



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

MICHELÂNGELO CAMÕES FROST SOUSA COSTA ARAÚJO

**ESPALHAMENTO ELÉTRON-MÚON NA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COM
TEMPERATURA FINITA**

FORTALEZA

2019

MICHELÂNGELO CAMÕES FROST SOUSA COSTA ARAÚJO

ESPALHAMENTO ELÉTRON-MÚON NA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COM
TEMPERATURA FINITA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

FORTALEZA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

-
- A69e Araújo, Michelângelo Camões Frost Sousa Costa.
Espalhamento elétron-múon na eletrodinâmica quântica com temperatura finita / Michelângelo Camões Frost Sousa Costa Araújo. – 2019.
84 f.: il.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.
1. Espalhamento Termal. 2. Seção de Choque Termal. 3. Dinâmica de Campos Térmicos. 4. Temperatura Finita. 5. Transformação de Bogoliubov. I. Título.

CDD 530

MICHELÂNGELO CAMÕES FROST SOUSA COSTA ARAÚJO

ESPALHAMENTO ELÉTRON-MÚON NA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COM
TEMPERATURA FINITA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 17/07/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wilami Teixeira da Cruz
Instituto Federal do Ceará - Campus Juazeiro do Norte
(IFCE)

Ao meu avô João Costa Araújo, que descansa
em paz.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Hélio Costa Araújo e Maria Fátima de Sousa por todo o amor, confiança e apoio incondicional.

A minha querida noiva Adriana, que vem me apoiando desde o início da minha jornada como estudante de graduação da UFC.

A minha querida sobrinha Luz, que ilumina meus dias com seu lindo sorriso.

A minha tia Maria do Amparo, por toda assistência concedida e por todos esses anos em que moramos juntos.

Ao meu orientador Roberto V. M. Cavalcante por sempre me motivar e me dar toda assistência necessária para seguir com a pesquisa.

Ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida, por todos os conselhos e discussões motivadoras.

A esta universidade, todo o corpo docente, direção e administração, em especial aos professores Ricardo Renan Landim de Carvalho, Ilde Guedes da Silva, Jose Ramos Goncalves e Carlos William de Araujo Paschoal por todos os ensinamentos que me conduziram até aqui.

Aos meus amigos Adevaldo, Cleiton, Rubens, Matheus e Adailton por todos os momentos de descontração e desabafo.

Ao professor Dr. José Euclides Gomes da Silva por sempre estar disponível para todos os tipos de discussões.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) pelos recursos em mim investidos.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo calcular a seção de choque para o processo de espalhamento elétron-múon na Eletrodinâmica Quântica (QED) à temperatura finita. Inicialmente, nós introduzimos as propriedades básicas da quantização canônica e discutimos o formalismo de interação para as teorias $\lambda\phi^4$, Yukawa e QED. As regras de Feynman para a matriz de espalhamento \mathcal{M} e, portanto, para a seção de choque são primeiramente avaliadas em temperatura zero. Na segunda parte deste trabalho, os efeitos de temperatura finita passam a ser considerados através do formalismo da Dinâmica de Campos Térmicos (DCT). Este possui como principal característica a construção de um estado de vácuo termal a partir da duplicação dos graus de liberdade do sistema que, por sua vez, gera um espaço de Hilbert dobrado denominado espaço de Hilbert termal. Como consequência imediata, será possível construir um operador $U(\beta)$, chamado operador transformação de Bogoliubov, que permitirá introduzir operadores térmicos de modo que as técnicas desenvolvidas em temperatura zero possam ser generalizadas facilmente para o caso de temperatura finita. De fato, os propagadores termais para os campos escalar e de Dirac serão avaliados sem muitas dificuldades através de um procedimento bastante análogo ao da Teoria Quântica de Campo (TQC) convencional. O propagador termal do fóton também será calculado, mas através de um procedimento bastante diferente. Como veremos, será possível definir um produto matricial que conduzirá a uma matriz propagadora cujos elementos da diagonal principal são, respectivamente, os propagadores termais do fóton no espaço original e til. As regras de Feynman para a matriz de espalhamento dependente da temperatura $\mathcal{M}(\beta)$ são também avaliadas. Em vista da duplicação dos graus de liberdade do sistema, o formalismo DCT introduzirá novos vértices de interação, para levar em consideração o sistema til, de modo que o número de diagramas de Feynman que contribuem para o espalhamento será dobrado. Por fim, a seção de choque modificada pela temperatura é calculada explicitamente e, através da análise de limites, será concluído que a medida que a temperatura aumenta, as partículas envolvidas se espalham cada vez menos até um determinado valor limite da seção de choque.

Palavras-chave: Espalhamento Termal. Seção de Choque Termal. Dinâmica de Campos Térmicos. Temperatura Finita. Transformação de Bogoliubov.

ABSTRACT

This work aims to evaluate the cross section for the electron-muon scattering process in Quantum Electrodynamics at finite temperature. We'll initially introduced the basic properties of canonical quantization and discuss the interaction formalism to $\lambda\phi^4$, Yukawa and QED theory. The Feynman's rules to the scattering matrix \mathcal{M} and therefore to the cross section are first evaluated at zero temperature. On the second part of this work the thermal effects are to be considered through Thermo Field Dynamics (TFD) formalism. This has as its main feature the construction of a thermal vacuum state by doubling the degrees of freedom of the system which in turn generates a duplicate Hilbert space called a thermal Hilbert space. As an immediate consequence, it will be possible to construct a operator $U(\beta)$, called Bogoliubov transformation operator, which will allow to introduce thermal operators so that the techniques developed at zero temperature can be easily generalized for the finite temperature case. In fact, the thermal propagators for the scalar and Dirac fields will be evaluated without much difficulty through a procedure quite analogous to the conventional Quantum Field Theory (QFT) procedure. The thermal photon propagator will also be calculated, but by a quite different procedure. As we will see, it will be possible to define a matrix product that will lead to a propagating matrix whose elements of the main diagonal are, respectively, the thermal propagators of the photon in the original and tilde space. Feynman's rules for the temperature-dependent scattering matrix $\mathcal{M}(\beta)$ are also evaluated. In view of the doubling freedom degrees of the system, the DCT formalism will introduce new interaction vertices to take into account the tilde system, so that the number of Feynman diagrams contributing to the scattering will be doubled. Finally, the temperature-modified cross section is explicitly calculated and, through limit analysis, it will be concluded that as the temperature increases, the particles involved spread less and less to a certain limit value of the cross section.

Keywords: Thermal Scattering. Thermal Cross Section. Thermo Field Dynamics. Finite Temperature. Bogoliubov Transformation.

LISTA DE SIGLAS

TQC	Teoria Quântica de Campos
MP	Modelo Padrão
MPE	Modelo Padrão Estendido
QED	Eletrodinâmica Quântica
MQ	Mecânica Quântica
TRE	Teoria da Relatividade Especial
TDF	Thermo Field Dynamics
TCT	Teoria de Campos Termiais
DCT	Dinâmica de Campos Térmicos
QFT	Quantum Field Theory

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPELHAMENTO EM TEMPERATURA ZERO.	13
2.1	Teorias de interação e aspectos da quantização canônica.	13
2.2	Operador evolução temporal e matriz de espalhamento S	20
2.3	Diagramas de Feynman e a matriz \mathcal{M}	23
2.3.1	Regras de Feynman para a matriz \mathcal{M} na teoria $\lambda\phi^4$	23
2.3.2	Regras de Feynman para a matriz \mathcal{M} na teoria de Yukawa.	30
2.3.3	Regras de Feynman para a matriz \mathcal{M} na QED.	35
2.4	Seção de choque total para o espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$	38
3	O FORMALISMO DCT.	43
3.1	O estado de vácuo termal.	43
3.2	A álgebra de Lie termal.	45
3.3	Osciladores termais.	47
3.3.1	Oscilador fermiônico.	47
3.3.2	Oscilador bosônico.	54
3.4	O campo escalar termal.	59
3.5	O campo fermiônico termal.	65
3.6	O propagador termal do fóton.	68
4	SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPALHAMENTO EM TEMPERATURA FINITA.	71
4.1	Operador evolução temporal e a matriz S termal.	71
4.2	Regras de Feynman para a matriz $\mathcal{M}(\beta)$	72
4.3	Seção de choque termal total para o espalhamento $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	79
5	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

A Teoria Quântica de Campos a Temperatura Finita, também conhecida como Teoria de Campos Térmicos (TCT), foi desenvolvida para fornecer uma descrição estatística de sistemas físicos através de técnicas bem fundamentadas da Teoria de Campos convencional, estabelecida em temperatura zero (1). A primeira abordagem sistemática para TCT foi proposta por Takeo Matsubara no ano de 1955 (2). Em seu trabalho, Matsubara propõe um formalismo de tempo imaginário que se aplica muito bem a sistemas em equilíbrio termodinâmico, uma vez que o tempo t é negociado em função da temperatura T através da relação $t = -i/T$. Apesar de ser o mais antigo, o formalismo proposto por Matsubara vem ainda hoje sendo aplicado nas mais diversas áreas da física. Na referência (3), por exemplo, efeitos de temperatura são investigados no cálculo da pressão de Casimir para um campo escalar em um espaço Euclidiano D -dimensional com duas dimensões compactas, uma espacial, de comprimento L e outra de tempo imaginário com comprimento β . Em trabalho mais recente, correções de temperatura para valores esperados no vácuo de campos escalares e fermiônicos são investigados no cenário de espaço-tempo curvo anti-de-Sitter (ADS) pela referência (4).

Uma outra forma de se trabalhar com a TCT é através do formalismo Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) proposto por Yasushi Takahashi e Hiroomi Umezawa (5). Neste formalismo, o tempo é tido como um parâmetro real e é tratado independentemente da temperatura (2). A ideia central do formalismo DCT é a construção de um estado vácuo termal $|0(\beta)\rangle$ de modo que a média estatística de um observável A possa ser obtida pelo valor esperado $\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle$ (6, 7). Como veremos, isto permitirá realizar uma análise perturbativa, através das técnicas diagramáticas de Feynman, de uma maneira bastante análoga ao caso de temperatura zero. Do ponto de vista de aplicação, o formalismo DCT tem sido amplamente utilizado para investigar como a presença de uma temperatura diferente de zero modifica a seção de choque de espalhamento. Na referência (8), por exemplo, a seção de choque termal foi avaliada para o espalhamento Bhabha (9) ($e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$) no cenário de violação de Lorentz (VL). Foi verificado que no limite de altas temperaturas as modificações foram realmente significativas. Este trabalho proporcionou uma generalização daquele abordado em temperatura zero pela referência (10). De modo semelhante ao trabalho da referência (8), onde um termo de acoplamento não mínimo do tipo $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho}b^\nu F^{\alpha\rho}$ foi acrescentado à derivada covariante, a seção de choque em temperatura finita para o espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ foi avaliada em (11).

O formalismo DCT também tem sido utilizado para avaliar processos de espalhamentos envolvendo uma analogia formal entre gravitação e eletromagnetismo embasada pela teoria conhecida na literatura por “Gravitoeletromagnética” (GEM) (12, 13, 14, 15, 16). A

GEM considera que massas em movimento geram um campo “gravitomagnético” da mesma forma que cargas em movimento geram um campo magnético. Além disto, ela supõe que a velocidade de propagação do campo gravitacional seja igual a velocidade da Luz (13). A Lagrangiana que descreve tal sistema foi avaliada na referência (17) e as consequências diretas deste formalismo é a possibilidade de haver interação entre grávitons, fótons e partículas carregadas. Neste sentido, a seção de choque em temperatura finita para o espalhamento Möller ($e^-e^- \rightarrow e^-e^-$) mediado por um gráviton foi calculada na referencia (18).

Ainda no contexto da GEM, a seção de choque para o espalhamento Bhabha mediado por um gráviton foi avaliada tanto no cenário de violação de Lorentz, através de um acoplamento não mínimo do tipo tensorial proveniente do setor gravitacional do Modelo Padrão Estendido (MPE) (19), como no cenário de temperatura finita através do formalismo DCT pela referência (20). O MPE foi concebido por Colladay e Kostelecky como uma teoria efetiva de campos capaz de estudar possíveis efeitos residuais da violação da simetria de Lorentz devido a quantização da gravidade na escala de Planck e ele contém todos os possíveis operadores que violam a simetria de Lorentz e que preservam alguns pré-requisitos básicos que uma teoria quântica deve ter, como unitariedade e causalidade (21, 22).

Também pelo formalismo DCT, a taxa de decaimento termal para a análoga gravito-eletromagnética da radiação Cherenkov foi calculada na referência (23). A radiação Cherenkov é uma radiação eletromagnética liberada por uma partícula carregada se movendo em um meio com velocidade maior que a velocidade de fase da luz nesse meio (24, 25). Ela foi verificada experimentalmente por Pavel Cherenkov em 1937 (26). Anteriormente, a radiação Cherenkov e também a radiação gravitacional Cherenkov já aviam sido avaliadas em temperatura finita pelas referências (27, 28).

Do ponto de vista experimental, o desenvolvimento da TCT tem possibilitado a análise de sistemas físicos onde a dependência na temperatura não pode ser negligenciada. Em experimentos envolvendo colisões de íons pesados realizados no “Relativistic Heavy Ion Collider” (RHIC), nos Estados Unidos, e também no “Large Hadron Collider” (LHC), próximo a Genebra, na Suíça, por exemplo, têm conduzido a um novo estado da matéria, denominado plasma quark-glúon, onde as temperaturas são da ordem de 175 MeV . Entender o comportamento de expansão deste plasma, assim como a viscosidades e a rapidez de termalização dos estados iniciais, pode fornecer estruturas teóricas para possíveis aplicações em cosmologia. A Radiação Cósmica de Fundo, por exemplo, pode ser melhor entendida após um desenvolvimento teórico que permita a descrição da produção de pares diléptons e fótons provenientes do plasma quark-glúon quente. Neste sentido, o cálculo da seção de choque de espalhamento para produção de dois fótons de pares diléptons em colisões ultra-periféricas de íons pesados foi calculada com uma concordância bastante significativa com os dados experimentais provenientes

das colaborações STAR E ALICE (29).

Em vista da grande aplicabilidade recente do formalismo DCT em processos de espalhamento, este trabalho tem como objetivo principal calcular a seção de choque em temperatura finita para o processo de espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ mediado por um fóton. Com esta finalidade esta dissertação de mestrado está organizada como se segue:

O capítulo (2) é destinado a uma revisão do formalismo da TQC em temperatura zero. Nós apresentamos os conceitos básico da quantização canônica e desenvolvemos a teoria de espalhamento para as teorias $\lambda\phi^4$, Yukawa e QED. A seção de choque total em temperatura zero para o espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ é calculada explicitamente.

No capítulo (3), o formalismo DCT será formalmente apresentado. Através da duplicação do espaço de Hilbert, será possível construir um estado de vácuo termal que permitirá analisar sistemas como o oscilador bosônico e o oscilador fermiônico, no cenário de temperatura diferente de zero, através de um método algébrico bastante semelhante àquele dos operadores escadas da Mecânica Quântica (MQ) convencional. Além disso, estes sistemas permitirão uma generalização bastante direta para um tratamento adequado da teoria de campos térmicos. Neste sentido, campos escalares e fermiônicos serão avaliados pelo formalismo DCT, assim como os respectivos propagadores. Também, na última seção deste capítulo, o propagador do fóton será calculado sem muitas dificuldades.

No capítulo (4), as regras de Feynman para a matriz $\mathcal{M}(\beta)$ serão encontradas através de um procedimento análogo aquele realizado no capítulo (2). Como veremos, o formalismo DCT acrescentará vértices de interação a teoria de modo que o número de diagramas de Feynman que contribuem para o espalhamento é duplicado. Por fim, a seção de choque à temperatura finita para o processo $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ é calculada explicitamente e, ao analisar o resultado, será possível concluir que a medida que a temperatura aumenta a seção de choque termal diminui até um valor limite de 1/4 da seção de choque convencional. Além disso, no limite de temperatura indo a zero, nós recobramos o resultado convencional.

No capítulo (5), as conclusões e perspectivas futuras serão abordadas.

2 SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPELHAMENTO EM TEMPERATURA ZERO.

Este Capítulo tem por objetivo o cálculo da seção de choque de espalhamento σ para o processo $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ através de técnicas diagramáticas da TQC em temperatura zero. As primeiras seções serão dedicadas a uma breve revisão da teoria. Na última seção, σ será calculada explicitamente.

2.1 Teorias de interação e aspectos da quantização canônica.

O estudo da física de partículas elementares possui dois objetivos principais: identificar as partículas envolvidas pelo o sistema em observação e entender como as mesmas interagem entre si (30). Deste modo, o desenvolvimento de uma teoria que permita descrever interações entre partículas torna-se imprescindível.

A descrição de um sistema físico qualquer pode ser feita através do formalismo Hamiltoniano ou do formalismo Lagrangiano. Estes são fundamentais no estudo de Teoria Quântica de Campos (TQC) e as razões para isto estão muito bem explicadas na referência (31). Em particular, o formalismo Lagrangiano lida muito bem com simetrias (32).

A forma funcional da Lagrangiana, por sua vez, deve preservar causalidade. Neste sentido, o produto de dois ou mais campos devem levar em conta o mesmo ponto do espaço tempo. Então, termos como $[\phi(x)]^2$ ou $[\phi(x)]^4$ são permitidos, enquanto que um produto do tipo $\bar{\psi}(x)\psi(y)$ deve ser fortemente evitado¹ (33). Além disso, é interessante que ela seja tão simples quanto possível². Como primeira tentativa, uma teoria do tipo polinomial deve ser considerada (32). Assim, sendo

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad (2.1)$$

a Lagrangiana do sistema, a densidade Lagrangiana \mathcal{L} pode primeiramente ser pensada como (32)

$$\mathcal{L} = \alpha_1 \phi + \alpha_2 (\phi)^2 + \dots + \beta_1 (\partial_\mu \phi)^2 + \dots \quad (2.2)$$

De um modo geral, a densidade Lagrangiana (2.2) pode ser escrita como a soma de dois termos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{livre} + \mathcal{L}_{int}. \quad (2.3)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade é correspondente a teoria sem interação, teoria livre. Já o segundo termo descreve a parte de interação do sistema (33).

Neste trabalho abordaremos três teorias de interações bastante conhecidas na literatura

¹Dedicaremos a letra ϕ para designar campos escalares e ψ para campos espinoriais

²Sempre levando em conta os dados experimentais.

tura: a teoria $\lambda\phi^4$, a teoria de Yukawa e a Eletrodinâmica Quântica (QED). A primeira, descreve a auto-interação entre partículas escalares bosônicas³ (31). Já a teoria de Yukawa e a QED, por outro lado, permitem avaliar a interação entre partículas fermiônicas bosônicas (33).

A Lagrangiana que descreve a teoria de campos escalares, com interação do tipo $\lambda\phi^4$ (33), é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4, \quad (2.4)$$

onde o termo de interação⁴ é

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4!}\lambda\phi^4. \quad (2.5)$$

A equação de campo correspondente a densidade Lagrangiana (2.4) (31, 33) é

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{1}{3!}\lambda\phi^3. \quad (2.6)$$

Para o caso livre, onde a constante de acoplamento λ tende a zero, a equação (2.6) se reduz a

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (2.7)$$

cuja a solução⁵,

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right), \quad (2.8)$$

pode ser encontrada fazendo uma expansão de Fourier no campo ϕ (35). A solução (2.8) deve ser entendida como um operador de campo que tem o potencial de criar e destruir partículas escalares (36). Além disso, os operadores de aniquilação e criação $a_{\vec{p}}$ e $a_{\vec{p}}^\dagger$ devem satisfazer relações de comutação (35, 37) dadas por

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.9)$$

Estas podem ser obtidas exigindo que o campo (2.8) satisfaça⁶

$$[\phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.10)$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = [\Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)] = 0$$

onde

$$\Pi(\vec{y}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi(\vec{y}, t)} = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{y}, t) \quad (2.11)$$

³Bósons são partículas de spin inteiro.

⁴Termos de interação são caracterizados pelo produto de três ou mais campos (34).

⁵Neste trabalho, estaremos fazendo uso da notação $a(\vec{p}) \equiv a_{\vec{p}}$.

⁶As relações (2.10) podem ser pensadas como uma generalização das relações de comutação canônica da Mecânica Quântica $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ e $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$ (33, 38).

é o momento canônico conjugado ao campo $\phi(\vec{y}, t)$ (33, 35, 39).

O operador $a_{\vec{p}}^\dagger$ permite construir um estado de partícula de momento p através da relação

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle, \quad (2.12)$$

onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo da teoria⁷ (39). Através da relação (2.9), pode-se mostrar que estes estados satisfazem a condição de normalização

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}). \quad (2.13)$$

Por outro lado, da equação (2.12), o estado de partícula “Bra” é escrito como

$$\langle \vec{p} | = \langle 0 | a_{\vec{p}} \sqrt{2E_{\vec{p}}}. \quad (2.14)$$

Além disso, como $|0\rangle$ é um estado de vácuo, devemos considerar que $a_{\vec{p}} |0\rangle = 0$ e $\langle 0 | a_{\vec{p}}^\dagger = 0$ (39).

Uma outra quantidade que desempenhará um papel fundamental na construção da seção de choque de espalhamento é o propagador de Feynman. Para o campo escalar, o propagador (33) é dado por⁸

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &\equiv \langle 0 | \mathcal{T} [\phi(\vec{x}, x^0) \phi(\vec{y}, y^0)] | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi^4)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde \mathcal{T} , denominado operador ordenamento temporal, significa que (33, 37)

$$\mathcal{T} [\phi(\vec{x}, x^0) \phi(\vec{y}, y^0)] = \begin{cases} \phi(\vec{x}, x^0) \phi(\vec{y}, y^0) & \text{se } x^0 > y^0 \\ \phi(\vec{y}, y^0) \phi(\vec{x}, x^0) & \text{se } y^0 > x^0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

O propagador (2.15) nada mais é do que a função de Green de dois pontos para o operador de Klein-Gordon (36) e, de fato, pode ser obtido da equação

$$(\square + m^2) D_F(x-y) = -i\delta^4(x-y) \quad (2.17)$$

através de uma expansão de Fourier e da representação integral da delta de Dirac (33)

$$\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.18)$$

⁷O estado de vácuo caracteriza uma ausência de partículas e é tido como auto-estado do Hamiltoniano livre H_0 com auto-valor nulo (33).

⁸O termo $i\epsilon$, no denominador, é a prescrição do contorno de integração de Feynman. Para mais detalhes veja referência (35).

A interpretação física para propagadores é que eles representam a propagação de partículas que foram criadas em um ponto e destruídas em outro (33, 36).

A segunda teoria de interação que será abordada neste trabalho será a teoria de Yukawa, onde a Lagrangiana⁹ (33) é dada por

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Klein-Gordon} - g\bar{\psi}\psi\phi. \quad (2.19)$$

O termo de interação de Yukawa

$$\mathcal{L}_{int} = -g\bar{\psi}\psi\phi \quad (2.20)$$

acopla campos espinoriais ao campo escalar, permitindo assim a interação entre férmions e bósons (33). O segundo termo do lado direito da igualdade em (2.19) é a Lagrangiana de Klein-Gordon Livre, ou seja, os dois primeiros termos de (2.4). O terceiro termo é a Lagrangiana de Dirac livre

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - m)\psi \quad (2.21)$$

cujas equações de campo satisfeitas por ψ é dada por

$$(i\rlap{/}\partial - m)\psi(x) = 0, \quad (2.22)$$

onde¹⁰ $\rlap{/}\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ e ¹¹

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

são as matrizes de Dirac expressas na representação quirial¹². O campo $\bar{\psi}$, definido como $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, satisfaz uma equação de campo semelhante a (2.22) e é, portanto, tratado independentemente de ψ . Devemos entender $\sigma^\mu = (I_{2 \times 2}, \vec{\sigma})$ e $\bar{\sigma}^\mu = (I_{2 \times 2}, -\vec{\sigma})$ como quadrivetores onde $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ é escrito em termos das matrizes de Pauli (38)

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

As matrizes quadradas γ^μ nos dizem o campo ψ é uma matriz coluna de quatro componentes. As soluções da equação de Dirac serão, então, matrizes coluna que chamaremos, a partir de agora, de espinores¹³.

⁹A partir de agora, a menos que seja especificado, a densidade Lagrangiana será identificada como a própria Lagrangiana por conveniência.

¹⁰De um modo geral, dado qualquer quadrivetor a^μ , temos que $\gamma_\mu a^\mu = \gamma^\mu a_\mu = \rlap{/}\not{a}$.

¹¹O subscrito 2×2 é para indicar que estamos tratando de matrizes quadradas de ordem 2.

¹²Algumas outras representações são possíveis. Uma delas é a representação de Dirac encontrada pela relação de similaridade $\gamma^\mu_{\text{Quiral}} = U \gamma^\mu_{\text{Dirac}} U^{-1}$ onde $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \end{pmatrix}$ e I é para matriz identidade. Para mais detalhes veja referências (31, 32).

¹³As soluções da equação de Dirac se transformam segundo espinores por transformações do grupo de Lorentz.

Uma vez que os campos espinoriais satisfazem a equação de Klein-Gordon¹⁴, as soluções para equação de Dirac podem ser pensadas como sendo do tipo onda plana (33). De fato, para frequências positivas e negativas¹⁵, com $p_0 > 0$, temos, respectivamente,

$$\psi_1(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}, \quad \psi_2(x) = v(p) e^{ip \cdot x}, \quad (2.25)$$

onde $u(p)$ e $v(p)$ satisfazem

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \quad \text{e} \quad (\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0. \quad (2.26)$$

Agora, para cada equação em (2.26) existem duas soluções linearmente independentes (33) dadas por

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

e

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

onde $s = 1, 2$ e ξ^s (η^s) formam base de espinores de duas componentes normalizadas a unidade¹⁶

$$\xi^{s\dagger} \xi^s = 1. \quad (2.29)$$

Podemos utilizar as soluções (2.27) e (2.28) como uma base e escrever as soluções gerais da equação de Dirac como uma expansão de Fourier (33)

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \quad (2.30)$$

e

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} \right). \quad (2.31)$$

Analogamente ao caso de Klein-Gordon, devemos enxergar ψ e $\bar{\psi}$ como operadores de campo

Para mais detalhes ver referência (40).

¹⁴Veja, por exemplo, referência (41).

¹⁵Observe o sinal trocado na exponencial.

¹⁶O mesmo é válido para η^s . Uma escolha comum para ξ^s são os espinores de duas componentes que são auto-estados da matriz σ^3 , a saber $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

satisfazendo as relações de anti-comutação¹⁷

$$\left\{ \psi_a(\vec{x}, t), \psi_b^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab} \quad (2.32)$$

$$\left\{ \psi_a(\vec{x}, t), \psi_b(\vec{y}, t) \right\} = \left\{ \psi_a^\dagger(\vec{x}, t), \psi_b^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = 0$$

de modo que

$$\left\{ a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^{s\dagger} \right\} = \left\{ b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs}, \quad (2.33)$$

com todas as outras relações de anti-comutação envolvendo a (a^\dagger) e b (b^\dagger) sendo iguais a zero. Agora, temos quatro operadores distintos: dois operadores de aniquilação, $a_{\vec{p}}^s$ e $b_{\vec{p}}^s$, e outros dois de criação, $a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ e $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$. Neste sentido, o estado

$$|\vec{p}, s\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle \quad (2.34)$$

representa uma partícula fermiônica com momento \vec{p} , spin s e energia $E_{\vec{p}}$. Enquanto que o estado¹⁸

$$|\vec{p}', s'\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}'}} b_{\vec{p}'}^{s'\dagger} |0\rangle \quad (2.35)$$

representa uma antipartícula de spin s' , momento \vec{p}' e energia $E_{\vec{p}'}$ (33, 37). Também, através das relações (2.33) e (2.34) pode ser mostrado que

$$\langle \vec{p}, r | \vec{q}, s \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs}. \quad (2.36)$$

Além disso, o estado de vácuo $|0\rangle$ é definido de tal forma que

$$a_{\vec{p}}^s |0\rangle = b_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0. \quad (2.37)$$

Isto permite que o autovalor do Hamiltoniano livre seja igual a zero neste estado (33).

Assim como para o campo escalar, podemos construir a função de Green de dois pontos para o caso de férmions. Através da equação

$$(i\vec{\partial} - m)S_F(x - y) = i\delta^4(x - y)I_{4 \times 4}, \quad (2.38)$$

¹⁷No caso de Klein-Gordon foi considerado as relações de comutação (2.10). No entanto, considerar relações de comutação para quantização do campo de Dirac trás uma série de inconsistência quanto ao fato do Hamiltoniano não ser positivamente definido. Em contrapartida, as relações de anti-comutação permitem um Hamiltoniano positivo definido, motivo pelo qual a quantização ocorre desta forma. Para mais detalhes veja referência (33).

¹⁸Denotaremos antipartículas colocando uma linha no momento.

podemos mostrar que o propagador de Dirac $S_F(x-y)$ é dado por

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &\equiv \langle 0 | \mathcal{T} [\psi(\vec{x}, x^0) \bar{\psi}(\vec{y}, y^0)] | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} - m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde o operador ordenamento temporal deve, agora, também levar em conta a permutação entre campos fermiônicos¹⁹, ou seja,

$$\mathcal{T} [\psi(\vec{x}, x^0) \bar{\psi}(\vec{y}, y^0)] \equiv \begin{cases} \psi(\vec{x}, x^0) \bar{\psi}(\vec{y}, y^0) & \text{para } x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}(\vec{y}, y^0) \psi(\vec{x}, x^0) & \text{para } y^0 > x^0 \end{cases}. \quad (2.40)$$

A terceira e última teoria a ser abordada neste capítulo será a QED. Esta é descrita pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (2.41)$$

onde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é o campo tensorial eletromagnético (33). O termo que permite a interação entre férmions e fótons é dado por

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (2.42)$$

As equações de campos para A^μ , correspondentes a Lagrangiana (2.41), são dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi, \quad (2.43)$$

onde $\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$ é a densidade de corrente de Dirac (33). Para o caso sem interação, o lado direito de (2.43) torna-se nulo. Além disso, se consideramos o gauge de Lorentz²⁰ $\partial_\mu A^\mu = 0$, podemos escrever (2.43) como

$$\partial^2 A^\mu = 0. \quad (2.44)$$

Esta equação nos diz que cada componente do campo vetorial A^μ obedece a equação de Klein-Gordon com massa zero. A solução para esta equação pode ser obtida de forma análoga àquela do campo escalar (33). De fato, Através de uma expansão de Fourier podemos escrever

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{j=0}^3 \left(a_{\vec{p}}^j \epsilon_\mu^j(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^{j\dagger} \epsilon_\mu^{j*}(p) e^{-ip \cdot x} \right), \quad (2.45)$$

onde $\epsilon_\mu^j(p)$ deve ser interpretado como o vetor de polarização do campo. Além disso, o propa-

¹⁹O campo de Dirac descreve partículas fermiônicas e estas obedecem a estatística de Fermi-Dirac. Assim, a permutação dos campos sempre representará um ganho de sinais negativos (42).

²⁰O gauge de Lorentz é importante pois ele retém a invariância relativística explícita (33).

gador do fóton no espaço dos momentos é dado por²¹ (33)

$$R_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}, \quad (2.46)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço de Minkowski. A semelhança entre (2.46) e o propagador do campo escalar, no espaço dos momentos, já era de esperar, uma vez que as componentes do campo A^μ , no gauge de Lorentz, satisfazem a equação de Klein-Gordon sem massa.

2.2 Operador evolução temporal e matriz de espalhamento S .

Na seção (2.1) apresentamos a Lagrangiana que permite a descrição de interação entre campos escalares, equação (2.5). A Hamiltoniana de interação (33), por sua vez, é dada diretamente por

$$H_{int} = - \int d^3x \mathcal{L}_{int} = \int d^3x \frac{1}{4!} \lambda \phi^4. \quad (2.47)$$

Em termos desta, a Hamiltoniana geral do sistema pode ser escrita como

$$H = H_{Klein-Gordon} + H_{int}, \quad (2.48)$$

onde $H_{Klein-Gordon}$ é a Hamiltoniana da teoria livre (33).

Dado um operador de campo na representação de Schrödinger²² $\phi_S(\vec{x}, t_0)$, podemos encontrar sua representação de Heisenberg (33, 38) pela transformação

$$\phi_H(x, t) = e^{iH(t-t_0)} \phi_S(\vec{x}, t_0) e^{-iH(t-t_0)}. \quad (2.49)$$

No limite em que a constante de acoplamento λ tende a zero, a Hamiltoniana total do sistema tende a H_0 e os operadores de campo na representação de interação podem ser definidos (33) como

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_H(x, t) \equiv \phi_I(\vec{x}, t). \quad (2.50)$$

Ainda neste limite, os campos de interação são assumidos ter a mesma forma da solução (2.8) (33, 36).

Das relações (2.49) e (2.50), podemos mostrar que²³

$$\phi_H(x) = U^\dagger(t, t_0) \phi_I(x) U(t, t_0) \quad (2.51)$$

²¹ Preferimos escrever aqui o propagador no espaço dos momentos. Para o caso do campo escalar e fermiônico, os propagadores no espaço dos momentos são dados respectivamente por $D_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ e $S_F(p) = \frac{i(\not{p} - m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$.

²² O tempo t_0 é usado apenas para indicar um momento qualquer. Operadores na representação de Schrödinger não dependem explicitamente do tempo (38).

²³ Devemos pensar em x como um quadrivetor $x^\mu = (t, \vec{x})$.

onde

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}, \quad (2.52)$$

é o operador evolução temporal na representação de interação (33). A equação diferencial satisfeita por este operador (36, 38) é dada por

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = H_I(t) U(t, t'), \quad (2.53)$$

onde

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t')} (H_{int}) e^{-iH_0(t-t')} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(x) \quad (2.54)$$

é a Hamiltoniana de interação escrita na representação de interação. A solução para a equação (2.53) foi encontrada pela primeira vez por Freeman Dyson (38). Ela é dada como uma série de potências de produtos temporalmente ordenados de integrais do Hamiltoniano na representação de interação (38), ou seja,

$$\begin{aligned} U(t, t') &= 1 + (-i) \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int dt_1 dt_2 \mathcal{T} [H_I(t_1) H_I(t_2)] + \dots \\ &\equiv \mathcal{T} e^{-i \int_{t'}^t dt H_I(t)}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Aqui, se $t_2 > t_3 > t_1$, o símbolo de ordenamento temporal \mathcal{T} impõe que a ordem dos produtos (33) seja dada por

$$\mathcal{T} [H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3)] = H_I(t_2) H_I(t_3) H_I(t_1).$$

O operador evolução temporal, definido em (2.55), matém a mesma estrutura para qualquer teoria de interação a ser tratada. Em outras palavras, $H_I(t)$ pode ser substituído pela Hamiltoniana de interação, na representação de interação, de qualquer teoria de interesse (33).

A importância do operador $U(t, t')$ está relacionada à definição da matriz de espalhamento S . Esta pode ser entendida como sendo a amplitude de espalhamento entre estados iniciais e finais (34). Ou seja, dado um estado inicial $|\alpha\rangle^i$ e um estado final $|\beta\rangle^j$, a relação de completeza

$$I = \sum_{\beta} |\beta\rangle^j \langle \beta|^j$$

permite escrever

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle^i &= \sum_{\beta} |\beta\rangle^j \langle \beta|^j |\alpha\rangle^i \\ &= \sum_{\beta} S_{\beta\alpha} |\beta\rangle^j, \end{aligned}$$

onde

$$S_{\beta\alpha} = {}^f\langle\beta|\alpha\rangle^i \quad (2.56)$$

são os elementos matriciais da amplitude de espalhamento S . Na linguagem de operadores (34), a equação (2.56) pode ser reescrita como

$$|\alpha\rangle^i = \hat{S}|\alpha\rangle^f$$

onde

$$S_{\beta\alpha} = {}^f\langle\beta|\alpha\rangle^i = {}^f\langle\beta|\hat{S}|\alpha\rangle^f. \quad (2.57)$$

Afim de determinarmos a matriz de espalhamento S , devemos levar em conta estados assintóticos de momento bem definido, ou seja, estados onde a função de onda no espaço dos momentos é bem localizada²⁴ (33). Estes estados serão denotados por

$$|\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots\vec{p}_n\rangle_{in}, \quad (2.58)$$

para n partículas de momento \vec{p}_i , e energia $E_{\vec{p}_i}$ entrando e

$${}_{out}\langle\vec{k}_1\vec{k}_2\cdots\vec{k}_m| \quad (2.59)$$

para m partículas de momento \vec{k}_i e energias $E_{\vec{k}_i}$ saindo. Em termos destes, a matriz de espalhamento S se relaciona com o operador evolução temporal (2.55) através da definição

$$S \equiv {}_{out}\langle\vec{k}_1\vec{k}_2\cdots\vec{k}_m|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle_{in} = {}_0\langle\vec{k}_1\vec{k}_2\cdots\vec{k}_m|\mathcal{T}\left(e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}dt H_I(t)}\right)|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle_0. \quad (2.60)$$

O índice zero, adicionado aos estados do lado direito do sinal de igualdade, especifica que os mesmos foram criados a partir do vácuo da teoria livre, como nas equações (2.12) e (2.34) (33).

A matriz de espalhamento S pode ainda ser escrita como

$$S = I + iT, \quad (2.61)$$

onde o termo I especifica a parte trivial do espalhamento, ou seja, todos os termos que não contribuem de forma significativa para o espalhamento. Já o termo iT , por sua vez, representa todos os processos de interação que foram realmente espalhados (36) e é, portanto, aquele que desejamos calcular.

É possível mostrar, ainda, que para processos de espalhamento de interesse físico,

²⁴A análise no espaço dos momentos é bem mais conveniente que no espaço das posições(36). Além disso, de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg, quanto mais preciso for o momento, menos preciso será a posição das partículas em análise (38).

a conservação do momento e da energia total nos permitem escrever iT como

$$iT = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_j k_j) i\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_j), \quad (2.62)$$

onde a delta quadridimensional especifica a conservação e $\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_j)$ é a matriz de espalhamento invariante de Lorentz (33).

Na próxima seção, a teoria de perturbação que permite calcular $\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_j)$ será avaliada para o caso das teorias $\lambda\phi^4$, Yukawa e QED.

2.3 Diagramas de Feynman e a matriz \mathcal{M} .

Nesta seção, as técnicas diagramáticas de Feynman serão avaliadas para as teorias $\lambda\phi^4$, Yukawa e QED. Como veremos, elas permitirão uma determinação direta da matriz de espalhamento \mathcal{M} .

2.3.1 Regras de Feynman para a matriz \mathcal{M} na teoria $\lambda\phi^4$.

Através das equações (2.55) e (2.60) podemos escrever

$$\begin{aligned} S = & {}_0\langle \vec{k}_1 \cdots \vec{k}_m | \mathcal{T} \left[1 + (-i) \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) + \right. \\ & \left. + \frac{(-i)^2}{2!} \int dt_1 dt_2 \mathcal{T} [H_I(t_1)H_I(t_2)] + \cdots \right] | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle_0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Substituindo a Hamiltoniana na representação de interação²⁵ (2.53), teremos

$$\begin{aligned} S = & {}_0\langle \vec{k}_1 \cdots \vec{k}_m | \mathcal{T} \left[1 + \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \phi^4(z) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z_1 d^4z_2 \mathcal{T} [\phi^4(z_1)\phi^4(z_2)] + \cdots \right] | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle_0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Para simplificar nossa notação vamos reescrever a equação acima como²⁶

$$S = S_0 + S_1 + S_2 \cdots, \quad (2.65)$$

onde S_i representa o i -ésimo termo da expansão (2.64). Além disso, vamos considerar o processo de espalhamento envolvendo duas partículas de quadrimomentos k_A e k_B entrando e outras duas de quadrimomentos p_1 e p_2 saindo. Assim, o termo de ordem zero em (2.65) será dado

²⁵Daqui para frente, os campos na representação de interação serão identificados pela notação $\phi_I = \phi$.

²⁶O índice $i = 0, 1, 2, \dots$ especifica a ordem da expansão em termos da constante de acoplamento λ .

por

$$\begin{aligned}
S_0 &= {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 \\
&= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle \\
&= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | [a_1 a_2, a_A^\dagger a_B^\dagger] | 0 \rangle \\
&= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} (2\pi)^6 \left[\delta^3(\vec{p}_A - \vec{p}_1) \delta^3(\vec{p}_B - \vec{p}_2) + \delta^3(\vec{p}_A - \vec{p}_2) \delta^3(\vec{p}_B - \vec{p}_1) \right].
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Aqui, fizemos uso das relações (2.9), (2.12) e (2.14). As deltas presentes na equação (2.66) nos informam que os momentos das partículas que estão entrando são os mesmos das partículas que estão saindo. Portanto, este termo contribui trivialmente para o espalhamento (33). Diagramaticamente, podemos representar (2.66) como a soma de dois diagramas²⁷ (33, 36)

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ A \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ B \end{array} & + & \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & \times \\ A & B \end{array}
\end{array} \tag{2.67}$$

Já o segundo termo da expansão (2.65) pode ser escrito como

$$S_1 = \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \mathcal{T} [\phi^4(z)] | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0. \tag{2.68}$$

Este envolve o produto temporalmente ordenado de quatro campos de interação. Para resolvermos a equação (2.68), necessitaremos de um dos teoremas mais fundamentais em TQC, o teorema de Wick (33). Este relaciona o produto temporalmente ordenado de campos de interação com os propagadores de Feynman da teoria. Mas primeiro vamos estabelecer algumas definições.

Como vimos na seção (2.1), os campos podem ser escritos em termos dos operadores de criação e destruição. Ao realizar o produto de dois ou mais campos, a ordem dos operadores envolvidos é completamente arbitrária

$$a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_3}^\dagger a_{\vec{q}_4}, \quad a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_3}^\dagger a_{\vec{q}_4}, \quad a_{\vec{q}_4} a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_3}^\dagger, \quad \dots$$

²⁷No segundo diagrama, as linhas tracejadas não devem ser vistas como conectadas no ponto central (vértice). Quando quisermos conectar as quatro linhas em um vértice, este será identificado com uma bolinha. Além disso, reservaremos as linhas tracejas para campos escalares.

Entretanto, os termos contendo somente operadores de criação a esquerda e de aniquilação a direita, por exemplo,

$$a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_3}^\dagger a_{\vec{q}_4} a_{\vec{q}_1} = a_{\vec{q}_3}^\dagger a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_4},$$

são ditos estarem sobre ordenado normal (33, 34, 37, 39). Estes termos podem ser identificados sem a preocupação com a ordem através do símbolo de ordenamento normal (39) :: definido como

$$: a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_3}^\dagger a_{\vec{q}_4} : \equiv a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_3}^\dagger a_{\vec{q}_4} a_{\vec{q}_1} = a_{\vec{q}_3}^\dagger a_{\vec{q}_2}^\dagger a_{\vec{q}_1} a_{\vec{q}_4}. \quad (2.69)$$

Assim, quando um produto de campos está sob ordenamento normal,

$$: \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n :,$$

devemos automaticamente levar em conta a definição (2.69).

Além do produto de ordenamento normal, podemos definir a contração de dois campos (33)

$$\overline{\phi \phi}$$

onde

$$\overline{\phi(x) \phi(y)} \equiv \begin{pmatrix} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & \text{se } x^0 > y^0 \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & \text{se } y^0 > x^0 \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x}, \quad \phi^-(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-ip \cdot x}, \quad (2.71)$$

e

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x). \quad (2.72)$$

Uma vez definido o ordenamento normal e as contrações (2.70), o teorema de Wick diz que o produto temporalmente ordenado de n campos na representação de interação será igual ao ordenamento normal do produto de todos os campos somado a todas as contrações possíveis entre os mesmos (33). Por exemplo, para três e quatro campos, teremos respectivamente

$$\mathcal{T} \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \} = : \phi_1 \phi_2 \phi_3 + \overline{\phi_1 \phi_2} \phi_3 + \overline{\phi_1 \phi_3} \phi_2 + \overline{\phi_2 \phi_3} \phi_1 :$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} = & : \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 + \overline{\phi_1 \phi_2} \phi_3 \phi_4 + \overline{\phi_1 \phi_3} \phi_2 \phi_4 + \overline{\phi_1 \phi_4} \phi_2 \phi_3 + \\ & + \overline{\phi_2 \phi_3} \phi_1 \phi_4 + \overline{\phi_2 \phi_4} \phi_1 \phi_3 + \overline{\phi_3 \phi_4} \phi_1 \phi_2 + \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_3 \phi_4} + \\ & + \overline{\phi_1 \phi_3} \overline{\phi_2 \phi_4} + \overline{\phi_1 \phi_4} \overline{\phi_2 \phi_3} : . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Em adição, o produto temporalmente ordenado de dois campos nos permite derivar um resultado bastante interessante. Pelo teorema de Wick,

$$\mathcal{T} \{ \phi(x)\phi(y) \} = : \phi(x)\phi(y) + \overline{\phi(x)\phi(y)} : . \quad (2.74)$$

Tomando o valor esperado no vácuo da teoria livre, podemos concluir que²⁸

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T} \{ \phi(x)\phi(y) \} | 0 \rangle &= \overline{\phi(x)\phi(y)} \langle 0 | 0 \rangle \\ &= \overline{\phi(x)\phi(y)} \end{aligned} \quad (2.75)$$

e, portanto,

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x-y). \quad (2.76)$$

é o próprio propagador de Feynman da teoria escalar.

Agora, para construirmos os diagramas de Feynman, e posteriormente derivarmos as regras que permitirão escrever a matriz de espalhamento \mathcal{M} , precisamos definir a contração de um campo de interação com um estado de partícula qualquer. Vejamos, então, como um campo $\phi(x)$ atua em um estado ket de uma única partícula de momento \vec{p} e energia $E_{\vec{p}}$. O resultado pode ser facilmente escrito como

$$\phi(x) | \vec{p} \rangle_0 = e^{-ip \cdot x} | 0 \rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}'}} e^{ip' \cdot x} | \vec{p}; \vec{p}' \rangle_0 \quad (2.77)$$

fazendo uso das equações (2.8), (2.9), (2.12) e (2.14). De modo semelhante, pode-se mostrar que

$${}_0 \langle \vec{p} | \phi(x) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}'}} e^{-ip' \cdot x} {}_0 \langle \vec{p}; \vec{p}' | + \langle 0 | e^{ip \cdot x}. \quad (2.78)$$

Realizando o produto dos estados “Bra” e “ket” resultantes, podemos concluir que

$$\begin{aligned} {}_0 \langle \vec{p}_1 | \phi(z)\phi(z) | \vec{k}_A \rangle_0 &= \left(\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot z} {}_0 \langle \vec{p} \vec{p}_1 | + \langle 0 | e^{ip_1 \cdot z} \right) \times \\ &\times \left(e^{-ik_A \cdot z} | 0 \rangle + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{k}}} e^{ik \cdot z} | \vec{k}_A \vec{k} \rangle_0 \right) \\ &= \langle 0 | e^{ip_1 \cdot z} e^{-ik_A \cdot z} | 0 \rangle \\ &= e^{ip_1 \cdot z} e^{-ik_A \cdot z}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

²⁸A contração de dois campos não é mais um operador, é um “c-number”, e por isso pode ser escrito fora do valor esperado no vácuo. Para mais detalhes veja referências (33, 36, 39).

Este resultado permite definir as contrações de Wick (33) entre campos e estados de modo que

$${}_0\langle \vec{p}_1 | \phi(z) \phi(z) | \vec{k}_A \rangle_0 \equiv {}_0\langle \overline{\vec{p}_1} | \overline{\phi(z)} \overline{\phi(z)} | \vec{k}_A \rangle_0 \quad (2.80)$$

seja obtido em termos das contrações

$$\overline{\phi(z)} | \vec{k}_A \rangle_0 \equiv e^{-ik_A \cdot z} \equiv z \bullet \dashleftarrow^{k_A} \quad (2.81)$$

e

$${}_0\langle \overline{\vec{p}_1} | \overline{\phi(z)} \equiv e^{ip_1 \cdot z} \equiv z \bullet \dashrightarrow^{p_1} \quad (2.82)$$

As linhas tracejadas, com momentos p e k e vértices z especificados, são as representações diagramáticas de Feynman para as contrações (2.81) e (2.82) (33, 39, 36, 43).

Equipados com estas definições, podemos enfim aplica-las à expressão (2.68). Através do teorema de Wick,

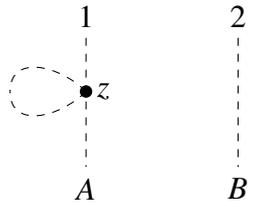
$$\begin{aligned} \mathcal{I} \{ \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z \} &= : \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z + \overline{\phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} + \overline{\phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} + \overline{\phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} + \\ &+ \overline{\phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} + \\ &+ \overline{\phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} + \overline{\phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} : \\ &= : \phi_z \phi_z \phi_z \phi_z + 6 \overline{\phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} + 3 \overline{\phi_z \phi_z \phi_z \phi_z} : \end{aligned} \quad (2.83)$$

e, portanto, S_2 possui três tipos de contribuição, uma para cada termo²⁹ em (2.83) (33). Entretanto, só o primeiro contribui de forma não trivial para o espalhamento (33). De fato, os únicos diagramas que contribuem para a matriz iT são aqueles onde todas as pernas externas estão conectadas umas com as outras através do vértice. Além disso, nenhuma das pernas externas podem conter diagramas de “loops” (33). Isto permite definir uma classe de diagramas caracterizados por serem completamente conectados e amputados³⁰. Estes são aqueles que realmente estamos interessados em calcular (33, 39, 36, 43). Um exemplo de diagrama que não contribui

²⁹Na última linha, as contrações semelhantes foram agrupadas. De fato, estamos considerando um único vértice até agora e por isso não faz sentido distingui-los (33).

³⁰Sem “lopss” nas pernas externas.

para o espalhamento é dado por



$$(2.84)$$

O lado esquerdo, que possui um “loop” no vértice z , pode ser encontrado do segundo termo do lado direito da equação (2.83) contraindo um dos vértices que sobrou com estado inicial de quadrimomento k_A e o outro com um estado final de quadrimomento p_1 (33).

Como estamos interessados em diagramas completamente conectados e amputados, somente o primeiro termo em (2.83) permite contrair todos os campos aos estados de partículas externas. Assim, o primeiro termo relevante para a matriz de espalhamento S é dada por

$$iT_1 = \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z_0 \langle \overline{\vec{p}_1 \vec{p}_2} | \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z) | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 \times 4!, \quad (2.85)$$

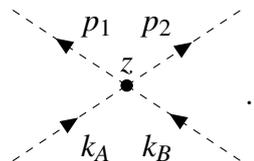
onde o fator multiplicativo $4!$ deve ser adicionado devido as diferentes possibilidades de se fazer as contrações de Wick (34). Pelas relações (2.81) e (2.82) podemos escrever

$$\begin{aligned} iT_1 &= -i\lambda \int d^4z e^{i(p_1+p_2-k_A-k_B)\cdot z} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2-k_A-k_B) (-i\lambda). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Também, comparando com (2.62), concluímos que a contribuição $i\mathcal{M}_1$ para a matriz $i\mathcal{M}$ é dada por

$$i\mathcal{M}_1 = -i\lambda. \quad (2.87)$$

Em termos dos diagramas de Feynman podemos representar $i\mathcal{M}_1$ (33) por



$$(2.88)$$

Poderíamos encontrar todos os termos da expansão (2.65) aplicando o método ilustrado acima. Porém, existem um conjunto de regras que permitem escrever as contribuições para a matriz $i\mathcal{M}$ de uma forma bastante direta a partir dos diagramas de Feynman. De um

modo geral (33, 39, 36, 44, 43),

$$i\mathcal{M} = \text{Soma de todos os diagramas conectados e amputados.} \quad (2.89)$$

Tais diagramas são construídos, no espaço dos momentos, segundo as regras:

1. Para cada linha interna (propagador),

$$\text{---} \overset{q}{\rightarrow} \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon};$$

2. Para cada vértice,

$$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} z \\ \bullet \\ z \end{array} = -i\lambda;$$

3. Para cada linha externa,

$$z \bullet \text{---} \overset{p}{\leftarrow} \text{---} = 1;$$

4. Fazendo uso da delta de Dirac quadridimensional, impor conservação dos momentos em cada vértice;

5. Integrar sobre cada “loop” de momento interno indeterminado: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$;

6. Por fim, devemos dividir pelo fator de simetria decorrente das diferentes contrações possíveis pela análise combinatória.

Para finalizarmos esta subseção, vejamos um segundo exemplo de diagrama que contribui de forma relevante para a matriz de espalhamento S ,

$$\begin{array}{c} \text{---} \overset{p_1}{\rightarrow} \\ \text{---} \overset{p_2}{\rightarrow} \\ \text{---} \overset{q_1}{\leftarrow} \\ \text{---} \overset{q_2}{\leftarrow} \\ \text{---} \overset{k_A}{\leftarrow} \\ \text{---} \overset{k_B}{\leftarrow} \end{array} \begin{array}{c} z_1 \\ \bullet \\ z_2 \end{array} \quad (2.90)$$

Este diagrama é obtido pelo termo de segunda ordem em λ na expansão (2.64) através das contrações

$$iT_2 = \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 z_1 d^4 z_2 \langle \overline{\vec{p}_1 \vec{p}_2} | \overline{\phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_1} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2} \phi_{z_2}} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_0 \times \frac{(4!)^2}{2} \times 2!. \quad (2.91)$$

O fator multiplicativo $\frac{(4!)^2}{2}$, mais uma vez é obtido por análise combinatória das possíveis contrações de Wick (34). O $2!$ extra, no numerador, deve ser acrescentado para levar em conta a simetria de troca de vértice. A contração de dois vértices distintos, representadas por linhas internas, é o próprio propagador escalar³¹ (44, 43). Na teoria $\lambda\phi^4$ sempre haverá quatro linhas externas conectadas a cada vértice, veja, por exemplo, os diagramas (2.88) e (2.91) (39). O fator de simetria do diagrama é simplesmente o termo que sobra no denominador de (2.91) após a simplificação das frações (34).

O diagrama em (2.90), em termos das regras de Feynman, pode ser escrito como

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{2}(-i\lambda) \left(\frac{i}{q_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \left(\frac{i}{q_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) (-i\lambda), \quad (2.92)$$

onde $k_A + k_B + q_2 = q_1$ e $q_1 = p_1 + p_2 + q_2$, pela conservação do momento em cada vértice. Isto está de acordo com a lei de conservação energia-momento, $k_A + k_B = p_1 + p_2$.

2.3.2 Regras de Feynman para a matriz \mathcal{M} na teoria de Yukawa.

Afim de desenvolver uma teoria para um tratamento adequado de sistemas envolvendo partículas fermiônicas, algumas observações devem ser feitas. O teorema de Wick, por exemplo, precisa ser generalizado para levar em consideração as simetrias de permutação entre férmions (38, 42). De modo geral, a cada permutação entre campos fermiônicos, ou operadores fermiônicos, será adicionado um sinal de menos na definição dos operadores de ordenamento temporal e normal (33, 36). Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\psi_1 \psi_2 \psi_3) &= (-1)^2 (-1) \psi_3 \psi_2 \psi_1 \text{ para } x_3^0 > x_2^0 > x_1^0 \\ &= -\psi_3 \psi_2 \psi_1, \end{aligned}$$

onde $(-1)^2$ representa as permutações entre $(\psi_3$ e $\psi_2)$ e $(\psi_3$ e $\psi_1)$. O outro fator de (-1) é devido a permutação de ψ_2 com ψ_1 . De modo semelhante (33),

$$: a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2} a_{\vec{p}_3}^\dagger := (-1)^2 a_{\vec{p}_3}^\dagger a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2} = (-1)^3 a_{\vec{p}_3}^\dagger a_{\vec{p}_2} a_{\vec{p}_1},$$

onde o sinal de menos extra, no último termo, deve-se ao fato de termos permutado $a_{\vec{p}_2}$ com $a_{\vec{p}_1}$ através das relações de anti-comutação.

A contração entre campos fermiônicos, por sua vez, é definida como³²

$$\overline{\psi(x) \psi(y)} \equiv S_F(x-y) \quad (2.93)$$

³¹Veja equação (2.75).

³²A ordem estabelecida entre os campos é de extrema relevância (35) nesta expressão.

e

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} = \overline{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0, \quad (2.94)$$

onde $S_F(x-y)$ é o propagador de Dirac (33, 36, 34). Sob ordenamento normal, as contrações devem naturalmente levar em conta as permutações entre os campos, por exemplo,

$$:\overline{\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\psi_4\bar{\psi}_5}: = (-1)^3 \overline{\psi_1\bar{\psi}_5} : \bar{\psi}_2\psi_3\psi_4 : . \quad (2.95)$$

Uma vez que o ordenamento normal e temporal foram readaptados, o teorema de Wick se generaliza (33) de forma direta para

$$\mathcal{T}[\psi_1\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4\cdots] =: \psi_1\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4\cdots + \text{Todas as contrações possíveis} : . \quad (2.96)$$

Assim como fizemos para o campo escalar, podemos analisar como os campos ψ e $\bar{\psi}$ atuam em estados “kets” e “bras” de férmions e antiférmions. Sejam partículas (anti-partículas) fermiônicas caracterizadas por um momento \vec{p} (\vec{p}') e spin s (s'), então, podemos definir, analogamente a (2.81) e (2.82), as contrações de Wick (33)

$$\overline{\psi(x)|\vec{p},s\rangle_0} = e^{-ip\cdot x} u^s(p) \quad \overline{\bar{\psi}(x)|\vec{p}',s'\rangle_0} = e^{-ip'\cdot x} \bar{v}^{s'}(p) \quad (2.97)$$

$${}_0\langle\vec{p}',s'|\psi(x) = e^{ip\cdot x} v^{s'}(p) \quad {}_0\langle\vec{p},s|\bar{\psi}(x) = e^{ip\cdot x} \bar{u}^s(p)$$

Através da Lagrangiana (2.20), podemos reescrever (2.60) como

$$\begin{aligned} S &= {}_0\langle\vec{p}_3, s_3; \vec{p}_4, s_4| \mathcal{T} \left[1 + (-ig) \int d^4z \bar{\psi}_z \psi_z \phi_z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4z_1 d^4z_2 \mathcal{T} \{ \bar{\psi}_{z_1} \psi_{z_1} \phi_{z_1} \bar{\psi}_{z_2} \psi_{z_2} \phi_{z_2} \} + \cdots \right] |\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2\rangle_0 \\ &= S_0 + S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (2.98)$$

para um processo envolvendo dois férmions de momentos p_1 e p_2 e “spins” s_1 e s_2 entrando e outros dois férmions de momentos p_3 e p_4 e “spins” s_3 e s_4 saindo. Como antes, o primeiro termo da expansão contribui trivialmente para o espalhamento. O segundo termo também não vai contribuir, pois o número de campos de interação é insuficiente para conectar todas as pernas (33). Assim, a primeira contribuição relevante para a matriz S vem do termo de ordem-2 na constante de acoplamento. Levando em consideração as diferentes possibilidades de contrações

de Wick (33), podemos concluir que

$$\begin{aligned}
iT_2 &= \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4z_1 d^4z_2 \langle \vec{p}_3, s_3; \vec{p}_4, s_4 | \bar{\Psi}_{z_1} \Psi_{z_1} \phi_{z_1} \bar{\Psi}_{z_2} \Psi_{z_2} \phi_{z_2} | \vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2 \rangle_0 \times 2! \\
&- \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4z_1 d^4z_2 \langle \vec{p}_3, s_3; \vec{p}_4, s_4 | \bar{\Psi}_{z_1} \Psi_{z_1} \phi_{z_1} \bar{\Psi}_{z_2} \Psi_{z_2} \phi_{z_2} | \vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2 \rangle_0 \times 2!
\end{aligned} \tag{2.99}$$

onde o fator de $2!$ é devido a simetria de troca de vértices e o sinal negativo extra, no segundo termo, é devido as permutações entre campos fermiônicos necessárias para desembaralhar as contrações³³(33). A análise de sinais é bastante relevante para uma definição coerente dos diagramas de Feynman (33).

Vamos resolver, então, a primeira integral:

$$\begin{aligned}
1^{\text{a}} \text{ Integral} &= (-ig)^2 \int d^4z_1 d^4z_2 e^{ip_3 \cdot z_2} \bar{u}^{s_3}(p_3) e^{-ip_2 \cdot z_2} u^{s_2}(p_2) \\
&\times D_F(z_1 - z_2) e^{ip_4 \cdot z_1} \bar{u}^{s_4}(p_4) e^{-ip_1 \cdot z_1} u^{s_1}(p_1) \\
&= (-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4z_1 d^4z_2 e^{i(p_4 - p_1 - q) \cdot z_1} e^{i(p_3 - p_2 + q) \cdot z_2} \bar{u}^{s_3}(p_3) u^{s_2}(p_2) \\
&\times \frac{i}{q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} \bar{u}^{s_4}(p_4) u^{s_1}(p_1) \\
&= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
&\times i \left[(-ig)^2 \bar{u}^{s_3}(p_3) u^{s_2}(p_2) \frac{1}{q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} \bar{u}^{s_4}(p_4) u^{s_1}(p_1) \right].
\end{aligned}$$

³³Após realizarmos as contrações, devemos sempre verificar um possível sinal de menos extra. Como regra, podemos escrever os estados em termos dos operadores de criação e aniquilação e efetuar as permutações necessárias entre os campos fermiônicos afim de obter contrações completamente desembaralhadas (33).

A segunda integral pode ser resolvida de forma semelhante, o resultado será

$$2^{\text{o}} \text{ Integral} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ \times i \left[-(-ig)^2 \bar{u}^{s_3}(p_3) u^{s_1}(p_1) \frac{1}{q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} \bar{u}^{s_4}(p_4) u^{s_2}(p_2) \right]. \quad (2.100)$$

Assim, podemos identificar a matriz de espalhamento $i\mathcal{M}$ como

$$i\mathcal{M} = i \left[(-ig)^2 \bar{u}^{s_3}(p_3) u^{s_2}(p_2) \frac{1}{q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} \bar{u}^{s_4}(p_4) u^{s_1}(p_1) + \right. \\ \left. - (-ig)^2 \bar{u}^{s_3}(p_3) u^{s_1}(p_1) \frac{1}{q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} \bar{u}^{s_4}(p_4) u^{s_2}(p_2) \right]. \quad (2.101)$$

Termos de ordem mais alta na constante de acoplamento g poderiam ser obtidos como no exemplo ilustrado acima. No entanto, é muito mais simples utilizarmos as regras de Feynman para a teoria de Yukawa (33, 39, 36, 44, 43). Estas são definidas como se segue:

Seja

$$i\mathcal{M} = \text{Soma de todos os diagramas conectados e amputados,}$$

então:

1. Para cada propagador escalar,

$$\text{---} \overset{q}{\blacktriangleright} \text{---} = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon},$$

onde m_ϕ é a massa do campo escalar;

2. Para cada propagador fermiônico,

$$\text{---} \overset{p}{\blacktriangleright} \text{---} = \frac{i(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon},$$

onde m_ψ é a massa do campo fermiônico;

3. Para cada vértice,

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \text{---} = -ig;$$

4. Para cada linha escalar entrando,

$$z \bullet \text{---} \leftarrow^q \text{---} = 1;$$

5. Para cada linha escalar saindo,

$$z \bullet \text{---} \rightarrow^q \text{---} = 1;$$

6. Para cada linha de férmion entrando,

$$z \bullet \text{---} \leftarrow^p \text{---} = u^s(p);$$

7. Para cada linha de férmion saindo,

$$z \bullet \text{---} \rightarrow^p \text{---} = \bar{u}^s(p);$$

8. Para cada linha de antiférmion entrando,

$$z \bullet \text{---} \leftarrow^{p'} \text{---} = \bar{v}^s(p');$$

9. Para cada linha de antiférmion saindo,

$$z \bullet \text{---} \rightarrow^{p'} \text{---} = v^s(p');$$

10. Impor conservação de momento em cada vértice;

11. Integrar sobre cada “loop” de momento interno indeterminado: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$;

12. Multiplicar o diagrama por $(-1)^n$, onde n é correspondente ao número de permutações entre férmions necessário para desembaralhar as contrações de Wick.

Com as regras acima, podemos simplesmente representar (2.101) por

$$i\mathcal{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & p_4 & \\ & \swarrow & \\ z_1 & \cdots q & z_2 \\ & \nwarrow & \\ & p_1 & \end{array} & + & \begin{array}{ccc} & p_4 & \\ & \swarrow & \\ z_1 & \cdots q & z_2 \\ & \nwarrow & \\ & p_1 & \end{array} & \begin{array}{ccc} & p_3 & \\ & \swarrow & \\ & \nwarrow & \\ & p_2 & \end{array} \end{array} \quad (2.102)$$

2.3.3 Regras de Feynman para a matriz \mathcal{M} na QED.

As regras de Feynman para QED são muito complicadas de serem obtidas através dos métodos apresentados nas subseções anteriores (33). O fato de termos liberdade de escolher o calibre da teoria faz com que a quantização canônica da mesma se apresente com um certo grau de estranheza (33, 45). No entanto, as regras de Feynman para a QED podem ser justificadas através de uma analogia com a Teoria de Yukawa. As inúmeras razões para isto estão muito bem explicadas na referência (33). Para não fugirmos muito do propósito deste trabalho, iremos apenas lista-las aqui.

Seja

$$i\mathcal{M} = \text{Soma de todos os diagramas conectados e amputados,}$$

então:

1. Para cada propagador do fóton,

$$\mu \text{ --- } q \text{ --- } \nu = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$$

2. Para cada propagador fermiônico,

$$\text{--- } p \text{ ---} = \frac{i(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}$$

3. Para cada vértice,

$$\begin{array}{c} \swarrow \\ \bullet \\ \nwarrow \end{array} \text{ --- } \mu \text{ ---} = -ie\gamma^\mu;$$

4. Para cada linha de fóton entrando,

$$\mu \bullet \overleftarrow{\text{~~~~~}}^p = \varepsilon_\mu(p);$$

5. Para cada linha de fóton saindo,

$$\mu \bullet \overrightarrow{\text{~~~~~}}^p = \varepsilon_\mu^*(p);$$

6. Para cada linha de férmion entrando,

$$z \bullet \overleftarrow{\text{————}}^p = u^s(p);$$

7. Para cada linha de férmion saindo,

$$z \bullet \overrightarrow{\text{————}}^p = \bar{u}^s(p);$$

8. Para cada linha de antiférmion entrando,

$$z \bullet \overleftarrow{\text{————}}^{p'} = \bar{v}^{s'}(p');$$

9. Para cada linha de antiférmion saindo,

$$z \bullet \overrightarrow{\text{————}}^{p'} = v^{s'}(p');$$

10. Impor conservação de momento em cada vértice;

11. Integrar sobre cada “loop” de momento interno indeterminado: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$;

12. Multiplicar o diagrama por $(-1)^n$, onde n é correspondente ao número de permutações entre férmions necessário para desembaralhar as contrações de Wick.

Aqui, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica no espaço de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

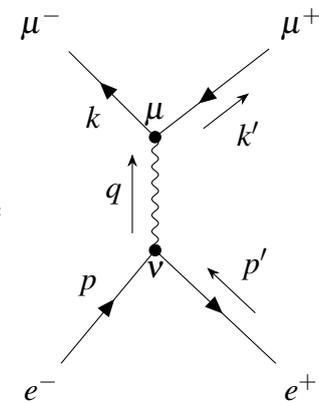
e $\varepsilon_\mu(p)$ é o vetor de polarização do campo A^μ (33, 39).

Para ilustrar a aplicação das regras de Feynman para a QED, vamos determinar a matriz $i\mathcal{M}$ para o processo de um elétron e^- (momento p_μ e “spin” s) e um pósitron e^+ (momento p'_μ e “spin” s') se espalhando em um múon μ^- (momento k_μ e “spin” r) e um anti-múon μ^+ (momento k'_μ e “spin” r').

Mais uma vez, a primeira contribuição relevante para a matriz S é devido ao termo de segunda ordem na constante de acoplamento e . Entretanto, dentre todas as contrações de Wick, apenas

$$iT_2 = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z_1 d^4z_2 \langle \vec{k}, r; \vec{k}', r' | (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu)_{z_1} (\bar{\psi}\gamma^\nu \psi A_\nu)_{z_2} | \vec{p}, s; \vec{p}', s' \rangle_0 \quad (2.104)$$

é permitida. Isto é devido a uma série de restrições físicas: como conservação de carga elétrica, número leptônico, spin e energia-momento (30, 41). Além disso, não existe maneira de construir vértices de interação envolvendo o acoplamento de elétrons e múons ao mesmo tempo (34, 44). Isto força o elétron e o pósitron (múon e antimúon) a serem contraídos no mesmo vértice (43, 34, 44). Portanto, as regras de Feynman para a QED nos permite escrever (2.104) como



$$i\mathcal{M} = \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p) \left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}^r(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(p'),$$

onde devemos impor a conservação de momento em cada vértice. Reorganizando os termos em

(2.105), obtemos

$$i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q^2} \left[\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) \right] \left[\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(p') \right]. \quad (2.105)$$

2.4 Seção de choque total para o espalhamento $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$.

Imaginemos um conjunto de N_{alvo} partículas alvo ocupando uma determinada área A . Seja σ a área de cada uma dessas partículas e suponha que uma partícula incidente viaje na direção destes alvos. A probabilidade da partícula incidente colidir com um dos alvos e se espalhar em uma dada direção (46) é dada por

$$P = \frac{\text{área ocupada pelos alvos}}{A} = \frac{N_{alvo}\sigma}{A} = n_{alvo}\sigma, \quad (2.106)$$

onde n_{alvo} é a densidade superficial de alvos

$$n_{alvo} = \frac{N_{alvo}}{A}.$$

Então, para N_{inc} partículas incidentes, o número de partículas espalhadas N_{esp} , ou de eventos de espalhamento, é dado por

$$N_{esp} = N_{inc}P = N_{inc}n_{alvo}\sigma. \quad (2.107)$$

Esta expressão define a seção de choque σ (46). Do ponto de vista da TQC, a seção de choque é entendida como o pedaço da área que é retirada do feixe alvo por feixes incidentes e portanto, acaba sendo o estado final que estamos interessados em medir (33). Veja que a seção de choque é uma propriedade do alvo e não das partículas incidentes (46).

A seção de choque diferencial, por sua vez, surge quando queremos especificar a direção na qual as partículas são espalhadas (33). Assim, fazendo uso da definição de ângulo sólido,

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi, \quad (2.108)$$

podemos nos questionar sobre número de partículas espalhadas na direção limitada por $d\Omega$. Desta forma, podemos generalizar a equação (2.107) para

$$N_{esp}(\text{Contidas por } d\Omega) = N_{inc}n_{alvo}d\sigma(\text{Contidas por } d\Omega), \quad (2.109)$$

onde a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma(\phi, \theta)}{d\Omega} \quad (2.110)$$

é definida (46) por

$$d\sigma(\text{Contidas por } d\Omega) = \frac{d\sigma(\phi, \theta)}{d\Omega} d\Omega. \quad (2.111)$$

A seção de choque total é então obtida integrando sobre $d\Omega$, ou seja,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma(\phi, \theta)}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\sigma(\phi, \theta)}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi. \quad (2.112)$$

Pode ser mostrado, através de uma expansão em termos dos estados assintóticos (2.58) e (2.59), que a seção de choque diferencial para o caso de duas partículas de momentos k_A e k_B se espalhando em outras duas de momentos p_1 e p_2 , no referencial do centro de massa, é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \frac{|\vec{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{cm}} |\mathcal{M}|^2. \quad (2.113)$$

onde

$$\frac{1}{|v_A - v_B|} \equiv \frac{1}{\left| \frac{k_A^z}{E_A} - \frac{k_B^z}{E_B} \right|} \quad (2.114)$$

e $|v_A - v_B|$ é a velocidade relativa das partículas A e B (33).

A fim de determinar a seção de choque (2.113), devemos primeiro calcular

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} = \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger,$$

onde \mathcal{M} é dado por (2.105). A propriedade³⁴

$$(\bar{v}\gamma u)^* = \bar{u}\gamma v \quad (2.115)$$

permite escrever o conjugado hermitiano da matriz \mathcal{M} como

$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{e^2}{q^2} \left[\bar{v}^{s'}(k') \gamma_\mu u^r(k) \right] \left[\bar{u}^s(p) \gamma^\mu v^{s'}(p') \right]. \quad (2.116)$$

Assim,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \left[\bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) \bar{u}^s(p) \gamma^\nu v^{s'}(p') \right] \left[\bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(p') \bar{v}^{r'}(k') \gamma_\nu u^r(k) \right]. \quad (2.117)$$

Esta expressão pode ser simplificada se levarmos em conta as características reais dos experimentos de espalhamento. Na maioria destes, os feixes de partículas entrando não possuem um estado de “spin” bem definido (33). Isto faz com que a seção de choque medida

³⁴Veja por exemplo referência (33).

seja uma média sobre esses “spins”. Por outro lado, os detectores de partículas de estado final não detectam a polarização de “spin” destas, fazendo com que a seção de choque possua uma soma sobre todos esses “spins”. Assim, a quantidade que devemos calcular é dada por

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}|^2. \quad (2.118)$$

Dito isto, vamos então trabalhar cada fator de (2.117) na notação indicial. O primeiro termo entre colchetes será dado por³⁵

$$\begin{aligned} \sum_{s'} \sum_s \bar{v}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) \bar{u}^s(p) \gamma^\nu v^{s'}(p') &= \sum_{s'} \sum_s \bar{v}_a^{s'}(p') \gamma_{ab}^\mu u_b^s(p) \bar{u}_c^s(p) \gamma_{cd}^\nu v_d^{s'}(p') \\ &= (\not{p}' - m_e)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p} + m_e)_{bc} \gamma_{cd}^\nu \\ &= \text{Tr} [(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu], \end{aligned} \quad (2.119)$$

onde fizemos uso das propriedades

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m \quad (2.120)$$

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \quad (2.121)$$

Da mesma forma, podemos mostrar que

$$\sum_r \sum_{r'} \bar{u}^r(k) \gamma_\mu v^{r'}(p') \bar{v}^{r'}(k') \gamma_\nu u^r(k) = \text{Tr} [(\not{k} + m_\mu) \gamma^\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma^\nu]. \quad (2.122)$$

Assim, podemos escrever (2.117) como

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} [(\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr} [(\not{k} + m_\mu) \gamma^\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma^\nu]. \quad (2.123)$$

Para simplificar ainda mais esta equação, podemos fazer uso de algumas identidades satisfeitas pela matriz de Dirac³⁶ γ^μ , como por exemplo

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4\eta^{\mu\nu} \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \\ \text{Tr}(\text{número ímpar de matrizes } \gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (2.124)$$

³⁵Devemos ter em mente que a massa de uma partícula é idêntica a de sua antipartícula (41).

³⁶A prova foge do objetivos deste primeiro trabalho. No entanto ela pode ser encontrada na referência (33).

Desta forma,

$$\begin{aligned}
Tr [(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu] &= Tr [(\gamma^\sigma p'_\sigma - m_e)\gamma^\mu(\gamma^\rho p_\rho + m_e)\gamma^\nu] \\
&= Tr[\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu] p'_\sigma p_\rho - Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] m_e^2 \\
&= 4[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - \eta^{\mu\nu}(p' \cdot p + m_e^2)] \quad (2.125)
\end{aligned}$$

e, de maneira equivalente,

$$Tr [(\not{k} + m_\mu)\gamma^\mu(\not{k}' - m_\mu)\gamma^\nu] = 4[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - \eta_{\mu\nu}(k \cdot k' + m_\mu^2)] \quad (2.126)$$

Também levando em consideração que a massa do elétron é cerca de duzentas vezes menor que a massa do múon (33), assumiremos a aproximação $m_e = 0$. Assim, podemos escrever (2.123) como

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + m_\mu^2(p \cdot p')]. \quad (2.127)$$

Vamos também supor que o elétron e o pósitron se deslocam na direção do eixo-z com 4-momentos³⁷ dados respectivamente por $p^\mu = (E, E\hat{z})$ e $p'^\mu = (E, -E\hat{z})$. Por estarmos no referencial do centro de massa, além do fato de que a energia e o momento total se conservam, os 4-momentos para o múon e o anti-múon devem ser respectivamente $k^\mu = (E, \vec{k})$ e $k'^\mu = (E, -\vec{k})$, onde

$$\vec{k} \cdot \hat{z} = |\vec{k}| \cos \theta \quad (2.128)$$

e θ é o ângulo de deflexão em relação ao eixo z . Substituindo todas esses requerimentos na expressão (2.127), conseguimos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{16E^4} [(E^2 + E|\vec{k}| \cos \theta)^2 + (E^2 - E|\vec{k}| \cos \theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2] \\
&= e^4 \left[1 + \frac{1}{E^2} |\vec{k}|^2 \cos^2 \theta + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right] \\
&= e^4 \left[1 + \frac{1}{E^2} (E^2 - m_\mu^2) \cos^2 \theta + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right] \\
&= e^4 \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right] \quad (2.129)
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo nas equações (2.113) e (2.114), somos diretamente conduzidos a

³⁷Como estamos considerando a massa do elétron como sendo zero, $|\vec{p}| = E$.

seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right], \quad (2.130)$$

onde

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (2.131)$$

é a constante de estrutura fina.

A seção de choque total, por sua vez, é obtida integrando (2.130) sobre o ângulo sólido $d\Omega$. O resultado é dado por

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{m_\mu^2}{2E^2}\right). \quad (2.132)$$

No capítulo (4), nós investigaremos como a presença de temperatura finita modifica a seção de choque (2.132). A inclusão de temperatura no sistema deverá ser feita através do formalismo DCT. Este, que será introduzido formalmente no capítulo (3), permitirá uma generalização bastante direta das técnicas perturbativas abordadas acima para o cálculo da matriz $\mathcal{M}(\beta)$.

3 O FORMALISMO DCT.

Este capítulo tem como objetivo introduzir os conceitos fundamentais do formalismo DCT afim de estender o ferramental desenvolvido pela TQC convencional ao caso de temperatura finita. Como veremos, a estrutura termal de osciladores bosônicos e fermiônicos será generalizada de forma bastante simples para um tratamento adequado de campos. Além disso, os propagadores termais do campo escalar, fermiônico e do fóton serão calculados explicitamente.

3.1 O estado de vácuo termal.

A ideia central do formalismo DCT é a construção de um vácuo termal $|0(\beta)\rangle$ de modo que a média estatística de um observável¹ A ,

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \text{Tr}(e^{-\beta H} A), \quad (3.1)$$

possa ser escrita em termos do valor esperado (7)

$$\langle A \rangle \equiv \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle, \quad (3.2)$$

onde

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H}) \quad (3.3)$$

é a função de partição do sistema, H a Hamiltoniana e $\beta = 1/T$, sendo T a temperatura². Como veremos, a existência de $|0(\beta)\rangle$ permitirá analisar os efeitos termais através de cálculos perturbativos bastante análogos aqueles efetuados em temperatura zero.

De início, poderíamos simplesmente pensar em expandir o estado de vácuo termal em termos dos auto-estados dados pela equação de auto-valores

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (3.4)$$

onde E_n são as auto-energias. Assim sendo,

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|0(\beta)\rangle = \sum_n g_n(\beta) |n\rangle, \quad (3.5)$$

onde

$$g_n(\beta) = \langle n|0(\beta)\rangle$$

¹Esta relação é válida tanto para ensemble Canônico como o Grande Canônico.

²Estamos assumindo que a constante de Boltzmann é $k_B = 1$, por isso $\beta = 1/k_B T = 1/T$.

é um número que pode ser real ou complexo(7). Desta forma, a equação (3.2) pode ser escrita como

$$\langle A \rangle = \sum_n \sum_m g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n|A|m \rangle. \quad (3.6)$$

Por sua vez, a equação (3.1), escrita em termos dos auto-estados $|n\rangle$, nos diz que

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_n \sum_m e^{-\beta E_n} \delta_{nm} \langle n|A|m \rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

e assim, fazendo uma comparação com a equação (3.6), chegamos a conclusão de que

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{nm}. \quad (3.8)$$

Sendo números reais ou complexos, $g_n(\beta)$ não pode satisfazer uma relação como (3.8), que nos lembra uma condição de ortogonalidade entre estados(7, 1). Esta incoerência não permite, portanto, uma definição apropriada para o vácuo termal.

Afim de evitarmos uma relação como (3.8), também motivados pela sua semelhança com uma condição de ortogonalidade, poderíamos pensar nos coeficientes de expansão como sendo

$$g_n(\beta) \equiv f_n(\beta) |\tilde{n}\rangle, \quad (3.9)$$

onde $|\tilde{n}\rangle$ é auto-estado do operador Hamiltoniano \tilde{H} com auto-valor E_n ,

$$\tilde{H}|\tilde{n}\rangle = \tilde{E}_n |\tilde{n}\rangle, \quad (3.10)$$

e $f_n(\beta)$ é um número real ou complexo (7). Como tal, a definição (3.9) promove uma duplicação no espaço de Hilbert, dada através do produto direto entre estados til e não-til

$$|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle. \quad (3.11)$$

O sinal til, por sua vez, possui apenas caráter distintivo, no sentido que ele somente identifica um sistema que deve ser entendido como sendo uma cópia exata do sistema físico original (7). Este é o motivo de termos escrito E_n ao invés de \tilde{E}_n na equação (3.10). Em termos físicos, o sistema til extra está relacionado ao reservatório de calor. De fato, ele pode ser considerado o entorno do sistema original em análise (47).

Com $g_n(\beta)$ dado pela definição (3.9), o estado de vácuo termal (3.5) pode ser escrito

em termos dos auto-estados simultâneos de H e \tilde{H}

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n, \tilde{n}\rangle. \quad (3.12)$$

O valor esperado no vácuo termal de um observável A , definido em (3.2), passa a ser dado por

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_n \sum_m f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n, \tilde{n} | A | m, \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_n \sum_m f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n | A | m \rangle \langle \tilde{n} | \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_n f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n | A | n \rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde o observável A atua somente nos estados não-til e $\langle n | m \rangle = \langle \tilde{n} | \tilde{m} \rangle = \delta_{nm}$. Esta equação, em comparação com (3.7), nos conduz a uma relação coerente entre os coeficientes de expansão $f_n(\beta)$,

$$f_n^*(\beta) f_n(\beta) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} e^{-\beta E_n}, \quad (3.14)$$

cujas soluções, assumindo o caso mais simples em que $f_n(\beta)$ pertence aos reais, é dada por

$$f_n(\beta) = \frac{1}{\mathcal{Z}^{\frac{1}{2}}(\beta)} e^{-\frac{\beta E_n}{2}}. \quad (3.15)$$

A consequência imediata da solução (3.15) é a definição adequada de um estado de vácuo termal³,

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}^{\frac{1}{2}}(\beta)} \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} |n, \tilde{n}\rangle, \quad (3.16)$$

de modo que a média de um observável A seja dada pelo valor esperado definido em (3.2). Como dissemos antes, isto possibilitará uma análise da influência da temperatura em sistemas quânticos relativísticos através de técnicas perturbativas bastantes análogas aquelas estabelecidas pela TQC convencional.

3.2 A álgebra de Lie termal.

A duplicação dos graus de liberdade do sistema, caracterizada pelo produto direto (3.11), permite a definição do que chamaremos de espaço de Hilbert termal $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ (6). Este possibilita representação de dois tipos de variáveis distintas, A e \hat{A} , pertencentes, respectivamente, ao conjunto de todos os observáveis C_{obs} e geradores de simetrias C_{ger} (6). Em geral, geradores de simetria e observáveis físicos são representados pela mesma expressão algébrica. O momento angular \vec{L} , por exemplo, também corresponde ao gerador das rotações e o momento linear \vec{p} ao gerador das translações espaciais. No entanto, não existe nenhuma imposição dinâmica para esta correspondência, de modo que estamos livres para tratar A e \hat{A}

³Veja equação (3.12).

como estruturas distintas (6).

A álgebra de Lie termal, cuja representação será fornecida pelo espaço de Hilbert termal \mathcal{H}_T , é caracterizada, de modo geral, pelas relações

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = iC_{ij}^k \hat{A}_k \quad (3.17)$$

$$[\hat{A}_i, A_j] = iC_{ij}^k A_k \quad (3.18)$$

$$[A_i, A_j] = iC_{ij}^k A_k, \quad (3.19)$$

onde C_{ij}^k é a constante de estrutura. A título de ilustração, a álgebra de Lie para o grupo $SU(2)$ é dada pela relação de comutação (32)

$$[J_i, J_k] = i\varepsilon_{ij}^k J_k, \quad (3.20)$$

onde ε_{ij}^k é o símbolo de Levi-Civita. Em duas dimensões $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$, onde σ_i são as matrizes de Pauli. Veja que na expressão (3.20) não existe distinção entre geradores e observáveis. A álgebra de Lie termal $SU(2)_T$, com representação em \mathcal{H}_T , por sua vez, estabelece esta diferença de modo que a relação de comutação (3.20) possui generalização termal dada por (6)

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_k] = i\varepsilon_{ij}^k \hat{J}_k \quad (3.21)$$

$$[\hat{J}_i, J_k] = i\varepsilon_{ij}^k J_k \quad (3.22)$$

$$[J_i, J_k] = i\varepsilon_{ij}^k J_k. \quad (3.23)$$

Nenhuma menção a variável til foi feita até agora. Então, podemos nos perguntar: como a duplicação do espaço de Hilbert, necessária para definição do estado de vácuo termal, surge do ponto de vista da teoria de grupos de Lie? A resposta para esta pergunta pode ser alcançada através da definição

$$\tilde{A} \equiv A - \hat{A}. \quad (3.24)$$

Isolando \hat{A} em (3.24) e substituindo nas relações (3.17)-(3.19), obtemos

$$[A_i, A_j] = iC_{ij}^k A_k \quad (3.25)$$

$$[A_i, \tilde{A}_j] = 0 \quad (3.26)$$

$$[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j] = -iC_{ij}^k \tilde{A}_k, \quad (3.27)$$

onde cada variável, A e \tilde{A} , agora, possui uma álgebra de Lie própria e comutam entre si. Isto, por sua vez, caracteriza uma duplicação do espaço de Hilbert através de um produto direto (6).

Como consequência da comparação imediata das equações (3.25)-(3.27) consegui-

mos as regras de Conjugação Til (CT)

$$(A_i A_j)^\sim = \tilde{A}_i \tilde{A}_j \quad (3.28)$$

$$(bA_i + cA_j)^\sim = b^* \tilde{A}_i + c^* \tilde{A}_j \quad (3.29)$$

$$(\tilde{A}_i)^\dagger = (A_i^\dagger)^\sim \quad (3.30)$$

$$(\tilde{A}_i)^\sim = \xi A_i \quad (3.31)$$

onde $\xi = +1$ para bósons e $\xi = -1$ para férmions (8, 6). Como veremos na próxima seção, as regras CT, junto a definição (3.24), permitirão a duplicação dos graus de liberdade do sistema de uma forma bastante simples e direta.

3.3 Osciladores termais.

Afim de ilustrar as ideias por trás do formalismo DCT, serão tratados nesta seção dois sistemas bastante simples de serem analisados, o oscilador bosônico e o fermiônico. Além da simplicidade característica, tais sistemas permitirão uma generalização termal do formalismo operacional já bem estabelecido pela TQC convencional.

3.3.1 Oscilador fermiônico.

Também conhecido como oscilador de Dirac, as propriedades quânticas de um oscilador fermiônico podem ser investigadas através dos operadores escada de levantamento e abaixamento, denotados respectivamente por a^\dagger e a (38). Em termos destes, o Hamiltoniano do sistema é dado por⁴

$$H = \omega a^\dagger a \quad (3.32)$$

onde as relações de anti-comutação

$$\{a, a^\dagger\} = 1 \quad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad (3.33)$$

devem ser satisfeitas. Levando em conta a normalização dos estados $\langle n|n\rangle = 1$, pode ser mostrado, através das relações de anti-comutação (3.33), que o espaço de Hilbert do sistema é gerado somente por dois estados (6), $|0\rangle$ e $|1\rangle$, de tal modo que

$$a|0\rangle = 0 \quad a^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad a|1\rangle = |0\rangle \quad a^\dagger|1\rangle = 0. \quad (3.34)$$

Desta forma, a equação de autovalores satisfeita pelo sistema é

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (3.35)$$

⁴Estamos assumindo $\hbar = 1$.

onde $n = 0, 1$, $E_0 = 0$ e $E_1 = \omega$.

Como já mencionado anteriormente, a ideia central do formalismo DCT é a construção de um vácuo termal a partir da duplicação dos graus de liberdade do sistema. Isto é obtido através do produto direto entre estados til e não-til. Deste modo, uma base para o espaço de Hilbert térmico \mathcal{H}_T será dada pelo conjunto de auto-estados simultâneos de H e \tilde{H} (6),

$$\{|0, \tilde{0}\rangle, |0, \tilde{1}\rangle, |1, \tilde{0}\rangle, |1, \tilde{1}\rangle\}. \quad (3.36)$$

Neste contexto, a evolução temporal do sistema dobrado deve ser realizada através do gerador Hamiltoniano

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = \omega a^\dagger a - \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \quad (3.37)$$

e a inclusão de operadores-til requer que relações de anti-comutação envolvendo os mesmos sejam levadas em consideração. Através das regras CT (3.28)-(3.31), aplicadas diretamente as equações (3.33), podemos concluir que

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 1 \quad \{\tilde{a}, a\} = \{\tilde{a}^\dagger, a^\dagger\} = 0. \quad (3.38)$$

Além disso, como os operadores til e não-til não são nem observáveis nem geradores de simetria, mesmo que a combinação deles possam ser, estamos livres para escolher uma relação de anti-comutação entre eles (6). No entanto, afim de permitir uma descrição coerente para sistemas fermiônicos (6), devemos definir

$$\{a, \tilde{a}\} = \{\tilde{a}^\dagger, a\} = \{a^\dagger, \tilde{a}\} = \{a^\dagger, \tilde{a}^\dagger\} = 0. \quad (3.39)$$

O estado de vácuo termal (3.16), por sua vez, pode ser expandido em termos da base (3.36),

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}^{\frac{1}{2}}(\beta)} \left(e^{-\frac{\beta E_0}{2}} |0, \tilde{0}\rangle + e^{-\frac{\beta E_1}{2}} |1, \tilde{1}\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}^{\frac{1}{2}}(\beta)} \left(1 + e^{-\frac{\beta \omega}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right) |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde a função de partição $\mathcal{Z}(\beta)$ pode ser determinada através da condição de normalização

$$\langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle = 1. \quad (3.41)$$

De fato,

$$\begin{aligned} 1 = \langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \delta_{nn} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} (1 + e^{-\beta\omega}) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathcal{Z}(\beta) = 1 + e^{-\beta\omega}. \quad (3.42)$$

Afim de ilustrar que a média de um observável pode ser tomada em termos do valor esperado do estado vácuo termal, consideremos o operador número definido por $N = a^\dagger a$. É de se esperar que $\langle N \rangle$ seja igual a função de distribuição fermiônica

$$n(\beta) = \frac{1}{1 + e^{\beta\omega}} \quad (3.43)$$

e de fato o é,

$$\begin{aligned} \langle N \rangle = \langle 0(\beta) | N | 0(\beta) \rangle &= \frac{1}{1 + e^{-\beta\omega}} \langle 0, \tilde{0} | (1 + e^{-\frac{\beta\omega}{2}} \tilde{a} a) a^\dagger a (1 + e^{-\frac{\beta\omega}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) | 0, \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}} \langle 0, \tilde{0} | \tilde{a} a a^\dagger a a^\dagger \tilde{a}^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle \\ &= \frac{e^{-\beta\omega}}{1 + e^{-\beta\omega}} \langle 0, \tilde{1} | 0, \tilde{1} \rangle \\ &= \frac{1}{1 + e^{\beta\omega}}. \end{aligned}$$

A equação (3.40), que relaciona o vácuo termal com o vácuo da teoria a temperatura zero no espaço duplicado pode ser reescrita em um forma bastante conveniente através da relação

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (3.44)$$

O operador $U(\beta)$ é chamado operador Transformação de Bogoliubov. Sejam $u(\beta)$ e $v(\beta)$ funções de um parâmetro $\theta(\beta)$, cuja a dependência com a temperatura é definida respectivamente por

$$u(\beta) = \cos \theta(\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} \quad (3.45)$$

$$v(\beta) = \sin \theta(\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\beta\omega}}} \quad (3.46)$$

onde $u^2(\beta) + v^2(\beta) = 1$. Em termos destas funções trigonométricas, a equação (3.40) pode ser

expandida como

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \left[\cos \theta(\beta) + \sin \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right] |0, \tilde{0}\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\theta^{2n}(\beta)}{(2n)!} (-1)^n |0, \tilde{0}\rangle - \frac{\theta^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!} (-1)^{n+1} |1, \tilde{1}\rangle \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^n(\beta) (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^n}{n!} |0, \tilde{0}\rangle
\end{aligned} \tag{3.47}$$

onde a última igualdade é obtida fazendo uso da propriedade⁵

$$(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^k |0, \tilde{0}\rangle = \begin{cases} (-1)^n |0, \tilde{0}\rangle & \text{para } k = 2n \\ (-1)^{n+1} |1, \tilde{1}\rangle & \text{para } k = 2n + 1 \end{cases} . \tag{3.48}$$

Assim, o estado de vácuo térmico (3.47) pode ser escrito como

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \tag{3.49}$$

onde o operador Transformação de Bogoliubov é

$$U(\beta) = e^{-iG(\beta)} \tag{3.50}$$

e

$$G(\beta) \equiv -i\theta(\beta) (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) . \tag{3.51}$$

A relevância do operador $U(\beta)$ não se limita a equação (3.49). De fato, uma das consequências mais significativas da transformação de Bogoliubov (3.50) é permitir a introdução de operadores termais $a(\beta)$, $\tilde{a}(\beta)$, $a^\dagger(\beta)$ e $\tilde{a}^\dagger(\beta)$ através da definição geral (6, 48, 49)

$$A(\beta) \equiv U(\beta) A U^{-1}(\beta) . \tag{3.52}$$

Veja, por exemplo, que se $A(\beta) = a(\beta)$, então

$$a(\beta) = U(\beta) a U^{-1}(\beta), \tag{3.53}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
a(\beta) |0(\beta)\rangle &= U(\beta) a U^{-1}(\beta) U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \\
&= U(\beta) a |0, \tilde{0}\rangle = 0,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

⁵Verificar a validade desta propriedade é bastante direta, basta aplicar sucessivas vezes ao estado de vácuo duplicado o operador $(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)$.

uma vez levando em conta a característica unitária da transformação,

$$U^{-1}(\beta)U(\beta) = U(\beta)U^{-1}(\beta) = I. \quad (3.55)$$

De maneira semelhante, podemos mostrar que

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0. \quad (3.56)$$

As equações (3.54) e (3.56) ilustram bem o porquê de definir operadores termais como em (3.52). Sendo, por definição, $|0(\beta)\rangle$ um estado de vácuo, a atuação de qualquer operador abaixamento deveria conduzir a um auto-valor zero(38).

Para cálculos práticos, existe uma maneira conveniente de reescrever a equação (3.53) em termos das funções trigonométricas (3.45) e (3.46). Fazendo uso do lema de Baker-Hausdorff (38)

$$e^{iG\lambda}Ae^{-iG\lambda} = A + i\lambda[G,A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[G,[G,A]] + \frac{(i\lambda)^3}{3!}[G,[G,[G,A]]] + \dots \quad (3.57)$$

podemos expandir $a(\beta)$ como

$$\begin{aligned} a(\beta) &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right)a - \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)\tilde{a}^\dagger \\ &= u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Os outros operadores termais poderiam ser obtidos de forma semelhante. Entretanto, as regras CT (3.28)-(3.31) permitem uma derivação muito mais direta, evitando, por exemplo, cálculos excessivos com comutadores provenientes da expansão (3.57). Como $u(\beta)$ e $v(\beta)$ são, por definição, funções reais, podemos facilmente verificar que

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger \quad (3.59)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} + v(\beta)a^\dagger \quad (3.60)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a} \quad (3.61)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger + v(\beta)a. \quad (3.62)$$

As relações de anticomutação para os operadores termais são preservadas, no sentido que

$$\{a(\beta), a^\dagger(\beta)\} = 1 \quad (3.63)$$

e

$$\{\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)\} = 1 \quad (3.64)$$

com todas as outras sendo iguais a zero. A demonstração é tida em termos da característica unitária de $U(\beta)$. Veja, por exemplo, que

$$\begin{aligned} 1 = U(\beta)U^{-1}(\beta) &= U(\beta) \{a, a^\dagger\} U^{-1}(\beta) \\ &= U(\beta)(aa^\dagger + a^\dagger a)U^{-1}(\beta) \\ &= U(\beta)aU^{-1}(\beta)U(\beta)a^\dagger U^{-1}(\beta) + U(\beta)a^\dagger U^{-1}(\beta)U(\beta)aU^{-1}(\beta) \\ &= a(\beta)a^\dagger(\beta) + a^\dagger(\beta)a(\beta) \\ &= \{a(\beta), a^\dagger(\beta)\}. \end{aligned}$$

Uma vez que o operador $U(\beta)$ foi definido, a base para o espaço de Hilbert térmico (3.36) pode ser termalizada dando origem ao que chamamos de espaço de Fock termal

$$\{|0(\beta)\rangle, a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, \tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle\}. \quad (3.65)$$

Este é caracterizado por estados construídos a partir do vácuo termal (6). A termalização a qual nos referimos deve ser entendida como na equação (3.49), onde o operador $U(\beta)$ estabelece a transição entre um estado da teoria em temperatura zero e o seu correspondente termal. De fato,

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \quad (3.66)$$

$$a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = U(\beta)|1, \tilde{0}\rangle \quad (3.67)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{1}\rangle \quad (3.68)$$

$$a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = U(\beta)|1, \tilde{1}\rangle. \quad (3.69)$$

Veja, por exemplo, que

$$a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = U(\beta)a^\dagger U^{-1}(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \quad (3.70)$$

$$= U(\beta)|1, \tilde{0}\rangle. \quad (3.71)$$

Para finalizarmos esta subseção, gostaríamos de exemplificar mais uma vez como a média de um observável pode ser avaliada a partir do valor esperado no vácuo termal. Mas antes, uma vez que as quantidades físicas do sistema devem ser descritas por variáveis do sistema original não-til, é de interesse prático inverter as equações (3.59)-(3.62) para que os operadores atuantes em $|0(\beta)\rangle$ sejam os operadores térmicos. Assim, multiplicando (3.59) por $u(\beta)$, (3.62)

por $v(\beta)$ e somando, obtemos

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta).$$

Além disso, as regras CT permitem escrever

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \quad (3.72)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) - v(\beta)a^\dagger(\beta) \quad (3.73)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta) \quad (3.74)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) - v(\beta)a(\beta). \quad (3.75)$$

Uma outra maneira de se obter as relações acima é reescrevendo as equações (3.59)-(3.62) através de um produto matricial envolvendo dupletos definidos por

$$(a^i) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

$$(\tilde{a}^i) = \begin{pmatrix} \tilde{a}^1 & \tilde{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\dagger & \tilde{a} \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

e por expressões semelhantes para operadores termais. As equações (3.59) e (3.62), por exemplo, podem ser reorganizadas como

$$\begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Em notação indicial

$$a^i(\beta) = B^{ij}(\beta)a_j, \quad (3.79)$$

onde $B^{ij}(\beta)$ são os elementos da matriz

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Por outro lado, para as equações (3.60) e (3.61), temos

$$\begin{pmatrix} a^\dagger(\beta) & \tilde{a}(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\dagger & \tilde{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\beta) & v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

de modo que

$$\tilde{a}^i(\beta) = \tilde{a}_j(B^{-1}(\beta))^{ji}, \quad (3.82)$$

onde $B^{-1}(\beta)$ é a inversa da matriz (3.80).

Agora, uma vez que

$$B^{-1}(\beta)B(\beta) = B(\beta)B^{-1}(\beta) = I, \quad (3.83)$$

é bastante simples mostrar que as equações (3.72)-(3.75) podem ser reescritas como

$$a^i = (B^{-1}(\beta))^{ij}a_j(\beta) \quad (3.84)$$

e

$$\bar{a}^i = \bar{a}_j(\beta)B^{ji}(\beta). \quad (3.85)$$

Como veremos, a notação dubleto fornecerá uma maneira incrivelmente simples e direta para avaliar o propagador do fóton.

Voltando nossa atenção para a média estatística do operador número $N = a^\dagger a$, temos

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\bar{a}(\beta)] [u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\bar{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | v^2(\beta)\bar{a}(\beta)\bar{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | v^2(\beta)[1 - \bar{a}^\dagger(\beta)\bar{a}(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\ &= v^2(\beta) = n(\beta). \end{aligned}$$

onde fizemos uso das equações (3.72) e (3.74). Este resultado nos diz que a introdução de operadores termais constitui uma ferramenta bastante poderosa para se avaliar valores esperados tomados com respeito ao estado de vácuo termal.

Vejamos agora como a teoria se modifica para um tratamento adequado de osciladores bosônicos.

3.3.2 Oscilador bosônico.

Analogamente ao caso fermiônico, o oscilador bosônico também pode ser descrito através do Hamiltoniano (7, 6)

$$H = \omega a^\dagger a, \quad (3.86)$$

onde os operadores escada a e a^\dagger devem satisfazer, ao invés dos anti-comutadores (3.33), relações de comutação dadas por

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (3.87)$$

A equação de autovalores do sistema é

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (3.88)$$

onde os auto-estados

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \quad (3.89)$$

satisfazem a condição de ortonormalização $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ e $E_n = n\omega$ (38), além de que

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (3.90)$$

e

$$a|0\rangle = 0. \quad (3.91)$$

Uma vez que estamos interessados em uma representação termal, uma duplicação dos graus de liberdade do sistema se faz necessária. Assim, realizando o produto direto entre estados til e não-til, somos conduzidos ao conjunto de auto-estados simultâneos de H e \tilde{H} que, por sua vez, forma uma base para o espaço de Hilbert térmico \mathcal{H}_T (6),

$$\{|0, \tilde{0}\rangle, |0, \tilde{1}\rangle, \dots, |0, \tilde{n}\rangle, \dots, |1, \tilde{0}\rangle, \dots, |n, \tilde{0}\rangle, \dots, |n, \tilde{n}\rangle, \dots\}. \quad (3.92)$$

A evolução temporal do sistema duplicado é conduzida pelo gerador Hamiltoniano (6)

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = \omega a^\dagger a - \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \quad (3.93)$$

e, em adição as relações de comutação (3.87), devemos também considerar

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 \quad [\tilde{a}, a] = [\tilde{a}^\dagger, a^\dagger] = 0, \quad (3.94)$$

além do fato de que todas as outras relações de comutação devem ser iguais a zero (7, 6).

O estado vácuo termal (3.16), expandido em termos da base (3.92), pode então ser escrito como

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}^{\frac{1}{2}}(\beta)} \sum_n \frac{e^{-\frac{n\beta\omega}{2}}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.95)$$

onde a função de partição

$$\mathcal{Z}(\beta) = \sum_n \left(e^{-\beta\omega} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \quad (3.96)$$

é mais uma vez encontrada por

$$\begin{aligned}
 1 = \langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\frac{\beta\omega(n+m)}{2}} \langle m, \tilde{m} | n, \tilde{n} \rangle \\
 &= \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_n e^{-\beta\omega n} \delta_{nn} \\
 &= \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_n e^{-\beta\omega n}.
 \end{aligned}$$

Agora, sejam $u(\beta)$ e $v(\beta)$ funções de um parâmetro $\theta(\beta)$ definidas respectivamente por⁶

$$u(\beta) = \cosh \theta(\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}} \quad (3.97)$$

$$v(\beta) = \sinh \theta(\beta) \equiv \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\omega}}}. \quad (3.98)$$

Então, em termos destas, o estado de vácuo termal (3.95) assume a forma

$$\begin{aligned}
 |0(\beta)\rangle &= \cosh^{-1} \theta(\beta) e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle \\
 &= e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln(\cosh \theta(\beta))} |0, \tilde{0}\rangle,
 \end{aligned} \quad (3.99)$$

onde usamos a expansão

$$\exp\left(e^{-\frac{\beta\omega}{2}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right) = \sum_n \frac{e^{-\frac{n\beta\omega}{2}}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n \quad (3.100)$$

e a função

$$\tanh \theta(\beta) = e^{-\frac{\beta\omega}{2}}. \quad (3.101)$$

A ideia, agora, é reescrever a equação (3.99) fazendo uso da propriedade

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh \alpha B} e^{\ln(\cosh \alpha) [A, B]} e^{\tanh \alpha A} \quad (3.102)$$

onde A e B são operadores arbitrários e α é um parâmetro qualquer (6). Mas antes, algumas observações se fazem necessárias. É bastante simples e direto verificar através das relações de comutação que para quaisquer funções f e g do parâmetro $\theta(\beta)$ teremos

$$e^{f(\theta(\beta)) a^\dagger a} |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.103)$$

$$e^{g(\theta(\beta)) \tilde{a} a} |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.104)$$

$$e^{f(\theta(\beta)) \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.105)$$

$$e^{-f(\theta)} e^{f(\theta(\beta)) \tilde{a} \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle. \quad (3.106)$$

⁶Veja que essa definição é coerente com a identidade $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1$.

Com isso, assumindo que

$$g(\theta(\beta)) = -\tanh \theta(\beta) \quad (3.107)$$

e

$$f(\theta(\beta)) = -\ln(\cosh \theta(\beta)) \quad (3.108)$$

podemos reescrever o estado de vácuo termal (3.99) como

$$|0(\beta)\rangle = e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln(\cosh \theta(\beta))(\tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} e^{-\tanh \theta(\beta) \tilde{a} a} |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.109)$$

e, portanto, através da equação (3.102), podemos concluir que

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle, \quad (3.110)$$

onde

$$U(\beta) = e^{-iG(\beta)} \quad (3.111)$$

é o operador transformação de Bogoliubov e

$$G(\beta) \equiv -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger). \quad (3.112)$$

Veja que o procedimento realizado até agora foi bastante análogo ao caso do oscilador fermiônico, ou seja, construímos primeiramente um operador $U(\beta)$ que permite a transição entre o estado de vácuo da teoria em temperatura zero e seu correspondente termal. Também é interessante observar que a estrutura funcional do operador transformação de Bogoliubov é preservada para ambos os casos de osciladores. No entanto devemos estar atentos a uma sutileza. Enquanto a ordem dos operadores em (3.51) deve ser preservada por conta das relações de anti-comutação, em (3.112) não faz a menor diferença, uma vez que operadores til e não-til comutam entre si (6).

Dito isso, podemos agora introduzir os operadores termais da mesma maneira que fizemos no caso do oscilador fermiônico. Através da relação geral (3.52), do lema de Baker-Hausdorff (3.57) e também das regras CT (3.28)-(3.31), podemos mostrar que (7, 6)

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger \quad (3.113)$$

$$\tilde{a}(\beta) = u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^\dagger \quad (3.114)$$

$$a^\dagger(\beta) = u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a} \quad (3.115)$$

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a, \quad (3.116)$$

assim como

$$[a(\beta), a^\dagger(\beta)] = 1, \quad (3.117)$$

e

$$[\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)] = 1. \quad (3.118)$$

As equações (3.113)-(3.116) podem também serem reorganizadas em um produto matricial envolvendo dubletos definidos por⁷

$$(a^i) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (3.119)$$

$$(\bar{a}^i) = \begin{pmatrix} \bar{a}^1 & \bar{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\dagger & -\tilde{a} \end{pmatrix} \quad (3.120)$$

e por expressões semelhantes para os operadores termais. É fácil ver, por exemplo, que as equações (3.113) e (3.116) conduzem a

$$\begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.121)$$

enquanto que das relações (3.114) e (3.115) temos

$$\begin{pmatrix} a^\dagger(\beta) & -\tilde{a}(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\dagger & -\tilde{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\beta) & v(\beta) \\ v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}. \quad (3.122)$$

Em notação indicial temos respectivamente

$$a^i(\beta) = B^{ij}(\beta)a_j \quad (3.123)$$

e

$$\bar{a}^i(\beta) = \bar{a}_j(B^{-1}(\beta))^{ji}, \quad (3.124)$$

onde $B^{-1}(\beta)$ é a inversa de

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}. \quad (3.125)$$

⁷Observe que \bar{a}^i é diferente para osciladores bosônicos e fermiônicos.

Invertendo as equações (3.123) e (3.124) somos conduzidos as relações

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) \quad (3.126)$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta) \quad (3.127)$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta) \quad (3.128)$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta). \quad (3.129)$$

A título de ilustração, a média termal do operador número $N = a^\dagger a$, para o oscilador bosônico, é dada por

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)] [u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | v^2(\beta) \tilde{a}(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | v^2(\beta) [1 + \tilde{a}^\dagger(\beta) \tilde{a}(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\ &= v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} = n(\beta), \end{aligned} \quad (3.130)$$

onde $n(\beta)$ é a função de distribuição bosônica.

A importância de se analisar em detalhes a estrutura termal dos osciladores bosônicos e fermiônicos está ligada ao fato de podermos facilmente generalizar tais sistemas para um tratamento adequado em teoria de campos. Vejamos então como o formalismo DCT lida com sistemas descritos por campos escalares.

3.4 O campo escalar termal.

A representação termal para a Lagrangiana que descreve o campo de Klein-Gordon na ausência de fonte, e também de interação, é dada através da variável $\hat{\mathcal{L}}$ (6). Esta pode ser obtida da definição geral (3.24) e é, portanto, dada por

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} + \frac{1}{2} m^2 \tilde{\phi}^2, \quad (3.131)$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (3.132)$$

é a Lagrangiana na teoria em temperatura zero.

Em termos dos momentos canônicos conjugados do sistema dobrado, definidos por

$$\tilde{\Pi} \equiv \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\tilde{\phi}}} = \dot{\tilde{\phi}} \quad (3.133)$$

e

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}, \quad (3.134)$$

a Hamiltoniana do sistema na representação termal é dada por

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\Pi^2}{2} + \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\tilde{\Pi}^2}{2} - \frac{(\nabla\tilde{\phi})^2}{2} - \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 \quad (3.135)$$

e as relações de comutação envolvendo campos e momentos são dadas pelas equações (2.10) e

$$[\tilde{\phi}(\vec{x}, t), \tilde{\Pi}(\vec{y}, t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.136)$$

$$[\tilde{\phi}(\vec{x}, t), \tilde{\phi}(\vec{y}, t)] = [\tilde{\Pi}(\vec{x}, t), \tilde{\Pi}(\vec{y}, t)] = 0.$$

Estas últimas são obtidas das regras CT (3.28)-(3.31) aplicadas diretamente a (2.10).

Também através das regras CT, podemos escrever os campos escalares não-til e til, respectivamente, como

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.137)$$

e

$$\tilde{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\tilde{a}_{\vec{p}} e^{ip \cdot x} + \tilde{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-ip \cdot x} \right), \quad (3.138)$$

onde os operadores de criação e aniquilação correspondentes satisfazem

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (3.139)$$

e

$$[\tilde{a}_{\vec{p}}, \tilde{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (3.140)$$

com todas as outras relações de comutação sendo zero (6).

Afim de introduzir operadores termais, e consequentemente campos termais, devemos construir o operador transformação de Bogoliubov $U(\beta)$ e proceder de maneira semelhante ao que foi feito na seção de osciladores. Agora, uma vez que cada modo- k de Fourier do campo escalar pode ser tratado como um oscilador bosônico independente com seu próprio $a(\vec{k})$ e $a^\dagger(\vec{k})$ (33), $U(\beta)$ pode ser generalizado como o produto de infinitos operadores da forma (3.111). Ou seja,

$$U(\beta) = \prod_k U_k(\vec{k}, \beta) \quad (3.141)$$

onde

$$U_k(\vec{k}, \beta) = e^{\theta_k(\beta) [a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger - a_k \tilde{a}_k]} \quad (3.142)$$

e o índice k representa o modo do k -ésimo oscilador. Neste contexto, o estado de vácuo termal é obtido naturalmente por

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle, \quad (3.143)$$

onde $|0, \tilde{0}\rangle$ deve ser entendido como o produto direto dos vácuos duplicados de cada oscilador de modo k (6)

$$|0, \tilde{0}\rangle = \bigotimes_k |0, \tilde{0}\rangle_k. \quad (3.144)$$

Os operadores termiais

$$a_{\vec{k}, \beta} = u_{\vec{k}, \beta} a_{\vec{k}} - v_{\vec{k}, \beta} \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \quad (3.145)$$

$$\tilde{a}_{\vec{k}, \beta} = u_{\vec{k}, \beta} \tilde{a}_{\vec{k}} - v_{\vec{k}, \beta} a_{\vec{k}}^\dagger \quad (3.146)$$

$$a_{\vec{k}, \beta}^\dagger = u_{\vec{k}, \beta} a_{\vec{k}}^\dagger - v_{\vec{k}, \beta} \tilde{a}_{\vec{k}} \quad (3.147)$$

$$\tilde{a}_{\vec{k}, \beta}^\dagger = u_{\vec{k}, \beta} \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger - v_{\vec{k}, \beta} a_{\vec{k}}, \quad (3.148)$$

por sua vez, são encontrados de forma convencional pela definição geral (3.52), onde

$$u_{\vec{k}, \beta} = \cosh \theta_k(\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta \omega_{\vec{k}}}}} \quad (3.149)$$

e

$$v_{\vec{k}, \beta} = \sinh \theta_k(\beta) \equiv \frac{e^{-\frac{\beta \omega_{\vec{k}}}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-\beta \omega_{\vec{k}}}}} \quad (3.150)$$

representam, respectivamente, a extensão das equações (3.97) e (3.98) para levar em conta cada oscilador de modo- k (6). De modo semelhante, os campos (3.137) e (3.138), por serem operadores, também podem ser termalizados através do operador transformação de Bogoliubov,

$$\phi(x, \beta) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}, \beta} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}, \beta}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.151)$$

e

$$\tilde{\phi}(x, \beta) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\tilde{a}_{\vec{p}, \beta} e^{ip \cdot x} + \tilde{a}_{\vec{p}, \beta}^\dagger e^{-ip \cdot x} \right), \quad (3.152)$$

onde os operadores⁸ de criação e aniquilação térmicos correspondentes satisfazem

$$[a_{\vec{p}, \beta}, a_{\vec{p}', \beta}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (3.153)$$

⁸Nessa notação, $a_{\vec{p}, \beta} = a(\vec{p}, \beta)$, assim como $u_{\vec{p}, \beta} = u(\vec{p}, \beta)$.

e

$$\left[\tilde{a}_{\vec{p},\beta}, \tilde{a}_{\vec{p}'\beta}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (3.154)$$

com todas as outras relações de comutação sendo zero (6).

Uma vez que o operador transformação de Bogoliubov foi construído, possibilitando assim a introdução dos operadores térmicos, podemos agora determinar o propagador de Feynman do campo escalar. Este é definido semelhantemente aquele em temperatura zero, equação (2.15), só que agora com o estado de vácuo convencional sendo substituído pelo correspondente termal (48, 49), ou seja,

$$D_F(x-y, \beta) \equiv \langle 0(\beta) | \mathcal{T} [\phi(\vec{x}, x^0) \phi(\vec{y}, y^0)] | 0(\beta) \rangle. \quad (3.155)$$

Além deste, como estamos dentro do contexto de um espaço de Hilbert dobrado, o propagador envolvendo variáveis til deve também ser levado em consideração. Desta forma, define-se (6)

$$\tilde{D}_F(x-y, \beta) \equiv \langle 0(\beta) | \mathcal{T} [\tilde{\phi}(\vec{x}, x^0) \tilde{\phi}(\vec{y}, y^0)] | 0(\beta) \rangle. \quad (3.156)$$

Uma propriedade interessante de ser enfatizada é que tendo calculado $D_F(x-y, \beta)$, as regras CT permitem diretamente encontrar $\tilde{D}_F(x-y, \beta)$.

Vamos então resolver o valor esperado estabelecido na (3.155). Através da função de Heaviside $\Theta(x)$ (50, 33), a equação (3.155) pode ser escrita como

$$D_F(x-y, \beta) = \Theta(x^0 - y^0) d(x-y, \beta) + \Theta(y^0 - x^0) d(y-x, \beta), \quad (3.157)$$

onde

$$d(x-y, \beta) \equiv \langle 0(\beta) | \phi(\vec{x}, x^0) \phi(\vec{y}, y^0) | 0(\beta) \rangle. \quad (3.158)$$

Substituindo (3.137) na equação acima, teremos que

$$\begin{aligned} d(x-y, \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \left[\langle 0(\beta) | a_{\vec{k}} a_{\vec{q}} | 0(\beta) \rangle e^{-i(k \cdot x - q \cdot y)} + \right. \\ &+ \langle 0(\beta) | a_{\vec{k}} a_{\vec{q}}^\dagger | 0(\beta) \rangle e^{-i(k \cdot x - q \cdot y)} + \langle 0(\beta) | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{q}} | 0(\beta) \rangle e^{i(k \cdot x - q \cdot y)} + \\ &+ \left. \langle 0(\beta) | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger | 0(\beta) \rangle e^{i(k \cdot x + q \cdot y)} \right] \end{aligned} \quad (3.159)$$

Esta equação pode ser reescrita em termos dos operadores termais (3.145)-(3.148) de modo que

as relações de comutação (3.153) permitem concluir que

$$d(x-y, \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left[u_{\vec{k},\beta}^2 e^{-i(x-y)\cdot k} + v_{\vec{k},\beta}^2 e^{i(x-y)\cdot k} \right]. \quad (3.160)$$

Veja, por exemplo, que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | a_{\vec{k}} a_{\vec{q}}^\dagger | 0(\beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | [u_{\vec{k},\beta} a_{\vec{k},\beta} + v_{\vec{k},\beta} \tilde{a}_{\vec{k},\beta}^\dagger] [u_{\vec{q},\beta} a_{\vec{q},\beta}^\dagger + v_{\vec{q},\beta} \tilde{a}_{\vec{q},\beta}] | 0(\beta) \rangle \\ &= u_{\vec{k},\beta} u_{\vec{q},\beta} \langle 0(\beta) | a_{\vec{k},\beta} a_{\vec{q},\beta}^\dagger | 0(\beta) \rangle \\ &= u_{\vec{k},\beta} u_{\vec{q},\beta} [a_{\vec{k},\beta}, a_{\vec{q},\beta}^\dagger] \\ &= u_{\vec{k},\beta}^2 (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q}). \end{aligned} \quad (3.161)$$

Substituindo (3.160) em (3.157), encontramos

$$\begin{aligned} D_F(x-y, \beta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left[\Theta(x^0 - y^0) e^{-i(x-y)\cdot k} + \Theta(y^0 - x^0) e^{i(x-y)\cdot k} \right] + \\ &+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} v_{\vec{k},\beta}^2 \left[\Theta(x^0 - y^0) e^{-i(x-y)\cdot k} + \Theta(y^0 - x^0) e^{i(x-y)\cdot k} \right] + \\ &+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} v_{\vec{k},\beta}^2 \left[\Theta(x^0 - y^0) e^{i(x-y)\cdot k} + \Theta(y^0 - x^0) e^{-i(x-y)\cdot k} \right], \end{aligned} \quad (3.162)$$

onde fizemos uso do fato que

$$u_{\vec{k},\beta}^2 - v_{\vec{k},\beta}^2 = 1. \quad (3.163)$$

Agora, uma vez que a representação integral da função de Heaviside é dada por (7)

$$\Theta(x-y) = - \int \frac{dp}{2\pi i} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p + i\varepsilon}, \quad (3.164)$$

sendo ε um parâmetro infinitesimal, a equação (3.162) pode ser resolvida como⁹

$$\begin{aligned}
D_F(x-y, \beta) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left[\frac{i}{k^0 - \omega_{\vec{k}} + i\varepsilon} - \frac{i}{k^0 + \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \right] e^{-ik \cdot (x-y)} + \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} v_{\vec{k}, \beta}^2 \left\{ \left[\frac{i}{k^0 - \omega_{\vec{k}} + i\varepsilon} - \frac{i}{k^0 + \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \right] + \right. \\
&+ \left. \left[\frac{i}{k^0 + \omega_{\vec{k}} + i\varepsilon} - \frac{i}{k^0 - \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon} \right] \right\} e^{-ik \cdot (x-y)} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x-y)} + \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} v_{\vec{k}, \beta}^2 \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \right] e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (3.165)
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que o propagador termal, no formalismo DCT, é constituído de duas partes distintas, uma independente e outra dependente da temperatura. Sendo mais específico,

$$D_F(x-y, \beta) = D_F(x-y) + D_F^\beta(x-y), \quad (3.166)$$

onde $D_F(x-y)$ é dada por (2.15) e

$$\begin{aligned}
D_F^\beta(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} v_{\vec{k}, \beta}^2 \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \right] e^{-ik \cdot (x-y)} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [2\pi n_B(\vec{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2)] e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (3.167)
\end{aligned}$$

Esta última expressão foi escrita fazendo uso da relação (8??)

$$2\pi i \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x) = \left(-\frac{1}{x + i\varepsilon} \right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{x - i\varepsilon} \right)^{n+1}, \quad (3.168)$$

além do fato de que $n_B(\vec{k}, \beta) = \langle N \rangle = v_{\vec{k}, \beta}^2$ é a função distribuição bosônica para o k -ésimo modo (6). Veja que a dependência de temperatura esta toda contida em $D_F^\beta(x-y)$. Além disto, o fator $\delta(k^2 - m^2)$ restringe o momento a estar na condição de casca de massa (“on-shell” em inglês). No espaço dos momentos, os propagadores de Feynman termiais para campos escalares não-til e til são dados respectivamente por

$$D_F(k, \beta) = D_F(k) + 2\pi n_B(\vec{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2) \quad (3.169)$$

⁹Aqui, devemos também lembrar que $\omega_{\vec{k}}^2 = \vec{k}^2 + m^2$.

e

$$\tilde{D}_F(k, \beta) = D_F^*(k) + 2\pi n_B(\vec{k}, \beta) \delta(k^2 - m^2), \quad (3.170)$$

onde

$$D_F(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.171)$$

é o resultado convencional da teoria em temperatura zero.

Na próxima seção, nós discutiremos a teoria do campo fermiônico no formalismo DCT.

3.5 O campo fermiônico termal.

A Lagrangiana que descreve campos fermiônicos na ausência de fonte e interação é dada pela equação (2.21). Sua representação termal, obtida de uma duplicação do espaço de Hilbert (6), é dada por¹⁰

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \bar{\tilde{\psi}}(i\gamma^{*\mu} \partial_\mu + m)\tilde{\psi}, \quad (3.172)$$

onde os campos ψ e $\tilde{\psi}$ são, respectivamente, dados pelas equações (2.30) e (2.31). Através das regras CT é possível também escrever os campos na representação til

$$\tilde{\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\tilde{a}_{\vec{p}}^s u^{*s}(p) e^{ip \cdot x} + \tilde{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} v^{*s}(p) e^{-ip \cdot x} \right) \quad (3.173)$$

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\tilde{b}_{\vec{p}}^s \bar{v}^{*s}(p) e^{ip \cdot x} + \tilde{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^{*s}(p) e^{-ip \cdot x} \right), \quad (3.174)$$

onde os operadores de criação e aniquilação do sistema duplicado satisfazem respectivamente (2.33) e

$$\left\{ \tilde{a}_{\vec{p}}^r, \tilde{a}_{\vec{q}}^{s\dagger} \right\} = \left\{ \tilde{b}_{\vec{p}}^r, \tilde{b}_{\vec{q}}^{s\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs}, \quad (3.175)$$

com todas as outras sendo iguais a zero (6).

Analogamente ao caso bosônico, podemos pensar em cada modo de Fourier do campo fermiônico como osciladores fermiônicos independentes (6, 33). Assim, toda teoria já desenvolvida para estes sistemas podem ser readaptadas para um tratamento adequado na teoria quântica de campos. A transformação de Bogoliubov (3.50), por exemplo, pode ser generalizada como

$$U(\beta) = \prod_k A_k(\vec{k}, \beta) B_k(\vec{k}, \beta), \quad (3.176)$$

¹⁰Devemos ter em mente que $\gamma^* = (\gamma^\dagger)^T$.

onde

$$A_k(\vec{k}, \beta) = e^{\theta_k(\beta)(a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger + a_k \tilde{a}_k)} \quad (3.177)$$

e

$$B_k(\vec{k}, \beta) = e^{\theta_k(\beta)(b_k^\dagger \tilde{b}_k^\dagger + b_k \tilde{b}_k)}. \quad (3.178)$$

O índice k , nos operadores acima, identifica o k -ésimo modo do oscilador. Veja que (3.176) lida tanto com férmions como anti-férmions, motivo pelo qual ela possui esta estrutura dobrada em comparação com (3.50) (6). Além disso, o parâmetro $\theta_k(\beta)$ é definido através das funções trigonométricas

$$v_{\vec{k},\beta} = \sin \theta_k(\beta) = \frac{1}{\sqrt{e^{\beta \omega_k} + 1}} \quad (3.179)$$

e

$$u_{\vec{k},\beta} = \cos \theta_k(\beta) = \frac{1}{\sqrt{e^{-\beta \omega_k} + 1}}. \quad (3.180)$$

Estas são generalizações diretas das equações (3.45) e (3.46) (6).

Através do operador transformações de Bogoliubov (3.176) podemos construir o estado de vácuo termal

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \quad (3.181)$$

onde, mais uma vez,

$$|0, \tilde{0}\rangle = \bigotimes_k |0, \tilde{0}\rangle_k \quad (3.182)$$

deve ser entendido como o produto direto dos vácuos do sistema duplicado, ainda temperatura zero, de cada oscilador de modo fermiônico k (6). Ele também permite introduzir os operadores de criação e aniquilação termais de forma convencional

$$a_{\vec{k},\beta} = u_{\vec{k},\beta} a_{\vec{k}} - v_{\vec{k},\beta} \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger \quad (3.183)$$

$$\tilde{a}_{\vec{k},\beta} = u_{\vec{k},\beta} \tilde{a}_{\vec{k}} + v_{\vec{k},\beta} a_{\vec{k}}^\dagger \quad (3.184)$$

$$a_{\vec{k},\beta}^\dagger = u_{\vec{k},\beta} a_{\vec{k}}^\dagger - v_{\vec{k},\beta} \tilde{a}_{\vec{k}} \quad (3.185)$$

$$\tilde{a}_{\vec{k},\beta}^\dagger = u_{\vec{k},\beta} \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger + v_{\vec{k},\beta} a_{\vec{k}}, \quad (3.186)$$

com expressões iguais para os operadores que lidam com anti-férmions (6). O procedimento é o mesmo que o realizado na análise de osciladores fermiônicos, ou seja, devemos fazer uso da definição geral (3.52). Veja, por exemplo, que

$$a_{\vec{k},\beta} = U(\beta) a_{\vec{k}} U^{-1}(\beta) = A_k(\vec{k}, \beta) a_{\vec{k}} A_k^{-1}(\vec{k}, \beta) = u_{\vec{k},\beta} a_{\vec{k}} - v_{\vec{k},\beta} \tilde{a}_{\vec{k}}^\dagger. \quad (3.187)$$

Pode-se mostrar também que as relações de anti-comutação obedecidas pelos ope-

radores termais são naturalmente preservadas (6), ou seja,

$$\left\{ \tilde{a}_{\vec{p},\beta}^r, \tilde{a}_{\vec{q},\beta}^{s\dagger} \right\} = \left\{ \tilde{b}_{\vec{p},\beta}^r, \tilde{b}_{\vec{q},\beta}^{s\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs} \quad (3.188)$$

$$\left\{ a_{\vec{p},\beta}^r, a_{\vec{q},\beta}^{s\dagger} \right\} = \left\{ b_{\vec{p},\beta}^r, b_{\vec{q},\beta}^{s\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs}. \quad (3.189)$$

O propagador de Dirac no formalismo DCT, por sua vez, é definido como o valor esperado no vácuo termal através da relação (49, 1)

$$S_F(x-y, \beta) \equiv \langle 0(\beta) | \mathcal{T} [\psi(\vec{x}, x^0) \bar{\psi}(\vec{y}, y^0)] | 0(\beta) \rangle \quad (3.190)$$

$$= \Theta(x^0 - y^0) s(x-y, \beta) - \Theta(y^0 - x^0) \bar{s}(y-x, \beta) \quad (3.191)$$

onde

$$s(x-y, \beta) \equiv \langle 0(\beta) | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0(\beta) \rangle \quad (3.192)$$

e

$$\bar{s}(y-x, \beta) \equiv \langle 0(\beta) | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0(\beta) \rangle. \quad (3.193)$$

Seguindo o mesmo raciocínio empregado no cálculo do propagador escalar e fazendo uso das relações (2.120) e (2.121) podemos mostrar que o propagador (3.190) também é constituído da soma de uma parte independente e outra dependente da temperatura, ou seja,

$$S_F(x-y, \beta) = S_F(x-s) + S_F^\beta(x-y) \quad (3.194)$$

onde $S_F(x-s)$ é dado por (2.39) e

$$\begin{aligned} S_F^\beta(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} v_{\vec{p},\beta}^2 \left[\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 - i\epsilon} \right] e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [2\pi n_F(\vec{p}, \beta) (\not{p} + m) \delta(p^2 - m^2)] e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (3.195)$$

A função $n_F(\vec{p}, \beta) = \langle N \rangle = v_{\vec{p},\beta}^2$ é simplesmente a função de distribuição fermiônica. No espaço dos momentos, podemos então escrever

$$S_F(p, \beta) = S_F(p) + 2\pi n_B(\vec{p}, \beta) (\not{p} + m) \delta(p^2 - m^2) \quad (3.196)$$

onde

$$S_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.197)$$

é o propagador em temperatura zero. Mais uma vez, a dependência na temperatura é devido a

um termo que depende da função de distribuição $n_F(\vec{p}, \beta)$ e, também, a condição de conservação de massa deve ser satisfeita pelo momento.

Na próxima seção, o propagador termal do fóton será calculado mais uma vez fazendo uso da analogia com o campo escalar. Como veremos isto será possível fazendo uso da notação dubleto já mencionada acima.

3.6 O propagador termal do fóton.

Na seção (2.3.3) fizemos uso da teoria de Yukawa para justificar as regras de Feynman para a QED. Em especial, a introdução do propagador do fóton foi embasada na ideia de que cada componente do quadripotencial A^μ se comporta como um campo escalar sem massa. Neste sentido, o campo A^μ se transforma como um campo bosônico sob transformação de Bogoliubov (7, 6).

Afim de determinar o propagador do fóton de uma forma mais direta, voltemos mais uma vez nossa atenção para o propagador do campo escalar. Seja $\Phi(x)$ e $\bar{\Phi}(x)$ campos dubletos definidos respectivamente por¹¹

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \tilde{\phi}^\dagger(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix} \quad (3.198)$$

e

$$\bar{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \phi^\dagger(x) & -\tilde{\phi}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) & -\tilde{\phi}(x) \end{pmatrix}. \quad (3.199)$$

Então, em termos destes, a Lagrangiana (3.131) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\Phi}(x) \partial^\mu \Phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \bar{\Phi}(x) \Phi(x) \quad (3.200)$$

e o propagador do campo escalar pode ser determinado através da matriz propagadora termal $\mathbb{D}_F(x-y, \beta)$ definida como

$$\mathbb{D}_F(x-y, \beta) = \begin{pmatrix} \langle 0(\beta) | \mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] | 0(\beta) \rangle & \langle 0(\beta) | \mathcal{T}[\phi(x)\tilde{\phi}(y)] | 0(\beta) \rangle \\ \langle 0(\beta) | \mathcal{T}[\tilde{\phi}(x)\phi(y)] | 0(\beta) \rangle & \langle 0(\beta) | \mathcal{T}[\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)] | 0(\beta) \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.201)$$

¹¹Estamos considerando ainda campos escalares reais.

Em notação indicial, a matriz(3.201) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_F^{ab}(x-y, \beta) &= \langle 0(\beta) | \mathcal{T}[\Phi^a(x)\Phi^b(y)] | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0, \tilde{0} | U^{-1}(\beta) \mathcal{T}[C_{\vec{k}, \beta}^{-1(ac)} \Phi_c(x, \beta) C_{\vec{k}, \beta}^{-1(bd)} \Phi_d(y, \beta)] U(\beta) | 0, \tilde{0} \rangle \\
&= C_{\vec{k}, \beta}^{-1(ac)} \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T}[U^{-1}(\beta) \Phi_c(x, \beta) U(\beta) U^{-1}(\beta) \Phi_d(y, \beta) U(\beta)] | 0, \tilde{0} \rangle C_{\vec{k}, \beta}^{-1(db)} \\
&= C_{\vec{k}, \beta}^{-1(ac)} \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T}[\Phi_c(x)\Phi_d(y)] | 0, \tilde{0} \rangle C_{\vec{k}, \beta}^{-1(db)} \\
&= C_{\vec{k}, \beta}^{-1(ac)} \mathbb{D}_{F(cd)}(x-y) C_{\vec{k}, \beta}^{-1(db)}
\end{aligned} \tag{3.202}$$

onde $\mathbb{D}_{F(cd)}(x-y)$ são os elementos da matriz propagadora do sistema dobrado em temperatura zero

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_F(x-y) &= \begin{pmatrix} \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] | 0, \tilde{0} \rangle & \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T}[\phi(x)\tilde{\phi}(y)] | 0, \tilde{0} \rangle \\ \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T}[\tilde{\phi}(x)\phi(y)] | 0, \tilde{0} \rangle & \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T}[\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)] | 0, \tilde{0} \rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] | 0, \tilde{0} \rangle & 0 \\ 0 & \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{T}[\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)] | 0, \tilde{0} \rangle \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.203}$$

e $C_{\vec{k}, \beta}^{-1(db)}$ são os elementos da inversa da matriz

$$C_{\vec{k}, \beta} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}, \beta} & -v_{\vec{k}, \beta} \\ -v_{\vec{k}, \beta} & u_{\vec{k}, \beta} \end{pmatrix} \tag{3.204}$$

além de que $u_{\vec{k}, \beta}$ e $v_{\vec{k}, \beta}$ são dadas respectivamente por (3.149) e (3.150). Veja que $C_{\vec{k}, \beta}$ constitui uma generalização da matriz (3.125) (6). Trabalhando no espaço dos momentos, podemos então calcular

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_F(k, \beta) &= \begin{pmatrix} u_{\vec{k}, \beta} & v_{\vec{k}, \beta} \\ v_{\vec{k}, \beta} & u_{\vec{k}, \beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\vec{k}, \beta} & v_{\vec{k}, \beta} \\ v_{\vec{k}, \beta} & u_{\vec{k}, \beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi n_B(\vec{k}) \delta(k^2 - m^2) & 2\pi [n_B(\vec{k}) + n_B^2(\vec{k})]^{\frac{1}{2}} \delta(k^2 - m^2) \\ 2\pi [n_B(\vec{k}) + n_B^2(\vec{k})]^{\frac{1}{2}} \delta(k^2 - m^2) & -\frac{i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} + 2\pi n_B(\vec{k}) \delta(k^2 - m^2) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.205}$$

Observe que os propagadores (3.169) e (3.170) são justamente as entradas $\mathbb{D}_F^{11}(k, \beta)$ e $\mathbb{D}_F^{22}(k, \beta)$.

Agora, uma vez que as componentes do campo A^μ se transformam como campos bosônicos sob transformação de Bogoliubov, podemos determinar o propagador termal do fóton de forma semelhante. Em temperatura zero, a matriz propagadora do fóton, no espaço dos

momentos, é dada por

$$\mathbb{R}_{\mu\nu}(k) = \begin{pmatrix} R_{\mu\nu}(k) & 0 \\ 0 & \tilde{R}_{\mu\nu}(k) \end{pmatrix} \quad (3.206)$$

onde $R_{\mu\nu}(k)$ é dado pela equação (2.46). O propagador termal, por sua vez, pode então ser obtido através do produto matricial

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\mu\nu}(k, \beta) &= \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{\mu\nu}^{11}(k, \beta) & \mathbb{R}_{\mu\nu}^{12}(k, \beta) \\ \mathbb{R}_{\mu\nu}^{21}(k, \beta) & \mathbb{R}_{\mu\nu}^{22}(k, \beta) \end{pmatrix} \\ &= C_{\vec{k}, \beta}^{-1} \mathbb{R}_{\mu\nu}(k) C_{\vec{k}, \beta}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.207)$$

Então, resolvendo a equação acima, a matriz propagadora do fóton pode ser escrita como (8)

$$\mathbb{R}_{\mu\nu}(k, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} - 2\pi g_{\mu\nu} v_{\vec{q}, \beta}^2 \delta(q^2) & -2\pi g_{\mu\nu} u_{\vec{q}, \beta} v_{\vec{q}, \beta} \delta(q^2) \\ -2\pi g_{\mu\nu} u_{\vec{q}, \beta} v_{\vec{q}, \beta} \delta(q^2) & \frac{ig_{\mu\nu}}{q^2-i\varepsilon} - 2\pi g_{\mu\nu} v_{\vec{q}, \beta}^2 \delta(q^2) \end{pmatrix}. \quad (3.208)$$

Como veremos, os propagadores não-til e til, dados respectivamente por $\mathbb{R}_{\mu\nu}^{11}(k, \beta)$ e $\mathbb{R}_{\mu\nu}^{22}(k, \beta)$, serão necessários para se determinar a matriz de espalhamento $\mathcal{M}(\beta)$.

No próximo capítulo, a seção de choque termal para o espalhamento $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ será avaliada através do formalismo DCT.

4 SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPALHAMENTO EM TEMPERATURA FINITA.

Neste capítulo, através de uma duplicação do espaço de Hilbert, ideia central do formalismo DCT, investigaremos como a seção de choque total para o espalhamento $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ se modifica na presença de uma temperatura diferente de zero. O procedimento a ser realizado aqui será bastante análogo àquele feito no capítulo (2), onde a matriz \mathcal{M} pôde ser calculada por meio de diagramas construídos segundo regras de Feynman apropriadas.

4.1 Operador evolução temporal e a matriz S termal.

Observando a equação (2.63) podemos concluir que o operador que permite a definição da matriz de espalhamento S é justamente o operador evolução temporal $U(\infty, -\infty)$, dado pela equação (2.55) (44, 43). Com a duplicação do espaço de Hilbert, a representação termal deste operador é alcançada através de

$$\begin{aligned}
\hat{U} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \cdots dt_n \mathcal{T}[H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)] \\
&= I + (-i) \int dt \hat{H}_I(t) + \frac{(-i)^2}{2!} \int dt_1 dt_2 \mathcal{T}[H_I(t_1)H_I(t_2)] + \cdots \\
&= I + (-i) \int d^4z [\mathcal{H}_I(z) - \tilde{\mathcal{H}}_I(z)] + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4z_1 d^4z_2 \mathcal{T}[\mathcal{H}_I(z_1)\mathcal{H}_I(z_2) - \tilde{\mathcal{H}}_I(z_1)\tilde{\mathcal{H}}_I(z_2)] + \cdots \\
&= U - \tilde{U},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde \mathcal{H}_I é a densidade Hamiltoniana de interação (6). Para o processo de espalhamento que queremos avaliar, a Hamiltoniana de interação é dada por

$$\mathcal{H}_I = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \tag{4.2}$$

Também, assim como no capítulo (2), a primeira contribuição relevante para a matriz S vem do terceiro termo da expansão (4.1), ou seja,

$$\hat{U}_2 = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4z_1 d^4z_2 \mathcal{T}[(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu)_{z_1} (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi A_\nu)_{z_2} - (\bar{\psi} \gamma^{*\mu} \tilde{\psi} \tilde{A}_\mu)_{z_1} (\bar{\psi} \gamma^{*\nu} \tilde{\psi} \tilde{A}_\nu)_{z_2}]. \tag{4.3}$$

A matriz de espalhamento termal $S(\beta)$, até esta ordem, pode então ser obtida pela definição

$$S(\beta) \equiv {}_{0,\beta} \langle \vec{k}, r; \vec{k}', r' | \hat{U}_2 | \vec{p}, s; \vec{p}', s' \rangle_{0,\beta}, \quad (4.4)$$

onde os estados de partícula, agora também caracterizados com o índice β , estão termalizados através do operador transformação de Boboliubov (6). Ou seja, dado um estado de partícula¹ fermiônica em temperatura zero

$$|\vec{p}, s\rangle_0 = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle, \quad (4.5)$$

sua representação termal,

$$|\vec{p}, s\rangle_{0,\beta} = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p},\beta}^{s\dagger} |0(\beta)\rangle, \quad (4.6)$$

é obtida ao ser realizada uma duplicação do espaço de Hilbert (6).

4.2 Regras de Feynman para a matriz $\mathcal{M}(\beta)$.

A matriz de espalhamento $\mathcal{M}(\beta)$ pode ser encontrada resolvendo a equação (4.4) através do teorema de Wick para o sistema dobrado. Agora, como o sistema til deve ser entendido como uma cópia do sistema original, o teorema de Wick simplesmente mantém sua estrutura para ambos (51) e, assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_{20,\beta} \langle \vec{k}, r; \vec{k}', r' | : (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu)_{z_1} (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi A_\nu)_{z_2} + \\ &- (\bar{\psi} \gamma^{*\mu} \tilde{\psi} \tilde{A}_\mu)_{z_1} (\bar{\psi} \gamma^{*\nu} \tilde{\psi} \tilde{A}_\nu)_{z_2} + \left(\begin{array}{c} \text{todas as contrações} \\ \text{possíveis entre os campos} \end{array} \right) : |\vec{p}, s; \vec{p}', s' \rangle_{0,\beta}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como no capítulo (2), estamos interessados em diagramas completamente conectados e amputados. Estes são obtidos contraindo todos os estados de partículas termiais com os campos dos vértices z_1 (\tilde{z}_1) e z_2 (\tilde{z}_2). Veja que o formalismo DCT acrescenta na teoria novos vértices, \tilde{z}_1 e \tilde{z}_2 , para levar em consideração o sistema til. Vejamos, então, como o campo $\psi(z)$ atua em um estado de férmion termal, ou seja:

$$\psi(z) |\vec{p}, s\rangle_{0,\beta} = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \sum_j \left(a_{\vec{q}}^j u^j(q) e^{-iq \cdot z} + b_{\vec{q}}^{j\dagger} v^j(q) e^{iq \cdot z} \right) \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p},\beta}^{s\dagger} |0(\beta)\rangle. \quad (4.8)$$

¹O mesmo é válido para antipartículas.

O procedimento é bastante análogo aquele que conduz a definição (2.81). Invertendo as equações (3.183)-(3.186) e usando as relações (3.189), podemos reescrever (4.8) em termos dos operadores termais, de modo que

$$\begin{aligned}\psi(z)|\vec{p}, s\rangle_{0,\beta} &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} u_{\vec{p},\beta} e^{-iq \cdot z} \sum_j u^j(q) a_{\vec{p},\beta}^j a_{\vec{p},\beta}^{s\dagger} |0(\beta)\rangle + \mathcal{O}(\beta) \\ &= u_{\vec{p},\beta} u^s(p) e^{-ip \cdot z} |0(\beta)\rangle + \mathcal{O}(\beta),\end{aligned}\quad (4.9)$$

onde $\mathcal{O}(\beta)$ são os termos que não contribuirão para a matriz de espalhamento S devido a condição de ortogonalidade advinda da equação (4.7). Deste fato, podemos então definir a contração do campo $\psi(z)$ com um estado de férmion termalizado:

$$\overline{\psi(x)|\vec{p}, s\rangle_{0,\beta}} = u_{\vec{p},\beta} \mathbf{u}^s(p) e^{-ip \cdot z} |0(\beta)\rangle. \quad (4.10)$$

Duas observações devem ser feitas aqui. A primeira é que não existe mais operadores do lado direito da igualdade acima. A segunda é que escrevemos o espinor $\mathbf{u}^s(p)$ em negrito² para diferenciá-lo da função trigonométrica $u_{\vec{k},\beta}$ definida em (3.180).

De modo geral, sendo os estados termais de férmions e antiférmions representados respectivamente por $|\vec{p}, s\rangle_{0,\beta}$ e $|\vec{p}', s'\rangle_{0,\beta}$, as contrações envolvendo campos não-til podem ser definidas como

$$\begin{aligned}\overline{\psi(z)|\vec{p}, s\rangle_{0,\beta}} &= u_{\vec{p},\beta} \mathbf{u}^s(p) e^{-ip \cdot z} |0(\beta)\rangle; & \overline{\psi(z)|\vec{p}', s'\rangle_{0,\beta}} &= 0; \\ {}_{0,\beta} \overline{\langle \vec{p}, s | \psi(z)} &= 0; & {}_{0,\beta} \overline{\langle \vec{p}', s' | \psi(z)} &= u_{\vec{p}',\beta} \mathbf{v}^{s'}(p') e^{ip' \cdot z} |0(\beta)\rangle; \\ \overline{\bar{\psi}(z)|\vec{p}, s\rangle_{0,\beta}} &= 0; & \overline{\bar{\psi}(z)|\vec{p}', s'\rangle_{0,\beta}} &= u_{\vec{p}',\beta} \bar{\mathbf{v}}^{s'}(p') e^{-ip' \cdot z} |0(\beta)\rangle; \\ {}_{0,\beta} \overline{\langle \vec{p}, s | \bar{\psi}(z)} &= u_{\vec{p},\beta} \bar{\mathbf{u}}^s(p) e^{ip \cdot z} |0(\beta)\rangle; & {}_{0,\beta} \overline{\langle \vec{p}', s' | \bar{\psi}(z)} &= 0.\end{aligned}\quad (4.11)$$

²A partir de agora, todos os espinores serão escritos em negrito.

Por outro lado, as contrações envolvendo campos til podem ser definidas como

$$\begin{aligned}
\overbrace{\tilde{\Psi}(z)|\vec{p}, s\rangle}_{0,\beta} &= 0; & \overbrace{\tilde{\Psi}(z)|\vec{p}', s'\rangle}_{0,\beta} &= -v_{\vec{p}',\beta} \mathbf{v}^{*s'}(p') e^{-ip'\cdot z} |0(\beta)\rangle; \\
{}_{0,\beta} \langle \vec{p}, s | \overbrace{\tilde{\Psi}(z)} &= -v_{\vec{p},\beta} \mathbf{u}^{*s}(p) e^{ip\cdot z} |0(\beta)\rangle; & {}_{0,\beta} \langle \vec{p}', s' | \overbrace{\tilde{\Psi}(z)} &= 0; \\
\overbrace{\tilde{\tilde{\Psi}}(z)|\vec{p}, s\rangle}_{0,\beta} &= -v_{\vec{p},\beta} \bar{\mathbf{u}}^{*s}(p) e^{-ip\cdot z} |0(\beta)\rangle; & \overbrace{\tilde{\tilde{\Psi}}(z)|\vec{p}', s'\rangle}_{0,\beta} &= 0; \\
{}_{0,\beta} \langle \vec{p}, s | \overbrace{\tilde{\tilde{\Psi}}(z)} &= 0; & {}_{0,\beta} \langle \vec{p}', s' | \overbrace{\tilde{\tilde{\Psi}}(z)} &= -v_{\vec{p}',\beta} \bar{\mathbf{v}}^{*s'}(p') e^{ip'\cdot z} |0(\beta)\rangle.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Tendo definido as contrações entre campos e estados termiais, podemos agora voltar nossa atenção para equação (4.7). Assim como em temperatura zero, os diagramas completamente conectados e amputados são obtidos dos dois primeiros termos sob ordenamento normal através das contrações³

$$\begin{aligned}
iT(\beta) &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 {}_{0,\beta} \langle \vec{k}, r; \vec{k}', r' | \overbrace{(\tilde{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu)_{z_1} (\tilde{\Psi} \gamma^\nu \Psi A_\nu)_{z_2}} | \vec{p}, s; \vec{p}', s' \rangle_{0,\beta} \times (2!) + \\
&- \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 {}_{0,\beta} \langle \vec{k}, r; \vec{k}', r' | \overbrace{(\tilde{\Psi} \gamma^{\mu} \tilde{\tilde{\Psi}} \tilde{A}_\mu)_{z_1} (\tilde{\Psi} \gamma^{\nu} \tilde{\tilde{\Psi}} \tilde{A}_\nu)_{z_2}} | \vec{p}, s; \vec{p}', s' \rangle_{0,\beta} \times (2!)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde $iT(\beta)$ é a parte da matriz $S(\beta)$ que realmente contribui para o espalhamento e o fator de $(2!)$ foi acrescentado pela simetria de troca de vértice. Além disso, o sinal de cada termo no lado direito da igualdade já leva em conta o desembaralhamento das contrações devido a permutação de campos fermiônicos, onde para cada permutação acrescenta-se um fator de (-1) (33). Assim, substituindo (4.11) e (4.12) em (4.13), obtemos

³As definições em (4.11) e (4.12) mostram que estas são as únicas contrações possíveis.

$$\begin{aligned}
iT(\beta) &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4z_1 d^4z_2 \left\{ u_{\vec{k},\beta} u_{\vec{k}',\beta} u_{\vec{p}',\beta} u_{\vec{p},\beta} \left[\bar{\mathbf{u}}^r(k) \gamma^\mu \mathbf{v}^{r'}(k') \mathbb{R}_{\mu\nu}^{11}(q, \beta) \bar{\mathbf{v}}^{s'}(p') \gamma^\nu \mathbf{u}^s(p) \right] + \right. \\
&\quad \left. - v_{\vec{k},\beta} v_{\vec{k}',\beta} v_{\vec{p}',\beta} v_{\vec{p},\beta} \left[\bar{\mathbf{v}}^{*r'}(k') \gamma^\mu \mathbf{u}^{*r}(k) \mathbb{R}_{\mu\nu}^{22}(q, \beta) \bar{\mathbf{u}}^{*s}(p) \gamma^\nu \mathbf{v}^{*s'}(p') \right] \right\} \times \\
&\quad \times e^{i(k+k'-q)\cdot z_1} e^{-i(p+p'-q)\cdot z_2}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Aqui, temos usado a expansão de Fourier

$$\mathbb{R}_{\mu\nu}^{ij}(z_1 - z_2, \beta) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathbb{R}_{\mu\nu}^{ij}(q, \beta) e^{-iq\cdot(z_1 - z_2)} \tag{4.15}$$

onde $\mathbb{R}_{\mu\nu}^{ij}(z_1 - z_2, \beta)$ são os elementos da matriz propagadora do fóton

$$\mathbb{R}_{\mu\nu}(z_1 - z_2, \beta) = \begin{pmatrix} \langle 0(\beta) | \mathcal{T}[A_\mu(z_1) A_\nu(z_2)] | 0(\beta) \rangle & \langle 0(\beta) | \mathcal{T}[A_\mu(z_1) \tilde{A}_\nu(z_2)] | 0(\beta) \rangle \\ \langle 0(\beta) | \mathcal{T}[\tilde{A}_\mu(z_1) A_\nu(z_2)] | 0(\beta) \rangle & \langle 0(\beta) | \mathcal{T}[\tilde{A}_\mu(z_1) \tilde{A}_\nu(z_2)] | 0(\beta) \rangle \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

já calculada em (3.208).

Lembrando ainda que (33)

$$\int d^4z e^{ik\cdot z} = (2\pi)^4 \delta^4(k) \tag{4.17}$$

e

$$[\bar{\mathbf{v}}^{r'}(k') \gamma^\mu \mathbf{u}^r(k)]^* = \bar{\mathbf{u}}^r(k) \gamma^\mu \mathbf{v}^{r'}(k'), \tag{4.18}$$

assim como

$$[\bar{\mathbf{u}}^s(p) \gamma_\mu \mathbf{v}^{s'}(p')]^* = \bar{\mathbf{v}}^{s'}(p') \gamma_\mu \mathbf{u}^s(p), \tag{4.19}$$

podemos reescrever (4.14) como

$$iT(\beta) = (2\pi)^4 \delta^4(k + k' - p - p') i \mathcal{M}(\beta) \tag{4.20}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\beta) = & e^2 \left\{ \frac{1}{q^2} \left(u_{\vec{k},\beta} u_{\vec{k}',\beta} u_{\vec{p}',\beta} u_{\vec{p},\beta} + v_{\vec{k},\beta} v_{\vec{k}',\beta} v_{\vec{p}',\beta} v_{\vec{p},\beta} \right) \right. \\
& - \left. i2\pi v_{\vec{q},\beta}^2 \delta(q^2) \left(u_{\vec{k},\beta} u_{\vec{k}',\beta} u_{\vec{p}',\beta} u_{\vec{p},\beta} - v_{\vec{k},\beta} v_{\vec{k}',\beta} v_{\vec{p}',\beta} v_{\vec{p},\beta} \right) \right\} \times \\
& \times \left[\bar{\mathbf{v}}^{s'}(p') \boldsymbol{\gamma}^\mu \mathbf{u}^s(p) \right] \left[\bar{\mathbf{u}}^r(k) \boldsymbol{\gamma}_\mu \mathbf{v}^{r'}(k') \right]
\end{aligned} \quad (4.21)$$

é a matriz de espalhamento termal. Uma outra observação se faz necessária aqui. O momento do fóton está representado pela letra q e, por se tratar de um bóson (6), devemos levar em conta as funções hiperbólicas definidas por

$$u_{\vec{q},\beta} = \cosh \theta_q(\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta \omega_{\vec{q}}}}} \quad (4.22)$$

e

$$v_{\vec{q},\beta} = \sinh \theta_q(\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{e^{\beta \omega_{\vec{q}}} - 1}}. \quad (4.23)$$

Por outro lado, os momentos dos férmions (antiférmions) foram representados pelas letras p (p') e k (k'). Assim, devemos estar cientes que

$$u_{\vec{p},\beta} = \cos \theta_p(\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta \omega_{\vec{p}}}}} \quad (4.24)$$

e

$$v_{\vec{p},\beta} = \sin \theta_p(\beta) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\beta \omega_{\vec{p}}}}}, \quad (4.25)$$

com expressões semelhantes para p' , k e k' (6).

Assim como fizemos para o caso de temperatura zero, podemos determinar a matriz $\mathcal{M}(\beta)$ através dos digramas de Feynman. Observando (4.13), devemos concluir que apenas dois diagramas devem contribuir para o espalhamento. De fato, podemos representar (4.21) por

$$i\mathcal{M}(\beta) = \begin{array}{c} \mu^- \\ \swarrow \\ k \\ \bullet \\ \mu \\ \uparrow \\ q \\ \bullet \\ \nu \\ \swarrow \\ p \\ \bullet \\ e^- \end{array} \begin{array}{c} \mu^+ \\ \searrow \\ k' \\ \bullet \\ \mu \\ \uparrow \\ q \\ \bullet \\ \nu \\ \swarrow \\ p' \\ \bullet \\ e^+ \end{array} - \begin{array}{c} \mu^- \\ \swarrow \\ k \\ \bullet \\ \tilde{\mu} \\ \uparrow \\ q \\ \bullet \\ \tilde{\nu} \\ \swarrow \\ p \\ \bullet \\ e^- \end{array} \begin{array}{c} \mu^+ \\ \searrow \\ k' \\ \bullet \\ \tilde{\mu} \\ \uparrow \\ q \\ \bullet \\ \tilde{\nu} \\ \swarrow \\ p' \\ \bullet \\ e^+ \end{array}, \quad (4.26)$$

onde o acento til em $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\nu}$) deve ser colocado para evidenciar os diferentes tipos de vértices. Um fato interessante a se observar em (4.26) é que a estrutura da duplicação do espaço de Hilbert é preservada, ou seja, $\mathcal{M}(\beta) = \mathcal{M} - \tilde{\mathcal{M}}$. As regras de Feynman que permitem determinar a expressão matemática para estes diagramas podem ser enumeradas como se segue:

1. Para cada propagador do fóton,

$$\mu \text{ --- } q \text{ --- } \nu = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} - 2\pi\eta_{\mu\nu}v_{\vec{q},\beta}^2\delta(q^2);$$

$$\tilde{\mu} \text{ --- } q \text{ --- } \tilde{\nu} = \frac{i\eta_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} - 2\pi\eta_{\mu\nu}v_{\vec{q},\beta}^2\delta(q^2);$$

2. Para cada vértice,

3. Para cada linha de férmion entrando,

$$z \bullet \longleftarrow p = u_{\vec{p},\beta} \mathbf{u}^s(p);$$

$$\tilde{z} \bullet \longleftarrow p = -v_{\vec{p},\beta} \tilde{\mathbf{u}}^{*s}(p);$$

4. Para cada linha de férmion saindo,

$$z \bullet \longrightarrow p = u_{\vec{p},\beta} \tilde{\mathbf{u}}^s(p);$$

$$\tilde{z} \bullet \longrightarrow p = -v_{\vec{p},\beta} \mathbf{u}^{*s}(p);$$

5. Para cada linha de antiférmion entrando,

$$z \bullet \longleftarrow p' = u_{\vec{p}',\beta} \tilde{\mathbf{v}}^{s'}(p');$$

$$\tilde{z} \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{p'} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} = -v_{\vec{p}',\beta} \mathbf{v}^{*s'}(p');$$

6. Para cada linha de antiférmion saindo,

$$z \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{p'} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} = u_{\vec{p}',\beta} \mathbf{v}^{s'}(p');$$

$$\tilde{z} \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{p'} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} = -v_{\vec{p}',\beta} \bar{\mathbf{v}}^{*s'}(p');$$

7. Impor conservação de momento em cada vértice;

8. Integrar sobre cada “loop” de momento interno indeterminado: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$;

9. Multiplicar o diagrama por $(-1)^n$, onde n é correspondente ao número de permutações entre férmions necessárias para desembaralhar as contrações de Wick.

Aplicando as regras de Feynman aos diagramas em (4.26), chegaremos de forma bastante direta a equação (4.21). Esta pode ainda ser simplificada para

$$\mathcal{M}(\beta) = e^2 W(\beta) \left[\bar{\mathbf{v}}^{s'}(p') \gamma^\mu \mathbf{u}^s(p) \right] \left[\bar{\mathbf{u}}^r(k) \gamma_\mu \mathbf{v}^{r'}(k') \right], \quad (4.27)$$

onde

$$\begin{aligned} W(\beta) = & v_{\vec{k},\beta} v_{\vec{k}',\beta} v_{\vec{p}',\beta} v_{\vec{p},\beta} \left\{ \frac{1}{q^2} \left[e^{\beta(\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'})/2} + 1 \right] + \right. \\ & \left. - 2\pi i v_{\vec{q},\beta}^2 \delta(q^2) \left[e^{\beta(\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'})/2} - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

através da substituição

$$u_{\vec{p},\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega_{\vec{p}}}}} = \frac{e^{\frac{\beta\omega_{\vec{p}}}{2}}}{\sqrt{1 + e^{\beta\omega_{\vec{p}}}}} = e^{\frac{\beta\omega_{\vec{p}}}{2}} v_{\vec{p},\beta}. \quad (4.29)$$

Uma vez tendo calculado a matriz $\mathcal{M}(\beta)$ o procedimento para se determinar a seção de choque termal é o mesmo que àquele executado em temperatura zero. Isto ficará bastante evidente na próxima seção.

4.3 Seção de choque termal total para o espalhamento $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

A equação (4.27) é bastante semelhante aquela que encontramos em temperatura zero, equação (2.105). Isto nos permite concluir que o procedimento para determinar a seção de choque termal, daqui para frente, é o mesmo que aquele realizado no capítulo (2). De fato, podemos escrever de forma direta

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(\beta)|^2 = 4e^4 |W(\beta)|^2 [2(p' \cdot k)(p \cdot k') + 2(p \cdot k)(p' \cdot k') + 2m_\mu^2(p \cdot p')], \quad (4.30)$$

onde

$$\begin{aligned} |W(\beta)|^2 &= n_F(\vec{k}') n_F(\vec{k}) n_B(\vec{p}) n_F(\vec{p}') \left\{ \frac{1}{q^4} \left[e^{\beta(\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'})/2} + 1 \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4\pi^2 n_B^2(\vec{q}) \delta^2(q^2) \left[e^{\beta(\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'})/2} - 1 \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Aqui, $n_F = v_F^2$ e $n_B = v_B^2$ são, respectivamente, as funções distribuição fermiônica e bosônica.

No referencial do centro de massa, onde

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, E\hat{z}) & p'^\mu &= (E, -E\hat{z}) \\ k^\mu &= (E, \vec{k}) & k'^\mu &= (E, -\vec{k}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

e

$$\vec{k} \cdot \hat{z} = |\vec{k}| \cos \theta, \quad (4.33)$$

temos que

$$|W(\beta)|^2 = \frac{(1 + e^{2\beta E})^2}{(1 + e^{\beta E})^4} \left\{ \frac{1}{16E^4} - \frac{4\pi^2 [\delta(4E^2)]^2}{(1 + e^{2\beta E})^2} \right\} \quad (4.34)$$

e

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(\beta)|^2 = 16e^4 |W(\beta)|^2 \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right]. \quad (4.35)$$

A seção de choque diferencial termal, neste referencial, é dada por (8)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\beta = \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{16\pi^2 E_{cm}} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(\beta)|^2. \quad (4.36)$$

Substituindo a equação (4.35) na expressão acima, obtemos

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\beta = 16E^4 \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} |W(\beta)|^2 \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right] \quad (4.37)$$

onde

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (4.38)$$

é constante de estrutura fina. Em uma notação mais compacta, podemos escrever

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\beta = 16E^4 |W(\beta)|^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (4.39)$$

onde $d\sigma/d\Omega$ é a seção de choque diferencial em temperatura zero, equação (2.130).

A seção de choque termal total é obtida integrando sobre $d\Omega$. O resultado é

$$\sigma_{total}(\beta) = 16E^4 G(\beta) \sigma_{total} \quad (4.40)$$

onde $G(\beta) = |W(\beta)|^2$ e σ_{total} é dada pela equação (2.132). Um fato interessante a ser notado em nosso resultado, é que no limite em que a temperatura vai a zero, a função $G(\beta)$ tende $1/16E^4$ de modo que nós recobramos o resultado usual (2.132), ou seja,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_{total}(\beta) = \sigma_{total}. \quad (4.41)$$

Por outro lado, no limite em que a temperatura tende ao infinito, a razão entre as seções de choques termal e convencional tende ao valor constante de $1/4$, ou seja,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{total}(\beta)}{\sigma_{total}} = \frac{1}{4}. \quad (4.42)$$

Este resultado nos diz que a área efetiva do alvo é quatro vezes menor no limite de temperatura tendendo ao infinito. Assim, a medida que a temperatura aumenta, as partículas envolvidas se espelham cada vez menos até um determinado valor limite correspondente a (4.42). Isto pode ser entendido levando em conta que o aumento da temperatura faz com que os momentos das partículas envolvidas também aumentem e, portanto, diminuam a probabilidade de encontrar uma partícula alvo em uma determinada região do espaço, uma vez que a mesma é inversamente proporcional ao momento (52). Como a seção de choque é proporcional a esta probabilidade, deve-se esperar uma redução da mesma para valores de temperatura maiores que zero.

5 CONCLUSÃO

Podemos concluir com este trabalho que o formalismo DCT fornece um método bastante poderoso para se avaliar valores esperados de observáveis tomados com relação a estados construídos a partir da definição de um vácuo térmico. A partir deste, como vimos, toda uma teoria embasada em operadores termais pôde ser construída e, como consequência, os conceitos fundamentais abordados pela TQC convencional puderam facilmente ser generalizados para o caso de temperatura finita.

Concluimos também que os propagadores termais, no formalismo DCT, apresentam uma característica em comum: eles podem ser escritos como a soma de duas partes, uma independente e outra dependente da temperatura. Nesta última, as funções de distribuição fermiônica e bosônica configuram esta dependência e o fator $\delta(k^2 - m^2)$ restringe os momentos das partículas mediadoras a estarem na condição de casca de massa.

A definição do vácuo térmico, por sua vez, foi possível através de uma duplicação dos graus de liberdade do sistema, onde o sistema auxiliar til pôde ser interpretado como sendo o entorno do sistema original (não-til) e, assim, pertencendo a região caracterizada pelo reservatório de calor. Como consequência, a definição do operador transformação de Bogoliubov $U(\beta)$ possibilitou determinar os propagadores do fóton, no espaço duplicado, através do produto matricial (3.207). Deste, obtemos a matriz propagadora (3.208), cujos elementos da diagonal principal foram de fundamental importância para o cálculo da matriz de espalhamento $\mathcal{M}(\beta)$. Além disso, observando mais uma vez (3.208), concluimos também que o propagador termal do fóton, no sistema original, elemento $\mathbb{R}_{\mu\nu}^{11}(q, \beta)$, possui também a característica de ser constituído de duas partes, uma independente e outra dependente da temperatura. Nesta última, a dependência é dada em termos da função de distribuição bosônica e o momento da partícula mediadora está restrita mais uma vez a condição de casca de massa, ou seja, $q^2 = 0$.

Concluimos ainda que as modificações devida à temperatura para a seção de choque advém da matriz de espalhamento $\mathcal{M}(\beta)$. Esta pôde ser determinada avaliando como os campos atuavam nos estados termais de partículas, o que permitiu definir as contrações (4.11) e (4.12) e, portanto, estabelecer a analogia entre o procedimento em temperatura zero e finita. De fato, as regras de Feynman termais foram explicitamente apresentadas na seção (4.2). Um fato interessante a ser notado, é que o formalismo DCT duplica os vértices da teoria de interação para levar em consideração o sistema til. Isto faz com que o número de diagramas que contribuem para o espalhamento também duplique. Além disso, a estrutura característica do espaço de Hilbert dobrado foi preservada, ou seja, $\mathcal{M}(\beta) = \mathcal{M} - \tilde{\mathcal{M}}$.

Também, calculando o módulo quadrado da matriz $\mathcal{M}(\beta)$, pudemos determinar a seção de choque para o espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ mediado por um fóton. Como resultado, a distinção entre as seções de choque termal e convencional se deu por um fator multiplicativo dependente da temperatura. Um característica importante a se observar em nosso resultado é que no limite de temperatura indo a zero, a função $G(\beta)$, em (4.40), tende ao fator $1/16E^4$ de modo que recobramos o resultado convencional, ou seja,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \sigma_{total}(\beta) = \sigma_{total}.$$

Por outro lado, calculando o limite de temperatura tendendo ao infinito, concluímos que a razão entre as seções de choque termal e convencional tende a um valor constante. Sendo mais específico, a seção de choque termal, neste limite, é quatro vezes menor que a convencional. A explicação física para este fato leva em conta que o aumento dos momentos das partículas envolvidas, devido à temperatura, diminui a probabilidade de encontrar uma partícula alvo em uma determinada região do espaço e, como a seção de choque é proporcional a esta probabilidade, espera-se uma diminuição da mesma com relação ao aumento da temperatura. Portanto, a medida que a temperatura aumenta, as partículas envolvidas se espalham cada vez menos até um valor limite correspondente a (4.42).

Por fim, como perspectivas futuras, nós esperamos aplicar o formalismo DCT em sistemas da Teoria Quântica de Campos dentro do contexto gravitacional e verificar a equivalência entre modelos duais através do calculo da seção de choque de espalhamento. Também, desejamos estudar possíveis aplicações em sistemas da matéria condensada.

REFERÊNCIAS

- 1 DAS, A. Topics in finite temperature field theory. *arXiv preprint hep-ph/0004125*, 2000.
- 2 MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress of theoretical physics*, Oxford University Press, v. 14, n. 4, p. 351–378, 1955.
- 3 REGO, A. L.; LINHARES, C.; MALBOUISSON, A. Casimir effect via a generalized matsubara formalism. *arXiv preprint arXiv:1608.01367*, 2016.
- 4 AMBRUŞ, V. E.; KENT, C.; WINSTANLEY, E. Analysis of scalar and fermion quantum field theory on anti-de sitter spacetime. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 27, n. 11, p. 1843014, 2018.
- 5 TAKAHASHI, Y.; UMEZAWA, H. Thermo field dynamics. *International journal of modern Physics B*, World Scientific, v. 10, n. 13n14, p. 1755–1805, 1996.
- 6 KHANNA, F. C. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications*. [S.l.]: World Scientific, 2009.
- 7 ASHOK, D. *Finite temperature field theory*. [S.l.]: World scientific, 1997.
- 8 SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Lorentz violation in bhabha scattering at finite temperature. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 12, p. 125012, 2017.
- 9 BHABHA, H. The scattering of positrons by electrons with exchange on dirac's theory of the positron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 154, n. 881, p. 195–206, 1936.
- 10 CHARNESKI, B. et al. Lorentz violation bounds on bhabha scattering. *Physical Review D*, APS, v. 86, n. 4, p. 045003, 2012.
- 11 SOUZA, P. et al. On lorentz violation in $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ scattering at finite temperature. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 791, p. 195–200, 2019.
- 12 THIRRING, H. Republication of: On the formal analogy between the basic electromagnetic equations and einstein's gravity equations in first approximation. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 44, n. 12, p. 3225–3229, 2012.
- 13 MASHHOON, B. Gravitoelectromagnetism: a brief review. *arXiv preprint gr-qc/0311030*, 2003.
- 14 CAMPBELL, W. B.; MACEK, J.; MORGAN, T. A. Relativistic time-dependent multipole analysis for scalar, electromagnetic, and gravitational fields. *Physical Review D*, APS, v. 15, n. 8, p. 2156, 1977.
- 15 BRAGINSKY, V. B.; CAVES, C. M.; THORNE, K. S. Laboratory experiments to test relativistic gravity. *Physical Review D*, APS, v. 15, n. 8, p. 2047, 1977.
- 16 JANTZEN, R. T.; CARINI, P.; BINI, D. The many faces of gravitoelectromagnetism. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 215, n. 1, p. 1–50, 1992.

- 17 RAMOS, J.; MONTIGNY, M. de; KHANNA, F. C. On a lagrangian formulation of gravitoelectromagnetism. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 42, n. 10, p. 2403–2420, 2010.
- 18 SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Thermal corrections for gravitational möller scattering. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, p. 1950044, 2019.
- 19 BAILEY, Q. G.; KOSTELECKY, A.; XU, R. Short-range gravity and lorentz violation. *arXiv preprint arXiv:1410.6162*, 2014.
- 20 SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Lorentz violation, gravitoelectromagnetism and bhabha scattering at finite temperature. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 33, n. 10n11, p. 1850061, 2018.
- 21 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Cpt violation and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 55, n. 11, p. 6760, 1997.
- 22 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- 23 SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Gravitoelectromagnetism, cherenkov radiation at finite temperature. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 34, n. 02, p. 1950015, 2019.
- 24 FRANK, I.; TAMM, I. Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter. In: *Selected Papers*. [S.l.]: Springer, 1991. p. 29–35.
- 25 SCHWINGER, J.; TSAI, W.-Y.; ERBER, T. Classical and quantum theory of synergic synchrotron-čerenkov radiation. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 96, n. 2, p. 303–332, 1976.
- 26 ČERENKOV, P. Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light. *Physical Review*, APS, v. 52, n. 4, p. 378, 1937.
- 27 KOPECKÝ, Z. Čerenkov radiation at finite temperature. *International journal of theoretical physics*, Springer, v. 33, n. 6, p. 1251–1256, 1994.
- 28 PARDY, M. Finite-temperature gravitational čerenkov radiation. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 34, n. 6, p. 951–959, 1995.
- 29 KLEIN, S. R. Two-photon production of dilepton pairs in peripheral heavy ion collisions. *Physical Review C*, APS, v. 97, n. 5, p. 054903, 2018.
- 30 GRIFFITHS, D. *Introduction to elementary particles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- 31 ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. Notes for a course on classical fields. *Apostila, IFT (Instituto de Física Teórica)*, Sao Paulo, Brazil, 2004.
- 32 SCHWICHTENBERG, J. *Physics from Symmetry*. [S.l.]: Springer, 2015.
- 33 PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- 34 GOMES, M. O. C. *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. [S.l.]: Edusp, 2002.
- 35 GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field quantization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

- 36 SREDNICKI, M. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.
- 37 DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. [S.l.]: World Scientific, 2008.
- 38 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: AAPT, 1995.
- 39 RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996.
- 40 NETO, J. B. *Matemática para físicos com aplicações: Vetores, tensores e spinores*. [S.l.]: Livraria da Física, 2010.
- 41 MCMAHON, D. *Quantum field theory demystified: A self-teaching guide*. 2009.
- 42 PATHRIA, R. K. *Statistical mechanics*. 1996.
- 43 MAGGIORE, M. *A modern introduction to quantum field theory*. [S.l.]: Oxford university press, 2005. v. 12.
- 44 KAKU, M. *Quantum field theory: a modern introduction*. [S.l.]: Oxford Univ. Press, 1993.
- 45 COTTINGHAM, W. N.; GREENWOOD, D. A. *An introduction to the standard model of particle physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2007.
- 46 TAYLOR, J. R. *Classical mechanics*. [S.l.]: University Science Books, 2005.
- 47 MI, D.; SONG, H.-S.; AN, Y. A physical explanation for the tilde system in thermo field dynamics. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 16, n. 10, p. 655–661, 2001.
- 48 UMEZAWA, H.; MATSUMOTO, H.; TACHIKI, M. *Thermo field dynamics and condensed states*. 1982.
- 49 UMEZAWA, H. *Advanced field theory: Micro, macro, and thermal physics*. [S.l.]: AIP, 1995.
- 50 WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. [S.l.]: Academic press, 2013.
- 51 SIQUEIRA, C. d. A. Teoria de perturbação na dinâmica de campos térmicos: aspectos formais, fórmula de redução e cálculo de taxas de decaimento. 2009.
- 52 GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018.