

ENSINO DO CÁLCULO E VÁRIAS VARIÁVEIS: UMA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA FEDATHI NO ENSINO DE *PONTO CRÍTICO, PONTO DE INFLEXÃO* E SUA VISUALIZAÇÃO NO ESPAÇO IR^3

Francisco Regis Vieira Alves

Hermínio Borges Neto

O Cenário da Investigação do Cálculo em uma Variável Real

O cenário nacional e internacional de investigação do Cálculo em uma Variável Real acumula valiosos resultados, correspondentes a mais de duas décadas de esforço e dedicação. Dentre os pioneiros na área de pesquisa em Educação Matemática, num contexto internacional, destacamos o educador e matemático inglês David Tall.

Ele esclarece em um de seus artigos da década de 1980 que *o seu trabalho pessoal se concentra no estudo de Cálculo e Análise* (TALL, 1981a, p. 317). Enfatiza intenso interesse nos estudos direcionados a compreender a relação entre a definição conceitual (*concept definition*) e a imagem conceitual (*concept image*). Tall sublinha que “a noção de imagem conceitual se torna útil para explicar o desenvolvimento e compreensão conceitual por parte do aluno de teorias axiomáticas.” (1981a, p. 318).

Fornece um exemplo de uma definição formal em *Análise Real*, ao considerar uma função $f : D \subset IR \rightarrow IR$, e lembra que a função será chamada de *pictorially continuous* se para qualquer intervalo $[a, b] \subset D$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in [a, b]$, a condição $|x - y| < \delta$ implica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (TALL, 1981a, p. 318).

Mais adiante, explica que o gráfico de uma função com esta propriedade pode ser desenhado em qualquer escala es-

pecífica de $[a, b]$, sem que tenhamos que retirar a ponta da caneta do papel. Num contexto semelhante, por um viés intuitivo, quando um professor trabalha com uma ideia particular relacionada ao conceito discutido por Tall no IR^2 , usualmente conhecido como o conceito de *continuidade*, geralmente explica que o gráfico não apresenta “saltos”, “rupturas” ou interrupções.

Tall (1981b, p. 155) lembra que a *noção de continuidade* raramente é mencionada com apelo da *definição formal*. Em geral, nos referimos no ensino à sua interpretação intuitiva que, de modo rigoroso, está errada. De fato, Lima (2006, p. 223) explica que, se a é um *ponto isolado* do conjunto $X \subset IR$, então $f : X \subset IR \rightarrow IR$ será *contínua* em $x = a$, o que decorre facilmente da formulação por *épsilon* e *delta* (ϵ, δ) e da definição topológica de *ponto isolado*. Em particular, se $X = IN, Z$ ou Q é um conjunto de pontos isolados, decorre que a função $f : X \rightarrow IR$ é contínua. Argumentos desta natureza, no entanto, não são usuais num curso introdutório de Cálculo.

Temos para ilustrar, todavia, o exemplo da função $f : IN \rightarrow IR$ descrita por $f(n) = 3n - 1$, para $n \geq 0$ (figura 1), que é *contínua*, entretanto, é impossível traçar/esboçar seu gráfico sem retirar a caneta do plano. Deste modo, evidenciamos que, neste caso, como pode ser concluído em outras situações, a explicação fornecida pelo professor, dando conta do caráter intuitivo de um conceito matemático, deve ser encarado como provisório, falível, de caráter restrito e não formal. Aliás, esta é uma das características intrínsecas do raciocínio intuitivo ora utilizado para fornecer uma significação ao aprendiz num momento do primeiro contato com uma teoria como o Cálculo que, reconhecidamente, proporciona sérios entraves à aprendizagem.

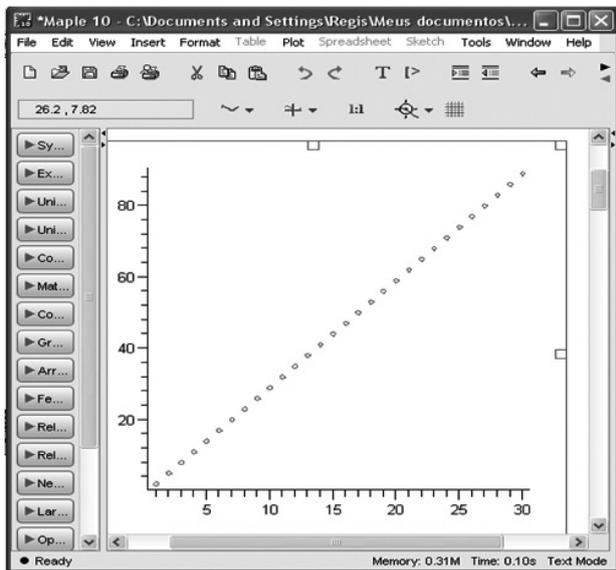


Figura 1 – Representação Geométrica de uma Função Contínua Plotada pelo Maple 10

Torres & Giraffa (2009, p.24) lembram que o objetivo do ensino da Matemática deixou de ser apenas a busca pelo desenvolvimento do raciocínio lógico-formal, mas também como a busca pela compreensão das operações elementares. Deste modo, cabem ao professor atenção e bom senso suficiente no ensino do Cálculo. Ele deve saber que a busca pelo *rigor* não deve ser esquecida, entretanto, este não é o maior objetivo de sua práxis. Seu maior objetivo é a aprendizagem, e o apelo intuitivo, na opinião de vários estudiosos (FISCHBEIN, 1987; KLINE, 1980), pode potencializar e facilitar o entendimento do incipiente.

Para concluir esta pequena discussão inicial, salientamos o grau de facilidade com que encontramos uma dissertação ou tese versando sobre o ensino do Cálculo em uma variável real.

Observamos nestes trabalhos, recentes ou não, a persistência de entraves à aprendizagem. Por exemplo, Celestino (2008) identifica estudos desenvolvidos que mostram resultados sobre a transição do ensino escolar para o ensino superior. Tais investigações, conforme Celestino (2008, p.73), evidenciam as dificuldades sofridas pelos alunos na aprendizagem do Cálculo decorrentes das dificuldades geradas nos ciclos escolares.

Num âmbito de estudo que se aproxima do enfoque de Celestino, isto é, com uma preocupação com a aprendizagem, todavia, em nível superior, encontramos em Pinto (1998, p.293) conclusões que, dentre as dificuldades no Cálculo e Análise, “a exigência do pensamento matemático avançado na transição da Matemática elementar para a Matemática Avançada fornece sérias barreiras.”

Deste modo, identificamos tanto o interesse na transição do ambiente escolar para o acadêmico, como também estudos reportando-se ao primeiro contato com o *Cálculo Diferencial e Integral*. Na próxima seção, discutiremos algumas questões relacionadas à outra espécie de transição, mas agora, no contexto interior ao do *Cálculo Diferencial e Integral*.

As Pesquisas sobre o Cálculo em Várias Variáveis

Com já mencionamos, é constante a atenção dedicada pelos trabalhos acadêmicos relacionada à transição do aluno do ambiente escolar para o *locus* universitário. Por outro lado, no Brasil e no exterior, as pesquisas interessadas na aquisição do Cálculo em Várias Variáveis são ainda escassas e evidenciam um vácuo científico a respeito das dificuldades na transição dos alunos do *Cálculo em Uma Variável* – CUV para o *Cálculo em Várias Variáveis* – CVV (ALVES, 2011; ALVES, 2012).

Merece destaque, entretanto, o estudo realizado pelo brasileiro Henriques (2006). Relacionado à mencionada transição, temos o surgimento de *representações semióticas*, no sentido de Duval (1995), e o aumento de sua complexidade, no que diz respeito à operacionalização e conceitualização, a qual é modificada de modo substancial. Observamos isso no quadro de transição do CUV para o CVV descrito, para o caso específico de funções do tipo $y = f(x)$ e $z = f(x, y)$, conforme a figura a seguir.

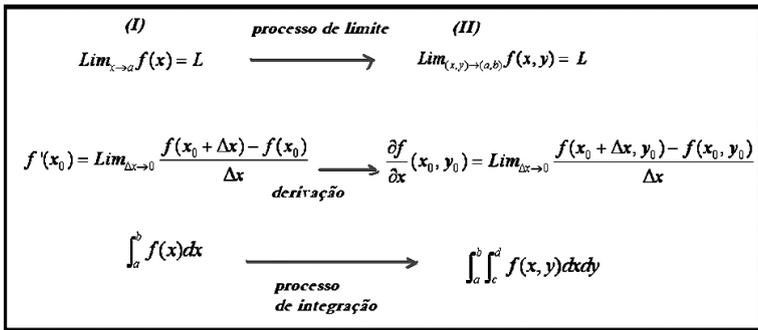


Figura 2 – Tabela que Explicita a Mudança e a “Complexificação” dos Registros no Cálculo

Reconhecidamente, as operações e o *tratamento* das *representações* acima dos principais objetos conceituais (*limite*, *derivada* e *integral*) demandam operações cognitivas mais complexas e maior esforço da memória do estudante. De fato, Duval (1995, p.28) explica de que modo as *representações semióticas* que simbolizam objetos conceituais requerem a formação de *imagens mentais* no sujeito e tais *imagens mentais* compõem as ideias e crenças sobre eles. Assim, diante da complexidade das representações observadas na figura 2-II, depreendemos que as operações cognitivas exigidas dos alunos neste patamar subsequente de ensino serão mais sofisti-

cadadas, o que exige um grau elevado de abstração (ALVES; BORGES NETO & ALVES DIAS, 2012). Restringimo-nos, entretanto, às representações observáveis no espaço \mathbb{R}^3 . Por exemplo, o gráfico de uma função do tipo $w = f(x, y, z)$ se encontra no \mathbb{R}^4 , mas somente as suas *curvas de nível* podem ser observadas, com o auxílio neste caso indispensável do computador.

Sabemos que o CVV se fundamenta na Análise no \mathbb{R}^n , a qual pode ser trabalhada no caso do \mathbb{R}^3 . Lima (1989) aborda, por exemplo, diversas situações particulares dos conceitos apresentados ao longo da obra, que exploram a percepção das três dimensões e são observáveis pelo olho humano. Com uma preocupação semelhante, tencionamos discutir adiante algumas noções ordinariamente apresentadas no \mathbb{R}^2 pelos livros didáticos, em num novo contexto, ou seja, no \mathbb{R}^3 .

Uma Discussão das Noções de *Ponto Crítico* e *Ponto de Inflexão* no \mathbb{R}^3 Referenciando-se na Sequência Fedathi

As noções de *ponto crítico* e *ponto de inflexão* essencialmente são trabalhadas nos livros introdutórios de Cálculo. Com respeito à primeira noção, Stewart (2001a, p. 281) aborda aspectos intuitivos da noção de *ponto crítico*. Ele explora também as condições analíticas que caracterizam um *ponto crítico* onde a derivada $f'(c) = 0$ ou não existe.

Já a noção de *ponto de inflexão* é caracterizada de um modo bastante intuitivo, que se caracteriza por *um ponto P onde a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P*. (STEWART, 2001a, p. 298). Na Figura 3, que exibimos na sequência, fornecida pelo *Geogebra*, descrevemos o gráfico da função $f(x) = x^4 - 4x^3$. De modo rápido, descobrimos, por meio da 1ª derivada $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$

e da 2ª derivada $f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$, os seus *pontos críticos* e de *inflexão*, respectivamente. Tradicionalmente, no seu ensino, os professores exploram situações como esta no \mathbb{R}^3 , como uma influência direta do livro didático adotado.

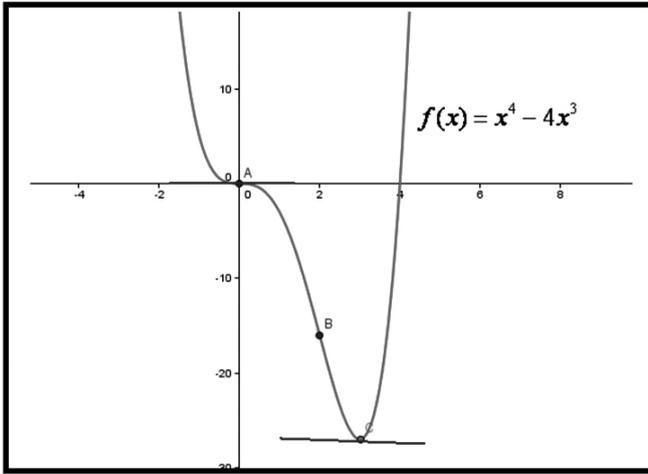


Figura 3 – Gráfico pelo Geogebra no Plano Discutido

Fonte: Stewart (2001, p. 300).

Agora vamos estudar as mesmas noções, no ambiente de funções com mais de uma variável, particularmente do tipo $z = f(x, y)$ assumindo os pressupostos da *Seqüência Fedathi*. Assim, na figura 4, trazemos a primeira situação que é comum nos curso de CVV. O contexto de exploração da *superfície* gerada por $f(x, y) = x^3y - xy^3$ é usualmente o da determinação de *valores máximos e mínimos locais* atingidos pela função, o que no CUV corresponde à noção de *ponto crítico*. Nela, destacamos os pontos de *fronteira ou “borda”* por meio da justaposição de *curvas parametrizadas*. Efetuamos uma justaposição dos objetos, com ênfase nas curvas da

fronteira (vermelho, preto, amarelo e azul), com a intenção didática de conduzir o aluno a diferenciar a *região interior* da *superfície* e da *fronteira* (figura 4-III e 4-II).

Seguindo a orientação de Kline (1980, p. 17) conduzimos o aluno à percepção do comportamento das curvas da fronteira da *superfície*. Assim, *proporcionamos a investigação de verdades mais elevadas* e instigamos uma *tomada de posição* do estudante. Salientamos que a compreensão de verdades intrínsecas destes objetos nos auxilia a compreender o que de fato eles são e as variáveis relevantes do problema que tencionamos investigar. Uma preocupação desta natureza caracteriza, segundo Maddy (1990, p. 4), o *olhar ontológico* que corresponde na compreensão por parte do observador, da existência de tal objeto conceitual.

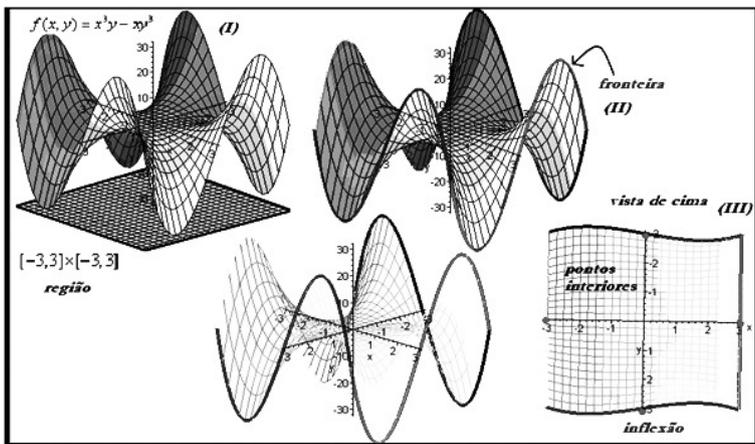


Figura 4 – Superfície Plotada pelo Maple 10

Num âmbito predominantemente operacional e menos filosófico, no entanto, escolhemos a região do plano $[-3, 3] \times [-3, 3]$ (figura 4-I) na qual analisamos o com-

portamento da função $f(x, y) = x^3y - xy^3$, restrita inicialmente em $-3 \leq y \leq 3$ e $x = 3$. Neste caso, escrevemos $f(3, y) = 27y - 3y^3$, que é uma função em uma variável real. Com base nesta obtemos $f'(3, y) = 27 - 9y^2$ e $f''(3, y) = -18y$. Com estas representações, no momento didático que chamamos de *maturação*, evitamos a adoção precipitada da simbologia do CVV e exploramos as habilidades dos alunos relacionadas ao *tratamento* (DUVAL, 1995, p. 37) das *representações* que eles já costumavam empregar no CUV; entretanto, agora no espaço \mathbb{R}^3 . Ainda na figura 4-III, se nos restringimos à *parametrização* que descreve a curva $f(3, y) = 27y - 3y^3$, podemos realizar o estudo do sinal da função $f'(3, y) = 27 - 9y^2$, que possui os *pontos críticos* $y = \pm\sqrt{3}$ e o *ponto de inflexão* $y = 0$ identificados agora no espaço \mathbb{R}^3 .

No nível II da Sequência Fedathi, chamada de *maturação*, contudo, cabe ao aluno localizar visualmente, com o auxílio computacional, a localização destes pontos na *superfície*. Repare que obtemos os pontos $(3, 0, 0)$. Podemos ainda facilmente identificar os pontos onde a reta tangente é horizontal e mesmo num ponto onde a tangente é vertical, todavia, fazemos toda a verificação visual destes pontos no \mathbb{R}^3 .

As imagens que fornecemos destes objetos, conforme Flores (2009, p. 266), podem auxiliar a compreensão do estudante, o autor acrescenta, ainda, que a noção de ponto crítico de uma função representa um guia para o professor oferecer informações que vão do particular ao geral, promovendo o processo indutivo. (2009, p. 267)

Em outro caso, se consideramos a função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$, podemos distinguir o comportamento interessante, ao observar seu gráfico, que apresentamos em seguida na figura 5. Uma diferença substancial

deste caso para o primeiro é que esta última função não apresenta mais uma espécie de ‘*simetria*’ em relação ao eixo Oz, como no caso da função $f(x, y) = x^3y - xy^3$.

Agora, em virtude do seu comportamento irregular, alguns *pontos de sela* podem se tornar difíceis de serem explorados visualmente, mesmo com o auxílio do *Maple 10*, uma vez que são *pontos interiores*, ao passo em que, no primeiro exemplo, recorrendo a um *raciocínio indutivo*, característico da *intuição*, o aluno pode prever o comportamento e a localização de todos os *pontos de inflexão* (num total de quatro) que se encontram na *fronteira* (figura 4-II e III).

Mudamos propositadamente as cores das parametrizações da *fronteira* e salientamos que a própria escolha das cores pode influenciar a *percepção* do aprendiz. Neste e em outros exemplos, sugerimos o azul e/ou vermelho, cores que proporcionam um tempo menor de resposta do sujeito no que diz respeito a sua ação perceptiva. Concordamos com Maddy (1990, p. 51), quando explica que *para a percepção, necessitamos que o observador adquira crenças perceptuais apropriadas*. E tais *crenças perceptuais* são caracterizadas por ela como essencialmente *não inferenciais*.

Assim, no momento inicial de exploração visual do “cenário” que caracteriza a situação-problema envolvendo as funções apresentadas, sugerimos a promoção de uma atividade discursiva, sem o abuso de simbologias, fórmulas e teoremas usuais do CVV (figuras 5 e 6). Tal atividade funciona como um terreno fértil para a exploração do nível seguinte (nível III) da *Seqüência Fedathi* chamado de *solução*.

Neste momento o aluno, com o auxílio do docente, deverá divisar e colocar em prática todos os instrumentos conceituais peculiares ao CVV, com um apoio fundamental da significação dos conceitos trabalhados em virtude da exploração

visual das mesmas. No último nível da sequência chamado de *prova*, discutimos o modelo matemático subjacente a cada situação, inclusive suas limitações, quando comparado à sua exploração no ambiente computacional.

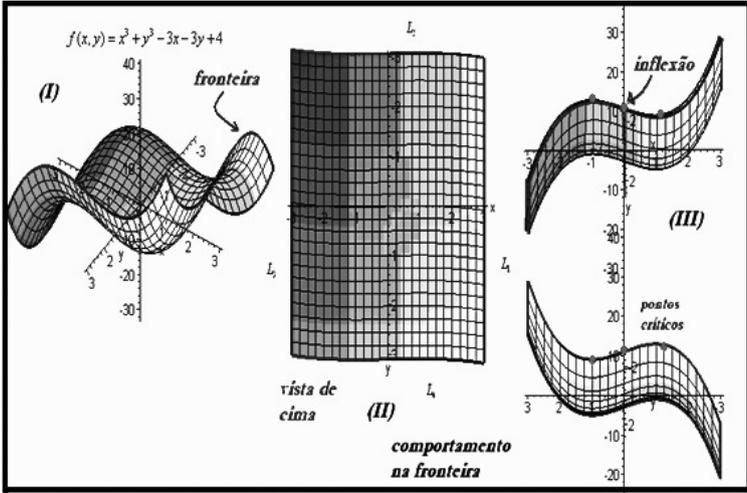


Figura 5 – Representação de uma Superfície, com Destaque para a Fronteira

O teorema chamado de *teste da Hessiana* ou *teste da 2ª derivada* é usado pelos livros de Cálculo para identificar os *pontos extremos* e *pontos de sela* na *região interior* de uma superfície qualquer. Semelhantemente como no caso da *noção de continuidade*, a demonstração formal deste teorema dificilmente é apresentada nos livros por envolver conhecimentos de Análise no \mathbb{R}^n , entretanto, a discussão de contra-exemplos é importante no nível IV, da *Seqüência Fedathi*, chamada de *prova*.

No caso da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$, temos um *ponto de sela* em $(-1,1)$ e $(1,-1)$. De fato, obser-

vamos que $H(x, y) = f_{xy}^2 - f_{xx} \cdot f_{yy} = -36xy$ e, nestes pontos $H(1, -1) > 0$ e $H(-1, 1) > 0$. Assim, pelo teste da Hessiana, temos dois pontos de sela que, caracterizados geometricamente por Stewart (2001b, p. 94) como pontos, cujo gráfico, localmente, tem um formato de uma sela (figura 6-III e IV).

Por outro lado, antes da aplicação do teorema, poderíamos discutir com o aluno o comportamento da função $f(-1, y) = y^3 - 3y + 6$, notando que: $f'(-1, y) = 3y^2 - 3$ e $f''(-1, y) = 6y$. Por outro lado, temos $f(x, 1) = x^3 - 3x + 2$ e $f'(x, 1) = 3x^2 - 3$, $f'(x, -1) = 6x$. Assim, analisamos o comportamento das concavidades das funções $f''(-1, y) = 6y$ e $f'(x, 1) = 6x$. Note-se que no ponto de sela (figura 6-II), vemos duas trajetórias (em azul) que nos informam o comportamento local da superfície, o qual se assemelha ao parabolóide hiperbólico. Veja-se que para $x = -1$, temos $y \rightarrow 1^-$ a concavidade muda de cima para baixo. E quando $y \rightarrow 1^+$ a concavidade é para baixo.

Um problema que identificamos aqui é de que modo relacionar, por uma via intuitiva, a noção de ponto de inflexão, que é peculiar ao CUV com a noção de ponto de sela estudada somente no CVV. Afinal, o primeiro é descrito pela mudança de posição da concavidade. Enquanto isso, o segundo, como caracteriza Stewart (2001a), é direcionado à identificação geométrica do comportamento de uma região no IR^3 que, quando analisada por meio de curvas nas vizinhanças do ponto, de modo similar, também apresentam uma mudança de concavidade. Sublinhamos, porém, a ideia de que para o caso de uma superfície mais complexa, dificilmente reconhecemos visualmente um ponto de sela, basta analisar o gráfico da figura 4-I ou suas curvas de nível mais adiante na figura 7-I.

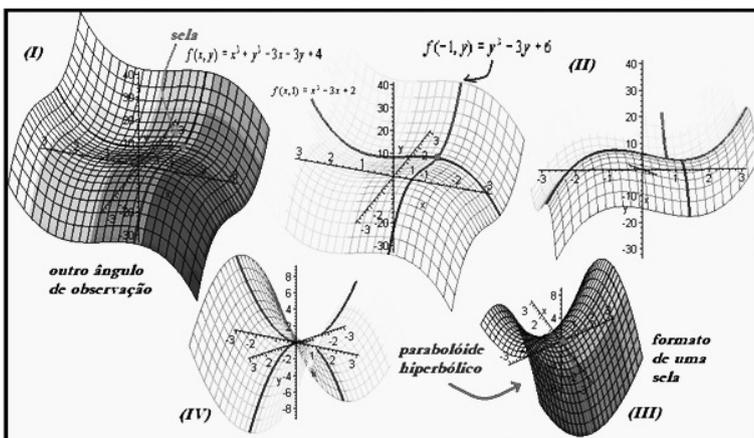


Figura 6 – Ênfase Dada no Comportamento Local da Função (ponto de sela).

De fato, enquanto a *superfície* definida por $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$ apresenta apenas dois pontos de sela, a *superfície* definida por $f(x, y) = x^3 y - xy^3$, admite, por meio de uma ‘análise visual’ inicial, uma infinidade de *pontos de sela* em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ (figura 4-I). Isto, visualmente, é impossível de inferir com maior precisão, todavia, quando empregamos o modelo formal previsto pelo *teste da Hessiana*, identificamos apenas um único *ponto de sela* $(0, 0, 0)$. Portanto, a caracterização de Stewart possui caráter algorítmico, de ênfase restritiva e, na prática, o aluno recorre ao raciocínio fundamentado no *pensamento algorítmico* (OTTE, 1991) possibilitado pelo teste da 2ª derivada, para descobrir os demais pontos.

Na figura 7-I, quando as *curvas de nível* se assemelham a *hipérbolas* (curvas abertas), temos *pontos de sela*. E na figura 7-II, todavia, temos apenas dois *pontos de sela*. Estas caracterizações para *pontos extremos* e *pontos de sela* são fornecidas por Stewart (2001).

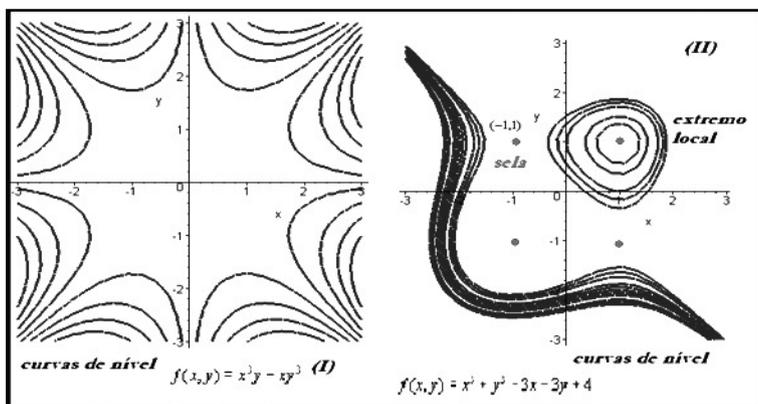


Figura 7 – Análise das Curvas de Nível das Superfícies Estudadas na SF.

Note-se que, nas vizinhanças do *ponto extremo* $(1,1)$ descrito na figura 7-II, as curvas são fechadas, semelhantes a *elipses*. Por outro lado, destacamos ainda o fato de que para as funções $f'(-1, y) = 3y^2 - 3$ e $f''(-1, y) = 6y$, obtidas a partir de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$, encontramos os *pontos críticos* e de *inflexão*. De modo análogo para $f'(x, 1) = 3x^2 - 3$ e $f''(x, 1) = 6x$.

E o *ponto de sela*, quando nos restringimos às curvas em destaque na ilustração 6-II, pode ser estudado como um *ponto de inflexão*, por meio da análise do comportamento local das *concauidades* no espaço \mathbb{R}^3 . De fato, na figura 6-IV, temos duas *concauidades* no ponto $(0,0,0)$. Uma voltada para cima e outra para baixo, como nos mostram as curvas em azul na figura da ilustração 6-IV. Assim, investigamos, de modo semelhante ao que efetuamos na *fronteira*, a natureza de *pontos interiores* da *superfície*, com o uso das noções já conhecidas do CUV.

Para finalizar esta seção, recorreremos a Flores (2009, p. 273), quando observa no âmbito de sua proposta metodológica a noção de que, dentre

as capacidades cognitivas que pode-se explorar do aluno, divisa-se a habilidade de localização e expressão gráfica, considerada como parte da capacidade de orientação.

Em nosso ambiente de análise, porém, se torna impossível o aluno expressar o gráfico das *superfícies* discutidas acima usando apenas lápis e papel. Deste modo, o suporte informático nos fornece possibilidades para uma abordagem diferenciada, que viabiliza promover e explorar a *percepção* e a *intuição matemática*, como recomendam Fischbein (1987, 1999) e Kline (1980), antes de estimular precipitadamente o raciocínio lógico do aprendiz, o que ordinariamente é priorizado pelo livro didático. Tal hierarquização de momentos didáticos para o estudo destes conceitos se torna bastante frutífero, à medida que aplicamos a *Sequência Fedathi*.

Considerações Finais

Kline (1980, p. 230) comentou que

os logicistas tomavam uma posição diametralmente oposta dos intuicionistas. Enquanto os primeiros buscavam refinar cada vez mais sua lógica como fundamento para a Matemática, os intuicionistas buscavam abandoná-la.

Sugerimos ao professor no ensino de Cálculo uma posição não radical; ou seja, nem *logicista* ou *formalista* ao extremo, nem, muito menos, *intuicionista*. Certamente não é simples de se escapar da influência destas correntes filosóficas

absolutistas (ERNEST, 1991) em sala de aula, que condicionam o ensino tradicional de Matemática em todos os níveis, inclusive no ambiente acadêmico.

Assim, buscando romper com o ensino tradicional, discutimos nas seções anteriores as noções de *ponto crítico* e de *inflexão* na perspectiva de uma abordagem ancorada na metodologia de ensino chamada de *Sequência Fedathi*. Inicialmente, tais noções são introduzidas no CUV; entretanto, as mesmas poderiam ser exploradas num curso avançado de Cálculo, quando utilizadas de modo a fornecer o significado visual para um *ponto de sela*, o que não é realizado pelo livro didático. Aspecto marcante que propicia uma abordagem intuitiva, de acordo com nossa proposta de mediação didática, é a exploração das três dimensões (IR^3) para a *visualização* e *percepção* dos objetos que se relacionam com cada situação-problema, sem a adoção de um formalismo extremado e o abuso precipitado das simbologias intrínsecas do CVV (ALVES & BORGES NETO, 2012; ALVES; BORGES NETO & INGAR, 2012).

Com o arrimo na *Sequência Fedathi*, esta mediação facilitada e promove a *transição interna* (ALVES & BORGES NETO, 2011) entre as disciplinas de Cálculo, estudadas no primeiro e segundo anos de universidade. Evidenciamos, entretanto, que a referida transição ainda não recebeu cuidados e abordagens condignas, nem muito menos a preocupação dos livros didáticos consultados em nossa investigação (BUCK, 1965; GUIDO-RIZZI, 1986; FLEMING, 1987; LEITHOLD, 1982; KAPLAN, 1962; MARSDEM & TROMBA, 1996), com exceção da obra de Stewart (2001).

De fato, observamos nos livros didáticos o emprego da noção intuitiva de *função contínua*, de acordo com o que apontamos na descrição de Tall, não vemos, todavia, uma

abordagem semelhante nos livros de CVV que destaquem o mesmo viés intuitivo. Estes livros são eficientes na apresentação de símbolos, teoremas e extensas demonstrações, seguidos de exercícios algoritmizados, mas que nem sempre conduzem a uma aprendizagem significativa.

E, no caso do CVV, sublinhamos que o problema se agrava, uma vez que, além de o aluno enfrentar uma *transição interna* nas disciplinas de Cálculo; as *representações* dos objetos passam a gozar de interpretações geométricas, impraticáveis de conceber e descrever no ambiente lápis e papel, *mas podem ser enriquecidas pelo livro didático* (MARQUES, 2009, p. 17). Deste modo, as situações-problema estruturadas nos pressupostos da *Sequência Fedathi*, envolvendo as noções de *ponto crítico*, *ponto de inflexão* e *ponto de sela*, que discutimos aqui, com o auxílio tecnológico, proporcionam um entendimento maior do estudante, à medida que ele observa com os próprios olhos o comportamento do objeto representado pelo computador (ALVES; BORGES NETO & INGAR, 2012).

Por esta via, o estudante adquire *crenças perceptuais* (MADDY, 1990, p. 51) adequadas de cada *objeto matemático* em análise e, por fim, utiliza os instrumentos conceituais do *Cálculo em Uma Variável Real* - CUV para a solução de problemas do *Cálculo em Várias Variáveis* – CVV.

Referências

ALVES. F. R. V. & BORGES NETO. H. Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, p. 1-12. *Anais eletrônicos*. Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem. Acesso em: 24 abr. 2011.

ALVES, Francisco. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011, 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php

ALVES, Francisco Regis; BORGES NETO, H. & ALVES DIAS, M. Implicações e aplicações da teoria das representações semióticas no ensino do Cálculo. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 5, n^o 2, 2012, p.22-40, Disponível em: <http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM>.

_____. Exploração didática com o *Maple* no ensino do Cálculo a Várias Variáveis. CONFERÊNCIA ARGENTINA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 10, *Anais...* Buenos Aires, 2012, pp. 1-12. Disponível em: <http://www.soarem.org.ar/XCAREM/programa.htm>.

_____.; BORGES NETO, Hermínio. INGAR, Kátia, V. Aplicações da Sequência Fedathi: sobre o ensino dos pontos críticos e de inflexão. p. 1-15, 2012, In: COLÓQUIO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, 6, Lima. Disponível em: <http://irem.pucp.edu.pe/164/iv-colouquio-internacional-sobre-ensenanza-de-las-matematicas>.

_____.; BORGES NETO, Hermínio. Curvas parametrizadas: atividades envolvendo a visualização dos conceitos do Cálculo. **RELME 26**, p. 1-12, 2012. Disponível em: http://www.relme26.ufop.br/index.php?option=com_content&view=frontpage&lang=pt.

BUCK, R. Creighton. **Advanced calculus**, 2. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965. 420P.

CELESTINO, Marcos Roberto. **Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior**, 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Paris: Peter Lang, 1995. 395p.

ERNEST, Paul. **The Philosophy of Mathematics Education**. London: The Palmer Press, 1991. 341p.

_____. **Intuition in science and mathematics: an educational approach**. Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987, 224p.

FISCHBEIN, Efrain. Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. In: TIROSH, Dina. **Forms of Mathematical Knowledge: learning and teaching with understanding**, London: Klumer Academic Press, 1999, p. 11-50.

FLEMING, Wendell. **Functions of several variables**. 2.ed. New York: Springer, 1987. 570P.

FLORES, Rafael Pérez. Concept Mapping: An important guide for The Mathematics Teaching Process. In: FUATAÍ, Karoline Afamasaga. **Concept mapping in mathematics**. New York: Springer, 2009, p.259-280.

GUIDORIZZI, Hamilton. **Um curso de cálculo**. v.2, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1986.

HENRIQUES, Afonso. **L'enseignement et l'apprentissage des integrales multiples**: analyse didactique integrant l'usage du logiciel Maple. Thèse (Thèse de Doctorat em Didactiques des Mathématiques). Grenoble: Université Joseph Fourier, IMAG, 2006.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: HARBRA, v. 2, 1982. 785P.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. v. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 1989. 543p.

KAPLAN, Wilfred. **Advanced calculus**, fifth edition. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing, 1962, 980p.

KLINE, Morris. **Mathematics**: the loss of Certainty, London: University Press, 1980. 276P.

MADDY, Penelope. **Realism in mathematics**. Clarendon: Oxford University Press, 1990. 200P.

MARSDEN, Jerold. & TROMBA, Anthony. **Vector calculus**. New York: W.H. Freeman and Company, 1996. 1110P.

MARQUES, Leandro. **Sobre a utilização do livro didático no estudo de derivadas parciais**, 2009. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

OTTE, Michael. **O formal, o social e o subjetivo**: uma introdução à Filosofia e a Didática da Matemática. São Paulo: UNESP Editora, 1991, 322P.

PINTO, Marcia Fusaro. **Students' understanding of real analysis**. Thesis (Thesis of Doctor of Philosophy). Institute of Education, University of Warwick, 1998.

TALL, David. The mutual relationship between higher mathematics and a complete cognitive theory of mathematical education. In: **Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale P.M.E.** Grenoble, p. 316-321, 1981a.

TALL, David. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. In: **Educational Studies in Mathematics**, p.151-169, 1981b.

TORRES, Teresinha Ione Martins & GIRAFFA, Lucia Maria Martins. O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE. In: **REVEMAT**, v. 4.2, p. 18-25, UFSC, 2009.

STEWART, James. **Cálculo**, v. I, 4. ed. São Paulo: Thompson, 2001a. 1120P.

STEWART, James. **Cálculo**, v. II, 4. ed. São Paulo: Thompson, 2001b. 1146P.