



## RELAÇÕES ENTRE A SEQUÊNCIA FEDATHI E AS ALAVANCAS META NO ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR

**Francisca Cláudia Fernandes Fontenele**

Mestre em Educação  
Universidade Federal do Ceará – Ceará – Brasil  
claudia@multimeios.ufc.br

**Hermínio Borges Neto**

Doutor em Matemática  
Universidade Federal do Ceará – Ceará – Brasil  
herminio@multimeios.ufc.br

**Maria José Costa dos Santos**

Doutora em Educação  
Universidade Federal do Ceará – Ceará – Brasil  
mazeautomatic@gmail.com

### Resumo

Este estudo analisou a interação entre a Sequência Fedathi (SF) e possíveis Alavancas Meta (AM) em aulas de Álgebra Linear verificando as relações e possibilidades decorrentes do uso concomitante de ambas no ensino da noção de base de um espaço vetorial. Através de observação direta de algumas aulas referentes às noções elementares, identificamos e analisamos a presença de recursos passíveis de se tornarem AM nas fases da SF, cujos resultados foram positivos, indicando que podem auxiliar a mediação docente no sentido de proporcionar situações de ensino e aprendizagem que possibilitem a ocorrência de abstração reflexionante, à medida que favorece a ação discente em sala de aula para reflexão sobre os conteúdos propostos. Portanto, se constituem como subsídios promissores para o professor que busca melhorias no ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

**Palavras-Chave:** álgebra linear. Ensino. Metodologia. Sequência fedathi. Alavanca meta.

### Abstract

This study analyzed the interaction between Fedathi Sequence (SF) and possible Meta Levers (AM) in Linear Algebra lessons checking relations and possibilities arising from the concurrent use of both in teaching of the basis of a vector space. Through direct observation of some classes we identify and analyze the presence of resources likely to become AM in phases of SF. The results were positive, indicating that can assist the teaching mediation in order to provide teaching and learning situations enabling the occurrence of reflective abstraction, as favors the student action in the classroom to reflect on the proposed contents. Therefore are promising subsidies for the teacher that seeks improvements in teaching and learning of Linear Algebra.

**Keywords:** linear algebra. Teaching. Methodology. Fedathi sequence. Meta lever.

## INTRODUÇÃO

Neste artigo analisamos a presença de possíveis Alavancas Meta (AM) no ensino da noção de base de um espaço vetorial, mediado segundo os pressupostos da metodologia Sequência Fedathi (SF). Diante da problemática que envolve o ensino dessa disciplina, tais como obstáculos históricos, didáticos e epistemológicos, consideramos que as dificuldades se agravam ainda mais diante de posturas tradicionalistas de ensino que norteiam a ação docente em sala de aula. Assim, é importante um olhar voltado para a postura do professor: seus métodos, suas estratégias, forma de interagir com a turma e com o saber ensinado, uma vez que o ensino da matemática quando restrito à mera repetição de técnicas que limitam a exploração de conceitos e significados tende a estimular a ocorrência do que D'Amore (2007) chamou de fraude epistemológica, que ocorre quando o aluno encontra a solução correta para um problema, simplesmente por reproduzir algo já feito pelo professor, mas não necessariamente por que tenha compreendido o problema e apreendido os conceitos necessários à sua resolução.

Partindo dessa concepção, trazemos a Sequência Fedathi (SOUSA *et al.*, 2013), que defende essa perspectiva de ensino através da elaboração de sessões didáticas que motivem os estudantes a agirem como matemáticos, trabalhando por descobertas e construção de conceitos sob a devida mediação e assistência docente. Apoiamos-nos também nas pesquisas francesas (ROGALSKI, 1994; DORIER, 2000) que culminaram no desenvolvimento da noção de Alavanca Meta. Desse modo, tentamos ainda compreender, à luz da teoria piagetiana da abstração reflexionante (PIAGET, 1995), as relações didático-pedagógicas que poderiam surgir do uso concomitante da SF e AM, uma vez que teoricamente seus objetivos de uso no ensino são convergentes à ideia de ação e reflexão dos alunos frente aos conhecimentos trabalhados em sala de aula.

Assim, apresentamos uma análise da interação entre a SF e o uso de recursos passíveis de se tornarem AM para os alunos, em aulas que tratam de conceitos elementares da Álgebra Linear, tentando compreender os processos que envolvem teoria e prática docente vivenciadas nesse contexto. Esperamos poder contribuir para a melhoria do ensino, de modo que professores dessa e de outras disciplinas possam refletir sobre sua prática relacionando-a à discussão teórica presente neste trabalho, uma vez que muitos aspectos deste estudo não se limitam ao ensino da Álgebra Linear.

## SEQUÊNCIA FEDATHI NO ENSINO

Em sua essência, a SF visa oportunizar a ação do estudante em sala de aula mediante a exploração de situações de ensino desafiadoras, que possam desencadear reflexões, discussões, estimular o pensamento e o raciocínio matemático, bem como as investigações e as descobertas que visem chegar a um delineamento do saber em questão, que mais tarde, conforme for sendo trabalhado em novos contextos, poderá assumir o status de conhecimento.

Para tanto, uma aula de matemática, elaborada segundo seus pressupostos, sempre abordará quatro momentos: *tomada de posição*, *maturação*, *solução* e *prova*, que poderão aparecer uma única vez, ou várias vezes, dependendo do seu planejamento. Essas fases visam tornar o ambiente da aula propício para que as ações discentes sejam direcionadas à construção do conhecimento sob a devida mediação do professor.

A *tomada de posição* é o momento da apresentação da atividade, em que o professor questiona e motiva a turma a buscar solução ao problema proposto. É marcada pela reflexão e pelo estímulo à investigação. Na *maturação*, o estudante experimenta a liberdade de pensar, raciocinar, levantar hipóteses, discutir e analisar com os colegas as saídas para a solução do problema. O professor nessa fase é observador das ações da turma, devendo estar sempre atento para decidir como e quando intervir no processo, caso haja necessidade.

A *solução* consiste na organização e sistematização de esquemas que visem à resolução do problema, ou seja, os alunos organizam, sistematizam e em seguida apresentam os modelos que utilizaram para chegar à solução do problema proposto. “Esses modelos podem ser escritos em linguagem escrita/matemática, ou simplesmente por intermédio de desenhos, gráficos, esquemas e até mesmo de verbalizações” (SOUZA, 2010, p. 92).

Já a *prova* é o momento em que o professor sistematiza e formaliza na linguagem matemática as soluções apresentadas pelos estudantes, chegando à resposta do problema. Há revisão das principais ideias através de discussão entre professor e estudantes.

Além destas etapas ou fases, convém destacar o momento em que antes de apresentar um problema ou situação desafiadora, o professor trabalha em sala os

conhecimentos prévios necessários à compreensão do conteúdo que será abordado. Isso poderá ser feito através de revisão de conceitos explorados na aula anterior fazendo-se relações com o que será abordado. Este momento é denominado na SF como nivelamento do *plateau* da turma, que está diretamente relacionado aos conhecimentos prévios dos alunos que necessitam ser estimulados.

Na mediação de cada etapa, o professor deve ter consciência de que estas estimulam o exercício da investigação matemática, devendo assim assumir uma postura que valorize cada momento da aula na perspectiva de propiciar a reflexão constante dos alunos sobre os conceitos trabalhados, permitindo o desenvolvimento da autonomia dos estudantes na medida em que são levados a levantar hipóteses e pensar livremente sobre o objeto matemático trabalhado. Assim, compreende-se que o aluno pode aprender a partir de sua própria ação, construindo e descobrindo significados, sob a supervisão do professor.

Para entendermos as possíveis relações entre a SF e as AM, é importante compreender os aspectos cognitivos discentes trabalhados durante uma sessão de ensino, no sentido da reflexão pela qual o estudante pode ser conduzido. Esta reflexão está atrelada à compreensão conceitual, ao significado matemático dos objetos trabalhados, portanto, sobre a matemática e o conhecimento matemático.

Piaget (1995) aborda o conceito de abstração reflexionante com o qual descreve como o aprendiz consegue chegar a novas aprendizagens e a construir novos conceitos. Segundo o autor, o surgimento dos conceitos, essenciais para o nosso pensar, só é possível mediante tomadas de consciência que sucedem uma abstração reflexionante, que por sua vez deriva da coordenação de ações. Piaget a descreve do seguinte modo:

[...] ela transpõe a um plano superior o que colhe no patamar precedente (por exemplo, ao conceituar uma ação); e designaremos esta transferência ou esta projeção com o termo “reflexionamento” [...]. Em segundo lugar, ela deve necessariamente reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido do plano de partida A, ou pôr em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante, será designada por “reflexão” (PIAGET, 1995, p. 6).

Compreender o processo de abstração reflexionante pode ajudar o professor a entender como se dá a aprendizagem de novos conceitos nas estruturas mentais dos alunos e, assim, melhor lidar com as dificuldades que os alunos possam apresentar em

relação ao aprendizado conceitual em matemática. Na SF, a abstração reflexionante não necessariamente ocorrerá em uma única sessão didática, mas seu sucesso dependerá das assimilações e acomodações que o aluno for realizando à medida que se debruça a estudar determinado assunto ou conforme vai tendo seu raciocínio (esquemas) estimulado pelas perguntas ou estratégias de ensino trazidas pelo professor.

Assim, a SF tem o papel de orientar a ação docente, que conduzirá a ação discente como um intermediário e não apenas como emissor de respostas prontas e de uma matemática acabada que dificulta a ocorrência da abstração reflexionante nas estruturas internas dos alunos. Nesse sentido, o uso de possíveis AM pode ser entendido como um recurso que determina pontos estratégicos que auxiliam o professor a proporcionar uma mediação rumo à ocorrência da abstração reflexionante.

Salientamos que, segundo Becker (2012, p. 39), a transformação de forma em conteúdo é algo que não se ensina, ou seja, ou o estudante faz esse reflexionamento e transforma suas estruturas através da reflexão ou ela não ocorre. Assim, cabe ao professor propiciar um ambiente favorável à reflexão através de metodologias e ferramentas adequadas. Desse modo, investigamos a interação SF/AM como meios para auxiliar o professor nesse intento.

## **COMPREENDENDO A ALAVANCA META**

As Alavancas Meta compreendem recursos que podem desencadear reflexões nos estudantes sobre o conteúdo estudado. Assim, tem como ideia central a introdução, num momento apropriado da aula, de um elemento capaz de conduzir o estudante a pensar sobre o objeto matemático estudado. Em Dorier *et al.* (2000), encontramos a seguinte definição:

A expressão alavanca meta designa o uso, no ensino, de informação ou conhecimento SOBRE matemática. Isso pode envolver o funcionamento da matemática, seu uso, sua aprendizagem, podendo seus elementos ser gerais ou particulares. [...] Essas informações podem levar os estudantes a refletir, conscientes ou não, tanto sobre seu próprio aprendizado na atividade matemática quanto sobre a própria natureza da matemática. É possível que tal reflexão os ajude a aprender (DORIER, *et al.*, 2000, p. 151, grifo dos autores, tradução nossa).

Desse modo, a oportunidade de reflexão é o que constitui o principal objetivo de seu uso no ensino da matemática, a partir da qual decorrem as tomadas de consciência sobre o conhecimento em questão, responsável pela significação dos conceitos, das propriedades, das relações e dos procedimentos presentes nesse campo. No entanto, não pode ser confundida com informações comuns, mas somente aquelas que foram essenciais para provocar a reflexão sobre o objeto matemático em questão.

No artigo intitulado “*Prise en compte du meta en didactique des mathematiques*”, Robert e Robinet (1993) analisaram a inclusão da “meta” (no sentido da metacognição) no ensino de matemática, partindo do fato de que durante uma aula o professor faz uso de certos elementos que acompanham seu discurso matemático, mas sem ser, necessariamente, informações estritamente matemáticas.

[...] o professor pode falar de maneira qualitativa dos conhecimentos que estão sendo descontextualizados, pode explicar para que servem, como utilizá-los, e pode citar os erros que frequentemente eles ocasionam... Há todo um discurso sobre a matemática, portanto, mais ou menos importante, mais ou menos divulgado, mais ou menos explicitado como tal, que nós classificamos como discurso meta enquanto discurso sobre a matemática precisamente. (ROBERT; ROBINET, 1993, p. 1, tradução nossa).

Esse tipo de discurso, segundo as referidas autoras, é essencial para a aquisição de conceitos particulares, como, por exemplo, o de espaço vetorial, em que não há possibilidade de exploração através de bons problemas, sendo necessário suprir essa carência por uma reflexão sobre estes conceitos.

Além disso, é no sentido da integração entre antigos e novos conhecimentos que os metaconhecimentos matemáticos (informações e conhecimentos sobre matemática) poderão se tornar Alavancas Meta para o aluno. No entanto, o efeito de “alavanca” não é uniforme para todos os estudantes. Determinado metaconhecimento matemático pode se tornar AM para um aluno e não se tornar para outro. Isso dependerá dos conhecimentos que possui e da forma como lida com as informações recebidas.

Especificamente, Dorier *et al.* (2000, p. 151) explicam que a AM traz informações que constituem o conhecimento matemático e o funcionamento matemático. As informações constitutivas do conhecimento matemático se referem aos métodos, às estruturas e às (re)organizações. Podem ser encontradas no discurso do professor, o qual associado às atividades pode gerar reflexões nos alunos sobre os

procedimentos aplicáveis a um problema, sobre qual o melhor método e sobre o que é comum à resolução de um conjunto de problemas semelhantes.

As informações constitutivas do funcionamento matemático dizem respeito a informações sobre o papel da interação entre definições na resolução de um problema, sobre o emprego de questionamentos, exemplos e contraexemplos, bem como as mudanças de quadro. Dessa forma, as possíveis AM podem ser encontradas no discurso do professor, nas atividades propostas, nos livros didáticos e demais recursos que se insiram nesse perfil.

As dissertações de Araújo (2002), Padredi (2003) e Oliveira (2005) tratam especificamente dos recursos que podem se tornar Alavanca Meta para os estudantes os quais se referem a estes recursos com denominações diferentes, tais como: metamatemática, metaconhecimento matemático e recurso-meta, respectivamente, trazendo contribuições acerca de como funcionam esses metaconhecimentos e suas potencialidades no ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

## **PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

Este estudo se caracteriza como uma investigação de natureza qualitativa na qual nos embasamos metodologicamente nas concepções de Bogdan e Biklen (1994) e Laville e Dionne (1999). Especificamente, observamos aulas de Álgebra Linear referentes aos conteúdos de espaço vetorial, subespaços, geradores e base, num total de quatro aulas. O professor da disciplina tinha experiência com o uso da Sequência Fedathi como metodologia de ensino há mais de vinte anos.

A análise dos dados, registrados em áudio e vídeo, se deu com base na análise de conteúdo de Bardin (2004). As categorias de análise eleitas para realização da investigação se dividem nas categorias referentes às Alavancas Meta e à Sequência Fedathi. Nos Quadros 1 e 2 elencamos suas descrições, respectivamente.

Quadro 1 – Descrição das categorias eleitas para condução das análises referentes às Alavancas Meta.

ALAVANCAS META		
Categorias de Análise	Subcategorias de Análise	Significados da Análise
Informações Constitutivas do Funcionamento Matemático	Uso de linguagem coloquial	Uso dessa linguagem para simplificar a apresentação dos conceitos.
	Uso de contraexemplos	Uso de exemplos que divergem do conceito abordado, mas que aparentemente são semelhantes.
	Uso de metáforas	Recorrência a metáforas para melhor explicar os conceitos explorados.
	Uso de perguntas	Perguntas que possam desencadear reflexões no aluno sobre o conteúdo abordado.
	Uso de representação geométrica	Exploração de propriedades e comportamento geométrico dos conteúdos estudados.
	Jogos de quadro	Mostrar os diferentes quadros em que um conceito pode aparecer.
	Mudança de pontos de vista	Mostrar as diferentes formas de visualizar e interpretar um conceito.
	Princípios de Harel	Explicitação da <i>necessidade</i> de se trabalhar com um conceito; Explicitação de um conceito de modo que este seja <i>concreto</i> para o aluno; Uso de <i>generalização</i> dos conceitos.
Informações Constitutivas do Conhecimento Matemático	Métodos, estruturas e (re)organizações	Procedimentos aplicáveis a um problema.
Informações de Natureza Epistemológica	Informações sobre a natureza dos conceitos	Esclarecimentos sobre a natureza dos conceitos.

No Quadro 1, descrevemos as categorias, as subcategorias e o significado da análise como forma de explicitar os critérios usados na identificação das possíveis AM nas fases da SF, cujos recursos eleitos foram: linguagem coloquial, contraexemplos, metáforas, representações geométricas, questionamentos, atividades ou situações que fizessem uso de jogos de quadro, mudança de pontos de vista ou dos princípios de Harel (2000). Listamos no Quadro 2 as categorias eleitas para descrição da ação docente na Sequência Fedathi.



Quadro 2 – Categorias eleitas para descrição do uso da Sequência Fedathi.

SEQUÊNCIA FEDATHI (SF)		
Categorias de Análise	Subcategorias de Análise	Significados da Análise
Tomada de posição Maturação Solução Prova	Postura	Elementos presentes no processo de ensino que descrevem as características principais de como acontece cada fase da SF.
	Discurso	
	Questionamentos	
	Recursos/estratégias didáticas	
	Situações/atividades propostas	

Nesse caso, temos como categorias as fases da sequência e como subcategorias a postura, os discursos, os questionamentos, os recursos, as estratégias de ensino e as situações/atividades propostas, que nos ajudaram a descrever a ação docente em sala de aula e como aconteceu cada fase, possibilitando assim a verificação da presença de possíveis AM na mediação do professor.

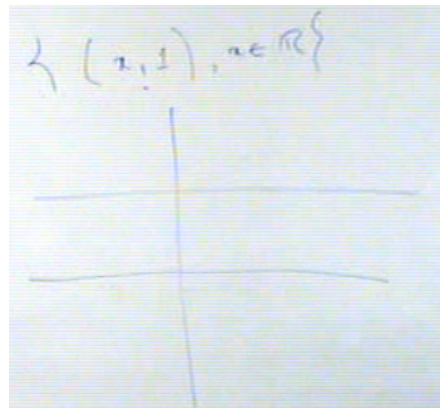
## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma descrição mais detalhada dos resultados, em que cada aula é descrita e analisada a cada fase da SF, é encontrada em Fontenele (2013). Aqui, nos deteremos a apresentar os resultados gerais com intuito de explicitar as relações observadas na presença das possíveis alavancas meta identificadas nas sessões didáticas.

O primeiro recurso passível de se tornar Alavanca Meta para os alunos ocorreu através do uso de gráfico que implicitamente trouxe ao professor oportunidades de utilizar jogos de quadro e trabalhar com contraexemplo, partindo de algo “concreto” para os alunos (reta no plano cartesiano), caracterizando o Princípio da Concretização. Ocorreu na sessão 1 (primeira aula observada), na fase da tomada de posição, ainda no momento inicial, como forma de explorar o *plateau* da turma, no qual revia os temas abordados na aula anterior. Seu objetivo foi explorar as propriedades dos espaços vetoriais.

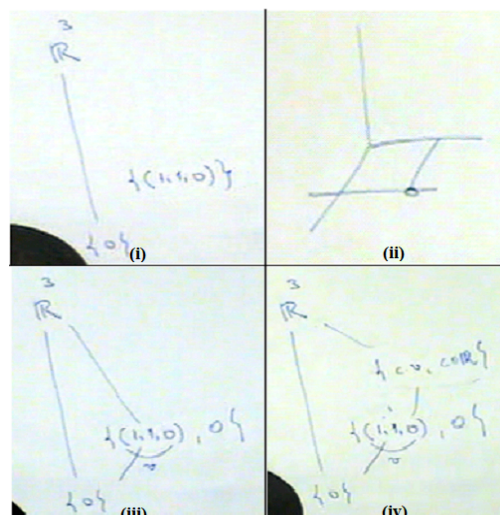
A Figura 1 expõe esse momento em que, ao esboçar o gráfico, o professor ilustrou para a turma a ausência do vetor nulo no conjunto, uma vez que a reta não passa pela origem. Ele chamou a atenção da turma para este fato e fez a verificação algébrica das propriedades dos espaços vetoriais constatando não se tratar de um espaço vetorial.

Figura 1 – Primeira possível Alavanca Meta identificada.



Em outro momento, o professor, ao abordar as propriedades dos subespaços vetoriais, fez uso do esquema ilustrado na Figura 2 como forma de ajudar os alunos a construí-los. Nesse caso, argumentou para a turma que este esquema seria usado para construir subespaços vetoriais, sendo que nas extremidades ficariam o espaço vetorial maior e o menor subespaço de um espaço vetorial, respectivamente. Partiu do seguinte questionamento: “– Como encontrar os subespaços que estão no meio?”

Figura 2 – Exemplo prático de uso do esquema de construção de subespaços utilizado pelo professor



Nesse caso, temos: em (i) o professor perguntou se o conjunto dado era subespaço vetorial, fazendo o gráfico para ajudar na visualização, conforme exibido em

(ii). Um aluno respondeu que não. Então o professor acrescentou o vetor nulo ao conjunto conforme mostrado em (iii) e novamente perguntou se era um subespaço. Outro aluno respondeu que não, pois não era fechado para a soma. Em seguida, o professor acrescentou um novo conjunto, maior que o anterior, conforme mostra (iv), no qual explicou que para ser subespaço deveria estar inserido em um conjunto maior, que fosse fechado para a soma e a multiplicação por escalar. Em seguida, verificou algebricamente que o conjunto possuía essas propriedades. Assim, concluiu que  $\{c\mathbf{v}, c \in \mathbb{R}\}$  era um subespaço vetorial.

Outro momento é ilustrado na Figura 3 em que temos as fases da solução e prova, onde em (i) temos a solução feita por um aluno e em (ii) a representação geométrica dessa solução, esboçada pelo professor no momento da prova.

Figura 3 – Comportamento geométrico da independência linear dos vetores dados.

The image shows two parts of a handwritten solution on a whiteboard. At the top, the set of vectors  $\{(0,1,0), (0,0,1), (1,0,1)\}$  is written. Below it, the linear combination equation  $a(0,1,0) + b(0,0,1) + c(1,0,1) = (0,0,0)$  is shown. Part (i) is a boxed algebraic derivation:  $c = 0$ ,  $a = 0$ ,  $b + c = 0$ , and  $b = 0$ . Part (ii) is a 3D coordinate system with axes labeled x, y, and z, showing three vectors originating from the origin and pointing to the points (0,1,0), (0,0,1), and (1,0,1). The vectors are shown to be linearly independent as they do not lie in the same plane.

Nesse trecho da aula, verificamos a presença dos quadros algébrico e geométrico como forma de facilitar a compreensão da ideia de vetores linearmente independentes, buscando motivar a reflexão dos alunos ao comparar e analisar as características dos dois quadros.

Assim, como as Alavancas Meta, a Sequência Fedathi também tem foco na promoção da reflexão do aluno sobre o objeto matemático estudado. No entanto, abrange todos os momentos inerentes à aula, desde a preparação até a realização da sessão didática, incluindo as formas de mediação e interação com a turma. A AM tem um direcionamento mais local, com foco em momentos bem determinados e cuidadosamente elaborados, dentro dos conteúdos, com intuito de provocar um efeito *start* na reflexão do estudante sobre o que é estudado.

Ao todo foram identificados dezesseis possíveis AM, sendo que as subcategorias que mais ocorreram foram o uso de jogos de quadro (6), o Princípio da Concretização (7) e a linguagem coloquial (4) encontrados nos gráficos e no discurso do professor. Estes apareceram em todas as fases da SF, sendo seis na tomada de posição, quatro na maturação, dois na solução e quatro na prova.

O Quadro 3 proporciona uma visão geral das possíveis AM identificadas na fase da tomada de posição ao longo das sessões didáticas descritas. Nessa fase ocorreram em maior número, uma vez que o professor tentava preparar o ambiente da sala de aula para poder dar início ao lançamento de situações desafiadoras aos alunos.

Quadro 3 – Possíveis Alavancas Meta identificadas na fase da Tomada de Posição.

<b>Fase</b>	<b>Recurso</b>	<b>Objetivo</b>
TOMADA DE POSIÇÃO	Gráfico (Jogo de quadro, contraexemplo, Princípio da Concretização)	Explorar as propriedades do espaço vetorial.
	Esquema (Método)	Construir subespaços vetoriais.
	Discurso (Linguagem coloquial, analogia)	Facilitar a compreensão da relação entre espaço e subespaço vetorial.
	Gráfico (Princípio da Concretização, jogo de quadro)	Visualizar geometricamente a independência e a geração de vetores (base).
	Discurso (Princípio da Necessidade)	Esclarecer sobre a necessidade de se saber encontrar bases.
	Discurso (Linguagem coloquial)	Destacar que se deve procurar vetores fora da reta para que possa gerar um plano.

Nesse caso, o caráter expositivo que caracterizou estes momentos não diverge do modelo construtivista piagetiano, pois nesse contexto

a exposição é vista como útil, necessária e perfeitamente compatível com uma epistemologia crítica, desde que não seja entendida como condição suficiente de aprendizagem, mas como momentos importantes de um processo pedagógico ativo (BECKER, 2012, p. 195).

A presença dos metaconhecimentos passíveis de tornarem AM foi essencial nessa fase, pois a motivação e o interesse proporcionados pelas reflexões dos alunos, promovidas por tais ferramentas, poderiam resultar num melhor aproveitamento da fase de maturação. Quando falamos em interesse e motivação, devemos ter em conta que na

perspectiva piagetiana, estes são fatores importantes, porém oriundos do prazer proporcionado pela construção de esquemas ou estruturas, mediante a ação e a coordenação das ações do próprio aluno, não simplesmente algo imposto por influência externa (professor, por exemplo), conforme esclarece Becker (2012, p. 191).

Nesse sentido, as possíveis AM associadas a uma postura docente que explora os conteúdos na perspectiva da ação discente voltada ao pensamento reflexivo estarão mais próximas de proporcionar essa motivação e interesse preconizados por Piaget.

Quadro 4 – Possíveis Alavancas Meta identificadas na fase de Maturação.

<b>Fase</b>	<b>Recurso</b>	<b>Objetivo</b>
MATURAÇÃO	Discurso, expressão gestual (Perguntas, representação geométrica)	Visualizar as condições de geração de planos.
	Gráfico (Princípio da Concretização, jogo de quadro)	Visualização do subespaço.
	Discurso (Linguagem coloquial)	Destacar que o vetor encontrado deve gerar todo o subespaço $R^2$ .
	Discurso (Linguagem coloquial)	Auxiliar a compreender como estender um conjunto a uma base.

No Quadro 4, temos a fase de maturação e os metaconhecimentos passíveis de se tornarem Alavanca Meta nela identificados, que, nesse caso, foram usados para auxiliar nas dificuldades que os alunos apresentaram ao agir sobre os conteúdos trabalhados. Foram recursos que emergiram basicamente da necessidade que o professor sentiu de reorganizar suas estratégias para dar conta das dificuldades de compreensão dos estudantes, tanto que a maioria estava no discurso do docente, seja por meio de perguntas, linguagem coloquial ou mesmo gestos.

Quadro 5 – Possíveis Alavancas Meta identificadas na fase da Solução.

<b>Fase</b>	<b>Recurso</b>	<b>Objetivo</b>
SOLUÇÃO	Discurso (Linguagem coloquial)	Mostrar a insuficiência de vetores na solução do aluno.
	Gráfico (Princípio da Concretização, jogo de quadro)	Mostrar que os vetores a serem encontrados não podem estar na mesma reta.

No Quadro 5, temos a fase da solução que teve a presença de duas possíveis Alavancas Meta no momento em que o professor explicava para a turma as soluções feitas por alunos que se dispuseram a ir à lousa resolver situações propostas. Nesse caso, o professor complementou o que havia sido feito trazendo esses recursos que ajudariam na compreensão da turma.

No Quadro 6, temos a fase da prova na qual ocorreram quatro momentos em que houve a presença de possíveis AM. Verificamos que aqui a maior incidência foi o uso de gráficos com o qual o docente trabalhou com o Princípio da Concretização e utilizou jogos de quadro. Nesse caso, ao sistematizar e formalizar os conteúdos abordados, o professor sempre tinha o cuidado de trabalhar com a visualização dos espaços e subespaços vetoriais como forma de fazer os alunos refletirem sobre os conceitos e as propriedades.

Quadro 6 – Possíveis Alavancas Meta identificadas na fase da Prova.

<b>Fase</b>	<b>Recurso</b>	<b>Objetivo</b>
PROVA	Gráfico (Jogo de quadro, contraexemplo, Princípio da Concretização)	Mostrar que nem todo gráfico que passa pela origem é um subespaço.
	Gráfico (Princípio da Concretização, jogo de quadro)	Reforçar a ideia da geração de subespaços.
	Gráfico (Princípio da Concretização, representação geométrica)	Ilustrar geometricamente a solução encontrada pelo aluno (vetores LI)
	Discurso (Método)	Descrever um processo que ajuda a encontrar bases.

De modo geral, diante dos resultados encontrados, pudemos observar que cada ferramenta foi utilizada de acordo com a dificuldade implícita a cada conteúdo, bem como com o objetivo e a necessidade de cada fase da Sequência Fedathi. Resumimos essas percepções através do Quadro 7, que ilustra a função dos recursos meta em cada fase da SF, conforme as aulas analisadas.

Quadro 7 - Síntese das relações entre AM e as fases da SF.

TOMADA DE POSIÇÃO	- Instigar reflexões sobre os assuntos trabalhados no nivelamento do <i>plateau</i> ; - Motivar os alunos para agirem na fase de <i>maturação</i> .
MATURAÇÃO	- Auxiliar na compreensão do que é pedido na situação apresentada pelo docente; - Auxiliar na escolha dos procedimentos aplicáveis à situação apresentada.
SOLUÇÃO	- Complementar a solução apresentada pelos alunos.
PROVA	- Reforçar a formalização e generalização do conteúdo abordado.

Com os resultados obtidos, verificamos que a SF favorece o uso de recursos-meta passíveis de se tornarem AM para os alunos, de modo que foram utilizadas pelo professor em todas as fases da sequência como subsídio à sua mediação, mas com objetivos distintos, de acordo com o propósito de cada fase. Na tomada de posição, a função das possíveis AM identificadas foi a de auxiliar no esclarecimento ou revisão de tópicos importantes de conteúdos trabalhados nas sessões anteriores (diagnóstico e nivelamento do *plateau*); auxiliar na proposição de situações desafiadoras; favorecer a ocorrência de reflexões nos alunos gerando motivação e interesse para atuar na fase de maturação. Na maturação, tiveram o papel de auxiliar nas reflexões sobre as situações propostas e os procedimentos a serem realizados pelos alunos. Na solução, ajudaram o professor a complementar ou redirecionar as soluções apresentadas pelos alunos, conforme a necessidade. Na prova, auxiliaram o docente a reforçar e sistematizar os conceitos trabalhados, de modo a novamente tentar desencadear reflexões sobre o assunto estudado, dessa vez relacionando à formalização dos conteúdos.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presença dos metacconhecimentos passíveis de se tornarem AM em cada fase da SF revelou a importância do professor conhecer tais estratégias, pois estas foram essenciais para a condução das sessões didáticas à medida que se dava ênfase aos significados e às relações conceituais, explorados com base na construção do conhecimento.

Identificamos que a postura do professor ao utilizar a SF foi imprescindível para a utilização dos recursos diagnosticados como passíveis de se tornarem AM para os alunos, pois os momentos apropriados para utilização de tais recursos eram determinados tanto pelos objetivos do docente ao propor as situações de ensino, quanto pelo desempenho da turma no decorrer da aula, ocorrendo conforme as dificuldades esboçadas pelos discentes.

Nas sessões didáticas observadas, chamou-nos atenção a postura docente, que se destacou em todas as sessões, por não explicitar diretamente as respostas, nem fornecer o “passo a passo” para a resolução das situações propostas, mas em vez disso proporcionou ao aluno oportunidades de agir na busca por essas respostas, para só então esclarecer os caminhos que poderiam ser percorridos para encontrar a solução, já na fase da prova.

Desse modo, diante dos resultados obtidos, podemos considerar que juntas, Sequência Fedathi e Alavanca Meta, favorecem a promoção de um ensino que objetiva a aprendizagem como consequência da reflexão do estudante sobre os conteúdos matemáticos a partir de suas próprias ações, e com isso, traçamos a imagem de uma aula concebida sobre fundamentações construtivistas, aplicada numa disciplina de nível superior, o que para nós é entendido como avanço, pois nesse nível de ensino o tradicionalismo costuma prevalecer.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos ao professor da disciplina de Álgebra Linear, sujeito da pesquisa e que permitiu nossa presença em sua sala de aula, bem como a seus alunos e à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico – FUNCAP e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

## **REFERÊNCIAS**

ARAÚJO, C. C. V. B. **A metamatemática no livro didático de álgebra linear**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa, Portugal: Edições 70, 2004.



BECKER, F. **A epistemologia do professor de matemática**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

D'AMORE, B. Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. **Bolema** – Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, SP, v. 20, n. 28, 2007. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221871010> Acesso em: 22 Abr. 2013.

DORIER, J. L. (Ed.). **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DORIER, J. L. *et al.* The Meta Lever. In: DORIER, J. L. (Ed.). **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FONTENELE, F. C. F. **A sequência fedathi no ensino da álgebra linear**: o caso da noção de base de um espaço vetorial. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. Disponível: [http://www.teses.ufc.br/tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=11351](http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=11351)

HAREL, G. Three principles of learning and teaching mathematics. In: DORIER, J. L. *et al.* **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 177-189.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. São Paulo: Artmed, 1999.

OLIVEIRA, L. C. B. **Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra Linear?** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Disponível em: [http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/luis\\_carlos\\_barbosa.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/luis_carlos_barbosa.pdf) Acesso em: 06 Ago. 2012.

PADREDI, Z. L. N. **As “Alavancas Meta” no discurso do professor de Álgebra Linear**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Disponível em: [http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/zoraide\\_lucia\\_padredi.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/zoraide_lucia_padredi.pdf) Acesso em: 06 Ago. 2012.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ROBERT, A.; ROBINET, J. Prise en compte du meta en didactique des mathematiques. **Cahier de DIDIREM**, Université Paris, v. 21, september 1993. Disponível em: [http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/CDD\\_21\\_-\\_A.Robert\\_et\\_J\\_.Robinet\\_-\\_Prise\\_en\\_compte\\_du\\_meta\\_en\\_didactique\\_des\\_math%a9matiques\\_.pdf](http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/CDD_21_-_A.Robert_et_J_.Robinet_-_Prise_en_compte_du_meta_en_didactique_des_math%a9matiques_.pdf) Acesso em: 05 Dez. 2012.

ROGALSKI, M. L'enseignement de l'algebre lineaire en premiere annee de DEUG A. **Gazette Des Mathématiciens**, nº 60, avril 1994.

SOUSA, F. E. E. *et al.* (Org.). **Sequência Fedathi**: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza: Edições UFC, 2013.

SOUZA, M. J. A. **Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da Geometria mediada por tecnologias digitais**. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. Disponível em: [http://www.teses.ufc.br/tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=6521](http://www.teses.ufc.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=6521). Acesso em: 26 Ago. 2012.