



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Francisco Cleiton Estevão Lima

Soluções do tipo compacton nos modelos sigmas
não-lineares

Fortaleza - CE
2019

Francisco Cleiton Estevão Lima

Soluções tipo compacton nos modelos sigmas não-lineares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

Universidade Federal do Ceará - Departamento de Física

Fortaleza - CE

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- L698s Lima, Francisco Cleiton Estevão.
Soluções do tipo compacton nos modelos sigmas não-lineares / Francisco Cleiton Estevão Lima. – 2019.
97 f. : il.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
1. Modelo Sigma. 2. Compacton. 3. Termo de Chern-Simons. 4. Acoplamento mínimo. I. Título.
CDD 530
-

Francisco Cleiton Estevão Lima

Soluções tipo compacton nos modelos sigmas não-lineares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Aprovada em 19 de Julho de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Dr. Matheus Araújo Marques
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará - UFC

Aos meus pais, pois me faltam palavras para expressar à minha gratidão.

“É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.”

(Theodore Roosevelt)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois mesmo eu sendo falho, e não merecendo o seu amor, ele se fez presente na minha vida cuidando de mim e trilhando o meu caminho.

À minha família, em especial, aos meus pais pelo apoio, dedicação, amor e carinho que foram o alicerce para que eu pudesse conquistar mais essa etapa. Agradeço também por todos os ensinamentos e esforços que me proporcionaram, isso me transformou na pessoa que eu sou hoje, sou grato a Deus por suas vidas. Amo vocês!

À minha querida, Ruth Helena S. Soares, gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos por seu amor, apoio e compreensão nos momentos que precisei.

Ao professor Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida, gostaria de expressar minha sincera gratidão, por ter aceitado esse desafio de me orientar nesse trabalho, pelo apoio contínuo nessa jornada, por sua amizade, paciência, motivação, entusiasmo e conhecimento. Por fim, agradeço pela orientação impecável e pelas excelentes discussões e compromisso que levaram ao enriquecimento e aprimoramento do trabalho.

Ao Dr. Matheus Araújo Marques por todas as críticas e sugestões para o aprimoramento dessa dissertação.

Aos amigos do Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes-LASSCO que, em sua maneira, contribuíram para a construção e desenvolvimento dessa dissertação. Em especial, agradeço aos amigos Allan Raniere, Débora Gomes, Michelângelo Frost, Adevaldo Gonçalves, Matheus Nilton, Jefferson Mendes e Leandro Lessa pelas conversas e pelos momentos de distrações vividos nas horas difíceis do curso.

Aos colegas Davi Monteiro e Diego Quântico pelas excelentes discussões e ideias propostas

para o avanço do trabalho.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Física-UFC, em especial, agradeço aos amigos José Hugo, Ramon Sampaio e Wendel Cipriano pela amizade e por todos os momentos de descontração durante a duração do curso.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física, em especial, aos professores Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho e Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante pelos ensinamentos passados, pela dedicação e comprometimento no ensino e pesquisa do programa.

Ao professor Dr. Marcony Silva Cunha por sua preciosa orientação no meu período de graduação, que foi fundamental para que eu abrisse meus olhos de como é a física, isto me fez despertar o desejo de me tornar um pesquisador.

À coordenação do curso de Pós-Graduação em Física, na pessoa do professor Dr. Wandemberg Paiva Almeida, por toda a infraestrutura fornecida.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesse trabalho, temos como objetivo estudar as soluções tipo compacton no modelo sigma não-linear, em específico, voltaremos a nossa atenção ao estudo do modelo sigma $O(3)$ com o campo de *gauge* governado pelo termo de Chern-Simons e sujeito ao potencial de Higgs e a um potencial hiberbólico tipo Higgs. A escolha desses modelos deve-se ao fato de que em ambos os casos, com acoplamentos mínimo, os modelos apresentam soluções tipo *kink*. Dessa forma, motivados por alguns trabalhos recentes da literatura, buscamos uma generalização do modelo para levar as soluções solitônicas tipo kink em soluções tipo compacton. No caso do modelo com acoplamento mínimo e com campo de *gauge* governado pelo termo de Chern-Simons, observamos que o modelo admite tanto soluções topológicas quanto não-topológica para uma escolha específica do comportamento assintótico do campo de *gauge*. Por fim, notamos que em ambos os casos, os sólitons topológicos são infinitamente degenerados em qualquer setor.

Palavras-chave: Modelo Sigma, *Compacton*, Termo de Chern-Simons, Acoplamento mínimo.

Abstract

In this work, our main purpose is studying compacton-like solutions in the non-linear sigma model, in particular, the sigma-O(3) model with the gauge field governed by the Chern-Simons term. The choice of these models is due to the fact that in both cases, with the minimal coupling, the models present kink-like solutions. In this way, motivated by some recent works of the literature, we seek a generalization of the model to transform the kink-like solutions in compacton-like solutions. In the case of the model with minimal coupling and the gauge field governed by the Chern-Simons term, we observed that the model admits both topological and non-topological solutions for a specific choice of the asymptotic behavior of the gauge field. To finish, we observe that in this case the topological solitons are infinitely degenerate in any sector.

Keywords: Sigma Model, Compacton, Chern-Simons Term, Minimal coupling.

Sumário

Sumário	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos	xvi
1 Introdução	1
2 Aspectos da Teoria Clássica de Campos	4
2.1 A Lagrangiana	4
2.2 Teorema de Noether em campos clássico	7
2.3 Vácuo e a quebra espontânea de simetria	9
3 Modelos Topológicos	12
3.1 Definição de sóliton	12
3.1.1 Modelo $\lambda\phi^4$: solução tipo kink	13
3.2 Índices topológicos	17
4 Compacton: Aplicação	20
4.1 A equação de KdV: sólitons	20
4.2 A equação de KdV modificada: compactons	21
5 O Modelo $O(N)$ e o Modelo Sigma $O(N)$ Não-Linear	24
5.1 O modelo $O(N)$	24
5.2 O modelo sigma $O(N)$ não-linear	24
5.2.1 A solução de vácuo clássico	25
5.2.2 A solução de energia localizada	26

6	Sólitons no modelo sigma-$O(3)$	38
6.1	O modelo sigma com termo de Chern-Simons	38
6.2	O modelo sigma $O(3)$ com termo de Maxwell-Chern-Simons	45
7	Resultados Obtidos	56
7.1	O modelo sigma com acoplamento mínimo e com o termo de Chern-Simons-Higgs generalizado	56
7.1.1	A solução do modelo	58
7.1.2	Resultados numéricos	59
7.2	O modelo sigma com acoplamento mínimo e com o termo de Chern-Simons em um potencial hiperbólico tipo Higgs	63
7.2.1	O modelo $O(3)$ com acoplamento mínimo	63
7.2.2	A constante dielétrica e o vórtice tipo compacton	72
8	Considerações Finais e Perspectivas	75
	Referências Bibliográficas	78

Lista de Figuras

2.1	Plot de $V(\phi)$ quando $\gamma^2 \geq 0$	10
2.2	Plot de $V(\phi)$ quando $\gamma^2 < 0$	11
3.1	Ilustração gráfica do potencial $\lambda\phi^4$	13
3.2	Ilustração gráfica do potencial $\frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$ com $\lambda = v = 1$	15
3.3	Ilustração gráfica das solução tipo <i>kink</i> quando $v = 1$ e $x_0 = 0$	16
3.4	Ilustração gráfica das solução tipo <i>antikink</i> quando $v = 1$ e $x_0 = 0$	17
3.5	Ilustração gráfica da densidade de energia da solução <i>kink</i> e <i>anti-kink</i> quando $\lambda = 1$ e $x_0 = 0$	18
4.1	Plot das soluções de onda solitária para determinados instantes de tempo. . .	21
4.2	Plot da colisão de dois sólitons.	22
4.3	Plot da solução tipo compacton da equação KdV.	23
5.1	a) Ilustração de um mapeamento de um círculo, indicado pela linha contínua, em outro círculo, indicado pela linha tracejada. b) Representação de um mapeamento trivial (eq. (5.12)), onde o primeiro círculo é mapeado em um único ponto do segundo. c) Mapeamento não trivial (eq. (5.13)).	28
5.2	Mapeamento da eq. (5.14).	29
6.1	Sólitons não topológicos para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Chern-Simons.	46
6.2	Sólitons não topológicos para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Chern-Simons para vários valores iniciais do campo de variável, ou seja, diversos valores do campo de <i>gauge</i>	47
6.3	Soluções topológicas para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Chern-Simons para vários valores iniciais do campo de variável, ou seja, diversos valores do campo de <i>gauge</i>	48

6.4	Sólitos topológicos para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Maxwell-Chern-Simons para diversos valores de g_c , ou seja, $g_c = -0.8$ (linha traço-pontilhado), -0.6 (linha traço-longo), -0.4 (linha tracejada) e -0.2 (linha sólida).	55
6.5	Sólitos não-topológicos para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Maxwell-Chern-Simons para diversos valores de g_c , ou seja, $g_c = -0.025$ (linha traço-pontilhado), -0.02 (linha traço-longo), -0.015 (linha tracejada) e -0.01 (linha sólida).	55
7.1	Soluções solitônicas para $f(r = 0) = 0$ e $f(r \rightarrow \infty) = \pi$	60
7.2	Energia BPS associada ao campo variável com $f(r = 0) = 0$ e $f(r \rightarrow \infty) = \pi$	60
7.3	Soluções tipo <i>kink</i> para $f(r = 0) = 0$ e $f(r \rightarrow \infty) = \pi$	61
7.4	Energia BPS para $f(r = 0) = 0$ and $f(r \rightarrow \infty) = \pi$	62
7.5	Do <i>kink</i> as soluções tipo compacton do modelo	62
7.6	Energia BPS do <i>kink</i> as soluções tipo compactons	63
7.7	Soluções solitônicas quando $\omega < 0$	63
7.8	Comportamento gráfico do potencial para vários valores do parâmetro de deformação	64
7.9	Soluções numéricas dos vórtices topológicos para vários valores assintóticos do campo de <i>gauge</i>	69
7.10	Comportamento do campo de <i>gauge</i> topológico para diferentes valores do parâmetro η_1	69
7.11	A magnitude do campo magnético B como função de r para $N = 1$	70
7.12	Solução numérica do vórtice não-topológico para vários valores assintóticos do campo de <i>gauge</i>	70
7.13	Comportamento do campo de <i>gauge</i> para diferentes valores do parâmetro η_2	71
7.14	A magnitude do campo campo magnético B como função de r para $N = -1$	71
7.15	Das soluções tipo <i>kink</i> as soluções tipo compacton.	74
7.16	Das soluções não-topológicas as soluções tipo <i>kink</i> para o campo variável.	74

Lista de Tabelas

3.1	Setores topológicos no modelo $\lambda\phi^4$	18
-----	---	----

Lista de Símbolos

\mathcal{L}	Densidade Lagrangiana do modelo.
S	Ação do modelo.
J^μ	Corrente de Noether.
$g_{\mu\nu}$	Métrica do modelo.
$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi}$	Operador d'Alembertiano.
$T^\mu{}_\nu$	Tensor energia-momento.
Q	Carga topológica.
$D_\mu \vec{\phi}$	Derivada covariante com acoplamento mínimo.
$\nabla_\mu \vec{\phi}$	Derivada covariante com acoplamento não-mínimo.
$\partial_\mu \vec{\phi}$	$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x^\mu}$.

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas os avanços nas áreas de modelos topológicos e geometria têm se tornado importante para diversos pesquisadores, dentre eles, os físicos teóricos que atuam na área. O desenvolvimento de pesquisas na área de topologia levaram ao surgimento de novas teorias, por exemplo, teoria de campos topológica e teoria de cordas topológicas. A motivação para o estudo desse tipo de teoria vai além de argumentos matemáticos, do ponto de vista físico, essas teorias se tornam mais atrativas e interessantes por proporcionarem argumentos topológicos que tornam as soluções de determinados modelos mais simples.

A descrição de fenômenos como o efeito Hall quântico fracionário e a supercondutividade em altas temperaturas estão estritamente relacionada ao estudo de sistemas planares em física de matéria condensada e teoria de campos [1, 2]. Além dessas motivações, o crescente interesse no assunto, deve-se, ainda, ao fato que os sistemas em $(2 + 1)D$ apresentam uma característica *sui generis*, ou seja, a possibilidade de ter spin, em princípio, arbitrário [3]. Isso em princípio, faz oposição aos modelos de três dimensões espaciais, em que o spin deve ser inteiro ou semi-inteiro [4]. Essa característica se deve ao fato de que em duas dimensões espaciais o grupo de rotações é abeliano [5].

Uma característica importante do estudo de modelos bidimensionais em teoria de campos de $(2+1)D$ é a existência de soluções tipo onda solitária, ou seja, soluções tipo sólitons [6]. Os sólitons em duas dimensões e multidimensionais são objetos de intensa pesquisa e crescente interesse, tanto por motivos fundamentais quanto por aplicabilidade. Em $(1 + 1)D$, a teoria de sóliton repousa sobre a teoria das equações que são completamente integráveis através do método de transformação de dispersão inversa. A mais comum e mais importante dessas equações é a equação não-linear de Schrödinger. Em dimensões mais altas, como por exemplo, $(2 + 1)D$ as equações completamente integráveis são raras [7].

Uma aplicação de soluções tipo sólitons pode ser vista quando, por exemplo, uma fonte

de luz é focada em um guia de ondas, a propagação linear ao longo da guia de onda resulta em encapsulamento para locais adjacentes [8], exibindo, assim, um padrão de difração característico com intensidade concentrada principalmente em determinados pontos. Para uma não-linearidade suficientemente alta, uma auto-focalização equilibra este efeito, levando a uma rede de sóliton [9, 10, 11].

Em 1993, os compactons foram definidos como sólitons de comprimento de onda finito [12], e até agora têm sido objeto de vários estudos, já que modelos contendo defeitos topológicos foram usados para representar partículas e objetos cosmológicos, como cordas cósmicas [13]. Um arranjo particular de partículas pode ser representado como um grupo de compactons e, neste caso, não teremos o problema de sobreposição de partículas, ou defeitos [14]. Outra razão para o crescente interesse no estudo de estruturas compactas são os vórtices compactos e skyrmions que estão intrinsecamente conectados com os recentes avanços na miniaturização de material em escala nanométrica para aplicações spintrônicas [15, 16]. Além disso, as propriedades das paredes de domínio magnético tipo compactons quânticos foram estudadas por Bazeia & Vassilevich [17]. Características de modelos compactons em temperatura finita, por exemplo, o estudo de como os efeitos das correções de um loop dependentes da temperatura contribuem para o potencial efetivo da teoria foram descobertos em [18]. Aplicações de compactons em contextos de mundos branas também aparecem frequentemente em algumas referências [19, 20, 21, 22, 23].

O interesse no estudo dos modelos sigmas, em particular, o modelo sigma não-linear $O(3)$ é devido às suas contribuição na descrição do ferromagnetismo de Heisenberg [24]. O modelo sigma $O(3)$ em $(2 + 1)D$ é exatamente integrável no limite Bogomol'nyi [25]. A estabilidade destas soluções de sóliton é garantida por argumentos topológicos [25, 26]. No entanto, os sólitons neste modelo, pode ser expresso em termos de funções que são invariantes de escala. Devido a esta invariância, o tamanho desses sólitons podem mudar arbitrariamente durante a evolução do tempo sem modificar a energia destes [6, 25].

Em princípio, existem várias maneiras de quebrar a invariância da escala deste modelo [27, 28], a construção de Q-lumps é um exemplo onde a invariância de escala é quebrada, incluindo um específico termo de potencial no modelo sigma [28]. Assim, o colapso do tamanho do sóliton neste modelo é impedido, fazendo uma rotação no espaço interno das variáveis de campo. Estes sólitons de energia finita são necessariamente dependentes do tempo com uma velocidade angular constante [6].

Atualmente, existem muitos trabalhos na literatura onde os autores tratam o campo escalar interagindo com o campo de *gauge* [6, 29, 47]. Basicamente, a diferença desses trabalhos está na escolha do termo que descreve a dinâmica do campo de calibre. Por

exemplo, ao utilizarmos o termo de Maxwell, pode-se encontrar as soluções conhecidas como vórtices, esses objetos apresentam algumas propriedades como a carga elétrica associada ao fluxo magnético, dentre outras [30]. Outra possibilidade está no campo de *gauge* ser governado pelo termo de Chern-Simons, nesse caso o termo de Chern-Simons dá origem a uma quantização do fluxo magnético do sistema, é válido observar que essa quantização se dá a nível clássico, sendo devido unicamente ao caráter topológico do modelo [29]. É possível, ainda, combinar os termos de Maxwell e Chern-Simons, nesse caso, temos também soluções solitônicas. Essas soluções foram bem discutidas por Lee *et al.* em 1990 [31].

Nesta dissertação, temos como objetivo o estudo de soluções do tipo compacton no modelo sigma $O(3)$. Para isto, no segundo capítulo apresentamos alguns aspectos da teoria clássica de campos, ou seja, iniciamos discutindo sobre a Lagrangiana em teoria de campos e as invariâncias no espaço Euclidiano e de Minkowski, em seguida, enunciaremos o famoso teorema de Noether e finalizamos discutindo sobre a quebra espontânea de simetria.

No terceiro capítulo, buscaremos dissertar sobre a teoria dos sólitons de dimensão $(1+1)$. Para isto, iniciaremos apresentando alguns conceitos básicos sobre as soluções solitônica estáticas e algumas propriedades intrínsecas dessas soluções.

Em seguida, apresentamos um capítulo de aplicação e motivação para o estudo de soluções tipo compacton, nesse capítulo discutimos as soluções solitônicas tipo compacton da equação de Korteweg-de Vries (KdV). No capítulo seguinte, iniciamos uma discussão sobre as soluções de energia localizada do modelo sigma $O(3)$. Por fim, investigamos as soluções do modelo para um campo de *gauge* governado por Chern-Simons, em seguida, discutiremos o caso do campo de *gauge* governado pelo termo de Maxwell-Chern-Simons.

Capítulo 2

Aspectos da Teoria Clássica de Campos

Nesse capítulo, dissertaremos sobre os três conceitos chaves necessários para a elaboração desse trabalho. Inicialmente, iremos discutir sobre a Lagrangiana em teoria de Campos e as invariâncias no espaço Euclidiano e de Minkowski, em seguida, enunciaremos o famoso teorema de Noether e finalizamos discutindo sobre a quebra espontânea de simetria.

2.1 A Lagrangiana

A Lagrangiana clássica em teoria de campos preocupa-se com a dinâmica de um ou mais campos definido ao longo de um espaço e evoluindo no tempo [32].

Considerando por suposição um espaço \mathbb{R}^d , então, o espaço-tempo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. As coordenadas da posição são $x = (t, \mathbf{x})$, onde temos que $x^0 = t$ [33]. O campo mais simples é um campo escalar ϕ , uma função em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, denotada localmente por $\phi(t, x)$ [26].

O tipo mais simples de uma Lagrangiana:

$$L = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi - U(\phi) \right], \quad (2.1)$$

com a densidade Lagrangiana sendo o integrando da expressão acima. A densidade Lagrangiana é uma quantidade local que depende isotropicamente de $\nabla \phi$, o potencial $U(\phi)$ é alguma função de ϕ .

Há uma divisão dessa Lagrangiana em energia cinética e energia potencial, $L = T - V$

[32]. Assim, a energia cinética do campo é:

$$T = \int \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 d^d x, \quad (2.2)$$

e a energia potencial:

$$V = \int \left(\frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + U(\phi) \right) d^d x. \quad (2.3)$$

Note que a energia potencial é definida para o campo em um dado tempo, e ela possui, portanto, contribuições de $\nabla \phi$ e $U(\phi)$. É válido ressaltar que o termo $\nabla \phi \cdot \nabla \phi$ dá origem à energia gradiente.

Para a teoria de Campos definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ devemos sempre insistir na invariância Euclidiana em \mathbb{R}^d , invariância de translação temporal. O grupo Euclidiano $E(d)$ combina translações espaciais e rotações. A simetria translacional é assegurada se não houver dependência explícita x na Lagrangiana e a integração sob todo espaço for constante. Para uma invariância por rotação, é necessário uma combinação dos termos de gradientes em um escalar [26].

Uma generalização aceitável de (2.1) deve envolver os termos de energia cinética

$$\int (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) (\partial_0 \phi)^2 d^d x. \quad (2.4)$$

Termos similar a esse aparece no modelo de Skyrme [34]. Termos lineares em $\partial_0 \phi$ são também possíveis, mas não devemos ter termos de derivada total no tempo. Uma das mais simples possibilidades ocorrem em uma teoria com dois campos ϕ_1 e ϕ_2 , onde o termo cinético poderia incluir

$$\int (\phi_1 \partial_0 \phi_2 - \phi_2 \partial_0 \phi_1) d^d x. \quad (2.5)$$

A energia potencial poderia incluir mais termos, tipo:

$$\int (\nabla \phi \cdot \nabla \phi)^2 d^d x \quad (2.6)$$

ou

$$\int W(\phi) \nabla \phi \cdot \nabla \phi d^d x \quad (2.7)$$

para alguma função W positiva.

A teoria de campos com a Lagrangiana (2.1) possui mais que uma simetria Euclidiana $E(d)$, devido a derivada no espaço e no tempo de ϕ aparecerem na forma quadrática e com um sinal de menos relativo, a teoria é invariante de Lorentz. A invariância de Lorentz permite,

portanto, a adição em (2.1) da forma:

$$\int W(\phi)[(\partial_0\phi)^2 - \nabla\phi \cdot \nabla\phi] d^d x \quad (2.8)$$

a invariância de Lorentz é fundamental para teorias que buscam descrever partículas elementares no espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Em teorias invariantes de Lorentz é conveniente condensar a notação, assim assumimos que:

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \equiv (\partial_0\phi)^2 - \nabla\phi \cdot \nabla\phi \quad (2.9)$$

onde os índices gregos μ varia de 0 à d em um espaço-tempo de $(d + 1)$ -dimensão com assinatura métrica $g^{\mu\nu} = (1, -1, \dots, -1)$.

A ação associada com uma densidade Lagrangiana $\mathcal{L}(\partial_0\phi, \nabla\phi, \phi)$ é

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int \mathcal{L}(\partial_0\phi, \nabla\phi, \phi) d^d x dt. \quad (2.10)$$

Em princípio, a ação S deve ser estacionária para um dado intervalo do espaço \mathbb{R}^d ; ou seja $\phi(t_1, x) = \phi^{(1)}(x)$, $\phi(t_2, x) = \phi^{(1)}(x)$ [32]. Com isto, considerando a variação:

$$\phi(t, x) \rightarrow \phi(t, x) + \delta\phi(t, x) \quad (2.11)$$

onde temos que $\delta\phi \rightarrow 0$ conforme $|x| \rightarrow \infty$, e $\delta\phi = 0$ em t_1 e t_2 .

Variando a ação, temos que:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \partial_0\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \cdot \nabla\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi \right] d^d x dt \quad (2.12)$$

Por integração por partes em todo o espaço, obtemos facilmente que:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int \left\{ \left[-\partial_0 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \right] \delta\phi \right\} d^d x dt \quad (2.13)$$

Para δS desaparecer para qualquer $\delta\phi$, requeremos que:

$$\partial_0 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad (2.14)$$

e esta é a equação que descreve a dinâmica do campo, também conhecida como equação de Euler-Lagrange.

Para a Lagrangiana (2.1), a equação de Euler-Lagrange (7.30) reduz-se para:

$$\partial_0 \partial_0 \phi - \nabla^2 \phi + \frac{dU}{d\phi} = 0, \quad (2.15)$$

que é uma equação de onda não linear e invariante de Lorentz.

No caso de um campo estático a Eq. (2.15) reduz-se para:

$$\nabla^2 \phi = \frac{dU}{d\phi}. \quad (2.16)$$

O formalismo Lagrangiano pode ser facilmente estendido para a teoria de n campos escalares $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$. Com isto, a configuração dinâmica do campo é um mapeamento $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^n$ [26]. Neste caso, obtemos facilmente que a generalização da equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$\partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_k)} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_k)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} = 0, \quad \text{com } 1 \leq k \leq n. \quad (2.17)$$

Em princípio, os campos podem ter um caráter tensorial, nesse caso, é requerido a adição da métrica de Minkowski para produzirmos uma densidade Lagrangiana invariante de Lorentz [33]. Por fim, pode-se mostrar facilmente que a Eq. (7.30) pode facilmente ser reescrita na forma covariante [26, 32], a saber:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} = 0. \quad (2.18)$$

2.2 Teorema de Noether em campos clássico

“Se uma Lagrangiana possui uma simetria contínua, então, existe uma corrente associada com essa simetria que é conservada”, esse é o teorema de Noether [32, 35]. Ou seja, devemos ter:

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.19)$$

com isso, temos que tanto as simetrias internas quando as simetrias do espaço-tempo levam a algumas leis de conservação [35].

Considerando, inicialmente a simetria interna, ou seja, uma variação infinitesimal de ϕ em uma teoria de $(d + 1)$ dimensão do espaço de Minkowski, dada por:

$$\phi(x) \mapsto \phi(x) + \varepsilon \Delta \phi(x) \quad (2.20)$$

com ε sendo um infinitesimal. Essa variação é uma simetria se podemos demonstrar, sem usar a equação de campos, que a variação correspondente na densidade Lagrangeana é uma divergencia total da forma:

$$\mathcal{L}(x) \mapsto \mathcal{L}(x) + \varepsilon \partial_\mu K^\mu(x). \quad (2.21)$$

com $K^\mu(x)$ uma quantidade positiva.

Agora, analisando, a variação explícita de \mathcal{L} devido a transformação (2.20), obtemos que:

$$\mathcal{L}(x) \mapsto \mathcal{L}(x) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\Delta \phi) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Delta \phi \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \Delta \phi \quad (2.23)$$

Substituindo à Eq. (2.18) na expressão (2.23), obtemos, facilmente que:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right); \quad (2.24)$$

Com isto, obtemos facilmente que a corrente conservada é:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - K^\mu \quad (2.25)$$

onde temos que a Eq. (2.25) é a conhecida corrente de Noether [26]. Portanto, esse é o teorema de Noether.

A conservação da corrente de Noether implica na conservação da carga:

$$Q = \int J^0 d^d x, \quad (2.26)$$

com Q independente do tempo.

Note que, com o auxílio da equação de continuidade, temos que:

$$\frac{dQ}{dt} = \int \partial_0 J^0 d^d x = - \int \nabla \cdot \mathbf{J} d^d x = \oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.27)$$

Assumindo que $\mathbf{J} \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$, então obtemos que:

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (2.28)$$

Como um exemplo mais geral, consideramos, agora, uma transformação infinitesimal no

espaço-tempo [26]. Ou seja,

$$x^\mu \mapsto x^\mu + \varepsilon^\mu, \quad (2.29)$$

com ε sendo infinitesimal, para uma Lagrangiana arbitrária que não depende explicitamente da coordenada do espaço-tempo. Nesse caso, temos que o efeito no campo ϕ é:

$$\phi(x) \mapsto \phi(x + \varepsilon) = \phi(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi(x). \quad (2.30)$$

O efeito na densidade Lagrangiana é dado por:

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \varepsilon^\nu \partial_\mu (\delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}) \quad (2.31)$$

Desde que o parâmetro infinitesimal ε^ν é um vetor no espaço-tempo, a corrente conservada é um tensor dada por:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \quad (2.32)$$

onde $T^\mu{}_\nu$ é o tensor energia-momento e satisfaz a condição:

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0. \quad (2.33)$$

vale ressaltar que existe uma corrente para cada componente do vetor ε^ν .

A carga conservada associada com a simetria de translação temporal é a energia [35]:

$$E = \int T^0{}_0 d^d x = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L} \right] d^d x \quad (2.34)$$

Por fim, a carga conservada associada com a transação espacial é o vetor momento [26, 35]:

$$P_i = - \int T^0{}_i d^d x = - \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial_i \phi d^d x. \quad (2.35)$$

2.3 Vácuo e a quebra espontânea de simetria

Por simplicidade, iniciaremos nossa discussão considerando a existência de n campos escalares reais, representados por $\vec{\phi}$. Supondo, ainda, que a dinâmica do sistema é descrita pela densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - V(\vec{\phi}), \quad (2.36)$$

em que temos, $V(\vec{\phi})$ sendo um potencial aleatório a ser definido posteriormente [35]. Com isto, temos que a densidade de energia associada Lagrangeana (2.36) é dada por:

$$\mathcal{E}(\phi) = \frac{1}{2} \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + V(\phi). \quad (2.37)$$

Assim, no estado de menor energia, estado de vácuo, o valor de $\vec{\phi}$ é uma constante. Por simplicidade denotamos, convenientemente, o valor de $\vec{\phi}$ como sendo o valor esperado de $\vec{\phi}$, ou seja, $\langle \vec{\phi} \rangle$. Este valor é determinado pelo potencial $V(\phi)$, sendo portanto um de seus mínimos absolutos.

Para uma fácil compreensão da quebra espontânea de simetria, tomamos, convenientemente:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{\gamma^2}{2!} \phi^2. \quad (2.38)$$

com λ positivo e γ^2 positivo ou negativo.

Dessa forma, podemos reescrever a Eq. (2.36) como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - \frac{\gamma^2}{2!} \phi^2 \quad (2.39)$$

Notamos, portanto, que a teoria é simétrica sob a transformação:

$$\phi \rightarrow -\phi. \quad (2.40)$$

Com isso, analisando graficamente o comportamento de $V(\phi)$, obtemos os resultados gráficos para $\gamma^2 \geq 0$ e $\gamma^2 < 0$, dado respectivamente pelas figuras (2.1, 2.2).

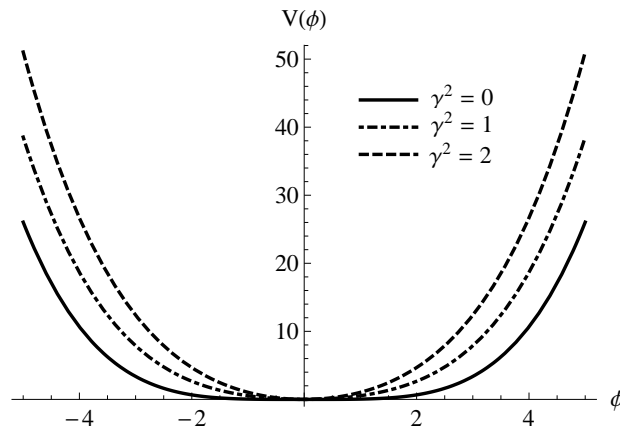
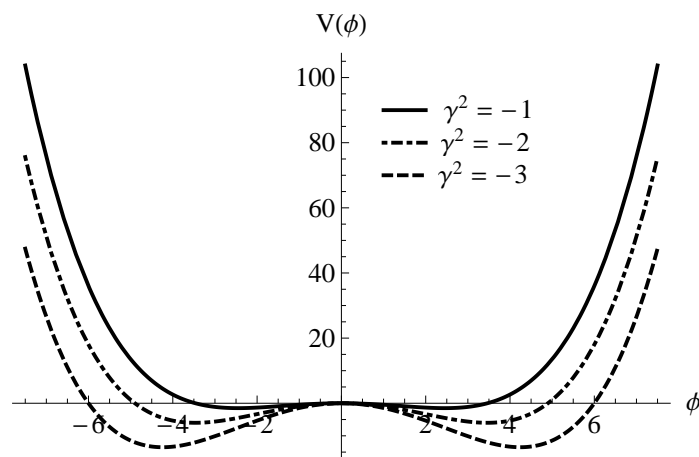


Fig. 2.1: Plot de $V(\phi)$ quando $\gamma^2 \geq 0$.

Fonte: O autor.

Fig. 2.2: Plot de $V(\phi)$ quando $\gamma^2 < 0$.

Fonte:O autor.

Nestes casos, concluímos que o vácuo da teoria está inicialmente em $\langle \phi \rangle = 0$ e nesse caso é simétrico sob a transformação (2.40). Para o caso, $\gamma < 0$, essa simetria é violada como apresentado na fig. (2.2).

Tomando, por simplicidade, a redefinição dos parâmetros:

$$\phi_0^2 \rightarrow -\frac{6\gamma^2}{\lambda}, \quad (2.41)$$

reescrevemos o potencial (2.38) como:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!}(\phi^2 - \phi_0^2)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 \quad (2.42)$$

onde o termo $(\lambda/4!)\phi_0^4$ é um fator constante.

De (2.42) verificamos que o potencial passa a ter dois mínimos, em $\phi = \pm\phi_0$. Portanto, vemos claramente que o estado de vácuo perdeu a simetria sob a transformação (2.40). Para o caso contínuo, a quebra de simetria do estado de vácuo pode ser explicada de forma análoga [35].

Capítulo 3

Modelos Topológicos

Tendo em mente os conceitos básicos da teoria clássica de campos, nesse capítulo, investigamos a teoria dos sólitons de dimensão $(1 + 1)$. Para isto, buscaremos discutir sobre os conceitos básicos dos sólitons, as soluções estáticas e algumas propriedades dessas soluções.

3.1 Definição de sóliton

Iniciamos nossa discussão com a teoria clássica de campos escalares no espaço de Minkowski. Conforme apresenta-se em teoria quântica de campos (TQC), as soluções clássicas serão o vácuo para o qual quantizamos nossa teoria [36]. Dessa forma, entenderemos que as soluções clássicas são um instrumento na compreensão de toda a teoria quântica. Com esta finalidade, buscamos, agora, estudar as equações de movimento de Euler-Lagrange, a saber:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (3.1)$$

As soluções dessa equação pode variar no espaço. Em princípio, para essas soluções possui importância física ela deve ter energia finita,

$$E = \int d^{\nu} x \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

em que $\mathcal{E} = T^0_0$. Além disso, buscamos estados de vácuo que são estáveis no tempo, em vez de converter para soluções triviais em tempos tardios. Dessa condição, podemos escrever:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{all \ x} \mathcal{E}(x, t) \neq 0 \quad (3.3)$$

onde esta é uma definição física de um sóliton.

Isso difere ligeiramente da definição física que envolve a exigência de que a superposição de dois sólitons seja um sóliton [25]. Assim, chamamos essas soluções menos restritivas que satisfazem as condições acima, de ondas solitárias.

Por simplicidade, definimos, portanto, os *sólitons* como um campo possuindo as seguintes características:

- (i) *Equação de Movimento não linear;*
- (ii) *Evolui no espaço-tempo sem sofrer deformação;*
- (iii) *Mantém sua forma constante após colidir com o outro.*

3.1.1 Modelo $\lambda\phi^4$: solução tipo kink

Para estudar os sólitons, ou de forma mais coerente, as ondas solitárias do modelo ϕ^4 ¹, consideramos como ponto de partida a densidade Lagrangiana do sistema, a saber:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (3.4)$$

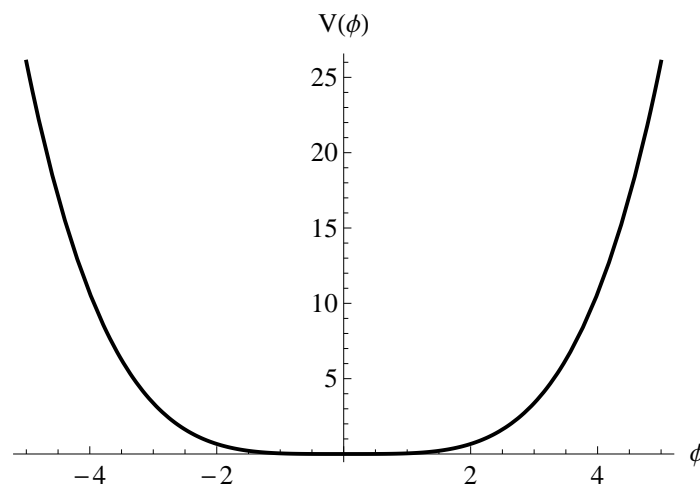


Fig. 3.1: Ilustração gráfica do potencial $\lambda\phi^4$.

Fonte:O autor.

Com isto, obtemos que a equação de movimento de Euler-Lagrange para o nosso “toy model” é dada por:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \lambda\phi^3 = 0. \quad (3.5)$$

¹Com assinatura métrica sendo $g_{\mu\nu} = (+, -)$.

O interesse físico nesse modelo consiste em encontrar as soluções dessa equação diferencial com energia finita [37]. Para isto, analisamos, de forma conveniente o tensor de energia-momento, dessa forma, aplicando uma translação no espaço-tempo na densidade Lagrangiana, obtemos que:

$$T^{\mu}_{\nu} = \partial^{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi)^2\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{\lambda}{4}\phi^4\delta^{\mu}_{\nu}. \quad (3.6)$$

Com isto, obtemos que a densidade de energia do modelo é descrita por:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (3.7)$$

Portanto, temos que o funcional de energia é dado por:

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right), \quad (3.8)$$

aqui a derivada com linha representa a derivada espacial do campo.

Vale ressaltar que até o momento estamos trabalhando no modelo com dimensão $(1+1)$. Vale, também, observar que a integral acima é positiva definida com energia nula no caso: $\phi = 0$. Entretanto, não estamos interessados em soluções de energia nula (trivial).

Buscamos encontrar as soluções do modelo com energia finita. Com isto, surge a pergunta: “É possível obter outras soluções com energia finita para este modelo?” Neste caso, não. Neste modelo, temos apenas um vácuo clássico.

É interessante notar que para obter soluções de energia finita devemos ter:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi = 0. \quad (3.9)$$

Devido à “falha” do modelo anterior, agora vamos, considerar uma teoria com dois estados de vácuo clássico. Ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2, \quad (3.10)$$

onde temos:

$$v = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, \quad (3.11)$$

com os parâmetro m^2 e λ positivos.

Ressaltamos, ainda, que a densidade Lagrangiana é invariante sob a $\phi \rightarrow -\phi$. No entanto,

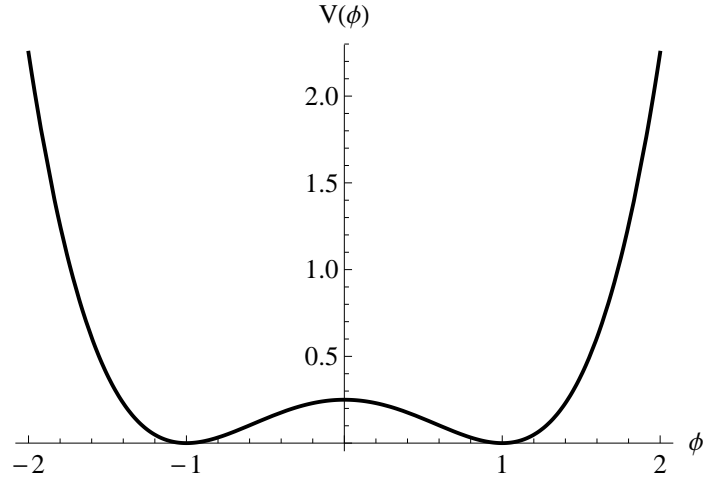


Fig. 3.2: Ilustração gráfica do potencial $\frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$ com $\lambda = v = 1$.
Fonte: O autor.

pode ser violada através de um potencial adequado $V(\phi)$ [35].

A equação clássica de movimento da teoria pode, portanto, ser reescrita como:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \lambda(\phi^2 - v^2)\phi = 0. \quad (3.12)$$

Nosso interesse particular se resume às soluções estáticas do sistema, que claramente satisfazem à equação:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \lambda(\phi^2 - v^2)\phi = 0, \quad (3.13)$$

onde notamos que está é uma equação diferencial não-linear.

Afim de construir o funcional de energia, obtemos que o tensor energia-momento do sistema é dado por:

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 \delta^\mu{}_\nu + \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \delta^\mu{}_\nu \quad (3.14)$$

Portanto, o funcional de energia para o caso estacionário é:

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Multiplicando, convenientemente, ambos os lados da Eq. (3.13) por ϕ' , temos que:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right] = 0, \quad (3.16)$$

então, percebemos, que a quantidade entre parênteses é constante com relação à x . Analisando esta quantidade em $x \rightarrow \infty$; nós vemos que este termo realmente desaparece. Disto segue que:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(\phi^2 - v^2). \quad (3.17)$$

Com isso, concluímos que:

$$\phi(x) = \pm v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right], \quad (3.18)$$

com x_0 sendo uma constante de integração. A solução apresentada anteriormente com o sinal positivo é conhecida como *kink*, enquanto a negativa é conhecida como *antikink*.

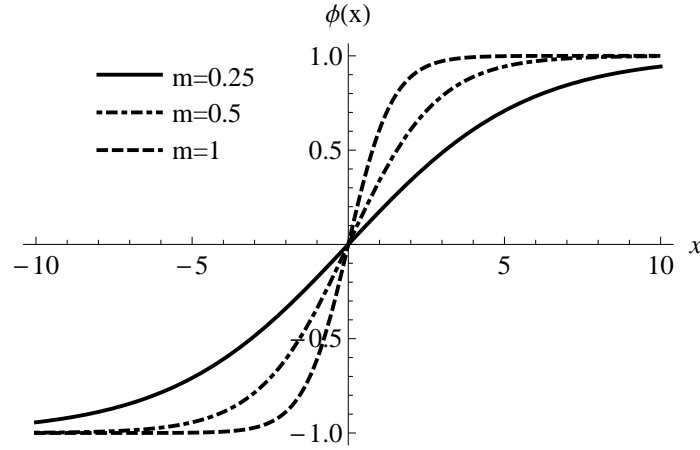


Fig. 3.3: Ilustração gráfica das solução tipo *kink* quando $v = 1$ e $x_0 = 0$.

Fonte:O autor.

De posse das soluções do tipo *kink* e *antikink* podemos facilmente obter que a densidade de energia do modelo é descrita por:

$$\mathcal{E}(x) = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right), \quad (3.19)$$

ou seja, a densidade de energia da teoria é a mesma para ambas soluções. É fácil notar que, essa densidade de energia concentra-se em uma região de largura $\sim m^{-1}$ e centrada em torno de x_0 . Fora dessa região, o campo é essencialmente indistinguível daquele no vácuo. Embora seja um vácuo diferente em lados opostos da curva, isso não é evidente para um observador local.

Por fim, vale ressaltar que a energia total do *kink* é finita e conhecida como sendo a massa

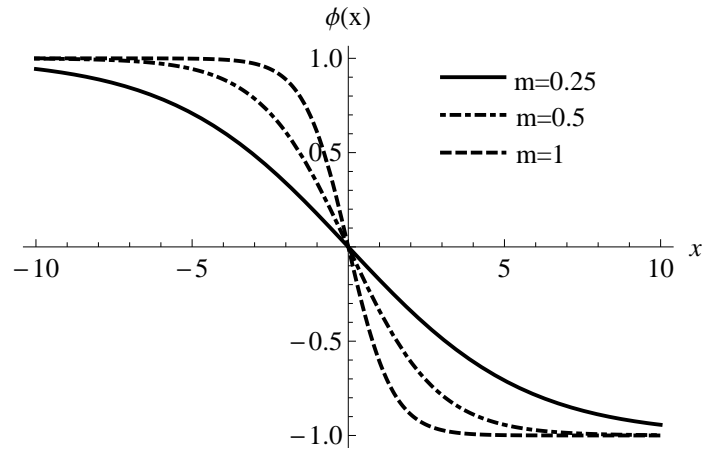


Fig. 3.4: Ilustração gráfica das solução tipo *antikink* quando $v = 1$ e $x_0 = 0$.
Fonte:O autor.

clássica deste. Nesse caso, temos que:

$$M_{cl} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{E}(x) = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda}. \quad (3.20)$$

Com isto, concluímos que o *kink* é portanto uma onda solitária legítima. Entretanto, o modelo não suporta soluções de interação do tipo *kink-kink* e do tipo *kink-antikink* pois não conservam sua forma quando $t \rightarrow \infty$. Logo, essas soluções não são sólitons verdadeiros pois não preservam sua forma após a colisão.

3.2 Índices topológicos

Na teoria dos sólitons, os índices topológicos são quantidades conservadas que em uma teoria quantizada torna-se um número quântico conservado, dessa forma, caracterizando o estado do sóliton [29]. É importante ressaltar que esses números quânticos tem uma natureza diferente das cargas conservadas de Noether ².

Devido a restrição na energia do sistema, os valores de ϕ quando $x \rightarrow \pm\infty$ devem ser estacionários. Com isso, podemos dividir o espaço das soluções em diferentes setores para os diferentes comportamentos assintóticos de ϕ [25]. Dessa forma, podemos encontrar para o modelo expresso em (3.10) as possibilidades apresentadas abaixo.

Conforme expresso na tabela (3.1), temos quatro possibilidades de combinação, ou seja, quatro setores topológicos. Dentre estes setores, dois correspondem as soluções triviais de

²As cargas conservadas de Noether estão associadas às simetrias contínua da Lagrangiana.

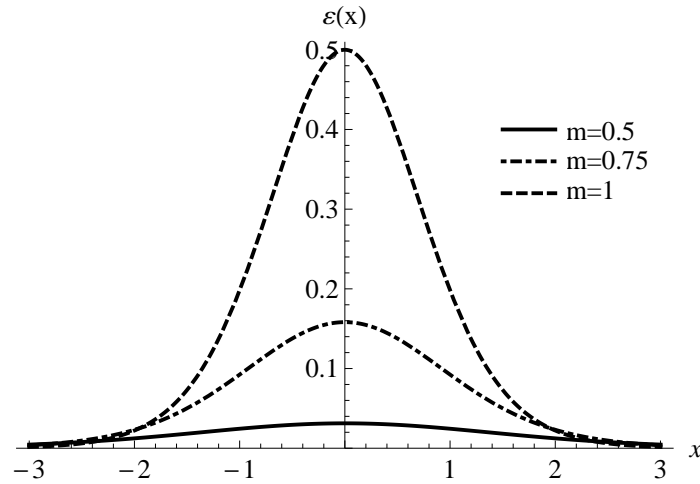


Fig. 3.5: Ilustração gráfica da densidade de energia da solução *kink* e *anti-kink* quando $\lambda = 1$ e $x_0 = 0$.

Fonte: O autor.

Tab. 3.1: Setores topológicos no modelo $\lambda\phi^4$.

Possibilidades	<i>Kink</i>	<i>Antikink</i>
1	$-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$	$-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$
2	$-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$	$+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$
3	$+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$	$-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$
4	$+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$	$+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$

Fonte: Rajaraman, 1982.

vácuos, conhecidos assim como setores de vácuo, estes setores são dados pelas combinações: $(-m/\sqrt{\lambda}, -m/\sqrt{\lambda})$ e $(+m/\sqrt{\lambda}, +m/\sqrt{\lambda})$ [25].

Para o modelo descrito por (3.10), todas as soluções de energia finita estão em um dos setores acima. Particularmente, a seguinte diferença

$$Q = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} [\phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty)] \quad (3.21)$$

é interpretada como a carga conservada, ou carga topológica do modelo. Onde o termo carga topológica deve-se ao fato dessa carga só depender das condições de contorno no infinito. Associada com essa carga temos uma densidade de carga descrita por:

$$\rho[\phi] = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.22)$$

onde quando integrada em todo espaço, $Q = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx$ recuperamos à Eq. (3.21).

Sabendo que a equação de continuidade deve ser respeitada [32], a saber:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.23)$$

então, temos que:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3.24)$$

ou seja,

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.25)$$

$$J_x = -\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (3.26)$$

Portanto, podemos construir uma corrente conservada como:

$$J^\mu = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (3.27)$$

com

$$\mu, \nu = 0, 1 \quad e \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Com isto, temos que a corrente (3.27) respeita a equação de continuidade, a saber:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \quad (3.29)$$

Por fim, ressaltamos que, como a construção de J^μ não utiliza as simetrias da Lagrangiana, definimos, portanto, J^μ como uma corrente topológica.

Capítulo 4

Compacton: Aplicação

4.1 A equação de KdV: sólitons

Conforme discutido anteriormente, um sóliton é uma onda solitária viajante que após sofrer uma colisão com outro sóliton emerge sem sofrer alterações. Os sólitons são soluções de equações diferenciais parciais que modelam fenômenos como as ondas de água ou ondas ao longo de uma cadeia de molas de massas anarmonicamente fraca.

A equação de Korteweg-de Vries (KdV) é o modelo genérico para o estudo de ondas não-linear em dinâmica dos fluídos, plasma, etc [38]. A equação KdV é descrita, matematicamente, como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (4.1)$$

Sua solução de onda solitária viajante pode ser escrita como [38, 39],

$$u(x, t) = \frac{1}{2}v \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}v^{1/2}(x - v \cdot t)\right), \quad (4.2)$$

essas soluções são representadas pela fig. (4.1).

Conforme discutido no capítulo anterior, postulamos que a colisão de dois sólitons preserva a estrutura dessas soluções, com isso em mente, simulando graficamente a colisão de duas ondas solitária representada pela solução (4.2) é possível observar que tal afirmação é verdadeira, conforme apresentamos em fig. (4.1).

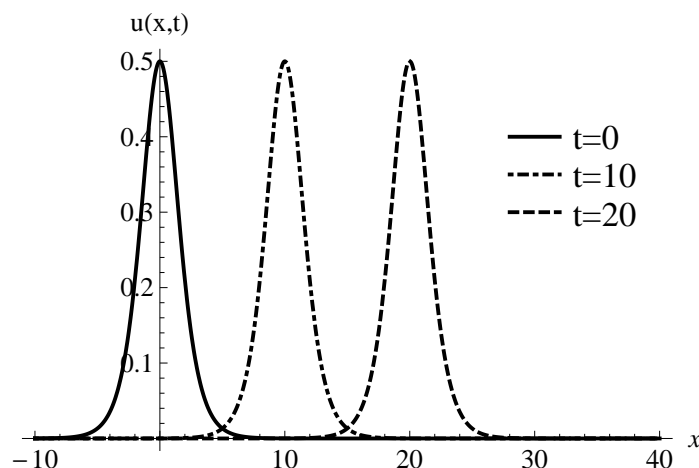


Fig. 4.1: Plot das soluções de onda solitária para determinados instantes de tempo.
Fonte:O autor.

4.2 A equação de KdV modificada: compactons

Consideramos a versão modificada da equação de KdV na forma [39], a saber:

$$u_t + (u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0. \quad (4.3)$$

Neste caso, é conveniente introduzir a mudança de variável $\xi = x - vt$ [38], com v sendo a velocidade da onda. Assim, obtemos que

$$-vu + u^2 + (u^2)_{\xi\xi} = D \quad (4.4)$$

onde D é uma constante de integração a ser determinada.

Afim de evitar soluções singulares, definimos $D = 0$ e reescrevemos (4.4) da seguinte forma

$$w_{\xi\xi} + w - vw^{1/2} = 0 \quad (4.5)$$

com $u^2 = w$.

A equação (4.5) se comporta às vezes como um oscilador quando $1 - vw^{-1/2} > 0$, isto é, $u^2 = w$ possui uma solução tipo periódica [12]. Com isso, assumimos o ansatz

$$w = u^2 = A^2 \cos^4(\omega\xi). \quad (4.6)$$

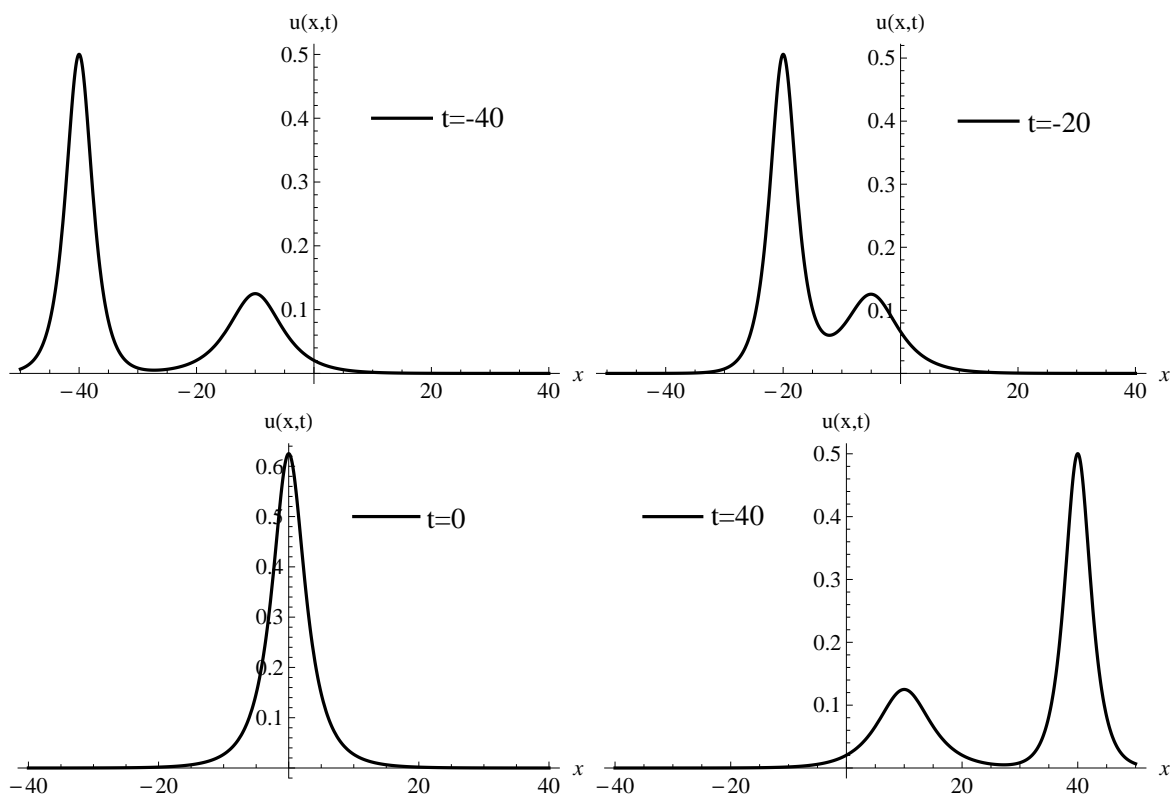


Fig. 4.2: Plot da colisão de dois sólitons.

Fonte:O autor.

Dessa forma, obtermos a expressão:

$$12A^2\omega^2 \cos^2(\omega\xi) - 16A^2\omega^2 \cos^4(\omega\xi) + A^2 \cos^4(\omega\xi) - vA \cos^2(\omega\xi) = 0. \quad (4.7)$$

Assim, obtermos o seguinte sistema de equações:

$$12A^2\omega^2 - vA = 0, \quad (4.8)$$

$$-16A^2\omega^2 + A^2 = 0. \quad (4.9)$$

Resolvendo o sistema acima, obtermos finalmente:

$$\omega = \frac{1}{4} \quad e \quad A = \frac{4}{3}v. \quad (4.10)$$

Portanto, temos que a solução da equação (4.3) é dada por:

$$u = w^{1/2} = \frac{4v}{3} \cos^2 \left[\frac{1}{4}(x - vt) \right]. \quad (4.11)$$

Por uma inspeção cuidadosa, vemos que w pode tender para um valor muito pequeno ou mesmo zero, como resultado, $1 - vw^{1/2}$ tende ao infinito negativo, e a equação (4.5) apresentará um comportamento tipo exponencial, com isso, a “cauda” do sóliton desaparece completamente nas extremidades [40].

Com isso, temos que:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{4v}{3} \cos^2 \left[\frac{1}{4}(x - vt) \right], & \text{se } |x - vt| \leq 2\pi, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.12)$$

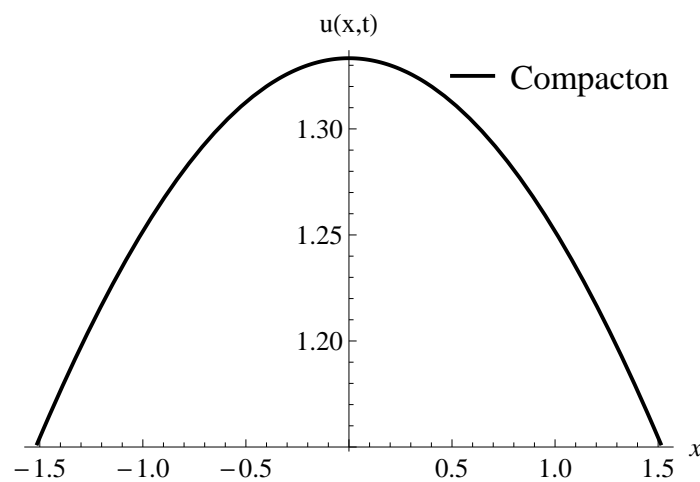


Fig. 4.3: Plot da solução tipo compacton da equação KdV.
Fonte:O autor.

A equação anterior descreve uma onda compacta, diferentemente dos sólitons (4.2), a solução tipo compacton só existe no intervalo $|x - vt| \leq 2\pi$. Dessa forma, notamos uma descontinuidade (“quina”) da solução quando $|x - vt| \rightarrow 2\pi$.

Capítulo 5

O Modelo $O(N)$ e o Modelo Sigma $O(N)$ Não-Linear

Neste capítulo, iremos dissertar sobre o modelo $O(N)$ e o caso particular conhecido como modelo sigma $O(N)$ não-linear. Uma vez postulado os principais conceitos, discutiremos sobre a solução de vácuo clássico e a solução de energia localizada do modelo sigma $O(3)$, por fim, também investigaremos a estabilidade das soluções do modelo sigma $O(3)$ não-linear.

5.1 O modelo $O(N)$

Afim de estudar uma teoria análoga à teoria que descreve o ferromagnetismo de Heisenberg, consideramos a densidade Lagrangiana descrita por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial^\nu \vec{\phi} - V(\vec{\phi}), \quad (5.1)$$

onde $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$, ou seja, é entendido como sendo um vetor com N componentes no espaço D dimensional. Vamos impor um vínculo $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$ ao nosso modelo. Tal modelo descrito pela Lagrangiana (5.1) e restrito ao vínculo anterior é chamado de modelo $O(N)$ [42].

5.2 O modelo sigma $O(N)$ não-linear

O modelo sigma não-linear é um caso particular do modelo $O(N)$, ou seja, para o modelo sigma não-linear devemos ter $V(\vec{\phi}) = 0$ [43]. Assim, temos a dinâmica do modelo sendo

descrita por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial^\nu \vec{\phi}. \quad (5.2)$$

Dessa forma, considerando o vínculo anterior ($\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$) escrevemos à ação como:

$$S = \int dt \int d^2r \left[\frac{1}{2} \partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial^\nu \vec{\phi} + \lambda (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - 1) \right]. \quad (5.3)$$

A equação de movimento para o campo é obtida aplicando o princípio variacional de Euler-Lagrange à ação do modelo. Com isto, obtemos à equação:

$$(\partial_\nu \partial^\nu + \lambda) \cdot \vec{\phi} = 0. \quad (5.4)$$

Com isto, concluímos que o multiplicador de Lagrange têm a forma:

$$\lambda(x, t) = -\vec{\phi} \cdot \partial_\nu \partial^\nu \vec{\phi}. \quad (5.5)$$

Reescrevendo a expressão (5.4) [44], obtemos finalmente:

$$\partial_\nu \partial^\nu \vec{\phi} - (\partial_\nu \partial^\nu \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) \vec{\phi} = 0. \quad (5.6)$$

essa equação admite soluções não singulares e não triviais no caso de $(2+1)D$ [25, 26], conforme veremos a seguir.

Claramente, o funcional de energia do modelo para soluções estáticas em $(2+1)D$ é dado por:

$$E[\vec{\phi}] = \frac{1}{2} \int d^2r \partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial^\nu \vec{\phi}, \quad \text{com } \nu = 1, 2. \quad (5.7)$$

afim de evitar ambiguidade com os índices do campo, utilizamos os índices gregos como índices unicamente “espaciais”, ou seja, ν só pode assumir valores 1 ou 2.

5.2.1 A solução de vácuo clássico

Notamos que as soluções de vácuo clássico são descritas por:

$$\partial_\nu \vec{\phi}(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r}, \quad (5.8)$$

disto temos, $\vec{\phi}(\vec{r}) = \vec{\phi}^{(0)}$, um vetor unitário no espaço interno. Note que, como $\vec{\phi}^{(0)}$ é independente de \vec{r} na solução de vácuo clássico, $\vec{\phi}^{(0)}$ pode assumir qualquer direção no espaço interno. Dessa forma, temos infinitas soluções degeneradas com valor de energia $E = 0$ [25].

5.2.2 A solução de energia localizada

Neste caso, estamos interessado nas soluções do modelo que apresentam uma configuração de energia finita e não nula, ou seja, soluções solitônicas. Dessa forma, a restrição (5.8) não será satisfeita. Retornando à equação (7.32), e considerando coordenadas polares, vemos que ela deve satisfazer as novas condições:

$$r \|\text{grad } \vec{\phi}\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } r \rightarrow \infty, \quad (5.9)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\phi}(\vec{r}) = \vec{\phi}^{(0)} \quad (5.10)$$

onde $\vec{\phi}^{(0)}$ é novamente algum vetor unitário no espaço interno. Note que, como nós tendemos ao infinito no espaço de coordenadas em diferentes direções, $\vec{\phi}$ deve se aproximar sempre do mesmo limite $\vec{\phi}^{(0)}$. Caso contrário, $\vec{\phi}$ vai depender da coordenada angular θ mesmo em $r = \infty$, e a componente angular do gradiente, $(1/r)(\partial\vec{\phi}/\partial\theta)$, não vai satisfazer (5.40) [25].

Já que $\vec{\phi}(\vec{r})$ se aproxima do valor $\vec{\phi}^{(0)}$ em todos os pontos do infinito, o plano de coordenadas físicas R^2 é essencialmente compactado em uma superfície esférica, que denominamos por $S_2^{(phy)}$. Isso é, o plano R^2 pode ser guardado em uma superfície esféricas, com o círculo no infinito reduzido para o pólo norte da esfera. Enquanto isso, o espaço interno, isto é, o espaço dos campos ϕ_i , sujeito ao vínculo $\sum_i \phi_i^2 = 1$, é também uma superfície esférica de raio unitário, que vamos chamar isso $S_2^{(int)}$. Então, qualquer configuração estática de energia finita para $\vec{\phi}(\vec{r})$ é apenas um mapeamento de $S_2^{(phy)}$ para $S_2^{(int)}$ [6, 25, 26, 29].

Consideramos agora, um importante resultado de topologia que será usado na classificação dos sólitons estudados a seguir. “*Todo mapeamento de uma superfície esférica S_2 em outra S_2 pode ser classificado em classes ou setores de homotopia¹. Mapeamento pertencentes a um dado setor podem ser deformados continuamente em outros do mesmo setor. Por outro lado, mapeamento pertencentes a dois setores distintos não podem ser deformados continuamente um no outro. Adicionalmente, há infinitos e enumeráveis setores e estes*

¹Duas funções contínuas de um espaço topológico para outro são chamadas de homotópicas se uma pode ser “continuamente deformada”na outra, tal deformação sendo chamada de homotopia entre as duas funções.

podem ser caracterizados por números inteiros positivos, negativos ou zero”[26]. De forma mais precisa, essa classe de homotopia forma um grupo de inteiros, formalmente tudo isso é escrito na forma compacta

$$\pi_2(S_2) = Z \quad (5.11)$$

onde $\pi_n(S_n)$ representa o grupo de homotopia associado ao mapeamentos $S_n \rightarrow S_m$, e Z é um grupo de inteiros.

De forma didática, para exemplificar, consideramos o mapeamento de um círculo em um círculo. Ou seja, considerando um círculo S_1 , definido por um ângulo ξ e módulo 2π , mapeado em outro círculo S_1 , definido por um ângulo Λ com módulo 2π . Nesse caso, o mapeamento é estabelecido por uma função contínua $\xi(\Lambda)$ de módulo 2π . Considerando os mapeamentos:

$$\Lambda_0(\xi) = 0, \quad \text{para todo } \xi \quad (5.12)$$

e

$$\Lambda'_0(\xi) = \begin{cases} \lambda\xi & \text{para } 0 \leq \xi < \pi \\ \lambda(2\pi - \xi) & \text{para } \pi \leq \xi < 2\pi. \end{cases} \quad (5.13)$$

onde λ é um parâmetro real pertencente ao intervalo $[0, 1]$. Com isto, vemos claramente que variando o parâmetro λ continuamente o segundo mapeamento pode ser deformado continuamente no primeiro. Esses mapeamentos são, portanto, pertencentes ao mesmo setor. Abaixo, mostramos, à ilustração desse mapeamento.

Considerando um outro mapeamento, descrito por:

$$\Lambda_1(\xi) = \xi \quad \forall \xi, \quad (5.14)$$

conforme mostrado na fig. (5.2), observamos que o mapeamento (5.14) não pode ser deformado em nenhum dos mapeamentos anteriores, sem que o círculo contínuo corte o tracejado. Claramente, com isso, se percebe que ele não pode ser deformado continuamente em (5.12) e (5.13).

É válido ressaltar que em (5.14) o círculo contínuo dar uma volta completa no círculo tracejado, enquanto que nos mapeamentos anteriores esse número de volta é nulo. De fato, o inteiro que caracteriza cada setor associado a um mapeamento é o equivalente ao “número de voltas”, também chamado de *winding number* ou *índice topológico* [25, 26].

O *winding number* dos mapeamentos anteriores, é facilmente calculado pela relação des-

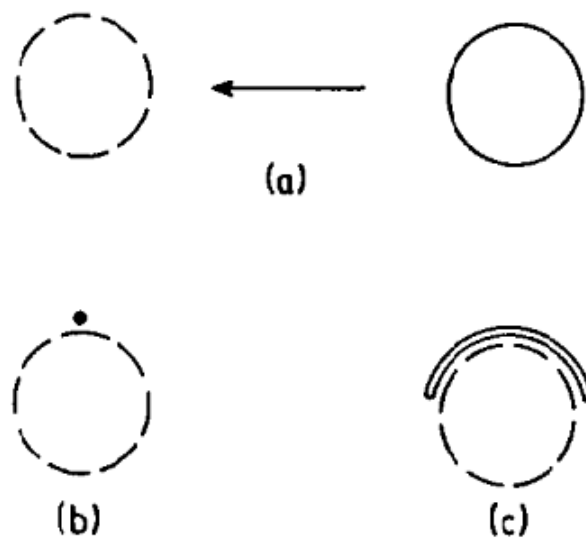


Fig. 5.1: a) Ilustração de um mapeamento de um círculo, indicado pela linha contínua, em outro círculo, indicado pela linha tracejada. b) Representação de um mapeamento trivial (eq. (5.12)), onde o primeiro círculo é mapeado em um único ponto do segundo. c) Mapeamento não trivial (eq. (5.13)).

Fonte: Rajaraman, 1982.

crita por:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Lambda}{d\xi} d\xi, \quad (5.15)$$

disto, vemos facilmente, que $\mathcal{N} = 0$ para as expressões (5.12) e (5.13). Para o mapeamento (5.14), temos:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi = 1. \quad (5.16)$$

Note que há inúmeras formas de prescrever $\Lambda(\xi)$, tal que, ξ dê um número de voltas arbitrário em torno de Λ . É claro, que ao “*winding*” o segundo círculo um número arbitrário de vezes é possível gerar um infinito enumerável de classes homotópicas, com isso, generalizamos à expressão (5.14) para:

$$\Lambda_n(\xi) = n\xi \quad (5.17)$$

em que n é o índice topológico.

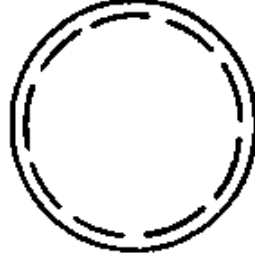


Fig. 5.2: Mapeamento da eq. (5.14).
Fonte: Rajaraman, 1982.

Ressaltamos que valores negativos para o *winding number* podem ser obtidos fazendo um mapeamento em que $\xi \rightarrow -\xi$. O inteiro que classifica as soluções do modelo sigma como pertencentes a determinados setores pode ser obtido por uma generalização do conceito de “*winding number*”.

Retornaremos, agora, à discussão sobre as soluções localizadas do modelo, entretanto, utilizaremos os argumentos topológicos apresentados anteriormente, uma vez que as configurações estáticas com energia finita, podem de forma análoga ser classificadas em setores.

Portanto, para o modelo sigma $O(3)$, escrevemos o “*winding number*” como sendo

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2r \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \cdot (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi}), \quad (5.18)$$

onde temos que:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) = (1, 2); \\ -1 & \text{se } (i, j) = (2, 1); \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.19)$$

É válido ressaltar que a integral (5.18) deve se estender sobre todo o espaço R^2 . Analisando essa expressão considerando que a casca esférica no espaço interno pode ser descrita por duas variáveis generalizadas (χ_1, χ_2) , tais como dois ângulos, no lugar de três “coordenadas não generalizadas” sujeita ao restrição $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$. Temos que:

$$dS_k^{int} = d^2\chi \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kbc} \frac{\partial \phi_b}{\partial \chi^i} \frac{\partial \phi_c}{\partial \chi^j} \right) \quad (5.20)$$

Analisando a expressão para Q no modelo, chegamos ao resultado:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\pi} \int d^2r \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kbc} \phi_k \frac{\partial \phi_b}{\partial x^i} \frac{\partial \phi_c}{\partial x^j} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2r \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kbc} \phi_k \frac{\partial \phi_b}{\partial \chi_n} \frac{\partial \chi_n}{\partial x^i} \frac{\partial \phi_c}{\partial \chi_m} \frac{\partial \chi_m}{\partial x^j}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Tomando à mudança de variável $(x_1, x_2) \mapsto (\chi_1, \chi_2)$, chegamos facilmente à expressão:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2\chi \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{nm} \varepsilon_{kbc} \frac{\partial \phi_b}{\partial \chi_n} \frac{\partial \phi_c}{\partial \chi_m} \right), \quad (5.22)$$

ou seja,

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \phi_k \cdot dS_k^{(int)} = \frac{1}{4\pi} \int dS^{(int)}. \quad (5.23)$$

onde consideramos que ϕ_k é um vetor unitário normal a superfície $S_k^{(int)}$. É válido ressaltar que S^{int} é a superfície de uma esfera de raio unitário, com área 4π . Portanto, podemos observar que Q em (5.18) dá o número de vezes que a esfera no espaço interno é “coberta” quando mapeamos o espaço R^2 em S^{int} [25].

À carga topológica Q , calculada anteriormente, pode ser associada a uma corrente topológica. Essa corrente é conservada trivialmente, ou seja, sem o uso das equações de movimento. Para isso, podemos escrever Q como a integral da componente temporal de j_μ :

$$Q = \int d^2r j_0 = \frac{1}{8\pi} \int d^2r \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \cdot (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi}) = \frac{1}{8\pi} \int d^2r \varepsilon_{0\mu\nu} \vec{\phi} \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}), \quad (5.24)$$

onde definimos, convenientemente:

$$j_\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \vec{\phi} \cdot (\partial_\nu \vec{\phi} \times \partial_\lambda \vec{\phi}). \quad (5.25)$$

Vejamos como a corrente é conservada trivialmente, ou seja, devemos mostrar que podemos provar que $\partial^\mu j_\mu = 0$ independente das equações de movimento. Para isto, notamos que:

$$\begin{aligned} \partial^\mu j_\mu &= \frac{1}{8\pi} \partial^\mu [\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \vec{\phi} \cdot (\partial^\nu \vec{\phi} \times \partial^\lambda \vec{\phi})] \\ &= \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} [\partial^\mu \vec{\phi} \cdot (\partial^\nu \vec{\phi} \times \partial^\lambda \vec{\phi}) + \vec{\phi} \cdot (\partial^\mu \partial^\nu \vec{\phi} \times \partial^\lambda \vec{\phi} + \partial^\nu \vec{\phi} \times \partial^\mu \partial^\lambda \vec{\phi})], \end{aligned} \quad (5.26)$$

note que os termos de derivada mista (simétrica) se anulam, pois estão somados com um

tensor antissimétrico. Com isto, chegamos:

$$\partial^\mu j_\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \begin{vmatrix} \partial^\mu \phi_1 & \partial^\mu \phi_2 & \partial^\mu \phi_3 \\ \partial^\nu \phi_1 & \partial^\nu \phi_2 & \partial^\nu \phi_3 \\ \partial^\lambda \phi_1 & \partial^\lambda \phi_2 & \partial^\lambda \phi_3 \end{vmatrix} = \frac{3}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\mu \phi_1 \partial^\nu \phi_2 \partial^\lambda \phi_3, \quad (5.27)$$

ou seja,

$$\partial^\mu j_\mu = \frac{3}{4\pi} \begin{vmatrix} \partial^0 \phi_1 & \partial^0 \phi_2 & \partial^0 \phi_3 \\ \partial^1 \phi_1 & \partial^1 \phi_2 & \partial^1 \phi_3 \\ \partial^2 \phi_1 & \partial^2 \phi_2 & \partial^2 \phi_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.28)$$

Ressaltamos que a última igualdade é facilmente verificada se impusermos o vínculo nos campos, dessa forma podemos fazer isto escrevendo $\vec{\phi}$ como

$$\vec{\phi} = (\sin f \cos g, \sin f \sin g, \cos f), \quad (5.29)$$

onde f e g são funções arbitrária das coordenadas espaço-temporais.

Partindo da identidade:

$$\int d^2r [(\partial_\mu \vec{\phi} \pm \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \pm \varepsilon_{\mu\sigma} \vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi})] \geq 0 \quad (5.30)$$

a validade dessa identidade é verificada tendo em mente que o integrando é simplesmente o produto escalar do vetor $(\partial_\mu \vec{\phi} \pm \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi})$ com ele mesmo. Dessa forma, a integral anterior é sempre positiva definida ou nula.

Expandindo (5.30), obtemos facilmente à expressão:

$$\int d^2r [(\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\phi}) + \varepsilon_{\mu\nu} (\vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \cdot \varepsilon_{\mu\sigma} (\vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi})] \geq \pm 2 \int d^2r [\varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi})]. \quad (5.31)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu} (\vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \cdot \varepsilon_{\mu\sigma} (\vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi}) &= \delta_{\nu\sigma} (\varepsilon_{abc} \phi_b \partial_\nu \phi_c) (\varepsilon_{ade} \phi_d \partial_\nu \phi_e) \\ &= \delta_{\nu\sigma} (\delta_{bd} \delta_{ce} - \delta_{be} \delta_{cd}) (\phi_b \partial_\nu \phi_c) (\phi_d \partial_\nu \phi_e) \\ &= (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) (\partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial_\nu \vec{\phi}) - (\vec{\phi} \cdot \partial_\nu \vec{\phi}) (\vec{\phi} \cdot \partial_\nu \vec{\phi}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

lembrando do vínculo, $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$, obtemos que $\vec{\phi} \cdot \partial_\nu \vec{\phi} = 0$. Dessa forma, chegamos à

$$\varepsilon_{\mu\nu}(\vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \cdot \varepsilon_{\mu\sigma}(\vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi}) = \partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial_\nu \vec{\phi} \quad (5.33)$$

Reescrevendo (5.31), temos que:

$$\int d^2r (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\phi}) \geq \pm \int d^2r \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \cdot (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \quad (5.34)$$

$$(5.35)$$

Utilizando a desigualdade acima, e substituindo em (7.32), chegamos a um importante resultado:

$$E \geq 4\pi|Q|. \quad (5.36)$$

essa desigualdade é uma limitação por baixo para a energia, ou seja, essa expressão determina um mínimo para o funcional quando a configuração pertence a um dado setor Q [25]. Essa minimização é feita em cada setor separadamente, tendo em mente que configurações de um setor não podem ser deformadas continuamente nas de outro. Para um dado setor Q , a energia é minimizada quando a igualdade da equação (5.36) for satisfeita, ou seja

$$\partial_\mu \vec{\phi} = \mp \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi} \quad (5.37)$$

esse limite inferior de energia é conhecido como limite de Bogomol'nyi, e a equação (5.37), é a conhecida equação de Bogomol'nyi do modelo [45, 46].

Ressaltamos que qualquer configuração que satisfaça à equação (5.37) e o vínculo do modelo $O(N)$ minimiza a energia em um dado setor, como consequência, a expressão anterior também satisfaz a equação de movimento (5.6), conforme veremos a seguir.

Afim de demonstrar que a expressão (5.37) satisfaz (5.6), iniciaremos aplicando ∂_μ em ambos os lados de (5.37), dessa forma, chegamos à:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\mu \vec{\phi} &= \mp \partial_\mu (\varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi}) \\ &= \mp [\varepsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu \vec{\phi}) \times (\partial_\nu \vec{\phi}) + \varepsilon_{\mu\nu} \vec{\phi} \times (\partial_\mu \partial_\nu \vec{\phi})] \end{aligned} \quad (5.38)$$

lembrando que o último termo é identicamente nulo e substituindo (5.37) na expressão an-

terior obtemos que:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \partial_\mu \vec{\phi} &= \mp \varepsilon_{\mu\nu} (\mp \varepsilon_{\mu\sigma} \vec{\phi} \times \partial_\sigma \vec{\phi}) \times (\partial_\nu \vec{\phi}) \\ &= \delta_{\nu\sigma} [\partial_\sigma \vec{\phi} (\vec{\phi} \cdot \partial_\nu \vec{\phi}) - \vec{\phi} (\partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial_\sigma \vec{\phi})].\end{aligned}\quad (5.39)$$

Note que como $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$, temos que :

$$\vec{\phi} \cdot \partial_\nu \vec{\phi} = 0 \quad (5.40)$$

e

$$\partial_\nu \vec{\phi} \cdot \partial^\nu \vec{\phi} + \vec{\phi} \cdot \partial_\nu \partial^\nu \vec{\phi} = 0 \quad (5.41)$$

Substituindo (5.40) e (5.41) em (5.39), concluímos finalmente que:

$$\partial_\nu \partial^\nu \vec{\phi} - \vec{\phi} (\vec{\phi} \cdot \partial_\nu \partial^\nu \vec{\phi}) = 0 \quad (5.42)$$

como vimos anteriormente, essa expressão é a equação de movimento do modelo sigma $O(3)$.

É válido ressaltar que todo campo que satisfaz a equação (5.37) é solução de (5.6), entretanto o inverso não é verdadeiro. Em princípio, podem existir soluções para a equação de movimento que não satisfaçam (5.37). Tais soluções não representariam mínimos absolutos da energia no correspondente setor Q , mas possivelmente algum mínimo local [25, 26, 45, 46].

Retornando à equação (5.37), notamos que ela pode ser bastante simplificada através de uma mudança de variável. Lembrando do vínculo, $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$, vemos que $\vec{\phi}$ formam uma superfície esférica $S_2^{(int)}$ de raio unitário, portanto, fazendo uma projeção estereográfica dessa superfície esférica em um plano descrito pelas coordenadas (ξ_1, ξ_2) , temos que:

$$\xi_1 = \frac{2\phi_1}{1 - \phi_3} \quad (5.43)$$

e

$$\xi_2 = \frac{2\phi_2}{1 - \phi_3}, \quad (5.44)$$

onde o plano de projeção, $\{\xi_1, \xi_2\}$, é paralelo ao plano $\{\phi_1, \phi_2\}$. É válido ressaltar que o plano de projeção contém o pólo sul da esfera, ou seja, o ponto $(0, 0, -1)$ no espaço interno [25].

Definimos, convenientemente, a variável complexa:

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2 = \frac{2(\phi_1 + i\phi_2)}{1 - \phi_3} = \frac{2\phi}{1 - \phi_3} \quad (5.45)$$

onde ϕ é definido como:

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 \quad (5.46)$$

Com isto, note que:

$$\partial_1 \xi = 2\partial_1 \left[\frac{\phi_1 + i\phi_2}{1 - \phi_3} \right] \quad (5.47)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \partial_1 \xi &= 2 \frac{\partial_1 \phi}{1 - \phi_3} + \frac{2\phi \partial_1 \phi_3}{(1 - \phi_3)^2} \\ &= \frac{2}{(1 - \phi_3)^2} (\partial_1 \phi + \phi \partial_1 \phi_3 - \phi_3 \partial_1 \phi) \\ &= \frac{2}{(1 - \phi_3)^2} (\partial_1 \phi + \phi \overleftrightarrow{\partial}_1 \phi_3). \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde $\phi \overleftrightarrow{\partial}_1 \phi_3 \equiv \phi \partial_1 \phi_3 - \phi_3 \partial_1 \phi$.

Retornando à equação de Bogomol'nyi, notamos que:

$$\partial_1 \vec{\phi} = \mp \phi \times \partial_2 \vec{\phi} \quad (5.49)$$

e

$$\partial_2 \vec{\phi} = \pm \vec{\phi} \times \partial_1 \vec{\phi}, \quad (5.50)$$

em termos das componentes de $\vec{\phi}$ teríamos seis equações, entretanto, reescrevemos, convenientemente, essas equações como:

$$\partial_1 \phi = \pm i \phi \overleftrightarrow{\partial}_2 \phi_3 \quad (5.51)$$

e

$$\partial_2 \phi = \pm i \phi \overleftrightarrow{\partial}_2 \phi_3 \quad (5.52)$$

Substituindo (5.51) e (5.52) em (6.31), chegamos à

$$\partial_1 \xi = \pm i \partial_2 \xi \quad (5.53)$$

que em termos de ξ_1 e ξ_2 fica:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} = \pm \frac{\partial \xi_2}{\partial x^2} \quad (5.54)$$

e

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x^2} = \pm \frac{\partial \xi_2}{\partial x^1}. \quad (5.55)$$

As equações (5.54) e (5.55) são conhecidas como condição de Cauchy-Riemann para que ξ seja uma função analítica se $z = x^1 + ix^2$ ou $z^* = x^1 - ix^2$. Portanto, qualquer função analítica $\xi(z)$ ou $\xi(z^*)$ satisfaz (5.37) e, como consequência, também satisfaz as equações de movimento (5.6) quando reescrita em termos das variáveis ϕ_i e \vec{r} .

Dessa forma, concluímos que as expressões matemática para a energia e para a carga topológica são, respectivamente:

$$E = \int d^2 r \frac{|d\xi/dz|^2}{(1 + |\xi|^2/4)^2} \quad \text{e} \quad |Q| = \frac{E}{4\pi}. \quad (5.56)$$

Analisando um protótipo de solução para um $|Q|$ positivo e arbitrário dado por

$$\xi(z) = \frac{(z - z_0)^n}{\lambda^n}, \quad (5.57)$$

onde n é um inteiro positivo, λ um número real e z_0 um número complexo, todos arbitrário. Com $\xi(z)$ descrito por (6.70) é uma função analítica, os resultados todos asseguram que essa função fornece uma solução exata para a equação de movimento quando reescrita em termos dos campos ϕ_i e de x^μ [25].

Considerando (6.70) obtemos que a carga topológica do modelo pode ser descrita por:

$$|Q| = \frac{1}{4\pi} \int d^2 r \frac{n^2 |z - z_0|^{2n-2} \lambda^{2n}}{(\lambda^{2n} + |z - z_0|^{2n}/4)^2}. \quad (5.58)$$

Tomando, por conveniência, a transformação:

$$z - z_0 = \rho \exp(i\theta) \quad (5.59)$$

e

$$d^2r = \rho d\rho d\theta, \quad (5.60)$$

reescrevemos (5.58) como:

$$\begin{aligned} |Q| &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{n^2 \lambda^{2n} \rho^{2n-1}}{(\lambda^{2n} + \rho^{2n}/4)^2} d\rho d\theta \\ |Q| &= \frac{n^2 \lambda^{2n}}{2} \int_0^\infty \frac{\rho^{2n-1}}{(\lambda^{2n} + \rho^{2n}/4)^2} d\rho \\ |Q| &= \frac{n^2 \lambda^{2n}}{2} \frac{2\lambda^{-2n}}{n} = n. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Assim, concluímos que $E = 4\pi|Q| = 4\pi n$, ou seja, finita, como previsto. Dessa forma, chegamos à soluções exatas que são tipo sólitons. As constantes λ e z_0 estão relacionadas, respectivamente, ao tamanho e a localização das soluções. É válido notar que o fato de que as soluções existem para λ e z_0 arbitrário, e a energia e a carga topológica não dependerem desses parâmetros reflete a propriedade do sistema em questão ser invariante de escala e invariante por translação. Note que (7.32) é invariante sob transformações do tipo $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0$ e $\vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r}$.

*

Capítulo 6

Sólitons no modelo sigma- $O(3)$

Nesse capítulo, discutiremos a dinâmica do modelo sigma- $O(3)$ na presença dos campos de *gauge* governado pelos termos de Chern-Simons com acoplamento mínimo e Maxwell-Chern-Simons com acoplamento não-mínimo. Com auxílio de argumentos topológicos, apresentados nos capítulos anteriores, iremos discutir as soluções do campo variável para ambos os modelos e revisamos os resultados numéricos e gráficos para ambos os casos, conforme já apresentado na literatura especializada.

6.1 O modelo sigma com termo de Chern-Simons

Neste modelo, consideramos a densidade Lagrangeana [6]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \vec{\phi} \cdot D^\mu \vec{\phi} + \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\lambda} - \frac{1}{2\kappa^2} (1 + \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^3, \quad (6.1)$$

onde $\vec{\phi}$ é um vetor de três componentes unitário no espaço interno, ou seja

$$\vec{\phi} = \phi_i \hat{n}_i, \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \quad (6.2)$$

e

$$\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1. \quad (6.3)$$

Por convêniencia, nesse trabalho, consideramos a assinatura métrica como sendo $g_{\mu\nu} = (+, -, -)$ e a velocidade da luz e a constante de Planck em unidades naturais. Nesse caso, o termo de Chern-Simons possui dimensão de inverso de massa, e o fator $1/2\kappa^2$ em frente do termo de potencial é escolhido para ter um limite de Bogomol'nyi, esse limite será utilizado

para a descrição das soluções solitônicas do modelo [6].

A derivada covariante $D_\mu \vec{\phi}$ é definida como:

$$D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} + A_\mu \hat{n}_3 \times \vec{\phi} \quad (6.4)$$

A Lagrangiana (6.1) é invariante sob uma rotação ao redor do eixo \hat{n}_3 . De fato, podemos usar a identidade:

$$\begin{aligned} D_\mu \vec{\phi} \cdot D^\mu \vec{\phi} &= (\partial_\mu \vec{\phi} + A_\mu \hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot (\partial_\rho \vec{\phi} + A_\rho \hat{n}_3 \times \vec{\phi}) g^{\rho\mu} \\ &= (\partial_\mu \phi_1 - A_\mu \phi_2, \partial_\mu \phi_2 + A_\mu \phi_1, \partial_\mu \phi_3) \cdot (\partial_\rho \phi_1 - A_\rho \phi_2, \partial_\rho \phi_2 + A_\rho \phi_1, \partial_\rho \phi_3) g^{\rho\mu} \\ &= (\partial_\mu \phi_1 - A_\mu \phi_2) \cdot (\partial^\mu \phi_1 - A^\mu \phi_2) + (\partial_\mu \phi_2 + A_\mu \phi_1) \cdot (\partial^\mu \phi_2 + A^\mu \phi_1) + \partial_\mu \phi_3 \cdot \partial^\mu \phi_3 \\ &= |(\partial_\mu \phi_1 - A_\mu \phi_2) + i(\partial_\mu \phi_2 + A_\mu \phi_1)|^2 + \partial_\mu \phi_3 \cdot \partial^\mu \phi_3 \\ &= |(\partial_\mu + iA_\mu)(\phi_1 + i\phi_2)|^2 + \partial_\mu \phi_3 \cdot \partial^\mu \phi_3, \end{aligned} \quad (6.5)$$

para vê a natureza local $U(1)$. É fácil notar, ainda, que o potencial em (6.1) possui dois mínimos degenerado em $\phi_3 = \pm 1$, como consequência do vínculo do modelo ($\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$), obtemos que $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Como resultado, a simetria local $SO(2)$ (ou $U(1)$) não é quebrada espontaneamente. É válido ressaltar que a dinâmica do campo de Gauge é somente governada pelo termo de Chern-Simons, isto é justificável no limite de comprimento de onda longo onde o termo maxwell sendo um termo derivada dupla pode ser descartado da ação, se comparado com o termo de Chern-Simons.

Considerando, agora, a Lagrangiana (6.1) investigamos à equação de movimento do modelo. Dessa forma, tendo em mente a equação (7.30), temos para o campo de Gauge as expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\rho} &= \frac{1}{2} \delta_{\mu\rho} (\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot D^\mu \vec{\phi} + \frac{1}{2} D_\mu \vec{\phi} \cdot \delta_{\beta\rho} (\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) g^{\beta\mu} + \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \delta_{\rho\mu} F_{\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot D^\rho \vec{\phi} + \frac{1}{2} (\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot D^\rho \vec{\phi} + \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\rho\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \\ &= (\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot D^\rho \vec{\phi} + \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\rho\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \end{aligned} \quad (6.6)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\xi A_\rho)} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \delta_{\lambda\rho} \delta_{\nu\xi}, \quad (6.7)$$

portanto, chegamos à

$$\partial_\xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\xi A_\rho)} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\xi\rho} \partial_\xi A_\mu = -\frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\rho\xi\mu} F_{\xi\mu}. \quad (6.8)$$

Renomeando os índices das expressões anteriores, chegamos à equação de movimento:

$$-\frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} = (\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot D^\mu \vec{\phi} + \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}, \quad (6.9)$$

$$\frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} = -(\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot D^\mu \vec{\phi}. \quad (6.10)$$

Com isso, obtemos à equação:

$$D_\mu \left(\frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \right) = -(\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot D_\mu D^\mu \vec{\phi}. \quad (6.11)$$

De forma análoga, obtemos para o campo $\vec{\phi}$ a equação

$$D_\mu D^\mu \vec{\phi} = \frac{1}{\kappa^2} (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) (1 + 2\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \hat{n}_3. \quad (6.12)$$

Com isto, chegamos facilmente ao seguinte resultado

$$D_\mu \vec{J}^\mu = -\frac{(\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) (1 + 2\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})}{\kappa^2}, \quad (6.13)$$

com

$$j^\mu = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}, \quad (6.14)$$

onde a corrente \vec{J}^μ , de acordo com a equação (6.10), é definida como:

$$\vec{J}^\mu = \vec{\phi} \times D^\mu \vec{\phi}. \quad (6.15)$$

e a corrente $U(1)$ é $j^\mu = -\vec{J}^\mu \cdot \hat{n}_3$.

A componente zero da equação (6.14), isto é, a lei de Gauss implica que o campo de configuração com fluxo magnético não nulo Φ essencialmente carrega carga não zero $U(1)$,

ou seja,

$$\mathcal{Q} = \int j^0 d^2r = \kappa \int F_{12} d^2r = -\kappa\Phi. \quad (6.16)$$

Construindo o tensor energia-momento do modelo e integrando em todo o espaço a componente T_{00} , chegamos ao funcional de energia, ou seja, obtemos que

$$E = \frac{1}{2} \int \left[(D_1\vec{\phi})^2 + (D_2\vec{\phi})^2 - \kappa A_0 F_{12} + \frac{1}{\kappa^2} (1 + \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^3 \right] d^2r. \quad (6.17)$$

Com auxílio das equações (6.14, 6.15) e da lei de Gauss, sabemos que $A_0 = -\kappa F_{12}/(1-\phi_3^2)$. Portanto, temos que a energia do modelo é descrita por

$$E = \frac{1}{2} \int \left[(D_1\vec{\phi})^2 + (D_2\vec{\phi})^2 + \frac{\kappa^2 F_{12}^2}{1 - \phi_3^2} + \frac{1}{\kappa^2} (1 + \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^3 \right] d^2r. \quad (6.18)$$

O funcional de energia pode ser rearranjado como:

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} \int \left\{ (D_i\vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij}\vec{\phi} \times D_j\vec{\phi})^2 + \frac{\kappa^2}{1 - \phi_3^2} \left[F_{12} \mp \frac{1}{\kappa^2} (1 + \phi_3)(1 - \phi_3)^2 \right]^2 \right\} d^2r \\ \pm 4\pi \int \frac{1}{4\pi} [\varepsilon_{ij}\vec{\phi} \cdot (D^i\vec{\phi} \times D^j\vec{\phi}) + F^{12}(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})] d^2r, \end{aligned} \quad (6.19)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} \int \left\{ (D_i\vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij}\vec{\phi} \times D_j\vec{\phi})^2 + \frac{\kappa^2}{1 - \phi_3^2} \left[F_{12} \mp \frac{1}{\kappa^2} (1 + \phi_3)(1 - \phi_3)^2 \right]^2 \right\} d^2r \\ \pm 4\pi \int Q_0 d^2r, \end{aligned} \quad (6.20)$$

onde definimos Q_0 como sendo a componente zero da corrente topológica Q_μ , definida como:

$$Q_\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\eta} [\vec{\phi} \cdot D^\nu\vec{\phi} \times D^\eta\vec{\phi} + F^{\nu\eta}(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})]. \quad (6.21)$$

Como vimos anteriormente, a energia (6.20) possui um limite inferior $E \geq 4\pi|Q|$. O caso limite é obtido quando as equações de Bogomol'nyi são satisfeitas [45], com isso, temos as seguintes equações:

$$D_i\vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij}\vec{\phi} \times D_j\vec{\phi} = 0 \quad (6.22)$$

e

$$F_{12} \mp \frac{1}{\kappa^2}(1 + \phi_3)(1 - \phi_3)^2 = 0, \quad (6.23)$$

as equações acima são as conhecidas equações de Bogomol'nyi do modelo [6, 25, 45], essas equações são consistentes com a equação de movimento (6.13).

Em princípio, devido ao vínculo dos modelos $O(N)$, para investigar as soluções numéricas das equações de Bogomol'nyi escolhemos o “*ansatz*” rotacionalmente simétrico para o campo variável, com isso, temos que:

$$\begin{aligned} \phi_1(\rho, \theta) &= \sin f(r) \cos N\theta; \\ \phi_2(\rho, \theta) &= \sin f(r) \sin N\theta; \\ \phi_3(\rho, \theta) &= \cos f(r). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Consideramos, ainda, o *Gauge* sendo igual à

$$\vec{A}(\rho, \theta) = -\hat{e}_\theta \frac{Na(r)}{\kappa r} \quad (6.25)$$

onde $f(r)$ e $a(r)$ são funções arbitrária, $r = \rho/\kappa$ é um comprimento adimensional e N é um inteiro arbitrário que define o grau de um sóliton topológico.

Da equação (7.39), temos que:

$$D_i \vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \times D_j \vec{\phi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} D_1 \vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} = 0 \\ D_2 \vec{\phi} \mp \vec{\phi} \times D_1 \vec{\phi} = 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

Substituindo (7.14) e (7.15) em (6.26), chegamos finalmente as expressões:

$$\begin{aligned} f'(r) &= \pm 2N \frac{1 + a(r)}{r} \sin \frac{f(r)}{2} \cos \frac{f(r)}{2} \\ a'(r) &= \pm \frac{2r}{N} \sin^2 f(r) \sin^2 \frac{f(r)}{2}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Desacoplando as equações (6.27), chegamos à equação não linear para o campo variável descrita por:

$$f''(r) - \frac{f'(r)^2}{\tan f(r)} + \frac{f'(r)}{r} - 2 \sin^3 f(r) \sin^2 \frac{f(r)}{2} = 0, \quad (6.28)$$

onde a densidade de energia no limite de Bogomol'nyi é dada por:

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{f'(r)^2}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa^2} \sin^2 f(r) (1 - \cos f(r))^2. \quad (6.29)$$

É fácil notar que na equação (6.27) o sinal superior está relacionado com o sinal inferior através das transformações $f(r) \rightarrow -f(r)$, $r \rightarrow r$, $a(r) \rightarrow a(r)$ e $N \rightarrow -N$. Notamos, ainda, que a expressão (6.27) é invariante sob a transformação $f(r) \rightarrow f(r) + 2\pi$, então, é suficiente estudar a equação acima com $f(r)$ tendo qualquer valor entre 0 à 2π .

Ainda, conforme proposto por Ghosh em 1996, podemos introduzir as mudanças de variáveis:

$$\chi_1 = \pi + f(r) \quad (6.30)$$

e

$$\chi_2 = \pi - f(r), \quad (6.31)$$

com $a(r)$ permanecendo constante. A implicação disto é que para um perfil particular de $a(r)$ as soluções para $f(r)$ são simétricas sobre $f(r) = \pi$, assim podemos restringir os valores assintóticos de $f(r)$ entre 0 e π . Uma vez que uma solução é apresentada nesse intervalo, existe uma solução simétrica no intervalo de π a 2π .

A regularidade do campo variável na vizinhança da origem demanda que para a soluções de energia finita $f(0) = \pi$ e $a(0) = 0$. Portanto, no infinito $f(r)$ pode assumir valores 0 ou π com $a(r)$ aproximando-se de alguma constante. A carga topológica para o primeiro caso é N , um inteiro. Como resultado, a estabilidade da solução para estas condições de contorno é de natureza topológica. No entanto, quando $f(r)$ aproxima-se de π no infinito, a carga topológica definida em (6.21) não é um inteiro, assim argumentos topológicos não podem ser usados para discutir a estabilidade e instabilidade das soluções com essa condição de contorno. Note que as duas condições diferentes de $f(r)$ no infinito são possível só por conta da forma particular do potencial, vale ressaltar que uma situação similar ocorre na teoria self-dual pura de Chern-Simons. Conseqüentemente, nos referimos a essas soluções, $f(r \rightarrow \infty) = \pi$, como sólitons não topológicos [6].

Inicialmente, estudaremos o perfil do campo variável para os sólitons topológicos, nesse caso, as condições de contorno são:

$$f(0) = \pi, \quad a(0) = 0, \quad f(r \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{e} \quad a(r \rightarrow \infty) = -\eta_1. \quad (6.32)$$

Na proximidade da origem, isto é, $f = \pi$ a equação (6.27) em termos da nova variável $\chi_2(r) = \pi - f(r)$ se reduz a equação de Liouville. Portanto, para r pequeno χ_2 é aproximadamente descrito por

$$\chi_2(r) = \sqrt{2}(N+1) \left(\frac{r_0}{r}\right) \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{N+1} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{N+1} \right]^{-1}, \quad (6.33)$$

com o comportamento inicial de $\chi_2(r) = a_0 r^N$, onde a_0 está relacionado com a constante r_0 em (7.17). Consequentemente, o campo de gauge $a(r)$ comporta-se na vizinhança da origem como

$$a(r) = -\frac{2(N+1)}{N} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{N+1} \left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{N+1} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{N+1} \right]^{-1}, \quad (6.34)$$

com o comportamento inicial de $a(r) = b_0 r^{2(N+1)}$ onde b_0 está relacionado novamente com r_0 .

No infinito, o comportamento de $\chi_2(r)$ e $a(r)$ são:

$$\chi_2(r) = \pi + c_0 r^{-N(1-\eta_1)} + c_1 r^{-5N(1-\eta_1)+2} + \mathcal{O}(r^{-9N(1-\eta_1)+6}) \quad (6.35)$$

e

$$a(r) = -\eta_1 + d_0 r^{-4N(1-\eta_1)+2} + d_1 r^{-8N(1-\eta_1)+4} + \mathcal{O}(r^{-12N(1-\eta_1)+6}) \quad (6.36)$$

onde temos c_0 , c_1 , d_0 e d_1 são constantes arbitrárias. Segue-se das equações acima que $\eta_1 < 1 - 1/2N$ para ter um campo variável não singular. Como consequência, $-1 < a(r) \leq 0$ para sólitons de qualquer grau, desde que $a(r)$ seja uma função decrescente de r e $a(0) = 0$. Sendo $-1 < a(r) \leq 0$, segue imediatamente da primeira equação de (6.27) que $f(r)$ é uma função decrescente de r .

Devemos integrar numericamente a equação (6.27) para $N = 1$ e 2 , ressaltamos, conforme proposto por Ghosh em 1996, que as soluções para $f(r)$ e $a(r)$ de fato existe para qualquer η_1 no intervalo $0 < \eta_1 < 1 - 1/2N$.

Conforme discutido anteriormente, os sólitons são caracterizados por uma energia $E = 4\pi N$, fluxo magnético $\Phi = 2\pi N \eta_1$, carga $Q = -\kappa \Phi$ e momento angular $j_z = \pi \kappa N^2 \eta_1 (2 - \eta_1)$. Portanto, note que embora a energia seja quantizada, o fluxo magnético, a carga, e o momento angular não são. Para um N fixo existe uma família de soluções caracterizada pelo parâmetro η_1 que pode assumir qualquer valor entre 0 e $1 - 1/2N$. Isto implica que estas soluções são infinitamente degeneradas.

De forma análoga, a condição de contorno para os sólitons não-topológicos são:

$$f(0) = \pi, \quad a(0) = 0, \quad f(r \rightarrow \infty) = \pi \quad \text{e} \quad a(r \rightarrow \infty) = -\eta_2. \quad (6.37)$$

O comportamento do campo variável e do campo de gauge para os sólitons não topológicos, são descritas de forma análoga, pelas respectivas expressões (6.35) e (7.27). Entretanto, o comportamento desdes campos no infinito são descrito por:

$$\chi_2(r) = \sqrt{2}\delta \left(\frac{r_1}{r}\right) \left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^\delta + \left(\frac{r}{r_1}\right)^\delta \right]^{-1} \quad (6.38)$$

e

$$a(r) = -\eta_2 + \frac{2}{N} \left(\frac{r_1}{r}\right)^\delta \left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^\delta + \left(\frac{r}{r_1}\right)^\delta \right]^{-1}, \quad (6.39)$$

onde $\delta = N\eta_2 - N - 1$. Nesse caso, o comportamento de $a(r)$ no infinito requer que $\eta_2 > 1 + 1/N$.

O fato é que tanto para os sólitons topológicos como não topológico, devemos resolver numericamente a expressão (6.28). Conforme discutido por Ghosh em 1996 [6], as soluções não topológicas para o campo variável possui a forma apresentada na fig. (6.1).

A partir desse momento, torna-se interessante para as discussões futuras desse trabalho, uma análise numérica das soluções que a equação (6.28) suporta, dessa forma, por convêniencia, analisamos o comportamento de tais soluções em função do parâmetro que representa o comportamento inicial do campo variável, ou seja, a_0 . É válido ressaltar, que o parâmetro a_0 está relacionado com o comportamento assintótico do campo de *gauge*, dessa forma, os resultados apresentados, respectivamente, nas figuras (6.1) e (6.1) são soluções equivalentes as apresentadas no trabalho: “*Topological and nontopological solitons in a gauged $O(3)$ sigma model with Chern-Simons term*”[6].

6.2 O modelo sigma $O(3)$ com termo de Maxwell-Chern-Simons

Nesse modelo, consideramos inicialmente a densidade Lagrangiana para o modelo sigma $O(3)$ com acoplamento não-mínimo [29] igual à¹

¹Neste caso, afim de evitar ambiguidade de notação, consideramos conveniente a assinatura métrica sendo $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$ com $\varepsilon^{012} = 1$; $\mu, \nu = 0, 1, 2$ e $i, j = 1, 2$.

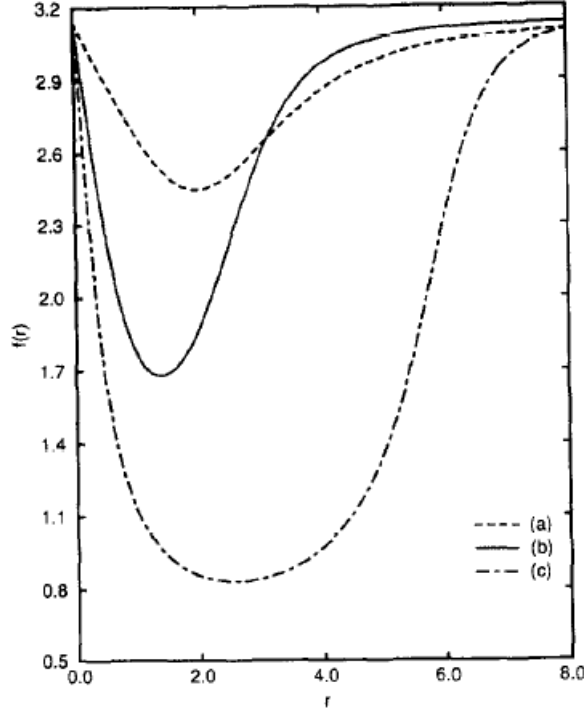


Fig. 6.1: Sólitos não topológicos para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Chern-Simons.
Fonte: Ghosh, 1996.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_{\mu}F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}M\partial^{\mu}M - g\partial_{\mu}M\partial^{\mu}(\hat{n}_3 \cdot \vec{\Phi}) + \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\Phi \cdot \nabla^{\mu}\Phi - U(M, \hat{n}_3 \cdot \vec{\Phi}) \quad (6.40)$$

o primeiro termo em (6.40) é conhecido como termo de Maxwell, enquanto o segundo termo é o termo de Chern-Simons, como apresentado no modelo anterior. Sabemos, ainda, que a derivada covariante para o caso do acoplamento mínimo é definida como:

$$D_{\mu}\vec{\phi} = \partial_{\mu}\vec{\phi} + [eA_{\mu}]\hat{n}_3 \times \vec{\phi} \quad (6.41)$$

onde consideramos convenientemente $e = 1$. Fazendo a mudança para o caso do acoplamento não-mínimo, temos que:

$$\nabla_{\mu}\vec{\phi} = \partial_{\mu}\vec{\phi} + \left[eA_{\mu} + \frac{g}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha}F^{\nu\alpha} \right] \hat{n}_3 \times \vec{\phi}. \quad (6.42)$$

Conforme apresentado anteriormente, sabemos que no modelo sigma $O(3)$ o campo escalar

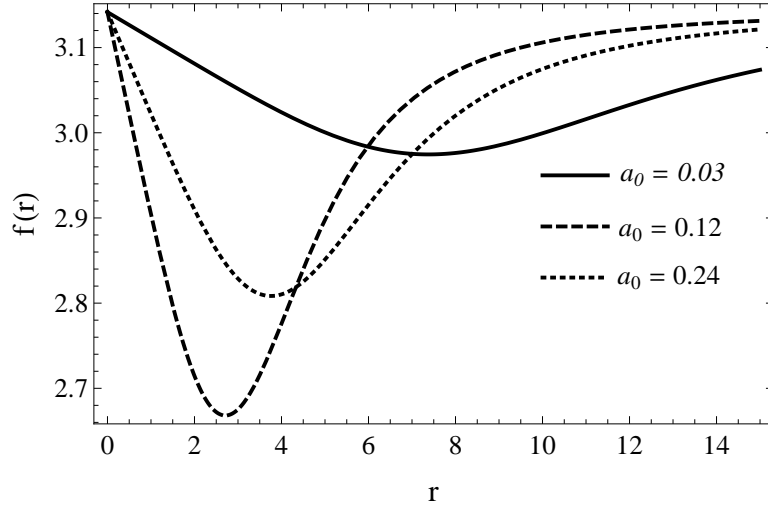


Fig. 6.2: Sólitons não topológicos para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Chern-Simons para vários valores iniciais do campo de variável, ou seja, diversos valores do campo de *gauge*.

Fonte: O autor.

$\vec{\phi}$ é mapeado no espaço de Minkowski com dimensão do espaço-tempo equivalente à $(2+1)D$ de duas esferas de raio unitário denotadas de S^2 . Em outras palavras, $\vec{\phi}$ é um vetor com três componentes que satisfaz ao vínculo $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1$.

Investigando a equação de movimento para o campo de *gauge*, obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\gamma} &= \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\gamma\nu\alpha} F_{\nu\alpha} + e(\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \cdot \nabla^\gamma \vec{\phi} \\ &= \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\gamma\nu\alpha} F_{\nu\alpha} + e \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} \times \nabla^\gamma \vec{\phi}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

De forma análoga, chegamos a expressão:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda A_\gamma)} = -F^{\lambda\gamma} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\lambda\gamma} A_\mu + g \varepsilon_{\mu\lambda\gamma} \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} \times \nabla^\mu \vec{\phi}. \quad (6.44)$$

Substituindo (6.43) e (6.44) na equação de Euler-Lagrange, chegamos que a equação de movimento para o campo de *gauge* é dada por

$$\partial_\lambda [-F^{\lambda\gamma} + g \varepsilon_{\mu\lambda\gamma} \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} \times \nabla^\mu \vec{\phi}] = e \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} \times \nabla^\gamma \vec{\phi} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (6.45)$$

Rearranjando os termos da equação (6.45), chegamos finalmente à

$$\partial_\lambda \left[\varepsilon^{\lambda\gamma\mu} \left(\frac{g}{e} J_\mu + F_\mu \right) \right] = J^\gamma - \kappa F^\gamma. \quad (6.46)$$

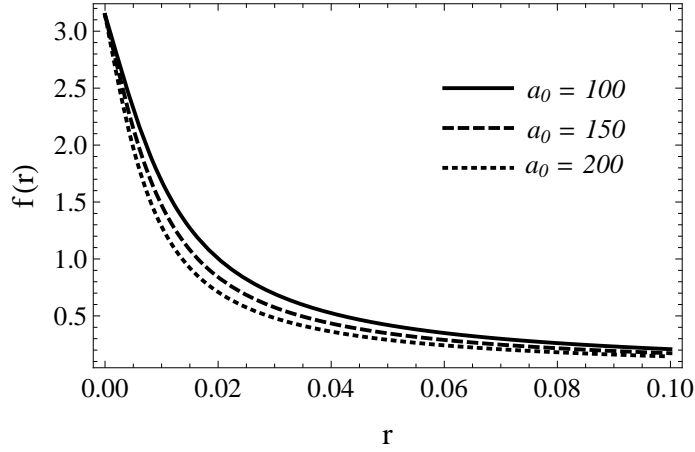


Fig. 6.3: Soluções topológicas para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Chern-Simons para vários valores iniciais do campo de variável, ou seja, diversos valores do campo de *gauge*.

Fonte: O autor.

definimos o tensor de campo dual e a corrente de matéria, respectivamente, como:

$$F^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\nu\alpha}$$

e

$$\vec{j}^\mu = -e \vec{\phi} \times \nabla^\mu \vec{\phi} \quad (6.47)$$

As soluções da equação diferencial de primeira ordem

$$F^\gamma = \frac{1}{\kappa} J^\gamma \quad (6.48)$$

são também soluções da equação (6.46). Esse resultado é completamente análogo ao apresentado por Stern, Torres e Cavalcante.

Conforme já discutido no modelo anterior, *sigma $O(3)$ com termo de Chern-Simons*, a componente zero da expressão (6.48) é conhecida como lei de Gauss. Dessa forma, obtemos que

$$Q = \int J^0 d^2r = \kappa \int F_{12} d^2r = -\kappa \int B d^2r = -\kappa \Phi \rightarrow \Phi = -\frac{Q}{\kappa}. \quad (6.49)$$

com isso, observamos novamente que os vórtices carregados com carga Q também são tubos de fluxo magnético.

Para construir o funcional de energia do modelo é necessário obtermos uma equação de

movimento do campo de matéria. É interessante notar que é possível expressar essa equação em termos das correntes. Para isto, vamos considerar a seguinte equação de movimento para o campo escalar:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \vec{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{\phi}} \quad (6.50)$$

Considerando, convenientemente, a equação (6.47) reescrevemos (6.50) como sendo

$$\nabla^\mu \vec{j}_\mu = e \vec{\phi} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\phi}}. \quad (6.51)$$

Por uma questão de completude, é interessante expressar a corrente J^μ em termos de uma corrente sem contribuição explícita do momento magnético, denotada por $k^\mu \equiv -e\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} \times D^\mu \vec{\phi}$. Com isso em mente, temos:

$$\begin{aligned} k^\mu &= -e\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} \times D^\mu \vec{\phi} \\ &= -e\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} \times \left[\nabla^\mu \vec{\phi} - \frac{g}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha} F^{\nu\alpha} (\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \right] \\ &= -e\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} \times [\nabla^\mu \vec{\phi} - gF^\mu (\hat{n}_3 \times \vec{\phi})] \\ &= -e\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi} \times \nabla^\mu \vec{\phi} [1 + g(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2] \\ &= J^\mu [1 + g(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

A expressão (6.52) será utilizada posteriormente para reescrever o funcional de energia do modelo e obter as equações de Bogomol'nyi.

Normalmente, o energia funcional é obtido pelo integral sobre o componente T_{00} do tensor energia-momento, que pode ser obtido por acoplamento dos campos com a gravidade e, em seguida, variando a ação com respeito à métrica. Tendo em conta que o termo Chern-Simons não contribui por causa de sua independência métrica, temos:

$$T_{\mu\nu} = G(g, \vec{\phi}) F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu} + D_\mu \vec{\phi} \cdot D_\nu \vec{\phi} - g[\partial_\mu M \partial_\nu (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) + \partial_\nu M \cdot \partial_\mu (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})] + \partial_\mu M \partial_\nu M - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (6.53)$$

Da expressão anterior, chegamos ao resultado:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{G}{2} F_0^\alpha F_{\alpha 0} + \frac{1}{2} \partial_0 M \partial_0 M + \frac{1}{2} \partial_i M \partial_i M - g \partial_0 M \partial_0 (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) - g \partial_i M \partial_i (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) + \frac{1}{2} D_0 \vec{\phi} \cdot D_0 \vec{\phi} \\ &\quad + \frac{1}{2} D_i \vec{\phi} \cdot D_i \vec{\phi} + U(g, \vec{\phi}). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Utilizando (6.42) e (6.52), construímos à identidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}D_i\vec{\phi} \cdot D_i\vec{\phi} = & -\frac{1}{2}(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2 E^2 + \frac{g}{e}F_i k_i \mp gE_i \partial_i(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) + \frac{1}{2}(\nabla_1\vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times \nabla_2\vec{\phi})^2 \\ & \pm \vec{\phi} \cdot D_1\vec{\phi} \times D_2\vec{\phi} \end{aligned} \quad (6.55)$$

De posse das expressões (6.54) e (6.55), construímos, finalmente, o funcional de energia do modelo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2}G(E^2 + B^2) + \frac{1}{2}\partial_0 M \partial_0 M + \frac{1}{2}\partial_i M \partial_i M - g\partial_0 M \partial_0(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) - g\partial_i M \partial_i(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}D_0\vec{\phi} \cdot D_0\vec{\phi} - \frac{1}{2}(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2 E^2 + \frac{g}{e}F_i k_i \mp gE_i \partial_i(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) + \frac{1}{2}(\nabla_1\vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times \nabla_2\vec{\phi})^2 \pm \vec{\phi} \cdot D_1\vec{\phi} \times \right. \\ \left. D_2\vec{\phi} + U \right\}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

nesse caso, afim de evitar ambiguidade de notação, denominamos \mathcal{E} como a energia total do modelo.

Rearranjando o funcional (6.56), obtemos que a expressão de energia é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int d^2r \left\{ \frac{G}{2}(B + \sqrt{2U_1/G})^2 \pm GB\sqrt{2U_1/G} + \frac{1}{2}(E_i \pm \partial_i M) \mp E_i \partial_i M - \frac{1}{2}g^2(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2 E^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{2}\partial_0 M \partial_0 M - g\partial_i M \partial_i(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) - g\partial_0 M \partial_0(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) + \frac{1}{2}|D_0\vec{\phi} \pm \sqrt{2U_2}|^2 \pm M[J_0 - egB(\hat{n}_3 \times \right. \\ \left. \vec{\phi})^2] - \frac{1}{2}g^2(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2 E^2 + \frac{g}{e}F_i k_i \mp gE_i \partial_i(\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) + \frac{1}{2}(\nabla_1\vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times \nabla_2\vec{\phi})^2 \pm \vec{\phi} \cdot D_1\vec{\phi} \times D_2\vec{\phi} \right\} \end{aligned} \quad (6.57)$$

onde temos [29],

$$U_1 = \frac{e^2}{2G} \left[(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) + \frac{\kappa}{e}M + g(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2 M \right]^2 \quad (6.58)$$

e

$$U_2 = \frac{1}{2}e^2 M^2 (\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2. \quad (6.59)$$

Para tornar o sistema auto-dual, consideramos, convenientemente, o potencial como proposto por Cunha *et al.* 2006 [47], ou seja, assumimos o potencial com a forma:

$$U = U_1 + U_2. \quad (6.60)$$

Analogamente ao caso anterior, a corrente topológica para este caso é

$$Q_{top}^\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \left[\vec{\phi} \cdot D_\nu \vec{\phi} \times D_\alpha \vec{\phi} - \frac{e}{2} F_{\nu\alpha} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi}) \right]. \quad (6.61)$$

Da equação (6.57), pelo limite de Bogomol'nyi [45], exigimos que:

$$B + \sqrt{2U_1/G} = 0; \quad (6.62)$$

$$E_i \pm \partial_i M = 0; \quad (6.63)$$

$$D_0 \vec{\phi} \pm eM(\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) = 0; \quad (6.64)$$

$$\nabla_1 \vec{\phi} \pm \vec{\phi} \times \nabla_2 \vec{\phi} = 0. \quad (6.65)$$

Portanto, a energia do modelo reduz-se para:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int d^2r \left\{ \pm GB\sqrt{2U_1/G} \mp E_i \partial_i M - g^2(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2 E^2 + \frac{1}{2} \partial_0 M \partial_0 M - g \partial_i M \partial_i (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \right. \\ \left. - g \partial_0 M \partial_0 (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \pm M[J_0 - egB(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2] + \frac{g}{e} F_i k_i \mp g E_i \partial_i (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \pm \vec{\phi} \cdot D_1 \vec{\phi} \times D_2 \vec{\phi} \right\}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Ajustando os termos da equação acima, chegamos facilmente ao resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int d^2r \left\{ E_i \left[\frac{g}{e} \varepsilon_{ij} k_j - g^2(\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) \right] + \frac{1}{2} \partial_0 M \partial_0 M - g \partial_0 M \partial_0 (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \pm M[J_0 + \kappa B + \partial_i E_i] \right. \\ \left. \mp \partial_i (M E_i) \right\} + 4\pi \int d^2r Q_{top}^0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Integrando (6.67) por partes, e assumindo que a contribuição do campo no infinito é nulo para a integral de superfície, chegamos, finalmente, que o funcional de energia é dado por

$$\mathcal{E} = \int d^2r \left\{ M[J_0 + \kappa B + \partial_i E_i] + \frac{1}{2} \partial_0 M \partial_0 M - g \partial_0 M \partial_0 (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \right\} + 4\pi |\mathcal{Q}_{top}| \quad (6.68)$$

onde temos $|\mathcal{Q}_{top}|$ igual ao módulo da carga topológica do modelo.

Conforme discutido no modelo anterior, a energia do modelo é limitada por baixo, ou

seja, temos que

$$\mathcal{E} \geq 4\pi |\mathcal{Q}_{top}|, \quad (6.69)$$

quando esse limite é saturado as equações de Bogomol'nyi (6.62-6.65) são satisfeitas.

Vale a pena mencionar o papel desempenhado pela campo escalar neutro M . De fato, é essencial obter um modelo self-dual, como foi apontado pela primeira vez por Lee *et al.* [31] no contexto do modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Ainda neste contexto, mas com acoplamento não-mínimo, resultado semelhante foi apresentado em Ref. [48].

Em seguida, buscamos agora resolver as equações de Bogomol'nyi do modelo (6.62-6.65), para isto, utilizamos novamente o ansatz:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sin f(r) \cos N\theta; \\ \phi_2 &= \sin f(r) \sin N\theta; \\ \phi_3 &= \cos f(r). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Para o campo de *gauge* tomamos o ansatz:

$$\vec{A} = \frac{Na(r)}{er} \hat{e}_\theta. \quad (6.71)$$

onde (r, θ) são coordenadas polares no plano e N é a ordem (vorticidade), ou grau, do sóliton [6].

Portanto, neste limite, o campo escalar M pode ser escrito em termos apenas do campo de Higgs,

$$M = g_c(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}); \quad (6.72)$$

e consequentemente, temos:

$$B = \pm eg_c \frac{(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2}{1 - g_c^2(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2} (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}), \quad (6.73)$$

e

$$U = \frac{e^2 g_c^2}{2} \frac{(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^2}{1 - g_c^2(\hat{n}_3 \times \vec{\phi})^2} [1 - (\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^2] \quad (6.74)$$

note que no limite, $g_c \rightarrow 0$, o potencial (6.74) torna-se o caso considerado por Lee *et al.* em

1996.

Considerando (6.70) chegamos na equação para o campo variável, ou seja, obtemos que a equação de vórtices estáticos é descrita por:

$$f'(r) = \pm \frac{N}{r} \frac{\sin f(r)}{1 + g_c^2 \sin^2 f(r)} [1 + a(r)], \quad (6.75)$$

enquanto isso, temos que:

$$a'(r) = \pm \frac{r}{N} \frac{g_c^2 \sin^2 f(r)}{1 - g_c^2 \sin^2 f(r)} [1 - \cos f(r)]. \quad (6.76)$$

Desacoplando as equações acima, chegamos à equação

$$f''(r) = -\frac{1}{r} f'(r) + \frac{[f'(r)]^2}{\tan f(r)} - \frac{g_c^2 \sin 2f(r)}{[1 + g_c^2 \sin^2 f(r)]^2} [f'(r)]^2 + \frac{g_c^2 \sin^3 f(r)}{1 - g_c^4 \sin^4 f(r)} [1 - \cos f(r)] \quad (6.77)$$

A partir desse momento, iniciaremos uma investigação das soluções do campo variável e do campo de *gauge*, ou seja, as soluções das respectivas eqs. (6.75) e (6.76). Para garantir que o campo variável seja não-singular na origem impomos

$$f(0) = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.78)$$

Devido o *ansatz* para o campo de *gauge*, claramente as soluções regulares na origem requerem que $a(0) = 0$. Por outro lado, assim como discutido no caso anterior as soluções para $f(r)$ são simétricas para $f(r) = 2\pi$. Portanto, nós podemos escolher, sem perda de generalidade, $f(0) = 0$ ou $f(0) = \pi$. Se considerarmos a última condição, então, é interessante tomarmos a mudança de variável $f(r) = \pi + \chi(r)$. Assumimos também, por conveniência, o sinal de baixo da equação (6.75) para N positivo. Com isso em mente, notamos que o campo de variável para $\chi(r) \ll 1$ admite soluções do tipo:

$$\chi(r) = a_0 r^N, \quad (6.79)$$

consequentemente,

$$a(r) = -\frac{1}{2N(2N+1)} g_c^2 r^{4N+2}. \quad (6.80)$$

Para a condição de contorno, $f(0) = 0$ e N negativo, na vizinhança da origem temos que:

$$f(r) = \bar{a}_0 r^{-N}, \quad (6.81)$$

e

$$a(r) = -\frac{\bar{a}_0}{4N(1-2N)} g_c^2 r^{-4N+2}. \quad (6.82)$$

Por outro lado, no infinito, existem dois comportamentos assintóticos possíveis. O primeiro é dado por $f(r \rightarrow \infty) = pi$ com N positivo. Neste caso, a transformação (6.78) deve ser considerada, novamente. O comportamento assintótico do campo de *gauge*, nesse caso, será $a(r \rightarrow \infty) = -\alpha_1$. Dessa forma, concluímos que as soluções regularizadas e de energia finita são da forma:

$$\chi(r) = a_\infty r^{N(1-\alpha_1)} \quad \text{com } \alpha_1 > 1, \quad (6.83)$$

e

$$a(r) = -\frac{c_\infty^2}{2N^2(1-\alpha_1) + 2N} r^{2N(1-\alpha_1)+2} - \alpha_1 \quad (6.84)$$

Analogamente, para $f(r \rightarrow \infty) = 0$ e $a(r \rightarrow \infty) = \alpha_2$ com N negativo, obtemos:

$$\chi(r) = \bar{a}_\infty r^{N(1+\alpha_2)} \quad \text{com } \alpha_2 > -1, \quad (6.85)$$

e

$$a(r) = -\frac{\bar{a}_\infty^4 g_c^2}{2N} r^{4N(1+\alpha_2)} + \alpha_2. \quad (6.86)$$

note que, nas expressões anteriores o parâmetros α_1 e α_2 são constantes que dependem da escolha da condição de contorno topológica ou não-topológica.

Conforme já discutido anteriormente, os sólitons topológicos teram uma energia quantizada, $E = 4\pi N$, e um fluxo magnético não-quantizado dado por $\Phi = 2\pi N\alpha_2/e$. Enquanto isso, o sólitons não topológicos do modelo teram energia $E = 4\pi\alpha_1$ e um fluxo magnético dado por $\Phi = 2\pi N\alpha_1/e$.

Analisando numericamente as soluções da equação (6.77), apresentamos nas figs. (6.2) e (6.2) os resultados gráficos das soluções de vórtices do modelo.

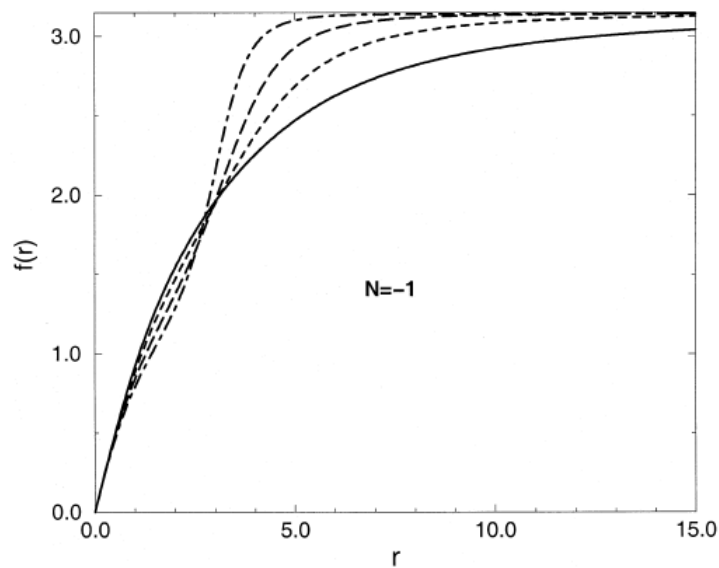


Fig. 6.4: Sólitons topológicos para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Maxwell-Chern-Simons para diversos valores de g_c , ou seja, $g_c = -0.8$ (linha traço-pontilhado), -0.6 (linha traço-longo), -0.4 (linha tracejada) e -0.2 (linha sólida).

Fonte: Cavalcante *et al.* 2006.

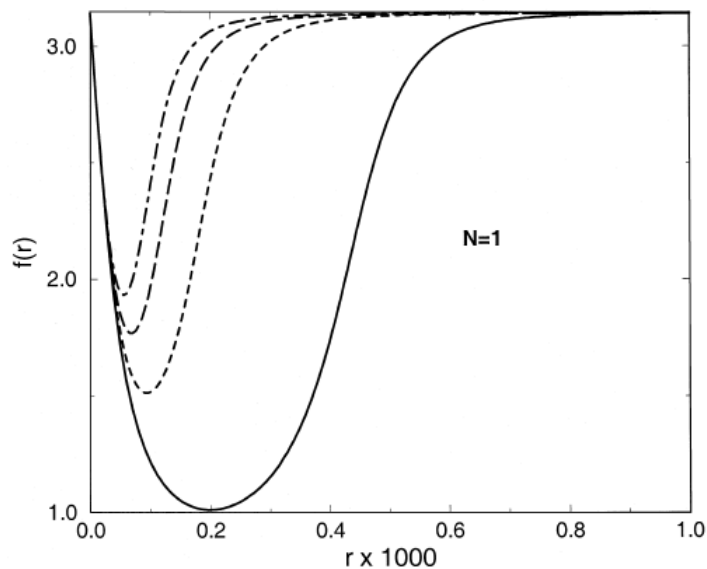


Fig. 6.5: Sólitons não-topológicos para o modelo sigma $O(3)$ com termo de Maxwell-Chern-Simons para diversos valores de g_c , ou seja, $g_c = -0.025$ (linha traço-pontilhado), -0.02 (linha traço-longo), -0.015 (linha tracejada) e -0.01 (linha sólida).

Fonte: Cavalcante *et al.* 2006.

Capítulo 7

Resultados Obtidos

7.1 O modelo sigma com acoplamento mínimo e com o termo de Chern-Simons-Higgs generalizado

Para este modelo, consideramos, inicialmente a densidade Lagrangiana descrita pelas referências [3, 12] em unidade natural ($c = \hbar = 1$). Ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{G(\phi)}{2} D_\mu \vec{\phi} \cdot D^\mu \vec{\phi} + \frac{\kappa}{4} \omega(\vec{\phi}) \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} - \frac{1}{2\kappa^2} (1 + \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})(1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^3. \quad (7.1)$$

Demonstraremos a seguir, que a constante dielétrica acoplada com o termo de Chern-Simons é responsável pela finitude de energia do modelo. Além disso, consideramos, $\vec{\phi} = \phi_1 \hat{n}_1 + \phi_2 \hat{n}_2 + \phi_3 \hat{n}_3$ é um vetor com três componentes e norma $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$ [6]. Neste contexto, consideramos a assinatura do espaço-*flat* de *Minkowski* sendo $g_{\mu\nu} = (+, -, -)$. Além disso, a escolha particular do termo generalizado de Chern-Simons $\omega(\vec{\phi})$ permite a existência de estruturas semelhantes a compactons no modelo sigma $O(3)$.

O tensor eletromagnético é dado por $F_{\nu\rho} = \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu$, onde A_μ representa o campo de *gauge* e $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ é o conhecido símbolo de Levi-Civita.

A derivada covariante é definida como [31]:

$$D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} + A_\mu \hat{n}_3 \times \vec{\phi}. \quad (7.2)$$

A Lagrangiana (7.1) é invariante sob uma isorotação de $SO(2)$ ao redor do eixo \hat{n}_3 . De fato, podemos recorrer novamente a identidade

$$D_\mu \vec{\phi} \cdot D^\mu \vec{\phi} = |(\partial_\mu + iA_\mu)(\phi_1 + i\phi_2)|^2 + \partial_\mu \phi_3 \partial^\mu \phi_3, \quad (7.3)$$

para observarmos a natureza local $U(1)$ do modelo. Pela expressão (7.1) observamos que o potencial possui dois mínimos degenerado em $\phi_3 = \pm 1$, o vínculo $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$ implica que as componentes ϕ_1 e ϕ_2 são nulos quando $\phi_3 = 1$.

A equação de movimento para o modelo é

$$D_\mu \vec{J}^\mu = -\frac{1}{\kappa^2} (\hat{n}_3 \times \vec{\phi}) (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^2 (1 + 2\hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \quad (7.4)$$

onde

$$j^\mu = \frac{\kappa}{2} \omega(\vec{\phi}) \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} \quad (7.5)$$

e a corrente \vec{J}^μ é definida como

$$\vec{J}^\mu = G(\vec{\phi}) \vec{\phi} \times D^\mu \vec{\phi}, \quad (7.6)$$

onde a corrente $U(1)$ é $j^\mu = -\vec{J}^\mu \cdot \hat{n}_3$.

Construindo o funcional de energia, obtemos a expressão:

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left[G(D_1 \vec{\phi})^2 + G(D_2 \vec{\phi})^2 + \frac{\omega^2}{G} \frac{\kappa^2 F_{12}^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} + \frac{1}{\kappa^2} (1 + \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi})^3 \right] \quad (7.7)$$

O potencial A_0 é eliminado da expressão através do uso da lei de *Gauss*. A energia funcional pode ser rearranjada como:

$$E = \int d^2x \left[(G^{1/2} D_i \vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij} G \vec{\phi} \times D_j \vec{\phi})^2 + \frac{\omega^2}{G} \frac{\kappa^2}{1 - \phi_3^2} \left(F_{12} \mp \frac{G^{1/2}}{\omega \kappa^2} (1 + \phi_3) (1 - \phi_3)^2 \right)^2 \right] \pm 4\pi \int d^2x K_0 \quad (7.8)$$

onde K_0 é a componente zero da corrente topológica, e K_μ é definida como

$$K_\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \left[G^{3/2} \vec{\phi} \cdot D^\mu \vec{\phi} \times D^\rho \vec{\phi} + \frac{\omega}{G^{1/2}} F^{\nu\rho} (1 - \hat{n}_3 \cdot \vec{\phi}) \right]. \quad (7.9)$$

Aplicando o Limite BPS na expressão (7.8), chegamos ao resultado:

$$G^{1/2} D_i \vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij} G \vec{\phi} \times D_j \vec{\phi} = 0, \quad (7.10)$$

$$F_{12} \mp \frac{G^{1/2}}{\omega \kappa^2} (1 + \phi_3) (1 - \phi_3)^2 = 0. \quad (7.11)$$

No limite BPS a densidade de energia do modelo é reduzida à

$$\mathcal{E}_{BPS} = \frac{G}{2} |D_i \vec{\phi}|^2 + G^{1/2} F_{12} (1 - \hat{n} \cdot \vec{\phi}). \quad (7.12)$$

7.1.1 A solução do modelo

Para o estudo das soluções topológicas do modelo, nós escolhemos um *ansatz* para o campo variável. Devido ao vínculo, $\Phi \cdot \Phi = 1$, tomamos o *ansatz* [6]:

$$\phi_1(\rho, \theta) = \sin f(r) \cos N\theta; \quad (7.13)$$

$$\phi_2(\rho, \theta) = \sin f(r) \sin N\theta; \quad (7.14)$$

$$\phi_3(\rho, \theta) = \cos f(r). \quad (7.15)$$

Devemos também escolher:

$$\vec{A} = -\hat{e}_\theta \frac{Na(r)}{\kappa r}. \quad (7.16)$$

Ressaltamos que $f(r)$ é uma função arbitrária e adimensional. N é um inteiro e também definido como o grau do sóliton topológico (ou também chamado de vorticidade).

Substituindo as expressões (7.13, 7.14, 7.15 and 7.16) na equação de Bogomol'nyi do modelo, nós obtemos:

$$f'(r) = \pm \frac{2N}{G^{1/2}} \frac{a+1}{r} \sin \frac{f(r)}{2} \cos \frac{f(r)}{2} \quad (7.17)$$

e

$$a'(r) = \pm \frac{2r}{N} \frac{G^{1/2}}{\omega} \sin^2 f(r) \sin^2 \frac{f(r)}{2}. \quad (7.18)$$

Desacoplando as equações acima e considerando que o parâmetro de acoplamento são reduzidos a constantes, obtemos que

$$f''(r) - \frac{f'(r)^2}{\tan f(r)} + \frac{f'(r)}{r} - \frac{2}{\omega(\phi)} \sin^3 f(r) \sin^2 \frac{f(r)}{2} = 0. \quad (7.19)$$

É válido notar que o parâmetro de generalização do termo cinético não altera o perfil das soluções do campo $f(r)$, com isso em mente, voltaremos nossa atenção ao estudo dos efeitos da constante dielétrica ω para o modelo sigma $O(3)$ *gaugeado*.

A equação (7.17) e (7.18) são invariantes sob a transformação $f(r) \rightarrow f(r) + 2\pi$. Essa

observação nos motiva ao estudos das soluções da equação acima no intervalo entre 0 e 2π .

Como sugerido por Gosh [6], podemos, convenientemente tomar a mudança na variável dependente como

$$\eta_1 = \pi + f(r) \tag{7.20}$$

ou

$$\eta_2 = \pi - f(r) \tag{7.21}$$

onde consideramos que $a(r)$ permanece inalterado.

Notamos que as transformações anteriores mantêm as eqs. (7.17) e (7.18) invariantes. Concluimos que, para um perfil específico de $a(r)$, a solução para $f(r)$ é simétrica sobre $f(r = \pi)$. Assim, podemos restringir os valores assintóticos de $f(r)$ entre 0 e π . Portanto, uma vez que obtemos a solução neste intervalo, deve haver uma solução simétrica no intervalo de π a 2π .

Embora alguns autores [6] afirmem que para obter soluções de energia finita o campo variável (próximo da origem) depende das condições $f(0) = \pi$ e $a(0) = 0$, no caso não generalizado, consideraremos o estudo numérico do modelo generalizado para as condições $f(0) = 0$ e $f(\infty) = \pi$.

7.1.2 Resultados numéricos

Nesta seção, iniciaremos o estudo numérico das equações *self-dual* para o modelo sigma com o termo de Chern-Simons generalizado (constante dielétrica). Agora voltamos nossa atenção para a afirmação proposta por Ghosh em 1996, segundo Ghosh, para obter soluções que tenham interesse físico, ou seja, soluções de energia localizada, devemos analisar a existência de sólitons no contorno $f(r = 0) = \pi$ e $f(r \rightarrow \infty) = \pi$, para sólitons não-topológicos. Para os solitons topológicos devemos considerar $f(r = 0) = \pi$ e $f(r \rightarrow \infty) = 0$. Em contrapartida ao trabalho proposto por Ghosh, iniciaremos a investigação para o comportamento do campo variável $f(r)$ sendo inicialmente $f(r = 0) = 0$, mostramos que apesar do trabalho apresentado na literatura, a existência de soluções com localização energia, apresenta soluções semelhantes a *kink* para este contorno. Para mostrar isso, retornamos a equação (7.19) e analisamos, através do método de interpolação, a existência de tais soluções, para isto, consideramos que o campo variável próximo da origem se comporta como $f(r) = a_0 r^N$. Como resultado, temos as soluções gráficas apresentadas abaixo.

O gráfico (7.1) apresenta soluções tipo *kink* para o limite que Ghosh argumenta não ter soluções de energia finitas. Como proposto na literatura especializada, a solução *kink* apresenta uma configuração de energia finita proporcional à $\text{sech}^4(r)$ [25], portanto esperamos

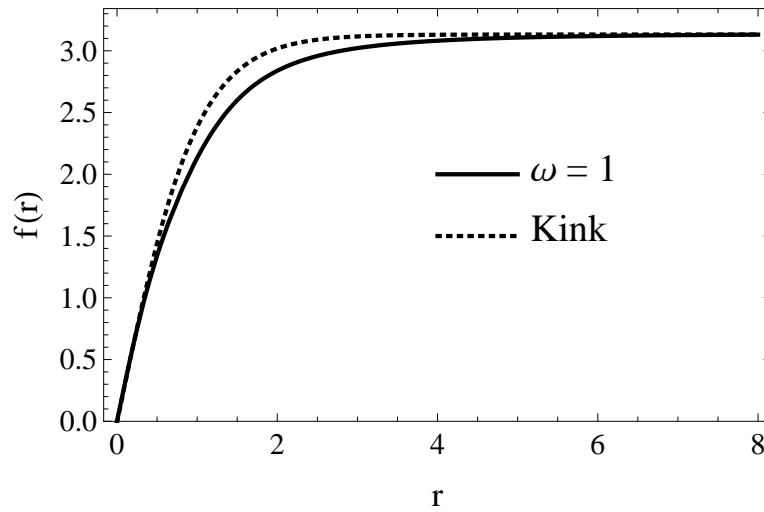


Fig. 7.1: Soluções solitônicas para $f(r = 0) = 0$ e $f(r \rightarrow \infty) = \pi$.

que a solução gráfica para o caso anterior apresente soluções energia finita, para isso, retornamos a equação (7.12) e analisamos a energia BPS do modelo. Como resultado, obtemos que a densidade de energia do modelo tem a forma apresentada em (7.2).

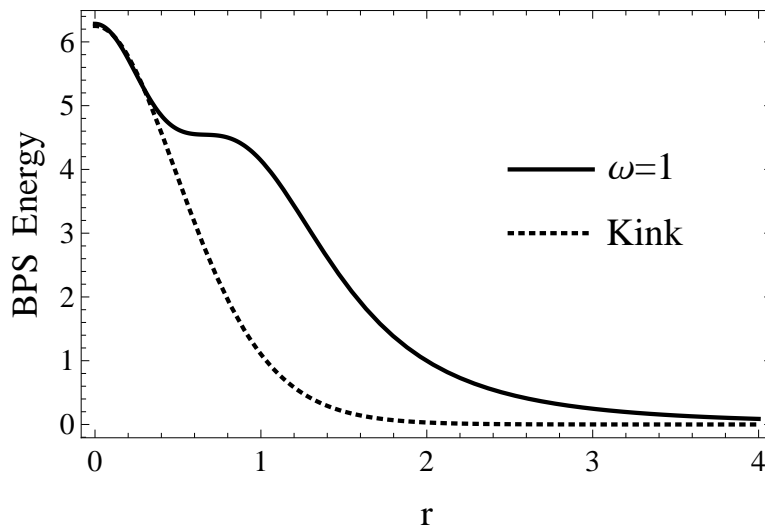


Fig. 7.2: Energia BPS associada ao campo variável com $f(r = 0) = 0$ e $f(r \rightarrow \infty) = \pi$.

Do Kink ao Compacton

A existência de soluções do tipo *kink* nos leva à motivação de encontrar soluções do tipo compacton no modelo, para isso precisamos fazer uma análise dos parâmetros de acoplamento.

mento $G(\phi)$ e da respectiva constante dielétrica $\omega(\phi)$ do modelo sigma $O(3)$ generalizado. Note que uma vez que a constante de acoplamento $G(\phi)$ não aparece na expressão (7.19) ela não influencia a dinâmica do campo variável, então somente a constante dielétrica $\omega(\phi)$ influenciará no modelo dinâmico. Com isso, iniciamos nossa investigação numérica, considerando a variação do parâmetro ω que é responsável pela contribuição do campo *gauge* neste modelo. Como consequência, chegamos às soluções gráficas para o campo variável $f(r)$.

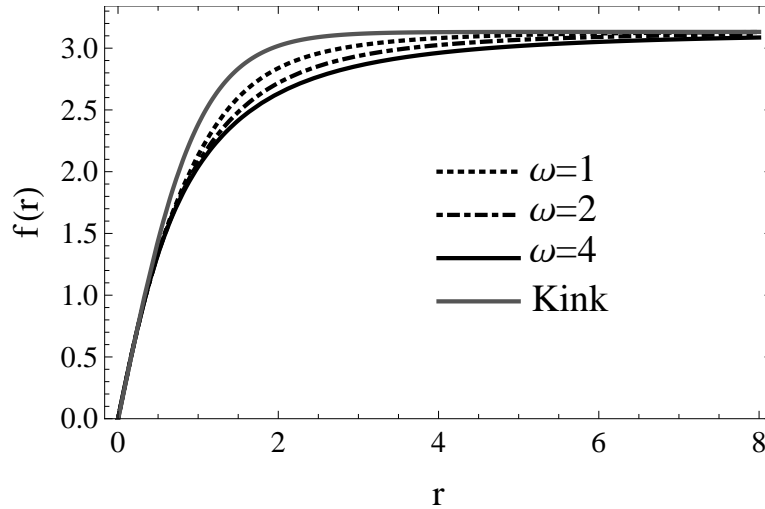


Fig. 7.3: Soluções tipo *kink* para $f(r = 0) = 0$ e $f(r \rightarrow \infty) = \pi$.

É fácil ver que como o parâmetro ω diminui, as soluções do campo variável tendem para as soluções do tipo *Kink*, ou seja, o campo variável tende para soluções tipo $\tanh(r)$. Em outras palavras, à medida que a contribuição do termo Chern-Simons ou do campo *gauge* diminui, as soluções do campo variável tendem a soluções $\tanh(r)$. Como consequência, a energia do modelo tenderá a ser proporcional à $\text{sech}^4(r)$. Novamente, isso é visto claramente a partir dos resultados gráficos apresentados na Fig. (7.4).

De acordo com os resultados apresentados anteriormente, notamos que como o parâmetro ω decresce, a solução do campo $f(r)$ tende a forma de uma solução *kink*. Notamos, ainda, que a solução *kink* é obtida quando $\omega = 0.35$. A fim de transformar as soluções do tipo *kink* em soluções do tipo *compacton*, continuamos a diminuir continuamente a contribuição do parâmetro ω , com isso, obtemos as soluções do tipo *compacton* como mostra a fig. (7.5).

Devido à característica das soluções do tipo *compacton*, esperamos que a densidade de energia das BPS se torne mais localizada e nítida quando as solução *kink* tende à solução do tipo *compacton*. Com isso, podemos ver claramente que isso é o que acontece nas soluções gráficas (7.6), desta forma, os resultados numéricos mostram-se de acordo com os resultados teóricos da literatura especializada para a dinâmica do modelo.

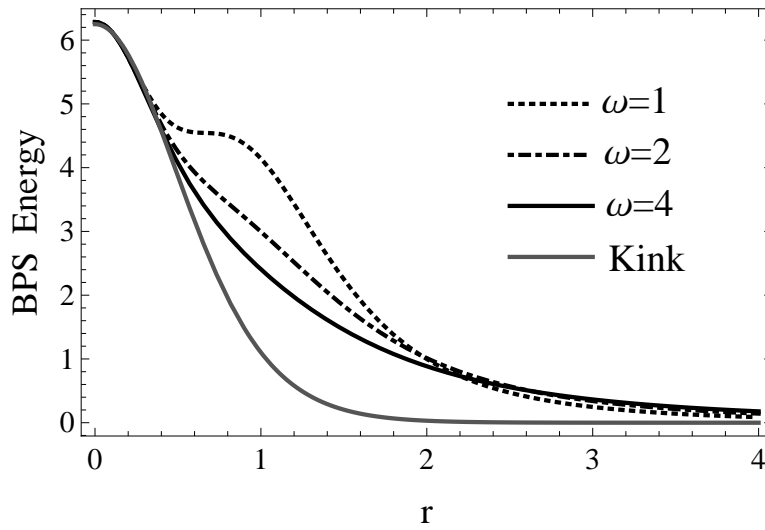


Fig. 7.4: Energia BPS para $f(r = 0) = 0$ and $f(r \rightarrow \infty) = \pi$.

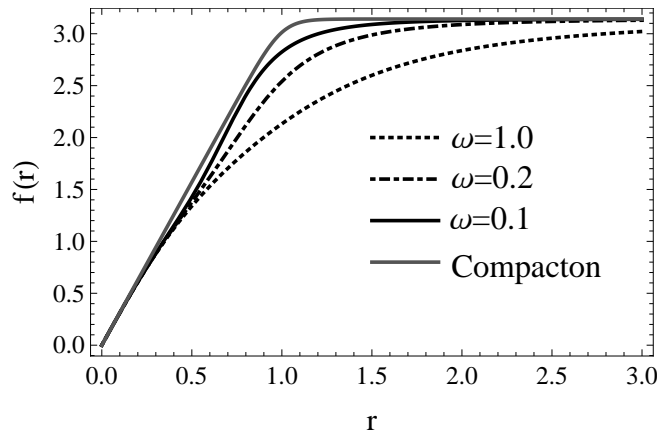


Fig. 7.5: Do *kink* as soluções tipo compacton do modelo

A existência de sólitons não-topológicos

Um novo resultado numérico é obtido quando assumimos que o parâmetro ω é um valor negativo definido. Neste caso, as soluções tipo *kink* e tipo *compacton* não existirão. No entanto, como resultado, ainda é possível verificar a existência das soluções solitônicas não-topológicas no modelo.

Neste caso, devido ao comportamento do campo variável respeitar os limites:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0, \quad (7.22)$$

a solução é caracterizada como uma solução tipo onda solitária com carga topológica $Q_{top} = 0$,

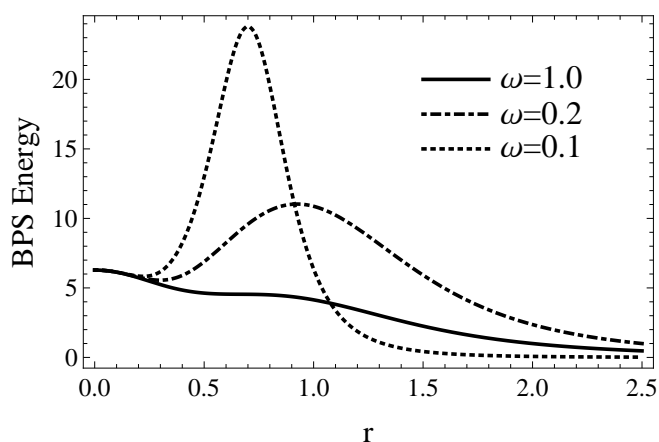


Fig. 7.6: Energia BPS do *kink* as soluções tipo compactons

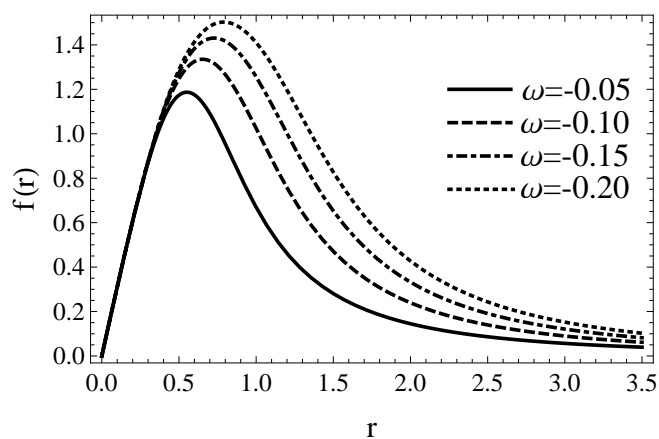


Fig. 7.7: Soluções solitônicas quando $\omega < 0$.

com isso, não podemos utilizarmos argumentos topológicos para discutir a estabilidade das soluções. Em outras palavras, notamos que as quantidades como energia do sóliton, fluxo magnético, carga e momento angular não serão quantizados como previsto em uma teoria topológica.

7.2 O modelo sigma com acoplamento mínimo e com o termo de Chern-Simons em um potencial hiperbólico tipo Higgs

7.2.1 O modelo $O(3)$ com acoplamento mínimo

Iniciamos, considerando à Lagrangiana do modelo descrita por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \vec{\phi} \cdot D^\mu \vec{\phi} + \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu F_{\nu\alpha} - \mathcal{U}(\Phi_3), \quad (7.23)$$

onde definimos a derivada covariante da seguinte forma:

$$D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} + A_\mu \hat{n}_3 \times \vec{\phi}. \quad (7.24)$$

É válido ressaltar, novamente, que no modelo $O(3)$ o campo escalar $\vec{\phi}$ é mapeado no espaço de Minkowski de duas esferas unitárias, denotadas por S^2 . Em outras palavras, $\vec{\phi}$ é um vetor de três componentes que satisfaz ao vínculo $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1$. Dependendo da escolha específica para o potencial, a Lagrangiana deve ser invariante sob uma *iso-rotação* ao redor de um eixo preferencial, neste caso, $\hat{n}_3 = (0, 0, 1)$. A natureza $U(1)$ do modelo pode ser facilmente vista pela seguinte identidade:

$$D_\mu \vec{\phi} \cdot D^\mu \vec{\phi} = |(\partial_\mu + iA_\mu)(\phi_1 + i\phi_2)|^2 + \partial_\mu \phi_3 \partial^\mu \phi_3. \quad (7.25)$$

Para garantir um sistema *self-dual*, consideramos um potencial da forma:

$$\mathcal{U}(\vec{\phi}) = \frac{1}{2\kappa^2} \{ \tanh^2[\xi(\vec{\phi} - \vec{\phi}_0) \cdot \hat{n}_3] + \tanh^2[\xi(\vec{\phi} + \vec{\phi}_0) \cdot \hat{n}_3] \}, \quad (7.26)$$

onde $\vec{\phi}_0$ é um vetor constante. Observamos, ainda, que o sistema possui dois estados de vácuo, dados por $\phi_0 = \pm \vec{\phi}_0 \cdot \hat{n}_3$, conforme apresentado na figura abaixo.

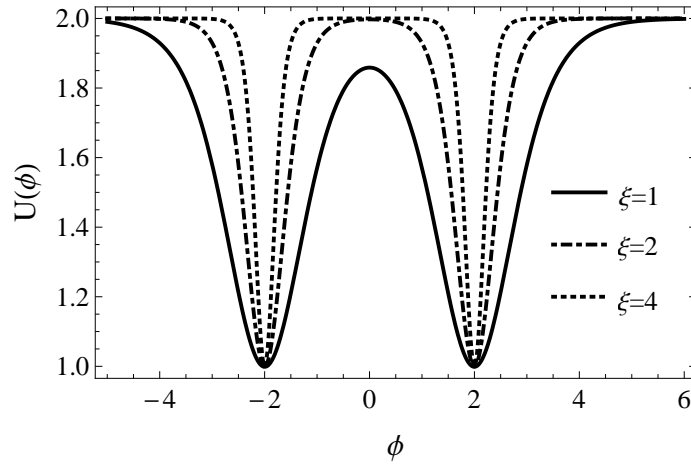


Fig. 7.8: Comportamento gráfico do potencial para vários valores do parâmetro de deformação

Como um resultado a simetria $SO(2)$ ($U(1)$) não é quebrada espontaneamente. Neste caso, é também interessante notar que a dinâmica do campo de *gauge* é governada somente pelo termo de Chern-Simons.

Neste ponto, é nosso dever chamar a atenção do leitor, novamente, para algumas convenções a serem utilizadas, por exemplo, ressaltamos que a assinatura métrica a ser utilizada é dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$ com $\varepsilon^{012} = 1$; $\mu, \nu = 0, 1, 2$ e $i, j = 1, 2$. Portanto, as equações de movimento para a Lagrangiana (7.23) são dadas por:

$$\vec{J}^\mu = -\vec{\phi} \times D^\mu \vec{\phi}, \quad (7.27)$$

com $\vec{J}^\mu = -j^\mu \hat{n}_3$ e

$$j^\mu = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\nu\alpha}. \quad (7.28)$$

Para o campo escalar, obtemos:

$$D_\mu D^\mu \vec{\phi} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vec{\phi}}. \quad (7.29)$$

Rearranjando as equações (7.27) e (7.29), chegamos à expressão:

$$D_\mu \vec{J}^\mu = \vec{\phi} \times \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vec{\phi}}. \quad (7.30)$$

A componente zero da expressão (7.28) é conhecida como lei de Gauss, com isto em mente, a lei de Gauss implica que a configuração do campo com fluxo magnético Φ_{flux} carrega essencialmente uma carga diferente de zero dada por $Q = -\kappa \Phi_{flux}$.

Como de costume, a energia funcional pode ser obtida por uma integração da componente T_{00} do tensor energia-momento em todo o espaço, ou pode ser obtida acoplando o campo gravitacional e então variando a ação em relação à métrica. De posse desse conceito, escrevemos o funcional de energia do modelo como:

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left[(D_1 \vec{\phi})^2 + (D_2 \vec{\phi})^2 + \frac{\kappa^2 F_{12}^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} + 2\mathcal{U} \right]. \quad (7.31)$$

Rearranjando o funcional de energia, chegamos à expressão:

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ (D_i \vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \times D_j \vec{\phi})^2 + \frac{\kappa^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} \left[F_{12} \mp \sqrt{\frac{2\mathcal{U}(\phi_1^2 + \phi_2^2)}{\kappa^2}} \right] \right\} \pm 4\pi \int d^2x \mathcal{K}_0. \quad (7.32)$$

A partir deste ponto, iremos definir a carga topológica do modelo como

$$\mathcal{K}_\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \left[\vec{\phi} \cdot D^\nu \vec{\phi} \times D^\lambda \vec{\phi} + F^{\nu\lambda} \sqrt{\frac{2\kappa^2 \mathcal{U}}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)}} \right]. \quad (7.33)$$

Por argumentações topológicas, sabemos que a energia (7.32) possui um limite inferior [25, 26, 45], isto é, devemos ter:

$$E \geq 4\pi \int d^2x \mathcal{Q}_0 \quad (7.34)$$

No limite de saturação da energia, as equações de movimento do modelo reduz-se para

$$D_i \vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \times D_j \vec{\phi} = 0; \quad (7.35)$$

$$F_{12} \mp \sqrt{\frac{2\mathcal{U}(\phi_1^2 + \phi_2^2)}{\kappa^2}} = 0. \quad (7.36)$$

Soluções de vórtices estáticos

Para investigar as equações de Bogomol'nyi numericamente, escolhemos, convenientemente, uma simetria rotacional para o campo variável [29, 47], ou seja,

$$\begin{aligned} \phi_1(\rho, \theta) &= \sin f(r) \cos N\theta; \\ \phi_2(\rho, \theta) &= \sin f(r) \sin N\theta; \\ \phi_3(\rho, \theta) &= \cos f(r) \end{aligned} \quad (7.37)$$

e

$$\vec{A}(\rho, \theta) = -\frac{Na(r)}{\kappa r} \hat{e}_\theta. \quad (7.38)$$

Considerando o potencial hiperbólico auto-dual, rescrevemos as equações de Bogomol'nyi

como

$$f'(r) = \pm N \frac{a+1}{r} \sin f(r); \quad (7.39)$$

$$a'(r) = \pm \frac{r}{N} \sqrt{(1 - \cos^2 f(r)) \{ \tanh^2[\xi(\cos f(r) + \phi_0)] + \tanh^2[\xi(\cos f(r) - \phi_0)] \}}. \quad (7.40)$$

com ϕ_0 sendo o valor esperado do vácuo e $f(r)$ sendo uma função arbitrária (campo variável). N é o parâmetro responsável pela vorticidade das soluções.

Desacoplando as equações anteriores, encontramos a equação do campo variável:

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} - \frac{f'(r)^2}{\tan f(r)} - \sin f(r) \sqrt{(1 - \cos^2 f(r)) \{ \tanh^2[\xi(\cos f(r) - \phi_0)] + \tanh^2[\xi(\cos f(r) + \phi_0)] \}} = 0. \quad (7.41)$$

Pode ser facilmente verificado que as equações de Bogomol'nyi (7.39-7.40) satisfazem as equações de movimento (7.30). Isso é bem discutido na literatura especializada, mas um leitor mais entusiasta pode consultar as referências [6, 29, 47].

Agora, estamos interessados em obter as soluções para equações (7.39) e (7.40). Para garantir que o campo não é singular na origem, consideramos que o campo variável na vizinhança da origem possui a forma:

$$f(0) = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.42)$$

e, em seguida, as soluções regulares na origem exigem que o comportamento inicial do *gauge* seja $a(0) = 0$. Além disso, as soluções são simétricas em $f(r) = 2\pi$. Portanto, devemos ter $f(0) = 0$ e $f(0) = \pi$ para as soluções topológicas e não topológicas. Se considerarmos a última condição, é útil usar a mudança de variável $f(r) = \pi + h(r)$. Também consideramos o sinal de baixo das equações de Bogomol'nyi e N sendo positivo. Para $h(r) \ll 1$, assumimos que o modelo tem soluções do tipo

$$h(r) = B_0 r^N \quad (7.43)$$

e conseqüentemente, obtemos que

$$a(r) = -\frac{B_0}{N(N+2)} \sqrt{\tanh[\xi(1+\phi_0)]^2 + \tanh[\xi(1-\phi_0)]^2} r^{N+2} + \mathcal{O}(r^{3N+2}). \quad (7.44)$$

Por outro lado, se considerarmos que $f(0) = 0$ e N negativo, obtemos na vizinhança da origem:

$$f(r) = \bar{B}_0 r^{-N} \quad (7.45)$$

nesse caso, a solução do campo de *gauge* é

$$a(r) = -\frac{\bar{B}_0}{N(2-N)} \sqrt{\tanh[\xi(1+\phi_0)]^2 + \tanh[\xi(1-\phi_0)]^2} r^{2-N} + \mathcal{O}(r^{2-3N}). \quad (7.46)$$

No infinito, existe dois comportamentos assintóticos distintos para a equação de Bogomol'nyi. Quando $f(\infty) = \pi$ e N positivo, $f(r)$ pode ser reescrito convenientemente como $f(r) = \pi + h(r)$, e então, para obter soluções de energia localizadas devemos ter $a(\infty) = -\eta_1$. Dessa forma, assumimos que

$$h(r) = C_\infty r^{N(1-\eta_1)}. \quad (7.47)$$

Como resultado, chegamos à expressão:

$$a(r) \simeq -\frac{C_\infty}{N[N(1-\eta_1)+2]} \sqrt{\tanh[\xi(1+\phi_0)]^2 + \tanh[\xi(1-\phi_0)]^2} r^{2N(1-\eta_1)+2} - \eta_1. \quad (7.48)$$

Para finalizar, analisamos o contorno $f(\infty) = 0$ e $a(\infty) = \eta_2$ com N negativo, ou seja, assumimos a solução:

$$f(r) = \bar{C}_\infty r^{N(1+\eta_2)}. \quad (7.49)$$

dessa maneira, obtemos o resultado:

$$a(r) \simeq -\frac{\bar{C}_\infty r^{N(1+\eta_2)+2}}{N[N(1+\eta_2)+2]} \sqrt{\frac{1}{2} \{ \tanh[\xi(1+\phi_0)]^2 + \tanh[\xi(1-\phi_0)]^2 \} + \eta_2} \quad (7.50)$$

note que os parâmetros $\eta_{1,2}$ dependem diretamente se a solução é topológica ou não topológica.

Resultados Numéricos

A partir de agora, voltamos nossa atenção para a análise numérica das equações de Bogomol'nyi (7.39 - 7.40). Inicialmente, investigamos numericamente as soluções topológicas com condições de contorno $f(0) = 0$ e $f(r \rightarrow \infty) = \pi$ com $N = 1$. Para obter as soluções numé-

ricas das equações de Bogomol'nyi acopladas, consideramos os comportamentos assintóticos expressos por (7.43), (7.44), (7.47) e (7.48). Desta forma, obtemos os resultados numéricos para $f(r)$, $a(r)$ e $B(r)$ como mostrado, respectivamente, nas figuras (7.9), (7.10) e (7.11).

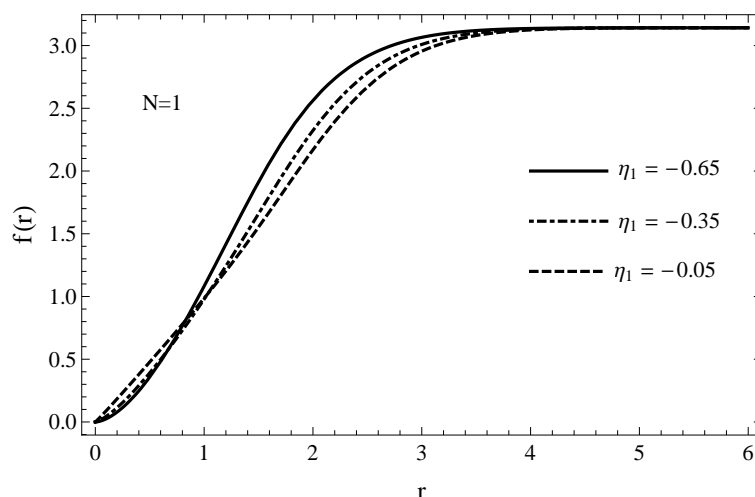


Fig. 7.9: Soluções numéricas dos vórtices topológicos para vários valores assintóticos do campo de *gauge*.

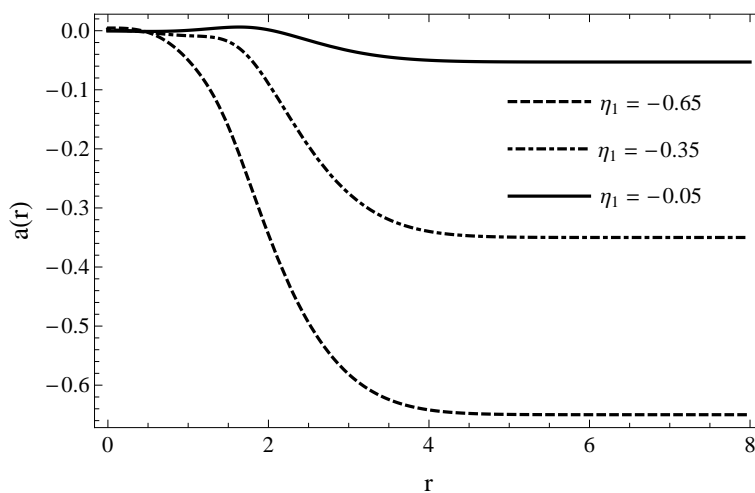


Fig. 7.10: Comportamento do campo de *gauge* topológico para diferentes valores do parâmetro η_1 .

Observamos que o campo variável e o comportamento do campo de *gauge* são similares aos resultados apresentados no modelo *Maxwell-Chern-Simons com acoplamento não-mínimo* [29]. Neste caso, como o campo de *gauge* é governado exclusivamente pelo termo de Chern-Simons e o modelo está sujeito ao potencial hiperbólico tipo Higgs, as soluções topológicas

são obtidas por $N = 1$. O comportamento do campo magnético com $N = 1$ é representado abaixo.

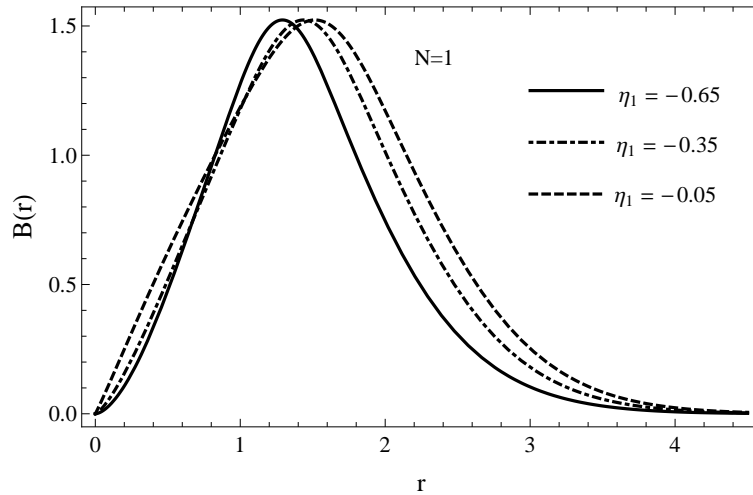


Fig. 7.11: A magnitude do campo magnético B como função de r para $N = 1$.

Para as soluções não-topológicas, investigamos numericamente a existência de soluções com $f(0) = \pi$, $f(r \rightarrow \infty) = \pi$ e $N = -1$ como condições de contorno. Com isto em mente, para encontrar as soluções numéricas para a equação de Bogomol'nyi acoplada, fazemos uso dos comportamentos assintóticos expressos por (7.45), (7.46), (7.49) e (7.50) e assim, obtemos os resultados numéricos abaixo.

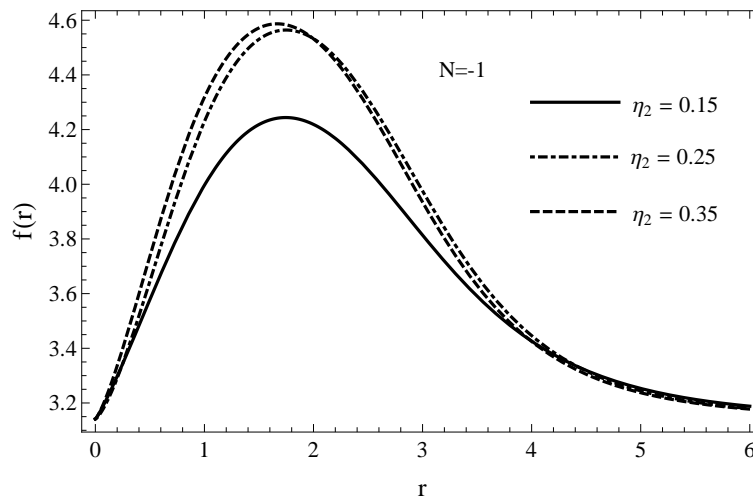


Fig. 7.12: Solução numérica do vórtice não-topológico para vários valores assintóticos do campo de *gauge*.

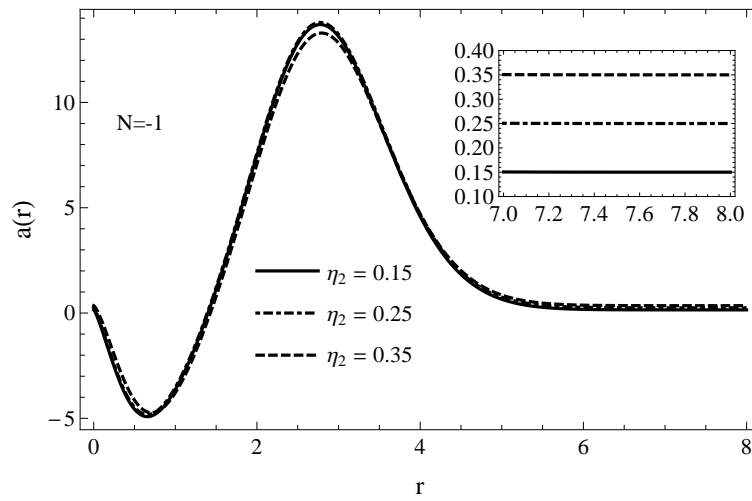


Fig. 7.13: Comportamento do campo de *gauge* para diferentes valores do parâmetro η_2 .

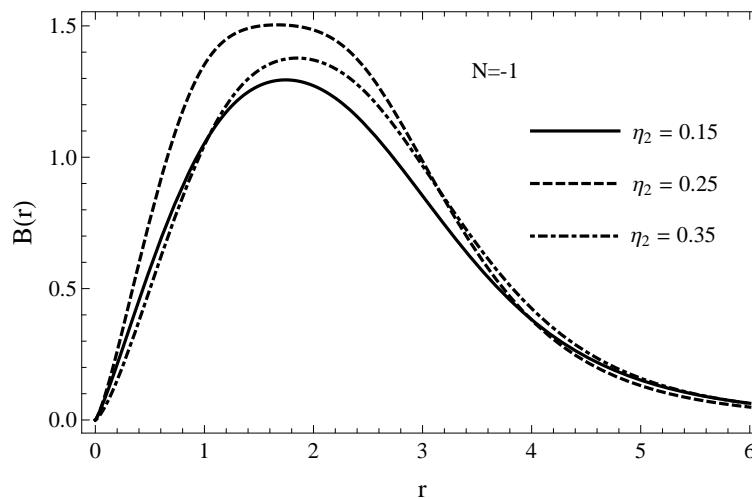


Fig. 7.14: A magnitude do campo campo magnético B como função de r para $N = -1$.

Observamos que, no caso não-topológico, o comportamento do campo magnético se assemelha ao comportamento do campo variável no caso $N = -1$, com os respectivos valores do parâmetro η_2 .

7.2.2 A constante dielétrica e o vórtice tipo compacton

Nesta seção, focamos nossa atenção na discussão de como a constante dielétrica modifica as soluções de vórtice do campo variável. Para atingir este objetivo, consideramos o lagrangiano escrito como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \vec{\phi} \cdot D^\mu \vec{\phi} + \frac{\kappa}{4} \omega(\vec{\phi}) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\lambda} - \mathcal{U}(\vec{\phi}), \quad (7.51)$$

onde ω é o parâmetro responsável por definir a constante dielétrica do modelo.

Seguindo alguns argumentos similares aos utilizados nas seções anteriores, obtemos mais uma vez que a corrente local é dada por

$$j^\mu = \frac{\kappa}{2} \omega(\vec{\phi}) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}, \quad (7.52)$$

onde $\vec{J}^\mu = -j^\mu \hat{n}_3$.

A equação de movimento do modelo permanece inalterada, ou seja,

$$\vec{J}^\mu = \vec{\phi} \times \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vec{\phi}}. \quad (7.53)$$

Construindo o funcional de energia, chegamos, novamente à expressão:

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ (D_1 \vec{\phi})^2 + (D_2 \vec{\phi})^2 + \frac{\kappa^2 \omega^2 F_{12}^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} + 2\mathcal{U} \right\}. \quad (7.54)$$

Rearranjando o funcional, nós obtemos à equação:

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ (D_i \vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \times D_j \vec{\phi})^2 + \frac{\kappa^2 \omega^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} \left(F_{12} \mp \sqrt{\frac{2\mathcal{U}(\phi_1^2 + \phi_2^2)}{\kappa^2 \omega^2}} \right)^2 \right\} + 4\pi \int d^2x \mathcal{K}_0. \quad (7.55)$$

Notamos que a carga topológica “adquire” um parâmetro devido a adição da constante dielétrica, a saber:

$$\mathcal{Q}_\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \left[\vec{\phi} \cdot D^\nu \vec{\phi} \times D^\lambda \vec{\phi} + F^{\nu\lambda} \sqrt{\frac{2\kappa^2 \omega^2 \mathcal{U}}{\phi_1^2 + \phi_2^2}} \right]. \quad (7.56)$$

Mais uma vez usamos a argumentação da seção anterior e escrevemos nas equações de

Bogomol'nyi. Dessa forma, obtemos:

$$D_i \vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \times D_j \vec{\phi} = 0; \quad (7.57)$$

$$F_{12} \mp \sqrt{\frac{2\mathcal{U}(\phi_1^2 + \phi_2^2)}{\kappa^2 \omega^2}} = 0. \quad (7.58)$$

Considerando o *ansatz* (7.37), obtemos as expressões acopladas:

$$f'(r) = \pm N \frac{a+1}{r} \sin f(r) \quad (7.59)$$

e

$$a'(r) = \pm \frac{r}{\omega N} \sqrt{(1 - \cos^2 f(r))(\tanh^2[\xi(\cos f(r) - 1)] + \tanh^2[\xi(\cos f(r) + 1)])} \quad (7.60)$$

Desacoplando as equações anteriores, obtemos:

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} - \frac{f'(r)^2}{\tan f(r)} - \frac{1}{\omega} \sin f(r) \sqrt{(1 - \cos^2 f(r))\{\tanh^2[\xi(\cos f(r) - \phi_0)] + \tanh^2[\xi(\cos f(r) + \phi_0)]\}} = 0. \quad (7.61)$$

A equação (7.61) é análoga à equação (7.41) quando o parâmetro $\omega = 1$. A partir de agora, nos concentramos em entender como a constante dielétrica modifica as soluções de campo variáveis. Com isso, iniciamos o estudo numérico da equação (7.61) utilizando os limites acima mencionados.

Estudo numérico da constante dielétrica

Primeiramente, para investigar numericamente a influência da constante dielétrica nas soluções do campo variável $f(r)$, consideramos a solução numérica apresentadas na fig. (7.9) com $a(\infty) = -0,35$. Então, consideramos o parâmetro ω como constante e o variamos numericamente. Como resultado, observamos que as soluções tipo *kink* adquirem uma característica de uma solução parecida a um compacton simplesmente variando numericamente a constante dielétrica do modelo. Em outras palavras, à medida que o campo de *gauge* ou as contribuições do termo Chern-Simons diminuem, as soluções tipo *kink* se tornam soluções do tipo compacton, como mostrado na fig. (7.15).

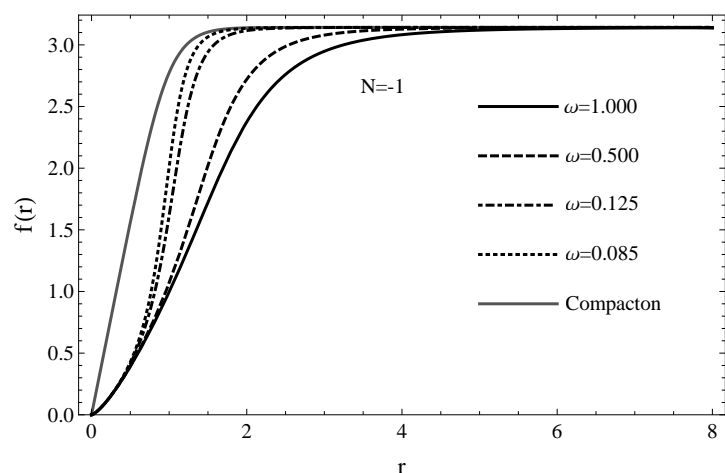


Fig. 7.15: Das soluções tipo *kink* as soluções tipo compacton.

Resultados interessantes também surgem quando nós variamos numericamente a constante dielétrica nas soluções não-topológicas apresentadas na fig. (7.13). Para este resultado, consideramos $\eta_2 = 0.25$ e variamos o parâmetro ω . O resultado desta investigação é mostrado na fig. (7.16). Neste caso, notamos que, quando aumentamos a contribuição do campo de *gauge*, as soluções solitônicas não-topológicas se aproximam das soluções do tipo *kink* para o campo variável.

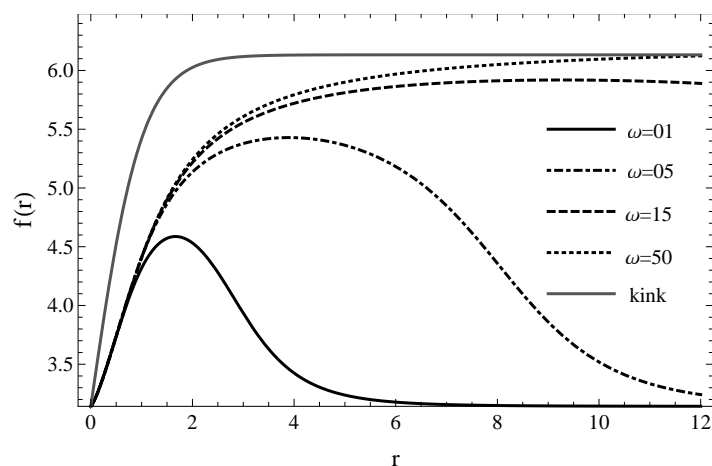


Fig. 7.16: Das soluções não-topológicas as soluções tipo *kink* para o campo variável.

Capítulo 8

Considerações Finais e Perspectivas

Nesta dissertação, discutimos os principais conceitos e ferramentas necessárias para o estudo de estruturas localizadas no modelo sigma não-linear. Para isto, iniciamos nossa dissertação realizando uma breve revisão: de alguns aspectos da teoria clássica de campos, alguns de conceitos em teoria dos sólitons de dimensão $(1+1)D$, e algumas discussões sobre as soluções de energia localizada do modelo sigma- $O(3)$ para um campo de *gauge* governado pelo termo de Chern-Simons com acoplamento mínimo.

No primeiro momento, investigamos a existência de soluções solitônicas no modelo Chern-Simons-Higgs restrito à condição topológica $f(r=0) = 0$. Para isso, usamos dois termos de acoplamento, o primeiro termo é relacionado ao termo cinético (Klein-Gordon) do modelo, o segundo termo é relacionado ao termo de generalização do *gauge* de Chern-Simons, esse último é também responsável pela finitude da densidade de energia. Semelhante à situação proposta por [14], o parâmetro ω é responsável por transformar as soluções tipo *kink* em soluções do tipo *compacton*. Assim, em oposição à referência [6], investigamos a existência de soluções fisicamente aceitáveis limitadas pelas condições de contorno $f(r=0) = 0$ e $f(r \rightarrow \infty) = \pi$. Como resultado, notamos que quando o parâmetro $\omega = 1$, reobtemos o caso particular estudado por Gosh, entretanto, ressaltamos um resultado interessante em oposição ao trabalho apresentado por Gosh em 1996 [6], esse resultado consiste basicamente na obtenção de soluções de estruturas localizadas no presente caso. Ainda, é válido observar que quando o parâmetro $\omega \geq 1$, obtemos soluções do tipo *kink* para o modelo com energia finita. Também observamos que quando o parâmetro $0 < \omega \leq 1$ temos soluções tipo *kink* se transformando continuamente em soluções tipo *compacton*. Como consequência, a densidade de energia BPS tende a se tornar mais localizada e mais pontiaguda à medida que as soluções tipo *kink* tendem as soluções tipo *compacton*. Fisicamente, podemos ver isso como uma consequência da indução magnética ser inversamente proporcional ao parâmetro

de compactificação, com isso, à medida que tendemos a compactar soluções, a contribuição do campo magnético aumenta significativamente e assim a densidade de energia BPS do modelo tendem a uma representação delta em torno da singularidade da solução. Por fim, notamos que quando ω é negativo definido, não há soluções semelhantes a *kink*, no entanto, podemos ver a existência de sólitons não-topológicos, onde essas soluções são bem discutidas por Ghosh [12]. Como visto em (7.7), o comprimento de onda dessas estruturas torna-se menor à medida que o parâmetro diminui. Observamos que resultados semelhantes podem ser obtidos para as condições de contorno estudadas por Gosh em 1996.

No segundo momento, voltamos nossa atenção ao estudo das soluções de vórtices do modelo sigma com termo Chern-Simons restrito a um potencial hiperbólico tipo Higgs. Como resultado, notamos que devido ao *ansatz* e o vínculo do modelo $O(3)$, para o contorno $f(0) = 0$ e $f(\infty) = \pi$ temos a chamadas soluções não-topológicas, uma vez que a carga topológica é dada por um parâmetro não-inteiro. Enquanto isso, para o contorno $f(0) = \pi$ e $f(\infty) = \pi$ temos as soluções topológicas, essas apresentam uma carga topológica do modelo descrita por um inteiro. Como consequência, os vórtices topológico do modelo apresentam uma energia quantizada dada por $\mathcal{E} = 4\pi|N|$, a carga sendo $Q = -\kappa\Phi_{flux}$ e o fluxo magnético dado por $\Phi_{flux} = 2\pi N\eta_1$. Ou seja, notamos que apesar da energia ser quantizada, o fluxo do modelo não é quantizado. Observamos, ainda, que para um N fixo existe uma família de soluções para diferentes valores de η_1 , isso implica que existe infinitas soluções degeneradas no modelo. As soluções ditas não-topológicas são caracterizada por uma energia $\mathcal{E} = 4\pi N\eta_2$, por um fluxo $\Phi_{flux} = 2\pi N\eta_2$ e carga $Q = -\kappa\Phi_{flux}$. Por fim, notamos que através da variação das constantes dielétricas (o termo que generaliza a contribuição do campo de *gauge* de Chern-Simons) do modelo, podemos levar as soluções do tipo *kink* (topológicas) a soluções do tipo *compacton* simplesmente variando numericamente a constante dielétrica do modelo. Em outras palavras, a medida que a contribuição do campo de *gauge*, ou do termos de Chern-Simons, diminui as soluções tipo *kink* são levadas as soluções do tipo *compacton* como apresentamos na fig. (7.15). Da mesma forma, observamos, que quando aumentamos a contribuição do campo de *gauge* as soluções não-topológicas aproximam-se das soluções tipo *kink* para o campo variável. Em outras palavras, as soluções não-topológicas tendem as soluções topológicas com $|Q_{top}| = N$.

Novas Perspectivas

Como perspectivas, buscaremos a partir deste ponto, investigar as soluções de vórtices tipo *compacton* para uma generalização dos modelos anteriores acoplados não-minimamente ao campo de *gauge*. Buscaremos, ainda, investigar tais soluções com o campo de *gauge*

governado pelos termos de Chern-Simons e Maxwell-Chern-Simons generalizado e restrito a potenciais arbitrários tipo Higgs no modelo sigma; no modelo $CP(2)$; no modelo *Baby Skyrme*.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Wilczek, *Quantum mechanics of fractional-spin particles*. Phys. Rev. Lett. v. **49** (1982) 957.
- [2] S. Desser; R. Jackiw and S. Templeton, *Topologically massive gauge theories*. Ann. Phys. v. **140** (1982) 372.
- [3] R. B. Laughlin, *Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations*. Phys. Rev. Lett. v. **50** (1983) 1395.
- [4] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern quantum mechanics*. Harlow: Pearson. (2014).
- [5] W. K. Tung, *Group theory in physics*. World Scientific Publis. Company. (1985).
- [6] P. K. Ghosh and S. K. Ghosh, *Topological and nontopological solitons in a gauged $O(3)$ sigma model with Chern-Simons term*. Phys. Lett. **B** v. bf 366 (1996) 199.
- [7] H. Leblond, *Bidimensional optical solitons in a quadratic medium*. J. Phys. **A**: Math. Gen. v. **31** (1998) 5129.
- [8] D. N. Christodoulides and R. I. Joseph, *Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides*. Opt. Lett. v. **13** (1988) 794.
- [9] H. S. Eisenberg; Y. Silberberg; R. Morandotti; A. R. Boyd and J. S. Aitchinson, *Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays*. Phys. Rev. Lett. v. **81** (1998) 3383.
- [10] R. Morandotti; H. S. Eisenberg; Y. Silberberg; M. Sorel and J. S. Aitchison, *Self-focusing and defocusing in waveguide arrays*. Phys. Rev. Lett. v. **86** (2000) 3296.
- [11] J. W. Fleischer; M. Segev; N. K. Efremidis and D. N. Christodoulides, *Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices*. Lett. to Nature. v. **422** (2003) 147.

- [12] P. Rosenau and J. M. Hyman, *Compactons: Solitons with finite wavelength*. Phys. Rev. Lett. v. **70** (1993) 564.
- [13] H. Nielsen and P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*. Nucl. Phys. **B** v. **61** (1973) 1064.
- [14] R. Casana; M. L. Dias and E. da Hora, *Topological first-order vortices in a gauged CP (2) model*. Phys. Lett. **B** v. **768** (2017) 254.
- [15] P.-O. Jubert; R. Allenspach and A. Bischof, *Magnetic domain walls in constrained geometries*. Phys. Rev. **B** v. **69**, 220410(R) (2004).
- [16] N. Romming; C. Hanneken; M. Menzel; J. E. Bickel; B. Wolter; K von-Bergmann and R. Wiesendanger, *Writing and deleting single magnetic skyrmions*. Science v. **341** (2013) 636.
- [17] D. Bazeia and D. V. Vassilevich, *Note on quantum compactons*. Phys. Rev. **D** v. **91** (2015) 047701.
- [18] D. Bazeia; E. E. M. Lima and L. Losano, *High temperature effects on compact-like structures*. Eur. Phys. J. **C** v. **76** (2016) 418.
- [19] D. F. S. Veras; W. T. Cruz; R. V. Maluf and C. A. S. Almeida, *Gravity localization on hybrid branes*. Phys. Lett. **B** v. **754** (2017) 201.
- [20] O. DeWolfe; D. Z. Freedman; S. S. Gubser and A. Karch, *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*. Phys. Rev. **D**, v. **62** (2000) 046008.
- [21] D. Bazeia; L. Losano; M. A. Marques and R. Menezes, *From kinks to compactons*. Phys. Lett. **B**, v. **736** (2014) 515.
- [22] D. Bazeia; M. A. Marques and R. Menezes, *Models for asymmetric hybrid brane*. Phys. Rev. **D**, v. **92** (2015) 084058.
- [23] D. F. S. Veras and C. A. S. Almeida, *Corrections to Newton's law of gravitation in the context of codimension-1 warped thick braneworlds*. Phys. Rev. **D**, v. **95** (2017) 104032.
- [24] A. A. Belavin, and A. M. Polyakov, *Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets*. JETP Lett. v. **22** (1975) 245.
- [25] R. Rajaraman, *Solitons and instantons*, North-Holland Phys. Pub. 1st ed. (1982).

- [26] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*. Cambridge University Press, 1st ed. (2004).
- [27] B. M. Piette; B. J. Schroers and W. J. Zakrzewski, *Dynamics of baby skyrmions*. Nuclear Phys. **B** v. **439** (1995) 205.
- [28] R.A. Leese, *Q-lumps and their interactions*. Nucl. Phys. **B** v. **366** (1991) 283.
- [29] F. S. A. Cavalcante; M. S. Cunha and C. A. S. Almeida, *Vortices in a nonminimal Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma model*. Phys. Lett. **B** v. **475** (2000) 315.
- [30] K. Lee, *Vortex dynamics in self-dual Maxwell-Higgs systems with a uniform background electric charge density*. Phys. Rev. **D**, v. **49** (1994) 4265.
- [31] C. Lee; K. Lee and H. Min, *Self-Dual Maxwell-Chern-Simons Solitons*. Phys. Lett. **B** v. **252** (1990) 79.
- [32] H. Goldstein; C. Poole and J. Safko, *Classical mechanics*. Addison-Wesley, 3st ed. (2002).
- [33] W. Rindler, *Relativity: special, general, and cosmological* (2003).
- [34] A. Samoilenka and Y. Shnir, *Gauged baby Skyrme model with a Chern-Simons term*. Physical Review **D** v. **95** (2017) 045002.
- [35] V. Rubakov, *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press, (2009).
- [36] E. M. Peskin, *An introduction to quantum field theory*. CRC Press, (2018).
- [37] M. Srednicki, *Quantum field theory*. Cambridge University Press, (2007).
- [38] J. -H. He, *Asymptotic methods for solitary solutions and compactons*. In: Abstract and applied analysis. Hindawi, (2012).
- [39] C. S. Gardner; J. M. Greene; M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*. Phys. Rev. Lett. v. **19**, (1967) 1095.
- [40] J.-H. He, S. D. Zhu, “Soliton perturbation”, in *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, R. Meyers, vol. **9**, Springer, New York, NY, USA, (2009) 8453–8457.
- [41] M. Gell-Mann and M. LÉVY, *The axial vector current in beta decay*. II Nuovo Cimento (1955-1965), v. **16**, (1960) 705.

- [42] M. A. Metlitski; C. A. Fuertes and S. Sachdev, *Entanglement entropy in the $O(N)$ model*. Phys. Rev. **B**, v. **80**, (2009) 115122.
- [43] F. Bruckmann; C. Gattringer; T. Kloiber and T. Sulejmanpasic, *Two-dimensional $O(3)$ model at nonzero density: From dual lattice simulations to repulsive bosons*, Phys. Rev. **D** v. **94**, (2016) 114503.
- [44] D. Sénéchal, *Mass gap of the nonlinear σ model through the finite-temperature effective action*. Phys. Rev. **B**, v. **47**, (1993) 8353.
- [45] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*. Yad. Fiz. v. **24**, (1976) 861-870.
- [46] N. A. Atmaja and H. S. Ramadhan, *Bogomol'nyi equations of classical solutions*. Phys. Rev. **D**, v. **90**, (2014) 105009.
- [47] M. S. Cunha; R. R. Landim and C. A. S. Almeida, *Nonminimal Maxwell-Chern-Simons- $O(3)$ - σ vortices: Asymmetric potential case*. Phys. Rev. **D**, v. **74**, (2006) 067701.
- [48] H. R. Christiansen; M. S. Cunha; J. A. Helayël-Neto; L. R. U. Manssur and A. L. M. A. Nogueira, *Self-dual vortices in a maxwell chern-simons with nonminimal coupling*. Int. Journal of Modern Phys. **A**, v. **14**, (1999) 1721.
- [49] R. Casana; G. Lazar and L. Sourrouille, *Self-dual effective compact and true compacton configurations in generalized Abelian Higgs models*. Adv. in High Energy Physics, v. 2018, (2018).