



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

LABORATÓRIO DE SIMULAÇÃO DE SISTEMAS COERENTES - LASSCO



DÉBORA AGUIAR GOMES

**PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DE BURACOS NEGROS COM MÉTRICAS
QUE VIOLAM A SIMETRIA DE LORENTZ**

FORTALEZA

2018

DÉBORA AGUIAR GOMES

PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DE BURACOS NEGROS COM MÉTRICAS QUE
VIOLAM A SIMETRIA DE LORENTZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

FORTALEZA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G613p Gomes, Débora Aguiar.
Propriedades Termodinâmicas de Buracos Negros com Métricas que Violam a Simetria de Lorentz /
Débora Aguiar Gomes. – 2018.
59 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação
em Física, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Radiação Hawking. 2. Tunelamento Quântico. 3. Violação da Simetria de Lorentz. I. Título.

CDD 530

DÉBORA AGUIAR GOMES

PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DE BURACOS NEGROS COM MÉTRICAS QUE
VIOLAM A SIMETRIA DE LORENTZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em //.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

AGRADECIMENTOS

Aos familiares e amigos pelo apoio que me ofereceram, especialmente ao Ewerton pelas críticas e sugestões ao texto da dissertação e ao Cláudio, Rose e Beatriz por terem me acolhido.

Ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida por sua excelente orientação que resultou nesta dissertação. Também aos professores Victor Santos, Euclides Gomes e Roberto Maluf pelas discussões e sugestões.

Aos colegas da Pós-Graduação Cleiton Estevão, Nathanaell Sousa, Sofia Cunha, Michel Andrade pelas discussões e reflexões não só durante o curso, mas também na preparação para a seleção de doutorado.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física, pela infraestrutura e apoio oferecidos aos estudantes e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

RESUMO

A radiação Hawking forneceu um novo horizonte para estudos de buracos negros. Classicamente, buracos negros não emitem radiação, apenas a absorvem. Entretanto, do ponto de vista da mecânica quântica, é possível mostrar que buracos negros emitem radiação. Muitos métodos tem sido desenvolvidos para calcular as propriedades termodinâmicas de um buraco negro. Dentre eles, destaca-se um método semiclássico, conhecido como método de tunelamento quântico, o qual tem sido aplicado a vários modelos gravitacionais com resultados satisfatórios. No contexto da radiação Hawking, a violação da simetria de Lorentz (LSB) pode trazer contribuições interessantes na escala de energia de Planck. Na literatura, encontramos cálculos das propriedades termodinâmicas em soluções do tipo Schwarzschild com LSB, a partir da gravidade de superfície. Neste trabalho, apresentamos os primeiros resultados obtidos ao se aplicar o método do tunelamento quântico em modelos do tipo Schwarzschild nos quais a simetria de Lorentz não é preservada.

Palavras-chave: Radiação Hawking. Tunelamento Quântico. Violação da Simetria de Lorentz.

ABSTRACT

Hawking radiation has provided a new horizon in the study of black holes. Classically, black holes do not emit radiation, only absorb it. However, when it comes to a quantum mechanical approach, it is possible to show that black holes do emit radiation. Many methods have been developed to evaluate black hole thermodynamical properties. Among them, we can highlight a semi-classical method, known as quantum tunneling, which has been applied to many gravitational models with satisfactory results. In the Hawking radiation context, the Lorentz symmetry breaking (LSB) can provide interesting contributions in the Planck energy scale. In the literature, we find calculations of the thermodynamical properties of LSB Schwarzschild-like solutions, using the surface gravity. In this work, we present the first results obtained via quantum tunneling method for Schwarzschild-like models in which the Lorentz symmetry does not hold.

Keywords: Hawking Radiation. Quantum Tunneling. Lorentz Symmetry Breaking.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Potencial de um campo escalar real com simetria $\phi = -\phi$. Fonte: [51].	30
Figura 2 – Fonte: O autor. Razão das temperaturas pela massa ($L = 10^{-9}$).	41
Figura 3 – Fonte: O autor. Razão das entropias pela massa ($L = 10^{-9}$).	42
Figura 4 – Fonte: O autor. Razão das temperaturas pelo fator de quebra de Lorentz L	44
Figura 5 – Fonte: O autor. Razão das entropias pelo fator de quebra de Lorentz L	45
Figura 6 – Fonte: O autor. Razão das temperaturas pela massa para diferentes valores de γ	46
Figura 7 – Fonte: O autor. Razão das entropias pela massa para diferentes valores de γ	47
Figura 8 – Fonte: O autor. Razão das correlações pela massa ($r_0 = 10$, $L = 10^{-3}$, $\omega_1 = 10^{-1}$, $\omega_2 = 2 \times 10^{-1}$).	50
Figura 9 – Fonte: O autor. Razão das correlações pela massa para vários valores de γ ($\omega_1 = 10^{-1}$, $\omega_2 = 2 \times 10^{-1}$).	52

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
QFT	Teoria Quântica de Campos, na sigla em inglês (<i>Quantum Field Theory</i>)
LSB	Violação da Simetria de Lorentz na sigla em inglês (<i>Lorentz Symmetry Breaking</i>)
WKB	Wentzel-Kramers-Brillouin
VEV	Valor esperado no vácuo ou <i>vacuum expectation value</i> , na sigla em inglês
MDR	Relação de dispersão modificada, na sigla em inglês (<i>Modified Dispersion Relation</i>)
DSR	Relatividade duplamente especial, na sigla em inglês (<i>Doubly Special Relativity</i>)
RG	Gravidade tipo <i>Rainbow</i> , na sigla em inglês (<i>Rainbow gravity</i>)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	RADIAÇÃO HAWKING	13
2.1	Propriedades Termodinâmicas de Buracos Negros	13
2.2	Teoria Quântica de Campos em espaços curvos	14
3	TUNELAMENTO QUÂNTICO	19
3.1	Descrição do Método	19
3.2	Efeito <i>Back-reaction</i>	22
3.3	Paradoxo da Informação	25
4	VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ	28
4.1	Simetria de Lorentz	28
4.2	Violação Espontânea de uma simetria	29
4.3	Modelo de <i>Bumblebee</i>	32
4.3.1	Dinâmica do campo de <i>bumblebee</i>	33
4.4	Gravidade <i>Rainbow</i>	36
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	40
5.1	Propriedades Termodinâmicas de Buracos Negros com Violação da Simetria de Lorentz	40
5.1.1	LSB Puramente Radial	40
5.1.2	Métrica <i>Rainbow</i>	45
5.2	Correção de <i>Back-reaction</i> e Cálculo das Correlações	47
5.2.1	LSB Puramente Radial	47
5.2.2	Métrica <i>Rainbow</i>	51
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
	REFERÊNCIAS	54

1 INTRODUÇÃO

A radiação proveniente de um buraco negro, conhecida como radiação Hawking, indica que a gravidade e a mecânica quântica estão profundamente relacionadas. Buracos negros são objetos previstos pela teoria da relatividade, que apenas absorvem matéria e não possuem nenhum tipo de emissão. Contudo, em meados dos anos 70, Stephen Hawking mostrou, ao levar em consideração efeitos quânticos, que buracos negros emitem radiação com temperatura proporcional a sua gravidade de superfície [1]. Esse resultado, que aparentemente estava em contradição ao que se sabia até então, abriu novos horizontes ao estudo de buracos negros.

Anteriormente ao trabalho apresentado por Hawking, ele juntamente com Bardeen e Carter publicaram um conjunto de leis para a dinâmica de buracos negros que faziam analogia com as leis da termodinâmica [2], baseando-se nos trabalhos de Bekenstein [3, 24] e Smarr [5]. Bekenstein, utilizando a teoria da informação, discutiu a analogia entre a física de buracos negros e a termodinâmica. Em seu trabalho de 1973, ele sugeriu que a área do buraco negro A e sua gravidade de superfície κ eram, de certo modo, a entropia e temperatura do buraco negro, e não simplesmente análogos. Num primeiro momento, Bardeen e Hawking discordaram dessa afirmação pois, de acordo com eles, a temperatura do buraco negro deveria ser nula, uma vez que este não emitiria radiação [2].

Porém, uma vez que a emissão de radiação de um buraco negro é levada em consideração, as leis para buracos negros deixam de ser uma mera analogia. Como argumentado por Hawking, sem essa consideração, a Segunda Lei Generalizada seria violada, por exemplo, por um buraco negro imerso em uma radiação de corpo negro, cuja temperatura fosse menor que a do buraco negro [1].

Uma interpretação heurística do processo da radiação Hawking, na qual a radiação seria gerada por pares virtuais de partículas e antipartículas criadas espontaneamente logo após o horizonte de eventos, foi apresentada por Hawking. A antipartícula, com energia negativa, seria atraída pelo campo gravitacional do buraco negro, enquanto a partícula poderia escapar para o infinito. Essa partícula constituiria a radiação térmica liberada pelo buraco negro [1].

No entanto, essa interpretação não é realística e, como foi argumentado pelo próprio Hawking, não corresponde à justificativa real para a emissão de partículas por um buraco negro. Na verdade, esse mecanismo de emissão é causado pela ambiguidade na definição de estados de vácuo em espaços-tempo curvos. Como o vácuo depende do observador, é possível que um determinado observador detecte partículas no estado de vácuo de outro observador [6].

Uma abordagem alternativa é fornecida pelo método de tunelamento, de acordo com o qual, a emissão pode ser resultante da criação de partículas logo dentro do buraco negro [7].

Neste caso, uma das partículas poderia tunelar quanticamente o horizonte de eventos, que neste caso seria análogo a uma barreira de potencial, e emergir do buraco negro com energia positiva. Enquanto isso, sua parceira com energia negativa permaneceria no buraco negro, contribuindo para a perda de massa sofrida por esse, devido a emissão de partículas. Sabendo-se a probabilidade de tunelamento, é possível calcular a temperatura do buraco negro e sua entropia, bem como outras quantidades termodinâmicas relevantes.

Desde que a radiação Hawking foi demonstrada, discute-se se a radiação emitida por buracos negros respeita a conservação de informação e a unitariedade. Esse problema, comumente nomeado como paradoxo da informação, foi apresentado por Hawking em 1976 [8]. Dentro do contexto de tunelamento quântico, o paradoxo da informação tem sido amplamente discutido [9–16]. Embora alguns autores afirmem que correção de *back-reaction* são capazes de solucionar o problema [11, 14], ainda não há um consenso na comunidade científica e o paradoxo da informação permanece não solucionado.

Nos últimos anos, a violação da simetria de Lorentz (LSB), simetria fundamental da relatividade, tem sido aplicada na tentativa de obter-se uma nova física no nível de energia da escala de Planck. Apesar de ter sido primeiramente aplicada no contexto da teoria de cordas [17], a quebra de Lorentz pode ser aplicada na gravitação [18, 19], fornecendo novas soluções de buracos negros [20]. Além da LSB, a gravidade *rainbow* (RG), teoria na qual a relação de dispersão padrão é modificada e temos uma família de métricas dependentes da energia da partícula (métricas *rainbow*), também pode fornecer uma nova física na escala de Planck [21].

Propriedades termodinâmicas de buracos negros do tipo Schwarzschild foram estudadas em [20, 22] utilizando a gravidade de superfície dessas soluções. Entretanto, o tratamento via método de tunelamento pode estender essas investigações através de correções de *back-reaction* e do cálculo de correlações.

Esta dissertação tem como objetivo principal discutir as contribuições para a radiação Hawking obtidas através do mecanismo de violação da simetria de Lorentz e da gravidade *rainbow*, ambos candidatos ao estudo de fenômenos físicos na escala de energia de Planck. Está organizada da seguinte forma. O capítulo 2, destina-se a um resumo das leis que regem a dinâmica de buracos negros e do formalismo de teoria quântica de campos (TQC) em espaços curvos, discutindo como a TQC em espaços curvos implica na radiação Hawking. No capítulo 3, temos a apresentação do método de tunelamento quântico, bem como discussão breve sobre o paradoxo da informação. Para efeitos pedagógicos, aplicamos o método à métrica de Schwarzschild e mostramos que os resultados obtidos são os mesmos conhecidos na literatura. O capítulo 4 aborda a violação da simetria de Lorentz. Apresentamos o modelo de *bumblebee*, a gravidade *rainbow* e as métricas tipo Schwarzschild obtidas através desses modelos. No capítulo 5, apresentamos os resultados obtidos e discutimos como esses resultados se relacionam com os já

obtidos na literatura.

2 RADIAÇÃO HAWKING

Neste capítulo, apresentamos a Radiação Hawking. A primeira seção destina-se a revisão das leis dinâmicas de buracos negros enquanto a segunda destina-se a revisão da teoria quântica de campos em espaços curvos.

2.1 Propriedades Termodinâmicas de Buracos Negros

No trabalho apresentado por Hawking em 1975 [1], encontramos os famosos resultados para a temperatura

$$T_{bh} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi ck_B}, \quad (2.1)$$

e para a entropia de um buraco negro

$$S_{BH} = S_{bh} = \frac{Ak_Bc^3}{4\hbar G}, \quad (2.2)$$

onde \hbar é a constante de Planck, κ é a gravidade de superfície, c é a velocidade da luz no vácuo, k_B é a constante de Boltzmann, G é a constante gravitacional de Newton e A é a área de sua superfície. Os índices bh indicam black hole, enquanto os índices BH indicam Bekenstein-Hawking.

Encontramos constantes como a velocidade da luz, a constante de Planck e a constante gravitacional de Newton na entropia. Assim, é natural supor que o tratamento termodinâmico da dinâmica de buracos negros possa nos revelar aspectos quânticos da gravidade.

A temperatura e entropia de buracos seguem leis análogas às leis termodinâmicas usuais [2], e são enunciadas a seguir:

Lei Zero: A gravidade de superfície κ de um buraco negro estacionário é constante sobre seu horizonte de eventos.

Primeira Lei: Uma mudança na massa M de um buraco negro está relacionada à mudança na sua área A , seu momento angular J e sua carga elétrica Q pela seguinte equação:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega\delta J + \Phi\delta Q, \quad (2.3)$$

onde κ é a gravidade de superfície, Ω é a velocidade angular e Φ é o potencial elétrico.

Segunda Lei: A área A da superfície de um buraco negro nunca decresce.

Terceira Lei: A gravidade de superfície κ de um buraco negro não pode ser reduzida a zero por uma sequência finita de operações.

A Lei Zero é análoga à Lei Zero da termodinâmica que afirma que, para um sistema em equilíbrio, a temperatura T é constante.

A Primeira Lei corresponde à Primeira Lei da termodinâmica $dE = TdS - PdV$. Como a gravidade de superfície e a área do buraco negro são análogas a temperatura e a entropia, então os dois últimos termos em (2.3) estão relacionados ao trabalho realizado sobre o buraco negro por um agente externo que modifica o momento angular por uma quantidade δJ e a carga elétrica por uma quantidade δQ [3].

A Segunda Lei surge do teorema da área de Hawking e é análoga à Segunda Lei da termodinâmica. Porém, uma vez provado que buracos negros emitem radiação, seria natural esperar que estes evaporassem. Essa evaporação levaria a uma diminuição de sua massa e, conseqüentemente, da área de sua superfície, contrariando o teorema de Hawking [23]. Neste caso, devemos enunciar a Segunda Lei Generalizada, proposta por Bekenstein: “A entropia total $S_T = S_{BH} + S_{ext}$, resultante da união da entropia do buraco negro S_{BH} com a entropia externa a ele S_{ext} , nunca decresce” [24].

A Terceira Lei é análoga à forma fraca da Terceira Lei da termodinâmica, a qual afirma que a temperatura T de um sistema não pode ser reduzida, por meio de um número finito de operações, ao zero absoluto [25]. Na época da publicação dessas leis por de Bardeen et al., não havia uma demonstração matemática rigorosa para esta lei, embora houvesse argumentos razoáveis para creditá-la. Por exemplo, se fosse possível reduzir a gravidade de superfície κ por um número finito de operações, então seria possível continuar o processo, obtendo-se assim, uma singularidade nua. Isso violaria a previsibilidade assintótica, argumento usado, por exemplo, na lei da área A não decrescente [2]. Posteriormente, essa lei foi demonstrada por Israel [26].

2.2 Teoria Quântica de Campos em espaços curvos

A emissão de partículas de um buraco negro surge, essencialmente, devido à geometria do espaço-tempo e ao próprio conceito de partícula, já que na Teoria Quântica de Campos (QFT, na sigla em inglês) em espaços-tempo curvos, este não é um conceito independente do observador. Nesta seção, discutimos alguns conceitos importantes de QFT em espaços curvos e como eles no levam à radiação Hawking.

Faremos a quantização de campo para espaços-tempo curvos de maneira semelhante a encontrada em [6]. Primeiramente, vamos definir a densidade lagrangeana utilizada

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2} [g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2], \quad (2.4)$$

onde ϕ é o campo escalar, m é o quanta de massa do campo, $\phi_{,\mu}$ representa a derivada parcial em relação à coordenada x^μ e R é o escalar de Ricci. Devemos ressaltar que o termo multiplicativo $\sqrt{-g}$ está presente para garantir que \mathcal{L} seja uma densidade escalar. O termo $\xi R \phi^2$ representa

o acoplamento entre o campo escalar ϕ e o campo gravitacional. Neste caso, a constante ξ é a constante de acoplamento. Podemos notar que, no espaço de Minkowski $R = 0$, uma vez que não há interação gravitacional. Neste caso, recuperamos a densidade lagrangeana comumente utilizada para a quantização no espaço flat.

A ação para um espaço-tempo n-dimensional é dada por

$$S = \int \mathcal{L} d^n x. \quad (2.5)$$

A variação da ação em relação a ϕ nos dá a seguinte equação de movimento

$$[\square_x + m^2 + \xi R(x)]\phi(x), \quad (2.6)$$

onde \square é o operador d'Alembertiano, definido por $\square\phi \equiv g^{\mu\nu}\phi_{;\mu\nu}$, com $\phi_{;\mu}$ indicando a derivada covariante em relação a coordenada x^μ e o índice subscrito x indicando que a derivação é feita relação ao argumento x .

Vamos definir o produto escalar da seguinte forma

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv -i \int_{\Sigma} \sqrt{-g_{\Sigma}} d\Sigma^{\mu} \phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \phi_2^*(x), \quad (2.7)$$

onde $\phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \phi_2^* \equiv \phi_1(\partial_{\mu}\phi_2^*) - (\partial_{\mu}\phi_1)\phi_2^*$, $d\Sigma^{\mu} = n^{\mu}d\Sigma$ com n^{μ} sendo um vetor unitário ortogonal à hipersuperfície Σ e $d\Sigma$ sendo o elemento de volume nessa hipersuperfície. Apesar da definição do produto interno ser tomada em relação a uma hiperfície do espaço-tempo, o valor de (ϕ_1, ϕ_2) é independente de Σ [27].

Deve existir um conjunto completo e ortogonal $u_i(x)$ de soluções para a equação (2.6), de modo que devemos ter

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0. \quad (2.8)$$

Assim, o campo escalar ϕ pode ser expandido em termos do conjunto de soluções u_i

$$\phi = \sum_i (a_i u_i + a_i^{\dagger} u_i^*), \quad (2.9)$$

onde a_i e a_i^{\dagger} obedecem as relações de comutação usuais da TQC em espaço flat

$$[a_i, a_j^{\dagger}] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^{\dagger}, a_j^{\dagger}] = 0. \quad (2.10)$$

Levando em consideração que a_j e a_j^{\dagger} são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, podemos construir o estado de vácuo, dado por $a_j|0\rangle = 0$, e o espaço de Fock de maneira análoga à do espaço flat. Contudo, não nos deteremos a esses detalhes, uma vez que

este não é o objetivo da seção.

Devemos ressaltar que, no caso da TQC em espaços curvos, surge uma ambiguidade [28]. No espaço de Minkowski, o sistema de coordenadas é retangular e possui a simetria do grupo de Poincaré. Além disso, o estado de vácuo do espaço de Minkowski é invariante sob as transformações deste grupo - translações, rotações no espaço e transformações de Lorentz. O mesmo não é válido para espaços curvos, uma vez que estes não apresentam as simetrias do grupo de Poincaré [30].

Vamos considerar um segundo conjunto completo e ortogonal v_j de soluções para (2.6), tal que $(v_k, v_l) = -(v_k^*, v_l^*) = \delta_{kl}$ e $(v_k, v_l^*) = 0$. Podemos expandir ϕ em termos dos modos de v_j da mesma forma que fizemos para os modos u_i :

$$\phi = \sum_j (b_j v_j + b_j^\dagger v_j^*). \quad (2.11)$$

Devemos definir um novo estado de vácuo $|\bar{0}\rangle$, tal que $b_j |\bar{0}\rangle = 0$, e um novo espaço de Fock será definido de maneira análoga. Como b_j e b_j^\dagger são os operadores de aniquilação e criação dos modos v_j , eles devem seguir as seguintes relações de comutação

$$[b_k, b_l^\dagger] = \delta_{kl}, \quad [b_k, b_l] = [b_k^\dagger, b_l^\dagger] = 0. \quad (2.12)$$

Como os dois conjuntos de soluções u_i e v_j são completos, é interessante expandir, por exemplo, v_j em termos de u_i e u_i^* , através das transformações de Bogoliubov

$$v_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*), \quad (2.13)$$

onde α_{ji} e β_{ji} são os coeficientes de Bogoliubov. A transformação inversa é dada por

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ji} v_j - \beta_{ji} v_j^*). \quad (2.14)$$

Utilizando as condições de ortogonalidade dos modos v_j , podemos determinar as seguintes relações matriciais para os coeficientes de Bogoliubov

$$\begin{aligned} \sum_i (\alpha_{ki} \beta_{li} - \beta_{ki} \alpha_{li}) &= 0, \\ \sum_i (\alpha_{ki} \alpha_{li}^* - \beta_{ki} \beta_{li}^*) &= \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se substituirmos a transformação (2.14) na expansão (2.9), podemos relacionar os operadores de criação e aniquilação dos modos u_i e v_j

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ji} b_j - \beta_{ji} b_j^\dagger). \quad (2.16)$$

A partir dessa relação, podemos concluir que o estado de vácuo dos modos v_j não é aniquilado quando aplicamos a_i a ele. De fato, temos

$$a_i|\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji} b_j^\dagger |\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji} |\bar{1}\rangle, \quad (2.17)$$

que em princípio é diferente de 0, se pelo menos um dos coeficientes β_{ji} for não-nulo. Além disso, o valor esperado do número de partículas também não é independente do modo escolhido. O operador número para os modos u_i é dado por $N_i = a_i^\dagger a_i$ e, semelhantemente, para os modos v_j temos $\bar{N}_j = b_j^\dagger b_j$. Ao calcular o valor esperado de N_i em relação ao estado $|\bar{0}\rangle$, obtemos

$$\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2, \quad (2.18)$$

que é diferente de 0 a menos que todos os coeficientes β_{ji} sejam nulos.

A partir da equação (2.18), podemos ver claramente a ambiguidade na definição do estado de vácuo. Ao contrário do que se espera, o estado de vácuo dos modos v_j contém partículas do modo u_i . Nesse caso, o estado de vácuo não é independente do observador. Porém, essa ambiguidade não surge da não unicidade do vácuo. Embora o estado vácuo não seja único, nem mesmo no caso do espaço de Minkowski, o que acontece é que todos observadores inerciais concordam que no vácuo, não há detecção de partículas. Isso ocorre devido à invariância do estado de vácuo e dos observadores inerciais no espaço flat em relação ao grupo de Poincaré. Na presença de campos gravitacionais, não temos observadores inerciais, uma vez que estes se tornam observadores em queda livre. Em geral, observadores em queda livre não concordam na escolha do estado de vácuo [6].

É comum encontrar, na literatura, textos que definem os modos u_i como modos *in*, ou seja, modos de um passado remoto (passado nulo infinito, no diagrama de Penrose), e os modos v_j como modos *out*, modos de um futuro distante (futuro nulo infinito). Assim, os modos *in* podem representar o estado do sistema antes do colapso gravitacional, quando o espaço era aproximadamente *flat*. Portanto, $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ pode ser interpretado como o número de partículas criadas pelo potencial gravitacional e emitidas para o infinito. Podemos calcular o valor dos coeficientes β_{ji} e obter [1]

$$\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle \propto \frac{1}{\exp(2\pi\omega\kappa^{-1}) \mp 1}, \quad (2.19)$$

A expressão anterior corresponde ao espectro de um corpo negro, com temperatura $T = \kappa/2\pi$, em coordenadas naturais. Os sinais negativo e positivo correspondem, respectivamente, a emissão de bósons e férmions. Esse resultado é muito semelhante ao obtido para o número médio de ocupação de partículas em um determinado nível de energia, para as estatísticas de

Bose-Einstein e Fermi-Dirac, quando o potencial químico é $\mu = 0$ [31]. Além disso, podemos notar que o número de partículas só depende de parâmetros macroscópicos do buraco negro, neste caso a gravidade de superfície κ , e não do processo de colapso gravitacional.

3 TUNELAMENTO QUÂNTICO

Embora seja possível obter a temperatura de um buraco por meio do cálculo dos coeficientes de Bogoliubov, esse método não é tão simples ou direto. Desde a publicação do trabalho de Hawking, outros métodos foram desenvolvidos e obtiveram os mesmos resultados [32–35]. Dentre eles, podemos citar o método de tunelamento quântico, que consiste em considerar a radiação Hawking como um processo de tunelamento de partículas através do horizonte de eventos do buraco negro [7].

O método de tunelamento quântico oferece muitas vantagens em relação aos outros métodos desenvolvidos. Entre elas, podemos apontar: a simplicidade dos cálculos envolvidos; a facilidade na incorporação de efeitos de *back-reaction*, os quais fornecem modelos dinâmicos para o processo de radiação; o fato de levar em conta somente a geometria do espaço-tempo em consideração, o que torna o método aplicável a diversos modelos de buraco negro, inclusive modelos onde não há singularidades [42].

Existem, basicamente, duas abordagens para o processo de tunelamento: o método das geodésicas nulas, proposto por Parikh and Wilczek [7, 36] e o *ansatz* de Hamilton-Jacobi originado no trabalho de Padmanabhan *et al.* [37–39] e desenvolvido por Angheben *et al.* [40]. O segundo apresenta, em relação ao primeiro, a vantagem de ser mais direto, embora ambos sejam equivalentes.

No primeiro método, os efeitos de *back-reaction* devem ser levados em consideração, enquanto no segundo é possível tratar o processo de radiação negligenciando tais efeitos. Além disso, o método das geodésicas nulas utiliza um sistema específico de coordenadas regulares através do horizonte de eventos (coordenadas de Painlevé-Gullstrand). Porém, de acordo com a Relatividade Geral, não deve haver sistemas referenciais privilegiados e observáveis físicos devem ser invariantes sob mudanças de coordenadas. Por essas razões, utilizaremos o método de Hamilton-Jacobi ao longo desse trabalho.

3.1 Descrição do Método

Nesta seção, apresentaremos a derivação da radiação Hawking pelo método de Hamilton-Jacobi. Basicamente, o método consiste em utilizar a aproximação WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) para obter a parte imaginária da ação que descreve a equação de movimento da partícula. Utilizaremos uma abordagem similar a encontrada em [42]. Aplicaremos o método à métrica de Schwarzschild e verificaremos com os resultados já conhecidos da literatura. Os efeitos de auto-gravitação das partículas serão negligenciados.

Uma grande variedade de soluções de buracos negros não-girantes podem ser escritas da seguinte forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)^{-1}dr^2 + h(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.1)$$

Devemos notar que próximo ao horizonte de eventos a parte angular da métrica é deslocada para o vermelho. Logo, somente a parte temporal e radial contribuirão e a métrica é reduzida para duas dimensões

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)^{-1}dr^2. \quad (3.2)$$

Para efeito de simplicidade, utilizaremos um campo escalar real ϕ . Este campo deve obedecer a equação de Klein-Gordon

$$\hbar^2 g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (3.3)$$

Utilizando a métrica na forma dada por (3.2), obtemos

$$-\partial_t^2 \phi + \Lambda(r) \partial_r^2 \phi + \frac{1}{2} \partial_r \Lambda(r) \partial_r \phi - \frac{m^2}{\hbar^2} f(r) \phi = 0, \quad (3.4)$$

onde $\Lambda(r) \equiv f(r)g(r)$.

Para resolver a equação anterior, utilizaremos a aproximação WKB. Deste modo, o campo ϕ deve ser da forma

$$\phi(t, r) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \mathcal{I}(t, r) \right]. \quad (3.5)$$

O uso da aproximação WKB se justifica pelo fato de que, próximo ao horizonte, o número de ondas radiais se torna infinito [7]. Substituindo o *ansatz* (3.5) na equação (3.4) e tomando o limite $\hbar \rightarrow 0$, podemos obter a equação relativística de Hamilton-Jacobi

$$(\partial_t \mathcal{I})^2 - \Lambda(r) (\partial_r \mathcal{I})^2 - m^2 f(r) = 0, \quad (3.6)$$

Uma vez que estamos usando uma exponencial no nosso *ansatz*, podemos fazer a separação de variáveis apenas tomando a função $\mathcal{I}(t, r)$ como a soma de uma função que depende somente da coordenada radial r com uma função que depende somente do tempo t . Vamos assumir que a dependência temporal é linear, portanto,

$$\mathcal{I}(t, r) = -\omega t + W(r). \quad (3.7)$$

O uso de ω ficará claro mais adiante. Substituindo (3.7) na equação relativística de Hamilton-Jacobi, obtemos a seguinte expressão para $W(r)$

$$W(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{f(r)g(r)}} \sqrt{\omega^2 - m^2 f(r)}. \quad (3.8)$$

Agora, tomaremos a expansão de $f(r)$ e $g(r)$ nas proximidades do horizonte de eventos r_H

$$\begin{aligned} f(r) &= f(r_H) + f'(r_H)(r - r_H) + \dots, \\ g(r) &= g(r_H) + g'(r_H)(r - r_H) + \dots, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde a linha denota derivação em relação a coordenada radial r . Deste modo, $W(r)$ se torna

$$W(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}} \frac{\sqrt{\omega^2 - m^2 f'(r_H)(r - r_H)}}{(r - r_H)}. \quad (3.10)$$

A última integral possui pólo simples em $r = r_H$, portanto, temos

$$W(r) = \frac{2\pi i \omega}{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}, \quad (3.11)$$

onde ignoramos a contribuição real, uma vez que ela não contribuirá para o que estamos interessados em calcular. A parte imaginária de \mathcal{I} nos dá a probabilidade de tunelamento para uma partícula com energia ω

$$\Gamma \simeq \exp[-2Im\mathcal{I}] = \exp\left[-\frac{4\pi\omega}{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}\right]. \quad (3.12)$$

Como $\Gamma \sim e^{-\beta\omega}$, onde $\beta = 1/T_{BH}$ (fizemos $k_B = 1$), podemos obter a temperatura do buraco negro

$$T_{BH} = \frac{\omega}{2Im\mathcal{I}} = \frac{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}{4\pi}. \quad (3.13)$$

Podemos notar que a temperatura do buraco negro depende somente dos termos da métrica, ou seja, da geometria exterior do buraco negro, e não de nenhuma informação contida dentro do buraco negro.

A partir da temperatura, podemos calcular a entropia do buraco negro S_{BH} , utilizando a relação termodinâmica $TdS = dM$. Assim,

$$S_{BH} = \int \frac{dM}{T_{BH}(M)}. \quad (3.14)$$

Vamos testar se o método de Hamilton-Jacobi nos dá os mesmos resultados que os já obtidos na literatura. Para tanto, vamos utilizar a métrica de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.15)$$

onde usamos a assinatura $(+1, -1, -1, -1)$. Logo, temos

$$f(r) = g(r) = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (3.16)$$

Assim, $f'(r_s) = -1/2M$, onde $r_s = 2M$ é o raio do horizonte de eventos. Com isso, obtemos a temperatura T_0 e a entropia S_0 do buraco negro de Schwarzschild:

$$T_0 = \frac{1}{8\pi M} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (3.17)$$

$$S_0 = 4\pi M^2 = \frac{A}{4}, \quad (3.18)$$

onde $\kappa = 1/4M$ é a gravidade de superfície e $A = 16\pi M^2$ é a área da superfície do buraco negro de Schwarzschild, em coordenadas naturais.

No método original de Hawking temos, em coordenadas naturais,

$$T_{BH} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (3.19)$$

onde κ é a gravidade de superfície do buraco negro.

A gravidade de superfície é dada pela equação

$$k^\mu \nabla_\mu k_\nu = \kappa k_\nu, \quad (3.20)$$

onde k_ν é o vetor de Killing.

Para uma métrica do tipo (3.1), temos $k_\nu = (1, 0, 0, 0)$ e

$$\kappa = \frac{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}{2}. \quad (3.21)$$

Esse resultado, juntamente com (3.13), deixa claro que a derivação original de Hawking e o método de tunelamento levam a resultados equivalentes para a temperatura.

3.2 Efeito *Back-reaction*

Até o momento, temos tratado o processo de tunelamento quântico sem considerar os efeitos de auto-gravitação das partículas emitidas na radiação. Contudo, é interessante investigar como a inclusão desse efeito alteraria os resultados já obtidos. Essa análise é especialmente importante nos últimos estágios de um buraco negro em evaporação [41].

Efeitos de auto-gravitação foram investigados no formalismo de tunelamento por Parikh e Wilczek [7, 9]. Especificamente, para a abordagem de Hamilton-Jacobi, esses efeitos foram estudados pela primeira vez em [43]. Nesta seção, nos basearemos no desenvolvimento presente em [43].

A derivação da radiação Hawking foi realizada utilizando a teoria quântica de campos em espaços curvos. Assim, dada a geometria do espaço-tempo em consideração, os campos quânticos são quantizados, observando-se como eles são influenciados por essa geometria. Neste caso, obtém-se uma radiação térmica, para a qual verifica-se que não há correlação entre os eventos de emissão [7]. Entretanto, a inclusão de efeitos de back-reaction nos dá correlações não-nulas entre eventos de emissão de partículas do buraco negro. Logo, a inclusão desses efeitos é importante para investigar se a radiação Hawking pode, de alguma forma, conter informação a respeito da matéria que formou o buraco negro. Assim, devemos generalizar os resultados obtidos de modo a incorporar os efeitos de back-reaction.

A temperatura do buraco negro depende de sua massa, mas essa varia a medida que o processo de radiação ocorre. Para resolver esse problema, devemos permitir que a geometria do espaço varie com a massa do buraco negro. Vamos começar definindo como o efeito de *back-reaction* pode ser incorporado ao método de Hamilton-Jacobi. Na seção anterior, obtivemos a probabilidade de tunelamento de uma partícula de energia ω (3.12). Vamos supor, devido a conservação de energia, que para uma partícula com energia instantânea $\tilde{\omega}$ que tenha tunelado o horizonte de eventos, a métrica do buraco negro será dada por

$$ds^2 = -f[r(M - \tilde{\omega})]dt^2 + g[r(M - \tilde{\omega})]^{-1}dr^2 + h[r(M - \tilde{\omega})](d\theta^2 + \sin^2\phi^2). \quad (3.22)$$

Devemos notar que r é uma função não mais somente de M , mas de $M - \tilde{\omega}$, onde M é a massa do buraco negro antes do tunelamento da partícula. Aqui, não podemos supor que r muda instantaneamente de $r(M)$ para $r(M - \omega)$, pois isso violaria o princípio da incerteza. Ao invés disso, devemos assumir que essa transição ocorre gradualmente. Portanto, devemos assumir uma transição suave, $r(M) \rightarrow r(M - \tilde{\omega})$, onde $\tilde{\omega}$ varia de 0 a ω .

A parte relevante da ação, desconsiderando os termos reais, é dada por

$$\mathcal{I}(r) = \int_0^\omega \frac{2\pi i}{\sqrt{f'(r_H(M - \tilde{\omega}))g'(r_H(M - \tilde{\omega}))}} d\tilde{\omega}. \quad (3.23)$$

Por outro lado, de acordo com (3.13), temos

$$\beta = \frac{4\pi}{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}. \quad (3.24)$$

Portanto,

$$\mathcal{I}(r) = \frac{i}{2} \int_0^\omega \beta(M - \tilde{\omega}) d\tilde{\omega}. \quad (3.25)$$

Agora, vamos expandir a ação em série de Taylor. Essa expansão se justifica no fato de que o buraco negro é muito mais energético do que qualquer partícula emitida, de modo que

$M \gg \omega \geq \tilde{\omega}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(r) &= \frac{i}{2} \int_0^\omega [\beta(M) - \tilde{\omega} \partial_M \beta(M) + \mathcal{O}(\tilde{\omega}^2)] d\tilde{\omega} \\ &= \frac{i}{2} \beta(M) \left[\omega - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial_M \beta(M)}{\beta(M)} + \mathcal{O}(\omega^3) \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde ∂_M denota a derivação em relação ao argumento. Pela primeira lei mecânica de buraco negro, devemos ter $T\delta S = \delta M$ logo, $\beta = \partial_M S$. Deste modo, a ação se torna

$$\mathcal{I}(r) = \frac{i}{2} \left[\omega \partial_M S - \frac{\omega^2}{2} \partial_M^2 S + \mathcal{O}(\omega^3) \right]. \quad (3.27)$$

Devemos notar que

$$S(M - \omega) \approx S(M) - \omega \partial_M S + \frac{\omega^2}{2} \partial_M^2 S + \mathcal{O}(\omega^3). \quad (3.28)$$

Logo, vemos que a ação é dada pela variação da entropia devido a emissão de uma partícula com energia ω

$$\mathcal{I}(r) = -\frac{i}{2} [S(M - \omega) - S(M)]. \quad (3.29)$$

Esse resultado está em concordância com o obtido em [9]. Com isso, vemos que a consideração dos efeitos de *back-reaction* nos dão a seguinte probabilidade de tunelamento

$$\Gamma(M, \omega) = \exp [S(M - \omega) - S(M)] = e^{\Delta S}. \quad (3.30)$$

Como $e^{\Delta S} = \exp S_{final} / \exp S_{inicial}$, podemos reinterpretar esse termo como o número de graus de liberdade internos do buraco negro. Portanto, a temperatura corrigida será dada por

$$T = -\frac{\omega}{\ln[\Gamma(M, \omega)]} = -\frac{\omega}{\Delta S}. \quad (3.31)$$

Para o caso de Schwarzschild, temos

$$\Gamma(M, \omega) = e^{\Delta S} = \exp \left[8\pi\omega \left(\frac{\omega}{2} - M \right) \right], \quad (3.32)$$

de modo que a temperatura corrigida é dada por

$$T = \frac{1}{8\pi(M - \omega/2)} \approx \frac{1}{8\pi M} \left[1 + \frac{\omega}{2M} + \mathcal{O}(\omega^2) \right] \approx T_0 \left[1 + \frac{\omega}{2M} + \mathcal{O}(\omega^2) \right]. \quad (3.33)$$

O termo ω surge da conservação da energia que, de certa forma, aumenta a temperatura do buraco negro a medida que este evapora [9].

3.3 Paradoxo da Informação

O paradoxo da informação tem sido um problema bastante discutido desde que a radiação de buracos negros foi demonstrada. A princípio, não deveríamos ter acesso a nenhuma informação sobre o estado quântico de um buraco negro durante sua evaporação. Porém, a radiação Hawking viola a unitariedade, ou seja, um estado quântico puro poderia evoluir para um estado quântico misto. Até o momento, não há um consenso a respeito do paradoxo da informação. Por um lado, a unitariedade é a base para física clássica e quântica. Por outro, a radiação Hawking é um resultado confiável, tendo sido obtido por diversas abordagens distintas.

Se a radiação Hawking fosse somente térmica, nenhuma informação estaria contida nela, uma vez que ela seria especificada somente por sua temperatura. Além disso, de acordo com o teorema *no-hair*, somente uma pequena quantidade de parâmetros, por exemplo, massa, carga e momento angular, são suficientes para especificar a geometria externa a um buraco negro [15]. Portanto, a própria geometria do espaço-tempo não seria capaz conter informações detalhadas sobre a natureza do corpo que deu origem ao buraco negro. Com isso, pode-se especular que uma vez que um buraco negro evapore completamente, teremos perda de informação.

Como vimos, a conservação da energia resulta em correções não térmicas da radiação Hawking. Entretanto, como veremos, isso não é suficiente para provar que há transmissão de informação. Para tanto, devemos mostrar que as correções devido à efeitos de auto-gravitação nos levam à correlação entre dois eventos.

Por exemplo, podemos calcular a correlação entre a emissão de uma partícula com energia $\omega_1 + \omega_2$ e a emissão de uma partícula de energia ω_1 seguida pela emissão de uma partícula de energia ω_2 . Quando efeitos de *back-reaction* não são levados em consideração, a correlação entre esses eventos é zero. Porém, uma vez que levamos em conta correções não térmicas, podemos mostrar que existe correlação entre dois eventos de tunelamento.

A correlação entre eventos de emissão de partículas de um buraco negro foi discutida pela primeira vez em [9, 44]. Entretanto, esses trabalhos concluíram que a correlação deveria ser nula, mesmo para os termos de correção de *back-reaction*. Posteriormente, foi mostrado que na verdade esses termos possuem correlação não nula [11]. Esse pode ser um indicativo de que não há perda de informação no processo de radiação Hawking.

A medida de correlação estatística de dois eventos x e y é dada por [45]

$$\chi(x, y) = \ln \left[\frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} \right], \quad (3.34)$$

onde $P(x)$ é a probabilidade do evento x ocorrer, $P(y)$ é a probabilidade do evento y ocorrer, e

$P(x, y)$ é a probabilidade de ambos os eventos ocorrerem. Podemos ainda escrever

$$\chi(x, y) = \ln \left[\frac{P(y|x)}{P(y)} \right], \quad (3.35)$$

onde $P(y|x) = P(x, y)/P(x)$ é a probabilidade condicional de y acontecer, dado que x aconteceu. Se substituirmos $P(y)$ por $P(y|x)$, obteremos correlação nula entre os dois eventos.

Iremos estender esse conceito para o caso de tunelamento de partículas através do horizonte de eventos de um buraco negro. Neste caso, a probabilidade do evento 1 ocorrer (emissão de uma partícula com energia $\omega_1 + \omega_2$) é dada por $\Gamma(M, \omega_1 + \omega_2)$. A probabilidade de duas partículas com energia ω_1 e ω_2 serem emitidas separadamente será dado por $\Gamma(M, \omega_1)\Gamma(M, \omega_2)$, pois os eventos são independentes, Aqui, Γ é definido como em (3.30). Deste modo, temos para o caso de Schwarzschild

$$\begin{aligned} \Gamma(M, \omega_1 + \omega_2) &= \exp [S(M - \omega_1 - \omega_2) - S(M)] \\ &= \exp [4\pi (M - \omega_1 - \omega_2)^2 - 4\pi M^2], \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\Gamma(M, \omega_1) = \exp [S(M - \omega_1) - S(M)] = \exp [4\pi (M - \omega_1)^2 - 4\pi M^2], \quad (3.37)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma(M, \omega_2) &= \exp [S(M - \omega_1 - \omega_2) - S(M - \omega_1)] \\ &= \exp [4\pi (M - \omega_1 - \omega_2)^2 - 4\pi (M - \omega_1)^2]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Em $\Gamma(M, \omega_2)$ levamos em conta o fato de que, pela conservação de energia, a massa do buraco negro após a emissão de ω_1 é $M - \omega_1$.

Portanto, temos a seguinte correlação [9]

$$C(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \ln \Gamma(M, \omega_1 + \omega_2) - \ln [\Gamma(M, \omega_1)\Gamma(M, \omega_2)] = 0. \quad (3.39)$$

Esse resultado nos diz que não há correlação entre os dois eventos, de modo que teríamos perda de informação.

Entretanto, de acordo com as observações encontradas em [11], a probabilidade de emissão de ω_2 deve ser dada por $\Gamma(M, \omega_2)$ e não por $\Gamma(M - \omega_1, \omega_2)$. Primeiro, devemos notar que essa é na verdade a probabilidade da partícula 2 ser emitida dado que a partícula 1 foi emitida [14]

$$\Gamma(\omega_2|\omega_1) = \Gamma(M - \omega_1, \omega_2) = \exp [S(M - \omega_1 - \omega_2) - S(M - \omega_1)]. \quad (3.40)$$

Com isso, podemos mostrar que a probabilidade de duas emissões com energia ω_1 e ω_2 é dada por

$$\begin{aligned}
\Gamma(\omega_2, \omega_1) &= \Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2|\omega_1) \\
&= \exp [S(M - \omega_1) - S(M)] \times \exp [S(M - \omega_1 - \omega_2) - S(M - \omega_1)] \\
&= \exp [S(M - \omega_1 - \omega_2) - S(M)] = \Gamma(\omega_2 + \omega_1),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde omitimos a dependência em M em $\Gamma(\omega_1) = \Gamma(M, \omega_1)$ e $\Gamma(\omega_2 + \omega_1) = \Gamma(M, \omega_2 + \omega_1)$.

Para obter a probabilidade de emissão da partícula com energia ω_2 , devemos utilizar a probabilidade da emissão da partícula 1 ocorrer, dado que a segunda partícula foi emitida, $\Gamma(\omega_1|\omega_2)$. Temos

$$\begin{aligned}
\Gamma(\omega_2) &= \frac{\Gamma(\omega_2, \omega_1)}{\Gamma(\omega_1|\omega_2)} = \frac{\exp [S(M - \omega_1 - \omega_2) - S(M)]}{\exp [S(M - \omega_1 - \omega_2) - S(M - \omega_2)]} \\
&= \exp [S(M - \omega_2) - S(M)].
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Vemos que de fato, $\Gamma(\omega_2) = \Gamma(M, \omega_2)$, e não $\Gamma(M - \omega_1, \omega_2)$ como poderíamos ser levados a pensar. Uma outra maneira de obter esse resultado é utilizando a lei Bayesiana $\Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2|\omega_1) = \Gamma(\omega_2)\Gamma(\omega_1|\omega_2)$. Esse é um ponto importante uma vez que, se a probabilidade de tunelamento da partícula 2 fosse realmente $\Gamma(M - \omega_1, \omega_2)$, teríamos que a correlação calculada em (3.39) seria nula, mesmo com a correção de *back-reaction* [9, 44]. Levando em conta a probabilidade de emissão dada em (3.42), a correlação encontrada é $8\pi\omega_1\omega_2$ [11].

Como foi dito, o problema da perda de informação tem sido bastante discutido nos últimos anos. Alguns trabalhos de Zhang *et al.* [11, 14] propõem uma possível alternativa ao paradoxo da informação. Além disso, cálculos considerando correções de *back-reaction* e correções quânticas para o espectro de buracos negros mostraram que a entropia do buraco negro é conservada [12, 13].

Entretanto, ainda não existe um consenso no que concerne o paradoxo da informação. Enquanto alguns trabalhos afirmam que a natureza de $\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \Gamma(\omega_1 + \omega_2)$ é suficiente e necessárias para garantir a conservação da entropia e a unitariedade [16], outros afirmam que somente pequenas correções não são suficientes para que não haja perda de informação [10, 15]. De acordo com esses autores, os argumentos apresentados por Zhang *et al.* não estão plenamente de acordo com a ideia de conservação de informação quântica. Objeções aos trabalhos de Zhang *et al.* podem ser encontradas em. Na segunda referência, Mathur afirma que a condição $\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \Gamma(\omega_1 + \omega_2)$ é válida mesmo a nível de árvore (sem correções de *back-reaction*), situação na qual não deve existir correlação. De acordo com ele, a natureza do paradoxo se encontra no emaranhamento dos estados em ambos os lados do horizonte de eventos, e não apenas dos estados emitidos.

4 VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

A simetria de Lorentz é a simetria fundamental da relatividade [46]. Apesar dessa simetria ter sido experimentalmente comprovada [47], a quebra ou violação dessa simetria se mostrou interessante no contexto de teoria de cordas. Em 1989, Kostelecký e Samuel [17] investigaram a possibilidade de ocorrer uma quebra espontânea na simetria de Lorentz em teoria de cordas, procedimento que ganhou bastante adesão na comunidade científica, inclusive no contexto gravitacional [18–20]

Neste capítulo, revisamos os conceitos de violação da simetria de Lorentz. O capítulo está organizado da seguinte forma: nas duas primeiras seções, falamos sobre a simetria de Lorentz e apresentamos o modelo de *bumblebee* de LSB. Com isso, baseado no trabalho de Bertolami e Páramos [20], apresentamos uma métrica tipo Schwarzschild para a LSB radial; na última seção, apresentamos a gravidade *rainbow* e obtemos uma métrica tipo Schwarzschild.

4.1 Simetria de Lorentz

De acordo o princípio da relatividade especial, as leis da física devem ser invariantes sob transformações de Lorentz [46]. As transformações de Lorentz podem ser: *boosts*, que mudam a velocidade do sistema de coordenadas numa determinada direção e rotações espaciais. Além disso, podem ser realizadas do ponto de vista passivo – quando relacionamos sistemas de coordenadas inerciais, enquanto os pontos do espaço-tempo (eventos) são mantidos fixos, – ou ativo – quando o sistema de coordenadas permanece fixo, mas movimentamos os pontos do espaço-tempo [48].

Uma transformação de Lorentz relaciona um sistema de coordenadas x^μ com um sistema de coordenadas x'^μ da seguinte forma

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (4.1)$$

onde

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\gamma{}_\delta \eta_{\mu\gamma} = \eta_{\nu\delta}, \quad (4.2)$$

com a métrica de Minkowski dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

O conjunto de todas as transformações de Lorentz forma o grupo de Poincaré, ou grupo de Lorentz inhomogêneo. O subconjunto das transformações com $a^\mu = 0$ forma o grupo de Lorentz homogêneo, ao qual nos referiremos apenas como grupo de Lorentz [46]. Um subgrupo importante do grupo de Lorentz é o grupo das transformações próprias ($\det\Lambda = 1$) e ortocronológicas ($\Lambda^0{}_0 \geq 0$), no qual cada transformação pode ser obtida por meio de transformações in-

finitesimais. Em geral, quando nos referimos a invariância de Lorentz, levamos em consideração somente as transformações desse grupo [49].

4.2 Violação Espontânea de uma simetria

O conceito de simetria está profundamente atrelado com as leis da física e, em geral, diz respeito a transformações matemáticas que não modificam a forma das equações que regem as leis da natureza. Desse modo, podemos dizer que a natureza é definida por simetrias.

Uma simetria pode ser quebrada, por exemplo, por meio de uma quebra espontânea. Uma maneira simples de visualizar o mecanismo de quebra espontânea de simetria é imaginar que temos um lápis mantido na vertical, com sua ponta tocando uma mesa, enquanto seguramos a outro lado do lápis e então o soltamos. O lápis, ao cair, deixa seu estado de simetria rotacional, o qual é instável e ocorre num regime de energia mais alta, e procura uma configuração de menor energia. Nessa configuração, encontramos um lápis apontando em alguma direção. Como não há uma maneira de prever qual será essa direção, ou seja, não existe uma direção preferencial pré-determinada na qual o lápis irá cair, dizemos que houve uma quebra espontânea de simetria [50].

A quebra espontânea da simetria na física ocorre, por exemplo, com materiais ferromagnéticos os quais, em altas temperaturas, possuem um alinhamento aleatório dos seus ímãs atômicos internos. Materiais ferromagnéticos possuem subunidades chamadas domínios magnéticos, que contém bilhões de átomos cujos “pólos norte” estão alinhados numa mesma direção. A medida que o material é resfriado, observa-se que os diferentes domínios apontam em direções aleatórias, de modo que não existe direção de alinhamento preferencial.

Se um campo magnético é aplicado a esse ferromagnético, ocorre o alinhamento de todos os domínios, fazendo com que o ferromagnético seja magnetizado. Esse alinhamento é então responsável pela quebra da isotropia espacial. Mesmo que o campo magnético externo seja desligado, os domínios continuam alinhados, gerando um campo magnético de fundo. Para retornar a situação na qual os domínios do ferromagnético estão aleatoriamente alinhados, é preciso elevar a temperatura do ferromagnético acima de uma temperatura crítica, chamada temperatura de Curie, caso no qual ocorre uma transição de fase [50].

Um exemplo clássico de violação espontânea de simetria é o do “potencial chapéu de mexicano” [51]. Vamos considerar o lagrangeano utilizado para descrever um campo escalar, no modelo $\lambda\phi^4$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (4.3)$$

Esse modelo é invariante sob a transformação $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$.

Desejamos encontrar o estado fundamental do modelo, ou seja, a configuração do

campo ϕ com menor energia. Para tanto, precisamos encontrar o funcional de energia. O quadri-momento ou tensor energia-momento associado ao campo ϕ é dado por [52]

$$P^\mu = \int dx^3 \Theta^{\mu 0}, \quad (4.4)$$

onde

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (4.5)$$

é o tensor densidade de energia-momento.

Desse modo, o funcional de energia associado ao campo ϕ é dado por

$$E = \int dx^3 \left[\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right] \quad (4.6)$$

Como os dois primeiros termos na equação anterior são quadráticos, a energia mínima é obtida quando esses termos se anulam e, além disso, o potencial

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (4.7)$$

deve ser minimizado.

Devemos analisar os casos $m^2 \geq 0$ e $m^2 < 0$. Se $m^2 \geq 0$, o potencial é minimizado em $\phi = 0$. Esse estado é invariante sob a transformação $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$, logo, o estado fundamental não viola a simetria do sistema. Se $m^2 < 0$, o potencial é minimizado em

$$\phi = \pm \phi_0 = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4.8)$$

onde $\mu^2 = -m^2 > 0$. O ponto $\phi = 0$ agora é um ponto de máximo local do potencial, como mostrado na figura 1.

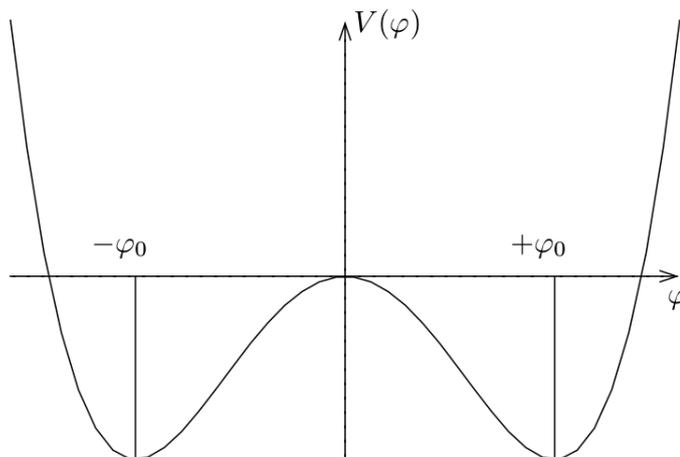


Figura 1: Potencial de um campo escalar real com simetria $\phi = -\phi$. Fonte: [51].

Se escolhermos $\phi = \phi_0$ como estado fundamental, podemos ver que esse estado

não é invariante sob a transformação $\phi = -\phi$, logo, a simetria do sistema é espontaneamente quebrada.

No caso de um campo escalar complexo

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (4.9)$$

o lagrangeana é dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2, \quad (4.10)$$

ou, em termos dos campos reais ϕ_1 e ϕ_2

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (4.11)$$

Novamente, desejamos encontrar o estado de mínima energia para o campo ϕ , o que pode ser feita de maneira análoga ao caso escalar real. Entretanto, neste caso a lagrangeana é invariante sob transformações globais do grupo U(1):

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x). \quad (4.12)$$

Semelhantemente ao caso escalar, devemos minimizar o potencial

$$V(\phi, \phi^*) = m^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2. \quad (4.13)$$

Se $m^2 \geq 0$, temos $\phi = 0$ como estado fundamental, de modo que a simetria U(1) é preservada. Se $m^2 < 0$, o potencial é mínimo para $\phi = \phi_0 = \mu/\sqrt{\lambda}$ e possui um máximo local para $\phi = 0$. Neste caso, o potencial forma uma figura de revolução semelhante a um chapéu mexicano. Vamos considerar o estado fundamental como

$$\phi = \frac{\phi_0}{\sqrt{2}}, \quad (4.14)$$

ou seja, $\phi_1 = \phi_0/\sqrt{2}$ e $\phi_2 = 0$. Podemos notar que esse estado não é preservado sob transformações do tipo (4.12). Assim, quando $m^2 < 0$, a simetria do sistema é espontaneamente quebrada, tanto para o caso real, quanto para o caso complexo.

Perturbações nos campos ϕ_1 e ϕ_2 levam ao surgimento de um campo não-massivo, devido à simetria do grupo U(1) na lagrangeana e a não-simetria do estado fundamental em relação a esse mesmo grupo. Esse campo não-massivo é denominado campo de Nambu-Goldstone e a partícula relacionada a esse campo é denominada bóson de Nambu-Goldstone [53–55].

4.3 Modelo de *Bumblebee*

De acordo com a simetria de Lorentz, os resultados de experimentos físicos não dependem da orientação do laboratório, ou de sua velocidade em relação ao espaço. Ou seja, as leis da física são essencialmente invariantes sob rotações ou *boosts*. No contexto do modelo padrão, a simetria de Lorentz é uma simetria global, no espaço *flat*. Já no contexto de relatividade geral, a simetria de Lorentz é uma simetria local para observadores em queda livre.

Na construção de teorias, é desejável que a ação e, conseqüentemente, a lagrangeana que descreve essa teoria sejam invariantes sob as simetrias em interesse. Logo, uma teoria que preserve a simetria de Lorentz, por exemplo, deve ter um lagrangeano que seja invariante sob transformações de Lorentz. Entretanto, em algumas situações a quebra dessa simetria pode ter um papel relevante. Dentre as motivações para a violação da simetria de Lorentz podemos citar: a busca de uma nova física na escala de energia de Planck; a criação de uma teoria unificada da relatividade geral e do modelo padrão, o que acredita-se ser válido na escala de Planck [18].

No mecanismo proposto por Kostelecky e Samuel, a violação espontânea da simetria de Lorentz ocorre quando o estado de vácuo perturbativo é instável. Neste cenário, alguns campos podem assumir valores esperados não-nulos, quebrando as simetrias em relação as quais esses campos não são invariantes [17].

No contexto da gravitação, a quebra de Lorentz ocorre utilizando o formalismo *vierbein*, o qual permite o tratamento de transformações locais de Lorentz e difeomorfismos. Modelos de *bumblebee*, no qual o campo de *bumblebee* adquire um valor esperado constante, são de especial interesse uma vez que abrangem rotações, *boosts* e violações da simetria CPT (simetria sob inversão de carga, paridade e direção temporal). O campo de *bumblebee* é implementado por um potencial que possui um mínimo no valor esperado no vácuo (VEV) deste campo [18]. Esse tipo de violação espontânea da simetria de Lorentz foi inicialmente investigada em [56]

A dinâmica do campo de *bumblebee* é determinada pela ação de *bumblebee*. A lagrangeana para essa ação é dada por [19]:

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{gB} + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_J, \quad (4.15)$$

onde \mathcal{L}_g é a lagrangeana gravitacional da relatividade geral, \mathcal{L}_{gB} é o termo responsável pelo acoplamento do campo de *bumblebee* com a gravidade através de uma constante de acoplamento real ξ , \mathcal{L}_K contém os termos cinéticos do campo de *bumblebee*, \mathcal{L}_V é o termo que contém o potencial responsável pela LSB e \mathcal{L}_J contém os termos de acoplamento do campo de *bumblebee* com a matéria e envolve uma corrente de matéria J^μ .

A parte cinética do campo contém a intensidade do campo de *bumblebee*

$$B_{\mu\nu} = D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu, \quad (4.16)$$

onde D_μ é a derivada covariante adequada para a geometria do espaço-tempo escolhido. Quando não há torções ou curvatura, por exemplo no espaço de Minkowski, $B_{\mu\nu}$ se reduz a $\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

O potencial contido em \mathcal{L}_V deve possuir um mínimo no VEV b_μ do campo de *bumblebee* B_μ . Assim, o potencial deve ter a seguinte dependência funcional:

$$V = V(B^\mu B_\mu \pm b^2). \quad (4.17)$$

O valor b^2 é real e está relacionado o VEV b_μ do campo de *bumblebee*, enquanto os sinais positivo e negativo determinam se esse campo é tipo espaço ou tipo tempo. Assim, b_μ e b são, respectivamente, o coeficiente e o parâmetro da violação da simetria de Lorentz.

Portanto, a ação de *bumblebee* pode ser construída da seguinte forma

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2) - B_\mu J^\mu \right], \quad (4.18)$$

onde $\kappa = 8\pi G$.

4.3.1 Dinâmica do campo de *bumblebee*

Nesta seção, focamos na solução apresentada no trabalho de Bertolami e Páramos [20], no qual a quebra da simetria de Lorentz é puramente radial. Neste caso, estamos interessados em obter a dinâmica do campo de *bumblebee* considerando somente as contribuições de regiões de vácuo. Isso significa que, na ação (4.18), o termo correspondente ao acoplamento com a matéria deve ser nulo. Logo, na equação (4.15) devemos ter $\mathcal{L}_J = 0$.

De início, assumimos que o espaço-tempo é estático e esfericamente simétrico. Para tanto, usamos a métrica de Birkhoff $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{2\phi}, e^{2\rho}, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$, onde ϕ e ρ são funções de r . A condição de estaticidade nos diz que devemos ter um vetor de Killing do tipo tempo, enquanto a condição de esfericidade nos diz que devemos ter três vetores rotacionais de Killing do tipo espaço. Em Relatividade Geral, o vetor de Killing é um vetor que dá a direção através da qual o sistema não é modificado, ou seja, ele indica uma simetria do sistema. [46]. Os vetores de Killing para essa métrica são conservados, de modo que a simetria radial é preservada.

Vamos admitir que o campo vetorial B_μ está fixado no seu VEV b_μ , e que esse VEV obedece $\nabla_\mu b_\nu = 0$ ao invés de $\partial_\mu b_\nu = 0$, que é a prescrição usual. Com isso, podemos construir a corrente covariantemente associada ao campo de *bumblebee*. O vetor de Killing K_μ é definido por

$$\mathcal{L}_{\vec{K}} B^\mu = 0 = K^\beta \nabla_\beta B^\mu - B^\beta \nabla_\beta K^\mu. \quad (4.19)$$

Segue que $\nabla_\beta K^\mu = 0$. Se construirmos uma corrente escalar $J = B^\mu K_\mu$, teremos

$$\nabla_\alpha J = (\nabla_\alpha B^\mu) K_\mu + B^\mu \nabla_\alpha K_\mu. \quad (4.20)$$

Logo, pelas condições impostas a B_μ e K_μ , vemos que a corrente J associada ao campo de *bumblebee* deve ser constante.

Agora, podemos calcular b_μ . Como a única derivada covariante não trivial é aquela em relação a coordenada radial, podemos assumir que $b_\mu = (0, b(r), 0, 0)$. Temos então

$$\nabla_\mu b_\nu = \partial_\mu b_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha b_\alpha = 0, \quad (4.21)$$

de onde segue, se considerarmos $\phi(r) = const$, que

$$b'(r) - \rho'(r)b(r) = 0. \quad (4.22)$$

Deste modo, temos $b(r) = \xi^{-1/2} b_0 e^\rho$, onde b_0 e ξ são constantes e o termo $\xi^{-1/2}$ é introduzido por mera conveniência.

Dadas as condições impostas a B_μ , a ação dada em (4.18) se torna

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa} (R + \xi B^r B^r R_{rr}) = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa} [R + \xi (g^{rr})^2 b^2(r) R_{rr}]_s, \quad (4.23)$$

onde o índice s indica que estamos trabalhando somente com quantidades espaciais. Na equação acima, vemos R_{rr} é que o único termo relevante do tensor de Ricci. Se levamos em conta somente a parte radial da ação, o determinante da métrica fica dado por $\sqrt{-g} = r^2 e^{\rho+\phi}$. Além disso, o escalar de curvatura e o tensor de Ricci que são relevantes ao nosso caso são, respectivamente por

$$\begin{aligned} R &= \frac{2[1 + (2r\rho'(r) - 1)e^{-2\rho(r)}]}{r^2}, \\ R_{rr} &= \frac{2\rho'(r)}{r}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde a linha denota derivação em relação a r e foi feita a integração em relação a dependência angular. Aqui, novamente utilizamos $\phi(r) = const$ para facilitar os cálculos envolvidos.

Vamos introduzir uma redefinição de campo $\Psi = (1 - e^{-2\rho})r^2$. Podemos notar que

$$\frac{2\rho' e^{-2\rho}}{r} = 2\Psi + r\Psi'. \quad (4.25)$$

Agora, podemos reescrever o escalar de curvatura em termos de Ψ

$$R = 2\Psi + \frac{4e^{-2\rho}}{r} = 2[3\Psi + r\Psi']. \quad (4.26)$$

Da definição de b_μ e da equação (4.24), temos $\xi(b^r)^2 R_{rr} = 2b_0^2 \rho' e^{-2\rho} r^{-1}$. Logo,

$$\xi(b^r)^2 R_{rr} = b_0^2 (2\Psi + r\Psi'). \quad (4.27)$$

Se substituirmos (4.26) e (4.27) na ação obtida em (4.23), a parte radial da ação será dada por

$$S_s = \frac{1}{\kappa} \int dr r^4 e^{\phi+\rho} \left[(3 + b_0^2) \Psi + \left(1 + \frac{b_0^2}{2} \right) r \Psi' \right]. \quad (4.28)$$

Na ação acima, somente ϕ não depende de r . Se variarmos essa ação em relação a ϕ , obteremos

$$(3 + b_0^2) \Psi + \left(1 + \frac{b_0^2}{2} \right) r \Psi' = 0, \quad (4.29)$$

cuja solução é do tipo $\Psi = \Psi_0 r^{-3+L}$, onde L é dado por

$$L = 3 - \frac{3 + b_0^2}{1 + \frac{b_0^2}{2}} \simeq 3 - 3 + \frac{b_0^2}{2} = \frac{b_0^2}{2}. \quad (4.30)$$

Se compararmos a definição de Ψ com a solução da equação (4.33), obtemos

$$g_{rr} = e^{2\rho} = (1 - \Psi_0 r^{L-1})^{-1}. \quad (4.31)$$

Podemos reescrever a métrica obtida numa forma análoga a da métrica de Schwarzschild:

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \left(1 - \frac{2G_L m}{r} r^L \right)^{-1}, \\ g_{00} &= - \left(1 - \frac{2G_L m}{r} r^L \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde G_L tem dimensão $[G_L] = L^{2-L}$ em unidades naturais ($\hbar = c = 1$). Podemos definir $G_L = G r_0^{-L}$, onde r_0 é uma distância arbitrária. Assim, a massa geométrica pode ser definida como $M \equiv Gm$. Podemos notar que, no limite em que não temos LSB, ou seja, $L \rightarrow 0$, recuperamos $G_L \rightarrow G$. Podemos reescrever a métrica como

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \left(1 - \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0^L} \right)^{-1}, \\ g_{00} &= - \left(1 - \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0^L} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

O horizonte de eventos da métrica (4.33) é dado pela condição

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{r} \frac{r^L}{r_0^L} = 0. \quad (4.34)$$

Portanto, $r_S = (2M r_0^{-L})^{1/(1-L)}$. Resta identificar se essa singularidade é física ou não. Para

tanto, vamos calcular o escalar de Kretschmann, definido como $K = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$. Temos

$$\begin{aligned} K &= 48 \left[1 - \frac{5}{3}L + \frac{17}{12}L^2 - \frac{1}{2}L^3 + \frac{1}{12}L^4 \right] M^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2L} r^{-6} \\ &\simeq \left(1 - \frac{5}{3}L \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2L} K_0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $K_0 = 48M^2r^{-6}$ é o escalar de Kretschmann da métrica de Schwarzschild. Podemos ver que $K(r = r_S)$ é finito, o que indica que a singularidade $r = r_S$ é resultante das coordenadas escolhidas, logo é removível. Como o coeficiente de LSB $b(r)$ é muito pequeno, $r^{2L-6} \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 0$, o que indica que $r = 0$ é uma singularidade intrínseca, como no caso usual de Schwarzschild.

Com base nessa nova solução de buraco negro, podemos aplicar o método de tunelamento quântico e obter as propriedades termodinâmicas associadas a ela.

Na referência [20], os autores comparam o resultado (4.32) ao potencial de Yukawa para obter parâmetros pós-newtonianos. Assim, têm-se

$$-\frac{G_L m}{r} r^L = -\frac{G_Y m}{r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda}). \quad (4.36)$$

O primeiro termo após a igualdade corresponde ao potencial coulombiano enquanto o segundo termo corresponde ao potencial Yukawa. A constante λ corresponde ao alcance do potencial uma vez que este se aproxima muito rapidamente de zero a medida que r se torna muito maior que λ . Expandindo o termo do lado esquerdo até primeira ordem em torno do ponto $r = r_0$ e o termo da esquerda em torno do ponto $r = 0$, obtemos

$$G_L r_0^L \left(1 - L + L \frac{r}{r_0} \right) = G_Y \left(1 + \alpha - \alpha \frac{r}{\lambda} \right). \quad (4.37)$$

Por comparação, podemos identificar $\lambda = r_0$ e $\alpha = -L$. Isso permite a investigação dos efeitos de uma LSB puramente radial a uma distância r_0 da fonte como se esses efeitos ocorressem devido a um potencial de Yukawa. O sinal negativo em α indica que, para $r > r_0$, a LSB radial gera uma componente repulsiva. Afim de obter os valores permitidos para L , deve-se observar os valores permitidos para α quando $\lambda = r_0$ é mantido fixo num experimento. Essa análise foi realizada em testes planetários para a lei de Kepler, com os seguintes valores para Vênus: $\lambda = r_0 = 0,723 UA$ e $L = |\alpha| \leq 2 \times 10^{-9}$.

4.4 Gravidade *Rainbow*

A relação de dispersão padrão, em unidades naturais, é dada por $E^2 - p^2 = m^2$. Entretanto, de acordo com alguns autores, há motivos para crer que essa relação não pode ser mantida na escala de energia de Planck [57–60]. Além disso, na relatividade especial, a escala

de Planck não é invariante sob transformações de Lorentz. A solução para esse problema foi modificar a relação de dispersão padrão para uma relação de dispersão modificada (MDR).

No contexto da relatividade especial, foi criada a relatividade duplamente especial (DSR - Doubly Special Relativity) [61], cuja as constantes fundamentais são: a velocidade da luz c e a energia de Planck E_p . O termo duplamente especial se refere ao fato de que, nessa teoria, o princípio da relatividade pode coexistir com escalas de velocidade e comprimento independentes do observador. Isso difere da relatividade especial, uma vez que neste caso, comprimentos são dependentes do observador.

A DSR foi, mais tarde, generalizada para espaços curvos [21]. Neste caso, ao invés de uma única métrica, temos uma família de métricas parametrizadas pela razão E/E_p . Por esta razão, a versão geral da DSR é chamada de *Rainbow Gravity* (RG). A RG tem se mostrado promissora no tratamento termodinâmico de buracos negros [22, 62–70]. Além disso, acredita-se que a RG pode prover uma solução para o paradoxo da informação uma vez que, próximo à escala de Planck em RG, um buraco negro não evapora completamente. Essa propriedade foi investigada para anéis negros, soluções de Schwarzschild e Kerr-Newmann em [62–64].

De acordo com a RG, os princípios da equivalência e correspondência devem ser modificados [21]. Pelo princípio da equivalência modificado, observadores em queda livre numa dada região do espaço-tempo com raio de curvatura R muito maior que o inverso da energia de Planck E_p^{-1} e fazendo medidas para partículas ou campos com energia E tal que $1/R \leq E \leq E_p$, observam as mesmas leis físicas que um observador inercial num espaço chato de *rainbow*. O princípio da correspondência modificado afirma que, no limite $E/E_p \rightarrow 0$, a relatividade geral é recuperada.

Utilizando a RG, a relação de dispersão modificada (MDR) se torna [21]

$$E^2 F^2(E/E_p) - p^2 G^2(E/E_p) = m^2, \quad (4.38)$$

onde $F(E/E_p)$ e $G(E/E_p)$ são as funções *rainbow* responsáveis por modificar a relação de dispersão e E_p é a energia de Planck. A escolha das funções *rainbow* não é única, porém elas devem ser definidas de maneira que, no limite $E/E_p \rightarrow 0$, a MDR se torne a relação de dispersão padrão. Assim, devemos ter

$$\lim_{E/E_p \rightarrow 0} F(E/E_p) = \lim_{E/E_p \rightarrow 0} G(E/E_p) = 1. \quad (4.39)$$

A deformação na relação de dispersão (4.38) pode ser realizada através de uma transformação não-linear do espaço dos momentos nele mesmo, $U : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$:

$$U \cdot (E, p_i) = \left[F \left(\frac{E}{E_p} \right) E, G \left(\frac{E}{E_p} \right) p_i \right]. \quad (4.40)$$

Essa transformação ocorre no espaço dos momentos e uma questão que surge naturalmente é como isso modifica a relatividade geral. Como argumentado por Magueijo *et al.* [21], os termos da métrica $g_{\mu\nu}(E)$ dependem da escala de energia na qual a geometria do espaço-tempo é testada, e não da energia do próprio espaço-tempo. Em outras palavras, se um observador em queda livre percebe a geometria do espaço-tempo utilizando o movimento de uma partícula ou conjunto de partículas, então E é a energia da partícula ou conjunto de partículas. Isso significa que a geometria do espaço-tempo deve depender da energia pois, partículas com energia E se movem em um sistema referencial dependente dessa energia. Assim

$$\tilde{e}_0 = f\left(\frac{E}{E_p}\right) e_0, \quad \tilde{e}_i = g\left(\frac{E}{E_p}\right) e_i, \quad (4.41)$$

onde o til denota o sistema referencial dependente da energia da partícula de prova. Desse modo, a métrica do espaço-tempo e outros tensores relevantes da relatividade geral como o tensor de curvatura e tensor energia-momento, são substituídos por versões dependentes da energia E .

A modificação da relação de dispersão faz com que a velocidade da luz seja dependente da energia sempre que $F(E/E_p) \neq G(E/E_p)$ [71]. Para ver isso, devemos obter a relação de dispersão para uma partícula não-massiva e então calcular a modificação na velocidade da luz. Neste caso, temos

$$EF(E/E_p) = pG(E/E_p), \quad (4.42)$$

de modo que a velocidade da luz depende da energia da partícula

$$c = \frac{dE}{dp} = \left(\frac{dp}{dE}\right)^{-1} = \frac{G^2}{FG - E(FG' - F'G)} = \frac{H}{1 - \frac{EH'}{H}}, \quad (4.43)$$

onde $H = G/F$.

A escolha das funções *rainbow* depende de motivações fenomenológicas. Uma escolha interessante de funções *rainbow* foi proposta em [71], na qual os autores sugeriram uma transformação do tipo

$$U = e^{-\lambda E^2 \partial / \partial E}. \quad (4.44)$$

Nesse caso, as funções *rainbow* são $F(E/E_p) = (1 - \gamma E/E_p)^{-1}$ e $G(E/E_p) = 1$, e γ é o parâmetro *rainbow*. Essa escolha implica que velocidade da luz depende da energia, $c = 1 - \gamma E/E_p$. Podemos notar que, neste caso, a velocidade da luz na gravidade *rainbow* se torna menor a medida que os fótons se tornam mais energéticos. Com base nessa escolha para as funções *rainbow*, a MDR tem a seguinte forma

$$\frac{E^2}{(1 - \gamma E/E_p)^2} - p^2 = m^2. \quad (4.45)$$

Para obter a modificação da métrica de acordo com a RG, devemos fazer as seguin-

tes modificações:

$$dt \rightarrow \frac{dt}{F(E/E_p)}, \quad dx^i \rightarrow \frac{dx^i}{G(E/E_p)}. \quad (4.46)$$

Portanto, em geral a métrica de um buraco negro pode assumir a forma:

$$ds^2 = \frac{f(r)}{F^2(E/E_p)} dt^2 - \frac{1}{g(r)G^2(E/E_p)} dr^2 - \frac{h(r)}{G^2(E/E_p)} d\Omega^2, \quad (4.47)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Utilizando a MDR dada em (4.45) e a métrica de Schwarzschild, obtemos a métrica de Schwarzschild em RG

$$ds^2 = \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.48)$$

Podemos notar que no limite $E/E_p \rightarrow 0$, a métrica usual de Schwarzschild é recuperada. O horizonte de eventos continua sendo $r_s = 2M$, enquanto a singularidade em $r = 0$ permanece. Para tanto, basta notarmos que o escalar de Kretschmann é igual ao da métrica de Schwarzschild padrão $R = 48M^2/r^6$, que é finito em $r_s = 2M$ e infinito em $r = 0$.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

No presente capítulo, apresentaremos os resultados obtidos ao aplicarmos o método de tunelamento quântico nas métricas tipo Schwarzschild, apresentadas nas seções 4.3 e 4.4. Primeiramente, obteremos as propriedades termodinâmicas de cada métrica e as comparamos com os resultados obtidos pelo método de Hawking e pelo o método da primeira lei. A partir desses resultados, obteremos as correções de *back-reaction* e as correlações entre eventos para cada uma das métricas estudadas. Discutiremos como a violação da simetria de Lorentz modifica os resultados já obtidos na literatura para a métrica de Schwarzschild, e que utilizamos como exemplo no capítulo 3.

5.1 Propriedades Termodinâmicas de Buracos Negros com Violação da Simetria de Lorentz

Nesta seção, estudaremos como a LSB afeta as propriedades termodinâmicas do buraco negro de Schwarzschild. Começaremos pela métrica com LSB puramente radial obtida por Bertolami e Páramos através do modelo de *Bumblebee* [20]. Após isso, estudaremos a métrica obtida por Magueijo e Smolin por meio da modificação da relação de dispersão [21].

5.1.1 LSB Puramente Radial

Na solução encontrada por Bertolami e Páramos [20] e discutida na seção 4.3, temos a seguinte métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0^L} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0^L} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.1)$$

onde r_0 é uma distância arbitrária e L é o parâmetro da LSB.

Deste modo, temos

$$f(r) = g(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \frac{r^L}{r_0^L} \right), \quad (5.2)$$

e

$$f'(r) = g'(r) = (1 - L) \frac{2M r^{-(2-L)}}{r_0^L}. \quad (5.3)$$

A temperatura do buraco negro é dada pela equação (3.13), de acordo com a qual, temos

$$T_{BH} = \frac{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}{4\pi}. \quad (5.4)$$

No caso da métrica (5.1), o raio do horizonte de eventos é dado por $r_H = (2Mr_0^{-L})^{1/(1-L)}$.

Portanto, a temperatura do buraco negro com LSB puramente radial é dada por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4\pi} \frac{(1-L)2Mr^{-(2-L)}}{r_0^L} \Big|_{r=r_H} = \frac{(1-L)2M(2Mr_0^{-L})^{-\frac{(2-L)}{(1-L)}}}{4\pi r_0^L} \\ &= (1-L)(2Mr_0^{-1})^{\frac{-L}{1-L}} T_0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde $T_0 = (8\pi M)^{-1}$ é a temperatura do buraco negro de Schwarzschild.

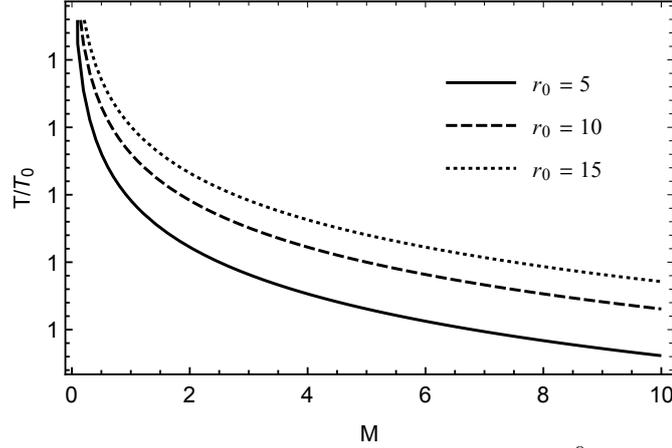


Figura 2: Fonte: O autor. Razão das temperaturas pela massa ($L = 10^{-9}$).

Vemos pelo resultado anterior que a violação da simetria de Lorentz modifica a temperatura do buraco negro de Schwarzschild pelo fator $(1-L)(2Mr_0^{-1})^{\frac{-L}{1-L}}$ que é igual a 1 quando tomamos o limite $L \rightarrow 0$. No gráfico 2, plotamos a razão entre a temperatura encontrada e a temperatura do caso usual de Schwarzschild para obter resultados mais expressivos. É possível notar que a temperatura T se torna expressivamente maior que a temperatura T_0 a medida que a massa do buraco negro se torna muito pequena. Além disso, vemos que quanto menor for o valor de r_0 , menor é a razão entre as temperaturas.

A modificação da temperatura devido a LSB fica mais clara quando utilizamos o método de Hawking, de acordo com o qual

$$T_{BH} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (5.6)$$

onde κ é a gravidade de superfície. No trabalho de Bertolami e Páramos [20], a temperatura é encontrada através do cálculo da gravidade de superfície. Verificamos que o resultado encontrado através da gravidade de superfície difere daquele obtido pelo método do tunelamento quântico pelo termo multiplicativo $1-L$. Entretanto, cabe ressaltar que os autores utilizam a gravidade de superfície do buraco negro de Schwarzschild, quando deveriam utilizar a gravidade de superfície da métrica (5.1), dada por

$$\kappa = \frac{\sqrt{f'(r_H)g'(r_H)}}{2} = (1-L)(2Mr_0^{-1})^{\frac{-L}{1-L}} \kappa_0, \quad (5.7)$$

onde $\kappa_0 = (4M)^{-1}$ é a gravidade de superfície do buraco negro de Schwarzschild. Vemos, ao calcular a gravidade de superfície corretamente, que o método original de Hawking e o método de tunelamento quântico são equivalentes. Assim, fica claro que a LSB modifica a gravidade de superfície do buraco negro e, conseqüentemente, a sua temperatura.

Agora, vamos calcular a entropia para o buraco negro de Schwarzschild com LSB puramente radial. Pela temperatura encontrada em (5.5), vemos que a dependência da em M é da forma $KM^{-1/(1-L)}$, onde $K = (1-L)(2r_0^{-L})^{-1/(1-L)}/4\pi$. Portanto, a entropia é dada por

$$\begin{aligned} S_{BH} &= \int \frac{dM}{T_{BH}(M)} = \frac{1}{K} \int M^{\frac{1}{1-L}} dM = \frac{4\pi(2r_0^{-L})^{1/(1-L)}}{1-L} \frac{1-L}{2-L} M^{\frac{2-L}{1-L}} \\ &= \frac{2(2Mr_0^{-1})^{\frac{L}{1-L}}}{2-L} S_0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $S_0 = 4\pi M^2$ é a entropia usual de Schwarzschild. Com isso, vemos que a LSB puramente radial modifica a entropia de Schwarzschild pelo termo $2(2Mr_0^{-1})^{\frac{L}{1-L}}/(2-L)$. Vemos pelo gráfico 3, que para massas pequenas, a razão entre as entropias se torna muito pequena. Podemos notar também que, quanto menor o valor de r_0 , maior a razão entre as entropias, o que está em concordância com o que acontece com a razão das temperaturas.

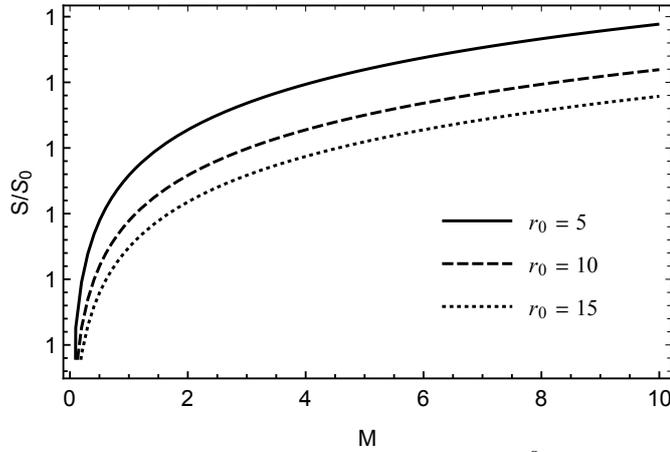


Figura 3: Fonte: O autor. Razão das entropias pela massa ($L = 10^{-9}$).

Podemos expandir a temperatura e a entropia em série de Taylor, uma vez que $L \ll 1$ e $L > 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \kappa &\approx \left\{ 1 - L[\ln(2Mr_0^{-1}) + 1] \right\} \kappa_0, \\ T &\approx \left\{ 1 - L[\ln(2Mr_0^{-1}) + 1] \right\} T_0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

e

$$S \approx \left\{ 1 + L \left[\ln(2Mr_0^{-1}) + \frac{1}{2} \right] \right\} S_0. \quad (5.10)$$

Vamos analisar três casos:

- $r_0 < 2M$: Temos

$$r_H = (2Mr_0^{-L})^{1/(1-L)} > 2M > r_0. \quad (5.11)$$

Como r_0 é a distância da fonte para a qual os efeitos da LSB podem ser interpretados como advindos de um potencial de Yukawa, espera-se que essa distância esteja além do raio do horizonte de eventos. Como isso não ocorre quando $r_0 < 2M$, então podemos desconsiderar esse caso.

- $r_0 = 2M$: Agora, $\ln(2Mr_0^{-1}) = 0$, de modo que a temperatura se torna

$$\begin{aligned} \kappa &= (1 - L)\kappa_0, \\ T &= (1 - L)T_0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

enquanto a entropia se torna

$$S \approx \left(1 + \frac{L}{2}\right) S_0, \quad (5.13)$$

Assim, tanto a temperatura quanto a gravidade de superfície são maiores do que no caso no qual não ocorre quebra de simetria. A igualdade é utilizada porque esse é precisamente o resultado encontrado quando substituímos $r_0 = 2M$ nas equações (5.5) e (5.7). Além disso, podemos notar que a entropia é maior que a do caso sem LSB, o que está em concordância com o fato de que a temperatura é menor que a do caso usual. É interessante notar que, se $r_0 = 2M$, recuperamos o raio de Schwarzschild $r_H = r_S = 2M$, de modo que r_0 coincide com o raio do horizonte de eventos. Entretanto, como vimos nas equações (5.12) e (5.13), a gravidade de superfície, a temperatura e a entropia de Schwarzschild não são recuperadas. Com isso, vemos que no limite $r_0 \rightarrow 2M$, de certa forma recuperamos os resultados usuais, mas com resquícios da quebra de simetria de Lorentz.

- $r_0 > 2M$: Agora, temos

$$r_H = (2Mr_0^{-L})^{1/(1-L)} < 2M < r_0, \quad (5.14)$$

o que indica que r_0 está além do horizonte de eventos, como desejado. Neste caso, $\ln(2Mr_0^{-1}) < 0$, mas isso não é suficiente para saber se a gravidade de superfície e a temperatura aumentam ou diminuem. Porém, se $2Mr_0^{-1} < e^{-1}$, ou seja, $r_0 > e(2M)$, onde $e = 2,718$ é o número de Euler, teremos $\ln(2Mr_0^{-1}) + 1 < 0$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \kappa &> \kappa_0, \\ T &> T_0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

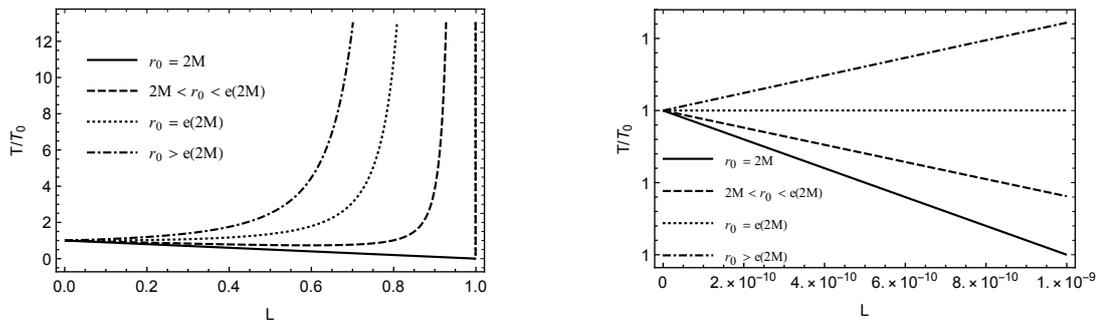
Neste caso, a atuação da LSB aumenta a gravidade de superfície e a temperatura do buraco negro de Schwarzschild. Entretanto, se $2Mr_0^{-1} < e^{-1/2}$, ou seja, $r_0 > e^{1/2}2M$, teremos $\ln(2Mr_0^{-1}) + 1/2 < 0$. Neste caso,

$$S < S_0. \quad (5.16)$$

Vemos que, sob essas condições, a entropia do buraco negro de Schwarzschild é diminuída devido a uma LSB puramente radial.

Devemos notar que o ponto $r_0 = e(2M)$, a temperatura T é aproximadamente igual a temperatura usual T_0 , enquanto a entropia se torna $(1 - L/2)S_0$. Já para o ponto $r_0 = e^{1/2}(2M)$, a entropia S se torna aproximadamente a entropia usual S_0 , enquanto a temperatura se torna $(1 - L/2)T_0$. Em suma, para $2M \leq r_0 < e(2M)$ ($2M \leq r_0 < e^{1/2}(2M)$), a temperatura (entropia) é menor (maior) que a temperatura (entropia) usual; para $r_0 = e(2M)$ ($r_0 = e^{1/2}(2M)$), a temperatura (entropia) é aproximadamente igual a temperatura (entropia) usual; para $r_0 > e(2M)$ ($r_0 > e^{1/2}(2M)$), a temperatura (entropia) é maior que a temperatura (entropia) usual.

No gráfico 4a, exageramos o valor L para observar o comportamento linear da razão entre as temperaturas quando $r_0 = 2M$. Para valores pequenos de L , vemos que as temperaturas são aproximadamente iguais quando $r_0 = e(2M)$ e que a temperatura T é menor que T_0 nos demais casos, como pode ser visto em 4b.

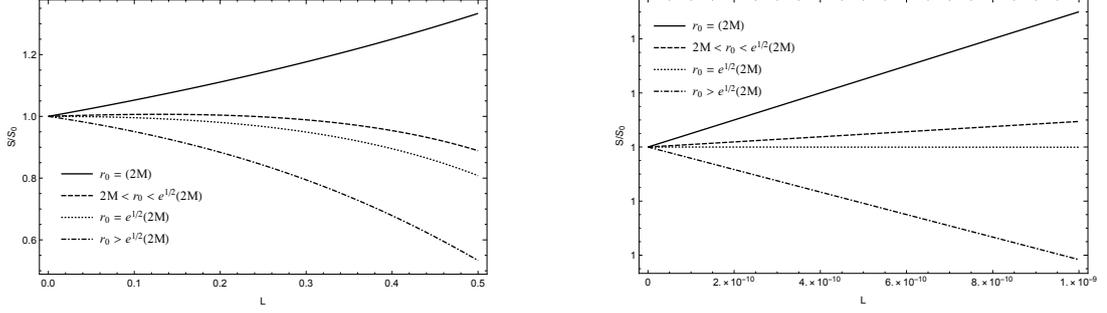


(a) Valores grandes de L

(b) Valores pequenos de L

Figura 4: Fonte: O autor. Razão das temperaturas pelo fator de quebra de Lorentz L .

No gráfico 5a, observamos o comportamento linear da razão entre as entropias quando $r_0 = 2M$, como obtido na equação (5.13). Para valores pequenos de L , a entropia S é aproximadamente igual a S_0 quando $r_0 = e(2M)$, enquanto é maior nos demais casos.

(a) Valores grandes de L (b) Valores pequenos de L Figura 5: Fonte: O autor. Razão das entropias pelo fator de quebra de Lorentz L .

5.1.2 Métrica *Rainbow*

A métrica obtida a partir da relação de dispersão de Magueijo e Smolin [71] é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.17)$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} f(r) &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right)^2; \\ g(r) &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Como o horizonte de eventos é o mesmo de Schwarzschild, $r_H = 2M$, temos

$$\begin{aligned} f'(r_H) &= - \frac{1}{2M} \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right)^2; \\ g'(r_H) &= - \frac{1}{2M}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Deste modo, a gravidade de superfície e a temperatura são dadas, respectivamente, por

$$\kappa = \frac{1}{4M} \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right) = \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right) \kappa_0, \quad (5.20)$$

e

$$T = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right) = \left(1 - \gamma \frac{E}{E_p}\right) T_0 \quad (5.21)$$

Uma vez que a emissão de radiação Hawking é um processo quântico, os quanta emitidos devem obedecer o princípio da incerteza de Heisenberg, o qual deve ser válido em GR [72,73], de modo que $\Delta x \Delta p \geq 1$ em coordenadas naturais. Podemos obter a partir do princípio da incerteza um valor mínimo de energia $E \geq 1/\Delta x$, onde E é a energia da partícula emitida no processo de radiação Hawking. Próximo ao horizonte de eventos, temos $\Delta x \approx r_H = 2M$ [62].

Assim,

$$E \geq 1/2M. \quad (5.22)$$

Deste modo, sabendo que em coordenadas naturais temos $E_p = 1$, podemos reescrever a gravidade de superfície e a temperatura do buraco negro como [22]

$$\kappa = \left(1 - \frac{\gamma}{2M}\right) \kappa_0, \quad (5.23)$$

e

$$T = \left(1 - \frac{\gamma}{2M}\right) T_0 = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{\gamma}{2M}\right). \quad (5.24)$$

A partir das equações (5.23) e (5.24) fica mais fácil perceber que o parâmetro *rainbow* γ é o responsável por modificar a gravidade de superfície e a temperatura do buraco negro de Schwarzschild. Além disso, os resultados usuais são recuperados no limite $\gamma \rightarrow 0$. Podemos notar que, uma vez que $\gamma > 0$, a gravidade de superfície obtida e, conseqüentemente, a temperatura são menores que no caso usual de Schwarzschild, como observado em 6.

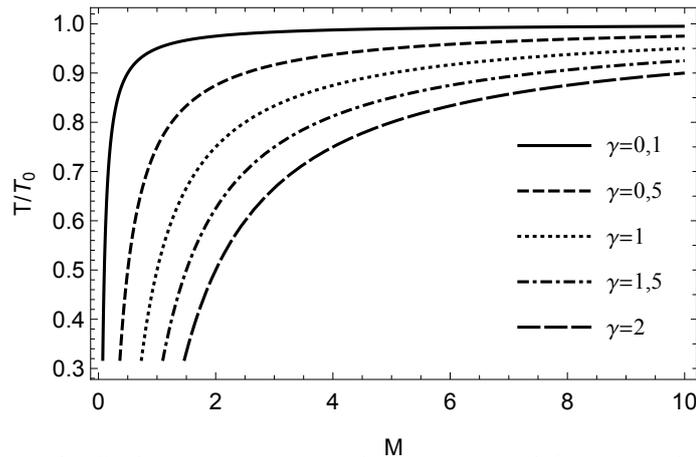


Figura 6: Fonte: O autor. Razão das temperaturas pela massa para diferentes valores de γ .

A entropia para esse modelo é dada por [22]

$$\begin{aligned} S &= 16\pi \int \frac{M^2}{2M - \gamma} dM = 4\pi \int \frac{4M^2 - \gamma^2 + \gamma^2}{2M - \gamma} dM \\ &= 4\pi \int \left[\frac{(2M - \gamma)(2M + \gamma)}{2M - \gamma} + \frac{\gamma^2}{2M - \gamma} \right] dM \\ &= S_0 + 2\pi\gamma[2M + \gamma \ln(2M - \gamma)]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Podemos notar que $S > S_0$, em concordância com a diminuição da temperatura. Além disso, vemos que no limite $\gamma \rightarrow 0$, a entropia de Schwarzschild S_0 é recuperada, especialmente para valores grandes de M , como mostrado em 7. Vemos ainda que a entropia S se torna muito maior que S_0 quando M é aproximadamente da ordem de γ e que para valores grandes de M , S não difere muito de S_0 .

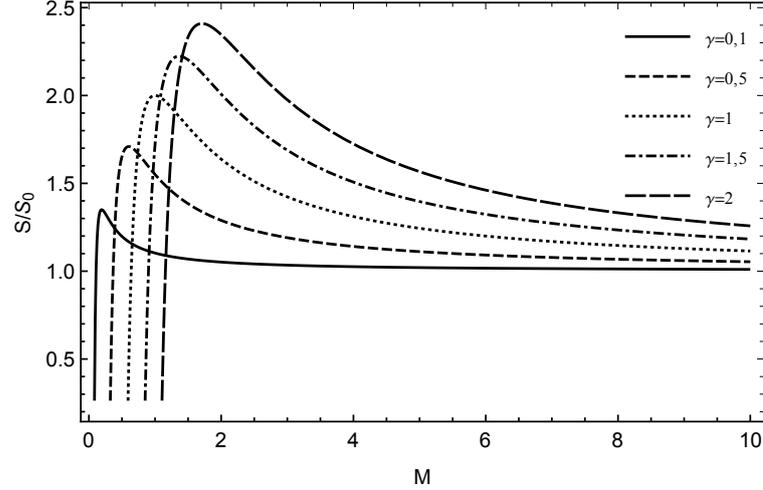


Figura 7: Fonte: O autor. Razão das entropias pela massa para diferentes valores de γ .

5.2 Correção de *Back-reaction* e Cálculo das Correlações

Como discutido nas seções 3.2 e 3.3, a inclusão de efeitos de *back-reaction* leva a correções não-térmicas da temperatura de buracos negros. Tais correções são responsáveis por gerar correlações não-nulas entre eventos de emissão de partículas durante o processo de evaporação de buracos negros. Nesta seção, faremos a correção das temperaturas encontradas na seção anterior, quando efeitos de *back-reaction* são levados em consideração. A partir dessas correções calcularemos as correlações entre eventos de emissão para a métrica de LSB puramente radial [20] e a métrica de GR proposta por Magueijo e Smolin [71].

5.2.1 LSB Puramente Radial

Vimos na seção 3.2 que, ao considerarmos os efeitos de *back-reaction*, a probabilidade de tunelamento de uma partícula com energia ω é dada por

$$\Gamma(M, \omega) = \exp [S(M - \omega) - S(M)]. \quad (5.26)$$

Na primeira seção de resultados, obtivemos a seguinte entropia para a métrica de LSB puramente radial obtida em [20]:

$$S_{BH} = \frac{2(2Mr_0^{-1})^{\frac{L}{1-L}}}{2-L} S_0 = \alpha(L, r_0) M^{\frac{2-L}{1-L}}, \quad (5.27)$$

onde

$$\alpha(L, r_0) = \frac{8\pi(2r_0^{-1})^{\frac{L}{1-L}}}{2-L}. \quad (5.28)$$

Deste modo, a probabilidade de tunelamento de uma partícula de energia ω é

$$\Gamma(M, \omega) = \exp [S(M - \omega) - S(M)] = \exp \left\{ \alpha(L, r_0) \left[(M - \omega)^{\frac{2-L}{1-L}} - M^{\frac{2-L}{1-L}} \right] \right\}. \quad (5.29)$$

A temperatura corrigida é dada por $T = -\omega/\Delta S$. Para obter a temperatura corrigida numa forma mais simples, vamos obter a série de Taylor para

$$\Delta S = \alpha(L, r_0) \left[(M - \omega)^{\frac{2-L}{1-L}} - M^{\frac{2-L}{1-L}} \right], \quad (5.30)$$

sabendo que $L \ll 1$.

Os termos da equação anterior podem ser aproximados da seguinte forma

$$\frac{a^{\frac{x}{1-x}} b^{\frac{2-x}{1-x}}}{2-x} \approx \frac{b^2}{2} \left\{ 1 + \frac{x}{2} [2 \ln(a) + 2 \ln(b) + 1] \right\} + \mathcal{O}(x^2), \quad (5.31)$$

onde $x = L$, $a = 2r_0^{-1}$ e b pode assumir os valores $M - \omega$ e M . Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta S &= 4\pi(M - \omega)^2 \left\{ 1 + \frac{L}{2} [2 \ln(2r_0^{-1}) + 2 \ln(M - \omega) + 1] \right\} \\ &\quad - 4\pi M^2 \left\{ 1 + \frac{L}{2} [2 \ln(2r_0^{-1}) + 2 \ln(M) + 1] \right\} \\ \Delta S &= 4\pi\omega(\omega - 2M) \left\{ 1 + \frac{L}{2} [2 \ln(2r_0^{-1}) + 2 \ln(M - \omega) + 1] \right\} \\ &\quad + 4\pi M^2 L \ln \left(\frac{M - \omega}{M} \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Assim, a temperatura corrigida é dada por

$$\begin{aligned} T = - &\left\{ 4\pi(\omega - 2M) \left[1 + \frac{L}{2} [2 \ln(2r_0^{-1}) + 2 \ln(M - \omega) + 1] \right] \right. \\ &\left. + 4\pi M^2 L \omega^{-1} \ln \left(\frac{M - \omega}{M} \right) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Podemos notar que, no limite $L \rightarrow 0$, obtemos a temperatura corrigida de Schwarzschild ($T = [8\pi(M - \omega/2)]^{-1}$).

Vamos analisar dois casos limites: $M \gg \omega$, que corresponde aos estágios iniciais da evaporação do buraco negro; e $M \approx \omega$ que corresponde aos estágios finais de evaporação.

Para $M \gg \omega$, temos

$$\ln(M - \omega) \approx \ln M - \frac{\omega}{M}, \quad (5.34)$$

e

$$\ln \left(\frac{M - \omega}{M} \right) \approx -\frac{\omega}{M}. \quad (5.35)$$

Portanto, a temperatura se torna

$$\begin{aligned}
 T &= \left\{ 4\pi(2M - \omega) \left[1 + \frac{L}{2} \left[2 \ln(2r_0^{-1}) + 2 \ln(M) + 2 \left(-\frac{\omega}{M} \right) + 1 \right] \right] - \frac{4\pi LM^2}{\omega} \left(-\frac{\omega}{M} \right) \right\}^{-1} \\
 T &= \left\{ 4\pi(2M - \omega) \left[1 + \frac{L}{2} \left[2 \ln(2Mr_0^{-1}) + 1 \right] \right] + 4\pi L (M - 2\omega) \right\}^{-1}, \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

onde desprezamos os termos de ordem $\mathcal{O}(\omega^2)$.

Para o segundo caso, os termos com logaritmo tendem a infinito, de modo que a temperatura tende a zero a medida que $M \rightarrow \omega$.

Agora, vamos calcular as correlações entre eventos de emissão da radiação Hawking. Sabemos que essa correlação é dada por

$$C(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \ln \Gamma(M, \omega_1 + \omega_2) - \ln[\Gamma(M, \omega_1)\Gamma(M, \omega_2)], \quad (5.37)$$

onde

$$\Gamma(M, \omega_1 + \omega_2) = \exp \left\{ \alpha(L, r_0) \left[(M - \omega_1 - \omega_2)^{\frac{2-L}{1-L}} - M^{\frac{2-L}{1-L}} \right] \right\}, \quad (5.38)$$

e

$$\Gamma(M, \omega_i) = \exp \left\{ \alpha(L, r_0) \left[(M - \omega_i)^{\frac{2-L}{1-L}} - M^{\frac{2-L}{1-L}} \right] \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (5.39)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 C(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) &= \alpha(L, r_0) \left[(M - \omega_1 - \omega_2)^{\frac{2-L}{1-L}} - M^{\frac{2-L}{1-L}} - (M - \omega_1)^{\frac{2-L}{1-L}} + M^{\frac{2-L}{1-L}} \right. \\
 &\quad \left. - (M - \omega_2)^{\frac{2-L}{1-L}} + M^{\frac{2-L}{1-L}} \right]. \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

Fazendo a aproximação (5.31), obtemos

$$\begin{aligned}
 C(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) &\approx 4\pi \left\{ (M - \omega_1 - \omega_2)^2 \left[1 + \frac{L}{2} \left[2 \ln(2r_0^{-1}) + 2 \ln(M - \omega_1 - \omega_2) + 1 \right] \right] \right. \\
 &\quad - (M - \omega_1)^2 \left[1 + \frac{L}{2} \left[2 \ln(2r_0^{-1}) + 2 \ln(M - \omega_1) + 1 \right] \right] \\
 &\quad - (M - \omega_2)^2 \left[1 + \frac{L}{2} \left[2 \ln(2r_0^{-1}) + 2 \ln(M - \omega_2) + 1 \right] \right] \\
 &\quad \left. + M^2 \left[1 + \frac{L}{2} \left[2 \ln(2r_0^{-1}) + 2 \ln(M) + 1 \right] \right] \right\}. \quad (5.41)
 \end{aligned}$$

Agora, vamos agrupar os termos

$$\begin{aligned}
C &= 4\pi \left\{ \left[(M - \omega_1 - \omega_2)^2 - (M - \omega_1)^2 - (M - \omega_2)^2 + M^2 \right] \left[1 + \frac{L}{2} [2 \ln(2r_0^{-1}) + 1] \right] \right. \\
&+ L(M - \omega_1 - \omega_2)^2 \ln(M - \omega_1 - \omega_2) + LM^2 \ln(M) \\
&\left. - L(M - \omega_1)^2 \ln(M - \omega_1) - L(M - \omega_2)^2 \ln(M - \omega_2) \right\}. \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Os termos do primeiro colchete resultam simplesmente em $8\pi\omega_1\omega_2$. Os demais termos serão agrupados da seguinte forma

$$\begin{aligned}
4\pi L \left\{ M^2 \ln \left[\frac{(M - \omega_1 - \omega_2)M}{(M - \omega_1)(M - \omega_2)} \right] + \omega_1(\omega_1 - 2M) \ln \left[\frac{M - \omega_1 - \omega_2}{M - \omega_1} \right] \right. \\
\left. + \omega_2(\omega_2 - 2M) \ln \left[\frac{M - \omega_1 - \omega_2}{M - \omega_2} \right] + 2\omega_1\omega_2 \ln(M - \omega_1 - \omega_2) \right\} \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Portanto, a correlação é dada por

$$\begin{aligned}
C &= 8\pi\omega_1\omega_2 \left\{ 1 + \frac{L}{2} [2 \ln[2(M - \omega_1 - \omega_2)r_0^{-1}] + 1] \right\} \\
&+ 4\pi L \left\{ M^2 \ln \left[\frac{(M - \omega_1 - \omega_2)M}{(M - \omega_1)(M - \omega_2)} \right] + \omega_1(\omega_1 - 2M) \ln \left[\frac{M - \omega_1 - \omega_2}{M - \omega_1} \right] \right. \\
&\left. + \omega_2(\omega_2 - 2M) \ln \left[\frac{M - \omega_1 - \omega_2}{M - \omega_2} \right] \right\}. \tag{5.44}
\end{aligned}$$

Podemos notar que, essa correlação é não nula e, no limite $L \rightarrow 0$, recuperamos a correlação do buraco negro de Schwarzschild $C = 8\pi\omega_1\omega_2$. Para valores pequenos de M , a correlação C se torna muito maior C_0 , o que indica que os eventos de emissão são altamente correlacionados nos últimos estágios da evaporação do buraco negro.

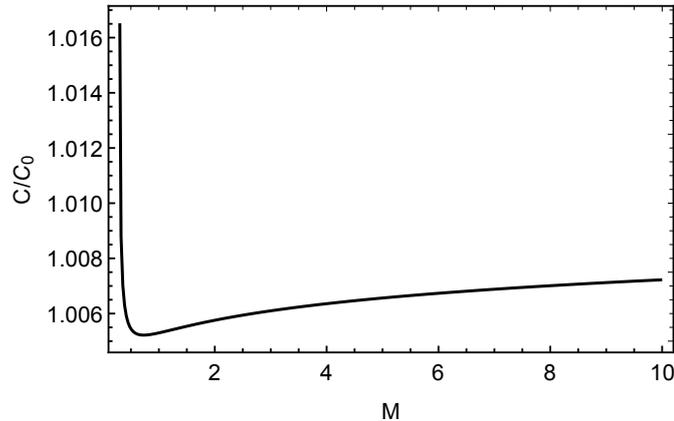


Figura 8: Fonte: O autor. Razão das correlações pela massa ($r_0 = 10$, $L = 10^{-3}$, $\omega_1 = 10^{-1}$, $\omega_2 = 2 \times 10^{-1}$).

5.2.2 Métrica *Rainbow*

Agora, calcularemos a correção de *back-reaction* da temperatura e a correlação entre eventos de emissão para a métrica tipo Schwarzschild proposta por Magueijo e Smolin [71]. Devemos lembrar que

$$S(M) = 4\pi M^2 + 2\pi\gamma[2M + \gamma \ln(2M - \gamma)]. \quad (5.45)$$

Assim,

$$S(M - \omega) = 4\pi(M - \omega)^2 + 2\pi\gamma[2(M - \omega) + \gamma \ln(2(M - \omega) - \gamma)]. \quad (5.46)$$

Portanto, a variação da entropia é dada por

$$\begin{aligned} \Delta S &= 4\pi(M - \omega)^2 + 2\pi\gamma[2(M - \omega) + \gamma \ln(2(M - \omega) - \gamma)] \\ &\quad - 4\pi M^2 - 2\pi\gamma[2M + \gamma \ln(2M - \gamma)] \\ \Delta S &= 4\pi\omega(\omega - 2M) + 2\pi\gamma \left[-2\omega + \gamma \ln \left(\frac{2(M - \omega) - \gamma}{2M - \gamma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Segue, de maneira direta que, a probabilidade de tunelamento de uma partícula com energia ω é dada por

$$\Gamma(M, \omega) = \exp \left\{ 4\pi\omega(\omega - 2M) + 2\pi\gamma \left[-2\omega + \gamma \ln \left(\frac{2(M - \omega) - \gamma}{2M - \gamma} \right) \right] \right\}, \quad (5.48)$$

de modo que a temperatura corrigida será

$$T = \left[4\pi(2M - \omega + \gamma) - 2\pi\gamma^2\omega^{-1} \ln \left(\frac{2(M - \omega) - \gamma}{2M - \gamma} \right) \right]^{-1}. \quad (5.49)$$

Podemos notar que, quando o parâmetro *rainbow* tende a zero ($\gamma \rightarrow 0$), recuperamos a temperatura corrigida de Schwarzschild $T = [8\pi(M - \omega/2)]^{-1}$, como esperado.

Como sabemos, a correlação entre os eventos de emissão é dada por

$$C(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \ln \Gamma(M, \omega_1 + \omega_2) - \ln[\Gamma(M, \omega_1)\Gamma(M, \omega_2)]. \quad (5.50)$$

Para este caso, temos $\Gamma(M, \omega_i)$, $i = 1, 2$ dado pela equação (5.48) e

$$\begin{aligned} \Gamma(M, \omega_1 + \omega_2) &= \exp \left\{ 4\pi[-(2M + \gamma)(\omega_1 + \omega_2) + (\omega_1 + \omega_2)^2] \right. \\ &\quad \left. + 2\pi\gamma^2 \ln \left[\frac{2(M - \omega_1 - \omega_2) - \gamma}{2M - \gamma} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
C(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) &= 4\pi[-(2M + \gamma)(\omega_1 + \omega_2) + (\omega_1 + \omega_2)^2] \\
&+ 2\pi\gamma^2 \ln \left[\frac{2(M - \omega_1 - \omega_2) - \gamma}{2M - \gamma} \right] \\
&- 4\pi[\omega_1^2 - (2M + \gamma)\omega_1] - 2\pi\gamma^2 \ln \left[\frac{2(M - \omega_1) - \gamma}{2M - \gamma} \right] \\
&- 4\pi[\omega_2^2 - (2M + \gamma)\omega_2] - 2\pi\gamma^2 \ln \left[\frac{2(M - \omega_2) - \gamma}{2M - \gamma} \right]. \quad (5.52)
\end{aligned}$$

Agrupando os termos, obtemos

$$C = 8\pi\omega_1\omega_2 + 2\pi\gamma^2 \ln \left\{ \frac{[2(M - \omega_1 - \omega_2) - \gamma][2M - \gamma]}{[2(M - \omega_1) - \gamma][2(M - \omega_2) - \gamma]} \right\}. \quad (5.53)$$

Podemos notar que, no limite $\gamma \rightarrow 0$, recuperamos a correlação do buraco negro de Schwarzschild $C = 8\pi\omega_1\omega_2$. Além disso, para valores pequenos de γ , as correlações C e C_0 se tornam aproximadamente iguais, a medida que a massa M se torna muito grande.

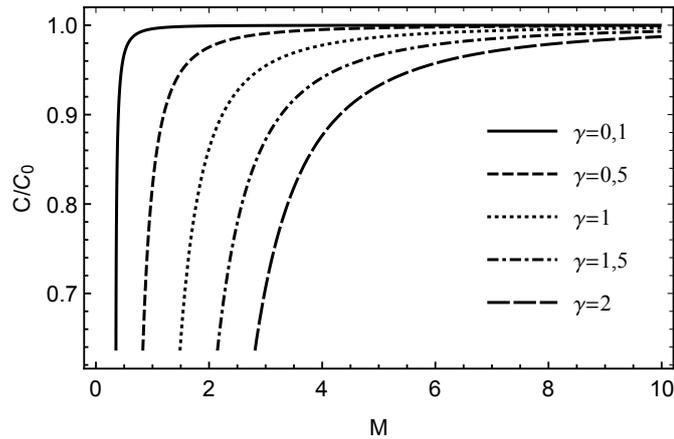


Figura 9: Fonte: O autor. Razão das correlações pela massa para vários valores de γ ($\omega_1 = 10^{-1}$, $\omega_2 = 2 \times 10^{-1}$).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, fizemos uma revisão da radiação Hawking e das leis dinâmicas de buracos negros e como elas se assemelham à termodinâmica usual. A partir disso, apresentamos o método de tunelamento quântico, o qual torna possível a obtenção de propriedades termodinâmicas de buracos negros de maneira relativamente simples. Como vimos, o método do tunelamento quântico obtém resultados satisfatórios apenas levando em consideração a geometria do espaço-tempo. Além disso, o método permite a inclusão de efeitos de *back-reacion*, que leva a correções não térmicas da radiação Hawking, responsáveis por correlações não-nulas entre eventos de emissão. Verificamos, por meio do método de tunelamento quântico, que métricas do tipo Schwarzschild obtidas do modelo de *bumblebee* e da gravidade *rainbow* possuem temperatura e entropia diferentes da métrica usual de Schwarzschild. Além disso, verificamos que essas métricas possuem correlações não-nulas entre eventos de emissão.

REFERÊNCIAS

- [1] S. W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Communications in Mathematical Physics, 43, 3, 199–220, 1975.
- [2] J. M. Bardeen, B. Carter, Brandon, S. W. Hawking, *The four laws of black hole mechanics*, Communications in Mathematical Physics, 31, 2, 161–170, 1973.
- [3] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Physical Review D, Particles Fields, 7, 8, 2333–2346, 1973.
- [4] J. D. Bekenstein, *Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics*, Physical Review D, Particles Fields, 9, 12, 3292–3300, 1974.
- [5] L. Smarr, *Mass formula for Kerr black holes*, Physical Review Letters, 30, 2, 71–73, 1973.
- [6] Birrell, N. D. ; Davies, P. C. W., *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
- [7] M. K. Parikh, F. and Wilczek, *Hawking Radiation As Tunneling*, Physical Review Letters, 85, 24, 5042–5045, 2000.
- [8] S. W. Hawking, *Breakdown of predictability in gravitational collapse*, Physical Review. D, Particles Fields, 14, 10, 2460–2473, 1976.
- [9] Parikh, M. K., *Energy conservation and Hawking radiation*, in *The Tenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories*, Rio de Janeiro: World Scientific Publishing Company, 1585–1590, 2005.
- [10] A. J. M. Medved, E. C. Vagenas, *On Hawking radiation as tunneling with logarithmic corrections* Modern Physics Letters A, 20, 23, 1723–1728, 2005.
- [11] B. Zhang, Q.-Y. Cai, M.-S. Zhan, L. You, *Hidden messenger revealed in Hawking radiation: a resolution to the paradox of black hole information loss*, Physics Letters B, 675, 1, 98–101, 2009.
- [12] Y.-X. Chen, K.-N. Shao, *Information loss and entropy conservation in quantum corrected Hawking radiation*, Physics Letters B, 678, 1, 131–134, 2009.
- [13] D. Singleton, E. C. Vagenas, T. Zhu, J.-R. Ren, *Insights and possible resolution to the information loss paradox via the tunneling picture*, Journal of High Energy Physics, 2010, 8, 1–14, 2010.
D. Singleton, E. C. Vagenas, T. Zhu, J.-R. Ren, *Erratum: Insights and possible resolution to the information loss paradox via the tunneling picture*, Journal of High Energy Physics, 2011, 1, 1–2, 2011.
- [14] B. Zhang, Q.-Y. Cai, M.-S. Zhan, L. You, *Entropy is conserved in Hawking radiation as tunneling: a revisit of the black hole information loss paradox*, Annals of Physics, 326, 2, 350–363, 2011.

- [15] S. D. Mathur, *What the information paradox is not*, arXiv preprint arXiv:1108.0302, 2011. B. Zhang, Q.-Y. Cai, M.-S. Zhan, L. You, *Comment on "What the information loss is not"* arXiv preprint arXiv:1210.2048, 2012
- [16] Q.-Y. Cai, C.-P. Sun, L. You, *Information-carrying Hawking radiation and the number of microstate for a black hole*, Nuclear Physics B, 905, 327–336, 2016.
- [17] V. A. Kostelecký, S. Samuel, *Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*, Physical Review D, 39, 2, 683–685, 1989.
- [18] V. A. Kostelecký, *Gravity, Lorentz violation, and the standard model*, Physical Review D, 69, 10, 105009-1–105009-20, 2004.
- [19] R. Bluhm, V. A. Kostelecký, *Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity*, Physical Review D, 71, 6, 065008-1–065008-17, 2005.
- [20] O. Bertolami, J. Paramos, *Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous Lorentz symmetry breaking* Physical Review D, 72, 4, 044001-1–044001-12, 2005.
- [21] J. Magueijo, L. Smolin, *Gravity's rainbow*, Classical and Quantum Gravity, 21, 7, 1725–1736, 2004.
- [22] Z.-W. Feng, S.-Z. Yang, *Thermodynamic phase transition of a black hole in rainbow gravity*, Physics Letters B, 772, 737–742, 2017.
- [23] S. W. Hawking, *Gravitational Radiation from Colliding Black Holes*, Physical Review Letters, 26, 21, 1344–1346, 1971.
- [24] J. D. Bekenstein, *Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics*, Physical Review D, 9, 12, 3292–3300, 1974.
- [25] Callen, H. B., *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2^a ed., Nova Iorque: John Wiley and Sons, 1985.
- [26] W. Israel, *Third law of black-hole dynamics: A formulation and proof*, Physical Review Letters, 57, 4, 397–399, 1986.
- [27] Hawking, S. W.; Ellis, G. F. R., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- [28] S. A. Fulling, *Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time*, Physical Review D, Particles Fields, 7, 10, 2850–2862, 1973.
- [29] N. N. Bogoljubov, V. V. Tolmachov, D. V. Širkov, *A new method in the theory of superconductivity*, Fortschritte der Physik, 6, 11-12, 605–682, 1958.
- [30] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields*, vol 1: *Foundations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [31] Pathria, R. K.; Beale, P. D., *Statistical Mechanics*, 3^a ed, Oxford: Elsevier, 2011.
- [32] G. 't Hooft, *On the quantum structure of a black hole*, Nuclear Physics B, 256, 727–745, 1985.

- [33] S. P. Robinson, F. Wilczek, *Relationship between Hawking radiation and gravitational anomalies*, Physical Review Letters, 95, 1, 011303-1–011303-4, 2005.
- [34] E. C. Vagenas, S. Das, *Gravitational anomalies, Hawking radiation, and spherically symmetric black holes*, Journal of High Energy Physics, 2006, 10, 1–11, 2006.
- [35] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, Physics Review D, 15, 10, 2752–2756, 1977.
- [36] E. C. Vagenas, *Generalization of the KKW analysis for black hole radiation*, Physics Letters B, 559, 1, 65–73, 2003.
- [37] K. Srinivasan, T. Padmanabhan, *Particle production and complex path analysis*, Physics Review D, 60, 2, 024007-1–024007-20, 1999.
- [38] S. Shankaranarayanan, K. Srinivasan, T. Padmanabhan, *Method of complex paths and general covariance of Hawking radiation*, Modern Physics Letters A, 16, 9, 571–578, 2001.
S. Shankaranarayanan, K. Srinivasan, T. Padmanabhan, *Hawking radiation in different coordinate settings: complex paths approach*, Classical and Quantum Gravity, 19, 10, 2671–2687, 2002.
- [39] T. Padmanabhan, *Entropy of horizons, complex paths and quantum tunneling*, Modern Physics Letters A, 19, 35, 2637–2643, 2004.
- [40] M. Angheben, M. Nadalini, L. Vanzo, S. Zerbini, *Hawking radiation as tunneling for extremal and rotating black holes*, Journal of High Energy Physics, 2005, 5, 1–14, 2005.
- [41] P. Kraus, F. Wilczek, *Self-interaction correction to black hole radiance*, Nuclear Physics B, 433, 2, 403–420, 1995.
- [42] C. A. S. Silva, F. A. Brito, *Quantum tunneling radiation from self-dual black holes*, Physics Letters B, 725, 4-5, 456–462, 2013.
- [43] A. J. M. Medved, E. C. Vagenas, *On Hawking radiation as tunneling with back-reaction*, Modern Physics Letters A, 20, 32, 2449–2453, 2005.
- [44] M. Arzano, A. J. M. Medved, E. C. Vagenas, *Hawking radiation as tunneling through the quantum horizon*, Journal of High Energy Physics, 2005, 9, 037-1–037-10, 2005.
- [45] Nielsen, M. A.; Chuang, I. *Quantum Computation and Quantum Information*, Edição de 10^o aniversário, Nova Iorque: Cambridge University Press, 2010.
- [46] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Nova Iorque: John Wiley and Sons, 1972.
- [47] C. M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Reviews in Relativity, 9, 1, 3-1–3-100.
- [48] Ellis, G. F. R.; Williams, R. M., *Flat and Curved Space-times*, 2^a ed., Nova Iorque: Oxford University Press, 2000.
- [49] Srednicki, M., *Quantum Field Theory*, Nova Iorque: Cambridge University Press, 2007.

- [50] Lederman, L. M.; Hill, C. T., *Symmetry and the Beautiful Universe*, New York: Prometheus Books, 2004.
- [51] Rubakov, V., *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton: Princeton University Press, 1999.
- [52] Ryder, L. H., *Quantum Field Theory*, 2^a ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [53] Y. Nambu, *Axial Vector Current Conservation in Weak Interactions*, Physics Review Letters, 4, 7, 380–382, 1960.
- [54] J. Goldstone, *Field theories with superconductor solutions*, Nuovo Cimento, 19, 1, 154–164, 1961.
- [55] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Physical Review. 127, 3, 965–970, 1962.
- [56] V. A. Kostelecký, S. Samuel, *Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories*, Physics Review Letters, 63, 3, 224–227, 1989.
V. A. Kostelecký, S. Samuel, *Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings*, Physical Review D, 40, 6, 1886–1903, 1989.
- [57] D. Colladay, V. A. Kostelecký, *CPT violation and the standard model*, Physical Review D, 55, 11, 6760–6774, 1997.
- [58] R. Iengo, J. G. Russo, M. Serone, *Renormalization group in Lifshitz-type theories*, Journal of High Energy Physics, 2009, 11, 020-1–020-24, 2009.
- [59] H. Belich, K. Bakke, *Geometric quantum phases from Lorentz symmetry breaking effects in the cosmic string spacetime*, Physical Review D, 90, 2, 025026-1–025026-8, 2014.
- [60] J. Alfaro, P. González, R. Ávila, *Electroweak standard model with very special relativity*, Physical Review D, 91, 10, 105007-1–105007-15, 2015.
- [61] G. Amelino-Camelia, *Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (planckian) length scale*, International Journal of Modern Physics D, 11, 01, 35–59, 2002.
- [62] A. Farag Ali, *Black hole remnant from gravity's rainbow*, Physical Review D, 89, 10, 104040-1–104040-6, 2014.
- [63] A. Farag Ali, *Remnants of black rings from gravity's rainbow*, Journal of High Energy Physics, 2014, 12, 159, 2014.
- [64] A. Farag Ali, *Remnant for all black objects due to gravity's rainbow*, Nuclear Physics B, 894, 341–360, 2015.
- [65] Y. Gim, W. Kim, *Black hole complementarity in gravity's rainbow*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2015, 05, 002-1–002-10, 2015.
- [66] S. H. Hendi, M. Faizal, *Black holes in Gauss-Bonnet gravity's rainbow*, Physical Review D, 92, 4, 044027-1–044027-11, 2015.

- [67] S. H. Hendi, M. Faizal, B. E. Panah, S. Panahiyan, *Charged dilatonic black holes in gravity's rainbow*, The European Physical Journal C, 76, 5, 296-1–296-15, 2016.
- [68] S. H. Hendi, M. Faizal, B. E. Panah, S. Panahiyan, *Thermodynamic instability of nonlinearly charged black holes in gravity's rainbow*, The European Physical Journal C, 76, 3, 150-1–150-10, 2016.
- [69] Y. Gim, W. Kim, *Hawking, fiducial, and free-fall temperature of black hole on gravity's rainbow*, The European Physical Journal C, 76, 3, 166-1–166-7, 2016.
- [70] S. H. Hendi, B. E. Panah, S. Panahiyan, *Topological charged black holes in massive gravity's rainbow and their thermodynamical analysis through various approaches*, Physics Letters B, 769, 191–201, 2017.
- [71] J. Magueijo, L. Smolin, *Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale*, Physical Review D, 67, 044017, 2003.
- [72] R. J. Adler, P. Chen, D. I. Santiago, *The Generalized Uncertainty Principle and Black Hole Remnants*, General Relativity and Gravitation, 33, 12, 2101–2108, 2001.
- [73] M. Cavaglià, S. Das *How classical are TeV-scale black holes?*, Classical and Quantum Gravity, 19, 21, 4511–4522, 2004.
- [74] S. D. Mathur, *What Exactly is the Information Paradox?*, in *Physics of Black Holes: A Guided Tour*, Berlin: Springer, 3–48, 2009.