF. Com isto, esperamos contribuir na melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições de transmissão e replicação didática do saber matemático aqui em foco.

4.4 Análise a posteriori e Validação

Nesta seção, apresentamos os dados pertinentes à participação das quatro duplas de estudantes, em uma sessão de experimentação, com duas horas de duração. Nossa ferramenta teórica empregada para a análise *a posteriori* e *validação* se fundamenta nos pressupostos da SF (fases de *tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova*). A significação dos dados observados se faz, deste modo, com respeito às fases previstas pela SF, com vistas à validação de nossa ED.

Reparemos, no caso da dupla 1, que um dos membros da mesma reproduziu o gráfico da função $\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$ que, sem o auxílio computacional, se torna uma tarefa inexecutável.

Ademais, declarou ainda que “[...] é suave, possui uma única concavidade.”, o que demonstra uma interpretação intuitiva pertinente ao conceito de diferenciabilidade desta função. Sua atividade foi apoiada apenas na visualização na fase de *tomada de posição*.

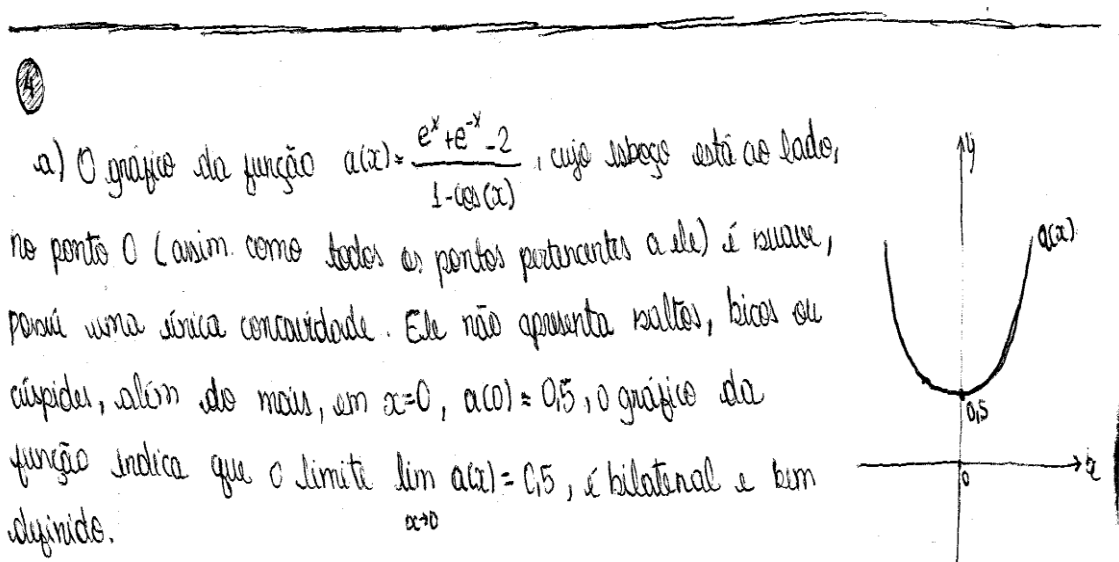


Figura 15: A dupla 1 avaliou o limite com apoio no gráfico na fase de tomada de posição. Ainda na fase de *tomada de posição*, a dupla 1 requisitou a análise dos gráficos (no computador) das funções segundo o *software*. Na figura 16, a dupla inspecionou a ocorrência de indeterminações no ponto $x = 0$, de acordo com a ordem das derivadas das funções. Aqui, a capacidade de visualização é exigida, na medida em que o solucionador percebe até que ordem é necessária à derivação das funções presentes no numerador e denominador.

De fato, essa dupla identificou o comportamento do gráfico que exibimos na figura 10 e, a partir desse, observaram a possibilidade de se livrar da indeterminação, sem o uso de expedientes de ordem analítica. Desta maneira, fizeram uso da *regra de L'Hospital*.

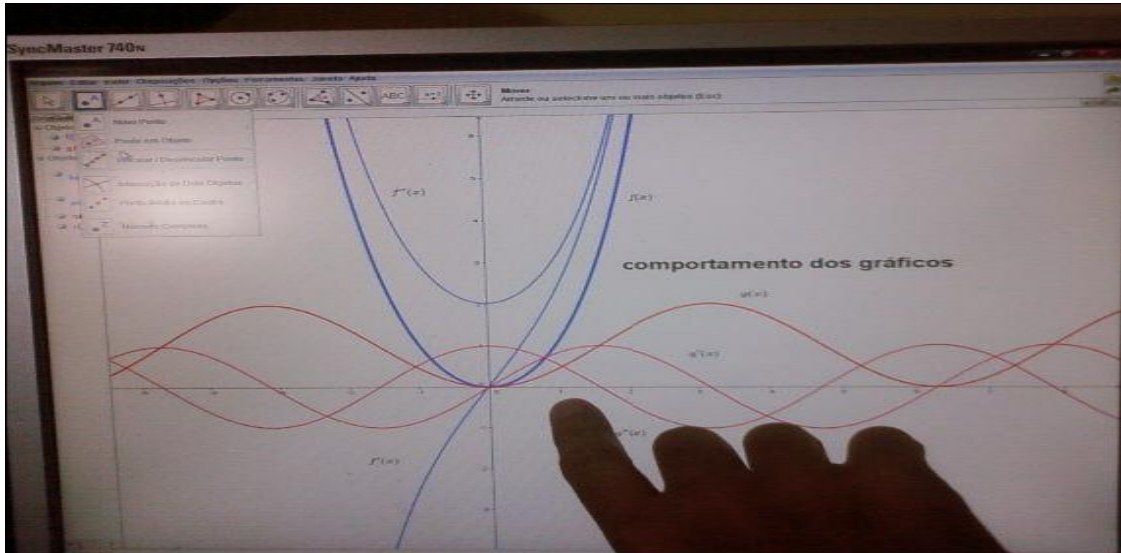


Figura 16: A dupla 1 discutiu o comportamento do gráfico da função e suas derivadas

Na fase de solução da SF, o mesmo membro da dupla 1 forneceu o seguinte procedimento analítico para diagnosticar o surgimento da indeterminação $\frac{0}{0}$. Apesar de não mencionar explicitamente, o sujeito empregou a continuidade das funções $e^x + e^{-x} - 2$ e $1 - \cos(x)$ no ponto $x=0$. Vale destacar que essa dupla realizou a identificação e a manipulação do software do gráfico correto (fig. 3, lado esquerdo). A partir do comportamento nas vizinhanças da origem, compreendeu que há um comportamento estranho (do software) na origem, em decorrência da indeterminação.

b) Tomando $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$ e $g(x) = 1 - \cos(x)$, é fácil ver que em $x=0$, temos: $f(0) = e^0 + e^0 - 2 = 0$ e $g(0) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$. Além, em $x=0$ o cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ resultaria em $\frac{0}{0}$, causando uma indeterminação.

Figura 17: Na fase de solução o aluno identifica a indeterminação

De acordo com nossos objetivos específicos, antes de qualquer algoritmização das atividades sugeridas, nossa mediação estimulou a atividade da dupla 1, à qual, inferiu dados a partir do quadro geométrico e desenvolveu ilações no que se refere à quantidade de vezes necessárias para que a indeterminação no limite desapareça (figura 10 da atividade 1). Na figura 18, um dos sujeitos da dupla, a partir do gráfico das funções presentes no quociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, declarou no item “c”. A partir de suas palavras, deparamos a manifestação do entendimento dinâmico-geométrico de aproximação, inerente ao conceito da existência de limites desta natureza (na condição *, ver p. 3).

c) É fácil ver que novamente em $x=0$, gera uma indeterminação em $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Em $f'(x)$, à medida que $x \rightarrow 0$, seja pela esquerda, ou direita, $f'(x)$ também tende a zero. No caso de $g'(x)$ também, se $x \rightarrow 0$ (seja por valores positivos ou negativos), $g'(x) \rightarrow 0$ da mesma forma. Assim, o quociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenderia ao valor $\frac{0}{0}$, uma indeterminação. Portanto, ainda em $x=0$, obteríamos uma indeterminação (algo do tipo $\frac{0}{0}$) em $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Figura 18: A dupla 1 analisou o comportamento do quociente das derivadas de 1ª ordem

Mencionamos que de modo propositado, como assim explicamos na *análise a priori*, fornecemos um gráfico exibido na figura 3 (do lado direito) de maneira incorreta (o gráfico correto indica o valor 2 como limite). No excerto abaixo (ver figura 19) comprovamos que um dos alunos da dupla 1 percebeu e questionou a fidedignidade dos dados fornecidos pelo *software* com os dados exibidos no documento.

Esta vez, obtém-se um quociente existente. $f'(x)$ está tendendo à 2, à medida que x de forma análoga, em $x=0$ $g'(x)$ assume o valor 4, sem bicos, ou pontos ou qualquer outra coisa que provoque uma indeterminação. O quociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenderia a $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$. É importante ver também que no infinito, $f'(x) \rightarrow +\infty$ (quando $x \rightarrow \pm\infty$). $g'(x)$ porém, possui imagens limitadas ao intervalo $[-4,4]$, quando um quociente de tipo $\frac{+\infty}{k}$, onde $k \in \mathbb{R} / -4 \leq k \leq 4$, não gera indeterminação.

Figura 19: Registramos a identificação do erro segundo a mediação da SF

Na fase de maturação, a dupla 1 respondeu o item “e” a partir das informações extraídas do gráfico e não empregou, de modo automático e/ou irrefletido, a regra de L'Hospital. Assim, suas conclusões, na fase de prova da SF, perante os dois tipos de representações

(algébrico e geométrico) foram concordes. Neste caso como em outros, registramos o alcance de um dos nossos objetivos específicos.

4) No limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$ teríamos então que aplicar a regra de L'Hospital duas vezes.

Analicamente, teríamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + (-1) \cdot (e^{-x})'}{0 + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$$

Aplicando a regra pela segunda vez:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - (-1) \cdot (e^{-x})' \cdot e^x}{\cos(x)} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Figura 20: Na fase de solução, a dupla 1 comparou os dados gráficos com os dados analíticos

Segundo um dos nossos objetivos específicos, conseguimos comprovar a manifestação dos estudantes que recorreram aos gráficos fornecidos e não apenas à aplicação tácita e imediata da regra de L'Hospital, restrita ao quadro algébrico. Reparemos na figura 21, que um dos sujeitos desta dupla desenvolveu uma avaliação qualitativa (na fase de maturação) de análise do gráfico da função, com a identificação do comportamento da concavidade e dos valores mínimos no gráfico, sem o emprego de teoremas formais.

04) a) Pelo gráfico nota-se que $\frac{f(x)}{g(x)}$ no ponto zero vale 0,5 e que $\frac{f(x)}{g(x)}$ está definida em todo ponto e como o gráfico não toca o eixo dos x, a função não zero em nenhum ponto.

A concavidade está voltada para cima e o vértice está em (0; 0,5) assim no ponto zero o gráfico do $\frac{f(x)}{g(x)}$ atinge um valor mínimo.

Figura 21: Na fase de maturação, a dupla 2 apoiou suas análises no comportamento geométrico

Um pouco mais adiante, na *fase de prova*, questionamos as escolhas tomadas pela dupla

1, inclusive a determinação do limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$ requerido na atividade 1.

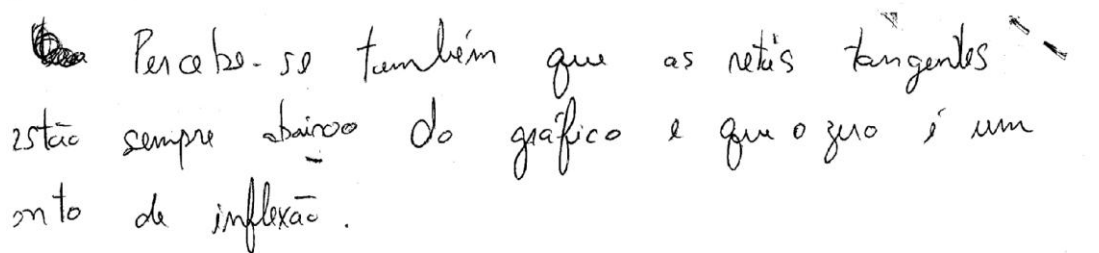
Escutamos a seguinte argumentação sobre sua existência e verificação da condição (*):

Esse limite existe porque tanto faz se aproxima pela esquerda ou direita...pelo gráfico...existe aqui no zero...Mas temos que seu valor é $\frac{1}{2}$...quando calculamos no ponto...no ponto zero o limite existe...Não, porque não tem indeterminação...a única indeterminação seria aqui...

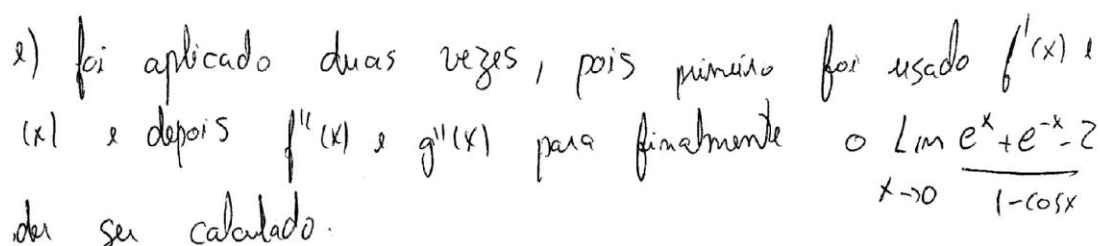
A dupla 1 concluiu a existência do limite abordado na atividade 1 apenas com apoio da visualização do gráfico fornecido pelo *software* na *fase de maturação*. Comprovamos um dos objetivos específicos na medida em que os alunos percebem a imprecisão do gráfico indicando o limite de valor 0,5 quando de fato deveria indicar o valor correto 2.

No próximo trecho destacado na figura 22, um dos sujeitos da dupla 2, com arrimo apenas na visualização, desenvolveu uma análise qualitativa do comportamento do gráfico da função $\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$, na *fase de maturação*. Com a exploração do *software* e o

uso de alguns comandos básicos do *Geogebra*, o sujeito observou o comportamento das retas tangentes ao gráfico. Registramos a produção da sentença proposicional equivocada com respeito à presença de pontos de inflexão. Apesar de equivocada sem o gráfico produzido pelo computador, torna-se uma tarefa bastante fastidiosa localizar os pontos de inflexão desta função, recorrendo-se ao estudo das derivadas de 1ª e 2ª ordem.



Percebo-se também que as retas tangentes estão sempre abaixo do gráfico e que o zero é um ponto de inflexão.



2) foi aplicado duas vezes, pois primeiro foi usado $f'(x)$ e depois $f''(x)$ e $g''(x)$ para finalmente o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ ser calculado.

Figura 22: Conclusão da dupla 2 com respeito ao uso da *regra de L'Hospital*

Na resolução da atividade 2, a dupla 2 desenvolveu sua atividade com apoio da extração de informações do gráfico exibido nas figuras 11, 12, 13 e 14. Registramos (na fase de maturação) a formulação da sentença proposicional oriunda da visualização e exploração didática do gráfico “[...] o gráfico mostra que a função f/g assume valor mínimo no ponto zero...” o que confirma a nossa 3ª hipótese de trabalho.

75) a) No ponto zero, o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\text{SEN}^2 x} = 2$ e o gráfico mostra que a função f/g assume um valor mínimo no ponto zero e que todas as retas tangentes estão abaixo do gráfico.

10) De acordo com os itens anteriores nota-se que foi preciso aplicar apenas uma vez o teorema de L'Hopital, pois precisou apenas calcular $f'(x)$ e $g'(x)$ para encontrar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\text{SEN}^2 x}$.

Figura 23: A dupla 3 extraiu informações somente do gráfico na fase de maturação

Na atividade 2, segundo o documento escrito de um dos sujeitos da dupla 3, observamos que as escolhas (elaboradas na fase de tomada de posição) e conclusões da estratégia empregada foi fortemente influenciada pelos gráficos fornecidos. Todavia, registramos a preferência pelo quadro analítico. De fato, a dupla 3, manifestou uma estratégia invertida. Inicialmente a dupla fez os cálculos analíticos e, depois, comparou os dados com os gráficos. Seu comportamento é descrito no seguinte trecho de entrevista.

Inicialmente, esse gráfico eu não fiz não, eu calculei primeiro o limite...Esse gráfico é dessa função?! Porque esse limite aqui não existe....Esse valor aqui pelo gráfico não dá...mas aqui dá 1-1 no numerador e 0 no denominador....Eu calculei...aqui dá zero e zero em baixo...No gráfico, existe....mas por aqui...eu fazendo os cálculos não bateu...Pelo gráfico....quando $x \rightarrow 0^-$ e $x \rightarrow 0^+$. Está dando outro valor...

Para concluir, sublinhamos que na tradição do ensino acadêmico do Cálculo, com forte apelo ao quadro algébrico (ARTIGUE, 1995c, p. 114), identificamos a tendência de se definir uma indeterminação sob o ponto de vista algébrico-simbólico, como assim o indica Maurice (2000, p. 19). Sob outro ponto de vista, neste estudo, sob a influência da mediação e dos pressupostos da SF, conduzimos tanto a dupla 4, bem com as demais, ao entendimento da manifestação das formas indeterminadas por meio do quadro geométrico. Não obstante, nas figuras 14 e 22, os alunos aprenderam a identificar,

geometricamente, até que ordem se deve efetuar o processo de derivação das funções presentes no numerador e denominador dos limites.

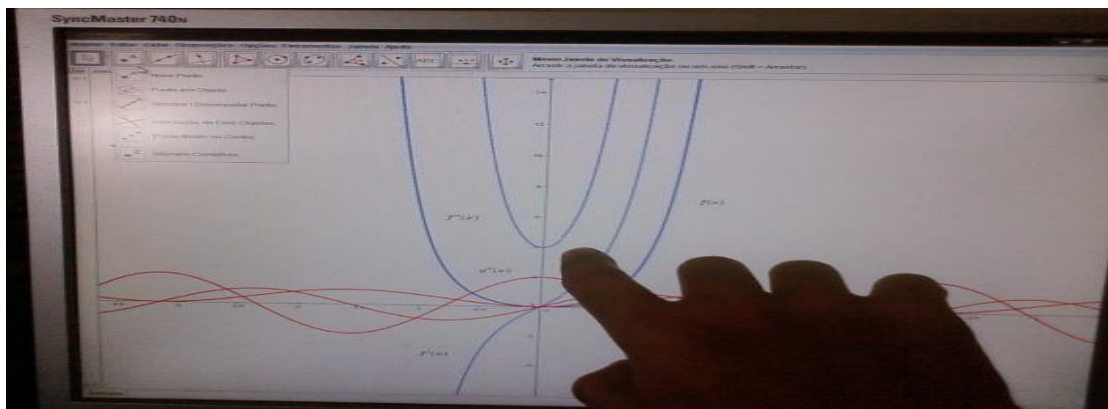


Figura 24: Na *fase de prova* a dupla 3 confrontou os dados analíticos com o comportamento do gráfico das funções (das derivadas) e até que ordem se deve aplicar a regra.

5 Conclusão e considerações finais

A exploração da tecnologia proporciona a mudança das práticas e hábitos dos estudantes perante a atividade solucionadora de problemas. Em nosso estudo, diferentemente da abordagem dos livros de Cálculo consultados e com apoio nos momentos de mediação (fases de ensino), previstos pela SF, concebemos e produzimos situações de ensino/aprendizagem que detinham o potencial de estimular a produção de conjecturas graças à visualização e à percepção de propriedades geométricas e topológicas dos conceitos relacionados à *regra de L'Hospital*.

Com base numa visão didático-epistemológica que possui a SF, nas atividades escritas pertinentes às quatro duplas participantes deste estudo, registramos que os alunos manifestaram um hábito que se caracterizou em confrontar os dados analíticos obtidos por inferências lógicas condicionadas pela *regra de L'Hospital*, com os dados extraídos dos gráficos (de natureza geométrica) presentes nas duas atividades estruturadas.

Ademais, segundo a perspectiva da SF, a valorização dos erros que podem ocorrer como, por exemplo, $0/0=0$ ou $\infty/\infty=\infty$, adquirem papel de destaque na medida em que o aluno se conscientiza das ações e estratégias pouco exitosas escolhidas na *fase de maturação*. Assim, apresentamos um gráfico na atividade 1 que induziu os alunos a elaborarem falsas conjecturas pertinentes a condição suficiente de existência (*) do

limite designado por $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$. Todas as duplas identificaram a discordância do

modelo apresentado no papel e o exibido pelo computador (atividade 1, fig. 7). E este fato comprovou que sua ação não foi oriunda somente da algebrização da atividade 1 proposta, pois, o recurso do *software* (na *fase de maturação*) provocou incerteza.

Com a atividade 2, registramos estratégias semelhantes e, com isto, comprovamos nossas hipóteses desta engenharia. Observemos, entretanto, que as atividades tradicionais, restritas ao ambiente lápis/papel, permitem a manifestação da noção do infinito (∞) de modo restrito ao quadro algébrico e, em nosso caso, proporcionamos situações didáticas que envolvem o entendimento de sua manifestação do ponto de vista geométrico.

Embora indicado de modo *en passant* por certos autores (MAURICE, 2000, p. 239), a análise da natureza pertinente ao uso de *registros de representação semióticas* (DUVAL, 1995) envolvidos em nossa investigação não recebeu maior atenção, muito menos, uma caracterização dos tipos ou categorização dos erros recorrentes dos estudantes em situações de uso da *regra de L'Hospital*, apesar de adotarmos, como objetivos específicos, apenas a relevância de sua ocorrência e/ou manifestação. Tal tarefa será postergada para futuros estudos focando tal temática.

Por fim, concordamos com Henriques, Attie & Farias (2007, p. 78) quando declaram que “a utilização do ambiente computacional pode auxiliar no processo dialético de controle e de pré-estruturação das ações.”. De fato, em nossa *experimentação*, ante o clima de investigação promovido pela metodologia de ensino nominada *Sequência Fedathi*, proporcionamos a estruturação de situações didáticas que apresentam o potencial de permitir sua *replicabilidade* (ARTIGUE, 1995b, p. 51) ou “reprodutividade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados” (ALMOULOUD, 2007, p. 176) em outras experimentações relacionadas ao mesmo objeto matemático.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo. *Ag. Fundamentos da didática da matemática*. Paraná: Editora UFPR. 2007, 216p.

ALONSO, Apolo. C. *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión* (Tesis en Matemática Educativa) – Instituto Politécnico Nacional do Mexico. Mexico D.F.: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada. 2004, 248p.

ALVES, Francisco. R. V. *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011, p. 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php

- ALVES, Francisco. R. V. Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. In: REVISTA DO INSTITUTO GEOGEBRA INTERNACIONAL DE SÃO PAULO, 1, CLXV-CLXXIX, 2012, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index>. Acessado em: 04 de Abril de 2012.
- ARTIGUE, Michèle. Ingénierie didactique. In: BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*. Paris : Délachaux et Niestle, p. 243-263, 1995a.
- ARTIGUE, Michèle. Ingeniería Didáctica. In: ARTIGUE, Michelle ; DOUADY, Régine ; MORENO, Luis & Gomez, Pedro. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá : Grupo Editorial Iberoamericano, p. 33-61, 1995b. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigue1995Ingenieria.pdf>. Acessado em: 10 de abril de 2012.
- ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, Michèle ; DOUADY, Régine ; MORENO, Luis & Gomez, Pedro. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá : Grupo Editorial Iberoamericano, p. 97-140, 1995c. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigue1995Ingenieria.pdf>. Acessado em: 10 de abril de 2012.
- ARTIGUE, Michèle. Le logiciel *DERIVE* comme révélateur de phénomènes didactiques liés a l'utilisation d'environnement informatiques pour l'apprentissage. In: *Educational Studies in Mathematics*, 33, p. 133-169, 1997.
- ARTIGUE, Michèle. Analysis. In: Tall, David. *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Klumer Academic Publishers, p. 167-196, 2002.
- ARTIGUE, Michèle. Digital Technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. In: *CERME 5*, Grécia, plenary, p. 68-82, 2007.
- ARTIGUE, Michèle. Didactical design in Mathematics Education. In: WINSLOW, Carl. (ed.) *Nordic Research in Mathematics Education*. NORMA08, 2008, P. 7-17. Disponível em: <https://www.sensepublishers.com/files/9789087907839PR.pdf>. Acessado em: 20/06/2012.
- BARBOSA, Everaldo. F. A regra de L'Hospital: análise histórica da regra de L'Hospital (dissertação) – Pós graduação em Matemática. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2008, 90p.
- BORGES, Hermínio. et al. (2001). A Sequência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas, In: XV EPENN – ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORDESTE. São

Luís, p. 590-609. Disponível em: <http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/fedathi/fedathi-a-sequencia-de-fedathi-como-proposta.pdf>. Acessado em: 10 de abril de 2012.

BORGES NETO, Herminio. & SANTANA, José. Rogério. (2001). Fundamentos epistemológicos da Teoria de Fedathi no ensino de Matemática. In: *Anais do XV EPENN - Encontro De Pesquisa Educacional do Nordeste*, vol. único, p.1-12, São Luís. Disponível em: <http://www.multimeios.ufc.br/fedathi.php>. Acessado em: 10 maio 2012.

BOURCHTEIN, Lioudmila & BOURCHTEIN, Andrei. *Análise Real: funções de uma variável real*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna. 2010, 426p.

BRIDOUX, Stéphanie. Enseignement de premières notions de topologie à l'université : une étude de cas. (Thèse de doctorat) – École de doctorat Savoir Scientifiques. Grenoble: Université Joseph Fourier, 2011, 339p.

COUTURAT, Louis. *De l'Infini mathématiques*. Paris: Librairie Scientifique et Technique. 1973, 695p.

DUVAL, Raymond. *Sémiosis et Pensée Humaine*. Paris: Peter Lang Édition, 1995.

GUIDORIZZI, Hamilton. Um curso de Cálculo. v. 1, Rio de Janeiro : LTC, 2010.

HAIRER, E. & WANNER, G. *Analysis by its History*. New York: Springer, 2008, 389p.

HENRIQUES, Afonso; ATTTIE, J. Paulo & FARIAS, Luiz, M. Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com o auxílio do software Maple. In: *Educação Matemática Pesquisa*, 1, 2007, p. 51-81.

HEREDIA, Ana. S. B. *Obstáculos didáticos y el discurso explicativo de los libros de texto de Cálculo*. (Tesis en Matemática Educativa) - Instituto Politécnico Nacional do Mexico. Mexico D.F.: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada. 2007, 140p.

LIMA, Elon. L. *Análise Real*. v. 1, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. v. 1, 3ª edição, Editora: Harbra, 1994.

MAURICE, L. *Les idées d'élèves du collégial à propos des limites de fonctions rationnelles faisant intervenir le zéro et l'infini* (thèse de doctorat), Québec: Université Laval, 2000, 234p.

OTTE, Michael. Metaphor and contingency. In: Radford, L.; Schübring, G. & Seeger, F. *Semiotics in Mathematics Education*, p. 63-82, Rotterdam: Sense Publishers, 2008.

SILVA, Benedito. A. Diferentes dimensões do ensino e da aprendizagem do Cálculo. In: *Educação Matemática e Pesquisa*. v. 13, p. 393-413, 2011.

SIMMONS, George. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 1988, 846p.

STEWART, James. *Cálculo*, v. 1, 4ª edição, São Paulo: Pioneira, 2001.