



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**DIEGO MENEZES PAMPLONA**

**UM ESTUDO EM FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL (CFD)**

**FORTALEZA**

**2019**

DIEGO MENEZES PAMPLONA

UM ESTUDO EM FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL (CFD)

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Física

---

- M51e Menezes Pamplona, Diego .  
Um Estudo em Fluidodinâmica Computacional (CFD) / Diego Menezes Pamplona. – Fortaleza,  
2019.  
63.:il.
- Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Física, Fortaleza, 2019.
- Orientação: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo. CDD 530
1. Fluidodinâmica. 2. Reynolds. 3. Laminar. I. Título.
-

DIEGO MENEZES PAMPLONA

UM ESTUDO EM FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL (CFD)

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 19/06/2019.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. M.e. Danilo da Silva Borges  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos Meus Pais e a Mim Mesmo

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me manter na direção certa.

Agradeço aos meus pais, por terem me apoiado durante o curso e ao longo da vida.

Agradeço ao meu orientador, Ascânio Dias Araujo, pelo auxílio no momento da formatação da monografia dentre várias outras dificuldades que vão desde o uso do LaTeX até construção de Mesh e simulações no Gambit. No geral, gostaria de agradecer por tudo que me ensinou.

Agradeço também ao professor Murilo Pereira de Almeida por ser tão solícito e prestativo diante das minhas dúvidas com fluidodinâmica e com o uso e configuração do OpenFOAM.

Por fim, e de maneira alguma menos importantes, agradeço muito à todos os colegas do curso de física que me ajudaram, apoiaram e incentivaram a concluí-lo. Sem eles certamente não seria possível.

## RESUMO

Nos primeiros capítulos venho a apresentar e explicar um pouco dos fundamentos de fluidodinâmica mas apenas o suficiente para servir de base para a compreensão das simulações. Já no capítulo 3, venho a discutir o problema no qual o trabalho se baseia, um escoamento num canal retângular com obstáculo, mas não antes de discutir o caso mais simples sem obstáculo. Ao abordar esses dois casos, fazemos comparações e analisamos o que mudou na descrição dos parâmetros de interesse.

**Palavras-chave:** Fluidodinâmica. Reynolds. Laminar.

## **ABSTRACT**

In the first few chapters I will present and explain a little of the fundamentals of fluid dynamics but just enough to serve as a basis for understanding the simulations. Already in Chapter 3, I come to discuss the problem on which the work is based, a runoff in a rectangular channel with an obstacle, but not before discussing the simplest case without hindrance. In addressing these two cases, we make comparisons and analyze what has changed in the description of the parameters of interest.

**Keywords:** Fluid-Dynamics. Reynolds. Laminar.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – <i>Tensão de cisalhamento causa deformação contínua no fluido. (a) Elemento de fluido deformando a uma taxa de <math>\delta\theta/\delta t</math>.</i> . . . . .	15
Figura 2 – <i>Viscosidade absoluta <math>\mu</math> versus temperatura para uma variedade de fluidos.</i> . . . . .	18
Figura 3 – <i>Viscosidade cinemática <math>\nu</math> versus temperatura para uma variedade de fluidos.</i> . . . . .	18
Figura 4 – <i>Energia específica em um ponto</i> . . . . .	20
Figura 5 – <i>Densidade pontual em função do volume elementar. Incertezas macroscópicas e microscópicas à direita e à esquerda respectivamente.</i> . . . . .	21
Figura 6 – <i>Comportamento reológico das classes viscosas: (a) tensão versus taxa de deformação; (b) efeito do tempo na tensão.</i> . . . . .	22
Figura 7 – <i>High-speed water entry of a sphere into an incompressible fluid. (Fonte: Journal of Applied Physics, vol. 17, July 1946.)</i> . . . . .	24
Figura 8 – <i>Fluxo intrasiente versus transiente para os casos laminar e turbulente. (a) Fluxo laminar. (b) Fluxo turbulente.</i> . . . . .	26
Figura 9 – <i>(a) campo de velocidades com vortex. (b) Campo de velocidades com rotacional nulo. (c) Sonda de pás girando diante de campo rotacional.</i> . . . . .	27
Figura 10 – <i>Perfis de velocidade para três diferentes escoamentos na superfície.</i> . . . . .	35
Figura 11 – <i>Escoamento bi-dimensional em um canal retangular</i> . . . . .	36
Figura 12 – <i>Equação representada por código em C++</i> . . . . .	43
Figura 13 – <i>SIMPLE-loop em C++</i> . . . . .	45
Figura 14 – <i>Dados obtidos para 1000 pontos ao longo de uma linha vertical no meio do canal; Velocidade de entrada de 3.116m/s</i> . . . . .	46
Figura 15 – <i>Perfil parabólico obtido para um escoamento induzido por gradiente de pressão. Resultado é semelhante ao obtido para uma velocidade de entrada de 3.116m/s</i> . . . . .	47
Figura 16 – <i>Perfis de velocidade para diferentes larguras <math>H</math> em um canal retangular de 20 m de comprimento por <math>H</math> de largura.</i> . . . . .	48
Figura 17 – <i>Gradiente de pressão em função do número de Reynolds.</i> . . . . .	49
Figura 18 – <i>Gradiente de pressão pela largura <math>h</math> do canal. Dados obtidos pelo Fluent.</i> . . . . .	50
Figura 19 – <i>Colapso das três curvas sobre a curva de aproximação não linear. Aproximação não linear dada por <math>y = 11.95x^{-1.996}</math>.</i> . . . . .	50
Figura 20 – <i>Dependencia linear entre fluxo completamente desenvolvido e número de Reynolds; Velocidades variando de <math>10^{-3}</math> a <math>10^2</math>.</i> . . . . .	51

Figura 21 –Geometria retangular com obstáculo cilíndrico no meio do domínio . . . . .	52
Figura 22 –Linha vertical coletora de dados . . . . .	54
Figura 23 –Perfil de velocidades logo abaixo do obstáculo cilíndrico de raio 2; $h$ representa a distancia da base do canal até o obstáculo. . . . .	55
Figura 24 –Perfil de velocidades para escoamento com obstáculo rebaixado 0.5 unidades na direção da base. . . . .	56
Figura 25 –Perfil de velocidades para um canal exageradamente estreitado . . . . .	57
Figura 26 –Perfil de velocidades para três níveis de estreitamento do canal com obstáculo cilíndrico . . . . .	58
Figura 27 –Gradiente de Pressão em função da distancia da base até o obstáculo cilíndrico; Pontos representam valores obtidos em simulação; Linhas representam a aproximação não linear de uma função $y = A_0x^{-A_1}$ , em que os parâmetros $A_0$ e $A_1$ são ajustados de acordo; Cada curva de descendência representa um número de Reynolds normalizado pelo comprimento característico. . . . .	59
Figura 28 –Gradiente de pressão em função do tamanho da fenda entre a base do canal e obstáculo cilíndrico; Pontos representam valores obtidos na simulação enquanto que as curvas representam aproximações não-lineares. Simulações rodadas no Fluent . . . . .	60
Figura 29 –Exponentes $A_1$ das correções não lineares $y = A_0x^{-A_1}$ referentes as simulações do Fluent e OpenFoam. . . . .	60
Figura 30 –Colapso de curvas evidenciando propriedade comum dos vários números de Reynolds para o caso laminar.Linhas escura representando ajuste não-linear $y = 11.09x^{-2.35}$ Simulações realizadas no Fluent. . . . .	61
Figura 31 –Colapso de curvas sobre a curva de aproximação não-linear $y = 18.08x^{-2.35}$ para simulações feitas no openFoam. . . . .	62

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>O que é um Fluido</b>	<b>14</b>
<b>2.1.1</b>	<i>Definição Matemática de um Fluido</i>	<b>14</b>
<b>2.1.2</b>	<i>Gases e Líquidos</i>	<b>15</b>
2.1.2.1	<i>Aproximações</i>	16
2.1.2.2	Viscosidade Dinâmica	17
<b>2.2</b>	<i>Tipos de Fluido</i>	<b>18</b>
<b>2.2.1</b>	<b>Fluidos Contínuos e Discretos</b>	<b>19</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Fluidos Newtonianos e não-Newtonianos</b>	<b>21</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Fluidos Perfeitos e Reais</b>	<b>23</b>
<b>2.2.4</b>	<b>Fluidos Compressíveis e Incompressíveis</b>	<b>23</b>
<b>2.3</b>	<b>Escoamentos</b>	<b>25</b>
<b>2.3.1</b>	<b>Escoamentos Intransientes e Transientes</b>	<b>25</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Escoamento de uma à Três Dimensões</b>	<b>26</b>
<b>2.3.3</b>	<b>Escoamento Rotacional e Irrotacional</b>	<b>26</b>
2.3.3.1	Idealizações e Referencial Irrotacional	27
<b>2.3.4</b>	<b>Escoamento Laminar e Turbulento</b>	<b>29</b>
<b>2.4</b>	<b>Equações que Governam um Escoamento</b>	<b>30</b>
<b>2.4.1</b>	<b>Equação da Continuidade</b>	<b>30</b>
<b>2.4.2</b>	<b>Equação de Navier-Stokes</b>	<b>31</b>
<b>2.5</b>	<b>Condições de Contorno</b>	<b>33</b>
<b>2.6</b>	<b>Escoamento Rastejante no Canal Retangular</b>	<b>35</b>
<b>2.7</b>	<b>Escoamento Completamente Desenvolvido em um Tubo</b>	<b>38</b>
<b>3</b>	<b>FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL</b>	<b>41</b>
<b>3.1</b>	<b>Mesh</b>	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>OpenFoam</b>	<b>42</b>
<b>3.3</b>	<b>Fluent</b>	<b>43</b>
<b>3.4</b>	<b>simpleFoam Solver</b>	<b>43</b>
<b>3.5</b>	<b>Simulando Escoamento no Canal Retangular</b>	<b>45</b>
<b>3.5.1</b>	<b>Perfil Parabólico</b>	<b>46</b>
<b>3.5.2</b>	<b>Gradiente de Pressão</b>	<b>48</b>

<b>3.5.3</b>	<b>Fluxo</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>3.6</b>	<b>Obstáculo no Canal Retangular</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>3.6.1</b>	<b>Perfil de Velocidades</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>3.6.2</b>	<b>Gradiente de Pressão</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>64</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O trabalho em questão se trata de uma análise de dois casos utilizando fluidodinâmica computacional focando em uma comparação entre os resultados obtidos à partir de dois softwares, um pago e outro de código aberto. Uma das motivações dessa comparação é justamente testar a eficácia do software de código aberto frente ao pago, uma vez que dado o valor absurdo da compra de uma licença, a demanda por softwares gratuitos parece aumentar e um teste de eficácia se faz necessário.

É claro que não só a mera comparação serviu de motivação. O problema principal abordado, mesmo sendo uma simples abordagem simplificada em duas dimensões pode nos ajudar a tirar conclusões ou ainda que apenas divagar a respeito de problemas mais concretos e realistas como a análise de pressão em uma artéria entupida ou mesmo em um septo desviado.

Por fim , o objetivo principal do trabalho foi de obter resultados similares utilizando ambos os softwares e ser capaz de analisá-los a partir da detecção de um padrão manifestado pela mudança de determinados parâmetros em meio a simulações sucessivas.

Os programas postos sob comparação foram o OpenFoam, um software de código aberto que vem sendo cada vez mais usado atualmente em CFD e o já de certa forma clássico Fluent da ANSYS.

## **2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Nesse capítulo introdutório, venho com o intuito de abordar superficialmente de maneira concisa alguns dos principais conceitos de fluidodinâmica, bem como de por o leitor a par da teoria por trás das ferramentas computacionais utilizadas na realização das simulações computacionais.

Iniciando com o questionamento a respeito da caracterização de um fluido, tentarei fazer uma discussão objetiva e relativamente breve através de tópicos um tanto mais complexos mas que são de fundamental importância.

## 2.1 O que é um Fluido

Uma resposta rápida para a pergunta poderia ser, tudo que não é um sólido. Embora seja uma descrição extremamente vaga de um fluido, ninguém pode negar, é verdadeira, pois sólidos e fluidos em geral, gases e líquidos, possuem comportamentos distintos referente a maneira como ambos respondem a uma tensão superficial em um volume característico.

De fato, a partir de uma análise matemática, podemos observar que dado uma tensão de cisalhamento (*Shear Stress*) aplicado a um elemento característico de volume, temos como resultado uma deformação bem definida e finita para o caso dos sólidos, mas não para fluidos. Já no caso dos fluidos, a deformação evolui enquanto a tensão ou pressão, estiver sendo aplicada sem oferecer muita resistência.

Seguindo esta linha de raciocínio, podemos caracterizar um fluido e distingui-lo frente a um sólido a partir da definição de tensão de cisalhamento. Num fluido, observamos que a tensão de cisalhamento é proporcional à taxa de deformação angular, ou ainda ao gradiente da velocidade. Já os sólidos possuem essa proporcionalidade relativa não à taxa de deformação, mas à deformação em si, ou ainda ao gradiente das variáveis espaciais. Para o caso do estudo de fluidos Newtonianos, teremos uma dependência linear da tensão de cisalhamento na taxa de deformação e o contrário para não-Newtonianos.

### 2.1.1 Definição Matemática de um Fluido

Os fluidos, diferentemente dos sólidos, não podem sustentar uma deformação finita sob a ação de uma força de cisalhamento. Baseado em resultados experimentais, Newton pode observar que a taxa de variação da deformação de um elemento de fluido é diretamente proporcional à força de cisalhamento por unidade de área aplicada na superfície do elemento. Matematicamente isso significa que,  $\tau \propto \dot{\epsilon}$ , em que  $\tau$  representa a força de cisalhamento por unidade de área, ou ainda tensão de cisalhamento, e  $\dot{\epsilon}$  é a taxa de deformação.

Para entender, imaginarmos um elemento de fluido em duas dimensões representado por um quadrado de lados  $\delta y$  e  $\delta x$  em que há uma deformação  $\delta\theta$  com relação à direção  $y$  que se traduz também em uma deformação na direção  $x$  de  $\delta u \delta t$  na superfície do elemento. O esquema é mostrado abaixo.

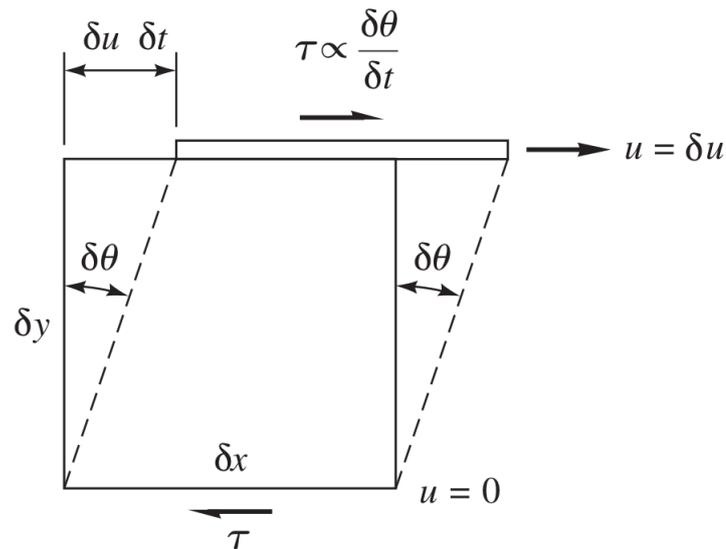


Figura 1: Tensão de cisalhamento causa deformação contínua no fluido. (a) Elemento de fluido deformando a uma taxa de  $\delta\theta/\delta t$ .

Referencia [4]

A partir da figura 1, podemos deduzir que,

$$\tan\delta\theta = \frac{\delta u\delta t}{\delta y} \quad (2.1)$$

Ou ainda, considerando o limite infinitesimal,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (2.2)$$

Dos fundamentos de elasticidade e fluido dinâmica, a lei de Hooke para a tensão aplicada a um fluido é,

$$\tau = \mu\dot{\epsilon} = \mu\frac{du}{dy} \quad (2.3)$$

Em que  $\mu$ , a viscosidade do fluido, faz o papel de constante de proporcionalidade e é uma medida da resistência de escoamento do fluido. A equação 2.3, a *definição matemática de um fluido*, é ainda chamada por vezes de Lei de Newton da viscosidade.

### 2.1.2 Gases e Líquidos

Já que estamos discutindo a respeito da definição de fluido, daquilo que os caracteriza, nada melhor do que mencionar exemplos palpáveis de fluidos e evidenciar também aquilo que os caracteriza.

Quando se pensa em fluidos, a ideia de líquidos e gases sendo moldados conforme seus respectivos recipientes é a mais provável de vir à mente. A questão é que, fora as características típicas consideradas senso comum, como a de que gases se expandem por toda a extensão de um volume, não possuem superfície livre ou ainda não apresentam, diferente dos líquidos, propriedades de umidificação, temos as propriedades referentes às forças intermoleculares que basicamente dependem do quão próximas uma da outra estão as moléculas.

Nos gases, em que as moléculas costumam permanecer relativamente afastadas umas das outras, temos apenas forças fracas de atração entre elas. Por outro lado, temos os líquidos, em que as forças de coesão são mais intensas, configurando um maior grau de proximidade entre moléculas e com isso intensificando a densidade do fluido.

Por fim, numa tentativa de concluir a descrição desses fluidos, podemos dizer que para líquidos, assim como para sólidos, a propriedade primária dessas fases da matéria é que estas são condensadas quando submetidas a fortes forças de coesão. Já as propriedades primárias de líquidos e gases são a fluidez e capacidade de mudar de forma livremente.

#### 2.1.2.1 Aproximações

Ao trabalharmos com modelos teóricos, submetemos o sistema em estudo à aproximações razoáveis que nos possibilitam a estudar o problema e obter resultados com uma discrepância perfeitamente aceitável ou ainda insignificante dada a natureza do sistema ou dos dados que pretendemos extrair.

Um exemplo é o fato de que não existem gases ideais, o que não nos impede de descrever certos sistemas utilizando a equação de estado dos gases ideais para casos de baixa pressão e altas temperaturas.

$$p\bar{v} = RT \quad (2.4)$$

No entanto, se for de interesse estudar o gás real, podemos utilizar a equação de van der Waals'.

$$\left(\frac{p + a}{v^2}\right)(\bar{v} - b) = RT \quad (2.5)$$

Onde  $a$  é uma medida que depende das forças de atração entre as partículas de gás,  $\bar{v}$  remete ao volume característico e  $b$  é o covolume de partículas. O interessante é notar que a equação para gases ideais é consideravelmente mais simples, o que nos dá a oportunidade de obter resultados bem aproximados dentro de uma faixa pertinente de erro.

Algo que vale a pena discutir é a não existência de uma equação para líquidos perfeitos análoga à dos gases. No entanto, é de costume considerar a aproximação de que todo líquido

é incompressível, de maneira que  $\rho \approx \text{const}$  pode ser considerada uma equação de estado idealizada. Tal aproximação se justifica na equação empírica que associa pressão e densidade para líquidos. Aqui,  $p_a$  e  $\rho_a$  são os valores padrão na superfície.

$$\frac{p}{p_a} \approx (B + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_a} \right)^n - B \quad (2.6)$$

Sendo  $B$  e  $n$  parâmetros adimensionais que variam com a temperatura e considerando então que a pressão no ponto mais fundo do oceano é de 1100 atm, podemos substituir os valores e obter,

$$\frac{\rho}{\rho_a} = (4100/3001)^{\frac{1}{7}} = 1.046 \quad (2.7)$$

Os valores das constantes para a água são  $B \approx 3000$  e  $n \approx 7$  respectivamente. Por fim, assumindo um valor médio para a densidade da água do mar na superfície de  $\rho_a = 2,00 \text{ slug/ft}^3$ , podemos calcular que a densidade na região mais profunda do oceano sofre um aumento de menos de 5% apenas, o que justifica o tratamento dado ao escoamento de líquidos como sendo incompressível.

#### 2.1.2.2 Viscosidade Dinâmica

A viscosidade absoluta dinâmica,  $\mu$ , é talvez a mais importante propriedade do Fluido, uma vez que, de todas as outras, é através desta que extraímos informação tanto a respeito da natureza do fluido (Newtoniano ou não-Newtoniano) quanto a respeito do grau de deformação angular dado uma tensão de cisalhamento. Podemos enxergar a viscosidade como uma medida da resistência que possui uma camada do fluido de fluir com relação a uma outra camada arbitrária.

Dois são os fatores principais associados à viscosidade, coesão e taxa de transferência de momento molecular. Para líquidos, a viscosidade está mais atrelada as forças de coesão, enquanto que nos gases esse papel é ocupado pela taxa de transferência de momento molecular.

Uma vez que a temperatura e pressão podem ser associados à medidas tanto de coesão quanto de atividade molecular, é de se esperar que a viscosidade venha depender dessas. E de fato, a viscosidade, como uma verdadeira propriedade termodinâmica, depende da temperatura e pressão do fluido, muito embora a dependência na pressão possa ser negligenciada na maioria dos fluidos. Tomando o ar como exemplo, um aumento de até 50 vezes na pressão só é capaz de gerar um aumento de no máximo 10%.

Algo particularmente interessante é a diferença de proporcionalidade entre as viscosidades de líquidos e gases com a temperatura, Figura 2. Para gases, a transmissão de momento



problemas a serem resolvidos.

### 2.2.1 Fluidos Contínuos e Discretos

Quando estudamos por exemplo os campos eletromagnéticos da eletrodinâmica, não parece se fazer necessária uma discussão a respeito da natureza da continuidade desses campos no espaço, uma vez que os mesmos não se propagam em um meio físico. No caso dos fluidos, assim como na eletrodinâmica, os campos escalares estudados também devem ser considerados contínuos em prol da capacidade de avaliar propriedades termodinâmicas como pressão, viscosidade e temperatura de maneira pontual no espaço.

No entanto, diferentemente dos campos da eletrodinâmica, precisamos definir aqui um volume característico  $\forall$  não infinitesimal e pequeno o suficiente de modo a justificar a abordagem contínua. O volume deve ser definido dentro do limite correto para manter uma média constante das propriedades termodinâmicas das moléculas de fluido presentes em seu interior. Só depois que conseguimos manter essa média é que passa a fazer sentido a abordagem contínua.

Podemos definir por exemplo a condição de continuidade da energia específica em um ponto através do limite,

$$e = \lim_{\forall \rightarrow \forall_\epsilon} \frac{E}{\forall} \quad (2.8)$$

É importante salientar que se definirmos um volume característico muito pequeno ( $\forall < \forall_\epsilon$ ), a incerteza em cima dos valores da energia específica aumentam de maneira inversamente proporcional ao tamanho do volume. Esse comportamento pode ser observado na figura 4.

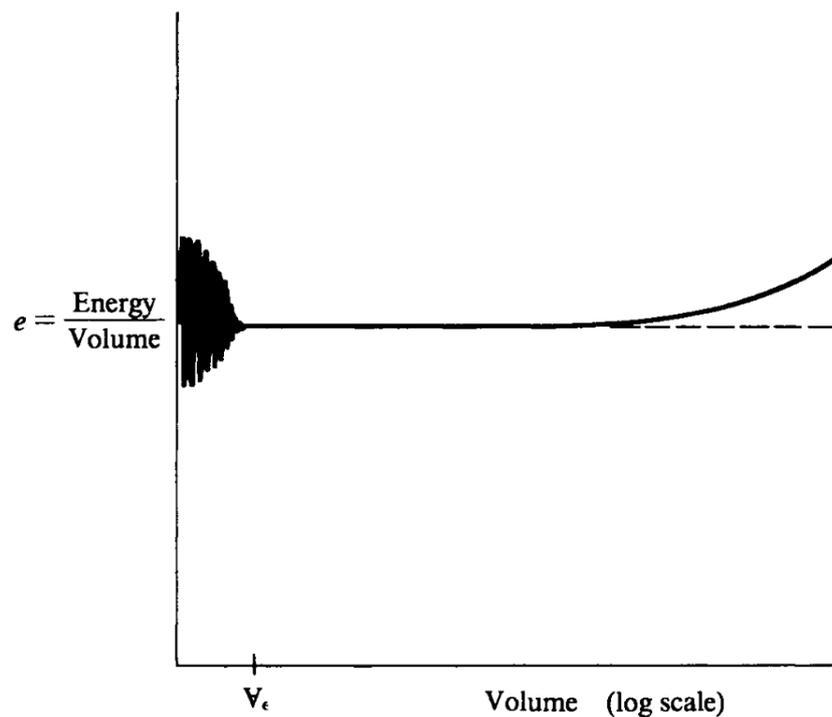


Figura 4: *Energia específica em um ponto*  
Referencia [4]

Podemos discutir o mesmo conceito mas utilizando a densidade de um fluido como base, Figura 2.3. Como no caso dos fluidos, as moléculas não permanecem estáticas numa grade formando uma unidade de volume arbitrária, é preciso abstrair o conceito de continuidade. Nesse caso, como as moléculas estão em constante movimento, é necessário definir um elemento de volume  $\forall$  que seja grande o suficiente comparado às dimensões intermoleculares, de modo que o número de moléculas no interior do volume seja em média constante. Além disso, o dado volume não deve ser demasiado grande, já que pode haver uma notável variação na agregação de massa.

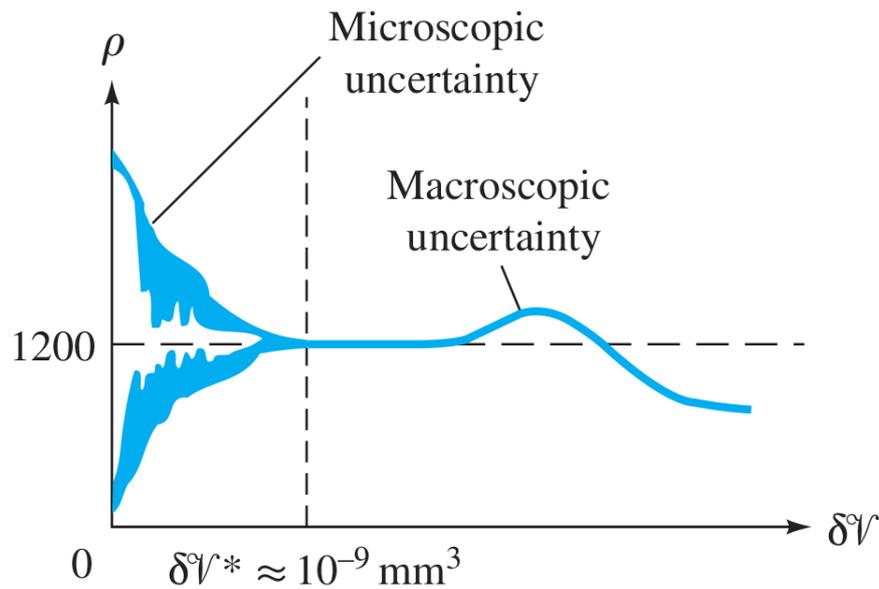


Figura 5: Densidade pontual em função do volume elementar. Incertezas macroscópicas e microscópicas à direita e à esquerda respectivamente.

Referencia [4]

## 2.2.2 Fluidos Newtonianos e não-Newtonianos

Basicamente, fluidos *Newtonianos* são aqueles em que a viscosidade é constante dadas as condições de temperatura e pressão. Já os *não-Newtonianos*, como gelatina, leite e outros, seriam os que possuem uma viscosidade variável. Tomando como referencia a Lei de Newton da viscosidade, 2.3, os fluidos não-Newtonianos [Figura 6] são aqueles em que a viscosidade  $\mu$  não é constante e depende da taxa de deformação angular  $\dot{\epsilon}$ , dependência essa que compromete a relação de linearidade entre a deformação e a tensão de cisalhamento  $\tau$ .

Exemplos de fluidos não-Newtonianos são polímeros não diluídos, graxa, sangue, soluções proteicas, leite, suspensões coloidais de borracha sintética em água, corantes, asfalto, mel, cola marinha, suspensões de amido, dentre outros. O próprio ketchup é um excelente exemplo de fluido não-Newtoniano plástico, apresentando um comportamento não linear. Ao simplesmente virar o frasco de ketchup, o fluido não desce. No entanto, ao balançar o frasco com força, a viscosidade diminui e o ketchup escoar. Um outro exemplo de fluido não linear é a areia movediça, que vai ganhando mais fluidez à medida que o fluido é agitado.

Exemplos de classes de fluidos não-Newtonianos são,

**Dilatante.** São fluidos que possuem propriedades de *shear-thickening* ou fluidificação progressiva, ou seja, ficam mais espessos conforme se aumenta a deformação. Matematicamente

isso se deve ao aumento da viscosidade do fluido perante uma deformação por cisalhamento.

**Pseudoplástico.** Já esses, diferentemente dos Dilatantes, possuem propriedades de *shear-thinning* ou fluidificação regressiva, representando a antítese dos dilatantes. Esses, apresenta menos resistência se submetidos a altas taxas de deformação.

**Plástico de Bingham.** Tido como um caso limite dos plásticos, o plástico de Bingham possui propriedades lineares de comportamento. No entanto, apresentando deformação apenas diante de um determinado valor de tensão.

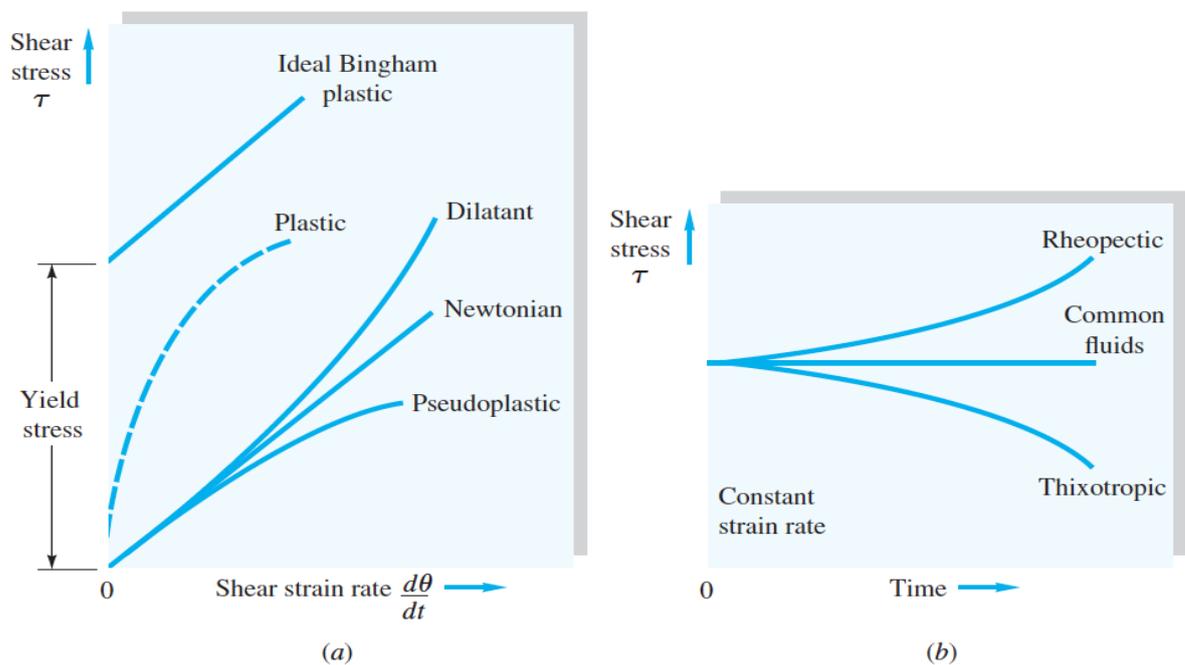


Figura 6: Comportamento reológico das classes viscosas: (a) tensão versus taxa de deformação; (b) efeito do tempo na tensão.

Referencia [4]

Alguns fluidos não-Newtonianos apresentam comportamento não linear de natureza transitente, Figura 6, ou seja, quando certas propriedades cinemáticas e termodinâmicas do fluido são dependentes do tempo. Esses são,

**Reopéticos.** Fluidos que demandam uma tensão de cisalhamento progressiva ao longo do tempo para manter uma taxa de deformação constante.

**Tixotrópicos.** Representa o caso oposto, em que os fluidos perdem a consistência ao longo do tempo se submetidos a uma tensão constante, sendo necessário diminuir progressivamente a tensão de cisalhamento para manter a taxa de deformação angular constante.

### 2.2.3 Fluidos Perfeitos e Reais

De acordo com L.Euler, que em 1768 escreveu a definição de fluidos perfeitos, o fluido perfeito é aquele que não está sujeito a efeitos de tensão de cisalhamento ou forças compressivas. Para alcançar tal idealização, é necessário que se anule a tensão de cisalhamento, dada pela Lei de Newton da viscosidade, equação 2.3. Podemos obter uma tensão nula anulando ou a viscosidade ou a taxa de deformação angular. Viscosidade nula, característica que define os fluidos ideais, não passa de uma idealização, muito embora alguns fluidos como o ar possam ser aproximados como tal.

Sendo assim, é mais plausível assumir que fluidos perfeitos devam possuir uma taxa de deformação angular nula. O significado por trás da definição é a capacidade que uma lamina, ou corte de fluido tem de fluir sem afetar o fluxo das demais camadas. Ou seja, se substituíssemos uma porção do fluido por uma parede, seja essa fixa ou móvel, não faria diferença alguma na dinâmica do movimento da lâmina de fluido que escoar logo acima da mesma. As paredes que contêm o fluxo de um fluido perfeito servem apenas para direcioná-lo, de modo que este deslize por elas. Esse comportamento é chamado em inglês de *Slip Flow*. Para fluidos perfeitos não temos a influência de tensões de cisalhamento nem nas paredes nem em lugar algum do fluido, já que este não se sujeita a efeitos de tensão.

Já fluidos reais não podem simplesmente deslizar sobre as paredes de um fluido, já que sofrem em suas camadas mais externas o efeito do comumente chamado *Wall Shear Stress*, a tensão de cisalhamento presente na região de contato da camada mais externa do fluido com a parede. Tal tensão de contato só se faz presente quando as dimensões do caminho associado a uma partícula livre são menores que as dimensões do comprimento característico relativo ao volume de controle. A informação dinâmica desse contato é transmitida de camada a camada por meio da tensão de cisalhamento, com a viscosidade sendo responsável por qualquer que seja a variação do campo de velocidades presente no fluido.

### 2.2.4 Fluidos Compressíveis e Incompressíveis

Contrário ao que muitos podem pensar, compressibilidade não tem relação com a versatilidade do fluido em adotar diversas formas ou ser moldado em seja qual for o reservatório. Na verdade, compressibilidade tem a ver basicamente com a dependência do volume característico do fluido  $\bar{v}$  com a pressão. Ou seja, em fluidos compressíveis, ao elevar a pressão estamos confinando a mesma quantidade de moléculas contidas em um mol da substância em um volume ainda menor comparado ao da configuração anterior. Os gases são todos fluidos compressíveis.

Todos os fluidos reais são compressíveis, obviamente. No entanto, como já foi discutido em 2.1.2.1 os líquidos são considerados incompressíveis por motivações já bem justificadas. Não é atoa que a Hidrodinâmica é considerada o estudo do comportamento dos fluidos incompressíveis. Contudo, embora já tenhamos justificado a aproximação de incompressibilidade dos líquidos sujeitos a pressões extremas de até 1100 *atm*, existem pressões ainda maiores aos quais esses podem ser submetidos de modo a evidenciar sua compressibilidade. É claro que tais pressões devem ser de natureza incomum, e na maioria das vezes são observadas em experimentos no laboratório.

Em um desses experimentos, publicado em 1946 na *Journal of Applied Physics*, uma esfera entra na água a 1,5 Km/s e atinge uma pressão de impressionantes 6,9 GPa, ou 68097,7 atm no ponto de estagnação. Sem apresentar o usual esguicho do volume de água que é empurrado para cima, obtemos um padrão de onda de choque hemisférica abaixo do nariz da bola no ponto de estagnação. Essa onda de choque possui densidade consideravelmente maior que o restante do fluido evidenciando assim o caráter compressível dos líquidos quando submetidos a altíssimas pressões. Desse modo, para pressões extremamente altas, por base algo acima de 1GPa, devemos poder observar fenômenos relativos a compressibilidade do líquido. O efeito pode ser observado na figura abaixo.

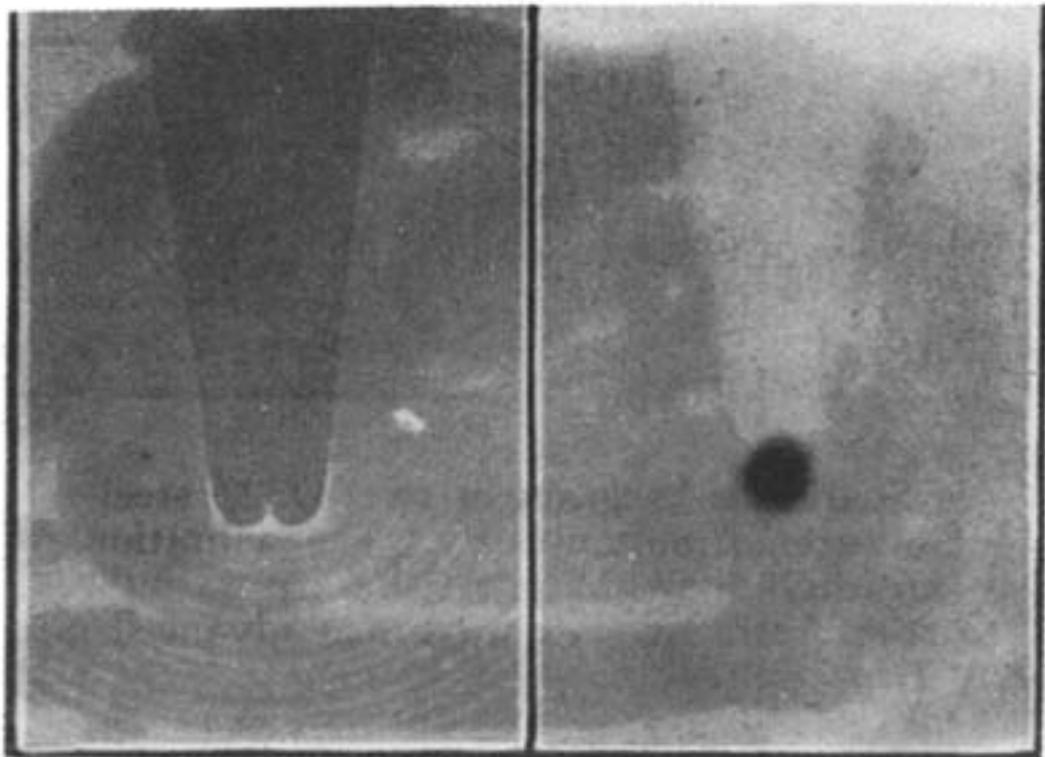


Figura 7: *High-speed water entry of a sphere into an incompressible fluid.* (Fonte: *Journal of Applied Physics*, vol. 17, July 1946.)

Referencia [3]

## 2.3 Escoamentos

A abordagem fluidodinâmica para estudar escoamentos é diferente da abordagem termodinâmica para o estudo de *sistemas*. Ao estudar um *sistema*, delimitamos uma porção de fluido de massa constante a ter suas propriedades termodinâmicas e cinemáticas avaliadas não importando a direção tomada pelo fluido. Ou seja, para estudar um escoamento através da abordagem de sistemas, devemos ter conhecimento das velocidades de cada um dos componentes do fluido ou pelo menos do centro de massa do sistema. Tal abordagem é chamada de Lagrangiana. A verdade é que dar conta de uma porção de massa invariável e calcular as propriedades do fluido nela contido através de um referencial não inercial não parece ser a escolha mais inteligente nem do ponto de vista teórico nem computacional.

Na fluidodinâmica, a abordagem mais comumente usada é a de volume controlado. Aqui, simplesmente selecionamos um determinado volume no escoamento e determinamos as propriedades termodinâmicas e cinemáticas ponto a ponto no espaço a partir de uma descrição Euleriana. Isto é, considerando variáveis espaciais como independentes. Desse modo, a cada ponto no espaço em um determinado instante no tempo, dentro do volume de controle, é atribuído um valor de variável, seja esta uma velocidade, temperatura ou pressão.

Um aspecto interessante da descrição Euleriana, é que usamos uma derivada substantiva para calcular as taxas de convecção e evolução temporal. Chamamos o operador de *Derivada de Stokes* e a representamos da seguinte maneira,

$$\frac{D}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \quad (2.9)$$

### 2.3.1 Escoamentos Intransientes e Transigentes

Um escoamento constante, ou intrasiente, é aquele em que as variáveis calculadas ponto a ponto no volume de controle não dependem do tempo. Ou seja

$$\frac{\partial}{\partial t}(\quad) = 0 \quad (2.10)$$

Já nos escoamentos transientes, as variáveis definidas ao longo do volume controlado variam com o tempo. É muito importante salientar que em casos de escoamento turbulento, em que as variáveis de pressão e velocidade são submetidas a mudanças caóticas no espaço e no tempo, o escoamento intrasiente é definido a partir da não flutuação da média dos valores ao longo do tempo, e não da intransigência do valor em si.

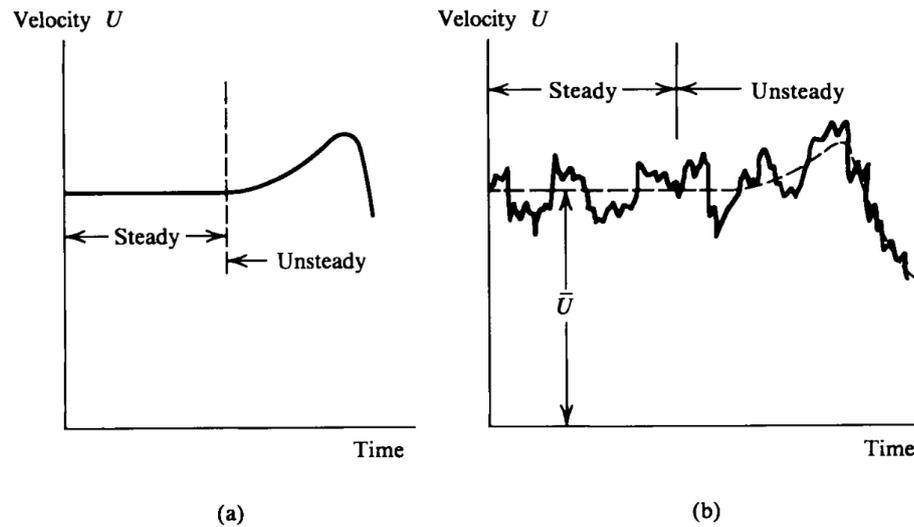


Figura 8: *Fluxo intrasiente versus transiente para os casos laminar e turbulente. (a) Fluxo laminar. (b) Fluxo turbulente.*

Referencia [3]

### 2.3.2 Escoamento de uma à Três Dimensões

Escoamento unidimensional é aquele em que as propriedades do fluido evoluem em apenas uma direção no espaço, não necessariamente uma das direções cartesianas clássicas. Tal escoamento é sempre constante em planos normais à direção do fluxo.

Já o escoamento bidimensional, é aquele em que as variações do fluxo ocorrem sobre uma superfície plana. Aqui, são necessárias duas variáveis espaciais independentes para descrever o fluxo.

Por fim, para três dimensões, em que temos todos os casos de escoamento turbulento, as propriedades termodinâmicas e cinemáticas do fluido em questão podem variar em todas as direções espaciais, sendo necessário três variáveis independentes e ortogonais para descrever a evolução do fluido.

### 2.3.3 Escoamento Rotacional e Irrotacional

Primeiramente, é necessário esclarecer que vorticidade não indica escoamento rotacional. É perfeitamente possível que tenhamos a presença de vórtices em um determinado escoamento e este seja irrotacional. Na verdade, o que diferencia escoamentos rotacionais e irrotacionais, do ponto de vista matemático é, respectivamente, a não nulidade ou nulidade do vetor vorticidade. O vetor vorticidade é definido por,

$$\zeta = \nabla \times V \quad (2.11)$$

Ou seja, se o rotacional do campo de velocidades for nulo em todos os pontos, o fluxo é dado como irrotacional. Caso contrário, temos um fluxo rotacional. Podemos dizer ainda que, considerando domínios simplesmente conexos e considerando o teorema de Stokes 2.12, um escoamento irrotacional  $\nabla \times \mathbf{V} = 0$  é aquele em que o campo de velocidades é independente do caminho, uma vez que a integral do campo de velocidades sobre um caminho fechado no interior do escoamento deve ser nula.

$$\oint_{\text{contorno } \sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\text{superfície } \sigma} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (2.12)$$

Além disso, fluidos irrotacionais são chamados de *fluidos potenciais*, rotulo esse que vem da possibilidade de escrever o campo de velocidades  $\mathbf{V}$  como o gradiente de um potencial qualquer. Essa ferramenta, uma cortesia matemática, é um resultado bem conhecido do calculo vetorial que nos diz que o rotacional de qualquer gradiente é sempre nulo.

Experimentalmente, podemos identificar um fluido rotacional como aquele que possui uma variação nas linhas de fluxo de modo a girar uma roda de pás em torno de seu eixo. A roda de pás funcionaria como uma sonda capaz de captar a não nulidade do rotacional do campo de velocidades, Figura 9.

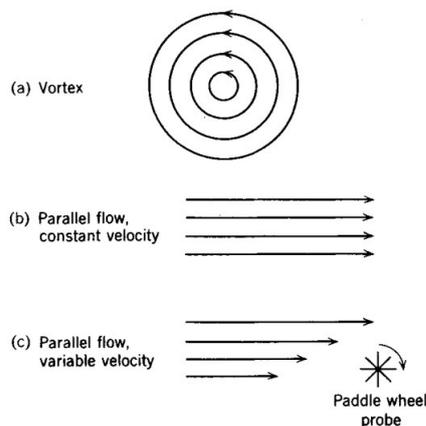


Figura 9: (a) campo de velocidades com vortex. (b) Campo de velocidades com rotacional nulo. (c) Sonda de pás girando diante de campo rotacional.

Referencia [5]

### 2.3.3.1 Idealizações e Referencial Irrotacional

É certo que nenhum fluido real pode ser considerado irrotacional. Na verdade, essa é apenas uma das muitas condições que são impostas à um fluido para torna-lo matematicamente resolvível a nível das ferramentas de cálculo que temos disponíveis. Não que não possamos nos

utilizar de ferramentas computacionais para obter ótimas aproximações de resultados.

No entanto, casos idealizados como este nos ajudam a obter resultados mais precisos quando realizamos simulações de situações mais complexas e realistas.

A idealização neste caso é a existência de escoamentos irrotacionais, já que não podemos de maneira alguma garantir uma estabilidade dessa configuração no caso de fluidos reais. O que acontece é que a rotacionalidade dos elementos de fluido é causada apenas pelo torque proveniente das tensões de cisalhamento. Ou seja, fluidos que não estão sujeitos a tensões de cisalhamento, como ideais ( $\mu = 0$ ) e perfeitos ( $\dot{\epsilon} = 0$ ) são essencialmente irrotacionais, uma vez que carecem dos efeitos de distorção e gradientes de velocidade [Figura 9 (c)] que gerariam a rotação das moléculas em torno de um eixo.

Como dificilmente lidamos com fluidos cujas propriedades são tais que podemos aproximá-lo ao nível não viscoso, parece razoável a ideia obter uma maneira de contornar o caos que seria trabalhar com esses fluidos diretamente. Desse modo, encontramos uma forma de aplicar a teoria desenvolvida para escoamentos irrotacionais em fluidos reais rotacionais sujeitos a efeitos da viscosidade. Podemos fazer isso estudando um fluido real através de um referencial onde o mesmo é irrotacional. Isso pode ser feito ao considerarmos um referencial não inercial que gira com velocidade angular  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{v}$  relativo ao referencial inercial, onde o fluido é dado como rotacional.

De acordo com a teoria de referenciais não inerciais [6], a derivada temporal de um vetor qualquer  $\mathbf{Q}$  em um dado referencial  $S_0$ , pode ser escrita em função da derivada temporal do mesmo vetor mas do ponto de vista de um referencial não inercial  $S$  que gira com velocidade  $\boldsymbol{\Omega}$ .

$$\left( \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_{S_0} = \left( \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_S + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \quad (2.13)$$

Substituindo  $\mathbf{Q}$  pela posição  $\mathbf{r}$  e aplicando o produto vetorial com o operador  $\nabla$  de ambos os lados, obtemos,

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}' + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \quad (2.14)$$

Em que  $\boldsymbol{v}'$  é o campo de velocidades descrito a partir do referencial não inercial. Por fim, ao manipularmos corretamente ficamos com,

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}' + 2\boldsymbol{\Omega} \quad (2.15)$$

Agora, se em um ponto qualquer no espaço,  $\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v} = \Omega$  teremos  $\nabla \times \mathbf{v}' = 0$ . Isso nos faz pensar que ao considerarmos o ponto de vista de um referencial não inercial tal que  $\Omega = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v}$ , podemos aplicar a teoria de fluidos ideais utilizando o campo de velocidades  $\mathbf{v}'$ . É claro que isso se torna consideravelmente mais útil se  $\nabla \times \mathbf{v}'$  for constante sobre todo o volume de controle.

### 2.3.4 Escoamento Laminar e Turbulento

Podemos definir um escoamento laminar a partir de um experimento bem simples. Se pusermos um líquido qualquer entre duas placas paralelas em que a inferior fica parada e a superior se movimenta com velocidade  $U$ , o escoamento laminar seria aquele em que o perfil de velocidades é tal que as camadas intermediárias do fluido se movem com velocidade proporcional à distância da placa inferior. Desse modo, a camada imediatamente abaixo da placa superior deve se movimentar com velocidade  $U$ , enquanto que a imediatamente acima da inferior deve ter velocidade nula [4].

$$u = V \frac{y}{h} \quad (2.16)$$

No geral, o perfil de velocidades de um escoamento laminar num tubo deve ser parabólico quando as paredes se mantêm paradas com relação ao fluxo. Isto é, o comportamento do campo de velocidades deve fazer sentido não só diante da condição de não deslizamento nas paredes (*No Slip Flow*), mas também deve ser genuinamente parabólico, mantendo a maior intensidade da velocidade no centro e diminuir proporcionalmente a medida que se aproxima das bordas.

Por fim, existe uma medida capaz de determinar a natureza do escoamento nesse aspecto. O número de Reynolds, equação 2.17, tem seu significado definido a partir de limites. Para cada valor do número de Reynolds dentro de uma determinada faixa ou limite, podemos definir o escoamento como laminar, em transição ou turbulento. No entanto, as gamas de valores as quais as classes de escoamento estão atreladas não são bem definidas, ao passo que dependem de fatores como a geometria do escoamento, rugosidade e nível de flutuações no fluxo de entrada. No geral, sendo o número de Reynolds considerado baixo, o fluxo é laminar, alto, o fluxo é turbulento.

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.17)$$

Aqui  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $L$  a largura ou espessura transversal da geometria e  $U$  a velocidade média da corrente.

## 2.4 Equações que Governam um Escoamento

No geral, os parâmetros de interesse em um escoamento podem ser calculados a partir de três equações principais. Essas são,

**Equação da Continuidade.** Ou ainda, *Equação da Conservação de Massa*. Obtida através do teorema de transporte de Reynolds, uma equação mais geral que expressa a variação total Euleriana de uma variável intensiva qualquer  $\phi$  em um volume  $\forall$  fixo no espaço em função da variação local desse parâmetro momentaneamente contido no volume e do fluxo resultante do mesmo parâmetro através das paredes do volume.

**Equação de Navier-Stokes.** Essa é uma consequência direta da equação de movimento de Cauchy, que basicamente representa o balanço entre as forças externas que agem num elemento volumétrico  $\forall$  de fluido e as forças inerciais. Ou seja, A equação de Navier-Stokes tem como alicerce a segunda lei de Newton.

**Equação da Conservação da Energia.** Obtida através da combinação da lei de Fourier para condução de calor, da equação de transferências de calor por convecção e da lei de Stephan Boltzmann, que define a temperatura como principal parâmetro de controle.

Essas formam um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas que quando resolvidas simultaneamente, nos dão os parâmetros de controle necessários para definir o escoamento em sua totalidade.

### 2.4.1 Equação da Continuidade

Conforme descrito na introdução desta seção, a equação da continuidade vem de um resultado mais geral que nos mostra como uma quantidade definida ponto a ponto varia no espaço e no tempo. Se definirmos quantidades extensivas em um dado volume  $\forall$  como  $\Phi = \int_{\forall} \phi(x, y, z, t) d\forall$ , em que  $\phi$  representa a quantidade intensiva definida ponto a ponto, podemos obter o *teorema de transporte de Reynolds* [3], dado por,

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint \phi \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.18)$$

Ou ainda a versão pontual da mesma relação,

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) \quad (2.19)$$

A partir daí, podemos derivar a equação de conservação da massa ao considerar a afirmação matemática do conceito de indestrutibilidade da matéria que, contextualizando, significa que a massa de um sistema sempre existiu e sempre vai existir, de modo que  $\frac{DM}{Dt} = 0$ . Isso indica que, à partir da definição de densidade,  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  e que por fim obtemos,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.20)$$

A equação acima representa a equação de continuidade em sua forma diferencial.

## 2.4.2 Equação de Navier-Stokes

Essa que é talvez a principal equação usada para a resolução de problemas envolvendo escoamentos, é uma representação diferencial da conservação do momento linear. Como já foi descrito inicialmente, o ponto de partida para a derivação da equação de Navier-Stokes é simplesmente a segunda lei de Newton que, no contexto da fluido dinâmica, é representada pela equação de Cauchy [3],

$$(\mathbf{g} - \mathbf{a})\rho + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (2.21)$$

Agora, dependendo da descrição do fluido em questão, seja esse incompressível ou compressível, consideramos diferentes equações para o tensor de estresse  $\mathbf{P}$ , ambas dependendo do tensor de deformação angular  $\dot{\mathbf{S}}$ , da viscosidade  $\mu$  e da pressão média do fluido. Importante salientar que para fluidos compressíveis, o tensor de estresse depende ainda do divergente do campo de velocidades.

A fim de descrever apenas o caso incompressível, que é o mais simples e que abrange grande parte dos líquidos, obtemos a equação de Navier-Stokes a partir da substituição do tensor de estresse  $\mathbf{P}$  para o caso incompressível [Equação 2.22] na equação de Cauchy.

$$\mathbf{P} = 2\mu\dot{\mathbf{S}} - p\mathbf{I} \quad (2.22)$$

Em que  $p$  é a pressão média considerada ponto a ponto no fluido e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

Substituindo a equação 2.22 na equação de Cauchy 2.21 e rearranjando os termos, obte-

mos a seguinte equação,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu(\nabla^2 \mathbf{V}) \quad (2.23)$$

Aqui, a cada um dos termos que possuem dimensões  $L/T^2$  de aceleração, pode ser dada uma interpretação física que evidencia seu papel na dinâmica do escoamento.

O primeiro termo à esquerda  $\partial \mathbf{V} / \partial t$ , representa a aceleração local ponto a ponto no espaço. Se considerarmos um escoamento intrasiente, este termo é nulo.

O segundo termo à esquerda  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ , a chamada aceleração convectiva, é tida como uma ferramenta de previsão de como o escoamento evolui de um ponto no espaço para outro ponto vizinho no mesmo instante de tempo. Escoamentos uniformes não possuem aceleração convectiva.

O primeiro termo à direita  $\mathbf{g}$ , representa a aceleração da gravidade.

O segundo à direita  $-(1/\rho)\nabla p$ , é a aceleração da pressão que representa um bombeamento no escoamento.

O ultimo termo  $\nu(\nabla^2 \mathbf{V})$ , representa a desaceleração viscosa devido à ação de resistência relativa à fricção com objetos que passam através do escoamento.

Por mais que pareça relativamente simples em sua forma compacta, a equação de Navier-Stokes pode ter soluções absurdamente complicadas ou mesmo impossíveis de serem resolvidas analiticamente. Ainda assim, esta é de extrema importância uma vez que descreve a lei da conservação do momento em sua totalidade.

Desse modo, a fim de obter soluções analíticas, devemos ser sempre capazes de aproximar nossos problemas para casos ideais, em que certos termos da equação podem ser desconsiderados, tornando-a possível de ser tratada analiticamente. A verdade é que muitas vezes, dada as características individuais de um determinado fluido ou escoamento. Podemos, por exemplo, desconsiderar variáveis como a gravidade para a maioria dos escoamentos horizontais de líquidos, já que, como já demonstramos na seção 2.2.4, estes são considerados incompressíveis na grande maioria dos casos.

Outra possibilidade que podemos considerar é levar as forças de cisalhamento à zero quando efeitos viscosos são dados como irrelevantes. Tais escoamentos invíscidos ocorrem quando estudamos fluidos ideais que não possuem viscosidade. É claro que, no mundo real, não existem fluidos cuja viscosidade seja nula, no entanto nada nos impede de levar em conta a aproximação dependendo da escala daquilo que estamos interessados em observar. Um exemplo

de fluido cujo escoamento pode ser considerado invíscido é o ar.

No geral, se quisermos resolver a equação de Navier-Stokes analiticamente, devemos ser sensatos ao considerando aproximações. Para certas idealizações clássicas, temos equações já bem conhecidas, como é o caso da de *Euler* [Eq.2.24], para fluidos ideais, e *Stokes* [Eq.2.25], para casos sem aceleração.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (2.24)$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.25)$$

## 2.5 Condições de Contorno

Quando nos referimos à condições de contorno, estamos basicamente levando em consideração imposições as quais certos parâmetros como velocidade e pressão estão sujeitos diante de um contorno, ou fronteira, para um determinado escoamento. Com isso, quero afirmar que cada fluxo possui suas particularidades quanto as condições de contorno. Ou seja, as condições impostas à velocidade em fluidos reais não se aplicam aos ideais e vice versa.

Mas antes de discutirmos a respeito de quais condições de contorno são apropriadas, devemos definir o contorno no contexto da fluido-dinâmica. Um contorno, nada mais é do que uma superfície definida por  $F(\mathbf{r}, t) = 0$  que não necessariamente esta fixa no espaço, uma vez que  $F$  pode depender do tempo. É importante salientar que, na fluido-dinâmica, levamos em consideração uma classe de superfícies chamada de *superfícies materiais* que definem o contorno que envolve o fluido. Tal classe de superfícies é composta por aquelas cuja lamina externa de fluido que define o contorno é formada sempre pelas mesmas partículas ao longo do tempo. Ou seja, as partículas adjacentes ao contorno não podem penetrar ou causar vácuo na superfície material.

Além disso, a nulidade da aceleração euleriana de  $F(\mathbf{r}, t)$  também é uma condição a ser respeitada.

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad (2.26)$$

Tal condição é uma consequência direta da primeira, já que  $F(\mathbf{r}_1, t)$  e  $F(\mathbf{r}_2, t)$  devem ser nulos, em que  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  são duas posições no espaço.

Desse modo, uma vez definido o conceito de superfície material, devemos construir condições de contorno nas bordas que concordem com as qualidades que definem essa classe de superfície. Primeiramente, uma vez que não podemos ter partículas de fluido que caminham no limiar do contorno de fato atravessando-o, devemos impor uma condição ao campo de velocidades que venha a refletir tal característica. Desse modo, fica obvio que as linhas de campo que percorrem o escoamento não podem ser de maneira alguma transversais à superfície material, indicando que a componente do campo de velocidades ortogonal à superfície deve ser nula no contorno. Isto é,  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_n = v_n = 0$  na borda.

Considerando agora um caso em que a superfície é constituída por um material sólido, e que o fluido é real e sujeito à efeitos de pressão de cisalhamento, devemos impor uma condição de contorno para o campo de velocidades na borda que concorde com a condição de não escorregamento, do inglês *noSlip*. partindo do pressuposto de que o fluido não vai deslizar nas bordas, devemos observar, nas bordas, que  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_n$ , em que  $\mathbf{U}$  é a velocidade da superfície sólida.

Figura 10 retrata o comportamento de três escoamentos diferentes na superfície do contorno. Podemos observar que em (a), o escoamento é de um fluido real que sofre ação das tensões de cisalhamento e portanto obedece a condição de não deslizamento na borda. Em (b) temos um escoamento deslizante, um escoamento de alta velocidade que, devido a intensidade do campo de velocidades, resiste às tensões de cisalhamento e desobedece à condição de não deslizamento. Já em (c), temos o já discutido caso do escoamento invíscido, onde temos um fluido ideal não viscoso cuja viscosidade é nula, anulando assim as tensões de cisalhamento em todo o fluido incluindo as bordas.

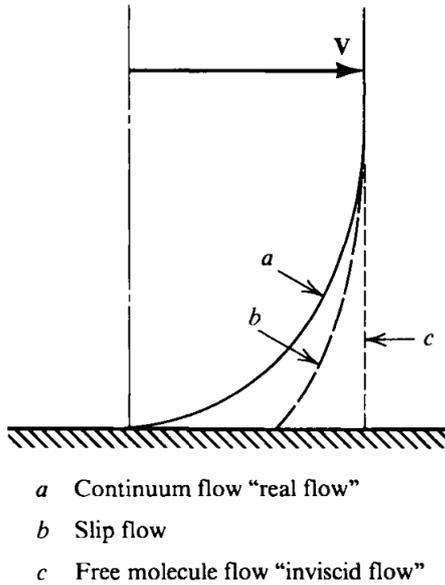


Figura 10: Perfis de velocidade para três diferentes escoamentos na superfície.

Referencia [3]

Por fim, temos a condição de contorno para as tensões. Para casos onde temos dois fluidos imiscíveis compartilhando da mesma borda, as tensões normais e de cisalhamento devem se balancear dos dois lados da superfície entre os fluidos. Ou seja  $(p_{ij})_{S_1} = (p_{ij})_{S_2}$  em que  $S_1$  e  $S_2$  representam a face interna e externa da superfície.

## 2.6 Escoamento Rastejante no Canal Retangular

Faço agora uma discussão a respeito do simples problema de um escoamento bi-dimensional do já discutido escoamento rastejante [3] descrito pela equação de Stokes [2.25].

Consideramos um fluido real e incompressível contido entre duas placas separadas por uma distância  $h$ , em que a superior se move com velocidade  $V_\infty$  com relação à inferior. Assumindo um escoamento intransiente com o tempo, temos:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.27)$$

Além da equação de Stokes acima, devemos levar em consideração a equação da continuidade para fluidos incompressíveis e intransientes. Isto é, devemos considerar que a densidade é constante não só no espaço mas também no tempo.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.28)$$

Agora, uma vez que consideramos o escoamento laminar e o fluido com propriedades bi-dimensionais [Figura 11], devemos ter em mente que as componentes do campo de velocidades na direção  $y$  e  $z$  são nulas. A partir daí, pela equação de Stokes, podemos ver que  $\partial v/\partial y = 0$  e  $\partial p/\partial x = 0$ , de modo que somos levados a enxergar a pressão como uma função apenas das coordenadas  $y$  e  $z$ ,  $p = p(y, z)$ .

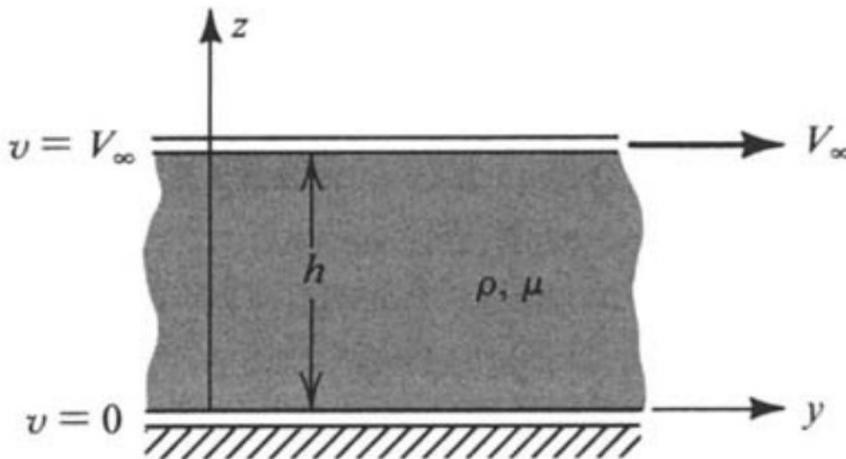


Figura 11: *Escoamento bi-dimesional em um canal retangular*  
Referencia [3]

Desse modo, a componente  $y$  da equação de Stokes fica,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.29)$$

Que pelos resultados obtidos das equações da continuidade e componente  $z$  da equação de Stokes, ficamos com

$$\frac{dp}{dy} = \mu \frac{d^2 v}{dz^2} = const \quad (2.30)$$

Devemos agora lembrar de uma conclusão importantíssima da separação de variáveis: se as taxas de variação de dois termos distintos com relação a duas variáveis distintas são iguais, ambas devem ser iguais à mesma constante. A partir daí podemos realizar integrações diretas e obter um dos termos em função da derivada do outro.

A equação 2.30 indica que, nesse caso, para o movimento rastejante, a pressão é uma função apenas da variável espacial na direção do escoamento.

Integrando diretamente, obtemos

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dy} z^2 + c_1 z + c_2 \quad (2.31)$$

Em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes obtidas na integração. Importante lembrarmos também que tanto  $dp/dy$  quanto  $d^2v/dz^2$  devem ser constantes por conta da igualdade característica 2.30.

Agora, aplicando as condições de contorno referentes à condição de não deslizamento nas bordas da geometria, temos

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dy} (z^2 - zh) + \frac{V_\infty}{h} z \quad (2.32)$$

A pressão pode ser integrada diretamente da equação 2.30 de modo que obtemos

$$p = \mu \left( \frac{d^2v}{dz^2} \right) y + const. \quad (2.33)$$

Mais uma vez, dado os resultados referentes aos gradientes de velocidade obtidos da equação da continuidade e da equação de Stokes, devemos chegar a conclusão de que há apenas uma tensão de cisalhamento não nula, esta sendo  $\tau_{zy}$ .  $\tau_{zy}$  representa a tensão aplicada ao plano perpendicular à  $z$  e na direção  $y$ . Desse modo, escrevemos a única tensão de cisalhamento do escoamento,

$$\tau_{zy} = 2\mu \dot{\epsilon}_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dy} (2z - h) + \frac{\mu V_\infty}{h} \quad (2.34)$$

Agora, uma vez que já obtivemos o resultado para uma superfície sólida móvel, é interessante fazermos um breve estudo do escoamento para o caso em que temos praticamente a mesma configuração mas com a única diferença de que a superfície superior permanece parada.

Ora, se obtivemos os resultados para o caso em que temos a placa superior se movendo à uma velocidade relativa  $V_\infty$ , os resultados para o caso em que essa permanece parada são obtidos diretamente do caso anterior, basta anular todos os termos proporcionais à  $V_\infty$ , consequentemente obtendo,

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dy} (z^2 - zh) \quad (2.35)$$

e para a tensão de cisalhamento

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dy} (2z - h) \quad (2.36)$$

Outro resultado de extrema importância é o cálculo do fluxo. Para duas dimensões, devemos integrar a velocidade sobre uma linha ortogonal que vai da base ao teto da geometria.

$$Q = \int_0^h v dz = \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dy} (z^2 - zh) = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dy} h^3 = -\frac{1}{12\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L} h^3 \quad (2.37)$$

O último passo é devido à constância da derivada da pressão pelo comprimento. Tal resultado indica que o gradiente de pressão deve cair com  $h^{-2}$ , já que o fluxo deve se conservar igual ao fluxo de entrada  $Q = vh$ .

Por fim, podemos ver que obtivemos os parâmetros de interesse através da resolução de equações acopladas. Agora, algo interessante de se investigar seria tentar determinar em que ponto na coordenada  $z$  a velocidade é máxima no caso a parte que estudamos. Uma vez que temos a velocidade em função da coordenada  $z$ , ficamos apenas com um simples problema de otimização para resolver. Dessa maneira, estudando a derivada segunda de  $v$  com relação à  $z$  e igualando a expressão à 0 para obter em que ponto temos um valor extremo na curva, concluímos que para  $z = h/2$  temos um valor extremo de  $v$  que pode ser máximo ou mínimo. Agora, levando mais uma vez em consideração a condição *noSlip*, devemos concordar que a prerrogativa de que a velocidade seja máxima no meio do canal parece pertinente. Isso nos leva a concluir, à partir da expressão para a derivada segunda de  $v$ , que  $dp/dy$  deve ser negativo. Isso faz todo sentido, uma vez que tal resultado indica que o gradiente de pressão na direção do escoamento é responsável por impulsionar o volume de fluido de um lado para o outro.

## 2.7 Escoamento Completamente Desenvolvido em um Tubo

Estudar um escoamento completamente desenvolvido [4] é levar em consideração o escoamento longe de qualquer entrada ou saída e abaixo de um determinado número de Reynolds que, dada as condições de escoamento, rugosidade interna e geometria em geral, define o limite entre um escoamento laminar e turbulento.

Nesse estudo estaremos usando o conjunto de coordenadas cilíndricas, já que essas parecem ser a escolha óbvia para descrever o escoamento em um tubo.

Considerando o caráter laminar do escoamento horizontal de um fluido incompressível na direção  $z$ , esperamos que os parâmetros de interesse evoluam sempre de maneira a respeitar

uma simetria radial. Isto é, as componentes radiais e angulares do campo de velocidades devem ser nulas. Negligenciando a gravidade, e considerando a equação da continuidade escrita em coordenadas cilíndricas, temos que  $\partial(w)/\partial z = 0$ , o que indica que  $w$  é uma função da coordenada radial, isto é  $w = w(r)$ .

Considerando apenas os termos na direção  $\hat{r}$  da equação de Navier-Stokes, concluímos que  $\partial p/\partial r = 0$ , o que indica que a pressão é uma função apenas da coordenada independente  $z$ . Já as componentes na direção  $\hat{z}$  são tais que ficamos com

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} = \text{const} < 0 \quad (2.38)$$

Ou seja, em essência estamos resolvendo mais uma vez a equação de Stokes 2.25 para escoamentos lentos, o que faz sentido diante da qualidade laminar do escoamento.

Assim como discutimos a respeito da equação 2.30, o resultado da equação acima também corresponde a mesma conclusão abordada na teoria da separação de variáveis. Além disso, o valor negativo da constante indica que a pressão diminui na direção de crescimento da variável independente  $z$ , o que nos faz concluir que o movimento do fluido é induzido por uma aceleração de bombeamento.

De todo modo, a equação acima pode ser integrada diretamente de modo a obtermos

$$w = \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (2.39)$$

Uma vez que a solução crua da equações possui uma logaritmo natural, devemos impor não só condições de contorno nas bordas da geometria do tubo mas na no eixo do mesmo, que acontece de ser também uma singularidade de  $\ln(r)$ . Com isso, impondo tais condições concluímos que  $C_1 = 0$  devido à condição de continuidade no eixo e  $C_2 = (-dp/dz)(R^2/4\mu)$

Logo, a solução clássica final desenvolvida para um escoamento de Hagen-Poiseuille é,

$$w = \left( -\frac{dp}{dz} \right) \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (2.40)$$

Uma vez que sabemos como o campo de velocidades é representado no dado escoamento, podemos derivar alguns resultados valiosos. Primeiramente, podemos derivar a velocidade em função da coordenada radial a fim de resolver o problema e otimização e verificar à que distancia do eixo a velocidade é máxima. Dessa maneira devemos concluir obviamente que a velocidade

é máxima na linha de fluxo central do tubo, em  $r = 0$ . Por fim, anulando  $r$  em 2.40 obtemos

$$V_{max} = -\frac{dp}{dz} \frac{R^2}{4\mu} \quad (2.41)$$

Além disso, o tensão de cisalhamento pode ser calculada na parede

$$\tau_{wall} = \mu \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=R} = \left( -\frac{dp}{dz} \right) \frac{R}{2} \quad (2.42)$$

Por fim, podemos fazer o calculo da velocidade média numa secção ortogonal ao eixo do tubo, bem como o fluxo que passa pela mesma. Podemos usar a velocidade média para avaliar o número de Reynolds referente o escoamento. De todo modo, temos

$$V_{avg} = \frac{1}{A} \int w dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R V_{max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r dr = \frac{V_{max}}{2} \quad (2.43)$$

$$Q = \int v_z dA = \int_0^R V_{max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r dr = \pi R^2 V_{avg} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \quad (2.44)$$

Devemos ainda lembrar que essas equações são validas somente para casos de escoamento laminar. Isto é, dada a geometria e condições aproximadas de rugosidade interna, a teoria é valida para um número de Reynolds  $Re = \rho V_{avg} (2R) / \mu$  em torno de 2100.

### 3 FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL

Quando se trata de fluidodinâmica computacional, o objetivo é basicamente a resolução das equações que regem o escoamento através de métodos numéricos de aproximação. É claro que, em vista a quantidade de casos cuja uma resolução analítica é simplesmente impensável, a fluidodinâmica ganha cada vez mais espaço, uma vez que a capacidade de processamento vem evoluindo exponencialmente ao longo dos anos nos permitindo resolver casos tão complexos quanto demanda a realidade.

Dessa maneira, já era de se esperar que seria uma questão de tempo até o surgimento dos primeiros grupos de pesquisa em *CFD* e com eles a demanda por softwares especializados. E foi a fim de suprir essa demanda que programas pagos de alto nível como o **Fluent**, atualmente da Ansys surgiram no mercado.

Além disso, a medida que a globalização foi se intensificando por meio da evolução da internet, softwares de código aberto como **openFoam** passaram a ganhar cada vez mais espaço, uma vez que a diversidade de ferramentas presentes no programa depende da colaboração dos usuários que implementam o software com seus próprios códigos a fim de resolver problemas específicos. Essa seria uma vantagem do openFoam diante do Fluent.

Nas simulações aqui discutidas, pretendo fazer uma comparação entre os resultados obtidos através de ambos os softwares.

#### 3.1 Mesh

De modo a analisar os escoamentos, o domínio ou geometria considerada deve ser dividida em subdomínios menores ( representados por hexaedros e tetraedros em 3D e quadriláteros e triângulos em 2D) [1] . As equações a serem resolvidas são então discretizadas e resolvidas no interior de cada domínio. Os subdomínios são usualmente chamados de células, enquanto que o conjunto dessas células é chamado de mesh.

No geral, um dos três métodos de discretização é usado para resolver a versão aproximada do conjunto de equações [2] : volumes finitos, elementos finitos, diferenças finitas.

**Volumes Finitos** Baseado na formulação dos volumes de controle onde o domínio é dividido em células e o valor dos parâmetros de interesse considerado é o do centro geométrico da célula, o método dos volumes finitos é o mais usado pela maioria dos programas de

simulação computacional em fluidodinâmica, incluindo Fluent e openFoam.

O método consiste na integração das equações diferenciais parciais no interior de cada célula. Para isso, o valor dos parâmetros de interesse no centro geométrico de cada célula é usado como uma média local para a resolução das integrais por meio de métodos de interpolação.

A maior vantagem do método, é que a equação resultante satisfaz a conservação dos parâmetros para qualquer volume de controle, assim como para todo o domínio. Mesmo um mesh grosseiro deve apresentar integrais balanceadas.

**Diferenças Finitas** Este consiste na resolução das equações através da expansão dos termos em séries de Taylor. No geral, as séries são truncadas em no máximo à partir de termos de segunda ordem. No entanto, termos de ordem superior podem ser considerados, o que melhoraria a qualidade da solução mas em contrapartida tornaria a solução mais complexa, de modo que seria necessário uma malha mais refinada com mais nodos de onde pudéssemos extrair diferenças.

Dos três, esse é o método mais antigo e menos usado.

**Elementos Finitos** Este baseia-se no método de resíduos de Galerkin, em que as equações são multiplicadas por uma função peso e em seguida integradas. As variáveis de interesse são representadas no elemento de volume por uma função da mesma forma da função peso. Tais funções podem assumir diversas formas. A grande desvantagem do método é a falta de significado físico contido na abordagem matemática.

### 3.2 OpenFoam

OpenFoam é um software de simulação computacional que teve sua primeira versão lançada no fim dos anos oitenta e foi idealizada a fim de ser uma plataforma não só poderosa mas também flexível que faria frente à linguagem de programação de computação científica padrão da época, o FORTRAN [7] . Desse modo, o openFoam foi construído em C++ dada à versatilidade e características ligadas à orientação ao objeto da linguagem.

Dada a distinta sintaxe do programa, característica de métodos de programação orientada ao objeto e sobrecarga de operadores, podemos escrever operações tensoriais e equações diferenciais parciais que lembram bem as equações à serem resolvidas. Um exemplo é a equação

abaixo,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\phi \mathbf{U}) - \mu \nabla^2 \mathbf{U} = -\nabla p \quad (3.1)$$

que pode ser representada pelo seguinte código

```

solve
(
    fvm::ddt(rho,U)
  + fvm::div(phi,U)
  - fvm::laplacian(mu,U)
  ==
  - fvc::grad(p)
);

```

Figura 12: *Equação representada por código em C++*  
Referencia [7]

Como já foi introduzido antes, talvez a maior vantagem dessa plataforma, seja o código aberto, o que significa que qualquer usuário pode alterar os códigos de um solver em particular de maneira que este atenda à suas necessidades. É claro que, uma vez implementado o solver no programa, outros usuários podem utiliza-lo ou ainda altera-lo. Tudo isso fica bem mais fácil à partir da sintaxe orientada ao objeto.

### 3.3 Fluent

Fluent é uma plataforma de simulação computacional escrita em C. Assim como o openFoam, Fluent utiliza o método dos volumes finitos para discretizar geometrias, assim como a grande maioria dos códigos comerciais do gênero [8] . Diferentemente do OpenFoam, temos aqui a presença de uma interface gráfica amigável, uma das maiores vantagens em cima do mesmo.

### 3.4 simpleFoam Solver

Assim como qualquer outro solver, o simpleFoam consiste basicamente em linhas de código que levam em consideração informações de entrada como

- *O domínio computacional, como o Mesh*

- *As equações a serem resolvidas, incluindo equações de Navier Stokes condizentes com as características do fluido e escoamento, equação da energia, equação de transporte escalar e qualquer outra equação associada de interesse.*
- *As condições iniciais e de contorno.*
- *Valores das constantes físicas como viscosidade.*
- *Parâmetros de discretização apropriados, sejam esses first/second order, upwind/central-differencing, implicit/explicit time-stepping.*
- *Condições de solução como tamanho do time-step, variáveis a serem salvas, etc*

e por fim produz a solução do escoamento, fornecendo os parâmetros de interesse, como velocidade nas três direções, temperatura e pressão.

À parte das características que definem os solvers, cada um possui particularidades que os tornam adequados à simulações com fluidos específicos. Isto é, para cada caso devemos ponderar e utilizar o solver mais apropriado. Muitas vezes, podemos nos deparar com situações em que o solver não é exatamente ideal para um determinado caso mas é bom o bastante dentro do grau de aproximação que estamos considerando no problema.

No caso do simpleFoam, temos um solver apropriado à simulações de escoamento com características específicas tais como,

- *Incompressibilidade do fluido.*
- *Escoamento intransiente.*
- *Escoamento laminar ou turbulento.*
- *Sistema unifásico.*
- *Sistema isotérmico*

o que é perfeito para a simulação que temos em mente, um escoamento líquido em regime de baixo Reynolds com temperatura média constante.

Outra particularidade desse solver é a resolução das equações acopladas de Navier-Stokes e da continuidade por meio do chamado *SIMPLE-loop* [Figura 13], um loop presente no código que permite a resolução das equações acopladas.

```

while (simple.loop(runTime))
{
    Info<< "Time = " << runTime.timeName() << nl << endl;

    // --- Pressure-velocity SIMPLE corrector
    {
        #include "UEqn.H"
        #include "pEqn.H"
    }

    laminarTransport.correct();
    turbulence->correct();

    runTime.write();

    Info<< "ExecutionTime = " << runTime.elapsedCpuTime() << " s"
        << "   ClockTime = " << runTime.elapsedClockTime() << " s"
        << nl << endl;
}

```

Figura 13: *SIMPLE-loop em C++*

*Elaborado pelo autor*

Da figura acima entendemos que o programa deve continuar a rodar o loop e resolver as equações acopladas de velocidade e pressão durante todo o *runTime*, nesse caso o número de máximo de iterações determinado nos arquivos de controle.

### 3.5 Simulando Escoamento no Canal Retangular

O problema aqui abordado numericamente se trata do caso particular discutido no fim da seção 2.6. Neste caso, o que temos é um canal retangular cujas paredes não se movem com relação ao "referencial do laboratório" e isolamos um determinado volume de controle, onde analisamos a passagem de fluido e tentamos obter dados referentes ao gradiente de pressão, perfil parabólico da velocidade e fluxo através de uma linha posicionada no meio do volume de controle.

A fim de induzir um fluxo pelo volume de controle podemos tanto gerar um gradiente de pressão no instante inicial quanto simplesmente inserir uma velocidade na entrada da passagem, o que por sua vez gera um gradiente de pressão. De todo modo, a solução analítica do problema avaliado aqui numericamente é o da equações de Stokes para escoamentos laminares lentos.

As condições de contorno são as mesmas já discutidas no fim da seção 2.6, em que as paredes internas possuem rugosidade considerável de modo a induzir um padrão de não deslizamento (*noSlip*) das camadas de fluido adjacentes às paredes da geometria retangular.

Não desejamos analisar o caráter transiente dos parâmetros de interesse. Dessa maneira, ao realizar a simulação no openFoam, utilizamos o solver *simpleFoam* com configuração voltada para escoamentos laminares.

### 3.5.1 Perfil Parabólico

Pela equação 2.35 fica evidente que o perfil de velocidades no canal retangular deve ser parabólico. Isto é, devemos sempre ter uma velocidade máxima no meio do canal,  $z = h/2$ . Para obter o perfil parabólico, utilizamos um software de pós-processamento chamado paraView.

Como poderíamos adivinhar, a velocidade no interior do canal, assumindo um escoamento completamente desenvolvido, deve apresentar um perfil aproximadamente parabólico. A fim de ressaltar esse perfil, simulamos o escoamento de um líquido através de um canal de dimensões 4x20 e analisamos o perfil de velocidades ao longo de uma linha vertical no meio da passagem. Isso foi feito usando uma ferramenta de pós-processamento disponibilizada no paraView.

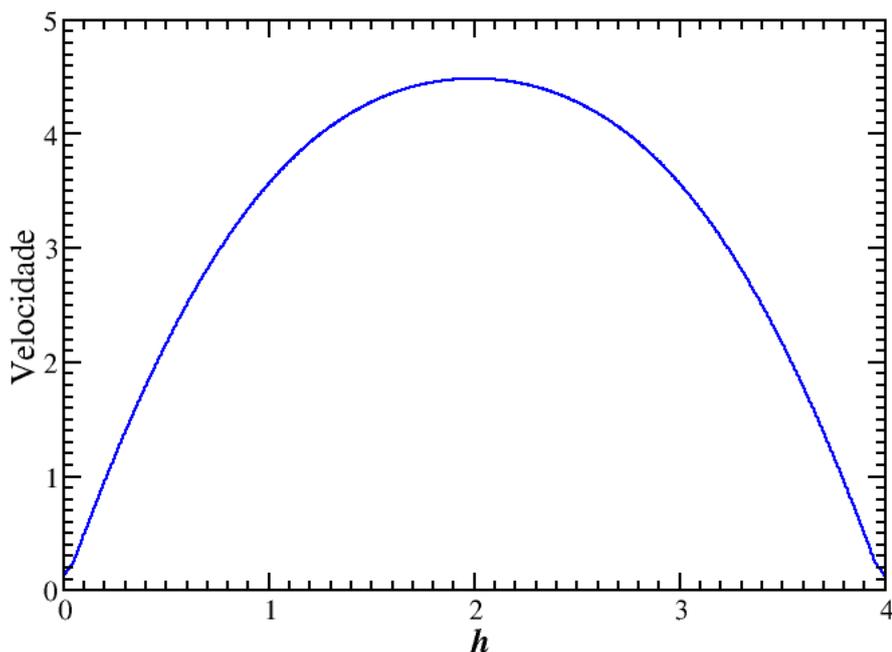


Figura 14: Dados obtidos para 1000 pontos ao longo de uma linha vertical no meio do canal; Velocidade de entrada de 3.116m/s

*Elaborado pelo autor*

Podemos ver também pela figura que a pressão não depende da coordenada espacial referente a direção de escoamento.

Um resultando bem semelhante pode ser obtido através de um escoamento induzido por

uma diferença de pressão cinemática de  $280 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Pressão cinemática é a pressão normalizada pela densidade e é a única pressão levada em consideração por solvers incompressíveis.

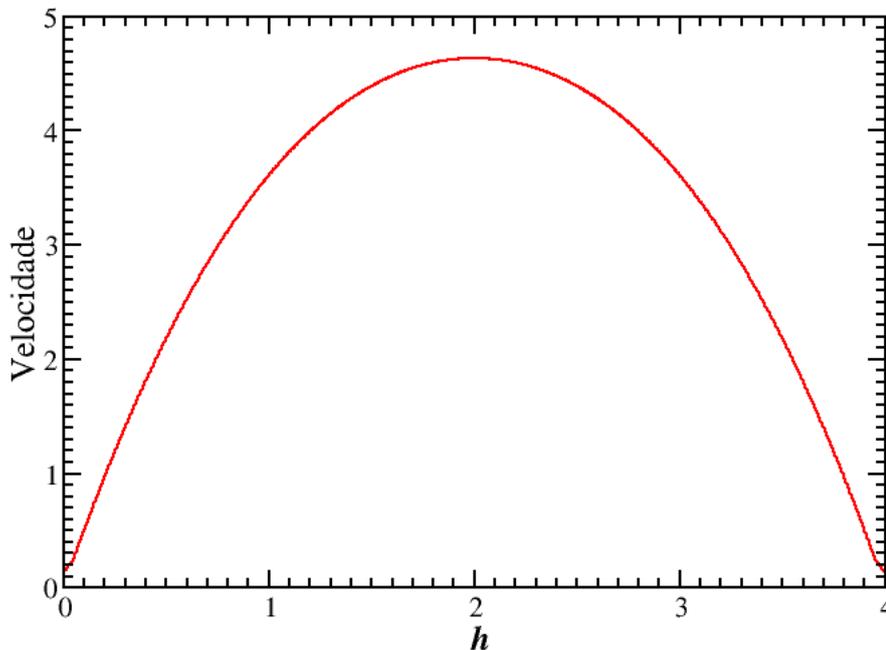


Figura 15: Perfil parabólico obtido para um escoamento induzido por gradiente de pressão. Resultado é semelhante ao obtido para uma velocidade de entrada de  $3.116 \text{ m/s}$

*Elaborado pelo autor*

Ao considerar velocidades mais altas, devemos mover a linha vertical de pós-processamento para a direita da origem a fim de obter perfis parabólicos. Isso se deve ao fato de que quanto maior for a velocidade de entrada, mais extensa será a região de turbulência na entrada do canal.

Por fim, é importante levar em consideração a influencia que a escala relativa entre as dimensões da geometria possui quando se trata de definir o escoamento do problema como laminar ou turbulento. Essa definição prévia é importante, uma vez que precisamos alterar ou configurar nosso solver de acordo. A partir daí, a fim de analisar essa influencia, realizamos três simulações diferentes no canal retangular, todas com velocidade de entrada relativamente alta de  $100 \text{ m/s}$  mas com canais de alturas diferentes. O resultado interessantíssimo foi observar que quando consideramos uma altura, ou entrada, bem pequena no canal, observamos um comportamento laminar em grande parte da extensão do canal, enquanto que para alturas cada vez maiores observamos um escoamento de caráter turbulento em quase toda a extensão do domínio.

O motivo é que quanto mais fino for nosso tubo, mais longo, em termos de escala relativa, ele será. Desse modo, podemos observar nesses casos um escoamento completamente desenvolvido em quase toda a extensão do canal, o que inclui o meridiano do mesmo, onde posicionamos a ferramenta de análise dos parâmetros ao longo de uma linha vertical. Por outro lado, se aumentamos substancialmente a altura do canal de modo que o tubo já não parece ser longo em termos de escala, podemos observar ainda no meridiano um perfil de velocidades não parabólico e característico de sessões de entrada apresentando turbulência. Esse comportamento pode ser observado na figura abaixo, onde observamos um perfil parabólico sobre o eixo de simetria para um canal fino e observamos esse perfil se descaracterizar a medida que aumentamos a entrada.

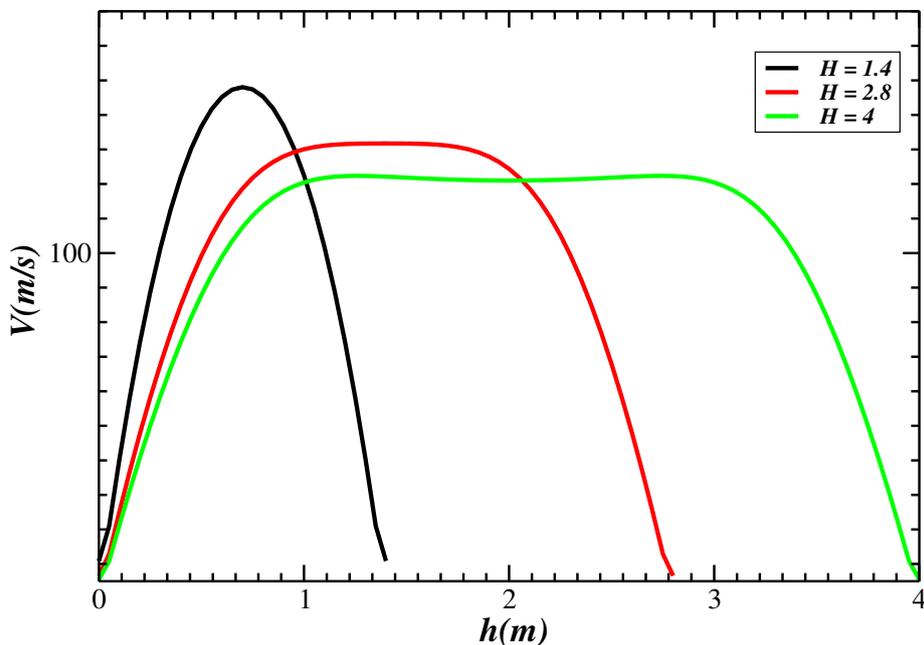


Figura 16: Perfis de velocidade para diferentes larguras  $H$  em um canal retangular de 20 m de comprimento por  $H$  de largura.

Elaborado pelo autor

### 3.5.2 Gradiente de Pressão

Algo que é importante salientar a respeito de solvers para fluidos incompressíveis, é a normalização da pressão pela densidade. Quando extraímos dados relativos a pressão, estamos na verdade obtendo a pressão dividida pela densidade. No entanto, é importante ter em mente que a mudança de escala e unidades da "nova pressão" não devem alterar a física do problema.

Os dados de gradiente de pressão foram extraídos a partir de funções implementadas dentro do solver. Essas funções foram definidas de maneira a calcular a integral da pressão sobre duas linhas verticais no interior da geometria e em seguida obter a diferença. As linhas

em questão foram posicionadas nos pontos  $(-6\ 0\ 0)$  e  $(6\ 0\ 0)$ .

A fim de estudar a relação entre o gradiente de pressão e o número de Reynolds, manipulamos os dados obtidos através de uma série de simulações com velocidades de entrada diferentes e construímos o gráfico com o Xmgrace. O que observamos, é uma dependência linear entre o gradiente calculado entre superfícies verticais simétricas e o número de Reynolds referente à dada velocidade de entrada.

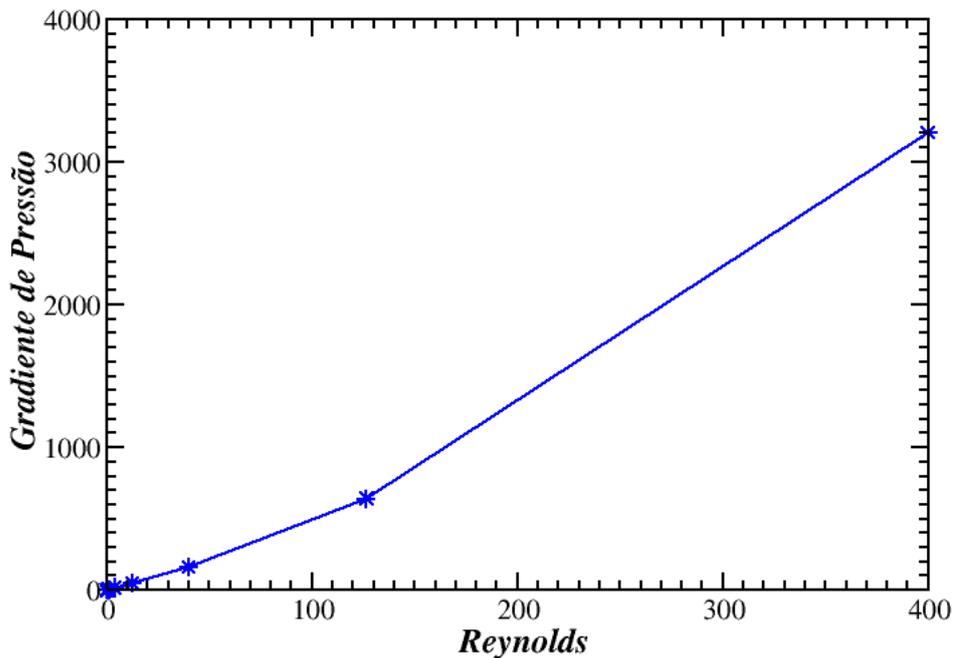


Figura 17: *Gradiente de pressão em função do número de Reynolds.*

*Elaborado pelo autor*

Além disso, obtivemos curvas de gradiente de pressão em função da abertura  $h$  do canal para uma série de velocidades de entrada a fim de encontrar um comportamento comum entre elas.

Por fim, podemos evidenciar uma propriedade comum entre todas essas curvas ao analisar a equação 2.37 que relaciona o gradiente de pressão com a dependência na abertura  $h$  do canal.

$$\frac{1}{v_{in}} \left| \frac{\Delta p}{\Delta L} \right| = 12 \frac{\mu}{h^2} \quad (3.2)$$

Em que  $v_{in}$  é a velocidade de entrada que define o número de Reynolds.

A partir daí, o que tentamos fazer foi usar ferramentas dentro do Xmgrace para, utilizando os dados de gradiente de pressão e velocidade de cada ponto, obter a razão da direita na equação 3.4. Desse modo, obtivemos um colapso das curvas, evidenciando que todas possuem aproximadamente a mesma dependência em  $h$  e desse modo evidenciam o caráter laminar dos escoamentos aos quais estão associadas.

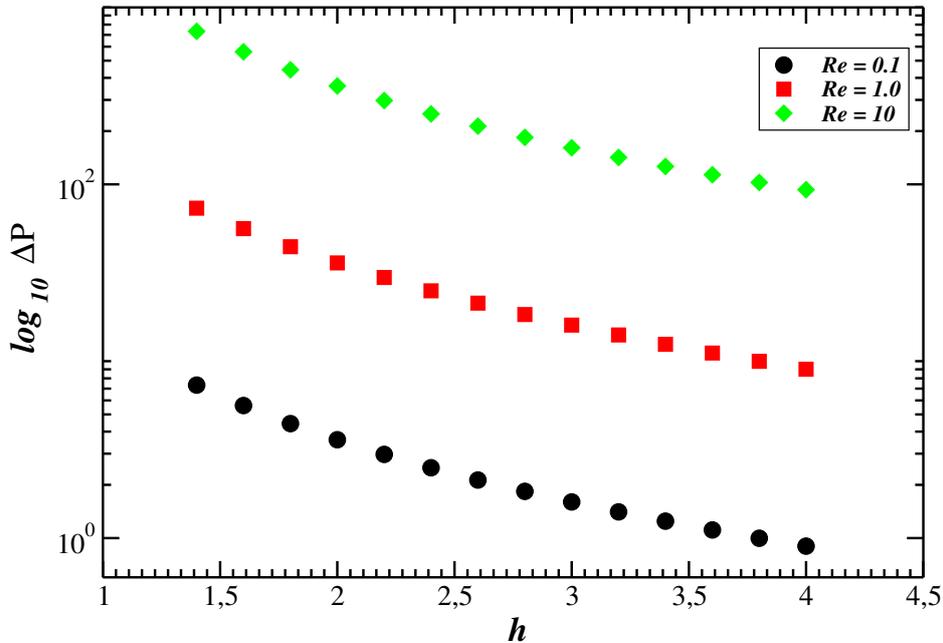


Figura 18: Gradiente de pressão pela largura  $h$  do canal. Dados obtidos pelo Fluent. Elaborado pelo autor

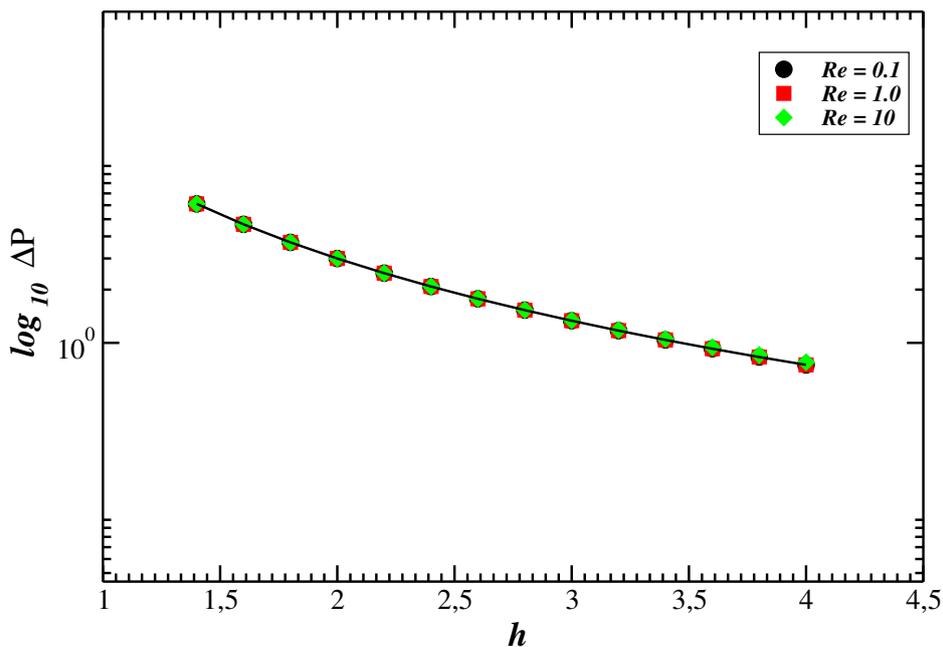


Figura 19: Colapso das três curvas sobre a curva de aproximação não linear. Aproximação não linear dada por  $y = 11.95x^{-1.996}$ .

Elaborado pelo autor

### 3.5.3 Fluxo

Assim como o gradiente de pressão, o fluxo também foi obtido por meio de uma função implementada ao solver. Essa função realizou uma operação de integração da componente normal da velocidade sobre uma linha localizada no meio do domínio. Realizando a operação para várias velocidades de entrada, obtemos a dependência do fluxo com relação ao número de Reynolds.

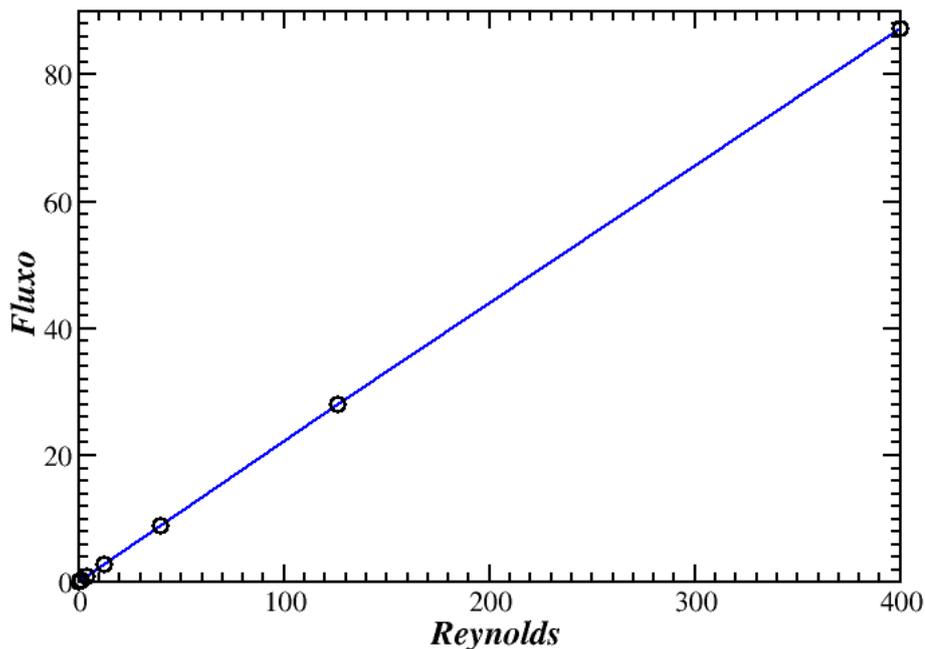


Figura 20: Dependência linear entre fluxo completamente desenvolvido e número de Reynolds; Velocidades variando de  $10^{-3}$  a  $10^2$ .

Elaborado pelo autor

### 3.6 Obstáculo no Canal Retangular

Nesta seção, tenho como objetivo discutir uma variação do problema do canal retangular que em essência torna o problema intratável se não numericamente. Um dos problemas, é que não podemos mais, mesmo levando em conta o caráter laminar do escoamento, considerar a componente da velocidade perpendicular na direção de escoamento como nula. É claro que o motivo se deve ao obstáculo. Uma vez introduzido o obstáculo [Figura 21], as componentes perpendiculares da velocidade não podem ser nulas uma vez que a presença do mesmo faz com que as partículas de fluido tenham que desviar para manter a direção resultante do escoamento.



Figura 21: *Geometria retangular com obstáculo cilíndrico no meio do domínio*  
 Elaborado pelo autor

Fazendo uma comparação analítica com o caso que resolvemos na secção 2.6, temos ainda as equações de Navier-Stokes e da continuidade como ferramentas de trabalho. No entanto, devemos reconhecer que temos aqui um desafio consideravelmente maior simplesmente devido à não nulidade dos de certas componentes da velocidade. Tomando como referencia apenas a direção do sistema de coordenadas da figura 11 e ignorando a geometria livre de obstáculos, podemos dizer que no caso aqui considerado a velocidade é nula apenas na direção  $x$  perpendicular ao plano de escoamento.

Logo, enquanto que no caso mais simples podíamos concluir que  $\partial v / \partial y = 0$  pela equação da continuidade, aqui ficamos com  $\partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$ . De maneira alguma isso nos dá uma informação conclusiva a respeito do comportamento da pressão da maneira como obtemos no caso sem obstáculo.

Seja lá como for, ainda precisamos resolver as mesmas equações acopladas para obter a velocidade e a pressão do fluido estudado no volume de controle  $\forall$ . Tais equações ficam um pouco mais complicadas. Ainda que não seja necessário levar a gravidade em consideração (Pelo menos para um canal horizontal), temos as componentes da equação de Navier-Stokes nas direções cartesianas que definem o plano de escoamento. Desse modo, ficamos com,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.3)$$

e

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\nabla^2 \mathbf{V}) \quad (3.4)$$

Abrindo a equação 3.3 ficamos com,

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

Abrindo também 3.4 para as direções de interesse, temos,

**Componente X**

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

**Componente Y**

$$v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.7)$$

**Componente Z**

$$v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.8)$$

Como podemos ver, a presença do obstáculo adiciona considerável complexidade à solução das equações de Navier-Stokes, o que nos leva a fazer uso de ferramentas de CFD como openFOAM e Ansys Fluent para efetuar os cálculos.

Agora seja qual for o software de fluidodinâmica computacional utilizado, é importante definirmos as características do fluido antes de rodar a simulação e, se for o caso, escolher um solver especializado em fluidos incompressíveis cujo escoamento seja intransiente, laminar e isotérmico.

É claro que, assim como na simulação do canal retangular, usamos o solver simpleFoam para resolver as equações. Agora, diferentemente do canal retangular, não podemos esperar que a pressão dependa apenas da coordenada na direção do fluxo e nem que a velocidade apresente um perfil perfeitamente parabólico. De todo modo, devido ao padrão laminar de escoamento, e das condições de contorno de não deslizamento, o perfil deva ser aproximar ou lembrar uma parábola na maior parte do domínio ao considerarmos um canal longo.

### 3.6.1 Perfil de Velocidades

Na intenção de fazer um paralelo com o caso simples do escoamento no canal retangular, consideramos o caso em que temos uma velocidade de entrada de  $3.116 \text{ m/s}$ . Utilizando

a ferramenta de pós-processamento no paraView, conseguimos obter o perfil de velocidades ao longo de uma linha vertical no centro da geometria [Figura 22]

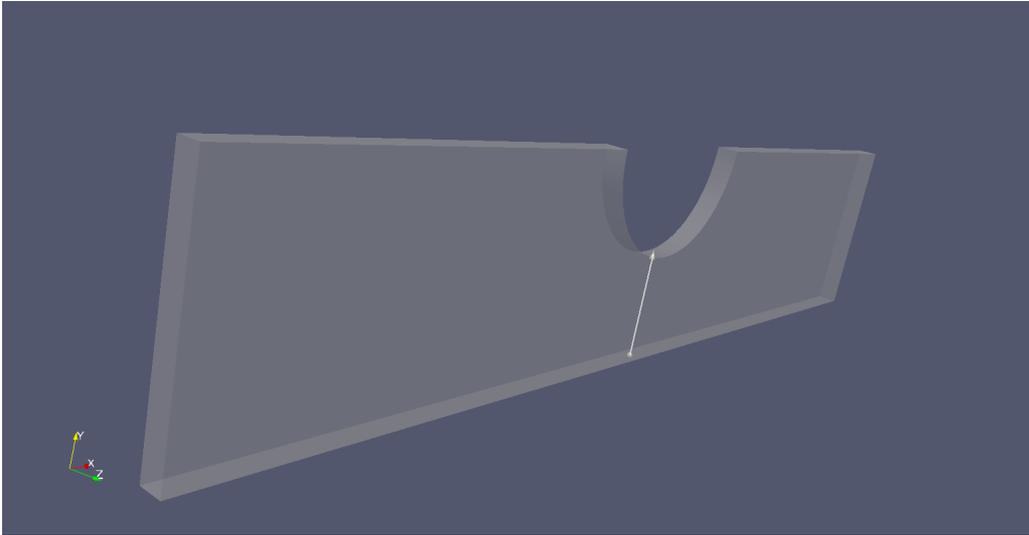


Figura 22: *Linha vertical coletora de dados*  
*Elaborado pelo autor*

Desse modo, considerando a dada velocidade de entrada e rodando o filtro de pós-processamento, obtemos o seguinte resultado para o perfil de velocidades e pressão para 1000 pontos ao longo da linha que vai da base da geometria até a superfície do cilindro. Como estamos lidando com uma quantidade tão grande de pontos, não faz sentido deixá-los em evidência na curva.

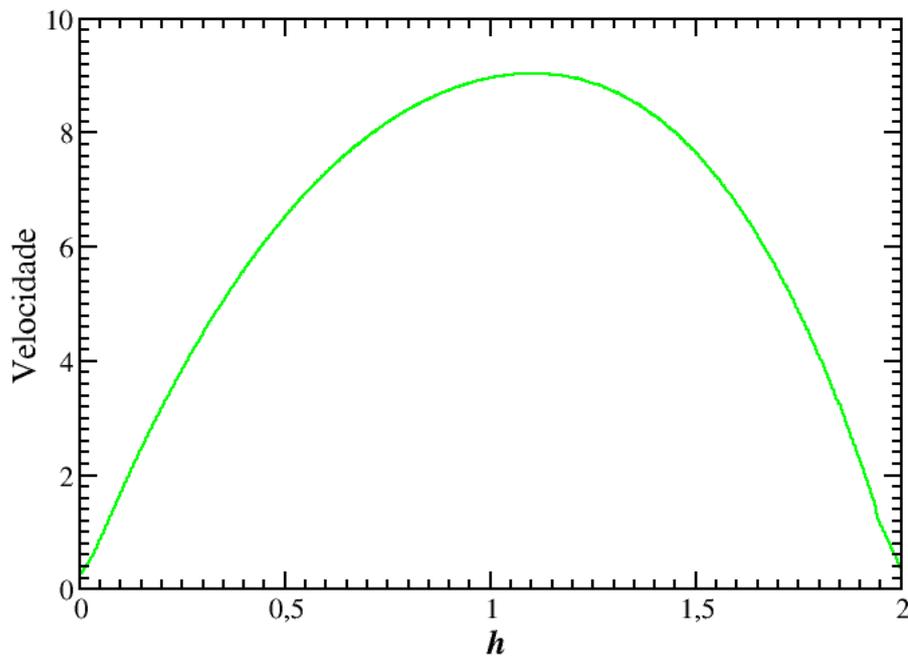


Figura 23: Perfil de velocidades logo abaixo do obstáculo cilíndrico de raio 2;  $h$  representa a distância da base do canal até o obstáculo.

*Elaborado pelo autor*

Podemos ver que o perfil já não é mais perfeitamente parabólico e o ponto de máximo parece estar ligeiramente deslocado para a direita, que seria mais próximo do obstáculo.

Agora, se afundarmos um pouco mais o obstáculo na direção da base da geometria obtemos um perfil parabólico apenas ligeiramente diferente, isso sem mudar a velocidade de entrada.

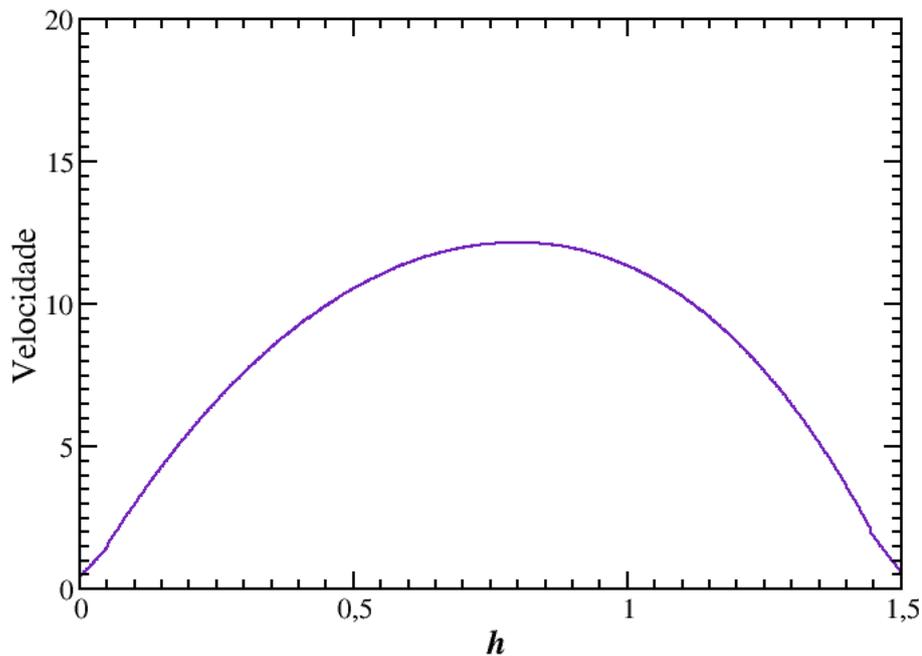


Figura 24: Perfil de velocidades para escoamento com obstáculo rebaixado 0.5 unidades na direção da base.

*Elaborado pelo autor*

Aqui podemos ver que embora as curvas de velocidades pareçam essencialmente iguais, os valores máximos de velocidade, ainda deslocados para a direita, são maiores. Isso sugere que ao estreitar a passagem do canal com um obstáculo cilíndrico, as velocidades ficam cada vez maiores.

Considerando um estreitamento relativamente exagerado, em que o cilindro desce 1.4 unidades de comprimento na direção da base, obtemos um dado perfil parabólico.

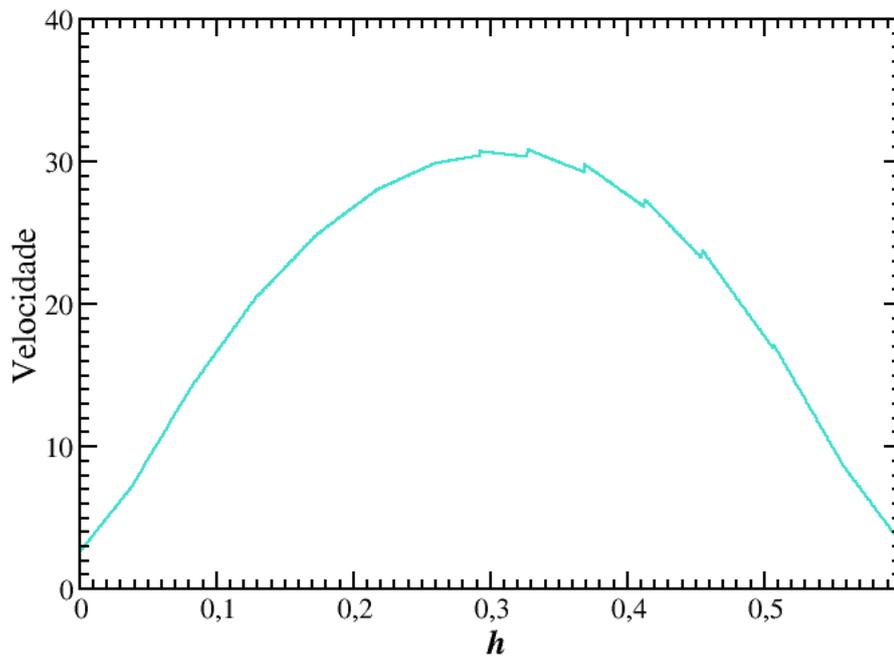


Figura 25: Perfil de velocidades para um canal exageradamente estreitado  
Elaborado pelo autor

Podemos ver mais uma vez que não há uma diferença substancial, onde observamos apenas um aumento geral da velocidade.

Por fim, realizamos uma comparação entre os perfis de velocidade para alto Reynolds em três níveis de estreitamento. A primeira curva parece um tanto instável, o que pode ser efeito da incerteza na simulação, já que estamos resolvendo casos próximos do perfil de turbulência com um solver de configuração laminar.

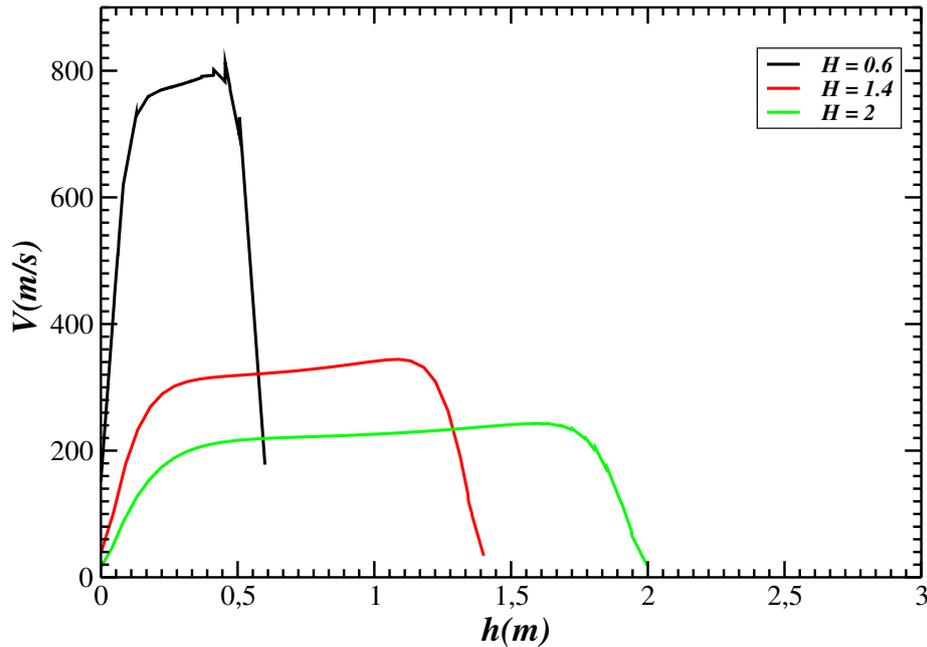


Figura 26: Perfil de velocidades para três níveis de estreitamento do canal com obstáculo cilíndrico

*Elaborado pelo autor*

Podemos observar que a curva que mais aparenta ter o caráter parabólico é a com maior grau de estreitamento.

### 3.6.2 Gradiente de Pressão

Assim como no problema da seção anterior, utilizo aqui os mesmos métodos para obtenção do gradiente de pressão em função do número de Reynolds [Figura [27]]. No entanto, o que pretendo obter nesse caso é diferente. O mais interessante é observar as curvas do gradiente de pressão em função da distância entre a base do canal e a superfície do obstáculo cilíndrico [Figura 22]. Cada curva representa uma velocidade de entrada e podemos observar que todas elas são descendentes, o que faz todo sentido, uma vez que a medida que o obstáculo diminui, a pressão na região anterior diminui. Levando essas conclusões para casos um pouco mais complicados mas ainda assim análogos, podemos lembrar que o mesmo acontece com uma artéria quando se livra gradativamente do acúmulo de placas de colesterol quando nos submetemos a uma dieta mais saudável por exemplo.

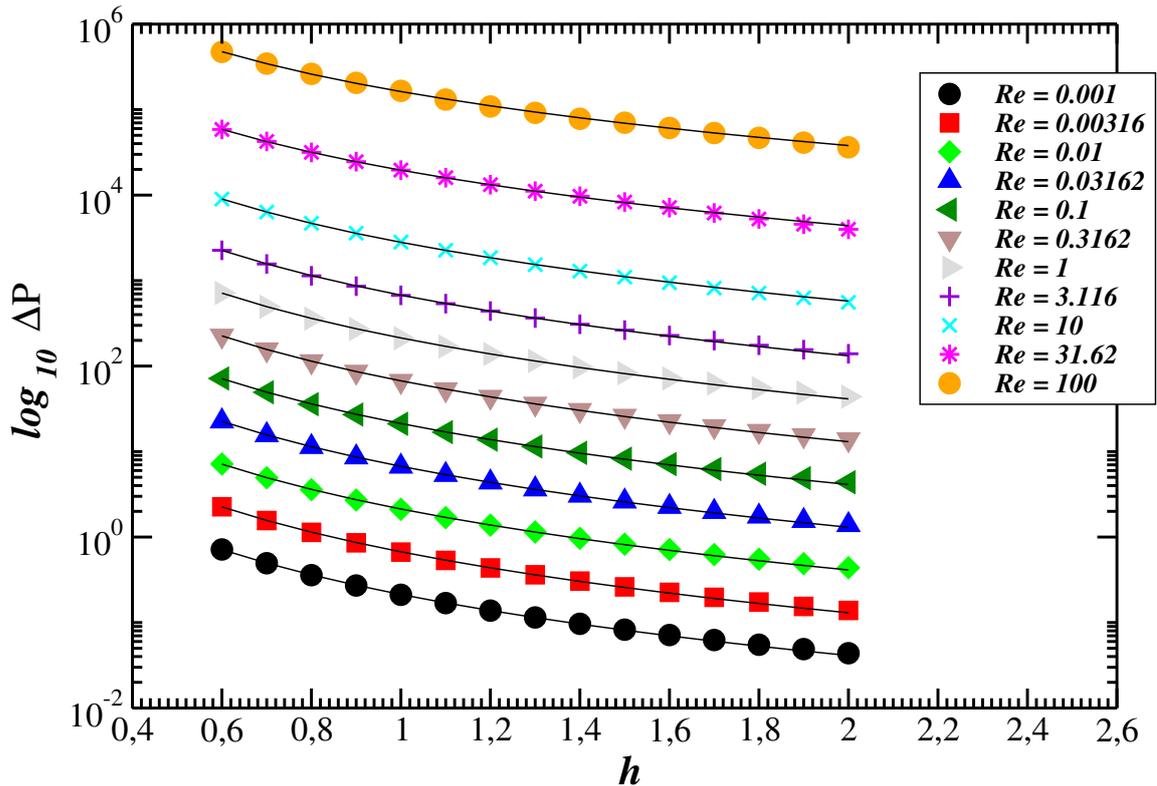


Figura 27: *Gradiente de Pressão em função da distancia da base até o obstáculo cilíndrico; Pontos representam valores obtidos em simulação; Linhas representam a aproximação não linear de uma função  $y = A_0 x^{-A_1}$ , em que os parâmetros  $A_0$  e  $A_1$  são ajustados de acordo; Cada curva de descendência representa um número de Reynolds normalizado pelo comprimento característico.*

*Elaborado pelo autor*

Utilizando o Xmgrace a fim de traçar as curvas que mais se aproximam dos valores obtidos na simulação, utilizamos uma ferramenta de aproximação não-linear de modo a obter o expoente de decaimento desses valores. Pelo resultado da equação 2.37, sabemos que o gradiente de pressão em um canal retangular sem obstáculos deve decair com  $h^{-2}$ . Desse modo, agora com o aparecimento do obstáculo, esperamos que o expoente tenha uma correção.

Realizando as mesmas simulações utilizando o Fluent, obtemos resultados similares com o mesmo comportamento físico expresso nas curvas.

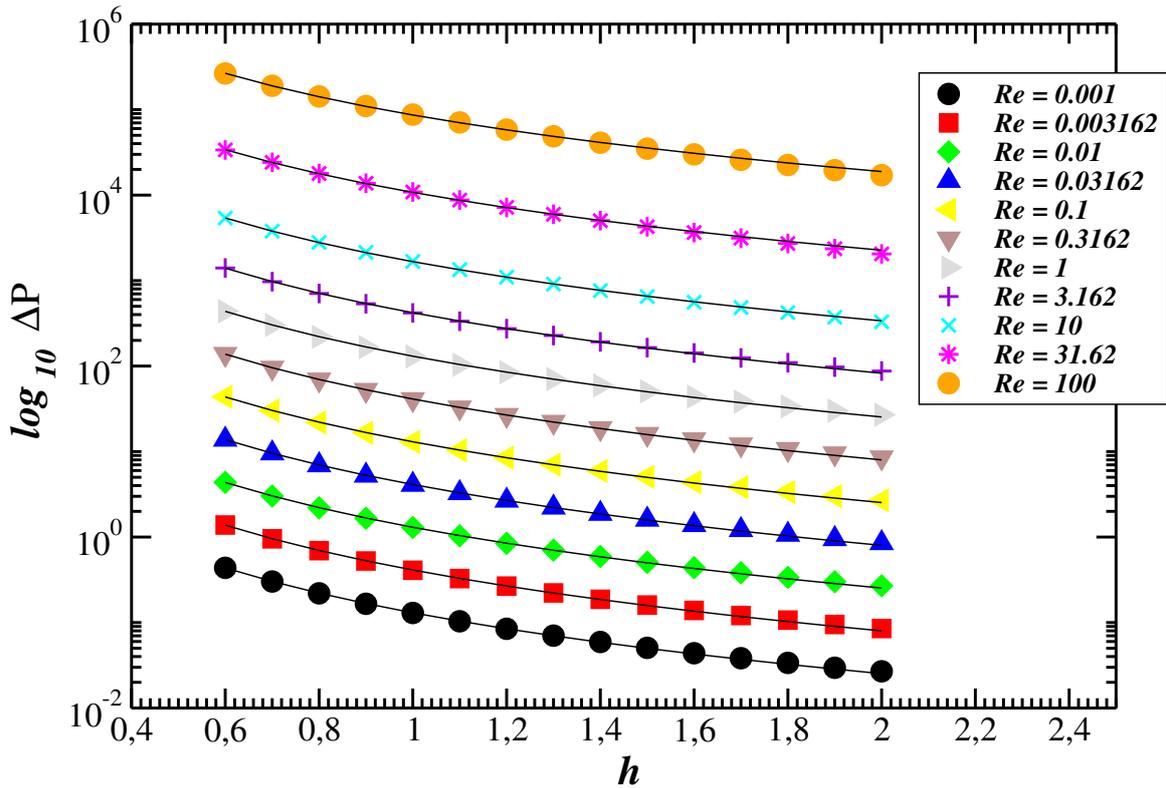


Figura 28: Gradiente de pressão em função do tamanho da fenda entre a base do canal e obstáculo cilíndrico; Pontos representam valores obtidos na simulação enquanto que as curvas representam aproximações não-lineares. Simulações rodadas no Fluent  
Elaborado pelo autor

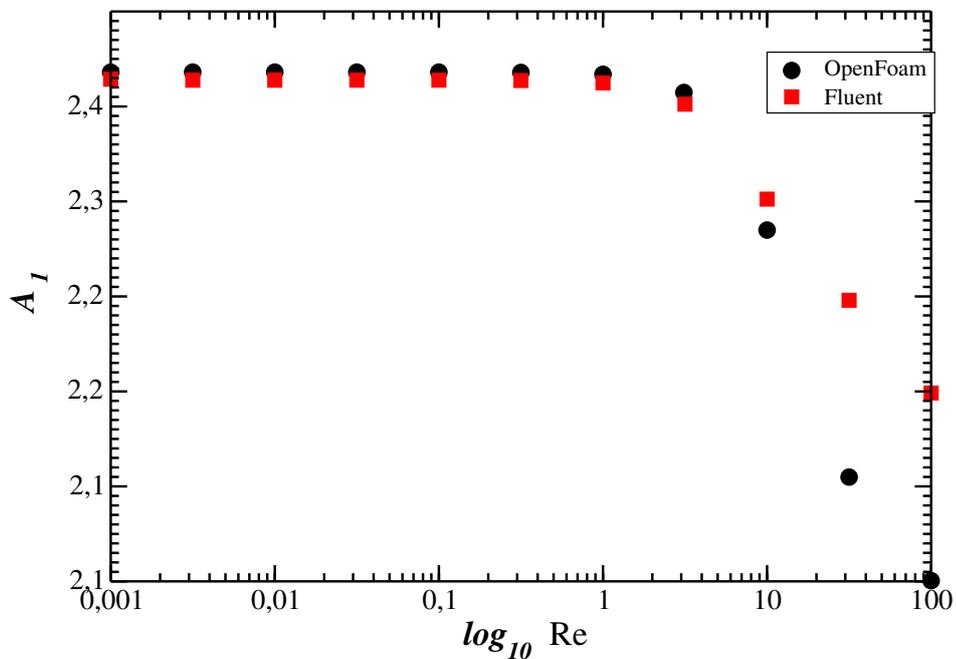


Figura 29: Exponentes  $A_1$  das correções não lineares  $y = A_0 x^{-A_1}$  referentes as simulações do Fluent e OpenFoam.

Elaborado pelo autor

O resultado acima é , em essência, o mesmo apresentado antes na figura 27 mas agora com os valores obtidos através de simulações realizadas pelo Fluent da ANSYS.

Por fim, discutimos mais um resultado referente ao colapso das curvas. Podemos observar que, da mesma maneira que ao obter um colapso das curvas no caso do canal retangular indica uma propriedade comum entre os escoamentos, o mesmo deve ser verdade no caso do canal com obstáculo. Além disso, a mesma conclusão do caso anterior de que uma flutuação de qualquer uma das curvas de Reynolds da curva de colapso indica uma provável transição do estado laminar para turbulento é também válida aqui.

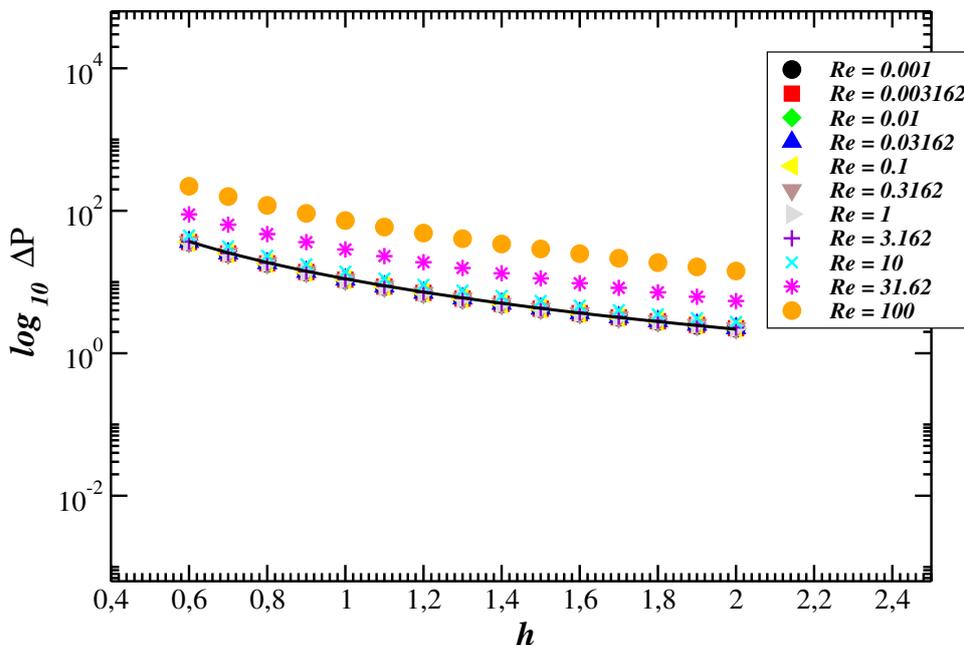


Figura 30: Colapso de curvas evidenciando propriedade comum dos vários números de Reynolds para o caso laminar. Linhas escura representando ajuste não-linear  $y = 11.09x^{-2.35}$ . Simulações realizadas no Fluent.

Elaborado pelo autor

Podemos ver que para Reynolds mais altos as curvas divergem um pouco da curva de colapso, o que indica que para a dada geometria, esses são escoamentos em estado de transição ou no limite da laminaridade. O mesmo pode ser visto nos resultados obtidos no OpenFoam.

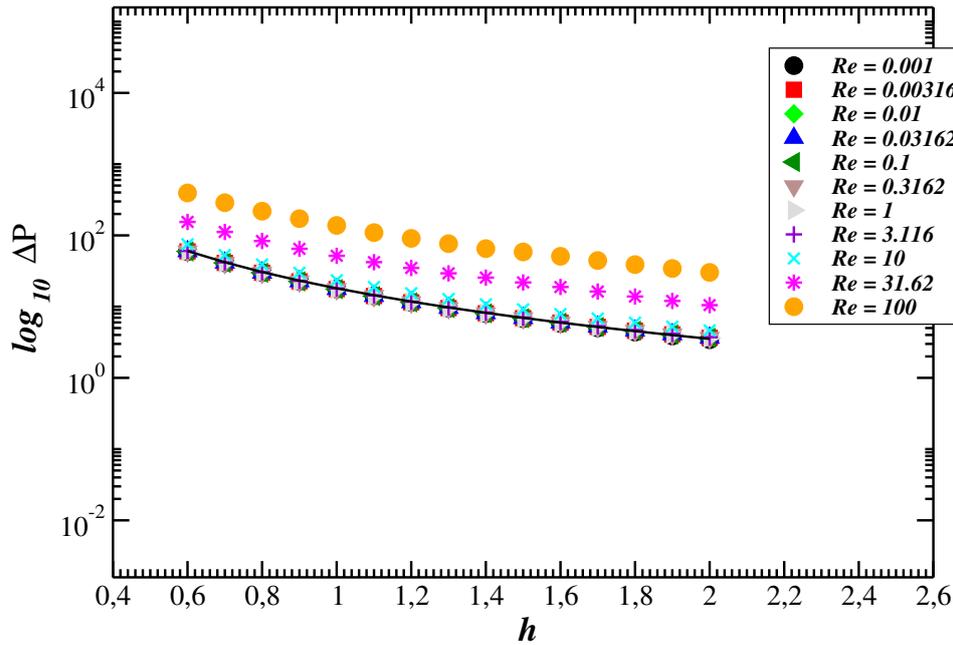


Figura 31: Colapso de curvas sobre a curva de aproximação não-linear  $y = 18.08x^{-2.35}$  para simulações feitas no openFoam.

Elaborado pelo autor

Pelas figuras podemos ver que o fato de as curvas associadas a altos números de Reynolds serem tão divergentes da curva de colapso é uma consequência direta do alto grau de divergência relativo a seus expoentes de decaimento com relação aos das outras curvas.

O fato de obtermos aqui um colapso da maioria das curvas realizando a mesma operação usada no caso sem obstáculo sugere que o gradiente de pressão para o caso com obstáculo possui a mesma dependência na velocidade de entrada e conserva o caráter hiperbólico da dependência em  $h$  a medida que estreitamos o canal. Isto é, a função gradiente de pressão será sempre da forma  $y = v_{in}(x^{-A_1})$ , em que  $A_1$  depende do número de Reynolds. O fato de não obtermos um colapso para alto Reynolds significa que, nesses casos, não temos a mesma dependência do gradiente de pressão na velocidade de entrada.

## 4 CONCLUSÃO

Em suma, referente as ferramentas de simulação utilizadas, é aparente que ambos os softwares são similares quando se trata de extrair o comportamento físico dos escoamentos em consideração. É evidente que existem certas diferenças estruturais já anteriormente discutidas como a normalização da pressão e da viscosidade pela densidade, em que consideramos os valores cinemáticos dos referidos parâmetros. No entanto, é natural que tais particularidades não venham a alterar as conclusões físicas dos resultados. Além disso, devemos levar em consideração que ambos os programas fazem uso dos mesmos métodos de discretização das equações diferenciais, o que sugere que os resultados não devem diferenciar tanto um do outro. Isto ficou evidente diante das simulações do canal retangular com obstáculo, onde obtivemos uma leve flutuações do expoentes de aproximação não-linear.

Feito isso, diante das simulações aqui realizadas, entendi que salvo as diferenças relacionadas ao polimento do produto final, ambos os programas são capazes de realizar as mesmas operações numéricas com um grau de eficiência comparável. Os resultados obtidos estão dentro da margem aceitável de divergência e não prejudicam de maneira alguma a interpretação física das simulações.

A respeito das conclusões físicas dos resultados, foi interessante observar que o comportamento laminar e turbulento dos escoamentos estão associados não só a geometria e velocidade de entrada, mas também da escala relativa às dimensões da geometria. Ou seja, podemos manter uma alta velocidade de entrada e apenas estreitando o canal mudar o caráter do escoamento. Tal conclusão ficou evidente quando analisamos os resultados mostrados na Fig.16 com os perfis de velocidade para alto Reynolds em diferentes níveis de estreitamento e observamos o perfil parabólico se desconstruir a medida que, mantendo a velocidade, aumentamos a largura da entrada.

Além disso pudemos ver que o número de Reynolds representa uma propriedade de alto significado físico, quando observamos que os gradientes de pressão referentes a um mesmo número de Reynolds seguem o mesmo comportamento matemático.

Por fim, podemos observar o fato curioso de que o caráter hiperbólico da dependência do gradiente de pressão na abertura  $h$  do canal não é perturbado diante do aparecimento de um obstáculo. É claro que a dependência em  $h$ , naturalmente, deve mudar a partir do expoente. No entanto, a essência hiperbólica da dependência não muda.

## REFERÊNCIAS

- [1] Meshing.2012.Disponível em: <<https://www.cfd-online.com/Wiki/Meshing>>. Acesso em: 27 Jun. 2019.
- [2] Finit Element vs Finit Volume. 2015. Disponível em:<<https://knowledge.autodesk.com/support/cfd/learn/explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2014/ENU/SimCFD/files/GUID-12A9AED8-2047-4D3A-BC80-82BE9CF47517-htm.html>>. Acesso em: 27 Jun. 2019
- [3] GRANGER, Robert A. Fluid Mechanics. Dover, 1995.
- [4] WHITE, Frank M. **Fluid Mechanics, Eight Edition**. New York: McGraw-Hill Education, 2016.
- [5] BOAS, Mary L. **Mathematical Methods in the Physical Sciences**. Wiley, 2006.
- [6] TAYLOR, John. **Classical Mechanics**. Sausalito, Calif: University Science Books, 2004.
- [7] OpenFoam. 2019. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/OpenFOAM>>. Acesso em: 25 Jun. 2019.
- [8] ANSYS Fluent. 2019. Disponível em: <<https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent>>. Acesso em: 24 Jun. 2019