UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

LEONARDO SÁTIRO DA COSTA ARAUJO

SIMETRIAS EM TEORIAS DE CAMPOS RELATIVÍSTICAS

FORTALEZA

2018

LEONARDO SÁTIRO DA COSTA ARAUJO

SIMETRIAS EM TEORIAS DE CAMPOS RELATIVÍSTICAS

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA
2018

LEONARDO SÁTIRO DA COSTA ARAUJO

SIMETRIAS EM TEORIAS DE CAMPOS RELATIVÍSTICAS

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 21/06/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Me. Francisco Emmanoel Andrade de Souza
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A69s Araujo, Leonardo Sátiro da Costa.

Simetrias em Teorias de Campos Relativísticas / Leonardo Sátiro da Costa Araujo. – Fortaleza, 2018.

48.:il.

Monografia (bacharelado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2018.

.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Transformações de Lorentz. 2. Formulação Lagrangiana. 3. Teorema de Noether. 4. Campo Eletromagnético. I. Título.

CDD:530

Aos meus pais, Ambrósio e Tânia. Gente simples, mas que muito investiram na formação de seus filhos. E aos meus irmãos, Carolina e Henrique, pelo apoio durante toda a vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, aos meus pais e irmãos, por terem me apoiado e incentivado durante todos esses anos.

Agradeço, também, a todos os amigos que fiz durante os quatro anos de graduação e que fizeram dessa jornada algo mais alegre e prazeroso. Em especial, agradeço a Matheus Nilton e Pablo Motta, pelas conversas a respeito da física teórica; a Pedro Bruno Bushi, pela chave da assessoria; a Vitor Júlio, pelos trabalhos intensos no CS; a Alyson Freitas (sem nenhum motivo especial); a Sérgio Tanaka, pelas caronas das 21:30; a Higor Monteiro, pela ajuda no latex; a Israel Limeira, pela quantidade de dinheiro emprestado; e aos meus amigos de fora do curso, Felipe Santana e Luiz Ricardo, pelos tantos rodízios de pizza quinzenais. Tantos outros foram presença diária no meu tempo de graduação: Johnnie Souza, Ana Carolina Almeida, Diego Santana, Diego Menezes, Higo Barros, bichos da turma de 2015.1, Calil Souza, pessoal do antigo CREU e hoje LARICCA, pessoal da biblioteca... todos vocês foram importantes.

Por fim, agradeço aos ótimos professores que lecionam ao curso de física da UFC. Em especial, a José Afonso de Oliveira, Saulo Reis, Alexandre Paschoal, Roberto Maluf, José Ramos e ao meu orientador, Geová Maciel.

RESUMO

Este trabalho introduz a formulação lagrangiana para campos relativísticos e estuda algumas das consequências da invariância desses campos sob determinados tipos de transformações, a saber, translações espaciais e *boosts* de Lorentz. Para isso, um estudo abreviado da relatividade especial e de como se transformam vetores e tensores no espaço-tempo de Minkowski é executado. Em particular, estuda-se o teorema de Noether, que surge como consequência do princípio da ação estacionária e que garante que para toda simetria contínua no espaço-tempo existe uma lei de conservação. É dado destaque ao estudo do campo eletromagnético clássico, cujas simetrias resultam na conservação da energia e momento associados ao campo, bem como do momento angular orbital e de spin. Essas grandezas surgem das definições de tensor energia-momento e de momento angular associados ao campo eletromagnético.

Palavras-chave: Transformações de Lorentz. Formulação Lagrangiana. Teorema de Noether. Campo Eletromagnético.

ABSTRACT

This work introduces the Lagrangian formulation for relativistic fields and studies some of the consequences of the invariance of these fields under certain types of transformations, namely, spatial translations and Lorentz's boosts. For this, an abbreviated study of special relativity and how vectors and tensors transform in Minkowski's space-time is performed. In particular, we study the Noether theorem, which arises as a consequence of the principle of stationary action and which guarantees that for all continuous symmetry in space-time there is a law of conservation. Emphasis is given to the study of the classical electromagnetic field, whose symmetries result in the conservation of the energy and momentum associated with the field, as well as the orbital and spin angular momentum. These quantities are derived from the definitions of energy-momentum tensor and angular momentum associated with the electromagnetic field.

Keywords: Lorentz Transformations. Lagrangian Formulation. Noether Theorem. Electromagnetic Field.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mu, \nu, ...$	Índices no espaço-tempo de um vetor ou tensor.
$i, j, ...$	Índices espaciais de um vetor ou tensor.
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço-tempo de Minkowski.
P^{μ}	Quadrivetor contravariante.
P_{μ}	Quadrivetor covariante.
$\mathcal{L}$	Densidade lagrangiana.
J_{μ}	Corrente de Noether
Q	Carga de Noether

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de *campos relativísticos* através do uso do formalismo lagrangiano. Em especial, usaremos o teorema de Noether para obter as quantidades conservadas associadas à transformações contínuas de simetria, ou seja, transformações que deixam os campos invariantes. Embora apresentadas no contexto de uma teoria clássica de campos, essas ferramentas são bastante gerais e aparecem também no estudo de campos quânticos, de modo que o presente trabalho é parte de uma introdução natural à teoria quântica de campos.

Um estudo sobre a relatividade especial, em particular, sobre as transformações entre referenciais inerciais em configuração padrão, é feito no segundo capítulo. As transformações de Lorentz são definidas a partir dos postulados de Einstein para a relatividade especial. Não é de interesse aqui a análise detalhada das consequências físicas dessas transformações, mas somente o modo como as grandezas físicas devem ser definidas de modo a estarem de acordo com os postulados de Einstein e as consequentes transformações de Lorentz. Definimos, então, os objetos matemáticos que descrevem as teorias do espaço-tempo: escalares, quadrivetores e tensores de Lorentz, objetos que se transformam de maneira semelhante às coordenadas no espaço-tempo. É definida a métrica do espaço plano, que aparece constantemente nas equações relativísticas.

O terceiro capítulo introduz um modo de se generalizar uma teoria lagrangiana de um sistema mecânico para um sistema contínuo. A lagrangiana que descreve um campo relativístico deve obedecer a certas restrições. A partir da densidade lagrangiana, construímos a ação associada ao campo e então o *princípio de Hamilton* é usado para se obter as equações de Euler-Lagrange, as equações do movimento. A partir do princípio de Hamilton, também, obtivemos um dos resultados mais importantes da física, o *teorema de Noether*. Esse teorema garante que a qualquer transformação de simetria contínua está associada uma lei da conservação. Em particular, a conservação da energia e momento linear, e do momento angular, associados aos campos, é obtida a partir desse teorema, quando se analiza, respectivamente, a invariância sob translações no espaço-tempo e sob transformações de Lorentz.

Por fim, analizamos as quantidades conservadas associadas às simetrias de campos eletromagnéticos no espaço-tempo. As equações de Maxwell são invariantes sob transformações de Lorentz. Entretanto, isso não fica evidente na forma vetorial como elas são escritas comumente, de modo que é importante representá-las em termos de tensores. Deduzimos a forma mais geral que uma lagrangiana de um campo vetorial deve possuir, de modo a se obter uma motivação para a definição da lagrangiana de um campo de Maxwell. Usamos, então, o teorema de Noether para se obter o tensor energia-momento do campo eletromagnético, de onde derivam as quantidades conservadas associadas às transformações: energia, momento linear, e os momentos angulares orbitais e de spin do campo eletromagnético.

2 TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

A teoria da relatividade especial tem como alicerce dois postulados enunciados por Einstein em 1905, e que podem ser assim escritos [1]:

- **Postulado 1:** Todo sistema físico é invariante pela escolha de referencial inercial.
- **Postulado 2:** A velocidade da luz é uma constante independente do movimento relativo entre fonte e observador.

Por sistema inercial de referência, entende-se aquele no qual é válida a lei da inércia. Ou seja, uma partícula livre de qualquer interação se moverá em linha reta [2].

O primeiro postulado não é exclusivo da relatividade de Einstein. Um princípio relativístico equivalente também pode ser enunciado na mecânica newtoniana [3]. A importância fundamental deste postulado reside em garantir a equivalência entre todos os referenciais inerciais, levando ao abandono da ideia do referencial absoluto, no caso, o Éter. Em particular, o primeiro postulado garante a validade das equações de Maxwell em todos os sistemas de referência, equações essas que não são covariantes sob transformações de Galileu [4].

É do segundo postulado que derivam as consequências que revolucionaram a física no século passado. Sobretudo, o segundo postulado equivale à afirmação de que há um limite máximo de velocidade na propagação das interações da natureza [3]. Isso implica no fim da ideia de ação à distância da mecânica newtoniana, bem como no fim da noção de simultaneidade absoluta e da existência de um tempo universal, medido igualmente por todos os observadores em todos os referenciais. As transformações de Galileu e, consequentemente, toda a mecânica newtoniana, que dependiam dessas noções para a sua sustentação lógica, deveriam ser modificadas [6].

2.1 Dedução das transformações de Lorentz

Considere dois sistemas de referência em configuração padrão: S, fixo em relação a uma observador inercial qualquer, e S', que se move em relação a S com velocidade constante de módulo v, apontando na direção do eixo x de S, de modo que as origens, O e O', coincidam no tempo $t = t' = 0$. Devemos procurar um novo grupo de transformações que esteja de acordo com os postulados da relatividade de Einstein. As transformações procuradas são as *transformações de Lorentz*, que podem ser expressas da forma [6]

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde o fator γ é definido como:

$$\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{2.2}$$

Essas transformações podem ser deduzidas a partir da constância da velocidade da luz nos referenciais S e S' [1]. Seja uma frente de onda luminosa com fonte localizada na origem O de S e que se desloque com velocidade c. A equação que descreve essa frente de onda é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{2.3}$$

No referencial S', vale a mesma relação:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{2.4}$$

Argumentos de simetria podem ser usados para demonstrar que, no caso de os referenciais S e S' estarem em configuração padrão, as coordenadas y e z não serão alteradas [5]. Ou seja:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.5}$$

Com isso, as equações (2.3) e (2.4) estão relacionadas por:

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 \tag{2.6}$$

Essa equação servirá de base para a dedução das transformações de Lorentz. De fundamental importância, também, são as noções de homogeneidade e isotropia do espaço-tempo, que implicam que as transformações devam ser lineares [5] [6].

Admite-se, então, que x', bem como ct', dependam de forma linear de x e ct (a constante c é introduzida para garantir a homogeneidade dimensional das equações):

$$\begin{aligned} x' &= Ax + B(ct) \\ ct' &= Cx + D(ct) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Usando a equação (2.6), substitituindo os valores de x' e ct', encontra-se a relação entre os coeficientes A,B,C e D:

$$\begin{aligned} c^2t^2 - x^2 &= (Cx + cDt)^2 - (Ax + cBt)^2 \\ &= (C^2 - A^2)x^2 + (D^2 - B^2)c^2t^2 + 2c(CD - AB)xt \end{aligned} \tag{2.8}$$

O que resulta nas seguintes relações:

$$\begin{aligned} C^2 - A^2 &= -1 \\ D^2 - B^2 &= 1 \\ CD &= AB \end{aligned} \tag{2.9}$$

Essas relações podem ser representadas em termos das funções hiperbólicas,

$$\begin{aligned} A &= D = \cosh\phi \\ B &= C = -\operatorname{senh}\phi, \end{aligned} \tag{2.10}$$

em que ϕ é conhecido como rapidez. Seu significado físico será visto em sequência. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} x' &= x\cosh\phi - ct\operatorname{senh}\phi \\ ct' &= x\operatorname{senh}\phi - ct\cosh\phi \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ou:

$$\begin{aligned} x' &= \cosh\phi(x - ct\tanh\phi) \\ ct' &= \cosh\phi(ct - x\tanh\phi) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Na origem do sistema O', temos:

$$x - (ct)\tanh\phi = 0 \Rightarrow \tanh\phi = x/ct = v/c \tag{2.13}$$

Definiremos, agora

$$\begin{aligned} \cosh\phi &= \gamma \\ \tanh\phi &= \beta = \frac{v}{c}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

de modo a se obter:

$$\tanh\phi = \frac{\operatorname{senh}\phi}{\cosh\phi} \Rightarrow \operatorname{senh}\phi = \beta\gamma$$

Temos, também:

$$\cosh^2\phi - \operatorname{senh}^2\phi = 1 \Rightarrow \operatorname{senh}^2\phi = \gamma^2 - 1 \tag{2.15}$$

Comparando as expressões anteriores, obtemos a relação entre os coeficientes γ e β:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \tag{2.16}$$

Lembrando das definições adotadas, $\tanh\phi = \beta$ e $\cosh\phi = \gamma$, e inserindo os resultados na equação (2.12), chega-se, finalmente, às transformações de Lorentz em sua forma mais comum:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Quando representadas em termos de diferenciais, as equações (2.17) terão a mesma forma [6], ou seja:

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - \beta cdt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx) \end{aligned} \tag{2.18}$$

A transformação inversa $x = x(x', t')$ é obtida trocando-se o sinal de β nas equações (2.17) [6]. Isso equivale, obviamente, a se trocar o sinal do ângulo ϕ.

Aqui, vemos que as coordenadas espaciais e a temporal aparecem mixadas no conjunto de equações. Não tratamos mais o tempo e o espaço como grandezas físicas desassociadas, como era na mecânica de Newton, mas como uma única entidade interligada, nomeada *espaço-tempo* [1] [6].

Obtivemos as equações que dizem como as coordenadas no espaço e no tempo devem mudar entre dois referenciais em configuração padrão. As transformações gerais são fáceis de se obter, bastando-se decompor o movimento em duas direções ortogonais, de modo que em uma delas as coordenadas se transformem como as coordenadas y e z, e na outra direção as coordenadas se transformem como na configuração padrão. A demonstração completa pode ser encontrada, por exemplo, na referência [7].

As implicações das transformações de Lorentz são bastante conhecidas: elas garantem que corpos são observados achatados quando vistos em movimento (contração espacial), que o tempo passa mais devagar quando viajamos a grandes velocidades (dilatação temporal) e que a massa, e consequentemente a energia, cresce para viajantes "relativísticos". Elas são exaustivamente discutidas, por exemplo, nas referências [5] e [6].

As transformações de Lorentz podem ser representadas em forma matricial como se segue:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Ou, em função dos ângulos hiperbólicos:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Em notação indicial:

$$X^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu} \tag{2.21}$$

Na última relação, usamos a notação de soma de Einstein, em que dois índices repetidos em uma equação implicam em uma soma sobre os valores assumidos por esses índices, por exemplo, $\nu = (0, 1, 2, 3)$. A matriz Λ é chamada de matriz de transformação de coordenadas, na relatividade especial. Vemos que essas transformações se reduzem às transformações de Galileu no limite de baixas velocidades, quando $v << c$ [1]. Isso implica que a mecânica newtoniana ainda é uma excelente aproximação quando estudamos os fenômenos cotidianos.

[1] Como enunciou Minkowski, "Daqui em diante, espaço por si só e tempo por si só estão fadados a desaparecer em meras sombras, e somente um tipo de união dos dois preservará uma realidade independente".

Podemos comparar a matriz Λ com a matriz de rotação em coordenadas cartesianas [8]:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Isso dá a sugestão de que, do ponto de vista matemático, as transformações de Lorentz podem ser vistas como uma rotação hiperbólica de um ângulo ϕ em torno da origem dos sistemas de coordenadas no espaço-tempo, às quais podem ser imbutidas, também, as rotações espaciais [2]. Essas rotações geram um grupo, o chamado *grupo de Lorentz* . Quando incluídas translações na origem do sistema de coordenadas, temos o então chamado *grupo de Poincaré*. Note que a matriz Λ que representa essa transformação é ortogonal e que $det\Lambda = 1$, de modo que o grupo é do tipo $SO(1,3)$. Um estudo detalhado do grupo de Lorentz pode ser encontrado nas referências [2], [3] e, em um nível mais avançado, [9].

2.2 Vetores e tensores de Lorentz

Tensores são de fundamental importância na física para escrever expressões matemáticas em forma *covariante*, ou seja, de modo que elas tenham a mesma forma quando descritas em qualquer referencial [3]. Isso não fica evidente quando, por exemplo, escrevemos uma expressão em termos de vetores usuais. Veremos como isso se aplica ao caso das equações de Maxwell, para as quais será feita uma formulação covariante no capítulo 4.

O principal objetivo dessa seção é fazer uma descrição rápida do que são quadrivetores e tensores e algumas de suas propriedades, com o objetivo de introduzir a linguagem que será utilizada em capítulos posteriores. Portanto, não há pretensão aqui de se fazer uma análise rigorosa ou completa. Um estudo mais aprofundado de tensores pode ser encontrado, por exemplo, na referência [11].

2.2.1 A métrica do espaço-tempo

Eventos no espaço-tempo são rotulados por suas coordenadas em um dado referencial. A posição de um evento é marcada atribuindo-se a ele coordenadas espaciais e temporal, juntas em um único objeto $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x})$. A partir disso, definimos o intervalo infinitesimal entre dois eventos com coordenadas (t, x, y, z) e $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$

[2]Como é feito, por exemplo, na referência [1]

como[3] [10]:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.23}$$

Verifica-se facilmente, aplicando-se as transformações (2.18), que o intervalo entre dois eventos independe do referencial que os descreve. O espaço-tempo com intervalo invariante dado por (2.23) é chamado *espaço de Minkowski* [10].

A geometria de um espaço é descrita pela sua métrica. O espaço de Minkowski é um espaço conformalmente plano com métrica indefinida dada por $\eta^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ [3], de modo que a expressão na equação (2.23) pode ser representada de maneira abreviada:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.24}$$

A invariância do intervalo sob tranformações de Lorentz impõe uma condição de transformação às matrizes dadas pela equação (2.21). Em um sistema de referência S', o intervalo deve ser escrito como:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = ds^2 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Logo, aplicando as equações de tranformação para os dx'_μ:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha dx^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta dx^\beta \\ \eta_{\alpha\beta} &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \end{aligned} \tag{2.26}$$

Isso será usado mais à frente, quando trataremos de transformações infinitesimais.

2.2.2 Escalares e Quadrivetores

Um *escalar de Lorentz* é definido como um objeto invariante sob transformações de Lorentz, de modo que seu valor é independente do referencial adotado [10]. O intervalo é o exemplo mais óbvio de um escalar.

Um *quadrivetor contravariante* é um conjunto de quantidades V^μ que, sob tais

[3]Essa definição não é universal. Muitos autores usam a definição de intervalo com sinais trocados, de modo que algumas equações aparecem diferentes em determinados livros e artigos. A mudança de sinais não tem, entretanto, significado físico, tratando-se apenas de convenção a escolha de qual definição usar. [10]

transformações, se transforma como [10]

$$V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu}, \tag{2.27}$$

ou seja, se transforma da mesma maneira que o vetor posição em (2.21).

Podemos generalizar o produto escalar entre dois vetores para quadrivetores. Sendo um produto escalar, ele é um invariante de Lorentz, dado por [10]:

$$V_{\mu} W^{\mu} = V^0 W^0 - V^1 W^1 - V^2 W^2 - V^3 W^3 = \eta_{\mu\nu} V^{\nu} W^{\mu}. \tag{2.28}$$

O último termo dessa expressão deixa a sugestão de que a métrica pode ser usada para se levantar e abaixar índices. De fato, podemos fazer isso livremente, de modo que as expressões podem ser escritas nas formas [10]:

$$\begin{aligned} V_{\mu} &= \eta_{\mu\nu} V^{\nu} \qquad\qquad T^{\mu}{}_{\alpha} = T^{\mu\alpha} \\ T_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}, \qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Baseado nisso, podemos definir a inversa da métrica de Minkowski, que resulta ser igual a ela mesma [2], com índices levantados, e obedecendo a expressão

$$\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}, \tag{2.30}$$

sendo $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ o delta de Kronecker em quatro dimensões.

A partir disso, definimos um quadrivetor *covariante* como um conjunto de quatro quantidades que se transformam como

$$V'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} V_{\nu}. \tag{2.31}$$

Em geral, um quadrivetor possui uma componente que se transforma como o tempo, associada a outras componentes, que se transformam como as componentes espaciais do vetor posição no espaço-tempo [6]. Os quadrivetores surgem de maneira natural no estudo da mecânica relativística. Alguns que serão importantes para a continuação desse trabalho são [4]:

- Quadrivetor energia-momento

$$P^{\mu} = (E, \mathbf{p}), \tag{2.32}$$

onde E é a energia e **p** é o 3-momento.

[4] Uma discussão detalhada sobre o que motivou essas quantidades a serem definidas desta maneira pode ser encontrada na referência [6].

- Quadrivetor densidade de corrente eletromagnética

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{j}), \tag{2.33}$$

onde ρ é a densidade de cargas e **j** é a densidade de corrente tridimensional.

- Quadrivetor potencial eletromagnético

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \tag{2.34}$$

sendo ϕ o potencial coulombiano e **A** o potencial-vetor eletromagnético.

2.2.3 Tensores

De modo similar ao que foi feito na subseção anterior, podemos definir, simplificadamente, um tensor contravariante de segunda ordem como um objeto que se transforma como o produto de dois quadrivetores [10]. Dessa forma, a lei de transformação de tal tensor é dada por:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta} \tag{2.35}$$

Temos, também, tensores covariantes e mistos, cujas respectivas leis de transformação são dadas por:

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu} &= \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta T_{\alpha\beta} \\ T'^\mu{}_\nu &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta T^\alpha{}_\beta \end{aligned} \tag{2.36}$$

A genelarização para tensores de ordem superior, como um objeto que se transforma como um produto de quadrivetores, é imediata.

Um tensor é dito simétrico em relação aos índices μ e ν se $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Da mesma forma, um tensor é dito antissimétrico se $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$. Todo tensor pode ser decomposto em uma parte simétrica, representada por $T_{(\mu\nu)}$, e uma antissimétrica, $T_{[\mu\nu]}$, de modo que [6]:

$$\begin{aligned} T_{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2}\big(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}\big) \\ T_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2}\big(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\big) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Um tensor de ordem superior pode ser simétrico ou antissimétrico em relação a dois índices particulares, sendo a sua parte simétrica e antissimétrica representada por $T_{(\mu\nu)\lambda}$ e $T_{[\mu\nu]\lambda}$, respectivamente. Para um espaço quadridimensional, há somente uma quantidade completamente antissimétrica, chamada de *pseudo-tensor de Levi-Civitta*, definida como [22]:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ é uma permutação para de } 0123 \\ -1, & \text{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ é uma permutação ímpar de } 0123 \\ 0, & \text{de outro modo} \end{cases} \tag{2.38}$$

O produto de um tensor de ordem (m, n) por um tensor de ordem (p, q) gera um tensor de ordem $(m + p, n + q)$ [6]. Por exemplo:

$$T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} U^{\mu}{}_{\nu} = V^{\alpha\beta\mu}{}_{\gamma\nu} \tag{2.39}$$

Por fim, definimos a operação de *contração* como uma soma entre um índice covariante e um índice contravariante de um tensor misto ou de um produto de tensores. Por exemplo, $T^{\mu\nu}{}_{\nu}$, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\alpha\sigma\tau}$, etc. Isso gera um tensor de ordem $(n - 2)$ [10].

2.3 Transformações infinitesimais

Veremos, mais adiante, que mudanças no espaço-tempo que deixam as equações de campo invariantes acarretam em alguma quantidade conservada no sistema. Por agora, será tratado somente o modo como essas mudanças podem ser escritas:

- Translações

Uma translação nas coordenadas espacial e temporal é representada por

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}, \tag{2.40}$$

onde as quantidades ϵ^{μ} possuem valores muito pequenos.

- Transformações de Lorentz

Uma transformação de Lorentz infinitesimal pode ser escrita da forma

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}, \tag{2.41}$$

onde a matriz $\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ possui entradas infinitesimais. De acordo com isso, a matriz de transformação Λ deve satisfazer a seguinte condição, facilmente verificável [1]:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.42}$$

Aplicando essa condição à equação (2.26), encontramos:

$$\eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \epsilon^{\mu}{}_{\alpha})(\delta^{\nu}{}_{\beta} + \epsilon^{\nu}{}_{\beta}) = \eta_{\alpha\beta} \tag{2.43}$$

Ou seja:

$$\eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} + \delta^{\mu}{}_{\alpha}\epsilon^{\nu}{}_{\beta} + \epsilon^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} + \epsilon^{\mu}{}_{\alpha}\epsilon^{\nu}{}_{\beta}) = \eta_{\alpha\beta} \tag{2.44}$$

Desprezando o produto no último termo antes da igualdade na última equação, mudando os índices com os deltas de Kronecker e usando a métrica para abaixar os índices dos $\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$, chegamos à condição:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha} \tag{2.45}$$

Assim, as quantidades $\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ que representam uma transformação de Lorentz infinitesimal devem ser antissimétricas. Essa propriedade será usada no próximo capítulo, quando obeteremos as quantidades que se conservam quando há uma invariância sob esse tipo de transformação.

3 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA PARA CAMPOS E SIMETRIAS

O formalismo lagrangiano simplifica enormemente o trabalho de se obter as equações diferenciais que descrevem o movimento. Além disso, ele evidencia com muita clareza as quantidades que são conservadas em um sistema ao serem impostas condições de simetria [2]. Esta última característica é o que torna o formalismo lagrangiano apropriado para descrever teorias de campos.

Trataremos aqui de *campos relativísticos*, de modo que há restrições que devem ser satisfeitas pelas equações do movimento. Antes de prosseguir, faremos uma revisão rápida do formalismo lagrangiano para a mecânica clássica.

3.1 Equações de Euler-Lagrange para sistemas mecânicos

Na mecânica clássica, podemos descrever o estado de um sistema através de sua ação, um funcional [1] definido por: [14]:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_r(t), \dot{q}_r(t), t) \tag{3.1}$$

Aqui, a função $L(q_r(t), \dot{q}_r(t), t)$ é a lagrangiana do sistema, que depende do conjunto de coordenadas generalizadas q_r e de suas derivadas $\dot{q}_r$ (velocidades generalizadas), bem como possivelmente do tempo. Na mecânica clássica, essa quantidade é identicamente definida pela diferença entre a energia cinética e potencial do sistema, escritas em termos das coordenadas e velocidades generalizadas [14].

As equações que ditam a evolução do sistema no espaço de configurações são obtidas por meio de um poderoso princípio enunciado por Hamilton, ainda quando estudante de graduação [3]:

Princípio de Hamilton: *Dentre todas as trajetórias ao longo dos quais um sistema dinâmico poderia evoluir de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer vínculos), o caminho real a ser seguido é aquele no qual a ação é estacionária quando tomada ao longo desse caminho* [3].

O princípio de Hamilton é aplicável não somente para sistemas mecânicos, como também para campos, bastando, para isso, que seja feita uma adaptação na definição de coordenandas e velocidades generalizadas [3].

As equações do movimento são obtidas através das condições impostas pelo princípio

[1] Um funcional é, de maneira simplificada, uma função cujos argumentos são outras funções. Os resultados que se seguem derivam da teoria de cálculo funcional, um tema abordado em brevidade, por exemplo, na referência [3].

de Hamilton, quando executada uma variação funcional na ação. Introduzindo variações infinitesimais nas coordenadas e velocidades:

$$\begin{aligned} q_r(t) &\rightarrow q_r(t) + \delta q_r(t) \\ \dot{q}_r(t) &\rightarrow \dot{q}_r(t) + \delta \dot{q}_r(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

A ação variará da seguinte forma:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} dt[\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r] \tag{3.3}$$

Assumindo que a variação $\delta \dot{q}_r$ pode comutar com a derivada, temos:

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\frac{d\delta q_r}{dt}\right] \\ \delta A &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right]\delta q_r + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta q_r\Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Foi realizada uma integração por partes no segundo termo da primeira linha. Assumindo que configurações dos pontos extremos se anulam, isto é

$$\delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0, \tag{3.5}$$

obtemos que

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right]\delta q_r. \tag{3.6}$$

Como estamos lidando com variações δq_r arbitrárias, a condição imposta pelo princípio de Hamilton é que o integrando na equação (3.6) se anule [14]. Obtemos, então, as equações de Euler-Lagrange em sua versão mais conhecida:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_r} \tag{3.7}$$

A tarefa, então, é encontrar um modo de se generalizar o formalismo de Lagrange para um sistema com infinitos graus de liberdade. Isso é feito usando-se o princípio de Hamilton para esses sistemas, executando-se um procedimento parecido com o descrito nessa seção e obtendo-se equações do movimento similares às equações (3.7), também chamadas de equações de Euler-Lagrange.

3.2 Formalismo lagrangiano para campos e teorema de Noether

Buscaremos, agora, um modo de generalizar as técnicas vistas na seção anterior para o caso de campos. Um campo pode ser pensado como uma função contínua do espaço tempo, isto é, $\phi_r(\mathbf{x},t) = \left[\phi_1(x), \phi_2(x), ...\right]$, que possui infinitos graus de liberdade (omitiremos, entretanto, o índice r em $\phi_r(\mathbf{x},t)$, de modo a facilitar a notação. Voltaremos a utilizar os índices quando for necessário). Substituímos, então, o conjunto de variáveis discretas $q_r(t)$ pelas variáveis contínuas $\phi(\mathbf{x})$, definidas em cada ponto do espaço-tempo e que constituem as variáveis dinâmicas da teoria [15].

Portanto, as coordenadas x^μ do sistema não podem mais ser tratadas como coordenadas generalizadas, condição essa ocupada agora pelos próprios campos ϕ. Isso é uma consequência da transição de um meio discreto para um meio contínuo, procedimento que é executado em detalhes na referência [24].

3.2.1 Lagrangianas relativísticas

A função lagrangiana deve satisfazer algumas restrições, de modo a descrever uma *teoria de campos relativística*. Em primeiro lugar, as equações do movimento derivadas dessa lagrangiana devem ser invariantes de Lorentz, algo que é garantido pela invariância da própria lagrangiana [2]. Em sistemas clássicos, a lagrangiana também deve ser *real*, algo que deriva do fato de que nenhuma teoria com energias complexas foi encontrada até agora [2].

A lagrangiana agora é um funcional do campo e de suas derivadas. Ou seja:

$$L(t) = L[\phi(t,\mathbf{x}), \nabla\phi(t,\mathbf{x}), \dot{\phi}(t,\mathbf{x})] \tag{3.8}$$

Podemos incorporar o gradiente e a derivada temporal juntos, usando a notação:

$$\partial_\mu\phi(t,\mathbf{x}) = \{\partial_0, \nabla\phi\}, \tag{3.9}$$

onde

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\} \tag{3.10}$$

é o operdador diferencial. Com isso, a lagrangiana pode agora ser escrita na forma $L = L(\phi, \partial_\mu\phi)$.

Em princípio, a lagrangiana poderia depender também de derivadas superiores de ϕ. Entretanto, é desejado que as equações do movimento sejam, no máximo, de segunda ordem, condição que é satisfeita pela com a dependêcia em relação a $\partial_\mu\phi$. Além disso, desejam-se que os campos sejam locais, significando que, para um ponto x^μ no espaço-tempo, a densidade lagrangiana dependa dos campos e de suas derivadas calculadas naquele ponto [15].

Por fim, a Lagrangiana deve ter a forma mais simples possível. Isso deriva do fato de que, dada uma equação do movimento, existe mais de uma forma da função lagrangiana que é capaz de descrever esse sistema [2].

Em teoria de campos usa-se, em vez da lagrangiana, a *densidade lagrangiana*, definida como a lagrangiana por unidade de volume, e representada por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ [15]. A ação é definida, em termos da densidade lagrangiana, como [15]:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \tag{3.11}$$

A tabela 1 sumariza as principais diferenças entre a formulação lagrangiana para campos e a formulação para a mecânica clássica. Ela foi adpatada da referência [16].

Tabela 1: Comparação dos princípios de ação em mecânica clássica e em teoria de campos

Propriedade	Mecânica	Teoria de Campos
Variável independente	t	$(t, \mathbf{x})$
Variável dependente	$q(t)$	$\phi(t, \mathbf{x})$
Definição de ação	$S = \int dt L$	$S = \int d^4x \mathcal{L}$
Forma da lagrangiana	$L = L(q, \dot{q})$	$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
Domínio de integração	$t \in (t_1, t_2)$	$x^\mu \in \Omega$
Fronteira de integração	dois pontos, $t = t_1, t_2$	superfície tridimensional $\partial\Omega$
Momento canônico	$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$	$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$
Forma geral da variação	$\delta S = \int_{t1}^{t2} dt \mathcal{E}[q] \delta q + \int_{t1}^{t2} dt \partial_0 \big(p \delta q\big)$	$\delta S = \int_\Omega d^4x \mathcal{E}[\phi] \delta\phi + \int_\Omega d^4x \partial_\mu \big(\pi^\mu \delta\phi\big)$
Forma de $\mathcal{E}$	$\mathcal{E}[q] = \dfrac{\partial L}{\partial q} - \dot{p}$	$\mathcal{E}[q] = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \pi^\mu$
Condição de fronteira para se obter as equações do movimento	$\delta q = 0$ na fronteira	$\delta\phi = 0$ na fronteira
Equações do movimento	$\dfrac{\partial L}{\partial q} - \dot{p} = 0$	$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \pi^\mu = 0$
Forma de δS quando $\mathcal{E} = 0$ resulta no momento	$\delta S = (p\delta q)\big\rvert_{t_1}^{t_2}$	$\delta S = \int_{\partial\Omega} d^3\sigma_\mu (\pi^\mu \delta\phi)$
Energia	$E = p\dot{q} - L$	$T^\mu_\nu = -\big[\pi^\mu \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\big]$

3.2.2 Equações de Euler-Lagrange para campos

As equações do movimento são encontradas fazendo-se uma variação na ação (3.11).

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int d^4x \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \delta(\partial_\mu \phi) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \partial_\mu(\delta \phi) \right\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Utilizou-se novamente o fato de que a derivada comuta com a variação. Agora, fazendo uma integração por partes no segundo termo do integrando, obtemos:

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \right) \delta\phi \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \bigg|_\Omega \tag{3.13}$$

Admitindo contribuições nulas para os termos de fronteira, a variação resultante é dada por:

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \right) \right\} \delta\phi \tag{3.14}$$

O princípio de Hamilton garante que as equações do movimento são obtidas quando a ação é estacionária sobre a trajetória real [3]. Em outras palavras, a variação da ação, dada pela equação (3.14), deve ser nula. Como as variações $\delta\phi$ são arbitrárias, temos que o termo entre colchetes na equação (3.14) deverá se anular. Obtemos, então, as equações de Euler-Lagrange para campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \right) \tag{3.15}$$

Desde que $\mathcal{L}$ não depende de derivadas de ordem superior, os campos que satisfazem essa equação são, no máximo, de segunda ordem [15].

3.2.3 Simetrias e leis de conservação

Uma simetria pode ser entendida como uma mudança no espaço-tempo que deixa as equações do movimento invariantes [15]. Uma simetria pode ser interna ou externa. Simetrias internas são mudanças no campo que não envolvem coordenadas no espaço-tempo, enquanto as externas dependem das mudanças nas coordenadas [15].

O elo entre as simetrias de um sistema e suas quantidades conservadas é descrito pelo *teorema de Noether*, enunciado pela primeira vez em um artigo de 1918 escrito pela matemática alemã Emmy Noether [23]:

Teorema de Noether: *Cada transformação de simetria contínua em um sistema conduz a uma lei de conservação* [15].

Para a prova desse teorema, consideramos uma variação infinitesimal nas coordenadas e nos campos, dada por:

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \tag{3.16}$$

$$\phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x), \tag{3.17}$$

com correspondente variação na densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x), \tag{3.18}$$

onde $\mathcal{L}(x') = \mathcal{L}\big(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')\big)$ é a densidade lagrangiana obtida com a mudança nas coordenadas e campos. Definindo:

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \tag{3.19}$$

como uma mudança somente no campo, mantendo fixas as coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\phi(x) &= \phi'(x) - \phi'(x') + \phi(x') - \phi(x) \\ &= \delta\phi(x) - \big(\phi'(x') - \phi'(x)\big) \\ &= \delta\phi(x) - \partial^\mu \phi'(x)\delta x_\mu \\ &= \delta\phi(x) - \partial^\mu \phi(x)\delta x_\mu \end{aligned} \tag{3.20}$$

Voltando agora as atenções para a ação, vemos que mundanças no espaço-tempo conduzem a uma variação dada por:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \\ &= \int_{\Omega'} d^4x' \delta\mathcal{L}(x) + \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(x) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \end{aligned} \tag{3.21}$$

É essencial agora encontrar como se transforma o elemento de volume em quatro dimensões, considerando aproximações de primeira ordem. Ele é dado pelo jacobiano

$$
\begin{aligned}
d^4x' &= \left|\frac{\partial(x'_\mu)}{\partial x_\nu}\right| \qquad (3.22)\\
&= \begin{vmatrix} 1+\dfrac{\partial\delta x_0}{\partial x_0} & \dfrac{\partial\delta x_0}{\partial x_1} & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\delta x_1}{\partial x_0} & 1+\dfrac{\partial\delta x_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1+\dfrac{\partial\delta x_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} d^4x \\
&= 1+\frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\mu},
\end{aligned}
$$

onde foi utilizada a aproximação de primeira ordem para as derivadas, oriunda da equação (3.16):

$$
\partial^\mu \delta x'_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu + \partial^\mu \delta x_\nu \qquad (3.23)
$$

Com isso, a equação (3.21) tomará forma:

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_\Omega d^4x\delta\mathcal{L}(x) + \int_\Omega d^4x\delta\mathcal{L}(x)\partial_\mu\delta x^\mu \qquad (3.24)\\
&= \int_\Omega d^4x\big(\bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \partial_\mu\mathcal{L}(x)\delta x^\mu\big) + \int_\Omega d^4\mathcal{L}(x)\partial_\mu\delta x^\mu \\
&= \int_\Omega \Big(\bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \partial\big(\mathcal{L}(x)\delta x^\mu\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\bar{\delta}\mathcal{L}(x)$ representa uma variação total na lagrangiana, que depende do campo e de suas derivadas. Essa variação é dada por:

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}\mathcal{L}\big(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)\big) &= \frac{\mathcal{L}(x)}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\bar{\delta}(\partial^\mu\phi) \qquad (3.25)\\
&= \left[\frac{\mathcal{L}(x)}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi(x) - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)\bar{\delta}\phi(x)\right] \\
&\quad + \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)\bar{\delta}\phi(x) + \frac{\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial^\mu\big(\bar{\delta}\phi(x)\big) \\
&= \left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi} - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)\right]\bar{\delta}\phi(x) + \partial^\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\bar{\delta}\phi(x)\right]
\end{aligned}
$$

Temos agora tudo o que é necessário. O princípio de Hamilton pode ser usado para garantir que o integrando na equação (3.24) se anule, desde que o intervalo de integração Ω é arbitrário [15]. Substituindo o resultado obtido em (3.25) na equação (3.24), vemos que o integrando se transforma em:

$$\left[\frac{\mathcal{L}(x)}{\partial\phi} - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)\right]\bar{\delta}\phi(x) + \partial^\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\bar{\delta}\phi(x) + \mathcal{L}\bar{\delta}x^\mu\right] = 0 \tag{3.26}$$

Admitindo que o campo ϕ obedece à equação do movimento, vemos que o termo à esquerda dessa expressão se anula. Resta, então, o segundo termo. Usando $\bar{\delta}\phi(x) = \delta\phi - \partial^\nu\phi\delta x_\nu$, a expressão se torna

$$\partial^\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}(\delta\phi - \partial^\nu\phi\delta x_\nu) + \mathcal{L}\bar{\delta}x^\mu\right] = 0. \tag{3.27}$$

Chamando

$$J_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\delta\phi(x) - \left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta x^\nu \tag{3.28}$$

de corrente associada à transformação, chegamos a uma equação da forma

$$\partial^\mu J_\mu = 0, \tag{3.29}$$

que, em notação usual, se torna, com $J_\mu \equiv (\rho, \mathbf{j})$:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0. \tag{3.30}$$

Essa é idêntica à expressão da equação da continuidade no eletromagnetismo. Sabemos que a equação da continuidade está associada a uma lei de conservação [17]. Integrando a equação (3.30):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega d^3x\partial^\mu J_\mu = \int_\Omega d^3x\partial^0 J_0 + \int_\Omega d^3x\partial^i J_i \qquad (3.31)\\ &= \frac{d}{dt}\int_\Omega d^3J_0(x) + \int_\Omega d^3(\nabla\cdot\mathbf{j}) \\ &= \frac{d}{dt}\int_\Omega d^3J_0(x) + \oint_{\partial\Omega} d\sigma\cdot\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Foi usado o teorema de Stokes no último passo, de modo a transformar a integral de volume em uma intregal de superfície. Admitindo, então, que os campos caem a zero na fronteira de integração, o segundo termo se anulará. A quantidade

$$Q \equiv \int_\Omega d^3xJ_0 \tag{3.32}$$

é definida como a carga conservada associada à transformação de simetria do sistema. Isso conclui a demonstração do teorema. Vemos o quanto esse resultado é poderoso. Nenhum tipo de simetria particular foi especificado em sua demonstração, o que garante a total generalidade do teorema de Noether. Portanto, associada à qualquer invariância em um sistema por um tipo particular de transformação contínua, haverá alguma quantidade conservada [3].

O teorema de Noether não é aplicável somente a sistemas contínuos. O teorema equivalente para sistema mecânicos não será abordado nesse trabalho. Simetrias em sistemas mecânicos são tratadas em detalhes na referência [3].

Vejamos, agora, como obter quantidades conservadas a partir de dois tipos particulares de transformações, já definidas na seção 2.3: translações no espaço-tempo e transformações de Lorentz.

3.3 Simetrias básicas do espaço-tempo

- Invariância sob translações

A invariância sob translações segue da homogeneidade do espaço-tempo [15]. Ela já foi definida na equação (2.40):

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} \tag{3.33}$$

Os campos não são alterados sob esse tipo de transformação, de modo que sua variação local se anula, $\delta\phi = 0$ [15]. Consequentemente, a corrente de Noether, denominada aqui de *tensor energia-momento*, tomará a forma [15]:

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\phi)}\partial_{\nu}\phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{3.34}$$

A equação da continuidade associada a essa simetria se torna

$$\partial^{\mu}\Theta_{\mu\nu} = 0 \tag{3.35}$$

e as quantidades conservadas são obtidas através da equação (3.32), fazendo-se $\nu = (0, 1, 2, 3)$:

$$P^{\nu} = \int d^3x J^{0\nu}(x), \tag{3.36}$$

onde a quantidade P^{ν} é identificada como o quadrivetor momento energia, definido pela equação (2.32). Para $\nu = 0$, a corrente em (3.34) se torna

$$J_{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{0}\phi)}\partial_{0}\phi - \mathcal{L}, \tag{3.37}$$

Obtemos, então, a conservação da energia associada ao campo. Da mesma forma, tomando os componentes espaciais da corrente (3.34), obtemos a conservação do 3-momento.

Expressamos essa lei de conservação em notação de quadrivetores:

$$P^\nu = (E, \mathbf{p}) = \text{constante} \tag{3.38}$$

- Invariância sob transformações de Lorentz

A isotropia do espaço-tempo implica na invariância da ação sob transformações de Lorentz [15]. Na mecânica clássica, a invariância de um sistema sob rotações resulta na conservação do momento angular [10]. Analogamente, espera-se que uma invariância sob transformações de Lorentz resulte na conservação de um momento angular associado aos campos. Vejamos como obter essa quantidade.

Considere uma transformação de Lorentz infinitesimal:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta\omega^{\mu\nu} x_\nu, \tag{3.39}$$

onde a quantidade $\delta\omega^{\mu\nu}$ é antissimétrica, em acordo com os resultados obtidos na seção 2.3. O campo transformado dependerá linearmente dos ângulos de rotação e dos valores de $\phi(x)$, de acordo com o *ansatz* (retomando aqui a representação dos índices r) [15]:

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(I^{\mu\nu})_{rs}\phi_s(x) \tag{3.40}$$

As quantidades $I^{\mu\nu}$ são os *geradores infinitesimais das transformações de Lorentz*, sendo $(I^{\mu\nu})_{rs}$ a representação matricial do gerador infinitesimal [15]. Os geradores podem ser escolhidos como sendo antissimétricos em relação aos índices (μ, ν), possuindo, portanto, seis quantidades independentes, com três delas representando rotações espaciais e as três remanescentes reprensentando *boosts*. Uma discussão detalhada a respeito do grupo de Lorentz e seus geradores é encontrada em [2] e [18].

Inserindo as transformações (3.39) e (3.40) na equação (3.28), obtemos a corrente conservada

$$J_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} \frac{1}{2}\delta\omega_{\nu\lambda}(I^{\nu\lambda})_{rs}\phi_s(x) - \Theta_{\mu\nu}\delta\omega^{\nu\lambda}x_\lambda, \tag{3.41}$$

sendo $\Theta_{\mu\nu}$ o tensor momento-energia identificado na equação (3.34). A antissimetria de $\delta\omega^{\mu\nu}$ permite escrever o último termo como:

$$\Theta_{\mu\nu}\delta\omega^{\nu\lambda}x_\lambda = \frac{1}{2}\delta\omega^{\nu\lambda}(\Theta_{\mu\nu}x_\lambda - \Theta_{\mu\lambda}x_\nu) \tag{3.42}$$

Com isso, a corrente conservada se torna:

$$J_\mu(x) = \frac{1}{2}\delta\omega^{\nu\lambda}M_{\mu\nu\lambda}(x) \tag{3.43}$$

Onde a quantidade $M_{\mu\nu\lambda}$ é dada por:

$$M_{\mu\nu\lambda}(x) = \Theta_{\mu\lambda}x_\nu - \Theta_{\mu\nu}x_\lambda + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_r)}(I_{\nu\lambda})_{rs}\phi_s(x) \tag{3.44}$$

A carga conservada é encontrada realizando uma integração com respeito às coordenadas espaciais, de acordo com a equação (3.32):

$$\begin{aligned} M_{\nu\lambda} &= \int_V d^3x M_{0\nu\lambda} \\ &= \int_V d^3x \left[\Theta_{0\lambda}x_\nu - \Theta_{0\nu}x_\lambda + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_r)}(I_{\nu\lambda})_{rs}\phi_s(x)\right] \end{aligned} \tag{3.45}$$

A quantidade $M_{\nu\lambda}$ é identificada como o *tensor momento angular* associado ao campo. Tomando as componentes espaciais de $M_{\nu\lambda}$, vemos que o tensor dado em (3.45) pode ser separado em duas partes: a primeira conterá o *momento angular orbital*, L_{nl}, associado ao campo, enquanto a segunda parte, S_{nl}, que contém os geradores $(I_{\nu\lambda})_{rs}$ e, portanto, dependerá das propriedades de transformações intrínsecas aos campos ϕ_r, será identificada como o *momento angular de spin*, sendo muito diferente para os campos escalares, spinoriais e vetoriais, dentre outros [15]. Isso fica mais evidente quando escrito na forma:

$$M_{nl} = L_{nl} + S_{nl} \tag{3.46}$$

onde

$$\begin{aligned} L_{nl} &= \int_V d^3x \big(\Theta_{0l}x_n - \Theta_{0n}x_l\big) \\ &= \int_V d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_r)}\left(x_n\frac{\partial}{\partial x_l} - x^l\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\phi_r \end{aligned} \tag{3.47}$$

e

$$S_{nl} = \int_V d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_r)}(I^{nl})_{rs}\phi_s(x) \tag{3.48}$$

Além de descrever o momento angular, quando se mixa os componentes espaciais e temporais, o tensor momento angular $M_{\nu\lambda}$ resulta em três propriedades adicionais de conservação, relacionadas ao conceito relativístico de centro de massa [15]. Uma discussão a respeito dessa propriedade pode ser encontrada em [19].

Como rotações espaciais devem estar embutidas nas transformações de Lorentz, devemos obter, também, uma lei de conservação para o momento angular tridimensional, **L** [2]. Isso pode ser feito utilizando as três componentes independentes da parte espacial e realizando a contração dos índices m e l com o tensor de Levi-Civitta em três dimensões, segundo a relação:

$$M_{nl} = \epsilon_{nlk} J^k \tag{3.49}$$

Isso resulta em três componentes cartesianos:

$$L^1 = M_{23}, \qquad L^2 = M_{31}, \qquad L^3 = M_{12}, \tag{3.50}$$

que podem ser escritos em notação mais concisa:

$$J^m = \frac{1}{2}\epsilon^{mnl} M_{nl} \tag{3.51}$$

Agora, nosso trabalho já está pronto. Os resultados obtidos nesse capítulo são de grande generalidade, podendo ser aplicados a uma enorme gama de campos. Em particular, as equações de campo de Einstein, que descrevem o movimento de corpos em campos gravitacionais,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{3.52}$$

podem ser obtidas a partir dos princípios variacionais descritos nesse capítulo, a partir da ação

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x \tag{3.53}$$

onde R é o tensor de Ricci, definido, por exemplo, na referência [22]. Todo o procedimento é descrito em detalhes na referência anterior. Entretanto, aplicaremos essas técnicas somente ao caso do campo clássico mais estudado, o campo eletromagnético, na próxima seção, e obteremos as quantidades conservadas sob os dois tipos de simetria descritos aqui.

4 CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Os fenômenos eletromagnéticos no vácuo podem ser descritos pelos campos elétrico e magnético, $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$. Eles satisfazem as bem-conhecidas equações de Maxwell. Em notação tridimensional e utilizando-se o sistema de Heaviside-Lorentz e usando $c = 1$, elas são expressas por [20]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \qquad & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \qquad & \nabla \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aqui, ρ é a densidade de carga e **j** é o vetor densidade de corrente usuais. Assim como o campo elétrico pode ser descrito em termos do potencial eletrostático, ϕ, o campo magnético pode ser descrito em termos do *potencial vetor magnético*, **A**, definido de tal forma que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ [17], de modo que o campo elétrico satisfará :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \tag{4.2}$$

Sabemos que as equações de Maxwell são relativisticamente covariantes [4]. Entretanto, isso não fica evidente quando elas são representadas da forma que estão em (4.1). Buscaremos formular esse conjunto de equações em uma notação que torne a covariância o mais claro possível.

4.1 Formulação covariante do eletromagnetismo

A maneira de expressar qualquer teoria em termos de equações que a deixem manifestantemente covariante é formular suas equações em linguagem tensorial. Vejamos como isso se aplica ao caso do eletromagnetismo.

O quadrivetor potencial eletromagnético já foi introduzido na equação (2.34). Introduzimos agora o tensor de campo eletromagnético:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Ele se transforma como um tensor antissimétrico de segunda ordem, $F^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta}$

[20]. Seus componentes são:

$$
\begin{aligned}
F^{0i} &= -E^i \\
F^{ij} &= -\epsilon^{ijk} B^k
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Em termos do quadrivetor potencial, o tensor de campo pode ser representado como [20]:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{4.5}$$

onde fica clara a sua antissimetria. Com isso, as equações homogêneas são automaticamente satisfeitas:

$$
\begin{aligned}
F^{0i} &= -E^i = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 \\
\Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\phi
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

e

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k = \partial^i A^j - \partial^j A^i \tag{4.7}$$

que conduz à equação $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

As equações inomogêneas estão contidas na equação covariante:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{4.8}$$

com $J^\mu = (\rho, \mathbf{j})$. Para $\nu = 0$, recuperamos a equação $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, e para $\nu = 1$, chegamos a

$$
\begin{aligned}
\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= j^1 \\
-\frac{\partial E^1}{\partial t}\frac{\partial B^3}{\partial x_2} - \frac{\partial B^2}{\partial x_3} &= j^1
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

ou seja, o componente 1 da última equação de Maxwell em (4.1).

Finalizamos, então, a formulação covariante das equações de Maxwell [1]. O potencial vetor A^μ é empregado como variável dinâmica dos campos eletromagnéticos [15]. Substituindo-

[1]Combinando as equações (4.5) e (4.6), podemos obter uma expressão que não faz referência explícita ao potencial A^μ, que é útil em alguns casos [20]:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \tag{4.10}$$

se a equação (4.5) na equação (4.8), chega-se diretamente à equação de onda,

$$\Box A^{\nu} - \partial^{\nu}\big(\partial_{\mu}A^{\mu}\big) = J^{\nu}, \tag{4.11}$$

onde o operador $\Box = \partial_{\mu}\partial^{\mu}$ é conhecido como operador *D'alembertiano*. Tomando-se a quadridivergência de (4.11), chegamos à equação da continuidade, que implica na conservação da corrente eletromagnética:

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0 \tag{4.12}$$

O potencial vetor $A^{\mu}(\mathbf{x}, t)$ não é, entretanto, unicamente determinado [17]. A transformação

$$A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \partial^{\mu}\Lambda(x), \tag{4.13}$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função escalar arbitrária, preserva a equação de onda (4.11) e não modifica os valores dos tensores de campo. Essa transformação é conhecida como *transformação de gauge local* (ou *transformação de calibre*). A propriedade de invariância de gauge conduz a complicações no estudo das quantidades conservadas no campo eletromagnético, como veremos na seção 4.3. Para se encontrar quantidades desejadas, faz-se o potencial ficar sujeito a uma determinada condição de gauge, isto é, "fixa-se o gauge", de modo que o calibre é escolhido de tal forma a satisfazer as condições impostas no problema. Invariância de Gauge não será tratada em detalhes aqui, mas enfatizamos a conexão entre invariância de gauge e conservação da corrente [15].

4.2 Lagrangiana de um campo de Maxwell

A densidade lagrangiana para um campo vetorial não-massivo [2] pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L}_0 = \big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}\big) \tag{4.14}$$

Isso pode ser deduzido a partir dos princípios básicos estabelecidos até aqui. Para começar, a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ é um escalar de Lorentz que deve ser construída a partir do quadrivetor potencial A^{μ} e de suas derivadas. Ela deve consistir de termos de segunda ordem,

[2] Campos vetoriais massivos são descritos pela lagrangiana de Proca [15], quando é adicionado um termo de massa à lagrangiana em (4.19). Entretanto, não abordaremos campos vetoriais massivos nesse trabalho.

desde que a equação de campo para A^μ deve ser linear [15]. Partiremos do *ansatz* geral:

$$\mathcal{L} = \alpha(\partial_\mu A^\mu)^2 + \beta(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu) + \gamma(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + \delta\partial_\mu A^\mu + \epsilon j_\mu A^\mu \tag{4.15}$$

A interação com a corrente pode ser determinada da equação de campo (4.11). O campo A^μ deve satisfazer a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A_\mu)} = 0 \tag{4.16}$$

Usando-se o *ansatz* dado na equação (4.15), o cálculo das derivadas necessárias é imediato. Inserindo os resultados na equação (4.16), chegamos a:

$$\begin{aligned} \delta A^\mu + \frac{1}{2}\epsilon j^\mu &= \partial^\nu\big[\alpha\eta^\mu{}_\nu(\partial_\sigma A^\sigma) + \beta\partial_\nu A^\mu + \gamma\partial^\mu A_\nu\big] \\ &= (\alpha+\gamma)\partial^\mu(\partial_\sigma A^\sigma) + \beta\Box A^\mu \end{aligned} \tag{4.17}$$

É requerido que isso concorde com a equação de campo (4.11), o que é satisfeito para $\delta = 0$, $\beta = \frac{1}{2}\epsilon$, $\alpha + \gamma = -\frac{1}{2}\epsilon$. Resta então determinar o valor do fator ϵ. Deduz-se que $\epsilon = -1$ a partir do conhecimento de que a energia potencial de uma carga q sujeita a um potencial A_0 deva ser $V = qA_0$, entrando na lagrangiana com um sinal negativo [15]. A partir disso, a expressão geral para a lagrangiana se torna:

$$\mathcal{L} = \alpha\big(\partial_\mu A^\mu\big)^2 - \frac{1}{2}\big(\partial_\mu A^\nu\big)\big(\partial^\mu A_\nu\big) + (\frac{1}{2} - \alpha)\big(\partial_\mu A^\nu\big)\big(\partial_\nu A^\mu\big) - J_\mu A^\mu \tag{4.18}$$

Comparando-se com a expressão

$$\mathcal{L}_0 = \big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu\big), \tag{4.19}$$

vemos que a lagrangiana dada em (4.18) difere de $\mathcal{L}_0$ por um fator

$$\alpha\big[(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) - (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)\big],$$

onde α é um parâmentro arbitrário. Entrentanto, esse termo é um termo de fronteira, e portanto não contribui para a ação do campo [15]. Portato, o parâmetro α pode ser escolhido como sendo nulo, de modo a se obter a lagrangiana mais simples possível para o campo de Maxwell.

4.3 Quantidades conservadas

Do estudo do eletromagnetismo clássico, sabemos que a densidade de energia armazenada em um campo eletromagnético é, em unidades do sistema internacional, dada por [17]:

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\right) \tag{4.20}$$

A densidade de momento é dada por [17]

$$\mathcal{P} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S}, \tag{4.21}$$

onde a quantidade **S** é o *vetor de Poynting*, identificado como:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{4.22}$$

Essas quantidades estão associadas às leis de conservação para o campo eletromagnético, como, por exemplo, é estabelecido no teorema de Poynting [17]. Vejamos como elas aparecem naturalmente como consequência das simetrias da ação do campo eletromagnético sob as transformações (2.40) e (2.41).

A ação para o campo eletromagnético interagindo com uma fonte de cargas $J_\mu(x)$ é obtida utilizando-se a densidade lagrangiana dada na equação (4.19):

$$\begin{aligned} S &= \int d^4\mathcal{L} \qquad (4.23) \\ &= \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu\right) \end{aligned}$$

Aqui, é requerido que a corrente satisfaça a equação da continuidade, $\partial^\mu J_\mu = 0$, de modo que a ação seja invariante sob transformações de gauge [15]:

$$\begin{aligned} J_\mu A^{\mu'} &= J_\mu(A^\mu + \partial^\mu \Lambda) \qquad (4.24) \\ &= J_\mu A^\mu + \partial^\mu(J_\mu \Lambda) - \Lambda(\partial^\mu J_\mu) \\ &= J_\mu A^\mu + \text{termo de superfície} \end{aligned}$$

Garantida a invariância da ação, podemos agora partir para a obtenção das quantidades conservadas. O tensor momento-energia canônico é obtido substituindo-se a densidade lagrangiana na equação (3.34), de modo a se obter:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{4.25}$$

Isso pode ser escrito como:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \eta^{\mu\nu} J_\sigma A^\sigma \tag{4.26}$$

que é obtida utilizando-se a identidade, demonstrada na referência [13]:

$$\frac{\partial\big(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\big)}{\partial\big(\partial_\mu A_\sigma\big)} = 4F^{\mu\sigma} \tag{4.27}$$

A corrente J_μ é tratada como uma fonte externa ao campo, de modo que a invariância do sistema sob translações é quebrada [15]. Isso significa que um termo extra para a equação da continuidade para as densidades de energia e momento deve ser adicionado. Portanto, a conservação da energia e do momento é garantida somente na ausência de corrente, $J_\mu = 0$.

Vejamos isso com mais detalhes. Tomando-se a quadridivergência do tensor energia-momento:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\big(\partial^\nu F_{\alpha\beta}\big) - \big(\partial_\mu F^{\mu\sigma}\big)\partial^\nu a_\sigma - F^{\mu\sigma} \partial_\nu \partial^\nu A_\sigma \\
&\quad + \big(\partial^\nu J_\sigma\big) A^\sigma + J_\sigma \partial^\nu A^\sigma \\
&= -\frac{1}{2} \partial^\nu (\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha) F^{\alpha\beta} + (\delta^\nu A_\sigma) A^\sigma \\
&= \big(\partial^\nu J_\sigma\big) A^\sigma
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Foi usada a antissimetria do tensor $F^{\alpha\beta}$ no último passo. Pontanto, a conservação da energia ($\nu = 0$) é violada no caso de a corrente J_μ depender do tempo. Da mesma forma que a conservação do momento ($\nu = 1, 2, 3$) , visto que $J_\mu(\mathbf{x}, t)$ tem um gradiente espacial. A violação da conservação da energia e do momento nada mais é do que uma consequência da escolha de tratar a corrente como uma função dada. A corrente deve ser tratada como originária da interação com outros campos, de modo que um termo de interação é incluso na lagrangiana, alterando a forma do tensor energia-momento. Isso resulta em uma equação da continuidade para o tensor momento-energia, de forma a garantir a existência da lei de conservação. Isso é tratado em detalhes na referência [15], onde é feito o acoplamento do campo eletromagnético com o campo de Dirac.

O tensor energia-momento introduzido na equação (4.25) é não-simétrico e não é invariante sob transformações de gauge:

$$\begin{aligned}
\Theta'^{\mu\nu} &= \Theta^{\mu\nu} - F^{\mu\sigma}\partial^\nu\partial_\sigma\Lambda + \eta^{\mu\nu}J^\sigma\partial_\sigma\Lambda \\
&= \Theta^{\mu\nu} - \partial_\sigma(F^{\mu\sigma}\partial^\nu\Lambda - \eta^{\mu\nu}J^\sigma\Lambda) + (\partial_\sigma F^{\mu\nu})\partial^\nu\Lambda - \eta^{\mu\nu}(\partial_\sigma J^\sigma)\Lambda \\
&= \Theta^{\mu\nu} - \partial_\sigma(F^{\mu\sigma}\partial^\nu\Lambda - \eta^{\mu\nu}J^\sigma\Lambda) - J^\mu\partial^\nu\Lambda
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde foi usada, no segundo passo, a regra do produto para inverter a ordem das derivadas, e no último passo foi usada as equações do movimento (4.8) e da continuidade (3.30).

Portanto, $\Theta^{\mu\nu}$ não é gauge invariante, mesmo na ausência de correntes externas (nesse caso, entretanto, a transformação de gauge conduz apenas a uma divergência, que sob integração produz um termo de superfície, que não contribui para os momentos e energias totais do campo). É permitido, entretanto, adicionar ao tensor energia-momento à divergência de um tensor arbitrário de terceira ordem, $\chi^{\sigma\mu\nu}$, antissimétrico em relação aos dois primeiros índices, e que não altera as quantidades conservadas [15]:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^\nu &= \int d^3x\tilde{\Theta}^{0\nu} = \int d^3x\big(\Theta^{0\nu} + \partial_\sigma\chi^{\sigma 0\nu}\big) \\
&= P^\nu + \int d^3x\partial_0\chi^{00\nu} + \text{termo de superfície} = P^\nu
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Podemos usar esse fato para construir um tensor energia-momento ”físico”que, na ausência de fontes, é simétrico e invariante de gauge. Para isso, adiciona-se ao tensor energia-momento canônico a divergência de um termo antissimétrico, de modo a cancelar o segundo termo na equação (4.29) [15]:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \Theta^{\mu\nu} + \partial_\sigma(F^{\mu\sigma}A^\nu) \\
&= \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{\mu\sigma}F_\sigma{}^\nu + \eta^{\mu\nu}J_\sigma A^\sigma - J^\mu A^\mu
\end{aligned} \tag{4.31}$$

No último passo, foram usadas as equações de Maxwell. Na ausência de fontes, a simetria e a invariância de gauge de $T^{\mu\nu}$ são evidentes, visto que o tensor depende apenas de $F^{\mu\nu}$. Podemos pensar, novamente, na aparente violação da conservação da energia e do momento como decorrente do fato de que a corrente $J_\mu(\mathbf{x}, t)$ é originária da presença de campos externos, que contribuirão para o tensor energia-momento dado em (4.31) [15].

As densidades de energia e momento são obtidas explicitamente da equação (4.31) através de:

- Densidade de energia

$$
\begin{aligned}
\omega &= T^{00} = \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{0\sigma}F_{\sigma}{}^{0} + J_{\sigma}A^{\sigma} - J^{0}A^{0} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

- Densidade de momento (*vetor de Poynting*)

$$
\begin{aligned}
p^k &= T^{0k} = F^{0\sigma}F_{\sigma}{}^{k} - J^{0}A^{k} \\
\mathbf{p} &= \mathbf{E}\times\mathbf{B} - J^{0}\mathbf{A}
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

que, desconsiderando as interações com outros campos, se reduzem à energia do campo eletromagnético e ao vetor de Poynting, definidos nas equações (4.20) e (4.21). Essas quantidades surgem, portanto, das correntes de Noether associadas à simetria de translação do campo eletromagnético.

4.4 Tensor momento angular

A densidade de momento angular de spin, para o campo eletromagnético, é dada, em unidades SI, por [21]:

$$
\mathbf{L}_{spin} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{A}}{4\pi c} \tag{4.34}
$$

Onde **E** e **A** são os 3-vetores campo elétrico e o potencial vetor eletromagnético. Vejamos como essa grandeza surge do tensor momento angular definido pela equação (3.45). Dada uma transformação de Lorentz inifinitesimal,

$$
x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta\omega^{\mu\nu}x_{\nu}, \tag{4.35}
$$

onde a quantidade $\delta\omega^{\mu\nu}$ é antissimétrica. De acordo com (2.45), o teorema de Noether permite encontrar o momento angular associado ao campo $A_{\mu}(x)$, e que é invariante sob a transformação (4.35). Para isso, admitamos uma forma geral para a transformação de um campo de múltiplas componentes:

$$
A'^{\mu}(x') = A^{\mu}(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}\left(I^{\alpha\beta}\right)^{\mu\nu}A_{\nu}(x) \tag{4.36}
$$

Os geradores do grupo de Lorentz devem ser determinados pelas propriedades do grupo de transformações. Como o campo $A_{\mu}(x)$ é um quadrivetor, ele deve se transformar da mesma maneira que as coordenadas na equação (4.35). Segue:

$$A'^{\mu}(x') = A^{\mu}(x) + \delta\omega^{\mu\nu}A_{\nu}(x) \tag{4.37}$$

Das relações (4.36) e (4.37) e utilizando a métrica para abaixar os índices em $\delta\omega^{\mu\nu}$, chegamos a:

$$\delta\omega_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\big(I^{\alpha\beta}\big)^{\mu\nu} - \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\right] = 0 \tag{4.38}$$

Podemos escolher os geradores como sendo antissimétricos, de modo que a equação (4.38) resultará em [15]:

$$\big(I^{\alpha\beta}\big)^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu} \tag{4.39}$$

Agora, substituímos esse resultado na definição de tensor momento angular, dado na equação (3.44), de modo a se obter:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\lambda} &= \Theta^{\mu\lambda}x^{\nu} - \Theta^{\mu\nu}x^{\lambda} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A^{\sigma})}\big(I^{\nu\lambda}\big)^{\sigma\tau}A_{\tau} \qquad (4.40)\\ &= \Theta^{\mu\lambda}x^{\nu} - \Theta^{\mu\nu}x^{\lambda} - F^{\mu}{}_{\sigma}(\eta^{\nu\sigma}\eta^{\lambda\tau} - \eta^{\nu\tau}\eta^{\lambda\sigma})A_{\tau}\\ &= \Theta^{\mu\lambda}x^{\nu} - \Theta^{\mu\nu}x^{\lambda} + (F^{\mu\lambda}A^{\nu} - F^{\mu\nu}A^{\lambda}) \end{aligned}$$

O primeiro termo está associado ao momento angular orbital do campo. O termo entre parênteses é o *spin do campo eletromagnético*. Fazendo $\mu = 0$, tomando as componentes espaciais de ν e λ e introduzindo isso na equação (3.48), vemos que a quantidade

$$S^{nl} = \int d^3x\big(F^{0l}A^{n} - F^{0n}A^{l}\big) \tag{4.41}$$

é a carga conservada associada à transformação (4.35). Em notação vetorial, o spin do campo eletromagnético se torna

$$\mathbf{S} = \int d^3x \;\; \mathbf{E}\times\mathbf{A}. \tag{4.42}$$

5 CONCLUSÃO

A formulação lagrangiana é de grande importância para a descrição de campos relativísticos. Sobretudo, ela permite evidenciar as simetrias de um sistema sob determinado tipo de transformação com bastante facilidade. A lagrangiana que descreve um campo relativístico deve obedecer determinadas condições, de modo a descrever uma teoria coerente. As variáveis dinâmicas de uma teoria clássica de campos são os campos e as suas derivadas, e as equações que descrevem a evolução dos campos no espaço-tempo são as equações de Euler-Lagrange.

Uma simetria é uma transformação que deixa o campo invariante, e o teorema de Noether garante que a toda transformação de simetria contínua está associada uma lei de conservação. O campo eletromagnético é um campo vetorial relativístico descrito a partir do quadrivetor potencial, e os tensores energia-momento e tensor momento angular surgem como correntes de Noether a partir das transformações de translação no espaço-tempo e de transformações de Lorentz, resultando em grandezas conhecidas a partir do estudo padrão do eletromagnetismo.

APÊNDICE A – UNIDADES NATURAIS

Em teorias de campos, é muito utilizado um sistema de unidades conhecido como *natural*. Nesse sistema, as constantes fundamentais c, $\hbar$ e k, respectivamente a velocidade da luz no vácuo, constante de Planck e constante de Boltzmann, são tratadas como adimensionais e iguais à unidade. Ou seja $c = \hbar = k = 1$. Isso torna possível escrever, por exemplo:

$$[\text{energia}] = [\text{massa}] = [\text{comprimento}^{-1}] = [\text{tempo}^{-1}] \tag{A.1}$$

A ação, que é uma integral da lagrangiana (que tem unidade de energia) com respeito ao tempo, é então uma grandeza adimensional.

$$[S] = [E][T] = 1 \tag{A.2}$$

Com isso, as unidades da densidade lagrangiana e do elemento de volume em quatro dimensões se tornam, respectivamente:

$$[\mathcal{L}] = M^4 \tag{A.3}$$

$$[d^4x] = M^{-4} \tag{A.4}$$

REFERÊNCIAS

[1] BERTIN, Mário Cesar, *Teoria Clássica de Campos*, 2015.

[2] ALDROVANDI, Ruben e PEREIRA, J. G. *Classical Fields*. Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, 2008.

[3] DOUGHTY, Noel. *Lagrangian Interaction: A Introduction to Relativistic Symmetry in Electrodynamics and Gravitation*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. , 1990

[4] NETO, Barcelos. *Matemática Para Físicos, Com Aplicações*. Vol. 1. Editora Livraria da Física, 2010.

[5] RESNICK, Robert. *Introduction to Special Relativity*. 1. ed. John Wiley & Sons, Inc., 1968.

[6] RINDLER, Wolfgang. *Relativity. Special, General and Cosmological*. 2. ed. Oxford University Press, 2006.

[7] NUSSENZVEIG, Moysés. *Curso de Física Básica* 2. ed. Editora Edgard Blucher, 2014.

[8] ARFKEN, George; WEBER, Hans; FRANK, Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. 7. ed. Elsevier, Inc, 2013.

[9] CARMELI, Moshe. *Group Theory and General Relativity: Representations of the Lorentz Group and Their Aplication to General Relativity*. 1. ed. McGraw-Hill, Inc, 1977.

[10] LEMOS, Nivaldo. *Mecânica Analítica*. 2. ed. Editora Livraria da Física., 2007

[11] D'INVERNO, Ray. *Introducing Einstein Relativity*. Oxford University Press Inc, 1998.

[12] Hermann Minkowski, *Space and Time* em A. Einstein et al. (1952), *The Principle of Relativity*, New York, Dover Publications.

[13] CARROLL, Sean. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, 2004.

[14] MARION, Jerry e THORNTON, Stephen. *Classical Dynamics of Particle and Systems*. 5. ed.. Thompson Books/Cole, 2003.

[15] GREINER, Walter and REINHARDT, Joachim. *Field Quantization*. 1. ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[16] PADMANABHAN, Thanu. *Gravitation: Foundations and Frontiers*. 1. ed. Cambridge University Press, 2010.

[17] GRIFFITHS, David. *Eletrodynamics*. 4. ed. Pearson Education, 2013.

[18] GREINER, Walter. *Relativistic Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

[19] PRYCE, M. H. L (1948). *The Mass-Centre in the Restricted Theory of Relativity and Its Connexion with the Quantum Theory of Elementary Particles*. *Proceedings of the Royal Society A*. 195 (1040): 62–81. doi:10.1098/rspa.1948.0103

[20] RYDER, Lewis. *Quantum Field Theory*. 1. ed. Cambridge University Press, 1985.

[21] MCDONALD, Kirk T. *Orbital and Spin Angular Momentum of Electromagnetic Fields*. Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, NJ 08544 (March 12, 2009; updated October 31, 2017).

[22] CARMELI, Moshe. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. 1. ed. John Wiley & Sons, 1982.

[23] Noether, E. *Invariante Variationsprobleme*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 1918 (1918): 235-257. Disponível em http://eudml.org/doc/59024.

[24] GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles & SAFKO, John. *Classical Mechanics* 3. ed. Addison-Wesley, 2000.