



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ELVIS JOHNSON MORAES DE SALES**

**PROJETO DE IDENTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE UM PROTÓTIPO  
BASEADO NO PRINCÍPIO DE UM PÊNULO AMORTECIDO CONTROLADO  
POR TÉCNICAS DE ALOCAÇÃO POLINOMIAL EM RST**

**FORTALEZA**

**2018**

ELVIS JOHNSON

PROJETO DE IDENTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE UM PROTÓTIPO BASEADO NO  
PRINCÍPIO DE UM PÊNULO AMORTECIDO CONTROLADO POR TÉCNICAS DE  
ALOCÇÃO POLINOMIAL EM RST

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de graduado em engenharia elétrica. Área de concentração: Controle.

Orientador: Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia  
Coorientador: Eng. Ms. Marcus Davi do Nascimento Forte.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- D32p De Sales, Elvis Johnson Moraes.  
PROJETO DE IDENTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE UM PROTÓTIPO BASEADO NO PRINCÍPIO DE UM PÊNDULO AMORTECIDO CONTROLADO POR TÉCNICAS DE ALOCAÇÃO POLINOMIAL EM RST / Elvis Johnson Moraes De Sales. – 2018.  
68 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia.  
Coorientação: Prof. Me. Marcus Davi do Nascimento Forte.
1. Pêndulo amortecido. 2. Filtro complementar. 3. Controle digital. 4. Alocação de polos. I. Título.  
CDD 621.3
-

ELVIS JOHNSON MORAES DE SALES

PROJETO DE IDENTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE UM PROTÓTIPO BASEADO NO  
PRINCÍPIO DE UM PÊNDULO AMORTECIDO CONTROLADO POR TÉCNICAS DE  
ALOCAÇÃO POLINOMIAL EM RST

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em engenharia elétrica. Área de concentração: Controle.

Aprovada em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Wilkley Bezerra Correia (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Eng. Ms. Marcus Davi do Nascimento Forte (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus.

Aos meus pais, Roberto e Maria.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força e resiliência. Por ter me concedido saúde e disposição para me ajudar naqueles momentos difíceis. Sem ele, nada disso seria possível.

Aos meus pais, Roberto Doroteu e Maria Socorro, que tanto lutaram pela minha educação e nunca me deixaram perder a fé. Meu muitíssimo obrigado por todo carinho, amor e força.

Ao meu avô, Doroteu Sales (in memoriam), que sempre foi o meu maior exemplo de luta e determinação nessa vida.

Ao meu amigo, Pe Werley Arcanjo (in memoriam), que em algum lugar deve estar vibrando com essa conquista.

A minha namorada, Leticia Almeida, que me estimulou durante todo o período que estivemos juntos e compreendeu minha ausência pelo tempo dedicado aos estudos. Meu muitíssimo obrigado por todo amor, carinho e paciência.

Ao meu orientador, Professor Dr. Wilkley Bezerra Correia, que durante as etapas desse projeto mostrou-se sempre disposto, solícito, paciente e interessado em me ajudar no que fosse necessário. Manifesto aqui minha eterna gratidão por compartilhar sua sabedoria, o seu tempo e sua experiência.

Ao meu amigo e coorientador, Eng. Ms. Marcus Forte, pela pronta ajuda e por compartilhar os seus conhecimentos com a programação de sistemas embarcados, conhecimentos sem os quais não seria possível a conclusão deste trabalho. Manifesto aqui minha eterna gratidão por compartilhar sua sabedoria, o seu tempo e sua experiência.

Ao Prof. Dr. Fabricio Gonzales, pelo auxílio fornecendo materiais eletrônicos para montagem da bancada.

Ao Prof. Dr. Luiz Henrique Barreto, pelas peças confeccionadas na sua impressora 3D.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa Automação e Robótica - GPAR, pelas reflexões, críticas, sugestões recebidas e pelo ambiente leve e descontraído que me proporcionaram durante a realização desse trabalho.

Aos meus amigos e colegas da turma de 2014, pela ajuda em todas as cadeiras e projetos que passamos juntos, por fim obrigado pelos momentos de descontração que nos fazem esquecer o quão difícil foi esse curso.

“Põe quanto és no mínimo que fazes. Assim em  
cada lago a lua toda brilha, porque alta vive.”

Fernando Pessoa

## RESUMO

Este trabalho apresenta o projeto de desenvolvimento de uma bancada fundamentada no princípio de um pêndulo amortecido sobre um trilho metálico livre para se movimentar na direção horizontal, que é um sistema muito comum nos estudos da disciplina de controle de sistemas dinâmicos. O trabalho descreve as etapas da identificação da planta real, do projeto de controle digital de um controlador na topologia RST por alocação de polos e da avaliação do desempenho do sistema em malha fechada. Uma variação do filtro de complementar é implementada para realizar a fusão entre os dados do acelerômetro e os dados do giroscópio, com o objetivo de se obter uma estimativa confiável do ângulo de inclinação. A identificação apresentada nesse trabalho considera a planta como sistema linear invariante no tempo e restringe a faixa de operação do pêndulo amortecido para um conjunto limitado de operações. Essa consideração permite o projeto do controlador RST. O objetivo do sistema experimental é manter o pêndulo na posição de equilíbrio ainda que sofra perturbações externas. O projeto do filtro complementar e do algoritmo do controlador RST foram desenvolvidos em linguagem C e implementados em um microcontrolador KL25Z, da família KINETIS. A planta foi devidamente simulada, montada e teve seu modelo validado por uma estratégia de controle.

**Palavras-chave:** Pêndulo amortecido. RST. Filtro complementar. Controle digital. Alocação de polos.



## ABSTRACT

This work presents the development of a stand based on the principle of a damped pendulum on a free metal rail which moves in the horizontal direction. This is a very common system in the studies of the discipline of dynamic systems control. The work describes the steps of identifying a real plant, the digital control design of a controller in the RST topology by pole placement and the performance evaluation of the closed loop system. A variation of the complement filter is implemented to merge the accelerometer data with the gyro data in order to obtain a reliable estimate of the slope angle. The identification presented in this work considers the plant as a linear system invariant in time and restricts the range of operation of the damped pendulum to a limited set of operations. This consideration allows the design of the RST controller. The purpose of the experimental system is to keep the pendulum in equilibrium position even if it may have external disturbances. The complementary filter design and the RST controller algorithm were developed in C language and implemented in a KL25Z microcontroller from the KINETIS family. The plant was duly simulated, assembled and had its model validated by a control strategy.

**Keywords:** Damped pendulum. RST. Complementary filter. Digital control. Pole placement.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Esquema de um guindaste.....	14
Figura 2	– Esquemático do pêndulo amortecido.....	15
Figura 3	– Forças atuando no conjunto haste e carro.....	16
Figura 4	– Haste móvel do pêndulo.....	17
Figura 5	– Pêndulo amortecido.....	20
Figura 6	– Bancada de testes.....	21
Figura 7	– Placa KL25Z NXP.....	22
Figura 8	– Interface da MCUXpresso.....	23
Figura 9	– Motor de corrente contínua.....	24
Figura 10	– Driver L298N.....	25
Figura 11	– Sensor MPU-6050.....	26
Figura 12	– Eixos XYZ e seus respectivos ângulos ( <i>roll, pitch e yaw</i> ).....	28
Figura 13	– Posição da haste com relação aos eixos Y e Z. ....	28
Figura 14	– Posição da haste com relação aos eixos X, Y e Z.....	29
Figura 15	– Medições de ângulo calculados pelo acelerômetro.....	31
Figura 16	– Comparação entre estimativa de ângulo do giroscópio e a estimativa real....	32
Figura 17	– Comparação entre estimativa de ângulo do giroscópio e do acelerômetro....	32
Figura 18	– Diagrama de bloco do filtro complementar.....	35
Figura 19	– Diagrama de bode do filtro complementar.....	37
Figura 20	– Comparação entre a estimativa dos sensores e do filtro complementar.....	38
Figura 21	– Comparação entre as estimativas do giroscópio e da fusão quando o carro se encontra parado.....	38
Figura 22	– Esquema de identificação da planta.....	40
Figura 23	– Sinal PWM e tensão média.....	41

Figura 24 – Entrada e saída obtidas no ensaio de identificação.....	42
Figura 25 – Saída obtida no ensaio de identificação com marcação dos pontos que representa um período de oscilação.....	43
Figura 26 – Saída obtida no ensaio de identificação e envoltória calculada.....	44
Figura 27 – Comparação entre o modelo identificado e os dados reais.....	44
Figura 28 – Polos encontrados na identificação.....	45
Figura 29 – Polos do pêndulo invertido.....	46
Figura 30 – Conversor A/D e discretização ZOH.....	47
Figura 31 – Polos de malha aberta no plano $Z$ .....	50
Figura 32 – Polos de malha fechada no plano $Z$ .....	50
Figura 33 – Topologia do Controlador RST.....	51
Figura 34 – Topologia do Controlador RST considerando um distúrbio aplicado na saída da planta controlada.....	51
Figura 35 – Polos de malha fechada no plano $Z$ com polo auxiliar.....	53
Figura 36 – Simulação da saída da planta em malha fechada.....	55
Figura 37 – Controle completo e esquema de fusão.....	56
Figura 38 – Resposta do controlador RST em experiência realizada em laboratório.....	56
Figura 39 – Sinal de controle do motor ( <i>duty cycle</i> ).....	57
Figura 40 – Sinal de erro do controlador RST.....	57

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características da placa KL25Z.....	23
Tabela 2 – Especificações do motor CC .....	24
Tabela 3 – Especificações do módulo L298N.....	25
Tabela 4 – Especificações do MPU-6050.....	26
Tabela 5 – Parâmetros do modelo da resposta impulsiva.....	43

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UART	<i>Universal Asynchronous Receiver/Transmitter</i>
I <sup>2</sup> C	<i>Inter-Integrated Circuit</i>
FIFO	<i>First in, first out</i>
MCU	<i>Microcontroller Unit</i>
PWM	<i>Pulse-width modulation</i>
MPU	<i>Microprocessor Unit</i>
SDA	<i>Serial and debug adapter ou Serial Data</i>
IDE	<i>Integrated Development Environment</i>
ARM	<i>Advanced RISC Machine</i>
RISC	<i>Reduced Instruction Set Computer</i>
SRAM	<i>Static Random Access Memory</i>
A/D	<i>Analógico digital</i>
D/A	<i>Digital analógico</i>
USB	<i>Universal Serial Bus</i>
SCL	<i>Serial Clock</i>
LPF	<i>low-pass filter</i>
HPF	<i>high-pass filter</i>
MG	<i>Margem de ganho</i>
MF	<i>Margem de fase</i>
SISO	<i>single-input and single-output</i>
RST	<i>Regulation, Sensitivity e Tracking</i>
ZOH	<i>zero-order hold</i>
2DOF	<i>Two-Degree-of-Freedom</i>
LQR	<i>linear quadratic regulator</i>
PRBS	<i>pseudorandom binary sequence</i>
MEMS	<i>Micro-Electro-Mechanical Systems</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\%$	Porcentagem
$\theta$	Ângulo da haste
$\dot{\theta}$	Derivada do ângulo $\theta$
$\ddot{\theta}$	Segunda derivada do ângulo $\theta$
$\theta_a$	Ângulo medido pelo acelerômetro
$\theta_g$	Ângulo medido pelo giroscópio
$\theta_f$	Ângulo estimado pelo filtro complementar
$L$	Comprimento da haste
$F$	Força
$F_i$	Força na direção do vetor canônico $\hat{i}$
$F_j$	Força na direção do vetor canônico $\hat{j}$
$r$	Posição horizontal
$\dot{r}$	Derivada da posição $x$
$\ddot{r}$	Segunda derivada da posição $x$
$M$	Massa do carro
$M_{RST}$	Matriz de termos A(z) e B(z)
$m$	Massa da haste
$a$	Aceleração
$a_i$	Aceleração na direção do vetor canônico $\hat{i}$
$a_j$	Aceleração na direção do vetor canônico $\hat{j}$
$a_x$	Aceleração na direção $x$
$a_y$	Aceleração na direção $y$
$a_z$	Aceleração na direção $z$
$A(z)$	Denominador da função de transferência discreta
$a_{1,2}$	Coefficientes do denominador da função de transferência discreta
$b$	Coefficiente de viscosidade
$b_{1,2}$	Coefficientes do numerador da função de transferência discreta
$B(z)$	Numerador da função de transferência discreta
$D$	Dado genérico
$P_{1,2}$	Coefficientes do polinômio dos polos desejados
$P(z)$	Polinômio dos polos desejados

$x$	Posição linear
$\dot{x}$	Derivada da posição $x$
$\ddot{x}$	Segunda derivada da posição $x$
$x^T$	Matriz de termos $R(z)$ e $S(z)$
$P^T$	Matriz de termos $P(z)$
$k$	Viscosidade
$w_g$	Velocidade angular do giroscópio
$w_n$	Frequência natural
$w_d$	Frequência natural amortecida
$I$	Momento de inercia da barra
$N$	Força normal do carro sobre o pêndulo
$g$	Aceleração da gravidade
$y$	Função linearizada
$\bar{u}$	Ponto de equilíbrio
$\Delta$	Derivada da função em torno do ponto de operação
$s$	Variável complexa da transformada de Laplace
$t_s$	Tempo de acomodação
$t_p$	Tempo em alta do sinal PWM
$T$	Frequência de corte do filtro
$T_{pwm}$	Período do sinal PWM
$T_s$	Tempo de amostragem
$\alpha$	Parâmetro de sintonia do filtro complementar
$V_{cc}$	Tensão de alimentação da fonte
$V_{out}$	Tensão de saída
$\xi$	Coefficiente de amortecimento
$\sigma$	Parte real da variável complexa $s$
$z$	Variável complexa da transformada $z$
$z^{-1}$	Variável complexa de atraso (deslocamento no tempo)
$M_s$	Máximo sobre sinal
$T(z)$	Filtro de referência do controlador RST
$R(z)$	Filtro de realimentação do controlador RST
$S(z)$	Filtro do controlador RST
$y(t)$	Saída do da planta discreta

- $r(t)$  Referência da planta discreta
- $D(t)$  Perturbação aplicada na saída da planta discreta
- $n_a$  Ordem do polinômio  $A(z)$
- $n_b$  Ordem do polinômio  $B(z)$
- $n_s$  Ordem do polinômio  $S(z)$
- $n_r$  Ordem do polinômio  $R(z)$
- $n_p$  Ordem do polinômio  $P(z)$



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	14
2	MODELO MATEMÁTICO.....	16
2.1	Modelo dinâmico do pêndulo invertido e do pêndulo amortecido.....	16
2.2	Linearização do Sistema .....	18
3	DESCRIÇÃO DA BANCADA .....	21
3.1	Estrutura física da bancada.....	21
3.2	Hardware e Software.....	22
3.2.1	<i>MCU – KL25Z</i> .....	22
3.2.2	<i>IDE MCUXpresso</i> .....	23
3.3	Atuador.....	24
3.4	Ponte H.....	24
3.5	Sensor inercial.....	25
4	SENSORES DE INCLINAÇÃO.....	27
4.1	Aquisição de dados.....	27
4.2	Acelerômetro.....	27
4.3	Giroscópio.....	29
4.4	Calibração.....	30
4.5	Adequação dos sinais.....	31
5	FUSÃO SENSORIAL.....	34
5.1	Filtro Complementar e fusão sensorial.....	34
5.1.1	<i>Análise de estabilidade do filtro</i> .....	36
5.1.2	<i>Análise do filtro em tempo real</i> .....	37
6	IDENTIFICAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DA PLANTA... ..	39
6.1	Identificação.....	39
6.2	Atuador.....	40
6.3	Ensaio em tempo real.....	41
7	PROJETO DO CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO POLINOMIAL.....	47
7.1	Discretização.....	47
7.2	Escolha da dinâmica de malha fechada.....	48
7.3	Controlador.....	49
7.4	Simulação.....	54

7.5	<b>Resultados.....</b>	55
8	<b>CONCLUSÃO .....</b>	59
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	61

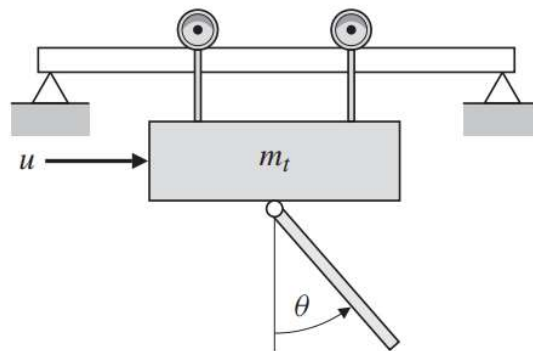
## 1 INTRODUÇÃO

O pêndulo amortecido é uma abordagem clássica dos sistemas de controle. Segundo (LOURENÇO, 2009), pêndulo amortecido é um sistema mecânico capaz de realizar movimentos periódicos, cuja movimentação é denominada de movimento harmônico ou periódico. Nesse sentido, por possuir uma dinâmica oscilatória, o pêndulo amortecido é uma planta muito estudada nas disciplinas de controle de sistemas dinâmicos. Essa planta pode ser utilizada como um exemplo útil para elucidação de vários problemas na área de controle.

Há diversas configurações e aplicações práticas que utilizam os conceitos envolvidos nesse estudo. Dentre elas, destaca-se o problema clássico de física newtoniana e a implementação relativamente simples, que é a movimentação de guias e guindastes nas indústrias e na construção civil.

A figura 1 apresenta o modelo de guindaste suspenso. Esse tipo de dispositivo é comumente utilizado para suspensão e içamento de peças na indústria, por exemplo. Nesse exemplo, o carro é responsável por movimentar o guindaste na direção horizontal, e conhecer com propriedade a dinâmica desse sistema é fundamental para projeto de sistemas de forma a não haver oscilações indesejadas durante a movimentação dessas peças.

Figura 1 – Esquema de um guindaste.



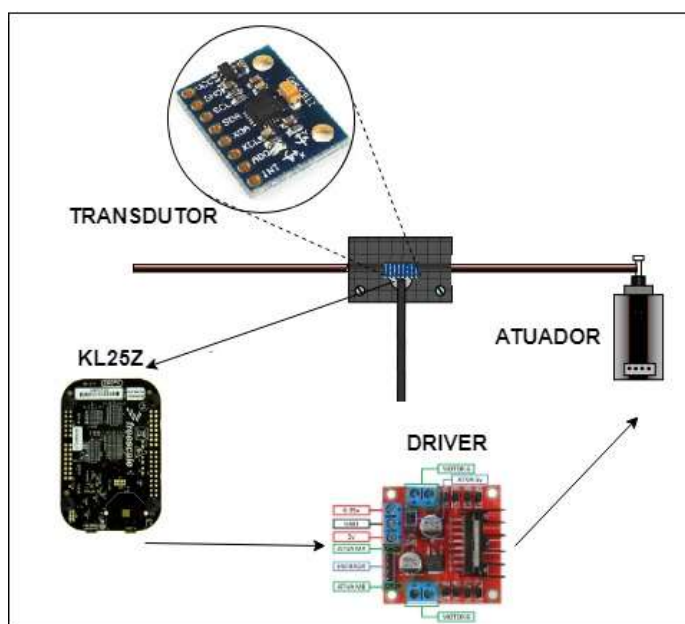
Fonte: Adaptado de Franklin, 2013.

Vários autores já estudaram a dinâmica do pêndulo amortecido, tal como o trabalho de Waldemar Bonventi Jr (2003), onde foi utilizada a abordagem de equações diferenciais para analisar de forma experimental os modelos teóricos harmônicos e anarmônicos de um pêndulo amortecido, e em André Pereira da Costa (2014), onde foi estudado o sistema pêndulo amortecido através da abordagem fenomenológica em equações de espaço de estados e simulações no *software* MATLAB.

Já o pêndulo invertido é um rearranjo dessa planta onde é definido um sistema dinâmico instável e não linear em malha aberta, no qual o ponto de operação encontra-se no ângulo superior. O pêndulo invertido, ao contrário do pêndulo amortecido necessita de um controlador para permanecer na posição de operação (LAM, 2000).

Esse trabalho refere-se a um arranjo de pêndulo amortecido, conforme o ilustrado na figura 2. Esse modelo é composto por uma barra cilíndrica, livre para movimentar-se em torno de um eixo fixo, este eixo é fixado a um carro que se movimenta na direção horizontal. O carro é acionado por um motor cujo o eixo está interligado ao carro por uma correia, essa correia é responsável pela transmissão de forças entre o carro e o motor.

Figura 2 – Esquemático do pêndulo amortecido.



Fonte: Próprio Autor.

A haste naturalmente tende a oscilar, devido a sua dinâmica física. Para esse trabalho será utilizado um controlador digital na topologia RST por alocação de polos para amortecer a dinâmica da planta, fazendo com que o carro faça o contrabalanceamento da dinâmica natural do pêndulo, exercendo uma força sobre o carro através do controle de tensão no atuador.

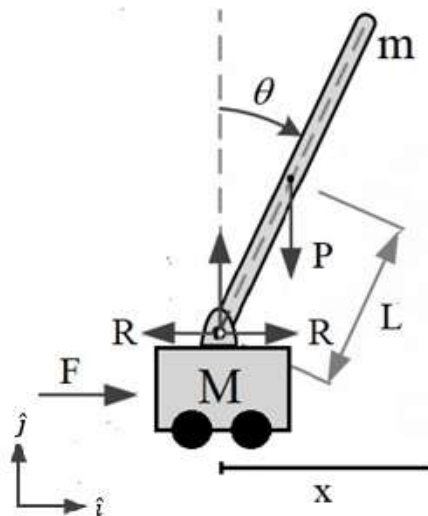
## 2 MODELO MATEMÁTICO

Segundo (OGATA, 1998), “A modelagem matemática de um sistema dinâmico é definida como um conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema com precisão ou, pelo menos, de forma aceitável”. Nesse contexto, esse capítulo apresenta um exemplo ilustrativo do equacionamento matemático de um pêndulo amortecido e um pêndulo invertido, descrevendo suas equações através da análise newtoniana em torno de um ponto de operação.

### 2.1 Modelo dinâmico do pêndulo invertido e do pêndulo amortecido

O modelo matemático apresentado nesse capítulo fundamenta-se no diagrama de corpo livre da figura 3. Desse modo, considera-se que todas as forças que atuam no pêndulo podem ser analisadas isoladamente do sistema ao qual pertence. Portanto, diante dessas considerações, e considerando o pêndulo como dois corpos: a haste e o carro, pode-se deduzir as equações matemáticas que descrevem este modelo.

Figura 3 – Forças atuando no conjunto haste e carro.



Fonte: Augusto (2017): modificado pelo autor.

Para este estudo, pode-se relacionar as equações que descrevem o modelo da figura 3 utilizando a 2ª lei de Newton (equação (2.1)). Assim, analisa-se separadamente esse sistema em duas etapas.

$$\sum F_i = Ma_i \text{ e } \sum F_j = Ma_j \quad (2.1)$$

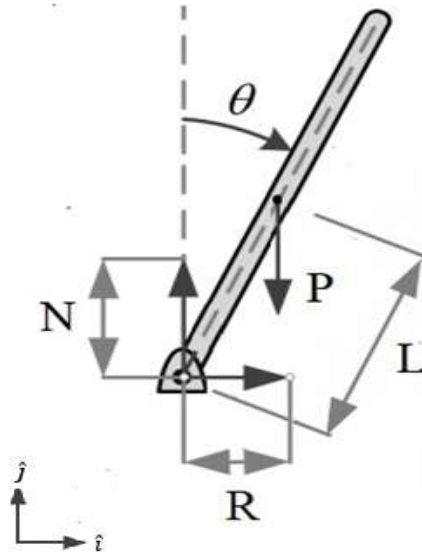
Na primeira etapa, considera-se apenas o carro de massa (M) e pode-se descrever as forças atuantes no sistema pela equação (2.2).

$$F - R = M\ddot{x} + b\dot{x} \quad (2.2)$$

Onde (F) é a força que atua no carro, (R) é a força de reação do carro, (b) é o coeficiente de viscosidade, ( $\ddot{x}$ ) é a aceleração do carro e ( $\dot{x}$ ) é a velocidade do carro.

Na segunda etapa, considera-se apenas a barra de massa m e pode-se descrever as forças atuantes no sistema da figura 4 pela equação (2.3).

Figura 4 – Haste móvel do pêndulo.



Fonte: Augusto (2017): modificado pelo autor.

Nota-se que para que haja equilíbrio o somatório das forças atuantes no sistema deverá ser nulo. Diante dessas considerações, as equações subsequentes descrevem detalhadamente o somatório de forças na direção  $\hat{i}$  e na direção  $\hat{j}$ .

$$r = x\hat{i} + L(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) \quad (2.3)$$

$$\dot{r} = \dot{x}\hat{i} + L\dot{\theta}(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \quad (2.4)$$

$$\ddot{r} = \ddot{x}\hat{i} + L\ddot{\theta}(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) + L\dot{\theta}^2(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \quad (2.5)$$

$$R = m\ddot{r} = m\ddot{x} + mL\ddot{\theta} \cos \theta - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.6)$$

$$R = ma = m\ddot{x} + mL\ddot{\theta} \cos \theta - kw \quad (2.7)$$

Em outra análise, o movimento rotacional do pêndulo em torno do seu centro de gravidade pode ser descrito pelas equações abaixo:

$$I\ddot{\theta} + k \cos \theta L + N \sin \theta L = 0 \quad (2.8)$$

$$I\ddot{\theta} = -(k \cos \theta L + N \sin \theta L) \quad (2.9)$$

$$R \cos \theta + N \sin \theta = -I\ddot{\theta}/L \quad (2.10)$$

Por outro lado, temos que:

$$N \sin \theta + R \cos \theta - mg \sin \theta = ma \quad (2.11)$$

$$N \sin \theta + R \cos \theta - mg \sin \theta = m\dot{r} \quad (2.12)$$

$$N \sin \theta + R \cos \theta - mg \sin \theta = m(\ddot{x} \cos \theta) + mL\ddot{\theta} \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.10) na equação (2.13) tem-se:

$$-I\ddot{\theta} = mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x} \cos \theta + mgL \sin \theta \quad (2.14)$$

Substituindo a equação (2.6) na equação (2.2) tem-se:

$$F = M\ddot{x} + b\dot{x} + m\ddot{x} + mL\ddot{\theta} \cos \theta - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.15)$$

Essas equações são não lineares devido aos termos  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ .

## 2.2 Linearização do Sistema

De acordo com Ogata (2003), pode-se dizer que a operação normal de um sistema se dá em torno de um ponto de operação ou região de equilíbrio, onde pode-se considerar pequenos sinais em torno de um limite finito de operações matemáticas. Nesse contexto, se os sinais envolvidos forem suficientemente pequenos é conveniente utilizar um modelo linear que representa esse sistema não linear. Dessa forma, a linearização desse sistema não linear pode ser realizada tomando como base a expansão da série de Taylor, realizando o truncamento dos dois primeiros termos, resultando em uma expressão de primeira ordem e, portanto, linear. Essa aproximação considera que as derivadas de ordem superior podem ser desprezadas quando se trabalha próximo ao ponto de operação. Assim os termos não lineares serão convertidos em variáveis lineares que podem ser facilmente manipuladas. Essa conversão é feita de acordo com as equações abaixo.

$$y \cong f(u) \quad (2.16)$$

$$y \cong f(\bar{u}) + \frac{df}{du} (u - \bar{u}) \quad (2.17)$$

$$y \cong \bar{y} + \Delta(u - \bar{u}) \quad (2.18)$$

Onde  $\Delta = \frac{df}{du_{u=\bar{u}}}$ . Dessa forma, a equação final obtida fornece um modelo linear próximo do ponto de operação desejado. Para fins desse estudo, considera-se que o movimento é pequeno o suficiente para que os termos  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  possam ser simplificados. Então, faz-se necessário definir como parâmetro de linearização  $\bar{u} = 0$ , para o pêndulo amortecido, e  $\bar{u} = \pi$ , para o pêndulo invertido.

Portanto, usando a equação (2.18) tem-se que para o pêndulo amortecido:  $\sin \theta = 0$  e  $\cos \theta = 1$ ; e para o pêndulo invertido:  $\sin \theta = 0$  e  $\cos \theta = -1$ .

Logo as equações do pêndulo podem ser linearizadas conforme o apresentado abaixo:

$$-I\ddot{\theta} + mgL\theta = mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x} \quad (2.19)$$

$$-(I + mL^2)\ddot{\theta} + mgL\theta = -mL\ddot{x} \quad (2.20)$$

$$F = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + mL(-\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\theta) \quad (2.21)$$

Se  $\theta$  é pequeno em torno de  $\pi$ , pode-se fazer a seguinte consideração:  $mL\dot{\theta}^2\theta = 0$ .

$$F = (M + m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} + mL\dot{\theta}^2\theta \quad (2.22)$$

$$F = (M + m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} \quad (2.23)$$

A partir da equação (2.20):

$$\ddot{x} = \frac{(I + mL^2)\ddot{\theta}}{mL} - g\theta \quad (2.24)$$

Substituindo na equação (2.23), tem-se:

$$F = \frac{(M + m)(I + mL^2)}{mL}\ddot{\theta} - (M + m)g\theta - mL\ddot{\theta} \quad (2.25)$$

$$mLF = [(M + m)(I + mL^2) - m^2L^2]\ddot{\theta} - (M + m)mgL\theta \quad (2.26)$$

De acordo com John D'Azzo J (1993, p. 94)

A solução de equações diferenciais com excitações descontínuas ou de ordem superior a dois é muito laboriosa através do método clássico. Além disso, a introdução de condições para determinação das constantes de integração requer a solução de um



sistema de equações algébricas em número igual à ordem da equação diferencial. Com o objetivo de facilitar e sistematizar a solução de equações diferenciais ordinárias lineares, a coeficientes constantes, utiliza-se exaustivamente o método da transformada de Laplace.

Nesse sentido, como é desejável obter um modelo que represente bem a função de transferência para o sistema estudado, e visando facilitar a complexidade dos cálculos envolvidos, faz-se o uso da transformadas de Laplace para calcular o termo  $\ddot{\theta}$ , cuja transformada é apresenta na equação (2.27).

$$\ddot{\theta} = s^2\theta(s) \quad (2.27)$$

Finalmente aplicando a transformada de Laplace, tem-se:

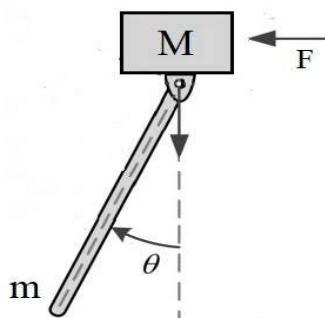
$$mLF(s) = [(M + m)(I + mL^2) - m^2L^2]s^2\theta(s) - (M + m)mgL\theta(s) \quad (2.28)$$

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{mL}{[(M + m)(I + mL^2) - m^2L^2]s^2 - mgL(M + m)} \quad (2.29)$$

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{mgL(M + m)}{[(M + m)(I + mL^2) - m^2L^2]}} \quad (2.30)$$

De acordo com a equação (2.30), nota-se que a equação (2.29) apresenta 2 polos, um instável, no semiplano direito de Laplace, e outro estável, no semiplano esquerdo. Por isso, desde que respeitadas as condições de contorno, essa linearização pode ser estendida tanto para o pêndulo invertido como para o pêndulo amortecido, uma vez que o polo instável representa fisicamente a posição superior, quando em malha aberta, a haste cai da posição de equilíbrio. Já o polo estável representa fisicamente a posição inferior, onde o pêndulo tende a voltar para a posição de equilíbrio. Na figura 5 é apresentado o modelo de um pêndulo amortecido considerando o mesmo arranjo.

Figura 5 – Pêndulo amortecido.



Fonte: Augusto (2017): modificado pelo autor.

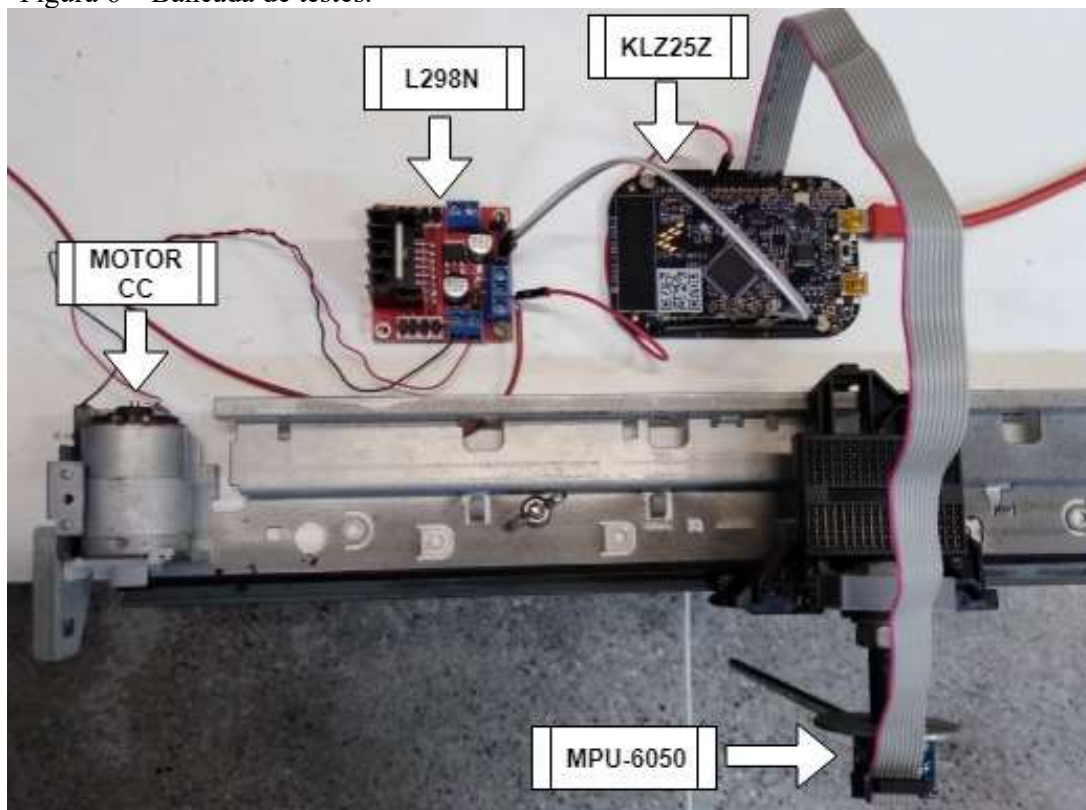
### 3 DESCRIÇÃO DA BANCADA

Nesse capítulo é descrito o processo de montagem e desenvolvimento do projeto, bem como a apresentação dos sensores de posição, microcontrolador e drivers utilizados para o acionamento do motor de corrente contínua.

#### 3.1 Estrutura física da bancada

A estrutura foi construída utilizando como base um suporte de madeira, nesse suporte foram fixados: a ponte-H (L298N), o microcontrolador (KL25Z), o motor de corrente contínua e o trilho metálico adaptado de uma impressora Canon MG2410. A haste de metal em formato cilíndrico foi conectada ao trilho por um rolamento, permitindo a livre revolução da haste em torno de um eixo. Com essa configuração foi possível reproduzir a planta de um pêndulo amortecido em laboratório e estudar sua dinâmica. A bancada é mostrada na figura 6.

Figura 6 – Bancada de testes.



Fonte: Próprio autor.

### 3.2 Hardware e Software

Esta seção apresenta elementos de *hardware* e *software* do sistema desenvolvido. Nesse trabalho foi utilizado um microcontrolador MKL25Z128VLK4, essa ferramenta é conveniente para projeto de controladores digitais, pois possui uma interface amigável para aplicações de controle, permitindo que todas as rotinas sejam embarcadas no próprio microcontrolador MKL25Z128VLK4, além disso, a placa é programada em linguagem C, que é uma linguagem bastante flexível, possibilitando a portabilidade do código entre arquiteturas distintas.

#### 3.2.1 MCU KL25Z

A FRDM-KL25Z foi o elemento de *hardware* escolhido, a placa faz parte de um arranjo composto de microcontrolador e periféricos de prototipação da família KINETIS, cuja filosofia de *hardware* visa a fácil implementação, permitindo ao programador um fácil acesso aos periféricos e aos protocolos de comunicação que a placa disponibiliza. Esse conjunto dispõe de um microcontrolador MKL25Z128VLK4 de 32 *bits*, um oscilador de cristal de 8MHz e um circuito de alimentação, além de possuir de um conjunto básico de periféricos que se comunicam com o microcontrolador através de protocolos pré-definidos na configuração da placa. A placa ainda consta com uma interface de depuração *OpenSDA* permitindo que os programas sejam gravados via console de um computador.

O microcontrolador KL25Z é composto por um núcleo ARM Cortex-M0+ de arquitetura RISC. O ARM é recomendado por ter alta capacidade de processamento aliado a um baixo consumo de energia. A figura 7 apresenta uma vista superior da placa utilizada.

Figura 7 – Placa KL25Z NXP



Fonte: NXP. FRDM-KL25Z User's Manual (VER 2.0, 2013,p 5).

Na tabela 1 são apresentadas algumas especificações da KL25Z, segundo o fabricante NXP.

Tabela 1 – Características da placa KL25Z

Microcontrolador	MKL25Z128VLK4
Tensão de operação	3.3V
Tensão de entrada	7 -12 V
Pinos	80
Pinos de acesso para: controle e interfaces	64
Resolução do Conversor A/D	16 bits
Memória Flash	128 KB
SRAM	16 KB
Resolução do Conversor D/A	12 bits
Clock (multiplicado internamente)	8MHz
Clock de máquina	48 MHz

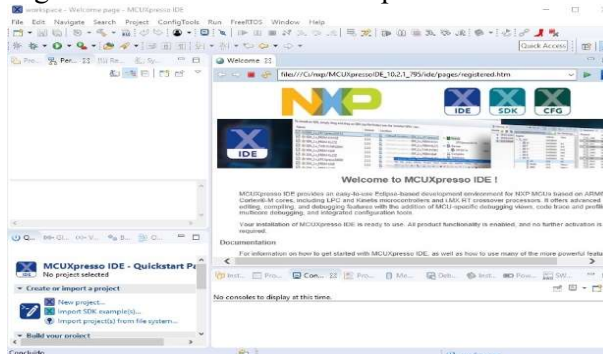
Fonte: NXP. FRDM-KL25Z User's Manual ( VER 2.0, 2013).

Além das características citadas na tabela 1 a KL25Z possui uma porta serial (protocolo RS-232) com a UART fisicamente ligada à porta USB da interface *OpenSDA*.

### 3.2.2 IDE MCUXpresso

A programação da placa é realizada pela MCUXpresso IDE na sua versão 10.2.1\_795 de distribuição gratuita, podendo ser baixada no site do desenvolvedor NXP. O MCUXpresso IDE oferece aos desenvolvedores um ambiente amigável de programação, permitindo a utilização de recursos avançados como: a edição, a compilação e a depuração de códigos através da interface *OpenSDA*, permitindo que os programas sejam gravados facilmente pela console de um computador. A figura 8 apresenta o ambiente de programação da MCUXpresso IDE.

Figura 8 – Interface da MCUXpresso IDE



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.3 Atuador

Para movimentar o carro foi utilizado um conjunto composto por um motor de corrente contínua e um trilho metálico adaptado de uma impressora Canon Pixma MG2410. Esse trilho possui um carro que está interligado a uma correia, essa correia realiza a transmissão de forças entre o carro e o motor. Na figura 9 é apresentado o motor utilizado no projeto.

Figura 9 – Motor de corrente contínua.



Fonte: <[www.gruponeoyama.com.br](http://www.gruponeoyama.com.br)> Acesso em: agosto de 2018.

Na tabela 2 são apresentadas algumas especificações do motor, segundo o fabricante.

Tabela 2 – Especificações do motor CC

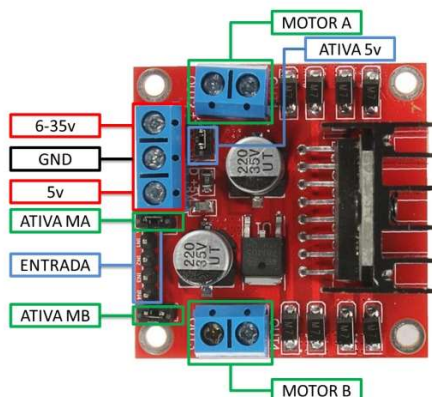
Alimentação	12 V
Corrente a vazio	0,5A
Corrente nominal	1,5A
Dimensões	65mm x 37mm
Diâmetro do eixo	3,2mm

Fonte: <[www.gruponeoyama.com.br](http://www.gruponeoyama.com.br)> Acesso em: agosto de 2018.

### 3.4 Ponte H

Para o controle de tensão no motor foi utilizado o módulo ponte H L298N (figura 10). Este módulo é indicado para controlar cargas indutivas como: relés, motores de corrente contínua e solenoides (HUGUENIN, 2014). Permitindo o controle de velocidade e controle do sentido de rotação do motor através dos pinos de PWM.

Figura 10 – Driver L298N.



Fonte: <www.filipeflop.com> Acesso em:  
agosto de 2018.

Na tabela 3 são apresentadas algumas especificações do módulo L298N, segundo o *Datasheet* do fabricante.

Tabela 3 – Especificações do módulo L298N

Tensão de operação	4-35 V
Corrente máxima de operação	4 A
Tensão do circuito lógico	3,3-5 V
Corrente do circuito lógico	36 mA
Potência Máxima	25W
Dimensões	43 x 43 x27 mm
Peso	30g
Nº de saídas (motores)	2

Fonte: L298. Fonte: (STMicroelectronics 2000).

### 3.5 Sensor inercial

O MPU-6050 foi o sensor escolhido por possuir giroscópio e acelerômetro no mesmo encapsulamento, além de possuir um filtro de atenuação de ruído embarcado ao MPU e um *buffer* FIFO de 1024 Bytes, esse *buffer* auxilia o MPU a diminuir o consumo de energia, permitindo que o processador possa ler os dados do sensor intercaladamente e, em seguida, entrar em um modo de baixo consumo de energia.

Fabricado pela Texas Instrument, o MPU-6050 é um integrado que se comunica através do protocolo I<sup>2</sup>C a 400kHz. O MPU-6050 opera entre uma faixa de tensão de 2.375V a 3.46V e possui recursos adicionais que incluem um sensor de temperatura.

Figura 11 – Sensor MPU-6050.



Fonte: <[www.filipeflop.com](http://www.filipeflop.com)> Acesso em: setembro de 2018.

Na tabela 4 são apresentadas algumas especificações do módulo MPU-6050, segundo o *Datasheet* do fabricante.

Tabela 4 – Especificações do MPU-6050

Faixa de tensão de operação	3.3-5 V
Resolução do acelerômetro	16 bits
Resolução do giroscópio	16 bits
Frequência do barramento I <sup>2</sup> C	400 kHz
Potência Máxima	20 mW
Dimensões	4 x 4 x 0.9 mm
Corrente Máxima de operação	3.9 mA

Fonte: Texas Instruments, "MPU-6050 Data Sheet" - 2013 - 0512YYZ.

## 4 SENSORES DE INCLINAÇÃO

Nesse capítulo apresenta-se uma visão detalhada sobre os sensores inerciais utilizados no projeto, bem como o procedimento de aquisição de dados, conversão de grandezas e calibração dos sinais. Ao final do capítulo é mostrada a real necessidade da fusão sensorial, e posteriormente, o projeto de sintonia do filtro complementar.

### 4.1 Aquisição de Dados

O MPU-6050 trabalha através de protocolos internamente pré-definidos na arquitetura do sensor, por esse motivo faz-se necessário a utilização do protocolo I<sup>2</sup>C para transmitir e receber os dados entre o MPU-6050 e a placa KL25Z. Esse protocolo facilita a comunicação entre esses dispositivos, pois utiliza apenas dois pinos para se comunicar através de dois barramentos de dados: um barramento serial de dados (SDA) e um barramento de *clock* (SCL). A configuração dos parâmetros como tempo de amostragem, resolução dos sensores, filtros, passam pela configuração de registradores do MPU-6050, cuja descrição detalhada pode ser encontrada no catálogo do fabricante.

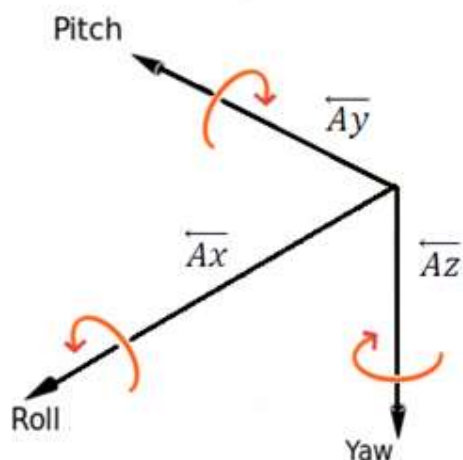
### 4.2 Acelerômetro

O acelerômetro é um dispositivo eletromecânico usado para medir a aceleração linear nos eixos X, Y e Z, essa tecnologia é nomeada de MEMS (*Micro-Electro-Mechanical Systems*), vale ressaltar que este sensor também capta outros fenômenos, que podem ser desprezados, como vibrações e acelerações angulares. Nesse sentido, faz-se necessário a utilização desse sensor para calcular as acelerações nos eixos X Y e Z, e posteriormente, fazendo o uso de relações trigonométricas, calcular a posição angular da haste. Diante dessas considerações, pode-se utilizar este sensor como um inclinômetro.

Na figura 12 são apresentados os ângulos: *pitch* (inclinação), *roll* (rotação) e *yaw* (guinada). E dependendo do grau de liberdade que o carro tem para se movimentar e como o acelerômetro é colocado na haste, o ângulo pode ser *pitch* ou *roll*. Nesse caso, devido ao arranjo físico da bancada, apenas o ângulo *pitch* é suficiente para calcular a estimativa de posição da haste.



Figura 12 – Eixos XYZ e seus respectivos ângulos (*roll*, *pitch* e *yaw*).

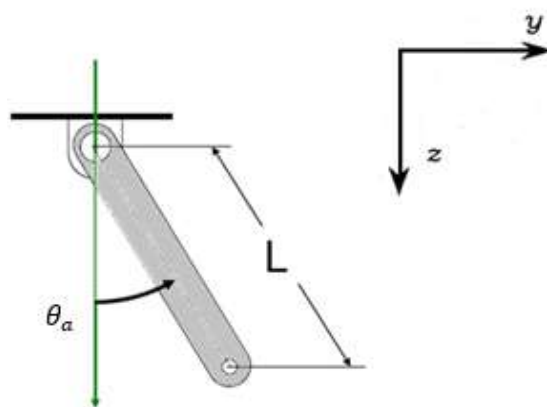


Fonte: Próprio autor.

A representação da figura 12 passa por um processo analítico através de uma matriz de rotação para realizar o cálculo desses ângulos e vários autores já estudaram essa abordagem matemática, tal como o trabalho de Forte (2018) e o trabalho de Kok (2017).

No entanto, para essa aplicação, pode-se utilizar um método ligeiramente mais simples para o cálculo da inclinação utilizando dois eixos e fazendo o uso da geometria cartesiana. De acordo com a figura 13.

Figura 13 – Posição da haste com relação aos eixos Y e Z.



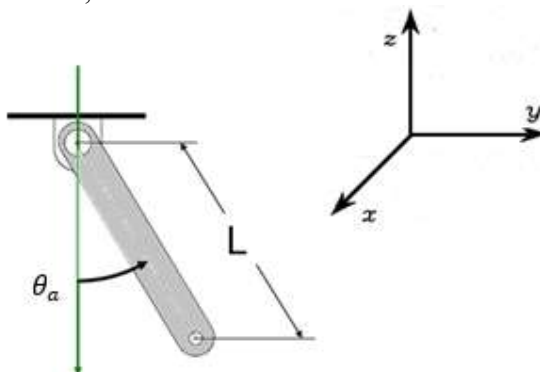
Fonte: Próprio autor.

De acordo com a figura 13, pode-se encontrar o ângulo  $\theta_a$  utilizando geometria cartesiana, vide a equação abaixo.

$$\theta_a = \tan^{-1} \left( \frac{\overline{Ay}}{\overline{Az}} \right) \quad (4.1)$$

No entanto, essa representação não é muito exata, uma vez que o acelerômetro não está totalmente isento de rotação em outras direções, portanto, é possível que as componentes do eixo  $\overline{Ax}$  sejam perdidas. Por conta disso, e visando ter uma melhor precisão ao medir a inclinação, devem-se ser utilizados todos os três eixos para o cálculo do ângulo pitch. Dessa forma, ao invés de utilizar a equação (4.1), calcula-se a magnitude entre outros dois eixos ( $\overline{Ax}$  e  $\overline{Az}$ ) e o ângulo pode ser estimado através da equação (4.2). A figura 14 apresenta o posicionamento da haste e os 3 eixos cartesianos.

Figura 14 – Posição da haste com relação aos eixos X, Y e Z.



Fonte: Próprio autor.

Dessa forma, a estimativa de ângulo pode ser obtida pelo cálculo do arco tangente do eixo  $\overline{Ay}$  dividido pela magnitude dos dois eixos  $\overline{Ax}$  e  $\overline{Az}$ .

$$\theta_a = \tan^{-1} \left( \frac{\overline{Ay}}{\sqrt{\overline{Ax}^2 + \overline{Az}^2}} \right) \quad (4.2)$$

### 4.3 Giroscópio

O giroscópio é o sensor que mede velocidade angular. Logo o ângulo pode ser obtido integrando a velocidade angular ( $w_g$ ) no tempo ( $dt$ ), conforme a equação (4.3).

$$\theta_g = \int w_g \cdot dt \quad (4.3)$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação (4.3), obtemos a equação (4.4) que relaciona as variáveis no domínio da frequência.

$$\theta_g(s) = \frac{w_g(s)}{s} \quad (4.4)$$

De acordo com Aström (1995), a variável  $(s)$  pode ser representada no domínio discreto pelo método de discretização de Euler *Backward*, cuja forma matemática é apresentada na equação (4.5).

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} \quad (4.5)$$

Fazendo o uso da discretização de Euler *Backward*, pode-se calcular a expressão matemática que representa a equação (4.4) em equações de diferenças. Vale ressaltar que essa representação é um modelo conveniente para implementação digital em microcontroladores, uma vez que sua implementação se resume na aplicação direta de uma equação de coeficientes constantes, cujos vetores de atraso são atualizados interativamente no *loop* de medições. Desse modo, a integração numérica pode ser calculada pela equação (4.6). Onde  $(\theta_{g(k)})$  e  $(w_{g(k)})$  são respectivamente: o ângulo e a velocidade angular no instante  $(k)$ , e  $(\Delta t)$  é o intervalo de tempo que o sensor faz as medições.

$$\theta_{g(k)} = \theta_{g(k-1)} + w_{g(k)}\Delta t \quad (4.6)$$

#### 4.4 Calibração

Por características físicas oriundas da natureza do sensor, dificilmente as leituras iniciarão no mesmo valor inicial, tal fenômeno deve-se principalmente a variações na leitura causadas por fatores como: ruído e *bias*. O mais preocupante, contudo, é que quando se combina dados inerciais com vários tipos de sensores é fundamental que as medidas desses sensores estejam alinhadas entre si (KOK et al., 2017).

Diante disso, alguns fabricantes já incluem o processo de calibração embarcado no próprio MPU, permitindo que o usuário escolha como deve ser realizado esse processo. Como o MPU-6050 não fornece essa opção, faz-se necessário desenvolver um processo de calibração via *software* para remover o erro de medição que iremos chamar de “*bias*”.

O processo de calibração consiste no conjunto de operações responsáveis pela remoção do erro de “*bias*” dos sensores. Para tanto, após iniciar os módulos básicos no *hardware* da placa, o programa entra em uma rotina onde são realizadas 100 medições com

intervalos pré-determinados de tempo, conforme o descrito abaixo. Essas medições são somadas e ao final dessa etapa é realizada a média aritmética dos valores, obtendo-se o erro médio das amostras.

$$D_{bias} = \frac{\sum_1^n D_n}{n} \quad (4.7)$$

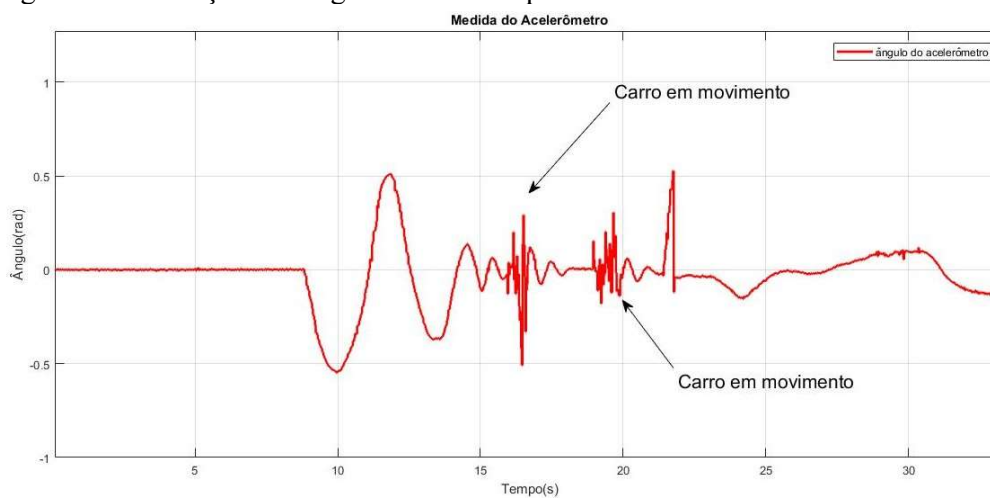
Vale ressaltar que as medições são realizadas com a haste na posição de equilíbrio e inerte, e ao final do processo o erro é subtraído das medições posteriores, conforme a equação (4.8). O procedimento descrito acima é realizado para o acelerômetro e para o giroscópio.

$$D_{corrigido} = D_{medido} - D_{bias} \quad (4.8)$$

#### 4.5 Adequação Dos Sinais

Nota-se no gráfico da figura 15 que a utilização do acelerômetro fornece uma estimativa satisfatória de inclinação quando o carro se encontra parado e há apenas variações no ângulo de inclinação da haste. No entanto, quando o carro é submetido a movimentos horizontais, o sensor se mostra extremamente ruidoso e sensível a essas movimentações, esse comportamento pode ser atribuído às acelerações da gravidade que estão distribuídas em outros eixos durante a movimentação do carro, causando medidas imprecisas quando o carro sofre aceleração brusca na horizontal.

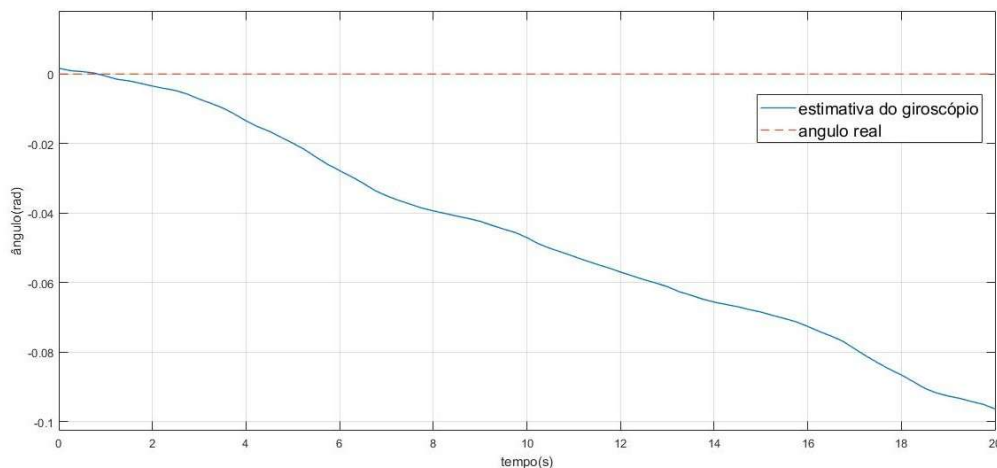
Figura 15 – Medições de ângulo calculados pelo acelerômetro.



Fonte: Próprio autor.

Já o giroscópio, apesar de apresentar uma medição confiável quando o carro está em movimento, nota-se que mesmo com o processo de calibração ocorre um desvio da sua medição quando o carro se encontra parado, pois o sensor apresenta um desvio na medição que é amplificado pelo integrador incluído pela aquisição de dados, esse desvio pode ser atribuído ao surgimento de um *bias* que é variante no tempo. Esse fenômeno está ilustrado no gráfico da figura 16.

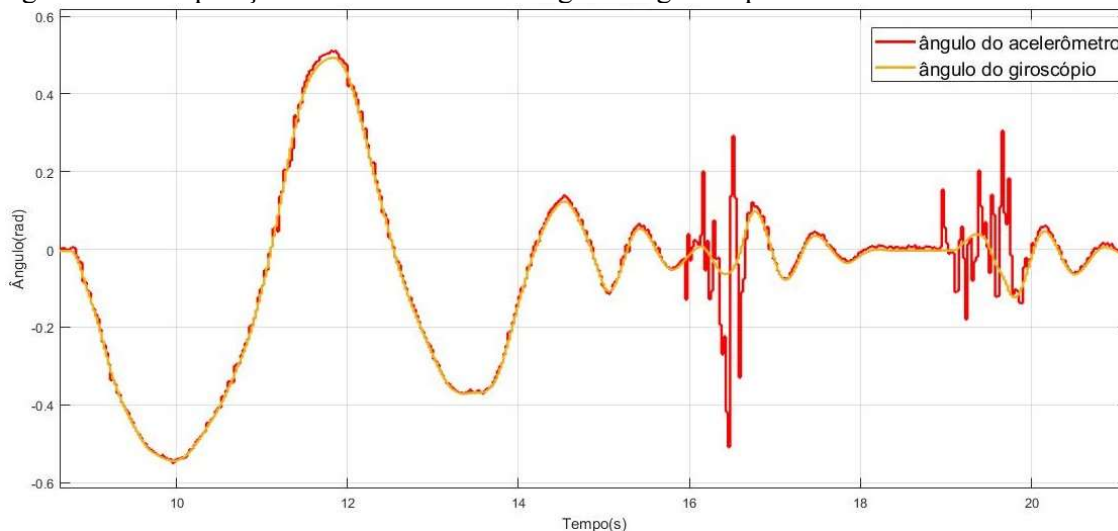
Figura 16 – Comparação entre estimativa de ângulo do giroscópio e a estimativa real.



Fonte: Próprio autor.

No entanto, quando há movimento, o sensor apresenta medições adequadas e bem confiáveis.

Figura 17– Comparação entre estimativa de ângulo do giroscópio e do acelerômetro.



Fonte: Próprio autor.

Nota-se na figura 17 que o giroscópio fornece uma medida melhor quando o carro é submetido a movimentos horizontais, e o acelerômetro uma medida melhor de inclinação quando o carro se encontra parado. Diante disso, convém concluir que os testes realizados em laboratório evidenciam que o uso isolado desses sensores, por si só, não é capaz de fornecer medidas confiáveis do ângulo, uma vez que ambos os sensores possuem características boas e indesejáveis de medições, dependendo de qual espectro de frequência o sensor está submetido.

Segundo (HUGUENIN, 2014), “O rigor e a fidelidade das informações sobre seu ambiente operacional são fundamentais para operação de robôs móveis”. Nesse contexto, faz-se necessário a utilização da combinação das duas medidas para obter uma estimativa mais precisa de ângulo.

## 5 FUSÃO SENSORIAL

Nesse capítulo são apresentados o desenvolvimento matemático e a sintonia do filtro complementar. A fusão sensorial apresentada trata-se de um método matemático que busca reunir informações dos dois sensores: acelerômetro e giroscópio, combinando-os para produzir informações mais precisas. Segundo (FRIZON em al., 2016), com maior facilidade de aplicação, o filtro complementar é usado em vários projetos de navegação inercial, por se tratar de uma estratégia mais simples do que o filtro de Kalman.

### 5.1 Filtro Complementar e Fusão Sensorial

A fusão sensorial consiste em combinar dados oriundos de sensores de natureza diferente com a finalidade de produzir uma melhor estimativa da medição em face das leituras individuais de cada sensor (FORTE, 2018). Nesse viés, a fusão se faz necessária para corrigir o desvio de medição do giroscópio, quando o carro se encontra parado, e as medidas não confiáveis do acelerômetro, quando o carro está em movimento horizontal. Uma alternativa viável para estimativa de orientação é a utilização do filtro complementar, pois essa técnica é capaz de estimar com precisão a orientação angular sem o uso de modelos probabilísticos (KOK et al., 2017). Por esse motivo, e por ter implementação mais simples do que outros filtros mais conhecidos na bibliografia, foi escolhido o filtro complementar.

Segundo com Bueno e Romano (2011, p. 1)

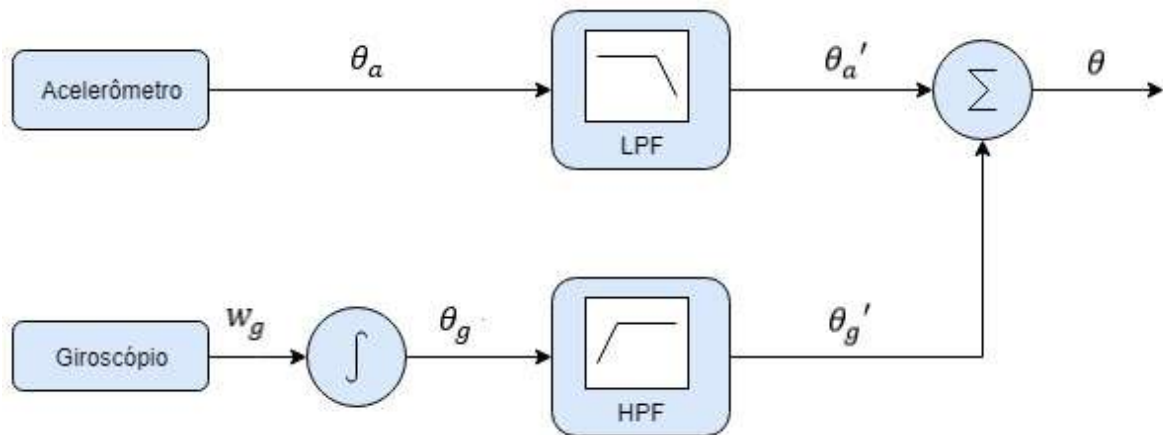
O termo “filtro complementar” é normalmente utilizado no meio acadêmico como referência a qualquer algoritmo que tenha como objetivo a fusão de dados redundantes ou similares de diferentes sensores para alcançar uma estimativa ótima de uma determinada variável. Este filtro opera no domínio da frequência e pode ser definido pelo uso de duas ou mais funções de transferência as quais complementam umas às outras. Num sistema típico de duas entradas de dados, como este, uma delas proverá informação com ruído de alta frequência, que será filtrada através de um filtro passa-baixas. A outra produzirá dados com ruído de baixa frequência, sendo, portanto, filtrados através de um filtro passa-altas. Se estes filtros são matematicamente complementares, então o sinal filtrado será a reconstrução completa da variável sendo monitorada, eliminando os ruídos.

Nesse sentido, pode-se dizer que o filtro complementar realiza a fusão de sensores que leiam a mesma variável, considerando os espectros de frequência mais confiáveis de cada um. Nesse contexto, fica claro que o filtro complementar atenua as características indesejáveis de cada sensor sem influenciar na dinâmica original do sistema. Esse processo é realizado

através da sintonia de dois filtros digitais, um filtro passa-baixas (LPF), do inglês *low-pass filter*, e o outro passa-altas (HPF), do inglês *high-pass filter* (REIS et al., 2014).

Nesse trabalho, para realizar fusão da estimativa de ângulo fornecida pelo acelerômetro e da estimativa de ângulo fornecida pelo giroscópio foi utilizado uma variação do filtro complementar. O diagrama de blocos apresentados na figura 18 mostra a topologia desse filtro. Onde  $(\theta_a)$  é o ângulo de inclinação fornecido pelo acelerômetro,  $(w_g)$  é a velocidade angular fornecida pelo giroscópio,  $(\theta_g)$  é o ângulo de inclinação fornecido pelo giroscópio (obtido através da integração da velocidade angular  $w_g$ ) e  $(\theta_f)$  é o ângulo de inclinação fornecido pelo filtro complementar.

Figura 18 – Diagrama de blocos do filtro complementar.



Fonte: Próprio autor.

De acordo com a figura 18, nota-se que o a entrada do filtro passa-baixas recebe a estimativa de ângulo fornecida pelo acelerômetro e a entrada do filtro passa-altas recebe a estimativa de ângulo fornecida pelo giroscópio. Esse arranjo tem como objetivo atenuar os ruídos do acelerômetro quando esse sensor é submetido à alta frequência, e atenuar o erro *bias* do giroscópio para frequências próximas a zero. Por fim, os sinais são somados e obtém-se a reconstrução do sinal de ângulo.

A equação para o cálculo da fusão sensorial da medida do ângulo entre o acelerômetro e o giroscópio é apresentada em equação (5.1) no domínio da frequência. Onde  $(T)$  é a frequência de corte dos filtros,  $(\theta_a)$  o ângulo calculado pelo acelerômetro e  $(w_g)$  a velocidade angular medida pelo giroscópio.

$$\theta_f = \frac{1}{1 + Ts} \theta_a + \frac{Ts}{1 + Ts} \cdot \frac{1}{s} w_g \quad (5.1)$$



Fazendo a discretização de Euler *backward* da equação (5.1), onde  $(k)$  é o instante de tempo e  $(\alpha)$  é o parâmetro que depende da relação entre a frequência de corte o tempo de amostragem, conforme a equação (5.2). O filtro pode ser escrito em tempo discreto pela seguinte equação de diferenças.

$$\theta_f(k) = \alpha(\theta_f(k-1) + w_{g(k)}\Delta t) + (1 - \alpha)\theta_a(k) \quad (5.2)$$

$$\alpha = \frac{T/\Delta t}{1 + T/\Delta t} \quad (5.3)$$

### 5.1.1 Análise de Estabilidade do Filtro

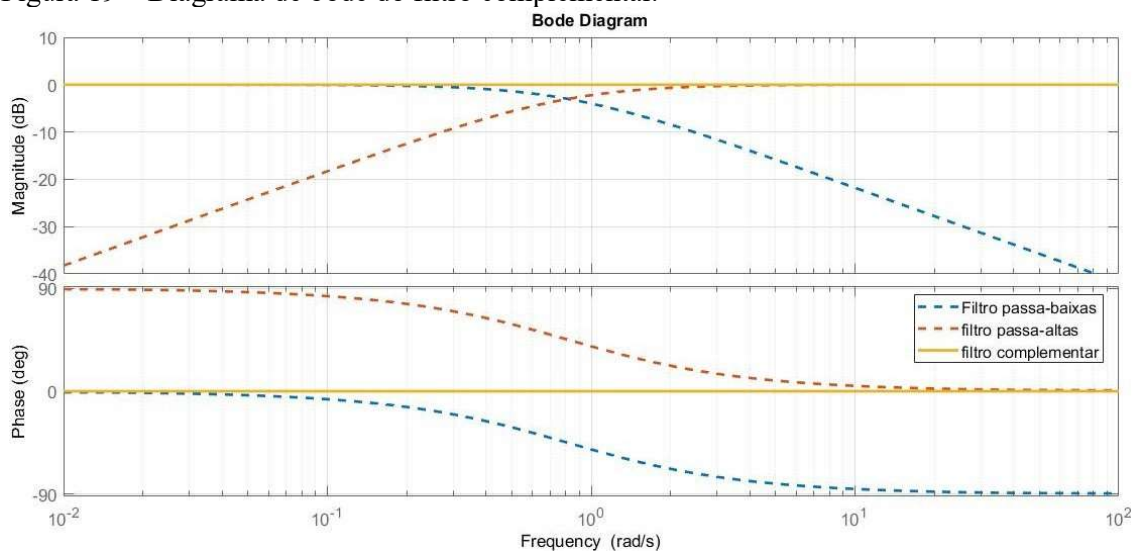
No projeto de filtros digitais devem ser tomados alguns cuidados a fim de garantir que dinâmica do sistema não sofra interferência da inclusão desses filtros. O mais preocupante, contudo, é que durante a sintonia pode-se acabar incluindo na planta dinâmicas indesejadas, como por exemplo: atrasos, polos ou zeros na função de transferência original. Em face disso, faz-se necessário que na análise da resposta em frequência do filtro complementar sejam garantidos alguns critérios. Dentre eles, a soma dos dois filtros (passa-baixas e passa-altas) devem ser matematicamente complementares, de acordo com a equação (5.4) (EUSTON et al., 2007).

$$HPF(s) + LPF(s) = 1 \quad (5.4)$$

“As medidas de estabilidade relativas de margem de ganho e margem de fase podem ser determinadas tanto a partir do diagrama de Nyquist quanto do diagrama de Bode” (DORF, 2009). Nesse sentido, como a análise será feita com o auxílio do computador com a ferramenta MATLAB, optou-se por utilizar o diagrama de Bode para investigar a estabilidade do filtro, pois o *software* já possui uma gama de funções bem definidas em sua interface de programação.

Na figura 19 é mostrado o diagrama de Bode dos filtros: passa-baixas, passa-altas e da soma dos dois filtros; e suas respectivas margens de fase M.F (°) e margens de ganho M.G (dB).

Figura 19 – Diagrama de bode do filtro complementar.



Fonte: Próprio autor.

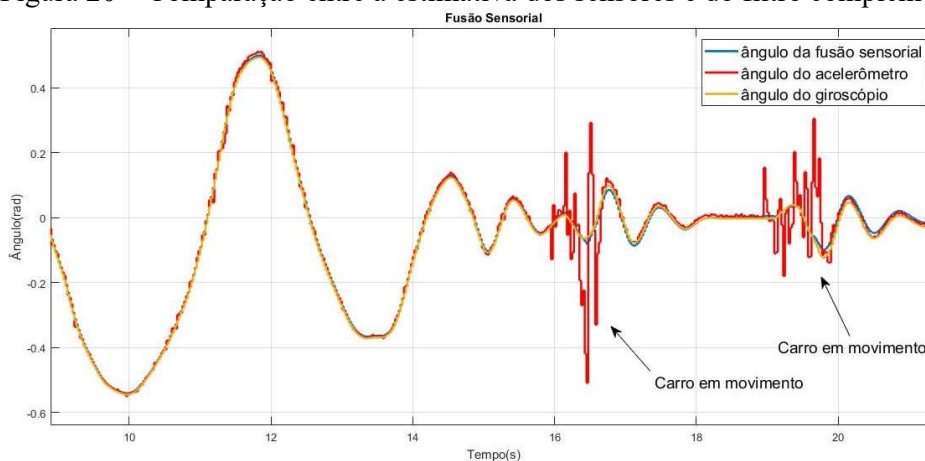
Em termos práticos, a margem de ganho representa a máxima variação do ganho estático antes do sistema se tornar instável, já a margem de fase representa o atraso de fase necessário para que o sistema se torne instável. Esses parâmetros podem ser utilizados para analisar o desempenho e robustez do sistema considerando a resposta em frequência.

Analisando o gráfico da figura 19, pode-se afirmar que as especificações de desempenho foram garantidas, uma vez que em regime permanente o ganho é unitário e fase é nula, característica que pode ser facilmente constatada pela MF e MG ambas nulas quando os dois filtros são somados. Portanto, o filtro realiza bem a fusão dos dois sinais sem interferir na função de transferência.

### 5.1.2 Análise do Filtro em Tempo Real

Fazendo uso da equação (5.2) e utilizando  $\alpha = 0.98$ , pode-se implementar o filtro complementar no algoritmo embarcado na placa e os resultados são mostrados no gráfico da figura 20.

Figura 20 – Comparação entre a estimativa dos sensores e do filtro complementar.

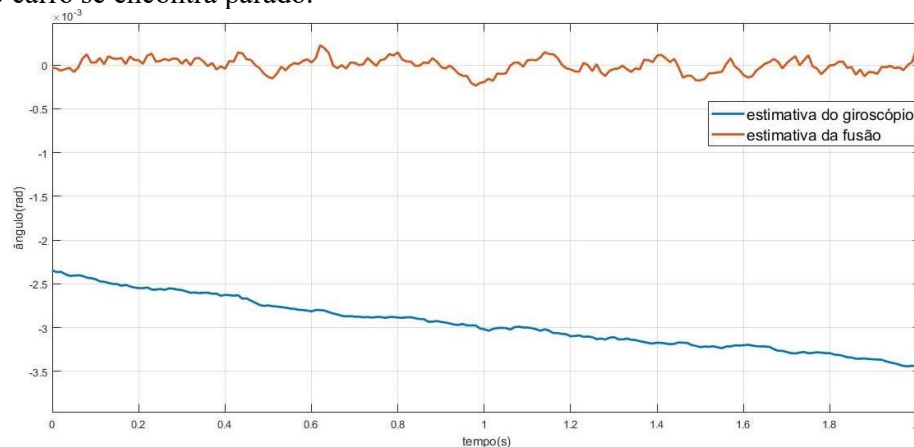


Fonte: Próprio Autor.

Observando os valores de ângulo do acelerômetro, giroscópio e o sinal da saída do filtro complementar. Torna-se evidente que o filtro atenua os erros do acelerômetro quando há movimentação abrupta do carro, e simultaneamente, corrige o erro estático do giroscópio quando o carro se encontra parado.

Na figura 21 é possível constatar que o filtro ainda mantém a estimativa confiável de ângulo mesmo com o desvio causado pelo giroscópio.

Figura 21 – Comparação entre as estimativas do giroscópio e da fusão quando o carro se encontra parado.



Fonte: Próprio Autor.

## 6 IDENTIFICAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DA PLANTA

A obtenção da função de transferência é etapa essencial no projeto de controladores. No entanto, realizar a análise fenomenológica com exatidão desse sistema não é algo trivial, pois a planta é composta por um modelo físico complexo e difícil de ser modelado matematicamente. Além disso, não há sensores de posição linear para fornecer uma odométrica confiável de deslocamento horizontal do carro. Nesse sentido, torna-se viável a identificação do sistema por um método analítico de modelagem matemática de forma a garantir que a função de transferência seja estimada com precisão, esse modelo considera a planta como um sistema SISO (*single input and single output*), linear e invariante no tempo.

Segundo (AGUIRRE, 2004), podemos obter esse modelo tendo como base o tratamento dos dados experimentais, e após o processamento desses dados, pode-se formular um modelo matemático que relacione as características físicas entre entrada e saída por uma função de transferência.

Nesse sentido, esse capítulo busca descrever o processo de identificação da função de transferência do modelo estudado. Onde adotou-se como estratégia de identificação: a aplicação de um sinal de tensão conhecido na entrada para obter o modelo matemático que represente bem a planta em torno de um ponto de operação. De acordo com (AGUIRRE, 2004), esse processo é conhecido como identificação tipo caixa preta.

### 6.1 Identificação

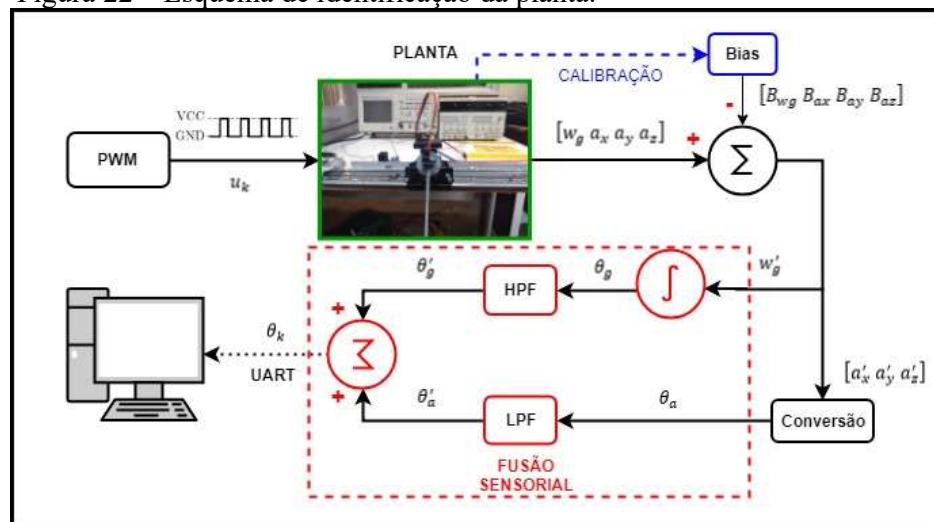
À luz de Katsuhiko Ogata (2003, p. 14)

A função de transferência impulsiva é a resposta de um sistema linear invariante no tempo a um impulso unitário de entrada, quando as condições iniciais do sistema são nulas. A transformada de Laplace dessa função fornece uma função de transferência. Assim, a função de transferência e a função de transferência impulsiva de um sistema linear invariante no tempo contêm as mesmas informações sobre a dinâmica do sistema. Dessa maneira, é possível obter informações completas do sistema, por meio da excitação por um impulso unitário de entrada medindo a resposta.

A principal vantagem de utilizar o método descrito por Katsuhiko Ogata (2003) é a relativa facilidade de se obter um modelo matemático razoável a partir da resposta impulsiva. Desse modo, a identificação do modelo pode ser realizada aplicando um impulso de tensão no atuador, e posteriormente, fazendo a análise da resposta obtida a fim de obter a função de transferência que melhor represente o modelo estudado sob um pequeno ponto de operação. Vale ressaltar que a identificação também captura a dinâmica do atuador, dispensando a

necessidade de modelá-lo matematicamente caso fosse utilizado um modelo fenomenológico. Na figura 22 é apresentado o diagrama que representa o esquemático do processo de identificação realizado nesse estudo.

Figura 22 – Esquema de identificação da planta.



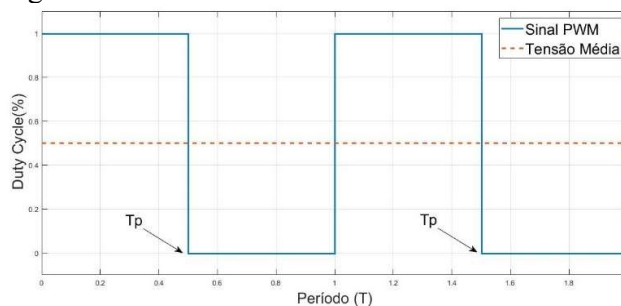
Fonte: Próprio autor.

De acordo com gráfico da figura 22 o sinal de impulso é aplicado no atuador e captura-se o ângulo de saída para posteriormente realizar o processo de identificação da função de transferência por um modelo matemático. É importante ressaltar que o processo de identificação só se inicia após o processo de calibração ser finalizado.

## 6.2 Atuador

O uso da ponte-H com o sinal PWM permite que se inverta o sentido de rotação do motor comutando quais entradas serão acionadas, bem como realizar o ajuste proporcional da sua velocidade através do controle da tensão aplicada nos terminais deste. Vale ressaltar que nesse estudo não serão consideradas a região de saturação e a zona morta de atuação do motor. Diante dessas considerações, podemos mensurar a tensão de entrada aplicada na planta relacionando diretamente o um sinal PWM que o microcontrolador aplica na ponte-H e a tensão média que chega ao atuador. O gráfico da figura 23 mostra como o controle PWM pode ser usado para controlar a tensão do motor de corrente contínua.

Figura 23 – Sinal PWM e tensão média



Fonte: Próprio autor.

Nota-se que a tensão média recebida pelo motor pode ser calculada com base na equação (6.1). Onde ( $T_{pwm}$ ) é o período; ( $t_p$ ) é o tempo em alta e ( $V_{out}$ ) é a tensão saída.

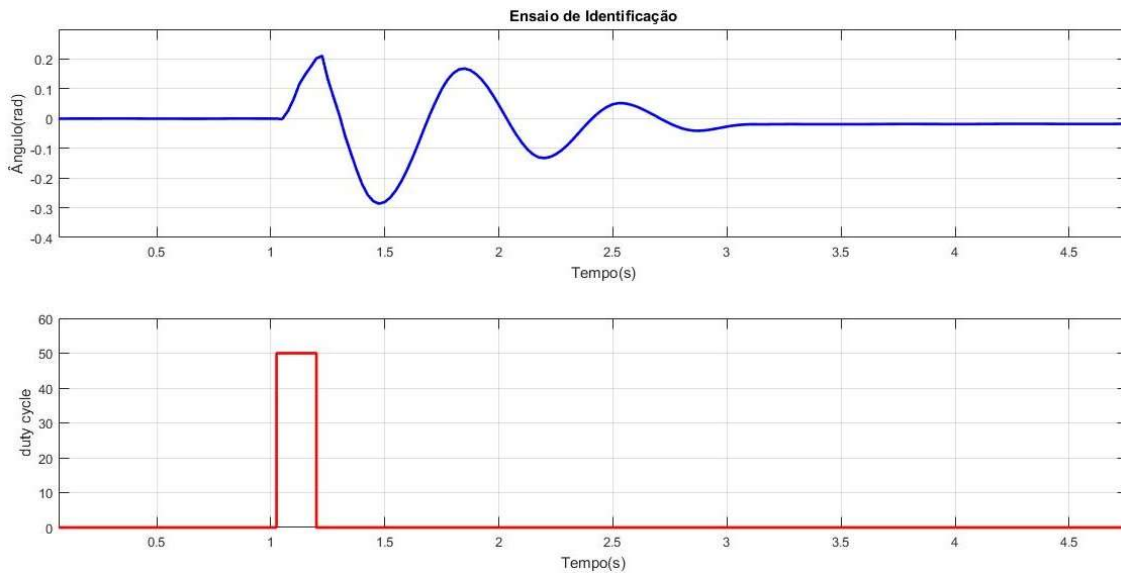
$$V_{out} = \frac{1}{T_{pwm}} \left[ \int_0^{t_p} V_{cc} \cdot dt + \int_{t_p}^{T_{pwm}} 0 \cdot dt \right] = \frac{t_p}{T_{pwm}} V_{cc} \quad (6.1)$$

Desse modo, podemos relacionar a velocidade angular do motor apenas por uma relação proporcional ao valor do sinal de PWM, uma vez que nessa aplicação a força contra eletromotriz pode ser considerada constante ao longo do tempo.

### 6.3 Ensaio em tempo real

Segundo (DA COSTA et al, 2014), para determinarmos o modelo que melhor representa um sistema carro/pêndulo em equações lineares, devemos partir da premissa que o pêndulo não se mova mais do que alguns graus fora do seu ponto de operação. Nesse sentido, será aplicado um pequeno sinal de impulso na entrada da planta. Para fins desse estudo, considera-se com impulso: um pulso de pequena duração se comparado às constantes de tempo dominantes do sistema identificado. Diante dessas considerações, é aplicado um sinal de impulso na entrada da planta, e observa-se que o pêndulo entra em um movimento oscilatório amortecido, como já era esperado, devido a dinâmica intrínseca da planta. O gráfico da figura 24 apresenta os resultados obtidos no procedimento descrito acima.

Figura 24 – Entrada e saída obtidas no ensaio de identificação.



Fonte: Próprio autor.

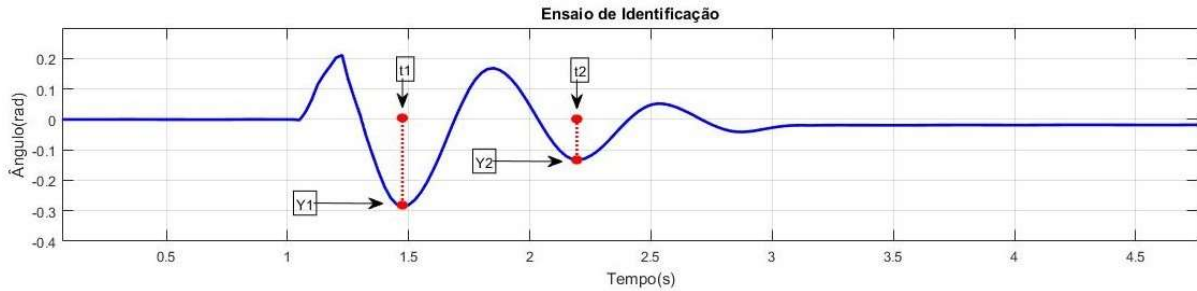
Como bem nos assegura (D'AZZO, 1984), pode-se dizer que senoíde amortecida é um sinal senoidal de frequência ( $w_d$ ) e amplitude ( $Ae^{\sigma t}$ ), cuja a constante ( $\sigma$ ) é responsável pelo decaimento da envoltória e pode ser definida como coeficiente de amortecimento. Portanto, convém observar que a resposta impulsiva obtida na figura 24 assemelha-se com o modelo matemático descrito pelo autor citado. Partindo dessa premissa, podemos aproximar os dados obtidos no experimento por esse modelo, cuja a equação característica pode ser descrita pelo trinômio de segundo grau da equação (6.2) que apresenta um par de raízes complexas conjugadas (equação (6.3)).

$$s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 \quad (6.2)$$

$$s = \sigma \pm jw_d = -\xi w_n \pm jw_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.3)$$

Diante dessas considerações. Na figura 25 são apresentados os valores ( $y_1$ ) e ( $y_2$ ) que melhor representam o amortecimento em um período de oscilação e o a diferença entre os instantes de tempo ( $t_1$ ) e ( $t_2$ ) representa o período de oscilação da planta a ser identificada.

Figura 25 – Saída obtida no ensaio de identificação com marcação dos pontos que representa um período de oscilação



Fonte: Próprio autor.

Nota-se que se trata de um transiente estável, pois o ângulo decai com o passar do tempo, logo  $(\sigma)$  é negativo. Os valores de  $(\xi)$  e  $(w_n)$  podem ser calculados de acordo com as equações abaixo.

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad (6.4)$$

$$\delta = \ln \left| \frac{y_1}{y_2} \right| \quad (6.5)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2}} \quad (6.6)$$

$$w_n = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \quad (6.7)$$

Fazendo o uso das equações acima, encontra-se os valores mostrados na tabela 5.

Tabela 5 – Parâmetros do modelo da resposta impulsiva

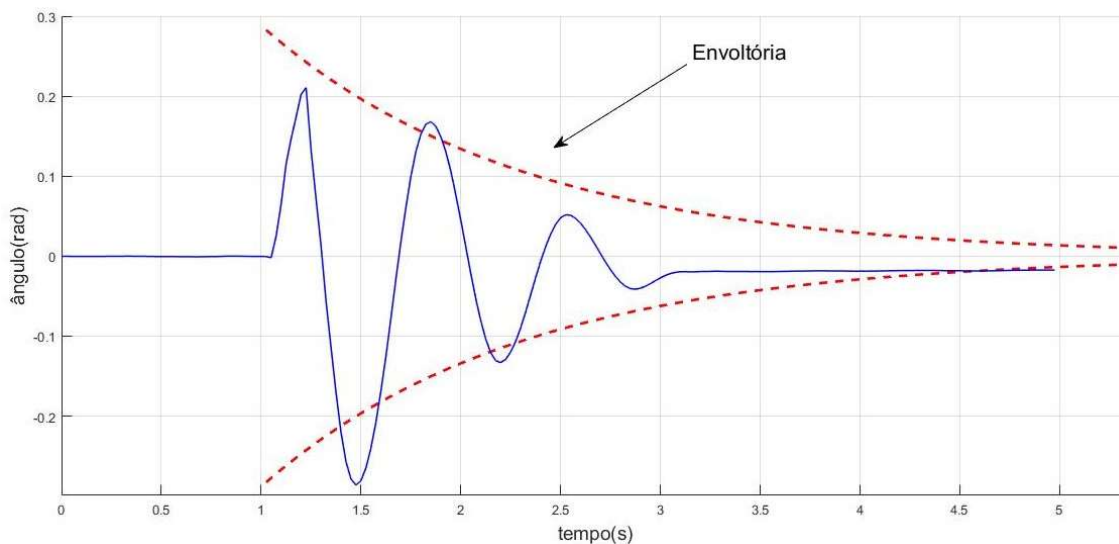
$w_n$	5.9697
$\xi$	0.7659

Fonte: Próprio autor.

De posse desses parâmetros, primeiramente, plota-se na figura 26 a envoltória para analisar se os valores encontrados realmente correspondem a função de transferência do sistema que se deseja identificar.



Figura 26 – Saída obtida no ensaio de identificação e envoltória calculada.

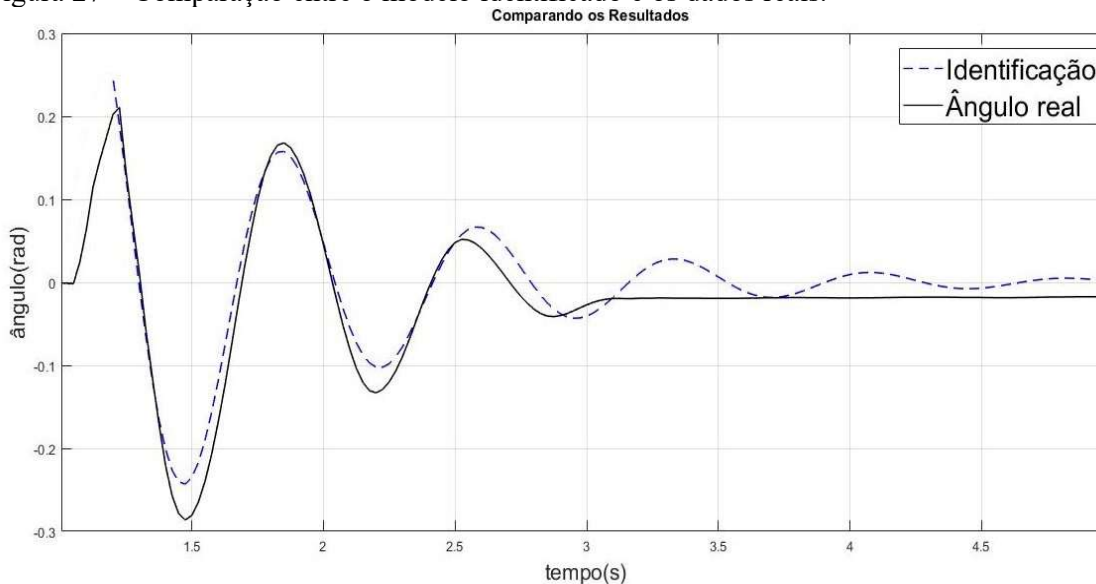


Fonte: Próprio autor.

Nota-se no gráfico da figura 26 que a envoltória não tangencia totalmente a curva em todos os pontos, variando um pouco para menos no início do gráfico, e para mais no final do gráfico. Isso ocorre porque a planta possui natureza não linear e, quando excitamos regiões fora do ponto de operação, suas características podem mudar. No entanto, para fins desse estudo, considera-se esse modelo como linear e invariante no tempo.

Na figura 27 é mostrada a curva com o modelo identificado e a curva com os dados reais obtidos durante o ensaio de identificação em laboratório.

Figura 27 – Comparação entre o modelo identificado e os dados reais.

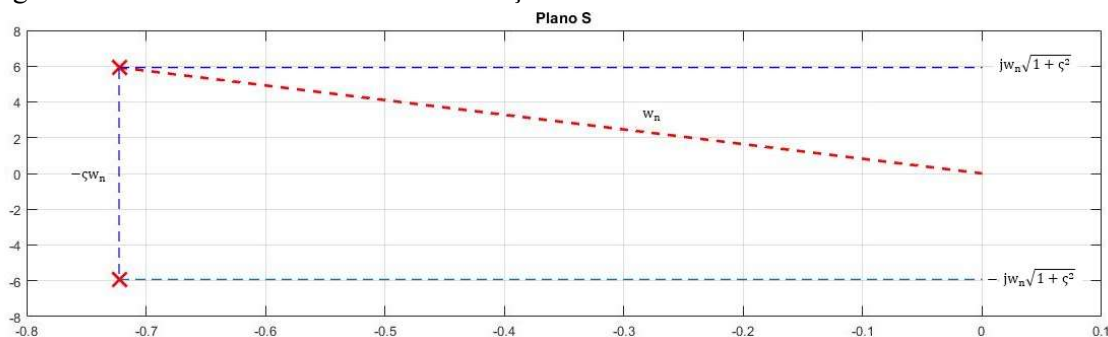


Fonte: Próprio autor.

Como podemos observar na figura 27: a superposição entre as duas curvas não é obtida fielmente em todos os pontos, resultando em algumas divergências entre os dados do experimento e o modelo obtido a partir da identificação. Isso ocorre porque os sistemas físicos podem apresentar diversas não linearidades. Portanto, há fatores que não são recepcionados por esse modelo matemático, uma vez que foi necessário fazer uso de algumas simplificações. Segundo (DA COSTA et al, 2014), esses fatores podem ser relacionados a parâmetros como: variância no tempo, coeficientes de atrito e histerese. Vale ressaltar que para plotar o modelo estimado foram desconsiderados os primeiros valores da curva e usou-se apenas os dados onde o pêndulo efetivamente entra no movimento oscilatório amortecido. Contudo, comparando as curvas na figura 27, pode-se considerar que os resultados foram satisfatórios, uma vez que buscamos um modelo aproximado.

“O gráfico do plano  $s$  de frequências complexas de polos e zeros retrata graficamente a característica da resposta transitória natural do sistema” (OGATA, 2003). Nesse sentido, os polos encontrados na identificação são mostrados no diagrama de polos da figura 28, esses polos correspondem fisicamente a dinâmica oscilatória do modelo identificado conforme dos dados da tabela 5.

Figura 28 – Polos encontrados na identificação.

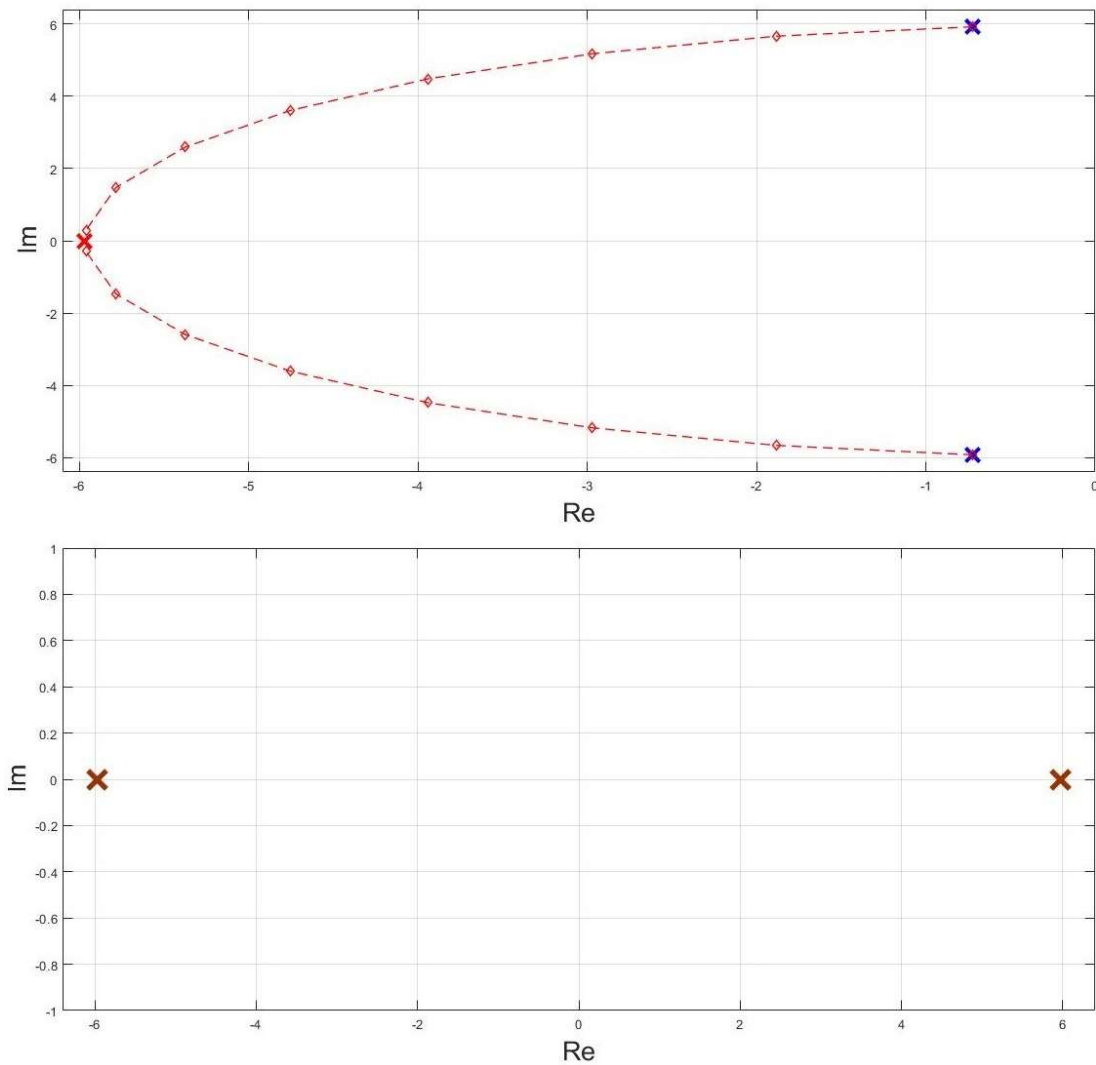


Fonte: Próprio autor.

Onde  $\xi$  e  $w_n$ , são respectivamente: o coeficiente de amortecimento e a frequência natural do sistema identificado.

Através dos polos da figura 28, torna-se possível encontrar os polos da planta do pêndulo invertido. Pois, por extrapolação, pode-se chegar ao polo estável, e, por simetria, pode-se encontrar o polo instável. Para evitar ambiguidade com os polos do pêndulo amortecido, na figura 29 são apresentados os polos do pêndulo invertido.

Figura 29 – Polos do pêndulo invertido.



Fonte: Próprio autor.

A partir do diagrama de polos da figura 29, pode-se encontrar a função de transferência do pêndulo invertido. No entanto, para esse estudo, considera-se apenas os polos da figura 28, uma vez que essa abordagem foge do escopo deste trabalho.

## 7 PROJETO DO CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO POLINOMIAL

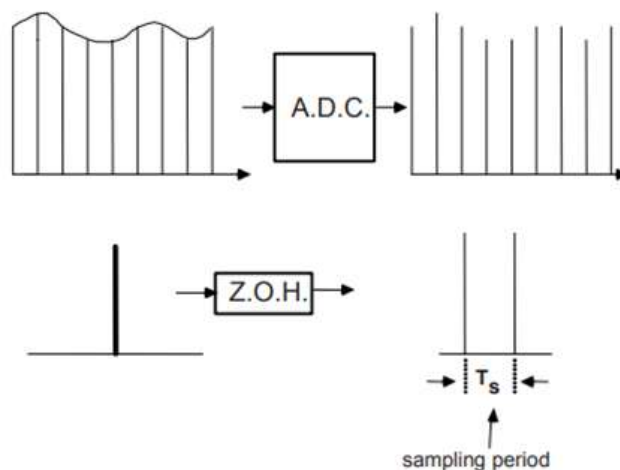
Essencialmente, a técnica de alocação de polos consiste em um método matemático de se obter um controlador tal que os polos da função de transferência de malha fechada sejam alocados em valores especificados, considerando certas condições de desempenho (PAULA, 2014). Neste contexto, esse capítulo apresenta uma descrição do projeto de um controlador discreto na topologia RST por alocação de polos, bem como os requisitos de desempenho que devem ser atendidos em malha fechada.

### 7.1 Discretização

Primeiramente, deseja-se escolher um método de discretização que melhor represente o sistema do tempo discreto. Segundo (KEIEL, 2017), a principal dificuldade do processo de discretização é como descrever o sistema de tempo contínuo somente por uma relação entre as amostras, desprezando o comportamento entre elas.

De acordo com (LANDAU, 2007), fisicamente a conversão entre tempo contínuo e discreto pode ser realizada por um conversor analógico-digital. Admitindo que nos instantes de amostragem definidos pelo *clock* do microcontrolador, esse interpreta o sinal como uma sequência de dados discretos, esses sinais são mantidos constantes entre cada instante de amostragem conforme a figura 30.

Figura 30 – Conversor A/D e discretização ZOH.



Fonte: Adaptado de Landau, 2007.

A figura 30 mostra graficamente a aproximação do sinal contínuo no domínio discreto, o que justifica a escolha do método ZOH, visto que o MPU-6050 trabalha com dados inteiros de 16 *bits* de natureza discreta, esses dados podem ser comparados em analogia com um conversor AD com a mesma resolução e tempo de amostragem. Matematicamente esse processo pode ser reproduzido pelo método de discretização ZOH (*zero-order hold*), cuja principal característica é a aproximação do estado anterior por uma reta de coeficiente angular nulo. A equação (7.1) mostra matematicamente como funciona essa discretização para um modelo de segunda ordem.

$$\frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} = \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (7.1)$$

Onde:

$$\psi = e^{-\xi w_n T_s}; \beta = \cos(w_n \sqrt{1 + \xi^2} T_s); \lambda = \sin(w_n \sqrt{1 + \xi^2} T_s) \quad (7.2)$$

$$b_1 = 1 - \psi \left( \beta + \frac{\xi w_n}{w_n \sqrt{1 + \xi^2}} \lambda \right); b_2 = \psi^2 + \psi \left( \frac{\xi w_n}{w_n \sqrt{1 + \xi^2}} \lambda - \beta \right) \quad (7.3)$$

$$a_1 = -2\psi\beta; a_2 = \psi^2 \quad (7.4)$$

## 7.2 Escolha da Dinâmica em Malha Fechada

A dinâmica de malha fechada deve ser um dos primeiros parâmetros a ser definido, pois partindo disso pode-se definir o grau dos polinômios do controlador RST e o tempo de amostragem adequado para o projeto controlador.

Devido a fácil implementação em software, o controlador será implementado no tempo discreto. No entanto, as especificações de desempenho, bem como os polos de malha fechada serão calculados no tempo contínuo, e posteriormente, discretizados. Segundo (OGATA, 2003), é possível calcular o coeficiente de amortecimento ( $\xi$ ) e a frequência natural ( $w_n$ ) do sistema desejado com base nos valores de ( $M_s$ ) máximo sobre sinal e ( $t_s$ ) tempo de acomodação, conforme as equações (7.5) e (7.6).

$$\xi = \frac{-\ln(M_s)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_s)}} \quad (7.5)$$

$$w_n = \frac{3}{\xi t_s} \quad (7.6)$$

Portanto, utilizando como parâmetro de projeto um máximo sobressinal de 1% e um tempo de acomodação de 0.29 segundos, encontra-se os seguintes parâmetros:  $\xi = 0.1891$  e  $w_n = 23.80$  rad/s, cuja função de transferência é apresentada na equação (7.7).

$$\frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad (7.7)$$

De posse dos valores de ( $\xi$ ) e ( $w_n$ ), pode-se calcular os valores dos polos de malha fechada no plano S.

$$s_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (7.8)$$

O período de amostragem ( $T_s$ ) é um parâmetro importantíssimo no projeto de um controlador discreto, uma vez que sua escolha influencia diretamente no desempenho de malha fechada, visto que a escolha de um ( $T_s$ ) inadequado pode apresentar problemas de *aliasing* (falseamento de sinais) quando o ( $T_s$ ) é muito grande, ou erros numéricos quando o ( $T_s$ ) é muito pequeno.

O período de amostragem ( $T_s$ ) é escolhido com base na dinâmica que se deseja obter em malha fechada e segundo (LANDAU, 2007), pode ser calculado de acordo com a equação (7.9).

$$T_s \geq \frac{2\pi}{25w_n(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \quad (7.9)$$

Respeitando o critério da equação (7.9) foi escolhido um valor  $T_s = 0.025$ . Finalmente, diante dessas considerações, e utilizando o segurador de ordem zero (ZOH), calcula-se a equação discreta da função de transferência desejada em malha fechada (equação (7.10)), cujo denominador é representado pelo polinômio  $P(z)$  na equação (7.11).

$$\frac{0.1228 + 0.08455z^{-1}}{1 - 1.1203z^{-1} + 0.3276z^{-2}} \quad (7.10)$$

$$P(z) = 1 + P_1 z^{-1} + P_2 z^{-2} = 1 - 1.1203z^{-1} + 0.3276z^{-2} \quad (7.11)$$

### 7.3 Controlador

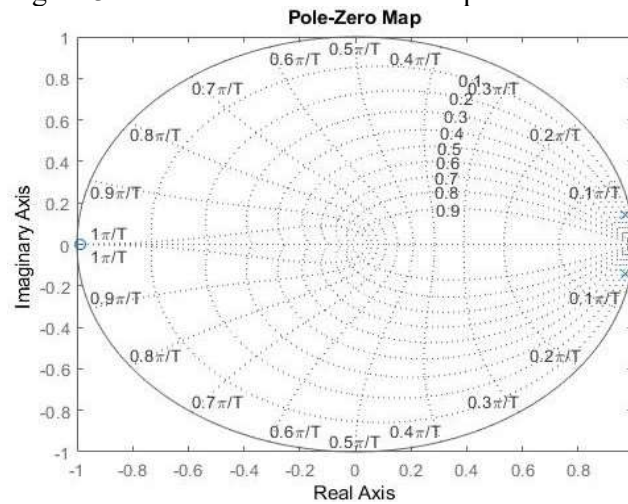
Primeiramente, antes de projetar o controlador, faz-se necessário a discretização do modelo contínuo. Então aplicando o método de discretização ZOH equação (7.1) na função de transferência obtida na função na equação (6.4), tem-se a equação (7.12) que representa a

função de transferência discreta do modelo obtido no capítulo 6. Onde  $B(z)$  e  $A(z)$  são respectivamente: numerador e denominador da função de transferência de malha aberta.

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{0.3364 + 0.3323 z^{-1}}{1 - 1.9425 z^{-1} + 0.9643 z^{-2}} \quad (7.12)$$

Igualando o polinômio  $A(z)$  a zero, encontra-se os polos de malha aberta da função de transferência discreta, conforme a figura 31.

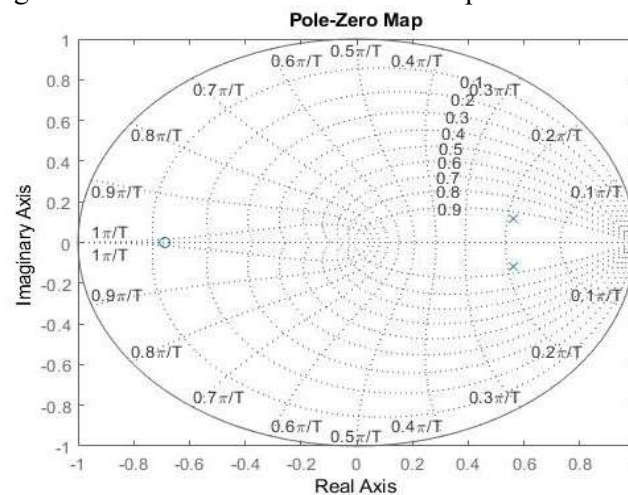
Figura 31 – Polos de malha aberta no plano Z.



Fonte: Próprio autor.

De modo análogo ao procedimento anterior, igualando o polinômio  $P(z)$  a zero, encontra-se os polos desejados da malha fechada do controlador RST, conforme a figura 32.

Figura 32 – Polos de malha fechada no plano Z.

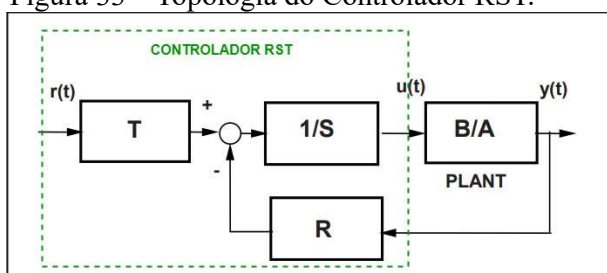


Fonte: Próprio autor.

Pode-se dizer que controlador RST (*Regulation, Sensitivity e Tracking*) trata-se de um método de projetar controladores digitais, cujo a principal característica é o posicionamento dos polos de malha fechada, visando sob certas restrições atender as especificações de desempenho do projetista (LEÃO, 2013). Neste contexto, os polos da figura 31 são os polos desejados em malha fechada.

Em razão disso e de posse das especificações de malha fechada que foram apresentadas no item (7.2), define-se a topologia do controlador RST (figura 33), onde R, T e S, são respectivamente: filtro de realimentação, filtro de referência e filtro de sensibilidade (LANDAU, 2007).

Figura 33 – Topologia do Controlador RST.



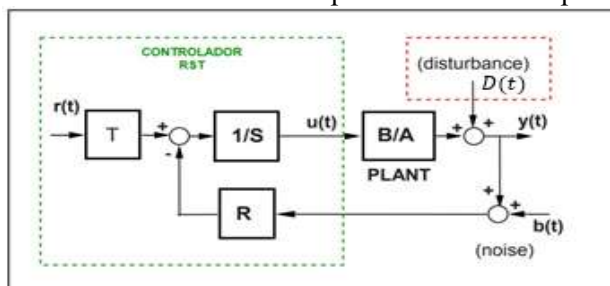
Fonte: Adaptado de Landau, 2007.

Fazendo as devidas manipulações algébricas no diagrama de blocos, tem-se a seguinte equação que define a função de transferência de malha fechada do controlador RST (LANDAU, 2007).

$$\frac{y(t)}{r(t)} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)S(z) + B(z)R(z)} \quad (7.13)$$

A figura 34 apresenta a topologia do sistema em malha fechada quando submetido a uma perturbação na saída controlada.

Figura 34 – Topologia do Controlador RST considerando um distúrbio aplicado na saída da planta.



Fonte: Adaptado de Landau, 2007.



Para efeito de projeto, determina-se que a influência a perturbação na saída da planta seja a mínima possível, portanto faz-se necessário levantar a função de transferência que melhor relacione a saída controlada com a perturbação aplicada na saída da planta.

De acordo com (OGATA, 2003), pode-se dizer que quando tratamos de sistemas lineares invariantes no tempo, cada entrada pode ser tratada independente pelo princípio da superposição. Neste contexto, considera-se que o efeito da perturbação pode ser analisado admitindo que a entrada de referência seja nula e analisando apenas a entrada a perturbação isoladamente de outras entradas do sistema. Diante dessa consideração, aplicando o princípio da superposição, pode-se calcular a função de transferência de malha fechada que relaciona o ângulo com a perturbação aplicada na saída da planta.

Após as devidas manipulações algébricas, a função de transferência entre a perturbação e a saída controlada pode ser descrita como:

$$\frac{y(t)}{D(t)} = \frac{B(z)S(z)}{A(z)S(z) + B(z)R(z)} \quad (7.14)$$

Convém ressaltar que é desejável que a planta rejeite a perturbação  $D(t)$  conforme a especificação de desempenho na equação (7.11), desse modo igualando a equação (7.11) a equação (7.14) tem-se:

$$\frac{B(z)S(z)}{A(z)S(z) + B(z)R(z)} = \frac{B(z)S(z)}{P(z)} \quad (7.15)$$

Sendo conhecidos os valores de  $A(z)$ ,  $B(z)$  e  $P(z)$ , pode-se encontrar o valor dos filtros  $R(z)$  e  $S(z)$  pela solução da equação (7.16), segundo (LANDAU, 2007), essa equação é chamada na literatura de equação Diofantina.

$$A(z)S(z) + B(z)R(z) = P(z) \quad (7.16)$$

De acordo com (ASTRÖM, 1997), para determinamos a ordem dos polinômios RST e do polinômio  $P(z)$ , deve-se atentar para as restrições mostradas nas equações (7.17), (7.18) e (7.19). Onde  $n_s$ ,  $n_r$  e  $n_p$  são respectivamente as ordens dos polinômios  $S(z)$ ,  $R(z)$  e  $P(z)$ .

$$n_s = n_a - 1 \quad (7.17)$$

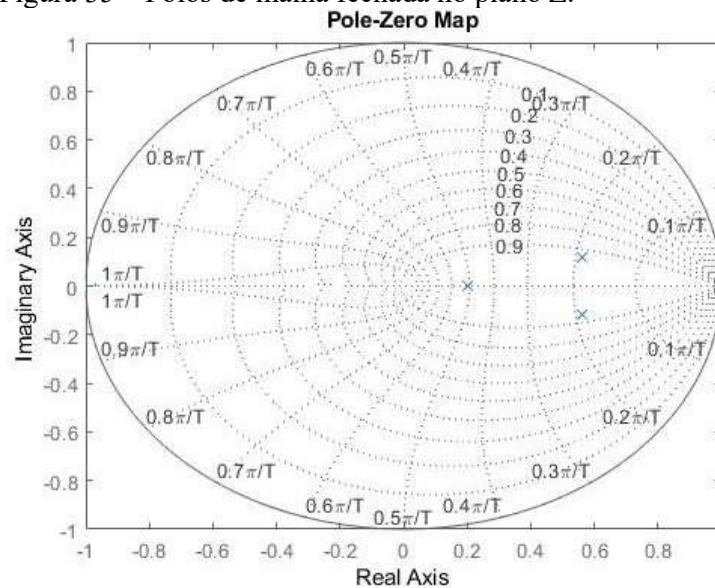
$$n_r = n_b - 1 \quad (7.18)$$

$$n_p = n_a + n_b - 1 \quad (7.19)$$

Aplicando as equações (7.17), (7.18) e (7.19), verifica-se que as ordens do polinômios  $S(z)$ ,  $R(z)$  e  $P(z)$  devem ser:  $n_s = 1$ ;  $n_r = 1$  e  $n_p = 3$ . Por consequência disso, é necessário fazer a inclusão de polos auxiliares no polinômio  $P(z)$  para garantir que as matrizes calculadas tenham as mesmas dimensões e possuam soluções possíveis. Segundo (LANDAU, 2007), esses polos devem ter valores entre -0.05 e 0.5 e devem ser polos recessivos quando comparados aos polos dominantes definidos no polinômio  $P(z)$ .

Após a inclusão do polo auxiliar, plota-se novamente os polos desejados da função de transferência de malha fechada do controlador RST, conforme a figura 35.

Figura 35 – Polos de malha fechada no plano Z.



Fonte: Próprio autor.

Diante dessas considerações e de posse das ordens de  $R(z)$ ,  $S(z)$  e  $P(z)$ , faz-se necessários o equacionamento algébrico da equação Diofantina para encontrar os coeficientes dos filtros  $R(z)$  e  $S(z)$ . Partindo dessa premissa, a equação Diofantina é representada na sua forma matricial:

$$M_{RST}x = P^T \quad (7.20)$$

Onde:

$$M_{RST} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$x^T = [1 \quad s_1 \quad r_0 \quad r_1] \quad (7.22)$$

$$P^T = [1 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3] \quad (7.23)$$

A vetor de interesse  $x$ , pode ser encontrado com resolução do sistema linear mostrado na equação abaixo:

$$x = M_{RST}^{-1} P^T \quad (7.24)$$

Substituindo os valores de  $A(z)$ ,  $B(z)$  e  $P(z)$  na equação (7.20) e resolvendo-a conforme o procedimento descrito na equação (7.24), temos os seguintes valores:

$$r_0 = 54.3735 ; r_1 = 227.8908 ; s_1 = 0.1503. \quad (7.25)$$

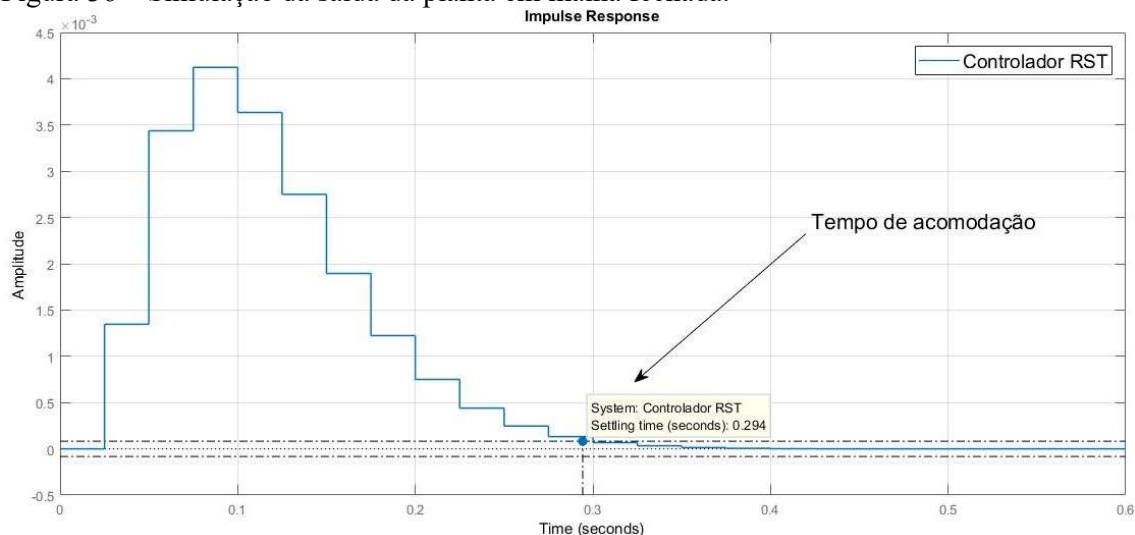
Para fins desse estudo não é necessário calcular o polinômio  $T(z)$ , uma vez o seguimento de referência é nulo, bem como o projeto do controlador 2DOF com dois graus de liberdade, pois só há rejeição a perturbação.

#### 7.4 Simulação

Nessa etapa é apresentada a metodologia utilizada para a simulação do controlador RST de acordo com o modelo identificado no capítulo 6 e o controlador projetado na secção 7.3 deste capítulo. Nessa perspectiva é escolhido o *software* MATLAB para simulação do controlador. Após definição do programa foi necessário determinar algumas condições de simulações. Para aproximar a simulação das condições reais encontradas no laboratório, foi necessário incluir um saturador de  $\pm 70$  no sinal PWM que é enviado a ponte-H.

De posse dos valores de dos polinômios RST é realizada a simulação no MATLAB a fim de verificar eficácia do controlador RST. Diante disso, na figura 36 é apresentada a resposta do controlador quando sujeito a uma perturbação impulsiva aplicada na saída da planta.

Figura 36 – Simulação da saída da planta em malha fechada.



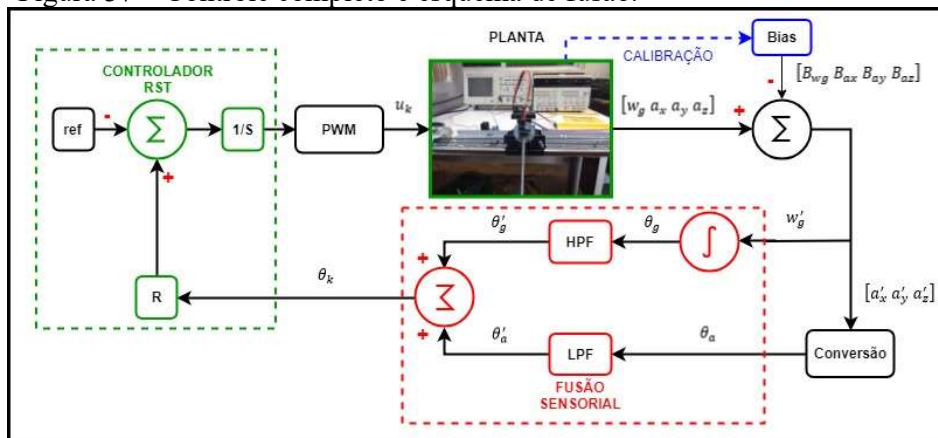
Fonte: Próprio autor.

De acordo com o gráfico apresentado na figura 36, pode-se concluir que a alocação funciona bem pelo menos em simulação, considerando que o controlador conseguiu rejeitar a perturbação de acordo com a dinâmica desejada.

## 7.5 Resultados

Neste capítulo é avaliado o desempenho do controlador RST em tempo real por meio de testes realizados na bancada em laboratório. O controlador RST, a calibração dos sensores inerciais, bem como o algoritmo do filtro complementar foram implementados em linguagem C e embarcados ao microcontrolador KL25Z, ficando o computador responsável apenas por receber os dados via comunicação UART (*Universal Asynchronous Receiver/Transmitter*) protocolo RS232, para posterior análise no *software* MATLAB. A figura 37 representa o algoritmo global implementado no projeto.

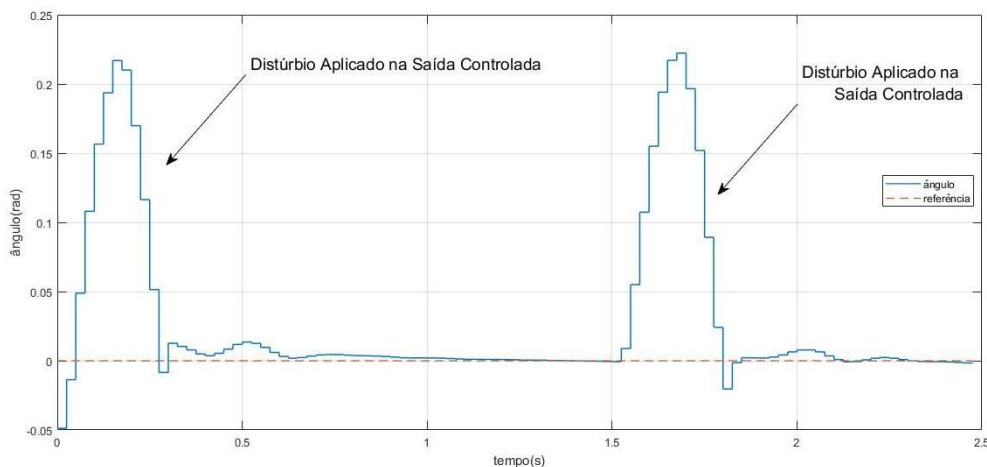
Figura 37 – Controle completo e esquema de fusão.



Fonte: Próprio autor.

Segundo (WELLSTEAD, 1991), entende-se por perturbação um sinal que tende a afetar diretamente a magnitude da entrada ou saída de um sistema de controle. Diante do exposto, com o pêndulo na posição de equilíbrio, inicia-se o teste, no entanto é necessário aguardar pelo menos 2,5 segundos, tempo necessário para realizar a calibração dos sensores inerciais. Após a calibração com haste em posição de repouso são realizados 2 pequenos empurrões, esses pequenos empurrões podem ser interpretados como perturbações impulsivas. Na figura 38 observa-se o comportamento do sistema e os resultados obtidos durante o ensaio.

Figura 38 – Resposta do controlador RST em experiência realizada em laboratório.

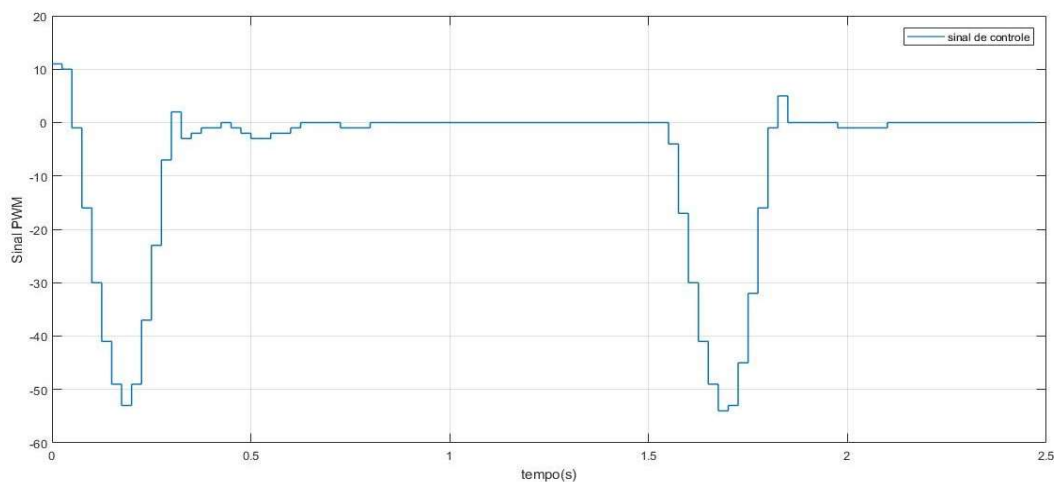


Fonte: Próprio autor.

Analisando o gráfico da figura 38 é possível verificar que o controlador RST atende às especificações de desempenho previamente definidas no projeto de alocação, contrabalançando a dinâmica oscilatória natural da planta, corrigindo a aplicação da perturbação de acordo com

o tempo estimado no projeto do controlador. O mais preocupante, contudo, é constatar o surgimento de algumas características indesejadas como a dinâmica final ligeiramente oscilatória. Pode-se atribuir esse comportamento a não linearidades implícitas da planta que não foram recepcionadas por esse modelo. No entanto, pode-se considerar que os resultados são satisfatórios uma vez que a maioria dos pré-requisitos definidos no projeto foram atendidos.

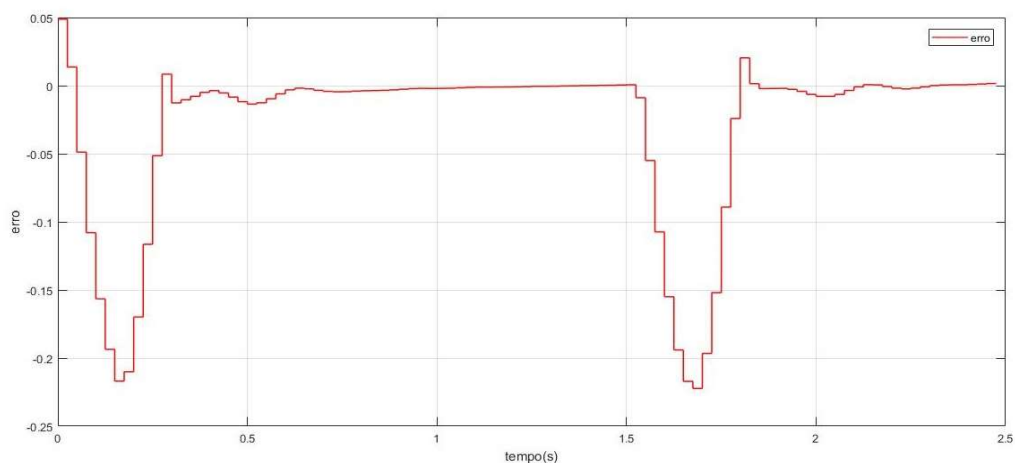
Figura 39 – Sinal de controle do motor (*duty cycle*).



Fonte: Próprio autor.

Nota-se na figura 39 que o sinal de controle atua no sentido de manter a saída sempre nula, diminuindo o erro mesmo diante de perturbações externas, no entanto, observa-se que há uma região onde a planta não responde a pequenas entradas de tensão, essa região representa uma não linearidade que pode ser chamada de zona morta.

Figura 40 – Sinal de erro do controlador RST.



Fonte: Próprio autor.

Por fim, observando o sinal de erro na figura 40 que nada mais é do que o sinal de realimentação negado, podemos inferir que o controlador atua de maneira eficaz, fazendo com que o sinal de erro convirja rapidamente para zero e o pêndulo retorne para a posição de equilíbrio. Portanto, diante desses resultados, podemos dizer que a malha de controle RST cumpriu bem os critérios de desempenho previamente estipulados na alocação, pois os resultados obtidos em tempo real apresentaram-se dentro dos valores aceitáveis, salvo algumas divergências que podem ser justificadas tanto pelas simplificações feitas para a obtenção desse modelo quanto por característica não lineares presentes na planta.

## 8 CONCLUSÃO

De modo geral as simulações mostraram-se bem semelhantes aos resultados obtidos em tempo real, mostrando a validade do modelo identificado sob um certo grau de confiança e fornecendo expectativas para trabalhos futuros. Vale ressaltar que durante a realização desse projeto foi visto a aplicabilidade de vários fundamentos estudados durante as disciplinas do curso de graduação em engenharia elétrica.

Pode-se dizer que a bancada de testes implementada neste trabalho tem um baixo custo e tem grande potencial para ser utilizada futuramente em aplicações didáticas no laboratório de controle da Universidade Federal do Ceará.

A identificação mostrou-se eficiente e forneceu dados satisfatórios quando comparados em tempo real e ao desempenho do controlador, mostrando que a resposta impulsiva pode ser considerada um bom sinal para a identificação dessa função de transferência. Contudo, é importante ressaltar que devido as simplificações que foram feitas no modelo, os resultados divergiram um pouco do esperado nas simulações computacionais.

Com base nos resultados obtidos, pode-se concluir que o filtro complementar tratou da maioria dos problemas de cada sensor de maneira eficiente, mitigando as imprecisões nas medições, atenuando os problemas pontuais de cada sensor e evitando respostas indesejadas na malha de controle.

O controlador RST por alocação de polos atendeu aos requisitos estipulados no projeto, salvo algumas situações indesejadas causadas por características não lineares da planta que não foram recepcionadas pelo modelo identificado, como é o caso da zona morta e saturação do atuador, como foi observado que há uma pequena gama de valores de entrada às quais o atuador não reage a estímulos de controle. Vale ressaltar que o controlador RST, apesar de permitir que se posicione polos em qualquer lugar do plano  $Z$ , deve-se tomar cuidado com as especificações de desempenho, uma vez que nem toda resposta desejada será seguida fielmente pelo o controlador. Como por exemplo: respostas muito lentas seriam inviáveis, uma vez que prevaleceria a resposta natural do sistema; e respostas muito rápidas tornaria o esforço de controle muito agressivo, inviabilizando a sua implementação prática.

Diante dos resultados obtidos, pode-se concluir que o trabalho atingiu o objetivo principal de construção, montagem, interface lógica, identificação da planta e aplicação de uma estratégia de controle.

Para trabalhos futuros recomenda-se analisar diferentes abordagens dessa planta de forma a encontrar um modelo que represente a função de transferência para o modelo instável



do pêndulo invertido, bem como a utilização de controladores robustos que respondam bem a características não lineares, como o LQR (regulador linear quadrático). Outra sugestão seria o projeto de identificação do modelo utilizando um sinal PRBS e a implementação de uma melhor alternativa de fusão sensorial utilizando filtro de Kalman.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, Luis Antonio. **Introdução à identificação de sistemas–Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**. Editora UFMG, 2004.
- ASTRÖM, K. J. e WITTENMARK, B. 1997. **Computer Controlled Systems Theory and Design**. 3ª. ed. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1997.
- AUGUSTO, Bruno Angelico; CASTELLO, Arthur Branco de Oliveira; MUSSI, Mateus Brugnolli; PEREIRA, Gabriel das Neves. **Apostila do Curso PTC3471 Práticas de Projeto de Sistemas de Controle. 2017**. São Paulo: Escola Politécnica da USP, 2017. 49 p.
- BONVENTI JR, Waldemar; ARANHA, Norberto. **Estudo das oscilações amortecidas de um pêndulo físico com o auxílio do “Tracker”**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, n. 2, p. 2504, 2015.
- BUENO<sup>1</sup>, Aline Grotewold; ROMANO, Rodrigo Alvite. **Filtro complementar aplicado a medida de inclinação de plataformas móveis**, 2011.
- BUZETTI, ARIEL S. et al. **Projeto e implementação do sistema de controle de um pêndulo invertido utilizando o método do lugar das raízes**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA-CBA. 2012. p. 3288-3294.
- D’AZZO, John J.; HOUPIIS, Constantine H. **Análise e projeto de sistemas de controle lineares**. Guanabara Dois, v. 2, 1984.
- DA COSTA, André Pereira; DA SILVA, Samuel Alves; LIRA, Valnir Vasconcelos. **Simulações de sistemas de controle de pêndulo simples e invertido em malhas aberta e fechada**. *Revista Principia*, v. 2, n. 25, p. 22-27, 2014.
- DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. **Modern control systems**. Pearson, 2011.
- Euston, M.; Coote, P; Mahony, R.; Jonghyuk, K.; Hamel, T. (2007) **“A Complementary Filter for Attitude Estimation of a Fixed-Wing UAV with a low-cost IMU.”** 6th International Conference on Field and Service Robotics.
- FORTE, Marcus Davi do Nascimento. **Reference Trajectory Tracking Control Of A Nonholonomic Mobile Robot With Inertial Sensor Fusion**. 2018. 89 f. Dissertação (Mestrado) - Master In Electric Engineering, Federal University Of Ceará, Fortaleza, 2018.
- FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, Abbas. **Sistemas de controle para engenharia**. Bookman Editora, 2013.
- FRIZON<sup>1</sup>, LUCAS JOSÉ; PECCIN, VINÍCIUS BERNDSEN; JINBO, MARO. **Estimação Dinâmica De Ângulo Baseado Em Giroscópio E Acelerômetro Com Filtro De Kalman**. 2016.
- REIS, Gabriela L.; JUNIOR, Marcos A. Abdalla; NOLASCO, João, D. **Controle De Posição De Um Manipulador Robótico Utilizando Sensores Inerciais E Eletromiografia**. In: XX Congresso Brasileiro de Automática, Belo Horizonte. Anais. Belo Horizonte: 2014. p. 1-8.

HUGUENIN, Rodrigo Curty. **Projeto de controle de equilíbrio e construção de um protótipo de um robô móvel baseado no modelo de um pêndulo invertido**. 2014.

KEIEL, Guilherme. **Projeto em tempo discreto de controladores ressonantes aplicados a fontes ininterruptas de energia**. 2017.

KOK, Manon; HOL, Jeroen D.; SCHÖN, Thomas B. **Using inertial sensors for position and orientation estimation**. arXiv preprint arXiv:1704.06053, 2017.

LAM, J. **Control of an Inverted Pendulum**. Disponível em: <[collab.cc.gatech.edu/humanoids/sites/edu.humanoids/files/Control%20of%20inverted%20pendulum.pdf](http://collab.cc.gatech.edu/humanoids/sites/edu.humanoids/files/Control%20of%20inverted%20pendulum.pdf)>. Acesso em: 14 set. 2018.

LANDAU, Ioan Doré; ZITO, Gianluca. **Digital control systems: design, identification and implementation**. Springer Science & Business Media, 2007.

LEÃO, Amanda de Oliveira et al. **Projeto de reguladores de velocidade de uma unidade geradora hidráulica (UGH) por técnicas convencionais e alocação polinomial em RST**. 2013.

LOURENÇO, M.; BACKES, W. **Sistema de Controle de Equilíbrio de um Pêndulo Invertido utilizando Controle PID através do PIC**. 2009. 81 f. Monografia (Curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica) – Universidade Positivo, Curitiba, 2009.

MEMS Accelerometer. <<http://www.instrumentationtoday.com/memsaccelerometer/2011/08/>>. Acessado: 2018-10-29.

NXP. Kinetis KL25 Sub-Family (REV 2). 2013. 20p. Disponível em: <<https://www.nxp.com>>. Acesso em: 15 set. 2018.

NXP Semiconductors, I2C-bus specification and user manual, 2014.

OGATA, Katsuhiko; SEVERO, Bernardo. **Engenharia de controle moderno**. Prentice Hall do Brasil, 1998.

OGATA, Katsuhiko et al. **Engenharia de controle moderno**, tradução paulo álvaro maya; revisao técnica fabrizio leonardi [et al.]. São Paulo: Prentice Hall, v. 12, p. 15-17, 2003.

PAULA., Adriano Rodrigues. **Modelagem e Controle do Pêndulo Invertido Sobre Duas Rodas**. 2014.

RIBEIRO, Ricardo. **Implementação de um Sistema de Controle de um Pêndulo Invertido**. Itajubá. Disponível em: <http://adm-neta.unifei.edu.br/phl/pdf/0030714.pdf>, último acesso em, v. 20, n. 11, p. 2011, 2007.

STMicroelectronics. DUAL FULL-BRIDGE DRIVER. 2000.

Texas Instruments., "MPU-6050 Data Sheet" - 2013 - 0512YYZ

WELLSTEAD, P. E. E.; ZARROP, **Martin B.** **Self-tuning systems: control and signal processing.** John Wiley & Sons, Inc., 1991.