



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

ERIC MATEUS FERNANDES BEZERRA

OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO DE LAJES NERVURADAS EM CONCRETO
ARMADO

FORTALEZA

2017

ERIC MATEUS FERNANDES BEZERRA

OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO DE LAJES NERVURADAS EM CONCRETO
ARMADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- B469o Bezerra, Eric Mateus Fernandes.
Otimização multiobjetivo de lajes nervuradas em concreto armado / Eric Mateus Fernandes Bezerra. –
2017.
101 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo.
1. Lajes nervuradas. 2. Otimização multiobjetivo. 3. NSGA-II. 4. Analogia de grelha. I. Título.
CDD 624.1
-

ERIC MATEUS FERNANDES BEZERRA

OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO DE LAJES NERVURADAS EM CONCRETO
ARMADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Aprovada em: 28/11/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Evandro Parente Junior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof.^a Dr.^a Sylvia Regina Mesquita de Almeida
Universidade Federal de Goiás (UFG)

AGRADECIMENTOS

Ao professor Antônio Macário Cartaxo de Melo, por aceitar me orientar e fazê-lo com tanto esmero. Agradeço à empatia, paciência, confiança, disponibilidade e, sobretudo, às notáveis contribuições técnicas, sem as quais esse trabalho não seria viabilizado. És, indubitavelmente, uma referência para minha trajetória no magistério. Não poderia ter tido orientador melhor.

Ao professor Evandro Parente Junior, pelas relevantes e assertivas sugestões ao longo de todo o desenvolvimento do trabalho e pelas excelentes aulas. Estendo meus agradecimentos aos demais professores do programa, João Batista Marques Souza Júnior e Tereza Denyse de Araújo, e ao meu grande mestre e amigo Raimundo Amorim.

À professora Sylvia Regina Mesquita de Almeida, por aceitar participar da banca e pelas relevantes sugestões e reflexões apresentadas.

Ao meu grande amigo e irmão, Jonathas Iohanathan, pelas incomensuráveis contribuições. Fica fácil lograr grandes feitos com sua ajuda. Um obrigado afetuoso é insuficiente para demonstrar uma gratidão que não se pode externar em palavras. Estou certo, meu ídolo, que ainda partilharemos grandes momentos (fletores e de sucessos) juntos. Isso, é claro, se nada for feito com a sua elevada adiposidade, que, brevemente, culminará em uma oclusão das suas coronárias.

À Rafaele, minha companheira e inspiração. Ainda não criaram um adjetivo que denote realmente o que representas para mim. É desnecessário, Loris, descrever o quanto você é importante em tudo que faço. Está subtendido. Meu reduto, meu refúgio, meu norte, meu grande amor, obrigado por existir e por partilhar seus dias comigo.

A Jovy e Rosendo, grandes amigos que fiz no mestrado. Dividir angustias e aspirações com vocês é sempre divertido.

Ao meu pai, Francisco Evanúcio e, principalmente, à minha mãe, Maria Suetânia, guerreira e balizadora da minha sensatez, cuja palavra traz consigo um afago imprescindível. Todo e qualquer sucesso atribuo a vocês. Em qualquer vitória, sei que estarão por trás dela, como fizeram em todos os momentos da minha vida. Constituíram meu reduto de maneira formidável sem tampouco exigir um obrigado.

À CAPES, pelo suporte financeiro, e à Universidade Federal do Ceará, em especial ao LMCV, pela infraestrutura disponível.

RESUMO

Em problemas que requerem grandes vãos, as lajes nervuradas em concreto armado têm desempenho comprovadamente mais eficiente do que as lajes maciças. Esse sistema, no entanto, tem sofrido modificações ante às exigências da norma de desempenho, levando ao questionamento da sua eficiência. De modo a verificar a eficiência econômica dos padrões de fôrma usualmente adotados na boa prática de projeto de lajes nervuradas, este trabalho apresenta um modelo de otimização multiobjetivo de pavimentos de lajes nervuradas em concreto armado, considerando a revisão da NBR 6118/2014 e exigências da NBR 15575/2013. A otimização, realizada mediante a utilização do algoritmo *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II), objetiva minimizar, simultaneamente, o custo total de concreto e aço e a emissão de CO₂, respeitando as restrições quanto à resistência (ELU), à rigidez (ELS) e limites de norma. A abordagem multiobjetivo também foi aplicada na minimização do custo e maximização das frequências naturais. As variáveis de projeto são: largura e altura da nervura, distância entre eixos das nervuras, espessura da mesa, área de aço e resistência do concreto à compressão. Na análise estrutural, foi utilizada a analogia de grelha, que tem levado a resultados satisfatórios na análise desse tipo de laje. Foi proposta uma metodologia baseada no conceito da espessura equivalente para desacoplar o modelo de otimização da geração da malha da grelha. Os resultados mostraram que a mudança nas dimensões mínimas levou a um aumento no custo do sistema de em média 37,51%. Além disso, foi possível inferir que o custo monetário e a emissão de CO₂ não são de naturezas conflitantes, fato que indica que, ao minimizar o custo monetário, naturalmente estará sendo obtida uma boa solução ambiental.

Palavras-chave: Lajes nervuradas, otimização multiobjetivo, NSGA-II, analogia de grelha.

ABSTRACT

Reinforced concrete ribbed slabs are more suitable than conventional concrete slabs when applied in large gaps. However, the minimum dimensions of this system have been modified, leading to questioning its efficiency. In order to verify the economic efficiency of the shape patterns usually adopted in the design of ribbed slabs, this work presents a multiobjective optimization model of reinforced concrete ribbed slabs, in accordance with the standards NBR 6118/2014 and NBR 15575/2013. The multiobjective optimization is related to the application of the NSGA II algorithm for the minimization of the economic cost and CO₂ emission and for the minimization of the cost and maximization of the natural frequencies, according to the design restrictions. The design variables are rib width, depth of rib, ribs spacing, the top slab thickness, reinforcement steel and compressive strength of the concrete. The grillage analysis, which has led to satisfactory results in the design of this type of slab, was used in the structural analysis of slabs. The proposed methodology was based on the equivalent thickness concept to decouple the optimization model from grid mesh generation. The results showed that the change in the minimum dimensions resulted in an increase of 37.5% of the average cost. In addition, the results indicate that the economic cost and CO₂ emission are closely related, which indicates that minimizing the cost will be obtained a good environmental solution.

Keywords: Ribbed slab, multi-objective optimization, NSGA-II, grillage analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Lajes com nervuras a) tipo trilho e b) tipo treliça	18
Figura 2 – a) Lajes nervuradas moldadas no local e b) molde reutilizável.	19
Figura 3 – Lajes lisas nervuradas a) com capitel e b) com faixas maciças.	20
Figura 4 – Substituição de uma placa por uma grelha equivalente	22
Figura 5 – Substituição da laje nervurada por barras posicionadas no eixo das nervuras....	24
Figura 6 – Laje maciça equivalente	25
Figura 7 – Laje nervurada a) com continuidade da capa e b) sem continuidade da capa....	28
Figura 8 – Região maciça incorporada à viga	28
Figura 9 – Áreas de influência para determinação do carregamento nodal equivalente	31
Figura 10 – Caracterização da seção como a) T e como b) falso T.....	33
Figura 11 – a) Momento resistido pela alma e b) momento resistido pelas abas da mesa	34
Figura 12 – Homogeneização da seção de uma viga no Estádio II	36
Figura 13 – Variação do momento de inércia ao longo da viga	37
Figura 14 – Desabamento de um prédio em Teerã devido ao incêndio.....	40
Figura 15 – Comparação entre o processo de projeto a) tradicional e b) ótimo.....	45
Figura 16 – Fronteira de Pareto.	48
Figura 17 – Estrutura genérica de um AG	52
Figura 18 – Regiões de dominância e não-dominância de um ponto	53
Figura 19 – Indivíduos separados em níveis de acordo com a dominância.....	54
Figura 20 – Cálculo da distância de aglomeração	56
Figura 21 – Estrutura genérica do NSGA-II.....	57
Figura 22 – Seção típica de uma laje nervurada	69
Figura 23 – Processo para aplicação da espessura equivalente na analogia de grelha	74
Figura 24 – Rhino e Gh3D.....	75
Figura 25 – Laje do Exemplo I.....	77
Figura 26 – Diferença percentual dos deslocamentos em relação à malha de referência.....	79
Figura 27 – Malhas de a) 60 cm x 60 cm, b) 74 cm x 74 cm e c) 99 cm x 99 cm.....	79
Figura 28 – Diferença percentual dos deslocamentos em relação à malha de referência para uma carga nodal única e a carga calculada pela área de influência	80
Figura 29 – Malhas de a) 60 cm x 60 cm, b) 74 cm x 74 cm e c) 99 cm x 99 cm.....	82
Figura 30 – Relação custo x frequência natural do Exemplo III	85
Figura 31 – Relação custo x emissão de CO ₂ do Exemplo IV	87

Figura 32 – Relação custo x emissão de CO ₂ do Exemplo V.....	89
Figura 33 – Custo em função do vão para os Modelos I e II.....	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	TRRF em minuto de acordo com a altura e o uso da edificação.....	41
Tabela 2 –	Dimensões mínimas para lajes nervuradas simplesmente apoiadas.....	42
Tabela 3 –	Dimensões mínimas para lajes nervuradas com continuidade em pelo menos uma das bordas	42
Tabela 4 –	Dimensões mínimas para lajes nervuradas armadas em uma só direção	43
Tabela 5 –	Exemplo para classificação dos indivíduos.....	55
Tabela 6 –	Matriz de dominância.....	55
Tabela 7 –	Propriedades geométricas das nervuras do Exemplo I.....	78
Tabela 8 –	Valores máximos dos esforços e da flecha para a grelha de referência	78
Tabela 9 –	Dados de entrada das grelhas do Exemplo I	81
Tabela 10 –	Resultados do Exemplo I.....	81
Tabela 11 –	Dados de entrada das grelhas do Exemplo II	83
Tabela 12 –	Custo por m ³ de concreto de acordo com o f_{ck}	84
Tabela 13 –	Custo por kg de aço CA-50 de acordo com o diâmetro da barra.	84
Tabela 14 –	Espaço de busca das variáveis de projeto.....	84
Tabela 15 –	Melhor solução para o custo e para a frequência natural	86
Tabela 16 –	Quantidade de CO ₂ emitido para 1 m ³ de concreto de acordo com o f_{ck}	87
Tabela 17 –	Resultados para melhor solução para o custo e para o CO ₂	88
Tabela 18 –	Resultados para as restrições do Exemplo IV	88
Tabela 19 –	Resultados para melhor solução do custo e do CO ₂	89
Tabela 20 –	Variáveis de projeto e custo para as lajes do Modelo I.....	90
Tabela 21 –	Espaço de busca das variáveis de projeto do Modelo II	90
Tabela 22 –	Variáveis de projeto e custo para as lajes do Modelo II.....	91

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
1.1	Objetivos	15
1.2	Escopo da dissertação	16
2	LAJES NERVURADAS	17
2.1	Analogia de grelha	20
2.1.1	<i>Espessura equivalente.....</i>	<i>24</i>
2.1.2	<i>Propriedades físicas e geométricas.....</i>	<i>25</i>
2.1.3	<i>Malha.....</i>	<i>29</i>
2.1.4	<i>Carregamento.....</i>	<i>30</i>
2.2	Projeto de acordo com a NBR 6118/2014	31
2.3	Norma de Desempenho para Edificações Habitacionais (NBR 15.575).....	39
3	OTIMIZAÇÃO	44
3.1	Algoritmos de otimização	48
3.2	Algoritmo NSGA-II	51
3.3	Otimização estrutural.....	58
3.3.1	<i>Lajes de concreto.....</i>	<i>58</i>
3.3.2	<i>Minimização dos impactos ambientais.....</i>	<i>62</i>
4	MODELO DE OTIMIZAÇÃO.....	69
4.1	Variáveis de projeto.....	69
4.2	Funções objetivo.....	70
4.3	Restrições	71
4.4	Análise estrutural.....	73
4.5	Implementação computacional	75
5	APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....	77
5.1	Análise estrutural.....	77
5.1.1	<i>Exemplo I.....</i>	<i>77</i>
5.1.2	<i>Exemplo II.....</i>	<i>81</i>
5.2	Otimização	83
5.2.1	<i>Exemplo III.....</i>	<i>83</i>
5.2.2	<i>Exemplo IV.....</i>	<i>86</i>
5.2.3	<i>Exemplo V.....</i>	<i>88</i>
5.2.4	<i>Exemplo VI.....</i>	<i>89</i>

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	92
	REFERÊNCIAS.....	95

1 INTRODUÇÃO

Os novos paradigmas da construção civil são caracterizados, de forma cada vez mais significativa, pela necessidade em se conceber obras mais arrojadas que atendam devidamente às crescentes exigências normativas. Inerentemente, exige-se da engenharia estrutural o desenvolvimento de sistemas estruturais que tornem as edificações economicamente exequíveis, respeitando os requisitos para garantia da qualidade ao menor custo. Torna-se imprescindível, desse modo, buscar alternativas estruturais que proporcionem identificar qual concepção será mais adequada às situações propostas, garantindo, assim, a extração do melhor rendimento possível.

As lajes representam uma parcela relevante no custo total das estruturas em concreto armado de edifícios de múltiplos pavimentos. De acordo com Prior (1993), a maior parcela tanto do custo como do peso de uma estrutura de concreto de um edifício são provenientes do pavimento. França e Fusco (1997) afirmam que as lajes maciças são responsáveis, usualmente, por cerca de quase $2/3$ do consumo total do concreto usado na estrutura. Isso se deve ao fato de que, para grandes vãos, são requeridas alturas elevadas para conferir às lajes maciças rigidez suficiente para atender aos limites de deformação excessiva. Sendo assim, na concepção de pavimentos com grandes vãos, o atendimento dos estados limites de utilização passa a ser preponderante e a solução em lajes maciças em concreto armado torna-se antieconômica, pois a espessura necessária será elevada e grande parte da sua capacidade resistente será destinada ao combate das solicitações provenientes do peso próprio.

O sistema de lajes nervuradas de concreto armado possui desempenho, em problemas que envolvem grandes vãos, comprovadamente mais eficiente do que o sistema composto por lajes maciças, por conferir, em relação a esta, uma redução do peso à medida que se aumenta a rigidez. Dessa maneira, as lajes nervuradas se apresentam como uma alternativa eficiente por possibilitar vãos maiores, graças à substituição do concreto por materiais mais leves (ou nenhum material) em regiões onde ele é desnecessário. Fiala e Hájek (2007) afirmam que é possível alcançar uma economia de aproximadamente 50% no peso do concreto e, conseqüentemente, uma redução na carga do peso próprio atuando sobre a laje em si, bem como sobre as estruturas de suporte.

Os requisitos de projeto de lajes nervuradas têm sofrido modificações ante às exigências da norma de desempenho para edificações habitacionais (NBR 15575/2013), em particular no que concerne à segurança contra incêndio. A eficiência econômica dos padrões de fôrmas usualmente adotados na boa prática de projeto pelas indústrias da construção civil

foi colocada à prova. As novas exigências para as dimensões mínimas da espessura da mesa e largura da nervura, que garantem a função de corta-fogo, estimularam a realização de estudos para investigar a influência dessa mudança e propor alternativas no sistema de formas plásticas adequadas às novas exigências, sem perder a eficiência e economia.

O cenário atual é marcado pelo uso intenso e abusivo dos recursos naturais e pela alta emissão de gases causadores do efeito estufa que, por conseguinte, provocam efeitos nocivos e irreversíveis ao planeta. A indústria da construção civil é um dos maiores consumidores de matérias-primas naturais e é responsável, segundo Yepes, Martí e García-Segura (2015), por cerca de 40-50% de todas as emissões globais de gases de efeito estufa. Com o constante desenvolvimento da construção civil, potencializado pelo crescimento populacional e pelo elevado adensamento urbano, há, inevitavelmente, um aumento na extração de matéria prima, consumo de energia e emissão de poluentes. Existe, desse modo, uma necessidade imperiosa de mudanças na concepção tecnológica da construção de modo a mitigar a degradação ambiental.

O dióxido de carbono (CO₂), que é considerado o principal gás de efeito estufa antrópico, cresceu cerca de 80% desde 1970 e foi estimado em 77% das emissões antropogênicas totais de gases de efeito estufa em 2004 (CAMP; ASSADOLLAHI, 2015). De acordo com Hajek (2017), estima-se que, atualmente, a indústria de cimento e concreto seja responsável por cerca de 7-8% das emissões globais de CO₂. Metha (2002) afirma que o concreto comum possui cerca de 12% de cimento Portland em sua composição, que corresponde a um consumo anual de 1,5 bilhões de toneladas de cimento em todo o mundo, fato que justifica estudos que objetivem a sua minimização.

Devido à recente preocupação com os impactos negativos causados ao meio-ambiente pela construção civil, fato que culminou no surgimento do paradigma da construção sustentável, a busca por soluções estruturais que permitam um uso racional dos materiais e facilitem sua concepção e implantação tem sido um incentivo para diversas pesquisas relacionadas à temática. Nesse contexto, a otimização do consumo dos materiais, que viabiliza uma economia monetária e ambiental, baliza o desenvolvimento de novas concepções estruturais.

É indubitável que um dos maiores desafios da engenharia sempre foi encontrar uma solução de um determinado problema que faça o melhor uso possível dos recursos disponíveis. Aliar eficiência e economia, tendo como resultado um produto ótimo, é uma preocupação intrínseca ao desenvolvimento de um projeto dessa área. Pode-se inferir, portanto, que a otimização integra a essência da engenharia. À vista disso, a conjuntura atual dita uma tendência

das pesquisas em explorar técnicas de otimização para solucionar problemas estruturais. Dentro dessa perspectiva, muitos trabalhos foram e estão sendo desenvolvidos sobre a otimização de estruturas em concreto armado e protendido. A aplicação da otimização em pavimentos de concreto armado e protendido tem sido uma linha de pesquisa atrativa e, por conseguinte, bastante explorada recentemente, como pode ser visto nos trabalhos de Al-Assaf e Saffarini (2004); Ahmadkhanlou e Adeli (2005); Sahab, Ashour e Toropov (2005); Prasad, Chander e Ahuja (2005); Castilho e Lima (2007); Castilho, Debs e Nicoletti (2007); Kaveh e Abadi (2010); Ahmadi-Nedushan e Varaee (2011); Galeb e Atiyah (2011); El Semelawy, Nassef e El Damatty (2012); Kaveh e Behnam (2012); Kaveh e Massoudi (2012); Galeb e Ibrahim (2014); Vasconcelos, Almeida e Prado (2013); Ghandi, Shokrollahi e Nasrolahi (2017).

A otimização, como o próprio nome sugere, consiste em um processo de determinação da solução ótima de um problema. Permite obter, por meio de uma busca racional conduzida por algoritmos numéricos, as condições admissíveis que extraem o melhor rendimento possível de uma determinada medida de desempenho. Sendo assim, a otimização oferece subsídios para anular a subjetividade, inerente ao processo tradicional de projeto, na tomada de decisão de quais valores atribuir para suas variáveis. Esta característica a configura como ferramenta substancial e com elevado potencial prático para concepção de projetos racionais.

Os métodos de otimização permitem a formulação matemática de um problema que objetiva a extremização de uma função sujeita a restrições. Os mesmos são balizados por uma busca sistemática de valores admissíveis para os parâmetros que definem a função objetivo (variáveis de projeto) e fornecem o melhor rendimento desta, satisfazendo, simultaneamente, exigências ou funções de restrições de projeto. Esses métodos fornecem, portanto, estratégias matemáticas que podem ser aplicadas, por exemplo, na minimização do custo, na minimização dos impactos ambientais, na minimização do consumo energético, na maximização da eficiência, na maximização da produção, entre outras aplicações.

A formulação de um problema de otimização é, basicamente, baseada na definição da função objetivo (função a ser minimizada ou maximizada), na inter-relação entre as variáveis de decisão da função e nas restrições do projeto. Na engenharia de estruturas, a grande maioria dos trabalhos desenvolvidos tratam da otimização das dimensões, da forma e da topologia das estruturas de modo a minimizar o seu custo. Recentemente, no entanto, muitas pesquisas foram desenvolvidas com intuito de minimizar, além do custo, as emissões de CO₂ decorrentes do processo de construção de estruturas de concreto armado, dentre as quais podem ser citados os trabalhos de Payá-Zaforteza *et al.* (2008), Yepes *et al.* (2012), Park *et al.* (2013), Medeiros e

Kripka (2014), Yepes, Martí e García-Segura (2015), Camp e Assadollahi (2015), Kaveh e Ardalani (2016), García-Segura e Yepes (2016).

São recorrentes as situações em que se deseja melhorar, simultaneamente, mais de uma medida de desempenho que possuem naturezas conflitantes (otimização multiobjetivo). Nesses casos, espera-se determinar um denominador comum entre as medidas. Não há, dessa forma, a melhor solução, mas sim um conjunto de soluções que fornecem relações distintas de compromissos entre os objetivos almejados. Sendo assim, a melhor relação (ou relação ótima) fica facultada ao usuário.

A otimização multiobjetivo fornece possibilidades, promovendo maior liberdade ao projetista, que, melhorando uma medida em detrimento à outra, pode escolher a combinação que melhor atende às suas necessidades. Por meio desta, é possível obter um conjunto de soluções não-dominadas (ótimos de Pareto), caracterizadas pela impossibilidade de melhorar um objetivo sem piorar pelo menos um dos demais.

Existem diversos algoritmos de otimização. Não há, todavia, um método geral que apresente o melhor rendimento na obtenção das soluções para qualquer problema de otimização. Cada algoritmo apresenta uma aplicação mais adequada a determinados problemas e suas eficiências estão associadas às características destes. Por exemplo, em situações onde as variáveis de projeto podem assumir valores reais e as funções envolvidas são contínuas e diferenciáveis, os algoritmos de programação matemática baseados em informações de gradientes são apropriados. Em contrapartida, na prática diária da engenharia, muitas variáveis são de natureza discreta e as funções podem não ser contínuas e tampouco diferenciáveis. Nesse caso, a classe dos algoritmos evolucionários, em especial os Algoritmos Genéticos (AG's), tem sido aplicada com sucesso. Muitos trabalhos testaram a viabilidade, a eficiência e a perspectiva da utilização dos AG's em problemas de engenharia, tais como Coello, Hernández e Farrera (1997), Rafiq e Southcombe (1998), Rajeev e Krishnamoorthy (1998), Castilho, El Debs e Nicoletti (2007), Galeb e Atiyah (2011), Albuquerque, El Debs e Melo (2012), Rocha (2013), Oliveira (2014) e Sena (2015).

Para o tratamento de problemas de otimização multiobjetivo, existem vários algoritmos baseados nos AGs, dentre os quais se pode destacar o NSGA-II como sendo um dos mais populares (BABAEI; MOLLAYI, 2016). O mesmo foi desenvolvido por Deb *et al.* (2002) e se trata de uma evolução do algoritmo *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA) proposto por Srinivas e Deb (1995).

É necessário, simultaneamente ao processo de busca do ótimo, determinar os esforços e os deslocamentos desenvolvidos para verificar se a estrutura concebida é capaz de

absorver as solicitações com segurança e adequado uso em serviço. Na análise de pavimentos de lajes nervuradas em concreto armado, a analogia de grelha, método amplamente difundido na comunidade acadêmica, é um dos mais utilizados por *softwares* comerciais de projeto estrutural, tais como *Alto QI Eberick*[®] e *TQS*[®], para o tratamento de ações verticais, dada sua simplicidade, sua eficiência e seu baixo custo computacional. Além de permitir um tratamento integrado do pavimento, considerando a deformabilidade das vigas de apoio e a continuidade dos painéis da laje, seu uso se justifica pela similaridade geométrica entre o método e o tipo de laje analisada, levando, assim, a resultados satisfatórios, conforme pode ser visto em Coelho (2000), Stramandinoli (2003), Dias (2003), Hennrichs (2003) e Dornelles (2009).

1.1 Objetivos

O principal objetivo geral deste trabalho é a formulação de modelos de otimização multiobjetivo de lajes nervuradas retangulares de concreto armado que permitam determinar as dimensões para um padrão de fôrma que atenda às novas imposições das normas NBR 6118/2014 e NBR 15575/2013 de forma eficiente. Para tanto, deverão ser atingidos os seguintes objetivos específicos:

- a) Estudar os parâmetros da analogia de grelha e testar a viabilidade da técnica da espessura equivalente;
- b) Desenvolver um modelo de otimização multiobjetivo aplicado a lajes nervuradas isoladas em concreto armado respeitando as restrições quanto à resistência (ELU), à rigidez (ELS) e à função de corta fogo;
- c) Estudar os valores adotados para mensurar a emissão de CO₂;
- d) Avaliar o algoritmo NSGA-II na otimização multiobjetivo do custo monetário e das frequências naturais de lajes nervuradas;
- e) Avaliar o algoritmo NSGA-II na minimização do custo e da emissão de CO₂ de lajes nervuradas;
- f) Aplicar um AG na minimização do custo de lajes quadradas com diferentes vãos;
- g) Avaliar a influência da mudança das dimensões mínimas das lajes nervuradas imposta pela NBR 15575/2013.

1.2 Escopo da dissertação

No Capítulo 2 são apresentados os princípios das lajes nervuradas, destacando o procedimento e as condições adotadas no projeto desse sistema de acordo com as prescrições da NBR 6118/2014 e da NBR 15575/2013. Além disso, são evidenciadas as premissas principais da analogia de grelha, destacando as vantagens dessa técnica em relação a outros métodos de análise e os aspectos mais relevantes que corroboram sua adoção na análise estrutural de pavimentos de concreto armado, em especial na análise de pavimentos formados por lajes nervuradas.

No Capítulo 3 é apresentada uma abordagem geral acerca da formulação de um problema de otimização e da filosofia dos seus principais algoritmos, sendo dada ênfase nos algoritmos genéticos e no algoritmo NSGA-II. Em seguida, são evidenciadas a aplicabilidade e a versatilidade da otimização. Para tanto, é feita uma discussão dos trabalhos mais relevantes que tratam da otimização de lajes de concreto e da otimização com intuito de minimizar as emissões de CO₂, destacando as principais conclusões e contribuições de cada.

A formulação do problema de otimização para lajes nervuradas de concreto armado é pormenorizada no Capítulo 4. A princípio, são mostrados como será montada a função para o custo, para frequência natural e para emissão de CO₂, com uma discussão acerca das adoções dos autores para esta última, além das restrições do problema e as variáveis de projeto. Neste capítulo é discutida, ainda, uma metodologia para desacoplar o modelo de otimização da geração da malha da grelha.

As aplicações numéricas da metodologia proposta são apresentadas e discutidas no Capítulo 5. Os resultados da técnica da espessura equivalente e da otimização mono e multiobjetivo de alguns pavimentos são apresentados.

Por fim, apresenta-se no Capítulo 6 as considerações finais deste trabalho, destacando suas principais inferências e suas contribuições científicas, ambientais e econômicas. Além disso, são sugeridas algumas pesquisas a serem desenvolvidas doravante.

2 LAJES NERVURADAS

As lajes são elementos planos que constituem os pavimentos de uma edificação, sendo, dessa maneira, o elemento estrutural responsável por receber diretamente as ações verticais provenientes dos usuários e dos utensílios dispostos por estes. Além disso, devido sua elevada rigidez no plano (comportamento de um diafragma rígido), as mesmas possuem a função de transmitir as ações horizontais entre os pórticos da estrutura, o que permite que os elementos contraventados se apoiem nos elementos de contraventamento e, assim, seja garantida a estabilidade global da estrutura (FRANÇA; FUSCO, 1997).

Normalmente, a laje é o elemento estrutural que consome a maior quantidade de material (PRIOR, 1993; CARVALHO; PINHEIRO, 2013). Sendo assim, a busca por sistemas alternativos eficientes para o pavimento, que amplie a gama de possibilidades e permita a escolha racional do sistema que melhor se adeque às especificidades da edificação, tem sido motivação para diversas pesquisas.

Quando os vãos são grandes, geralmente, apenas uma pequena região de concreto de uma laje maciça estará sendo comprimida (CARVALHO; PINHEIRO, 2013). Desse modo, a maior parte do concreto da seção não contribuirá para a resistência à flexão, fato que o torna, em sua maior parte, desnecessário. Além disso, à medida que o vão aumenta, torna-se necessário aumentar a rigidez à flexão da laje maciça para que a peça atenda ao estado limite de deformações excessivas. Em geral, esse aumento é feito pelo aumento da espessura da laje, o que, por sua vez, aumenta o peso próprio. Sendo assim, na concepção de pavimentos com grandes vãos, o atendimento aos estados limites de utilização passa a ser preponderante e a solução em lajes maciças torna-se antieconômica, pois a espessura necessária será elevada e grande parte da sua capacidade resistente será destinada à absorção das solicitações provenientes do peso próprio.

Uma forma de diminuir a espessura das lajes maciças nessas situações é a utilização da protensão. A ideia desta é minimizar ou eliminar a fissuração (que diminui a rigidez da peça de concreto e, assim, acentua os deslocamentos) mediante a indução de tensões de compressão, feitas por cabos previamente tracionados, que minimizam ou anulam as tensões de tração que dão origem às fissuras. A protensão, todavia, requer técnicas específicas para sua execução, o que representa, a princípio, um custo adicional.

As lajes nervuradas, que são provenientes da parcial remoção ou da substituição por um material mais leve do concreto tracionado, surgem como alternativa às lajes maciças para problemas que envolvem grandes vãos, tendo em vista que, em relação a estas, é possível

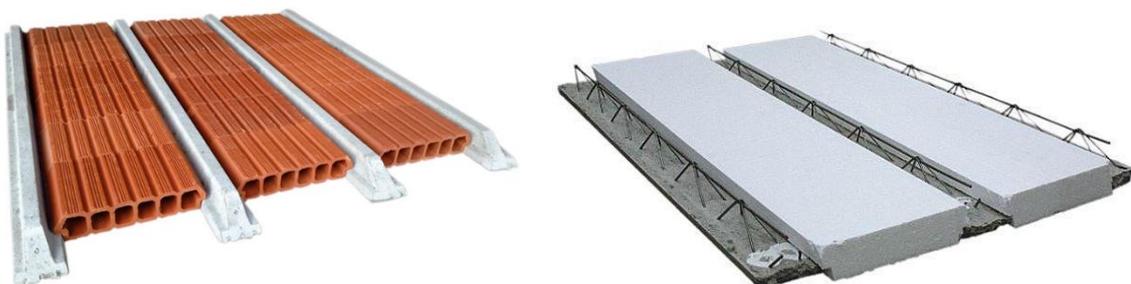
obter uma rigidez mais elevada mantendo o mesmo peso. As lajes nervuradas foram concebidas com o intuito de promover um alívio do peso próprio da estrutura à medida que se tem um aproveitamento mais eficiente do concreto e do aço (FRANCA; FUSCO, 1997). Além disso, as lajes nervuradas, sem protensão, podem ser construídas com as mesmas técnicas empregadas nas lajes maciças.

O conjunto formado pela mesa e pela nervura tem um formato de um T, o que confere uma boa resistência aos momentos fletores positivos, já que estes comprimem a região da mesa (que tem maior quantidade de concreto) e tracionam a região da nervura. Sendo assim, é recomendado que essas lajes não sejam concebidas com engastes em seu contorno, que podem gerar momentos negativos, cuja absorção pelo sistema não é tão eficiente (CARVALHO; PINHEIRO, 2013)

As lajes nervuradas, que podem ter suas nervuras dispostas em uma ou em duas direções, geralmente ortogonais, são classificadas quanto ao sistema construtivo em: moldadas no local e pré-moldadas. Estas últimas podem ser do tipo duplo “T” (ou π), alveolares ou formadas por nervuras pré-moldadas (também chamadas de vigotas).

As vigotas pré-moldadas podem ser do tipo trilho (FIGURA 1-a) ou treliçada (FIGURA 1-b), em concreto armado ou protendido, com os espaços entre as nervuras preenchidos por materiais mais leves, tais como as lajotas cerâmicas e os blocos de Poliestireno Expandido (EPS), que resistem às solicitações decorrentes do processo de montagem do sistema, mas não têm função estrutural. Esse sistema levou à eliminação do assoalho de madeira, tradicionalmente adotado para reter o concreto no seu estado fluido, já que o conjunto formado pelos blocos e as vigotas exercem essa função.

Figura 1 – Lajes com nervuras a) tipo trilho e b) tipo treliça

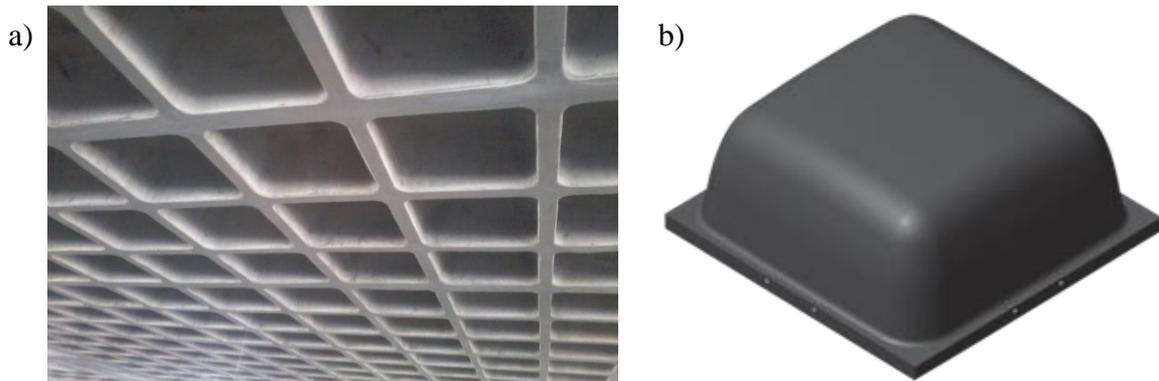


Fonte: Acervo do autor (2017).

As lajes moldadas no local (FIGURA 2-a) são, normalmente, moduladas por vazios obtidos com o uso de fôrmas plásticas reaproveitáveis (FIGURA 2-b), metálicas ou de polipropileno, facilmente extraíveis no processo de desmoldagem, já que as faces laterais da fôrma

possuem uma leve inclinação e cantos arredondados, além de serem usados desmoldantes na sua superfície. As mesmas, também chamadas de cubetas, podem ser reutilizadas várias vezes e, diferentemente dos blocos de enchimento, não contribuem no peso próprio da laje. Assim como nas lajes pré-moldadas, esse sistema de formas não requer a utilização das chapas de madeira no fundo.

Figura 2 – a) Lajes nervuradas moldadas no local e b) molde reutilizável.



Fonte: Acervo do autor (2017).

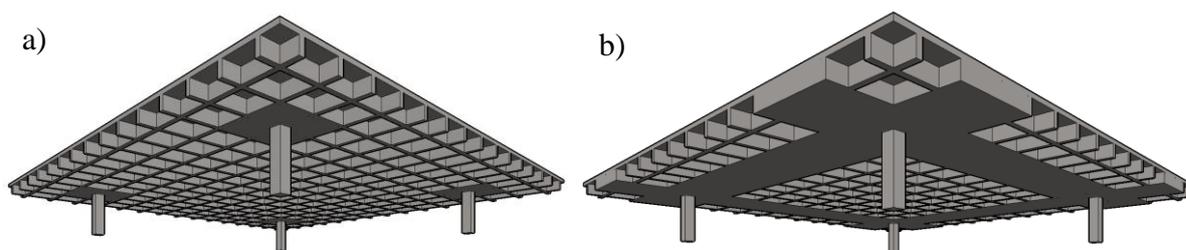
As tendências atuais da arquitetura requerem maior liberdade na concepção do *layout* das edificações para, dessa forma, se ter um melhor aproveitamento dos espaços internos das mesmas e uma minimização dos efeitos da obsolescência funcional. O uso do sistema tradicional de pavimentos, composto por lajes apoiadas sobre vigas, tem se tornado um dos principais responsáveis pela limitação da flexibilidade dos projetos de arquitetura de edifícios. Isso se deve, em parte, ao condicionamento da posição das vigas às posições das alvenarias e ao fato dos vãos terem que ser limitados para não acarretarem em vigas muito altas, o que reflete diretamente em um número maior de pilares. Uma alternativa para vencer essa limitação é apoiar as lajes diretamente sobre os pilares, dando origem às chamadas lajes lisas (sem capitel) e às lajes-cogumelo (com capitel) (ABNT, 2014). A ausência das vigas torna o pavimento um plano contínuo sem obstáculos, simplificando o sistema de fôrmas e cimbramento, resultando em maior produtividade da mão-de-obra.

A grande desvantagem das lajes lisas, além das flechas mais acentuadas, é a possibilidade da ocorrência da punção, que se trata de uma ruptura brusca associada ao cisalhamento que pode levar à ruína da estrutura devido ao colapso progressivo (LIMA NETO *et al.*, 2013). Os capitéis, que são resultantes do aumento da seção do pilar na ligação com a lajes, apresentam-se como uma alternativa para minimizar esse efeito, por meio da redução das tensões de cisalhamento na ligação laje-pilar. O uso destes, no entanto, amplia a dificuldade na

execução das formas e acarreta o uso de tetos não lisos, de tal modo que, segundo Araújo (2014), seu uso tem sido evitado.

No caso das lajes lisas maciças, pode ser necessário o uso de capitéis para minimizar o efeito da punção, o que leva a um teto não plano e a um processo mais oneroso para execução das fôrmas. Em contrapartida, ao se utilizar lajes nervuradas, pode-se tornar maciças as regiões nas adjacências dos pilares (capitéis), de modo a absorver momentos fletores e esforços cortantes elevados, de forma simples e ainda assim se ter uma laje com teto plano (FIGURA 3-a). Nesse caso, a facilidade na montagem das fôrmas, inerentes aos sistemas de lajes lisas, é preservada, e sua desvantagem, relacionada ao efeito da punção, é minimizada. Quando se usa o sistema com lajes lisas nervuradas, é comum, também, utilizar vigas-faixas embutidas na laje no alinhamento dos pilares, principalmente quando se tem protensão (FIGURA 3-b).

Figura 3 – Lajes lisas nervuradas a) com capitel e b) com faixas maciças.



Fonte: Elaborada pelo autor (2017).

2.1 Analogia de grelha

O método clássico de análise de lajes é baseado na consideração de que cada laje pode ser tratada como uma placa isolada apoiada sobre vigas indeslocáveis verticalmente. As estruturas de concreto armado, no entanto, apresentam um comportamento monolítico. Desse modo, os esforços e os deslocamentos desenvolvidos no interior de uma laje são influenciados pela interação dos elementos que formam o pavimento. Em geral, os mesmos são acentuados por esse comportamento integrado, não sendo, portanto, representativo desconsiderar a continuidade das lajes e as deformações das vigas de apoio.

A NBR 6118/2014 estabelece alguns critérios que permite que a análise de uma laje nervurada seja feita mediante a substituição desta por uma laje maciça de mesma rigidez à flexão. Além de não ter solução para muitas situações, essa metodologia, de acordo com Stramandinoli (2003), tem levado a resultados insatisfatórios em diversos casos. Isso ocorre devido ao fato da laje nervurada não ter a mesma rigidez à torção de uma laje maciça, o que

confere àquela, naturalmente, deflexões e momentos fletores mais acentuados do que esta (CARVALHO; PINHEIRO, 2013).

Para viabilizar a utilização da teoria de placas na análise de lajes nervuradas desconsiderando a rigidez à torção, Hahn (1972) propôs um coeficiente (γ) para corrigir os momentos fletores positivos. O mesmo depende da vinculação e da relação entre os vãos da laje e, para painéis de lajes com bordas simplesmente apoiadas, é dado por

$$\gamma = \frac{1}{1 - \left[\left(\frac{5}{6} \right) \frac{(\ell_x / \ell_y)^2}{1 + (\ell_x / \ell_y)^4} \right]} \quad (1)$$

sendo ℓ_x o menor vão da laje e ℓ_y o maior.

Se a laje for quadrada, o coeficiente será igual a 1,71. Sendo assim, os esforços obtidos pela teoria de placas são aumentados significativamente (cerca de 71%) devido a desconsideração da rigidez à torção da laje nervurada.

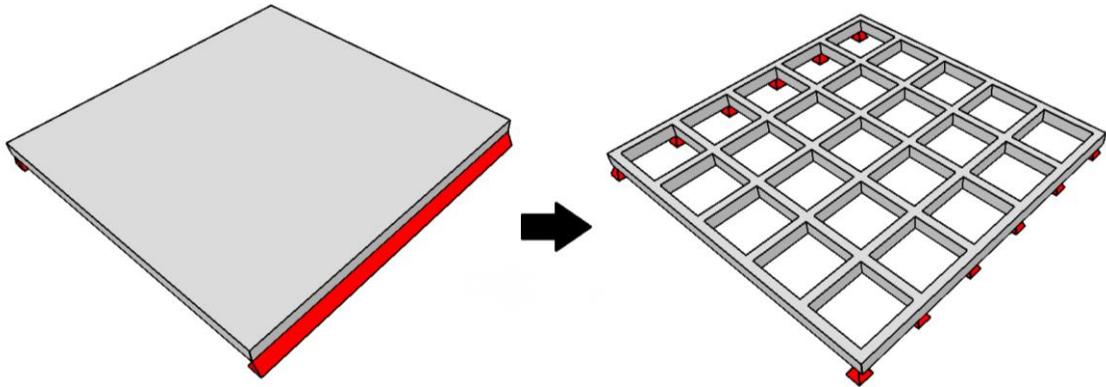
Para se ter uma análise mais representativa das lajes nervuradas, faz-se necessário que sejam explorados modelos mais precisos, dentre os quais se destaca o Método dos Elementos Finitos (MEF). Dias (2003) afirma que o modelo que melhor simula o comportamento desse sistema é o baseado no MEF, por meio da modelagem da capa e das nervuras como elementos de casca. Entretanto, inerentemente à sofisticação do modelo de análise, há um aumento na complexidade e, naturalmente, exige-se um maior cuidado no tratamento dos parâmetros do método, bem como na aquisição dos seus resultados. A definição da malha, o tratamento da excentricidade entre os eixos da nervura e o plano médio da placa, a definição da vinculação e a obtenção dos momentos fletores são exemplos da complexidade na utilização desse método. Por se tratar de uma estrutura reticulada, a analogia de grelha se mostra como uma alternativa mais simples de ser interpretada e aplicada, fato que justifica sua ampla utilização nos escritórios de engenharia.

A analogia de grelha, além de ter um custo de processamento menor do que o modelo de elementos finitos de casca, tem mostrado bons resultados na análise de lajes nervuradas, conforme pode ser visto em Bocchi Jr. (1995), Barbirato (1997), Coelho (2000), Stramandinoli (2003), Dias (2003), Hennrichs (2003) e Dornelles (2009). Isso se deve à similaridade geométrica entre o método e o sistema, uma vez que as lajes nervuradas são, naturalmente, uma grelha formada pelo conjunto de nervuras no qual se apoia a capa.

Utilizando a analogia de grelha, que consiste em substituir uma placa por um conjunto de vigas ortogonais com rigidez à torção e à flexão que gerem esforços e

deslocamentos equivalentes ao da estrutura real (FIGURA 4), é possível analisar os elementos que compõem o pavimento de forma integrada, levando em conta a flexibilidade das vigas de apoio e a rigidez à torção. Esse método foi, segundo Hambly (1976), utilizado pela primeira vez em computadores por Lightfoot e Sawko em 1959. A analogia de grelha é uma estratégia de fácil compreensão e aplicação, apresenta baixo custo de processamento e tem se mostrado precisa para uma grande variedade de placas (FIGUEIREDO FILHO, 1989).

Figura 4 – Substituição de uma placa por uma grelha equivalente



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Os esforços e deslocamentos na grelha equivalente podem ser obtidos por meio da solução do sistema de equações de equilíbrio dado por

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_0 \quad (2)$$

onde \mathbf{f} é o vetor das cargas externas nodais, \mathbf{f}_0 é o vetor dos esforços de engastamento perfeito, \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos nodais e \mathbf{K} é a matriz de rigidez da estrutura, obtida a partir da sobreposição direta dos coeficientes de rigidez associados ao mesmo grau de liberdade das matrizes de rigidez dos elementos (\mathbf{K}_e), que, no sistema local, pode ser dada por

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3)$$

em que I é o momento de inércia à flexão, J é a constante de torção, E é o módulo de Young, G é o módulo de cisalhamento e L é o comprimento da barra.

Tendo em vista que cada barra que compõe a grelha pode assumir qualquer direção no plano, os coeficientes de rigidez locais devem ter transformados para um sistema de coordenadas generalizadas globais. Isso é necessário porque as barras devem ter suas componentes definidas em um mesmo sistema de coordenadas para que a soma das suas contribuições possa ser feita diretamente. Dessa maneira, a montagem da matriz de rigidez da estrutura é feita pela soma das matrizes de rigidez de cada elemento no sistema global. A transformação pode ser feita fazendo

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{T} \quad (4)$$

em que \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez do elemento no sistema global, \mathbf{T} é a matriz de transformação por rotação que relaciona os graus de liberdade globais com os locais e \mathbf{T}^T é a transposta desta. A matriz \mathbf{T} é dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (5)$$

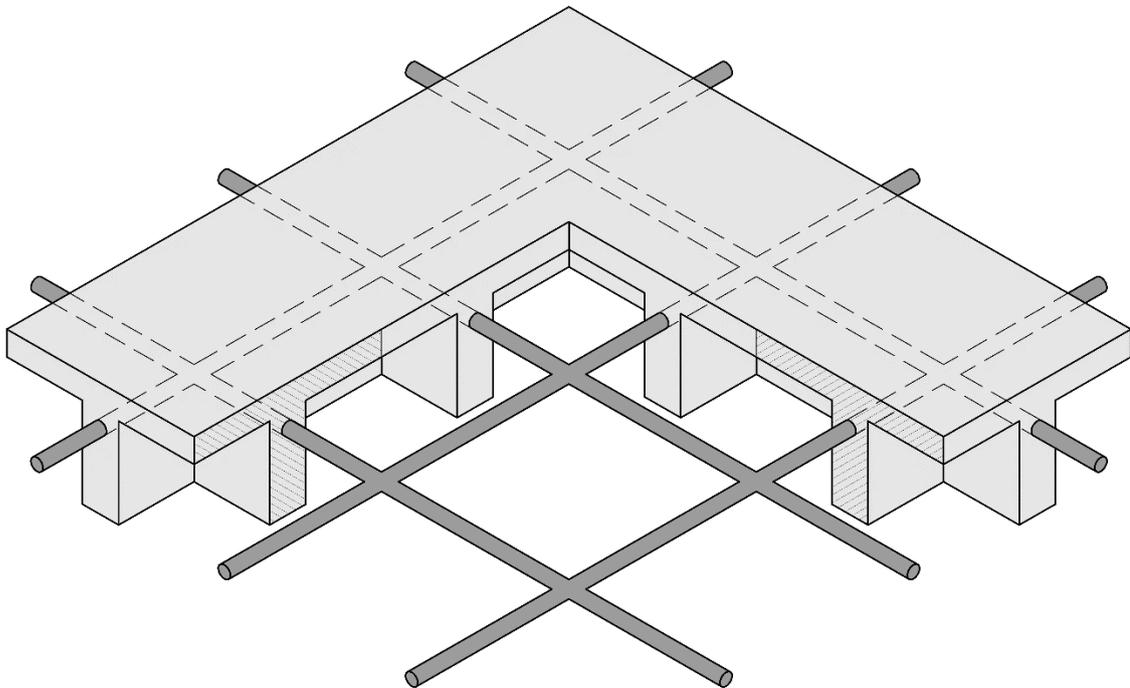
sendo c e s , respectivamente, o cosseno e o seno do ângulo de orientação do eixo longitudinal local x barra em relação ao eixo x global.

O sistema da Equação (2) não pode ser resolvido porque a matriz de rigidez da estrutura é singular. A singularidade é anulada impondo as condições de contorno por meio da eliminação das linhas e das colunas correspondentes aos graus de liberdade restritos.

2.1.1 Espessura equivalente

Na utilização da analogia de grelha na análise de pavimentos com lajes nervuradas é comum coincidir a posição dos eixos das nervuras com as barras das grelhas e tratarem estas últimas como vigas com seção T (FIGURA 5). Contudo, embora represente de forma mais adequada o comportamento desse tipo de pavimento (BARBIRATO, 1997), essa prática condiciona a malha da grelha à posição das nervuras. Logo, para gerar a grelha, é necessário conhecer previamente a posição das nervuras.

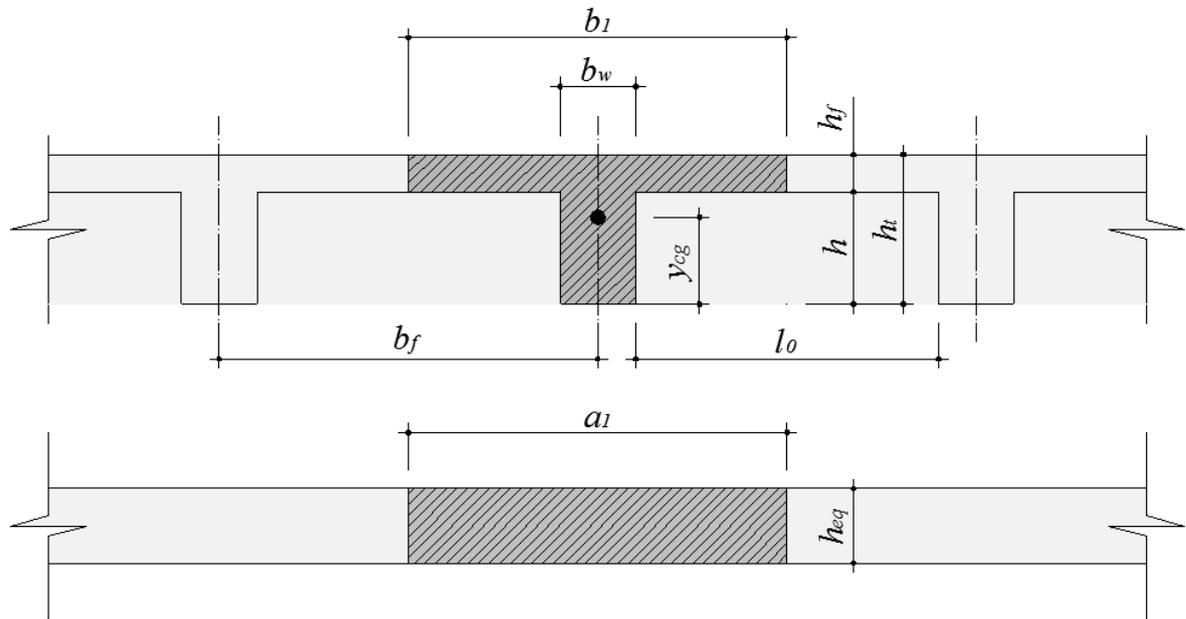
Figura 5 – Substituição da laje nervurada por barras posicionadas no eixo das nervuras



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Para predefinir a malha da grelha e torna-la independente da distância entre os eixos da nervura, a laje nervurada pode ser transformada em uma laje maciça com espessura equivalente que forneça a mesma rigidez à flexão (FIGURA 6). Com isso, as posições das barras da grelha não ficarão definidas pelas posições das nervuras.

Figura 6 – Laje maciça equivalente



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

A espessura equivalente é obtida por meio de uma equivalência da rigidez à flexão. A rigidez à torção dessa laje equivalente, no entanto, não será a mesma da laje nervurada, o que leva a resultados bem divergentes e torna essa técnica ineficiente. Todavia, se a rigidez à torção da laje nervurada for desconsiderada, como recomendam alguns autores, esse método trará resultados satisfatórios.

A espessura da laje maciça equivalente deverá fornecer a mesma rigidez à flexão da laje nervurada. Portanto, a espessura equivalente (h_{eq}) pode ser obtida igualando o momento de inércia à flexão da seção T (I) ao momento de inércia à flexão de uma faixa da laje equivalente com largura igual à distância entre os eixos da nervura (b_f), obtendo-se para espessura equivalente

$$h_{eq} = \left(\frac{12 I}{b_f} \right)^{1/3} \quad (6)$$

2.1.2 Propriedades físicas e geométricas

O momento de inércia da seção transversal T em relação à linha neutra, a partir do teorema dos eixos paralelos, é obtido por

$$I = \frac{b_f h_f^3}{12} + b_f h_f \left(\frac{h_f}{2} + h - y_{cg} \right)^2 + \frac{b_w h^3}{12} + b_w h \left(\frac{h}{2} - y_{cg} \right)^2 \quad (7)$$

sendo y_{cg} a posição do centro geométrico da seção em relação à borda inferior dado por

$$y_{cg} = \frac{0,5 b_w h^2 + b_f h_f h + 0,5 h_f^2 b_f}{b_w h + b_f h_f}. \quad (8)$$

Conforme pode ser visto em Barboza (1992), a constante de torção (J), que representa a parcela geométrica da rigidez à torção, não é apenas uma propriedade geométrica da seção, não podendo, assim, ter uma regra geral para sua determinação. Segundo Hambly (1976), em lajes maciças, o J pode ser estimado como o dobro do momento de inércia à flexão. Essa afirmação é baseada na Teoria Clássica de Placas, que mostra que o momento de torção por unidade de comprimento em uma placa fina (M_{xy}) é dado por

$$M_{xy} = -\frac{E h^3}{12(1+\nu)} \kappa_{xy} \quad (9)$$

em que h é a espessura da placa e κ a curvatura.

Usando a relação entre as constantes elásticas do material (Equação 10), pode-se escrever a Equação (9) na forma da Equação (11) e, considerando o momento de inércia da seção retangular de largura unitária e altura h , na forma da Equação (13) ou, com J igual ao dobro de I , da Equação (14).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (10)$$

$$M_{xy} = -\frac{G h^3}{6} \kappa \quad (11)$$

$$M_{xy} = 2 I G \kappa \quad (12)$$

$$M_{xy} = G J \kappa \quad (13)$$

Coelho (2000) estudou outras relações J/I e concluiu que uma relação entre 2 e 2,5 fornecem resultados, quanto aos deslocamentos e esforços, próximos aos obtidos pela teoria da elasticidade, o que corrobora a adoção da relação sugerida por Hambly (1976).

No caso das lajes nervuradas, em que cada barra da grelha possui uma seção T, a constante de torção pode ser, de acordo com Young e Budynas (2002), dada por

$$J = J_1 + J_2 + \alpha D^4 \quad (14)$$

onde

$$J_1 = b_f h_f^3 \left[\frac{1}{3} - 0,21 \frac{h_f}{b_f} \left(1 - \frac{h_f^4}{12b_f^4} \right) \right] \quad (15)$$

$$J_2 = h b_w^3 \left[\frac{1}{3} - 0,105 \frac{b_w}{h} \left(1 - \frac{b_w^4}{192 h^4} \right) \right] \quad (16)$$

$$D = \frac{h_f^2 + 0,25 b_w^2}{h_f} \quad (17)$$

$$\alpha = 0,15 \frac{t}{t_1} \quad (18)$$

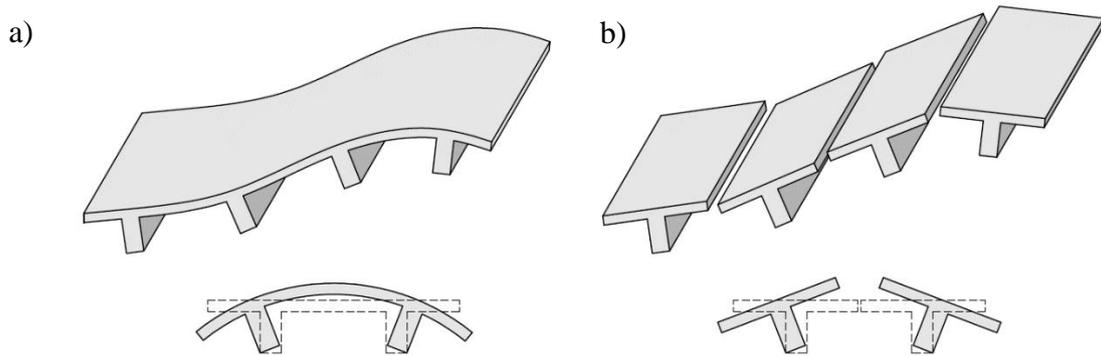
sendo t e t_1 , respectivamente, o menor e o maior valor entre h_f e b_w .

Leonhardt (1978) afirma que as lajes nervuradas possuem baixa rigidez à torção, de tal modo que esta deve ser desprezada. Desse modo, os cálculos elásticos dos momentos desenvolvidos nas lajes nervuradas não levariam em conta sua rigidez à torção, fornecendo momentos fletores mais acentuados. Além disso, essa consideração se torna consistente devido ao fato de, normalmente, não ser avaliado o esforço de torção nas nervuras, muito pela dificuldade construtiva associada à inserção de estribos.

Para desprezar a rigidez à torção, Correa (1991) e Barbirato (1997) utilizaram apenas 1% de G na definição da rigidez à torção da laje, conforme propõe Leonhardt (1978). Bocchi Jr. (1995) utilizou 20% do momento de inércia à torção da seção homogênea para levar em consideração os efeitos da fissuração, obtendo momentos fletores menores que os obtidos considerando 1% da rigidez à torção, e momentos torçores pequenos nas nervuras. A NBR 6118/2014 preconiza que, nas grelhas e nos pórticos espaciais, seja considerada apenas 15% da rigidez elástica à torção das vigas devido à fissuração, exceto para os elementos estruturais com protensão limitada ou completa.

Coelho (2000) salienta que há um erro, a favor da segurança, na análise de lajes nervuradas pela analogia de grelha, já que a ligação contínua existente na placa é considerada de forma discreta no modelo de grelha, isto é, somente no cruzamento das barras, gerando, dessa maneira, um deslocamento relativo que inexiste na estrutura real (FIGURA 7). Stramandinoli (2003) observou que o fato do modelo da analogia de grelha não considerar a continuidade da capa entre as nervuras faz com que os momentos fletores obtidos por esse modelo, mesmo considerando a rigidez à torção integral das nervuras, sejam mais elevados do que o obtido por elementos finitos de placas e barras desconsiderando a rigidez à torção. Sendo assim, a consideração da rigidez integral poderia ser considerada no modelo da analogia de grelha e os resultados para os momentos de flexão ainda assim seriam a favor da segurança.

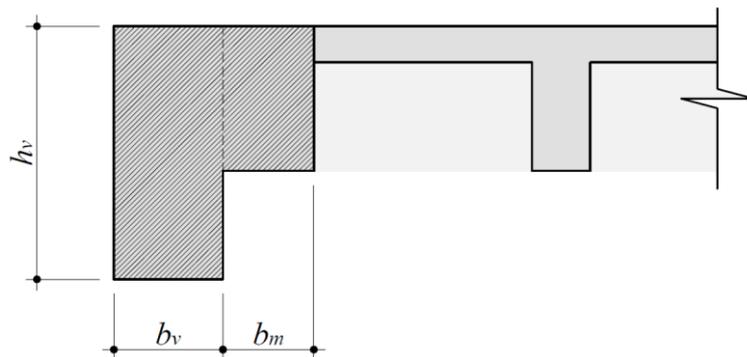
Figura 7 – Laje nervurada a) com continuidade da capa e b) sem continuidade da capa



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Os vãos da laje nem sempre são múltiplos de b_f . Nesses casos, é necessário criar uma região maciça de concreto para um ajuste próximo às bordas. Essas regiões podem ser incorporadas às dimensões das vigas, conforme ilustra a Figura 8. Sendo assim, as propriedades geométricas das vigas de bordo são calculadas considerando uma seção transversal L. Ressalte-se que, comumente, a rigidez da viga à torção é considerada nula devido ao trabalho de se verificar a resistência do elemento a esse esforço e arma-la para tal. Caso seja considerada, a inércia à torção da viga no seu estado fissurado (Estádio II) pode ser considerada como sendo 10% do momento de inércia da seção no Estádio I (CARVALHO, 1994).

Figura 8 – Região maciça incorporada à viga



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

O módulo de Young para o concreto armado pode ser, de acordo com a NBR 6118/2014, adotado como sendo o módulo de deformação secante (E_{cs}). Este, por sua vez, pode ser estimado, para a fase de projeto, a partir do módulo de deformação longitudinal inicial (E_{ci}), dado por

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (19)$$

com o f_{ck} em MPa e α_E igual a: 1,2 para o agregado graúdo de basalto e diabásil; 1 para granito e gnaiss; 0,9 para calcário; 0,7 para arenito. Sendo assim, o E será estimado conforme a Equação (20).

$$E = \alpha_i E_{ci} \quad (20)$$

com α_i dado por

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1 \quad (21)$$

O módulo de deformação transversal pode ser obtido em função do coeficiente de Poisson (ν) e E pela relação elástica da Equação (10). A NBR 6118/2014 sugere o valor de 0,2 para o coeficiente de Poisson do concreto armado. Dessa maneira, $G = E/2,4$.

2.1.3 Malha

A verificação da convergência dos resultados fornecidos por um método numérico é substancial na sua validação. Diferentemente do que se intui, na analogia de grelha não é garantida a convergência dos resultados com o refinamento da malha. Isso só é válido até certo grau de refino. Stramandinoli (2003) afirma que, na aplicação da analogia de grelha na análise de lajes maciças, em muitos casos, a grelha com menor espaçamento entre as barras não é a que apresenta os resultados mais próximos da teoria da elasticidade. Segundo Hambly (1976), a melhora dos resultados com o refinamento só ocorre até o ponto em que o espaçamento das barras não ultrapassam 2 ou 3 vezes a espessura da placa.

Não há, portanto, uma regra geral que conduza à definição de uma malha ideal para a grelha como há em outros métodos numéricos. Hambly (1976), entretanto, propôs alguns critérios para auxiliar na definição de uma malha adequada, dentre os quais pode-se destacar: buscar dispor barras da grelha em posições pré-determinadas pelo projeto, tais como linhas de apoio, ao longo das vigas, etc.; em placas isotrópicas, o espaçamento entre as barras deve ser, no máximo, igual a 1/4 do vão perpendicular ao seu eixo; nos trechos em balanço, é necessário colocar pelo menos duas barras na direção transversal ao seu vão; em regiões com grandes concentrações de esforços, tais como apoios ou cargas concentradas, é recomendável que o espaçamento entre as barras não sobrepuje 3 ou 4 vezes a espessura da placa; os espaçamentos das barras nas duas direções não devem divergir muito, para, assim, permitir uma distribuição uniforme das cargas; no contorno livre das placas dever-se dispor uma barra com largura reduzida de 30% da espessura da placa para o cálculo do momento de inércia à torção.

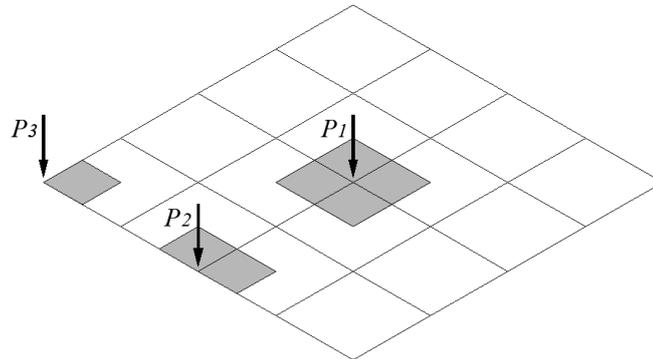
No modelo baseado na analogia de grelha, o pilar é normalmente considerado, de forma simplificada, através da restrição do grau de liberdade transversal do nó posicionado no centro do mesmo. Em lajes lisas, os momentos fletores e os esforços cortantes, naturalmente, podem ser elevados na região da ligação da laje com o pilar, como salienta Figueiredo Filho (1989). Consequentemente, esse modelo fornece valores ainda mais acentuados para os esforços na posição do pilar quando este é modelado como sendo apenas um nó indeslocável verticalmente. Todavia, esse apoio pontual não ocorre na realidade. Carvalho e Pinheiro (2013) afirmam que, para evitar esse efeito, deve-se aumentar o número de nós que representam o pilar, refinando a malha nessa região. Além disso, o mesmo sugere diminuir a rigidez das barras que concorrem no pilar e usar, no dimensionamento, o momento atuante desenvolvido na face do pilar ao invés do momento no nó que representa o seu eixo.

2.1.4 Carregamento

As lajes são os elementos que recebem diretamente o carregamento proveniente das ações dos seus usuários e dos utensílios dispostos por estes. Desse modo, as mesmas estão, nos casos mais comuns, submetidas às cargas de origem gravitacionais, sendo essas as cargas variáveis decorrentes do seu uso (q), além, é claro, das cargas permanentes oriundas do peso próprio (g_{pp}), do revestimento (g_{rev}) e sobrecargas permanentes (g_{sg}). Embora assumam intensidades e posições variáveis, as cargas acidentais são supostas uniformemente distribuídas e sua intensidade será definida a partir da finalidade proposta para a laje (piso de edifícios residenciais, escolas, etc.), conforme sugere a NBR 6120/1980. Ainda segundo essa norma, o peso específico do concreto armado (γ_c) pode ser considerado 25 kN/m³.

De acordo com Carvalho (1994), embora uma laje esteja submetida a uma ação uniformemente distribuída, não há a obrigatoriedade de que os elementos da grelha também o sejam. Sendo assim, as cargas que atuam na laje podem ser aplicadas na grelha equivalente de duas maneiras: como cargas distribuídas ao longo das barras que compõem a grelha ou como cargas concentradas nos nós da mesma. Por simplificação, normalmente se utiliza a segunda alternativa, visto que é desnecessário sofisticar o processo utilizando a primeira, que é mais onerosa e que, de acordo com Reis (2007), para fins práticos, resulta em uma diferença irrelevante na maioria dos casos. As cargas nodais equivalentes são dadas a partir da área de influência e, portanto, de acordo com a posição do nó na grelha, conforme pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Áreas de influência para determinação do carregamento nodal equivalente



Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

As cargas discutidas até então são consideradas uniformemente distribuídas em toda a superfície da laje. As alvenarias que se apoiam diretamente sobre as lajes não são dessa natureza, já que geram cargas apenas parcialmente distribuídas ao longo do vão e em faixas de largura pequena. Contudo, pode-se, de forma aproximada, considerar a carga da alvenaria uniformemente distribuída ao longo da laje se esta for armada nas duas direções. A NBR 6120/1980 afirma que, quando o projeto contiver paredes divisórias cuja posição não esteja definida, pode-se admitir uma carga proveniente destas uniformemente distribuída ao longo da área da laje, cuja intensidade deve ser superior a um terço do peso por metro linear de parede pronta, observando o valor mínimo de 1 kN/m².

2.2 Projeto de acordo com a NBR 6118/2014

Segundo a NBR 6118/2014, as lajes nervuradas podem ser calculadas como lajes maciças, cuja espessura seja tal que confira uma mesma rigidez à flexão. Araújo (2014) ressalta que isso é permitido devido ao fato de que, nos casos mais correntes de pisos de edifícios, cujas cargas distribuídas são de valor moderado, as espessuras mínimas exigidas são suficientes para garantir à mesa uma rigidez capaz de assegurar o seu funcionamento conjunto com as nervuras. Isso se acentua se aplicarmos à mesa as exigências de espessura da norma de desempenho.

Para analisar a laje nervurada como uma laje maciça, algumas prescrições devem ser atendidas. A distância entre os eixos das nervuras (b_f) não deve exceder o limite de 110 cm. Se esse valor for superado, a mesa deverá ser dimensionada como laje maciça apoiada na grelha de vigas. Caso esse espaçamento esteja entre 65 e 110 cm, é necessário verificar a mesa à flexão e as nervuras ao cisalhamento como vigas (nesse caso, as nervuras deverão, obrigatoriamente, ter estribos). Esta última verificação, no entanto, pode ser feita de acordo com os critérios para

lajes maciças desde que b_f seja menor que 90 cm e a largura média das nervuras seja maior do que 12 cm, ou, simplesmente, se o espaçamento entre eixos for menor do que 65 cm. Nesse último caso, pode-se, ainda, desconsiderar a verificação da mesa à flexão, sendo adotado, apenas, a armadura mínima.

A NBR 6118/2014 impõe os seguintes limites para as dimensões das lajes nervuradas: a espessura da mesa (h_f) deve ser maior ou igual a 1/15 da distância entre as faces das nervuras (l_o) e do que 4 cm quando não houver tubulações horizontais embutidas; caso haja, esse limite sobe para 5 cm, se o diâmetro da tubulação for menor ou igual a 10 mm, ou 4 cm mais o diâmetro do tubo, se o diâmetro for maior do que 10 mm; a largura da nervura (b_w) não pode ser inferior a 5 cm, e para uma espessura menor do que 8 cm, a nervura não poderá conter armadura de compressão.

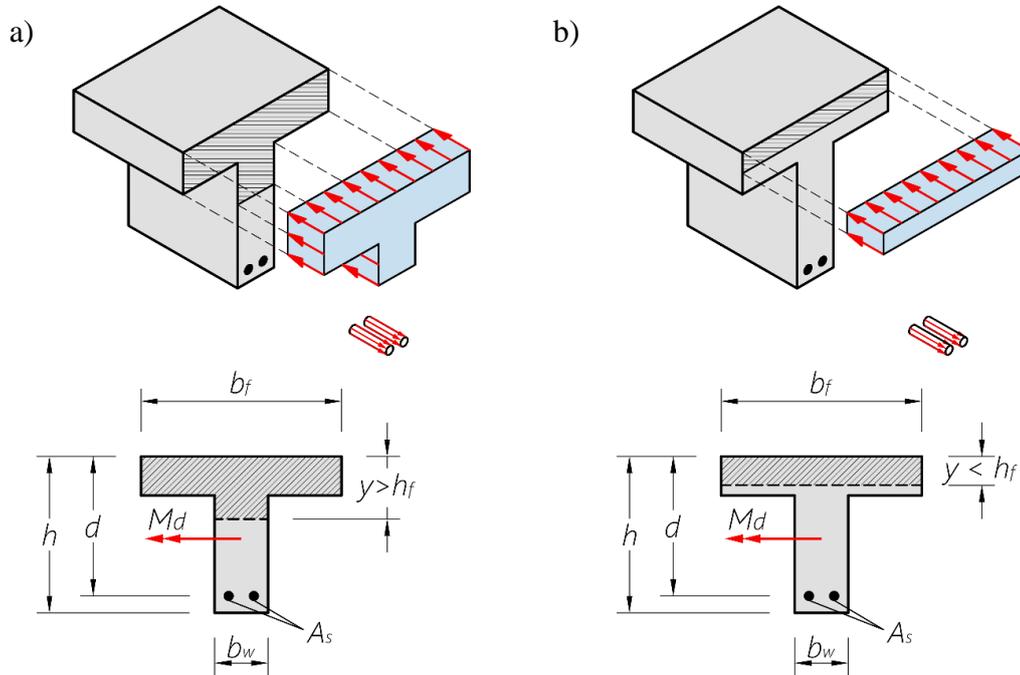
Nem toda a capa da laje contribui na resistência da nervura. Na consideração da ação conjunta de ambas, é necessário determinar a largura que colabora com a resistência da nervura (largura efetiva). A NBR 6118/2014 estabelece que a largura efetiva (b_l) pode ser dada, de forma simplificada, pela largura da nervura acrescida de no máximo 10% da distância a entre pontos de momento fletor nulo, para cada lado da nervura em que haja a capa para colaborar. Para lajes nervuradas simplesmente apoiadas, a distância a é igual ao comprimento do vão considerado (ℓ). Para viga com momento em uma extremidade, momento nas duas extremidades ou em balanço, os valores de a são, respectivamente, $0,75\ell$, $0,6\ell$ e $2,0\ell$. Araújo (2014) atesta que em praticamente todos os casos para os quais se emprega a solução em laje nervurada a largura efetiva será igual a b_f .

O cálculo da área de aço requerida para assegurar a segurança de uma laje nervurada no Estado Limite Último (ELU) é feito para cada nervura, a partir do equilíbrio das resultantes das tensões de tração e compressão de uma seção T sujeita à flexão simples. Por simplificação, a NBR 6118/2014 permite a substituição do diagrama de tensões no concreto com distribuição parabólica-retangular por um diagrama retangular simplificado. Neste, a tensão de compressão é considerada constante, com intensidade igual a 85% da resistência de cálculo do concreto à compressão (f_{cd}), e distribuída, para concretos com resistência inferior a 50 MPa, em 80% da posição da linha neutra (x). Normalmente o dimensionamento é feito para a nervura mais solicitada e a armadura é replicada nas demais.

Conforme pode ser visto na Figura 10, se a posição fictícia da linha neutra ($y= 0,8 x$) estiver dentro da mesa, o dimensionamento será feito como para uma seção retangular com

largura b_f e altura h_f (falso T). Caso contrário, o dimensionamento deverá ser feito considerando que a mesa de largura b_f e uma parte da alma está sendo comprimida (seção T).

Figura 10 – Caracterização da seção como a) T e como b) falso T



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Para identificar se o cálculo será feito como seção T ou falso T, a altura útil (d) será comparada com a altura útil de comparação (d_0), que é um valor teórico da altura útil que leva a posição fictícia da linha neutra à posição da interface entre a mesa e nervura. Para encontrar sua expressão, basta aplicar o equilíbrio da seção e fazer $y = h_f$ (CLÍMACO, 2016), resultando

$$d_0 = \frac{M_d}{0,85 f_{cd} b_f h_f} + \frac{h_f}{2} \quad (22)$$

sendo M_d o momento fletor máximo de cálculo na nervura.

Se $d > d_0$, significa que a linha neutra fictícia está dentro da mesa e o cálculo será feito como seção retangular. Nesse caso, o momento fletor adimensional (k_{Md}) é calculado por

$$k_{Md} = \frac{M_d}{d^2 f_{cd} b_f} \quad (23)$$

onde k_x é a posição relativa da linha neutra, expressa na forma

$$k_x = 1,25 - 1,9174 \sqrt{0,425 - k_{Md}} \quad (24)$$

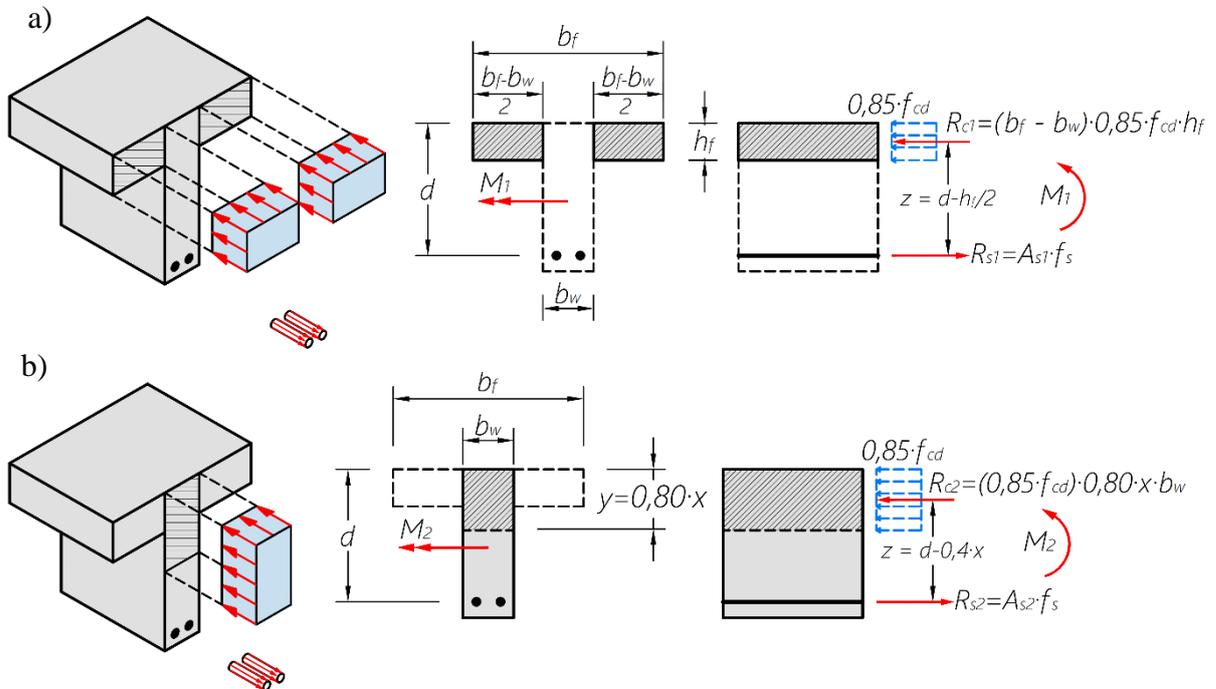
De acordo com a NBR 6118/2014, para que seja garantida a ductilidade, k_x deverá ser menor ou igual a 0,45, quando f_{ck} for menor ou igual a 50 MPa, e menor ou igual a 0,35,

quando o f_{ck} for maior do que 50 e menor ou igual a 90 MPa. Sendo assim, para uma peça com ruptura dúctil, a deformação na armadura será maior do que a deformação de escoamento de cálculo do aço (f_{yd}) e a área de aço requerida será

$$A_{s,req} = \frac{M_d}{(1 - 0,4 k_x) d f_{yd}} \quad (25)$$

Caso $d < d_0$, a linha neutra fictícia está dentro da nervura e o cálculo será feito como seção T. Na formulação, é conveniente separar o momento que será absorvido pelas abas da mesa (M_1) e o momento que será absorvido pela alma (M_2), conforme a Figura 11.

Figura 11 – a) Momento resistido pela alma e b) momento resistido pelas abas da mesa



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Fazendo o somatório dos momentos em torno do centro geométrico da armadura no esquema da Figura 8-b, obtém-se a parcela do momento fletor equilibrada pelo concreto comprimido nas abas (M_1) na forma

$$M_1 = 0,85 f_{cd} h_f (b_f - b_w) (d - 0,5 h_f) \quad (26)$$

Assim, com $M_2 = M_d - M_1$, o momento adimensional absorvido pela alma será

$$k_{Md} = \frac{M_2}{d^2 f_{cd} b_w} \quad (27)$$

Com esse valor de k_{Md} , calcula-se k_x pela Equação (24) e, assegurada a ductilidade, a área de aço requerida será obtida por

$$A_{s,req} = \frac{M_1}{(d - 0,5 h_f) f_{yd}} + \frac{M_2}{(1 - 0,4 k_x) d f_{yd}}. \quad (28)$$

Para assegurar condições de ductilidade, a seção deverá conter uma armadura suficiente para absorver um momento mínimo que causaria a ruptura da seção de concreto simples. Portanto, a área de aço deve atender a um valor mínimo igual a

$$A_{s,min} = \rho_{min} b_w (h + h_f) \quad (29)$$

sendo ρ_{min} a taxa de armadura mínima, dada por (ARAÚJO, 2014)

$$\rho_{min} = \frac{0,078 f_{ck}^{2/3}}{f_{yd}} \geq 0,15\%. \quad (30)$$

Além disso, a área de aço deve ser limitada a uma taxa máxima de 4%.

Sendo atendida as prescrições associadas à distância entre eixos das nervuras e a largura destas, a verificação quanto à força cortante pode ser feita como para uma laje maciça. Logo, para dispensar a armadura transversal, a força cortante de cálculo (V_d), a uma distância d da face do apoio, deverá ser menor ou igual à força cortante resistente de cálculo V_{Rd1} , isto é

$$V_d \leq V_{Rd1} = \tau_{Rd} k (1,2 + 40 \rho_1) b_w d \quad (31)$$

onde

$$\tau_{Rd} = 0,0375 f_{ck}^{2/3}, \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa}; \quad (32)$$

$$k = |1,6 - d| \geq 1, \text{ com } d \text{ em metros (para toda a armadura inferior prolongada até o apoio);} \quad (33)$$

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w d} \leq 0,02; \quad (34)$$

A_{s1} armadura efetiva de tração na nervura, já que esta se estende por toda a laje.

Além disso, é necessário verificar se não haverá esmagamento das bielas comprimidas. Para tanto, V_d deverá ser menor do que V_{Rd2} , expresso por

$$V_{Rd2} = 0,5 \alpha_{v1} f_{cd} b_w 0,9 d. \quad (35)$$

em que

$$\alpha_{v1} = (0,7 - f_{ck} / 200) \leq 0,5, \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa.} \quad (36)$$

A armadura de flexão da mesa funciona também como armadura de distribuição, que tem a função de distribuir melhor as cargas concentradas, além de controlar a fissuração e o efeito da retração. Seu valor mínimo será dado por

$$A_{smesa,min} = \rho_{min} h_f \quad (37)$$

A flecha total máxima (δ), necessária para a verificação do Estado Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF), é dada pela soma da flecha imediata (δ_i) com a flecha

diferida no tempo. Seu limite é dado com base no dano que se deseja evitar. Para as situações mais usuais, essa flecha não deverá ser maior do que $\ell_x/250$ (limite para a aceitabilidade sensorial visual), com δ_i obtida para uma combinação quase permanente das ações.

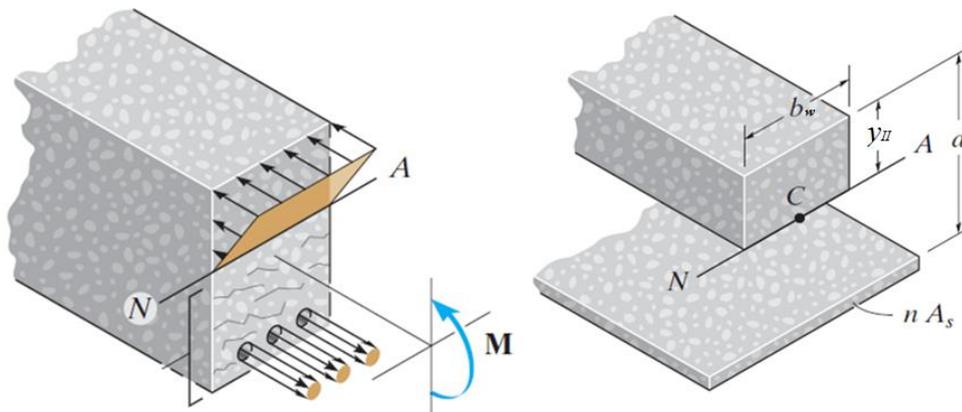
Quando o momento fletor solicitante da seção crítica (M) for maior que o momento de fissuração (M_r), haverá fissuração na peça, que deve ser considerada no cálculo de δ_i por contribuir no sentido desfavorável. Para uma verificação do ELS-DEF de uma peça com seção T, M_r pode ser dado por

$$M_r = \frac{1,2 f_{ctm} I}{y_{cg}} \quad (38)$$

sendo a resistência do concreto à tração média (f_{ctm}) igual a $0,3 f_{ck}^{2/3}$, com f_{ck} em MPa.

Identificada a fissuração da seção, o momento de inércia deve ser calculado desconsiderando a parcela do concreto tracionado (Estádio II puro), o que irá conferir ao elemento flechas mais acentuadas do que no cálculo elástico considerando a inércia da seção bruta (Estádio I). O momento de inércia no Estádio II puro (I_{II}) é obtido considerando a homogeneização da seção (FIGURA 12).

Figura 12 – Homogeneização da seção de uma viga no Estádio II



Fonte: Hibbeler (2011)

Assim como na análise do ELU no Estádio III, o momento de inércia no Estádio II de uma peça com seção T também irá depender se a posição da linha neutra nesse estágio (y_{II}) está contida na mesa ou na alma da seção. Tomando-se o momento estático da seção homogeneizada em torno da linha neutra igual a zero, tem-se

$$y_{II} = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4 a_1 a_3}}{2 a_1} \quad (39)$$

com

$$a_1 = \frac{b_w}{2} \quad (40)$$

$$a_2 = h_f (b_f - b_w) + \eta A_s \quad (41)$$

$$a_3 = -d \eta A_s - \frac{h_f^2}{2} (b_f - b_w) \quad (42)$$

n (coeficiente de homogeneização da seção) obtido pela razão do módulo de elasticidade do aço ($E_s = 210$ GPa) pelo módulo de elasticidade do concreto (E_c).

Se $y_{II} < h_f$, a linha neutra estará posicionada na mesa e

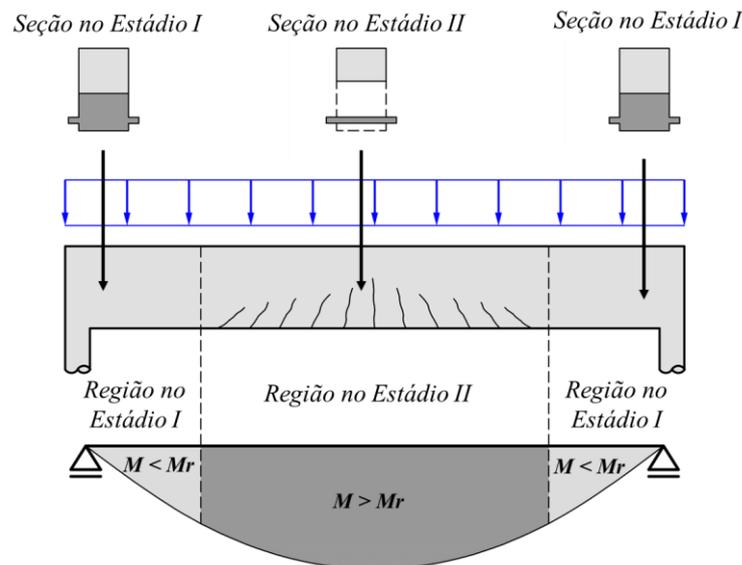
$$I_{II} = \frac{b_f y_{II}^3}{3} + \eta A_s (d - y_{II})^2. \quad (43)$$

Caso contrário, tem-se

$$I_{II} = \frac{(b_f - b_w) h_f^3}{12} + \frac{b_w y_{II}^3}{3} + (b_f - b_w) h_f \left(y_{II} - \frac{h_f}{2} \right)^2 + \eta A_s (d - y_{II})^2. \quad (44)$$

Essa verificação da fissuração é feita para a seção crítica do elemento. Sabe-se, no entanto, que o momento fletor varia ao longo do vão, de tal modo que seções adjacentes à crítica podem estar íntegras (FIGURA 13).

Figura 13 – Variação do momento de inércia ao longo da viga



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Dessa maneira, a peça, na verdade, terá alguns trechos no Estádio I e outros no Estádio II. Para considerar, de forma aproximada, essa variação do momento de inércia da seção decorrente da fissuração em uma análise linear elástica e, assim, estimar de forma mais realista

as flechas imediatas, pode-se utilizar a inércia média (I_m), proposta por Branson em 1968, definida por

$$I_m = I \left(\frac{M_r}{M} \right)^3 + I_H \left[1 - \left(\frac{M_r}{M} \right)^3 \right]. \quad (45)$$

Na primeira análise do modelo de grelha (análise elástica), os esforços e deslocamentos são obtidos para todas as cargas atuando integralmente (combinação rara). Para não refazer a análise com as outras combinações de ações, coeficientes podem ser aplicados para transformar a flecha obtida para combinação rara (δ_r) nas flechas para as outras combinações. Para a flecha para combinação quase permanente (δ_{qp}) tem-se

$$\delta_{qp} = \delta_r \left(\frac{g + \psi_2 q}{g + q} \right) \quad (46)$$

sendo ψ_2 , para as situações usuais, igual a 0,3.

A análise elástica é feita considerando o momento de inércia do estádio I. A partir desta, é possível obter o momento fletor para combinação quase permanente de forma análoga à feita para o deslocamento e compará-lo com o momento de fissuração. Por conseguinte, é possível calcular a área de aço para obter I_H , necessário nos casos em que $M > M_r$. Uma forma aproximada de considerar o efeito da fissuração no cálculo da flecha imediata para uma combinação quase permanente ($\delta_{i,qp}$) sem refazer a análise pelo modelo de grelha é considerar

$$\delta_{i,qp} = \delta_{qp} \left(\frac{I}{I_m} \right). \quad (47)$$

A flecha diferida pode ser estimada multiplicando δ_i pelo coeficiente de fluência (α_f). Este, de acordo com a NBR 6118/2014, poderá ser estimado pela expressão

$$\alpha_f = \frac{\xi(t) - \xi(t_0)}{1 + 50 \rho'} \quad (48)$$

sendo ρ' a taxa de armadura de compressão e ξ um coeficiente função do tempo, que recebe o valor 2 quando o tempo for superior a 70 meses ou o valor obtido pela Equação (47) quando for inferior a este tempo.

$$\xi(t) = 0,68 (0,996)^t t^{0,32} \text{ com } t \text{ em meses.} \quad (49)$$

t é o tempo em que se deseja o valor da flecha diferida e t_0 é a idade em que será feita a aplicação da carga de longa duração. Dessa maneira, a flecha total será

$$\delta = \delta_i (1 + \alpha_f) \quad (50)$$

2.3 Norma de Desempenho para Edificações Habitacionais (NBR 15.575)

As normas técnicas são idealizadas com a proposta de uniformizar os procedimentos para o projeto, controle dos materiais e execução, para assegurar padrões aceitáveis de segurança, funcionalidade e durabilidade para as edificações (CLÍMACO, 2016). Embora não seja lei, não é facultado ao projetista a consideração das prescrições das normas técnicas, haja vista que o cumprimento de suas disposições é respaldado pela legislação, conforme pode ser visto na lei 8.078/90 (código de proteção e defesa do consumidor), Art. 39, inciso VIII, que obriga o fornecedor a colocar no mercado apenas produtos ou serviços em conformidade com a ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) ou com normas específicas.

A norma de desempenho para edificações habitacionais (NBR 15575/2013) estabelece diretrizes básicas que permitem aferir a qualidade dos sistemas que compõem os edifícios residenciais, independentemente dos seus materiais constituintes e do sistema construtivo utilizado. A mesma é dividida em seis conjuntos normativos, considerados complementares às Normas prescritivas, sem substituí-las, que definem requisitos, critérios e métodos de avaliação específicos para os componentes da edificação para garantir um nível mínimo de desempenho satisfatório.

As partes da referida norma tratam, separadamente, as particularidades aplicadas: à inter-relação entre os sistemas (requisitos gerais), ao sistema estrutural, ao sistema de pisos, ao sistema de vedações, ao sistema de coberturas e ao sistema hidrossanitário. Todas as partes estabelecem exigências para assegurar a segurança, habitabilidade e sustentabilidade para o usuário. Os requisitos de segurança estão associados ao desempenho estrutural, segurança contra incêndio e segurança no uso e operação. Os requisitos de habitabilidade são relativos à estanqueidade, desempenho térmico, desempenho acústico, desempenho lumínico, saúde, higiene, qualidade do ar, funcionalidade, acessibilidade, conforto tátil e antropodinâmico. Já os fatores que expressam os requisitos de sustentabilidade são relacionados à durabilidade, à manutenibilidade e ao impacto ambiental.

A NBR 15575/2013 trouxe mudanças nas dimensões mínimas dos elementos estruturais, influenciando significativamente no projeto das estruturas. A alteração das dimensões mínimas da espessura da mesa e da largura da nervura, por exemplo, inviabilizaram a utilização de um extenso conjunto de fôrmas plásticas adotadas usualmente pela indústria da construção civil e trouxe alguns questionamentos sobre a até então comprovada eficiência econômica desse sistema em relação a outras concepções de lajes. Essas mudanças foram

decorrentes da consideração da segurança contra incêndio, cujos requisitos, segundo a NBR 15575-1/2013, objetivam: proteger a vida dos ocupantes das edificações, em caso de incêndio; dificultar a propagação do incêndio, de modo a reduzir danos ao meio ambiente e ao patrimônio; proporcionar meios de controle e extinção do incêndio; e dar condições de acesso para as operações do Corpo de Bombeiros.

A análise do comportamento das estruturas em situações de incêndio passou a ser exigida porque a exposição continuada das estruturas a altas temperaturas produz efeitos comprovadamente danosos às mesmas. O aço e o concreto sofrem alterações em suas propriedades físicas e mecânicas quando sujeitos a temperaturas elevadas, levando a uma perda de resistência e rigidez que podem acarretar em um colapso parcial ou pleno da estrutura (Figura 14). Segundo a NBR 15575-1/2013, os sistemas estruturais que integram as edificações devem atender aos requisitos estabelecidos na NBR 14432/2001, para, desse modo, controlar os riscos de propagação de incêndio e preservar a estabilidade estrutural da própria edificação e das outras adjacentes.

Figura 14 – Desabamento de um prédio em Teerã devido ao incêndio



Fonte: <https://g1.globo.com/mundo/noticia/edificio-de-15-andares-desaba-em-teera.ghtml> (2017).

A NBR 15200/2014 preconiza quatro métodos para o dimensionamento de estruturas em situações de incêndio: simplificado, geral, experimental e tabular. Neste último, a função de corta-fogo, que reflete a capacidade do corpo em impedir que as chamas ultrapassem ou que o calor seja suficiente para gerar combustão no lado oposto ao incêndio, é garantida quando são atendidas as dimensões mínimas dos elementos estruturais. Essa função deve ser assegurada por um tempo mínimo de exposição, denominado Tempo Requerido de Resistência ao Fogo (TRRF), para que ações de combate ao incêndio e de resgate das vítimas

possam ser executadas de forma adequada. Sendo assim, as dimensões mínimas estão condicionadas ao tipo de elemento estrutural e ao TRRF que, por sua vez, depende da altura e do uso da edificação, conforme pode ser visto na Tabela 1. A NBR 14432/2001 ressalta que o TRRF das lajes das edificações não necessita ser maior que 90 minutos, exceto para edificações com altura superior a 45 m.

Tabela 1 – TRRF em minuto de acordo com a altura e o uso da edificação

Ocupação / uso	Altura h da edificação (m)				
	Classe P ₁ $h \leq 6$	Classe P ₂ $6 < h \leq 12$	Classe P ₃ $12 < h \leq 23$	Classe P ₄ $23 < h \leq 30$	Classe P ₅ $h > 30$
Residencial	30	30	60	90	120
Serviços de hospedagem	30	60	60	90	120
Comercial varejista	60	60	60	90	120
Serviços profissionais, pessoais e técnicos	30	60	60	90	120
Educacional e cultura física	30	30	60	90	120
Locais de reunião de público	60	60	60	90	120
Serviços de saúde e institucionais	30	60	60	90	120
Industrial	60	60	90	120	120
Depósitos	60	60	90	120	120

Fonte: Adaptado de NBR 14432 (2001)

Normalmente, os valores mínimos especificados estão associados à espessura das lajes, à largura das vigas, às dimensões das seções transversais de pilares e tirantes e, principalmente, à distância entre o eixo da armadura longitudinal e a face do concreto exposta ao fogo (c_1). Nesse critério, as armaduras transversais não são consideradas, porque, segundo a NBR 15200/2014, as peças de concreto em situações de incêndio rompem usualmente por flexão ou flexocompressão.

As dimensões mínimas para c_1 das armaduras inferiores, para largura da nervura (b_{min}) e para altura da laje (h) para conferir a função de corta fogo a lajes nervuradas simplesmente apoiadas armadas em duas direções, lajes nervuradas contínuas em pelo menos uma das bordas e lajes nervuradas armadas em uma direção são apresentadas, respectivamente, nas Tabelas 2, 3 e 4. Os valores indicados nas mesmas, que consideram o aquecimento

ocorrendo na face inferior, são prescritos pela NBR 15200/2014 e são válidos apenas para armaduras passivas. No caso de elementos protendidos, os valores de c_1 para as armaduras ativas são determinados acrescentando-se 10 mm para barras e 15 mm para fios e cordoalhas.

Tabela 2 – Dimensões mínimas para lajes nervuradas simplesmente apoiadas

TRRF min	Nervuras			Capa ^{b)} h/c_1 mm/mm
	Combinações de b_{min}/c_1 ^{a)}			
	mm/mm			
	1	2	3	
30	80/15	-	-	60/10
60	100/35	120/25	190/15	80/10
90	120/45	160/40	250/30	100/15
120	160/60	190/55	300/40	120/20
180	220/75	260/70	410/60	150/30

^{a)} b_{min} corresponde à largura mínima da nervura ao nível do centro geométrico das armaduras.

^{b)} h é a altura mínima da laje para garantir a função de corta-fogo.

Fonte: Adaptado de NBR 15200 (2014)

Tabela 3 – Dimensões mínimas para lajes nervuradas com continuidade em pelo menos uma das bordas

TRRF min	Nervuras			Capa ^{b)} h/c_1 mm/mm
	Combinações de b_{min}/c_1 ^{a)}			
	mm/mm			
	1	2	3	
30	80/10	-	-	60/10
60	100/25	120/15	190/10	80/10
90	120/35	160/25	250/15	100/15
120	160/45	190/40	300/30	120/20
180	220/60	260/50	-	150/30

^{a)} b_{min} corresponde à largura mínima da nervura ao nível do centro geométrico das armaduras.

^{b)} h é a altura mínima da laje para garantir a função de corta-fogo.

Fonte: Adaptado de NBR 15200 (2014)

Tabela 4 – Dimensões mínimas para lajes nervuradas armadas em uma só direção

TRRF min	Nervuras		Capa h/c_1 mm/mm
	Combinações de b_{min}/c_1 mm/mm		
	1	2	
30	80/25	100/20	60/10
60	100/45	120/40	80/20
90	130/60	150/50	100/30
120	160/65	220/50	120/40
180	220/80	-	150/55

Fonte: Adaptado de NBR 15200 (2014)

De acordo com a NBR 15200/2014, o revestimento pode ser considerado no cálculo de c_1 , exceto para os pilares e lajes lisas e cogumelos. Ressalta-se, no entanto, que se for utilizado revestimento aderente de argamassa de cal e areia, apenas 67% de eficiência relativa ao concreto será considerada. Se for um revestimento de argamassa de cimento e areia aderentes, será considerada 100% de eficiência relativa ao concreto.

3 OTIMIZAÇÃO

Em geral, os problemas estruturais envolvem um número elevado de variáveis. Em função disso, na prática tradicional de projeto, é necessário arbitrar valores para algumas delas e, usando relações entre elas, obtém-se as demais, de tal modo que, no fim, suas combinações conduzam a uma configuração que atenda às exigências de projeto. Existem, no entanto, várias combinações das variáveis que levam a configurações admissíveis, o que torna a escolha do projeto condicionada à experiência e sensibilidade do projetista. Por exemplo, para se determinar a área de aço de uma viga de concreto armado, é necessário, antes, arbitrar valores para as propriedades geométricas, propriedades dos materiais constituintes, e, só após isso, é possível, por meio das condições de equilíbrio na seção, determinar a área de aço necessária para absorver os esforços desenvolvidos. Sendo assim, para que ocorra a determinação dos valores de algumas variáveis a partir das equações governantes do problema, é necessário estimar valores de outras variáveis que atendam às suas limitações e levem a uma solução viável para o problema.

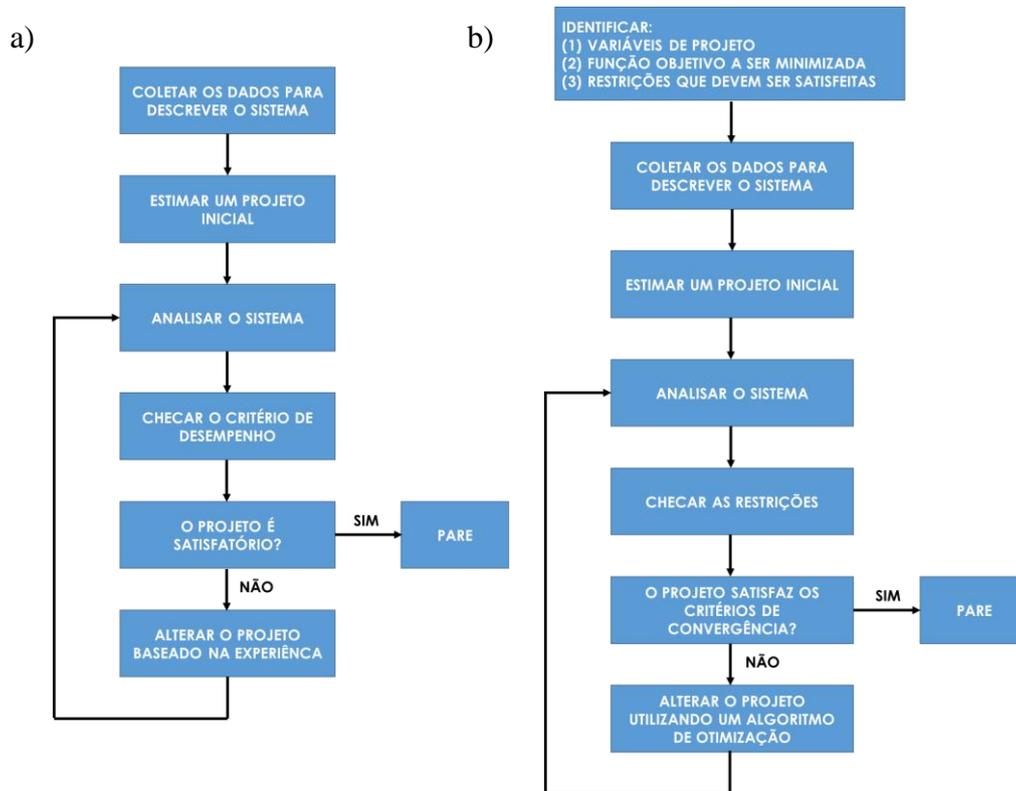
Em um cenário onde há uma extrema necessidade em se conceber soluções de projeto que façam o melhor uso dos materiais disponíveis, fomentado não só pelo desenvolvimento sustentável, mas também pela competitividade das empresas que buscam redução de custos, a otimização, concatenada à disponibilidade de computadores com alta capacidade de processamento e à evolução de métodos numéricos computacionais, tem se tornado uma ferramenta substancial nos projetos de engenharia. Devido à evolução computacional, agora, sistemas melhores podem ser projetados a partir da análise e otimização de várias opções em curto espaço de tempo (ARORA, 2012). Essa evolução mudou a forma como as estruturas são pensadas e tem mudado a abordagem tradicional de projetos.

A otimização, como o próprio nome sugere, consiste em um processo de determinação da solução ótima de um problema. Permite obter, através de uma busca racional conduzida por algoritmos numéricos, as condições que extraem o melhor rendimento possível de uma determinada medida de desempenho satisfazendo suas restrições. Suas estratégias podem ser aplicadas, por exemplo, na minimização do custo, maximização da eficiência, maximização da produção, entre outras aplicações. Nas aplicações em estruturas, a maioria dos problemas trata da determinação das dimensões, forma e topologia dos elementos estruturais que levem ao menor custo da estrutura.

Em um processo de concepção tradicional de projeto, a melhoria do sistema é feita de maneira intuitiva e iterativa (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). O processo consiste

em, com bases predominantemente intuitivas, sugerir um sistema e, em seguida, verificar se os requisitos que os define são satisfeitos. Caso o sistema inicialmente proposto não atenda às prescrições, sugere-se, com base na experiência do projetista, um novo sistema e repete-se o procedimento até que um projeto aceitável seja encontrado. Com essa abordagem, é inviável testar, em tempo hábil, um número significativo de soluções para inferir qual é a melhor possível. Já na otimização, o problema é formulado matematicamente e, mediante uma vasta exploração dirigida do espaço de soluções, a melhor solução possível de um projeto complexo pode ser obtida de forma aproximada em um processo automatizado. A Figura 15 evidencia a diferença entre um processo de concepção tradicional de projeto e um processo de projeto ótimo.

Figura 15 – Comparação entre o processo de projeto a) tradicional e b) ótimo.



Fonte: Adaptado de Arora (2012)

Segundo Luenberger e Ye (2008), a otimização deve ser considerada como uma ferramenta de conceituação e análise e não como um princípio que fornece a solução filosófica correta, tendo em vista que são esporádicas as situações onde é possível representar completamente todas as complexidades inerentes a um problema de decisões difíceis. Dessa maneira, são necessárias habilidades para formular o problema por meio da captura dos seus

elementos essenciais e bom senso para realizar um adequado julgamento na interpretação dos resultados, obtendo, por conseguinte, conclusões relevantes.

O problema de otimização pode ser formulado como um modelo matemático no qual se buscam sistematicamente, dentro de um conjunto admissível, valores para parâmetros que definem o sistema estrutural e que minimizam ou maximizam uma função objetivo $f(\mathbf{x})$ que quantifica o desempenho do sistema, satisfazendo, simultaneamente, exigências ou funções de restrições de projeto. A maximização de uma função pode ser vista como a minimização do oposto dessa função ($-f(\mathbf{x})$). Assim, em geral, o problema de otimização pode ser modelado matematicamente na forma (HAFTKA; GURDAL, 1991; VANDERPLAATS, 1999):

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && f(\mathbf{x}) \\
 & \text{Sujeito a} && h_i(\mathbf{x}) = 0, && i = 1, \dots, l; \\
 & && g_j(\mathbf{x}) \leq 0, && j = 1, \dots, m; \\
 & && x_{k,inf} \leq x_k \leq x_{k,sup}, && k = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{51}$$

sendo \mathbf{x} o vetor de variáveis de projeto que se quer determinar, $f(\mathbf{x})$ a função objetivo, $h(\mathbf{x})$ restrições de igualdade, $g(\mathbf{x})$ restrições de desigualdade e $x_{k,inf}$ e $x_{k,sup}$, respectivamente, os limites inferiores e superiores impostos às variáveis de projeto. Havendo variáveis discretas, as restrições laterais destas variáveis (limites inferior e superior) são substituídas por relações na forma

$$x_k \in [x_{k1} \quad x_{k2} \quad x_{k3} \quad \dots \quad x_{ks}] \tag{52}$$

em que x_k é uma variável discreta que só pode assumir os valores x_{kj} . Um modelo pode conter tanto variáveis contínuas como discretas (misto).

As variáveis de decisão (ou de projeto) são as variáveis que descrevem o projeto e cujas alterações influenciam no comportamento do sistema. Dessa forma, nem todas as variáveis de um sistema exercem uma influência significativa na função objetivo, sendo, portanto, pertinente a realização da simplificação do problema através de sua remoção do modelo. Para tanto, antes, é necessário identificar a quais variáveis o modelo é sensível. Existem, ainda, variáveis que representam a resposta do sistema, denominadas variáveis de estado, tais como os deslocamentos, tensões, deformações ou forças (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

As variáveis nem sempre são de natureza contínua. Em uma grande parte dos problemas de estruturas, as variáveis de projeto só podem assumir valores pertencentes a um conjunto discreto de valores, como ocorre na determinação da bitola das armaduras de uma peça em concreto armado ou na escolha do perfil de uma estrutura metálica. Além de limitações

geométricas, existem limitações associadas ao comportamento da estrutura, ou seja, associadas às variáveis de estado, tais como a limitação dos deslocamentos, das tensões, da carga crítica, das vibrações, entre outras. Há, ainda, exigências de igualdade que devem ser garantidas, tais como as condições de equilíbrio, as condições de compatibilidade de deslocamentos etc. Todas essas imposições limitantes do escopo do modelo, que podem ser valores ou funções, são tratadas como restrições.

Embora, na maioria dos problemas reais, o desejo seja a melhoria de mais de uma medida de desempenho, é comum assumir uma como mais importante que as demais e buscar sua otimização, sem levar em consideração as possíveis perdas em outras medidas. Entretanto, a formulação de um problema de otimização pode ser feita com mais de um objetivo relevante, na maioria das vezes de naturezas conflitantes, a serem otimizados simultaneamente (otimização multiobjetivo).

O problema de otimização multiobjetivo pode ser posto na forma (MARLER; ARORA, 2004):

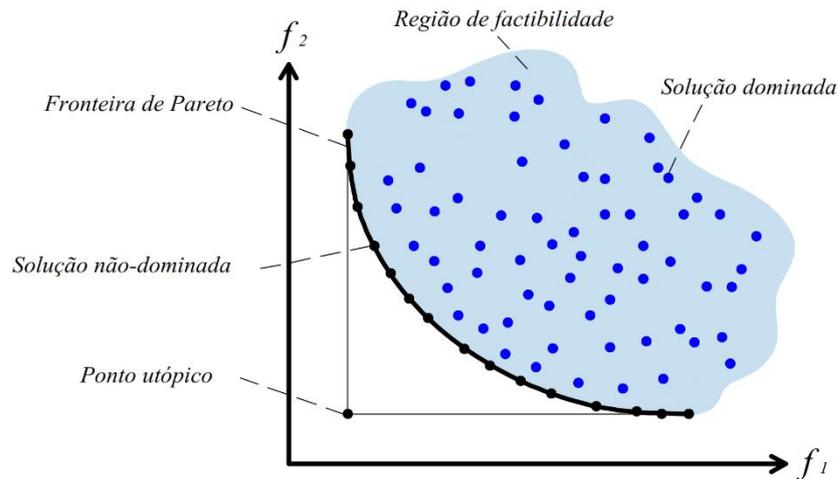
$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]^T \\
 \text{Sujeito a} & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, l; \\
 & g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m;
 \end{array} \quad (53)$$

onde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é um vetor de funções objetivas, k é o número de funções objetivas, l é o número de restrições de desigualdade, m é o número de restrições de igualdade e \mathbf{x} é um vetor de variáveis de projeto, em que n é o número de variáveis independentes x_i .

Quando os objetivos são concorrentes, não há como obter o extremo de um destes sem prejudicar os outros. Dessa forma, a busca se torna por um conjunto de soluções que fornecem relações distintas de compromissos entre os objetivos almejados. Obtém-se, assim, um conjunto de soluções que fornecem situações em que não seja possível melhorar um objetivo sem piorar pelo menos um dos demais (conjunto de Pareto). A otimização multiobjetivo fornece uma série de possibilidades para o projeto, fato que confere uma maior liberdade ao projetista, que pode impor suas preferências na escolha da combinação que melhor se adequa às suas necessidades.

A curva que contém as distintas relações ótimas do espaço de objetivos é denominada Fronteira de Pareto (Figura 16). Um ponto \mathbf{x}^* pertencente ao espaço de projeto viável S é um ótimo de Pareto se e somente se não existir outro ponto \mathbf{x} no conjunto S tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ com pelo menos um $f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{x}^*)$ (ARORA, 2012).

Figura 16 – Fronteira de Pareto.



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Em problemas com objetivos de naturezas conflitantes, a determinação de uma solução que relaciona o mínimo das funções objetivos simultaneamente é impossível. Essa solução, denominada ponto utópico, só pode ser obtida minimizando cada função objetivo isoladamente. Caso seja possível encontrar uma solução que otimize as funções simultaneamente, uma abordagem multiobjetivo para esse problema seria desnecessária, tendo em vista que a otimização de um dos objetivos isoladamente já implicaria na otimização dos demais.

3.1 Algoritmos de otimização

Uma forma intuitiva de se encontrar o ótimo de um problema seria gerar todas as soluções possíveis para o mesmo e, depois de avaliar as respectivas funções objetivo, determinar qual produz o melhor resultado. Essa busca exaustiva seria viável se o problema tivesse um número exíguo de soluções possíveis. Entretanto, se o espaço de busca for muito grande, esse processo seria demasiadamente oneroso e, portanto, impraticável. Sendo assim, se não for possível avaliar, em tempo hábil, todas as soluções possíveis, não há como garantir a obtenção do ótimo.

É comum haver uma confusão na utilização do termo “otimização”. Melhorar a resposta de um sistema não significa necessariamente que foi realizada a otimização do mesmo. A busca do ótimo deve ser guiada por um algoritmo que permita definir, dentro de uma série de soluções viáveis, qual a que extrai o melhor rendimento da função objetivo.

Não existe um algoritmo de otimização universal, mas sim um conjunto de algoritmos, estando cada um mais adaptado para um caso particular de problema de otimização (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). Dessa maneira, é necessário conhecer esses algoritmos para identificar qual tem o desempenho mais eficiente para um determinado caso.

Segundo Olivieri (2004), os métodos de otimização podem ser classificados de acordo com a natureza e/ou as restrições do problema em: métodos de programação linear (PL), aplicados quando a função objetivo e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto; e métodos de programação não-linear (PNL), aplicados quando a função objetivo, ou pelo menos uma das restrições, são funções não-lineares das variáveis de projeto. A PNL pode, ainda, ser dividida em duas outras classes: os métodos determinísticos, que são baseados, em sua maioria, em informações do gradiente da função objetivo, e os métodos estocásticos, que são métodos probabilísticos inspirados em fenômenos da natureza e usam somente a avaliação da função objetivo.

Os métodos determinísticos, comumente denominados de métodos clássicos de otimização, seguem uma forma padrão, que consiste em arbitrar um conjunto com valores iniciais para as variáveis de projeto, ou seja, inicia-se com uma solução candidata a ótima, e, a partir dela, atualiza-se o projeto iterativamente. Para atualizar o projeto, representado por um ponto no espaço de projeto definido pelas variáveis x_i , é necessário encontrar uma direção de busca (\mathbf{s}) que reduza a função objetivo e determinar o comprimento do passo (α) a ser dado para atingir o mínimo nessa direção sem violar as restrições, na forma

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{s}_k . \quad (54)$$

Seguindo essa estrutura, a cada iteração, um problema de encontrar várias variáveis que minimizam a função se reduz a um problema de encontrar uma variável α que minimiza a função na direção de busca \mathbf{s} , fato que viabiliza o emprego de métodos de buscas unidirecionais, tais como o método da Seção Áurea, Bisseção, interpolação, etc., que são naturalmente mais simples. Isso é possível porque a função objetivo pode ser escrita como uma função do passo

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{s}_k) = f(\alpha_k) . \quad (55)$$

Em suma, o algoritmo de otimização não-linear pode ser dividido em duas etapas: determinação da direção de busca que melhora a função e a determinação do passo a ser dado nessa direção. Feitas as etapas, o ponto pode ser atualizado, repetindo o processo até que a convergência da solução seja verificada. Basicamente, a estratégia para definir a direção de busca é o que distingue os vários algoritmos de programação matemática não-linear. O sucesso

desses métodos depende das escolhas efetivas da direção s e do comprimento do passo α (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

Dependendo do ponto de partida, os métodos clássicos podem convergir para um mínimo que não necessariamente é o ótimo global. Sendo assim, a qualidade da resposta é extremamente sensível à definição da primeira iteração. Por poder convergir para um mínimo local, o desempenho dessa classe de algoritmos fica comprometido quando são aplicados a funções multimodais.

Normalmente, os métodos determinísticos usam informações do gradiente da função objetivo. Nesse caso, se a função objetivo não for contínua ou diferenciável, esses métodos não podem ser aplicados. Além disso, para a utilização desses métodos, as variáveis deverão assumir valores contínuos, sendo necessário artifícios para torna-las quando não forem. Ao retornar para o espaço discreto, entretanto, eles não garantem a obtenção da solução ótima global do problema.

As técnicas de computação evolucionária (CE) são baseadas nos mecanismos da seleção natural de Charles Darwin, segundo a qual a sobrevivência de um indivíduo está condicionada à sua capacidade de se adaptar. Os indivíduos passam por um processo de seleção natural e aqueles que melhor se adaptarem ao meio terão maior probabilidade de sobreviver e gerar descendentes. De acordo com Sivanandam e Deepa (2008), por meio da adaptação de gerações sucessivas de um grande número de indivíduos, um algoritmo evolutivo realiza uma busca dirigida eficiente.

Os algoritmos evolucionários exploram todo o espaço de busca por meio de regras semi-probabilísticas, sem fazer uso de informações das derivadas da função objetivo (VELEZ, 2015). Em função disso, os mesmos podem, diferentemente dos métodos determinísticos, ser aplicados em funções objetivos não-convexas e não-diferenciáveis, com variáveis contínuas ou discretas. Por trabalharem com probabilidade, não garantem em uma única aplicação a obtenção da melhor solução possível. Além disso, devido a sua robustez, requerem maior tempo de processamento.

Os métodos de otimização multiobjetivo são tradicionalmente classificados em Métodos de Escalarização e Métodos Vetoriais. Nos métodos de escalarização, os componentes do vetor da função objetivo são combinados para formar uma função objetivo escalar (ARORA, 2012). A partir da redução de um problema de otimização vetorial a um problema de otimização escalar, é possível aplicar os algoritmos clássicos da otimização mono-objetivo. Dentre os métodos de escalarização, o Método da Soma Ponderada é considerado o mais famoso. Esse método transforma o problema vetorial em uma função por meio da combinação linear entre os

objetivos e atribui pesos a eles de acordo com a preferência do decisor. Nos Métodos Vetoriais, por sua vez, cada função objetivo é tratada de forma independente. São, portanto, estratégias para determinar um vetor de variáveis de projeto que otimizam um vetor de funções objetivos.

3.2 Algoritmo NSGA-II

Os algoritmos genéticos (AG's) são algoritmos de otimização estocásticos abstraídos a partir do processo de seleção natural e da evolução das espécies, sendo o mais popular na pesquisa computacional evolucionária. São algoritmos que manipulam números como populações de indivíduos formados por cromossomos e genes, os quais são submetidos, durante o processo de evolução, à seleção e à reprodução com operadores de cruzamento e mutação. Nos AG's, um cromossomo é a representação de uma potencial solução para o problema e é formado por um conjunto de genes que representam as variáveis de projeto. Seguindo a inspiração na biologia, os alelos são os valores que o gene pode assumir.

A ideia básica dos AG's, segundo Arora (2012), consiste em iniciar uma população composta por um conjunto de soluções (indivíduos) geradas aleatoriamente dentro do conjunto admissível para cada uma das variáveis de projeto. Para cada indivíduo é calculado um valor de aptidão, geralmente utilizando a função objetivo para problemas sem restrições ou a função objetivo penalizada para problemas restritos. A partir do conjunto atual de soluções, um subconjunto é selecionado a partir dos indivíduos dominantes (mais aptos). Em seguida, são utilizados operadores de cruzamento (*crossover*) e mutação para gerar novas soluções que herdam as características dos melhores indivíduos da geração anterior. Como os membros mais aptos do conjunto são usados para criar novos indivíduos, os conjuntos sucessivos de soluções têm uma maior probabilidade de conter melhores valores de aptidão. O processo continua até que um critério de parada seja cumprido. Normalmente, esse critério é definido por um número máximo de gerações (n_g). Pode-se, no entanto, adotar outros critérios, como uma estimativa da convergência baseada na não variação significativa da função objetivo em certo número de iterações.

Os AG's são probabilísticos na seleção dos pontos do espaço de busca ou indivíduos a serem analisados. Sendo assim, garantem a busca pelo ponto ótimo global, já que partem de uma população de indivíduos que representam pontos da região de todo o domínio viável disponível, tendo, segundo Silva (2001), uma boa aplicação em funções com superfícies complexas, reduzindo a convergência para mínimos locais. Entretanto, por ser aleatório, não garante que a solução encontrada seja o ótimo global exato. A informação básica para a busca

da solução ótima é o valor funcional de cada projeto ou indivíduo. Portanto, trabalham facilmente com qualquer tipo de função e variáveis, daí sua robustez. Por ser um algoritmo de ordem zero, apresenta um elevado custo computacional, dependente da complexidade do problema e de sua formulação. De forma genérica, os AG's seguem a estrutura mostrada na Figura 17.

Figura 17 – Estrutura genérica de um AG

Pseudocódigo dos AGs
<p>Início</p> <p>Gerar uma população aleatória inicial \mathbb{P}_k</p> <p>$k \leftarrow 0$</p> <p>Avaliar a aptidão dos indivíduos da população \mathbb{P}_k</p> <p style="padding-left: 40px;">Enquanto o critério de parada não for satisfeito:</p> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 20px;"> <p>$k \leftarrow k + 1$</p> <p>Selecionar \mathbb{P}_k a partir de \mathbb{P}_{k-1}</p> <p>Aplicar cruzamento sobre \mathbb{P}_k</p> <p>Aplicar mutação sobre \mathbb{P}_k</p> <p>Avaliar \mathbb{P}_k</p> </div> <p>Fim</p> <p>Resultado: solução ótima</p> <p>Fim</p>

Fonte: Adaptado de Silva (2001)

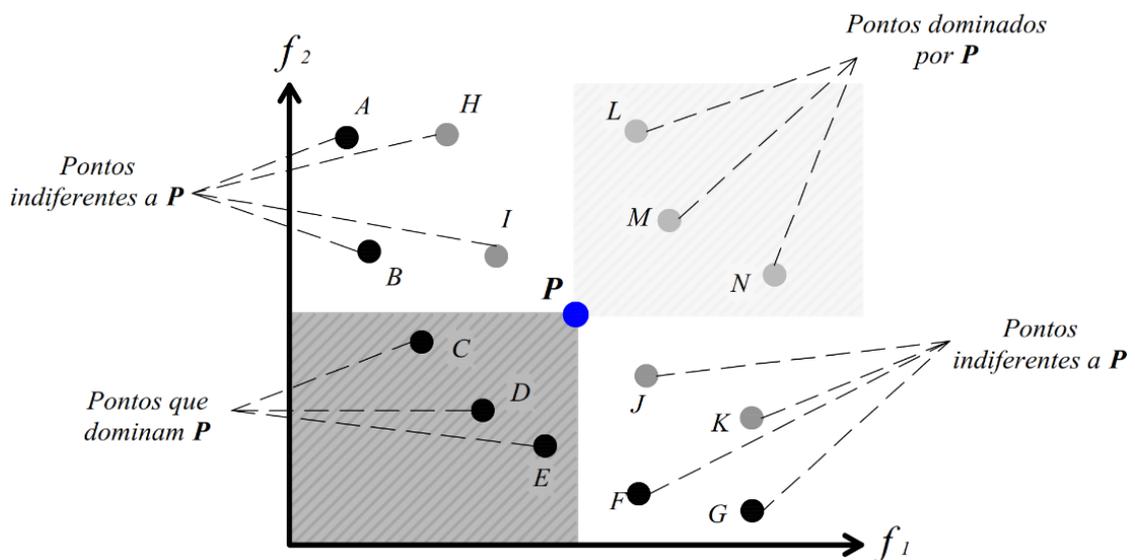
As técnicas de programação matemática possuem certas limitações para tratar problemas de otimização multiobjetivo, como, por exemplo, serem suscetíveis à forma da fronteira de Pareto e podem não funcionar quando esta é côncava ou desconexa, além das limitações já mencionadas para o tratamento da otimização mono-objetivo. Em contrapartida, os algoritmos evolutivos tratam simultaneamente um conjunto de soluções possíveis que permite encontrar vários elementos do conjunto ótimo de Pareto em uma única execução do algoritmo, além de serem menos suscetíveis à forma ou continuidade da fronteira de Pareto (COELLO, 2006).

Os AGs usados na otimização mono-objetivo também podem ser estendidos para fornecer uma abordagem eficaz para problemas de otimização multiobjetivo (ARORA, 2012). Para tanto, Goldberg (1989) sugeriu a utilização do conceito de dominância como um parâmetro para determinar a qualidade da resposta de um problema de otimização multiobjetivo. Considerando duas soluções P e Q , a solução P dominará a solução Q se P não possuir nenhum

objetivo com qualidade inferior ao da solução Q e se a solução P for melhor do que Q em pelo menos um dos objetivos (DEB *et al.*, 2002).

A Figura 18 apresenta as regiões de dominância de um ponto P na minimização de duas funções objetivos, f_1 e f_2 . Nesta, é possível notar que os pontos L , M e N possuem valores para as funções objetivos f_1 e f_2 piores do que o ponto P , resultando em uma dominância deste em relação àqueles. Já os pontos C , D e E possuem valores melhores do que P nos dois objetivos. Dessa forma, C , D e E dominam o ponto P . Os pontos A , B , H e I são melhores do que P em f_1 , mas são piores em f_2 . Nesse caso, P nem domina e nem é dominado, o que torna A , B , H e I indiferentes a P . Analogamente, F , G , J e K são indiferentes a P por serem melhores em f_2 mas piores em f_1 .

Figura 18 – Regiões de dominância e não-dominância de um ponto

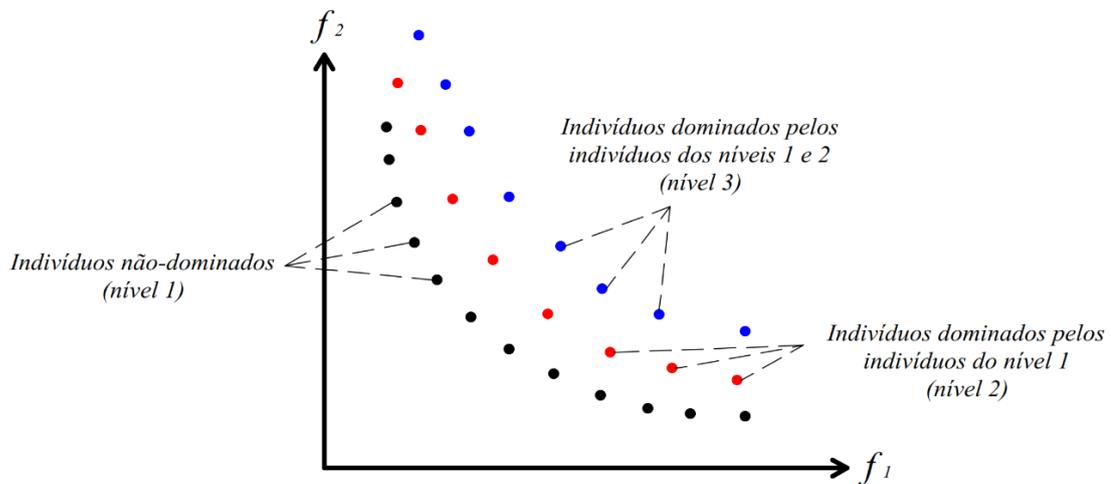


Fonte: Elaborada pelo autor (2017).

Existem vários algoritmos baseados nos AGs para o tratamento de problemas de otimização multiobjetivo, dentre os quais pode-se destacar o *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II), ou Algoritmo Genético de Classificação Não-Dominante II, como sendo um dos mais populares (BABAEI; MOLLAYI, 2016). O mesmo foi desenvolvido por Deb *et al.* (2002) e se trata de uma evolução do algoritmo NSGA proposto por Srinivas e Deb (1995). Este último é eficaz no tratamento da otimização multiobjetivo ao ordenar as soluções com classificação não-dominada e atribuir a aptidão ao *ranking*. O NSGA-II, entretanto, é mais rápido na classificação da solução do que seu antecessor (COELLO, 2006; BABAEI; MOLLAYI, 2016).

O NSGA-II é baseado em uma classificação elitista por dominância (FIGURA 19). A princípio, estima-se uma população inicial aleatória e avalia-se as funções objetivo em cada ponto. Comparando o vetor dos valores das funções objetivo no ponto com o vetor em todos os outros pontos, é possível identificar se a solução é dominada e aplicar o *ranking* por não-dominância. Os pontos não-dominados são inseridos no nível 1 (*rank* 1) e são temporariamente removidos da população. Feita a remoção destas, é determinado um novo nível que domina as soluções remanescentes e esse processo é repetido até que todos os pontos da população sejam classificados. Sendo assim, o nível 1 contém os indivíduos não-dominados da população, o nível 2 contém os indivíduos dominados apenas pelos do nível 1, o nível 3 contém os indivíduos dominados apenas pelos dos níveis 1 e 2 e assim sucessivamente. Os indivíduos com a classificação mais baixa possuem o maior valor de aptidão. Esse procedimento de ordenação de acordo com a dominância dos indivíduos é conhecido como *Fast Non Dominated Sorting* (classificação rápida não-dominante).

Figura 19 – Indivíduos separados em níveis de acordo com a dominância



Fonte: Elaborada pelo autor (2017).

De acordo com Dias (2016), para um problema com uma população de tamanho n_{pop} , a classificação dos indivíduos nos níveis pode ser feita a partir da análise de uma matriz com tamanho $n_{pop} \times n_{pop}$, denominada matriz de dominância. Nesta, se o indivíduo da linha i domina a solução da coluna j , o termo ij da matriz assume valor unitário. Caso contrário, assume valor nulo. O somatório da coluna indica quantos indivíduos dominam o indivíduo representado por essa coluna. Sendo assim, as colunas cujo somatório for nulo indicam os indivíduos não dominados. Os demais indivíduos são classificados pelo mesmo processo após a remoção das linhas e colunas correspondentes aos indivíduos do nível 1. Para ilustrar a ideia, a Tabela 5

mostra os valores das funções objetivos de um exemplo de maximização de duas funções, enquanto a Tabela 6 mostra sua matriz de dominância. Nesta, verifica-se que os indivíduos 1, 4, 7 e 11 não são dominados por nenhuma outra solução e, assim, irão compor o nível 1.

Tabela 5 – Exemplo para classificação dos indivíduos

Indivíduo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_1	10	10	6	7	3	2	4	1	2	2	1	1
f_2	2	1	3	4	7	2	8	2	4	3	10	9

Fonte: Adaptado de Dias (2016)

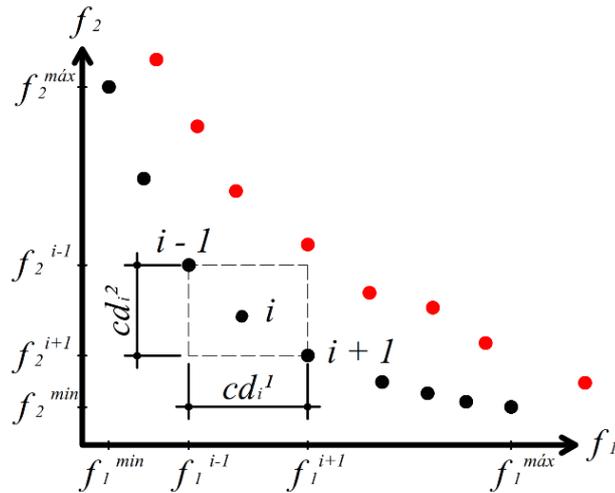
Tabela 6 – Matriz de dominância

		Solução dominada											Σ	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		12
Solução não dominada	1		1				1		1					3
	2								1					1
	3						1		1		1			3
	4			1			1		1	1	1			5
	5						1		1	1	1			4
	6								1		1			2
	7					1	1		1	1				4
	8													0
	9						1		1		1			3
	10						1		1					2
	11								1				1	2
	12								1					1
Σ		0	1	1	0	1	7	0	11	3	5	0	1	

Fonte: Adaptado de Dias (2016)

Após a classificação dos níveis, é necessário classificar os indivíduos de um mesmo nível para determinar quais são as soluções mais aptas e que, assim, farão parte da geração seguinte. O NSGA-II estima a densidade de soluções em torno de uma solução particular na população calculando a distância média de dois pontos em ambos os lados deste ponto ao longo de cada um dos objetivos do problema (DEB *et al.*, 2002). Esta distância, que serve como uma estimativa do perímetro do cuboide formado usando os pontos vizinhos como os vértices, é chamada de *crowding distance* (ou distância de aglomeração, em tradução livre) e pode ser utilizada para ordenar as soluções de um mesmo nível. A Figura 20 mostra a delimitação para o cálculo da distância de aglomeração de um ponto i de um problema com duas funções.

Figura 20 – Cálculo da distância de aglomeração



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Os extremos de cada nível, que representam a melhor solução de cada objetivo individualmente, devem ser preservados para a próxima geração para permitir uma boa representação da respectiva fronteira (DIAS, 2016). Os mesmos, no entanto, não podem ter o seu indicador de adensamento calculado, já que estes não possuem um dos vizinhos imediatos. Sendo assim, as distâncias de aglomerações dos mesmos devem receber um valor elevado, enquanto as soluções intermediárias recebem um valor igual à diferença absoluta normalizada dos valores de função de duas soluções adjacentes (DEB *et al.*, 2002).

O valor global da distância de aglomeração é calculado como a soma dos valores de distância individuais correspondentes a cada objetivo (DEB *et al.*, 2002). Sendo assim, a mesma pode ser obtida por

$$cd^i = \sum_{m=1}^M \frac{f_m^{i+1} - f_m^{i-1}}{f_m^{m\acute{a}x} - f_m^{m\acute{i}n}} \quad (56)$$

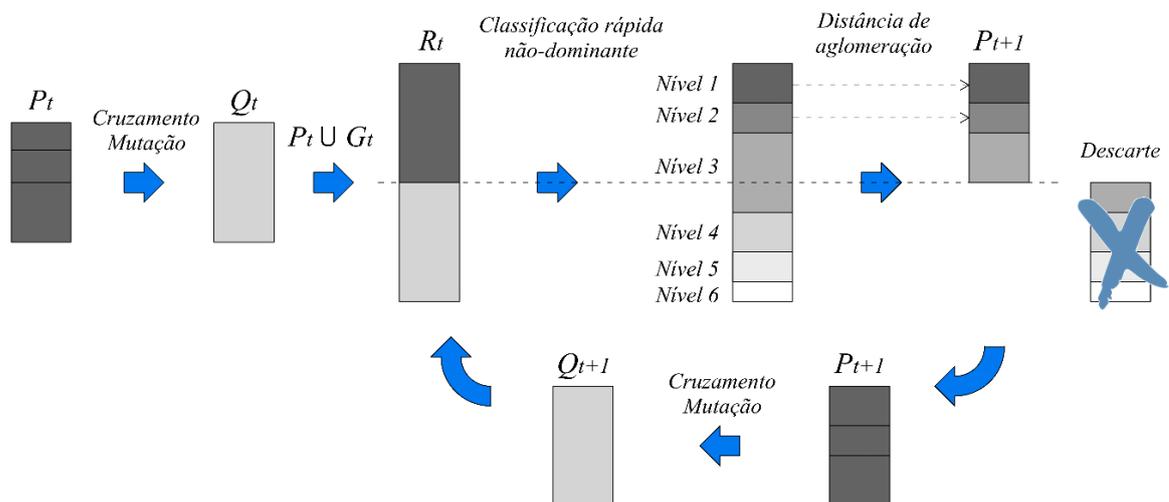
sendo cd^i a distância de aglomeração do indivíduo i , M o número de objetivos, f_m^{i-1} o valor da função objetivo m do vizinho imediatamente anterior ao indivíduo i no nível, f_m^{i+1} é o valor da função objetivo m do vizinho imediatamente posterior ao indivíduo i no nível, $f_m^{m\acute{a}x}$ e $f_m^{m\acute{i}n}$ são os valores extremos do nível no qual o indivíduo i pertence.

Quanto maior for o valor da distância de aglomeração, mais isolada a solução se encontra na fronteira. Dessa forma, para preservar a diversidade das soluções e resultar em uma fronteira com soluções uniformemente espalhadas, aumentando a chance de preencher toda a fronteira, indivíduos com maiores valores da distância de aglomeração devem ser priorizados

em relação àqueles cujos valores são pequenos. Portanto, entre duas soluções com diferentes classificações de não-dominância, prefere-se a solução com a melhor classificação; entretanto, se ambas as soluções pertencem ao mesmo nível, a solução que está localizada em uma região menos adensada é priorizada (DEB *et al.*, 2002).

Em resumo, o algoritmo NSGA-II proposto por Deb *et al.* (2002) possui seguinte estrutura: Inicialmente, gera-se uma população aleatória P_t com tamanho N . Cada solução recebe uma aptidão igual ao seu nível de não-dominância (1 é o melhor nível, 2 é o próximo melhor nível, e assim por diante). A partir de P_t , aplica-se os operadores de seleção por torneio, cruzamento e mutação para criar uma população de descendentes Q_t de tamanho N . Em seguida, as populações P_t e Q_t são unidas, formando uma população $R_t = P_t \cup Q_t$ de tamanho igual a $2N$. Então, a população R_t é submetida a uma classificação rápida por não-dominância. Os indivíduos pertencentes aos melhores conjuntos devem seguir para a nova população P_{t+1} de tamanho N . Sendo assim, se o número de indivíduos do primeiro nível for inferior a N , todos os membros desse conjunto são selecionados para a nova população. Os demais membros da população P_{t+1} são escolhidos a partir dos níveis subsequentes. Esse processo continua até que um nível não possa ser totalmente acomodado na população P_{t+1} . Nesse caso, a definição dos indivíduos do último nível que irão preencher os *slots* remanescentes da nova população será feita a partir da distância de aglomeração. Indivíduos com maiores valores dessa medida são preferidos. Finalmente, a nova população P_{t+1} de tamanho N é submetida à seleção, cruzamento e mutação para criar uma nova população Q_{t+1} de tamanho N . O processo se repete até que um critério de parada seja atingido. O procedimento geral do NSGA-II é evidenciado na Figura 21.

Figura 21 – Estrutura genérica do NSGA-II



3.3 Otimização estrutural

Nesta seção, alguns estudos que aplicaram as técnicas de otimização com intuito de minimizar o custo de lajes e as emissões de CO₂ de estruturas serão discutidos. Serão apresentados os objetivos, as variáveis de projeto, os algoritmos de otimização e algumas conclusões dos autores.

3.3.1 Lajes de concreto

Um estudo paramétrico de lajes lisas nervuradas foi realizado por Prasad, Chander e Ahuja (2005), com intuito de determinar os valores para o espaçamento entre as nervuras e sua altura que levassem à melhor distribuição dos esforços sem que fosse necessário usar armadura de cisalhamento. A análise estrutural foi feita por meio da analogia de grelha, considerando cada nervura como uma barra de seção T. Os autores analisaram lajes quadradas com 6, 7 e 8 m de vão. A espessura da mesa foi mantida constante (6,5 cm), assim como a largura da nervura (10 cm). Cada laje quadrada foi analisada para 5×5, 6×6 e 7×7 nervuras e, para cada um destes casos eles consideraram 4 valores para a altura da nervura. Os parâmetros para avaliação da melhor solução foram a flecha máxima, a porcentagem do carregamento devido ao peso próprio, os momentos fletores e esforços cortantes máximos.

Sahab, Ashour e Toropov (2005) realizaram a minimização dos custos com concreto, aço, fôrmas e mão de obra de três edifícios com lajes lisas maciças em concreto armado. Estão inclusos os custos das lajes, dos pilares e das fundações do prédio. Na análise estrutural, foi utilizado o método dos pórticos equivalentes. A espessura da laje, a armadura de flexão e de punção, a quantidade e o tamanho dos vãos nas duas direções, o número de pavimentos e a altura destes foram as variáveis de projeto. A otimização foi realizada em três níveis: no primeiro nível, o *layout* ótimo dos pilares foi determinado por uma busca exaustiva; no segundo, foram encontradas as dimensões ótimas dos pilares e a espessura da laje para cada *layout* por meio de um AG; no terceiro nível, também foi usada uma busca exaustiva para determinar o número e o tamanho ótimo das armaduras em diferentes posições da laje. Os autores verificaram que as lajes representaram, respectivamente, 89% e 91% do custo total do edifício para o projeto convencional e para o projeto ótimo.

Um modelo de rede neural dinâmica foi utilizado por Ahmadkhanlou e Adeli (2005) para minimizar o custo com concreto, aço e fôrma de lajes maciças de concreto armadas em uma única direção com diferentes condições de suporte (simplesmente apoiada, engastada, com

continuidade em uma borda e com continuidade em duas bordas), respeitando as restrições do ACI de 1999. As variáveis de projeto foram a espessura da laje, o diâmetro e o espaçamento das barras. Ahmadi-Nedushan e Varae (2011) aplicaram o algoritmo *Particle Swarm Optimization* (Otimização por Nuvem de Partículas, em tradução livre) (PSO) nos problemas propostos pelos autores supracitados, atendendo, no entanto, às prescrições do ACI 318-M08. Os resultados mostraram que o PSO é um método promissor no projeto ótimo de elementos estruturais.

Castilho e Lima (2007) investigaram a otimização do custo de lajes nervuradas formadas por vigotas treliçadas por meio da aplicação dos AG's. Foram analisadas lajes contínuas unidirecionais formadas por dois tramos de 4 m e por dois tramos de 6 m, com três tipos diferentes de treliças: TR-08634, TR-12645 e TR-16645. As variáveis de projeto foram: a espessura da capa de concreto, resistência característica do concreto à compressão, armadura adicional da treliça, a distância entre vigotas e o grau de redistribuição dos momentos negativos das lajes contínuas. O modelo foi processado considerando as variáveis tanto contínuas como discretas. Os resultados foram comparados com os obtidos pelo *solver* do *Microsoft Excel*[®] (*Excel*). Os resultados indicaram que os AG's são uma ferramenta de otimização viável para resolver problemas de minimização de custos de lajes com vigotas treliçadas.

Um algoritmo genético modificado, denominado MGA1, foi utilizado por Castilho, El Debs e Nicoletti (2007) com intuito de minimizar o custo de construção considerando as etapas de produção, transporte e montagem de lajes formadas por vigotas pré-moldadas de concreto protendido. Comparando com resultados da literatura obtidos com o Método do Lagrangiano Aumentado, os autores concluíram que se for conhecido um bom ponto de partida, o Lagrangiano Aumentado pode ser considerado a melhor opção. Se não existe essa informação, o MGA1 é uma boa opção a ser considerada.

Albuquerque (2007) e Albuquerque, Debs e Melo (2012) desenvolveram uma ferramenta computacional, denominada DSSPF (*Decision Support System for Precast Floors*), para otimização integrada de pavimentos de edifícios em concreto protendido pré-moldado por meio de algoritmos genéticos, minimizando, além dos custos com material, os custos associados à fabricação, transporte e montagem. As variáveis de projeto foram o número de vãos em cada direção, a direção das lajes alveolares, as dimensões dos elementos, o detalhamento das armaduras e a resistência à compressão do concreto. O sistema estrutural adotado no trabalho foi o composto por lajes alveolares apoiadas sobre vigas T invertidas.

A otimização do custo de um piso formado por laje mista em aço e concreto apoiada sobre vigas de aço com perfil I foi realizada Kaveh e Abadi (2010) por meio do algoritmo

Harmony Search Method (Busca Harmônica, em tradução livre) melhorado. As variáveis de projeto foram: o espaçamento entre as vigas, o comprimento da viga e a espessura da viga de concreto. Os resultados obtidos mostram que o método de Busca Harmônica aprimorada é um método poderoso e eficiente para encontrar a solução ideal de problemas de otimização estrutural. Kaveh e Massoudi (2012) também realizaram a otimização desse tipo de sistema, mas utilizaram a meta-heurística *Ant Colony System* (Sistema de Colônia de Formigas, em tradução livre). Neste último, as variáveis de projeto foram: a resistência do concreto à compressão, a espessura da laje de concreto, a forma da seção de aço, o espaçamento entre as vigas de aço, o diâmetro e o número de conectores de cisalhamento. O principal objetivo do trabalho foi apresentar um algoritmo simples e eficiente que pudesse ser usado em problemas de engenharia.

Lajes lisas nervuradas bidirecionais em concreto armado foram avaliadas por Galeb e Atiyah (2011) com intuito de minimizar o custo mediante a aplicação do AG presente no *Toolbox* do MATLAB. Foram avaliadas uma laje lisa com capiteis e outra com vigas faixa no alinhamento dos pilares. O Método Direto foi utilizado na obtenção dos esforços e deslocamentos da estrutura. As variáveis de projeto foram: a largura das vigas faixas, a área de aço de flexão nas seções críticas nas nervuras e nas vigas, a espessura da laje, a espessura da capa, a largura das nervuras e o espaçamento entre estas. O aumento na proporção de custo do concreto em relação ao custo do aço causou uma diminuição do espaçamento entre as nervuras e da área da sua seção transversal.

A otimização do custo de lajes nervuradas de concreto armado com vigotas treliçadas dispostas em uma direção foi realizada por Kaveh e Abadi (2011). O algoritmo aplicado na otimização foi o método de Busca Harmônica. Um estudo paramétrico também foi realizado para investigar os efeitos da extensão das vigas e do carregamento na otimização do custo. As variáveis de projeto foram: espessura da mesa, espaçamento das nervuras, largura inferior e superior da nervura, diâmetro da barra e altura da nervura. As restrições foram baseadas no ACI 318-05.

Kaveh e Behnam (2012) aplicaram a meta-heurística *Charged System Search* (CSS) na minimização do custo de três sistemas estruturais: lajes mistas em aço e concreto; lajes nervuradas unidirecionais em concreto armado; e o sistema de formas da laje de concreto. No primeiro sistema, foram consideradas a espessura da laje, as dimensões da viga de aço e o espaçamento entre estas como variáveis de projeto; no segundo, foram consideradas a espessura da mesa, espaçamento entre as nervuras, largura inferior e superior da nervura, altura da nervura e diâmetro da armadura; no terceiro, foram consideradas a altura e largura das vigas e das

longarinas. Os resultados fornecidos por esse algoritmo apresentaram-se melhores que os da literatura obtidos usando o algoritmo de Busca Harmônica.

El Semelawy, Nassef e El Damatty (2012) aplicaram um AG para minimizar o custo de uma laje lisa protendida isolada apoiada em pilares nos quatro cantos. A otimização foi feita em dois estágios: primeiro, minimizou-se o custo usando AG por meio da busca da espessura da laje, do número e do comprimento dos cabos protendidos nas duas direções, enquanto as três excentricidades, em cada direção, que definem a forma parabólica dos cabos, foram mantidas constantes; em um segundo estágio, usando as variáveis ótimas do passo anterior, busca-se as excentricidades novas dentro do espaço viável no qual a restrição seria mais distante do limite. Na análise estrutural, foi utilizado elementos finitos triangulares de casca. Os cabos foram modelados como parte do elemento de casca. Os autores concluíram que a variável de projeto que rege o custo de uma laje lisa protendida é a espessura.

O custo com fôrma, aço e concreto de lajes nervuradas bidirecionais isoladas simplesmente apoiadas foi minimizado por Mota e Melo (2015) usando AG. A análise estrutural foi feita transformando a laje nervurada em uma laje maciça equivalente e aplicando a solução de Navier. Foram consideradas restrições da NBR 6118/2014 e da NBR 14432/2001. As variáveis de projeto foram a distância entre faces de nervuras, largura da nervura, alturas da laje e da mesa, posição da linha neutra nas duas direções e resistência do concreto. A aplicabilidade do modelo está limitada pela disponibilidade da solução analítica.

Talaei, Nasrollahi e Ghayekhloo (2016) minimizou o custo de uma laje maciça protendida de 10 m x 10 m apoiada por quatro vigas de 80 cm x 100 cm no seu contorno. Estas últimas foram consideradas apoiadas em pilares com seção 80 cm x 80 cm nos quatro cantos. O modelo foi concebido no SAP2000 para realizar a análise estrutural e este foi vinculado a um código contendo um algoritmo de otimização híbrido, denominado PSOHS, que combina o PSO com o algoritmo de Busca Harmônica. As variáveis de projeto foram: a espessura da laje, o número de cabos nas duas direções, o diâmetro dos cabos, as excentricidades dos cabos nas duas extremidades e no meio da laje e a tensão admissível dos cabos. As restrições estão associadas aos requisitos do *Canadian Standard Association*.

A meta-heurística *Cuckoo Optimization Algorithm* (COA) foi aplicado por Ghandi, Shokrollahi e Nasrollahi (2017) na minimização do custo de lajes lisas de concreto armadas em uma e em duas direções de acordo com o código ACI. As variáveis de projeto foram: a espessura da laje, o diâmetro das barras e o espaçamento entre estas. O COA apresentou uma velocidade de convergência aceitável e, para lajes unidirecionais, demonstrou ter um desempenho superior ao do PSO e de um modelo com rede neural dinâmica.

Mohammed *et al.* (2017) realizaram o estudo de lajes maciças unidirecionais com protensão aderente com intuito de minimizar a energia de deformação total da laje. Para tanto, foram adotadas como variáveis de projeto a área dos cabos, a tensão inicial dos cabos e a excentricidade. A análise estrutural foi realizada por meio de um modelo de elementos finitos tridimensionais concebido no ANSYS®. Os resultados indicaram que a área dos cabos protendidos pode ser reduzida em aproximadamente 38% mediante a aplicação de um algoritmo de otimização.

3.3.2 *Minimização dos impactos ambientais*

Recentemente, muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos com intuito de investigar a eficiência de vários algoritmos na otimização multiobjetivo de elementos estruturais. AG's, NSGA-II, *Simulated Annealing* (SA), *Big Bang-Big Crunch* (BB-BC), Método de Busca Harmônica, *Glowworm Swarm Optimization* (GSO), além de híbridos destes com outros métodos, foram testados na otimização de vigas, pilares, pórticos planos, sapatas, pontes e muros de contenção, com intuito de minimizar o custo monetário e a emissão de CO₂.

Payá-Zaforteza *et al.* (2008) avaliaram o potencial do algoritmo SA na otimização de pórticos em concreto armado com quatro funções objetivos, sendo elas: a minimização do custo econômico, a maximização da construtibilidade (baseada no número de barras longitudinais da estrutura), a maximização da sustentabilidade e a maximização da segurança global. A princípio, otimizações mono-objetivo dos pórticos, visando a minimização do custo, maximização da sustentabilidade e minimização do número de barras longitudinais foram realizadas. Dessa análise, foi possível identificar que a solução obtida a partir da minimização do custo monetário foi 6,7% mais econômica do que a obtida com o objetivo de maximizar a sustentabilidade. Do contrário, a solução na otimização do custo foi 26,6% menos sustentável do que a solução na otimização da sustentabilidade. Em seguida, o algoritmo SA foi aplicado na otimização de duas funções objetivos simultaneamente (otimização multiobjetivo), tais como custo mais sustentabilidade e custo mais número de barras longitudinais. Nesses casos, o problema não tem uma solução ótima, mas um conjunto de soluções de Pareto.

Payá-Zaforteza *et al.* (2009) aplicaram o SA com o objetivo de minimizar, individualmente, o custo econômico e as emissões de CO₂ de pórticos de concreto armado. As soluções obtidas a partir da minimização da emissão de CO₂ foram, no máximo, 2,77% mais caras do que as soluções obtidas minimizando o custo econômico, isto é, levou a um incremento do custo bastante aceitável na prática. Já as soluções obtidas a partir da minimização do custo

econômico emitiram 3,8% a mais de CO₂ do que as soluções ótimas obtidas através da minimização da emissão de CO₂. De acordo com os autores, os resultados indicam que as emissões de CO₂ e o custo estão intimamente relacionadas.

Yepes *et al.* (2012) fizeram a otimização de muros de arrimo de concreto armado empregado na construção de rodovias com intuito de minimizar, isoladamente, o custo monetário e a emissão de CO₂, usando uma heurística de otimização mono-objetivo chamada VNS (*Variable Neighborhood Search*). A princípio, os autores identificaram que há uma relação íntima do custo econômico com as emissões de CO₂, visto que as soluções menos nocivas ao meio ambiente custam, no máximo, 1,28% a mais do que as soluções mais econômicas. Alternativamente, as melhores soluções do custo aumentam apenas 1,12% as emissões de CO₂. Além disso, foi identificado que o volume de concreto obtido na otimização do custo monetário é, em média, 4,8% maior do que o obtido otimizando a emissão de CO₂. Do contrário, a solução menos agressiva ao meio ambiente consumiu cerca de 1,9% a mais de aço do que a mais econômica.

Martinez-Martin *et al.* (2012) realizaram a otimização de pontes em concreto armado de *piers* usando cinco métodos de busca heurística multiobjetivo: Busca Aleatória (BA), Busca Local Descendente (BLD) e três híbridos do algoritmo SA, denominados MOSAMO1, MOSAMO2 e MOSAMO3. Esses três algoritmos diferem na temperatura inicial e na regra da probabilidade de transição. O procedimento foi aplicado na minimização de três funções objetivos: o custo econômico, o número de barras na estrutura (congestionamento das armaduras) e as emissões de CO₂. Foi verificada uma alta correlação entre o custo e a emissão de CO₂ no contexto econômico e tecnológico em que os *piers* são concebidos. Entretanto, observou-se que a correlação do número de barras com o custo ou com o CO₂ era muito baixa, isto é, a construtibilidade, indicada pelo número de barras, causa aumento no custo e consequências ambientais.

O algoritmo NSGA-II foi utilizado por Park, Jeon e Park (2012) na otimização de pilares mistos de aço e concreto de um prédio residencial de uso misto com 35 pavimentos com intuito de minimizar as emissões de CO₂ e o custo monetário. Os resultados mostraram que o custo e a emissão de CO₂ dos projetos ótimos para os dois casos foram diminuídos em 31-34% e 6,4-10,6%, respectivamente, quando comparados ao projeto inicial para cada caso.

Yeo e Potra (2013) apresentaram uma abordagem para o projeto ótimo de estruturas com intuito de equilibrar a economia e a sustentabilidade. Para tanto, os autores avaliaram um pórtico de concreto armado, sujeito a cargas de gravidade e cargas laterais, através da função “fmicon”, do *Toolbox* do MATLAB, que usa o algoritmo Programação Quadrática Sequencial

(PQS) na solução de problemas de otimização não-linear. Por ser um algoritmo de programação matemática que pode levar a um mínimo local, foram avaliados vários pontos de partida. A otimização em relação à emissão de CO₂ resultou em um aumento da quantidade de aço nas seções transversais e uma diminuição do concreto. A redução da emissão de CO₂ obtida pela otimização com objetivo de atingir as emissões mínimas de carbono, em oposição à otimização para atingir um custo mínimo, é da ordem de 5% a 15%, dependendo dos valores dos parâmetros assumidos nos cálculos.

Khajehzadeh, Taha e Eslami (2013) realizaram uma otimização multiobjetivo de muros de contenção de concreto armado através de um algoritmo evolutivo híbrido, chamado AGSA-OS, que combina o algoritmo de Busca Gravitacional Adaptativa (ABGA) e o método Busca Padrão (BP). No AGSA-OS, o método BP é usado na busca local em torno da solução global encontrada pelo ABGA. São consideradas, simultaneamente, duas funções objetivos: o custo total e as emissões de CO₂. Os resultados mostraram que o algoritmo híbrido tem alta viabilidade, precisão e supera significativamente os algoritmos originais e alguns outros métodos da literatura em termos de eficiência computacional e robustez.

Camp e Huq (2013) aplicaram o algoritmo *Big Bang-Big Crunch* (BB-BC) na minimização do custo monetário e da emissão de CO₂ de pórticos de concreto armado. A solução obtida pelo algoritmo BB-BC apresentou algumas melhorias em relação às soluções obtidas por AG's e pelo SA. No primeiro pórtico avaliado, o BB-BC levou a uma solução ótima com custo 5,2% menor do que a obtida pelo AG. Em seguida, o BB-BC foi aplicado no pórtico proposto por Payá-Zaforteza *et al.* (2009), que realizou a otimização pelo SA de acordo com as especificações do código espanhol. Entretanto, este foi aplicado com base nas especificações prescritas pelo Instituto Americano de Concreto (ACI). Nesse caso, a solução ótima obtida foi 5,7% mais econômica do que a obtida pelo SA. O BB-BC, dessa maneira, se mostrou computacionalmente mais eficiente do que AG e SA. Comparando as soluções ótimas em que o objetivo é a minimização da emissão de CO₂ com aquelas com objetivo de minimizar o custo, percebeu-se que é possível obter soluções com o mínimo de emissões com um aumento relativamente pequeno no custo.

Sapatas de concreto armado sujeitas a cargas verticais centradas dos pilares foram otimizadas por Camp e Assadollahi (2013) mediante o emprego do algoritmo BB-BC. A otimização tinha como objetivo minimizar o custo monetário, a emissão de CO₂ e o agregado ponderado do custo e do CO₂. O mesmo aplicou uma otimização multiobjetivo para o custo e para emissão de CO₂. Através de uma análise da sensibilidade da resposta, percebeu-se que tanto o custo quanto o CO₂ são altamente sensíveis a mudanças na carga aplicada, no módulo

de elasticidade do solo, na tensão admissível do solo e na resistência à compressão do concreto. O coeficiente de Poisson do solo, o ângulo de atrito e o fator de segurança têm menor impacto sobre os valores de custo e de emissão de CO₂.

Park *et al.* (2013) desenvolveram a otimização, por meio de algoritmos genéticos, de pilares mistos de aço-concreto de um edifício real de 35 andares, considerando, simultaneamente, o custo e as emissões de CO₂. Para considerar o custo monetário e as emissões de CO₂ simultaneamente em uma otimização mono-objetivo, os autores converteram as emissões de CO₂ em custos utilizando o preço unitário do carbono e, em seguida, minimizou o custo total, incluindo o custo adicional das emissões de CO₂. O projeto ótimo reduziu 31,51% do custo monetário, 30,30% das emissões de CO₂ e 7,79% da soma do peso da seção de aço e concreto. O peso do aço foi reduzido em 39,14%, enquanto o peso do concreto aumentou 7,23%. Os autores concluíram, dessa maneira, que reduzir a quantidade de aço e aumentar a quantidade de concreto pode ser uma forma eficaz de reduzir os custos com estrutura e as emissões de CO₂ dos pilares mistos de aço-concreto. Embora o custo unitário e a emissão de CO₂ de materiais de alta resistência sejam superiores ao dos materiais de resistência moderada, foi mostrado que o uso daqueles em pilares mistos reduz as emissões de CO₂ e os custos globais, já que são necessárias quantidades mais baixas dos dois materiais.

Park *et al* (2014) desenvolveram um estudo paramétrico para obter as seções transversais de pilares de concreto armado sujeitos à flexocompressão reta com o mínimo de emissão de CO₂ ou custo que satisfaçam as restrições estruturais. Percebeu-se que, ao variar a largura e a área de aço, as seções transversais que levaram à menor emissão de CO₂ foram aquelas em que tiveram a taxa de armadura próxima à máxima. Já as soluções mais econômicas foram vistas nas seções que possuem taxa de armadura próxima à mínima. Foi notado, ainda, que, em termos de sustentabilidade, é melhor aumentar a resistência dos materiais do que a quantidade destes.

Medeiros e Kripka (2014) otimizaram seções retangulares de concreto armado submetidas à flexocompressão normal através do método da Busca Harmônica com objetivo de minimizar, isoladamente, o custo monetário, a emissão de CO₂, o potencial de aquecimento global (GWP) e os Eco-Indicadores. Os custos ambientais de cada insumo foram estimados a partir da Análise do Ciclo de Vida. As soluções ótimas obtidas pelo método da Busca Harmônica foram comparadas com a solução obtida pelo processo tradicional, através dos diagramas de iteração, e com as obtidas por AG's e pelo SA. O método da Busca Harmônica se mostrou muito competitivo em relação aos demais métodos de otimização. Foi comparada a solução ótima com objetivo de minimizar o custo monetário com as soluções ótimas decorrentes

da minimização dos custos ambientais. Verificou-se que as soluções ótimas em termos de custos monetários levaram a um resultado ambiental bastante satisfatório, tendo em vista que obteve uma diferença pequena em relação a melhor solução ambiental para maioria dos custos ambientais. A maior variação em relação ao custo monetário foi vista na solução da minimização do eco-indicador. As melhores soluções ambientais buscaram usar menor quantidade de concreto e maiores quantidades de aço.

García-Segura *et al.* (2014) apresentaram um algoritmo híbrido que combina *Glowworm Swarm Optimization* (GSO) com o SA, denominado SAGSO, e aplicou em uma viga de concreto armado simplesmente apoiada com seção I. Foi combinada a capacidade do GSO para pesquisar em todo o espaço com a busca local pelo SA para obter melhores resultados do que utilizando os algoritmos independentemente. O algoritmo foi aplicado em duas funções objetivos: o custo econômico e as emissões de CO₂ da estrutura. O estudo mostrou que grandes seções com uma área de superfície altamente exposta e o uso de concreto vibrado convencional com menor grau de resistência minimizam as emissões de CO₂. O método proposto supera o GSO em termos de eficiência, precisão e taxa de convergência. A falta de viabilidade e convergência para o ótimo do GSO é resolvida graças às características de convergência estável do SA.

Yepes, Martí e García-Segura (2015) descreveram uma metodologia para otimizar o custo e as emissões de CO₂ de uma ponte rodoviária formada por duas vigas isostáticas pré-moldadas em concreto protendido com seção transversal em forma de U. Para tanto, foi utilizado o algoritmo híbrido SAGSO. A análise revelou que a redução no custo de 1 euro pode economizar 1,75 kg em emissões de CO₂. Em uma análise de sensibilidade do custo de uma ponte pré-moldada de concreto protendido com 35 m de extensão, foi indicado que um aumento de 20% do custo do aço provoca um aumento de 10,27% no custo total, enquanto um aumento de 20% no custo do concreto leva a um aumento no custo de apenas 3,41%. Finalmente, foi concluído que as soluções ótimas em termos de custos monetários levaram a resultados ambientais bastante satisfatórios, diferindo pouco da solução ótima com a minimização do CO₂.

Camp e Assadollahi (2015) desenvolveram uma otimização multiobjetivo da emissão de CO₂ e do custo de sapatas de concreto armado sujeitas a momentos fletores uniaxiais através do algoritmo BB-BC. Foi realizada a comparação do projeto das sapatas utilizando procedimentos de análise simplificados, habitualmente utilizados na prática, com procedimentos de análise teórica. Os exemplos mostraram que há uma economia significativa no custo e na emissão de CO₂ para os projetos baseados em procedimentos de análise teórica quando comparados com projetos baseados em procedimentos de análise simplificados. Uma

análise de sensibilidade mostra um aumento drástico na diferença entre os projetos desenvolvidos a partir de procedimentos de análise simplificados e procedimentos de análise teórica para o custo médio e as emissões médias de CO₂. Além disso, verifica-se que os projetos de emissão de baixo custo e baixo teor de CO₂ com base em procedimentos de análise teórica permitem que a fundação se desprenda do solo para excentricidades médias e altas e cargas aplicadas de baixo a médio.

Fraga e Kripka (2015) desenvolveram a otimização dos custos monetários e ambientais de vigas de concreto armado com vãos variáveis de 1,5 a 10 m. Para tanto, os autores utilizaram o método dos Gradientes Reduzidos Generalizados (GRG), presente na ferramenta *solver* do *software* Microsoft Excel. Os custos ambientais avaliados foram a emissão de CO₂, os Eco-Indicadores e o Potencial de Aquecimento Global. Foi possível identificar que concretos com menores resistências levam a menores custos monetários e ambientais. Dessa maneira, não se justifica o uso de concretos de alta resistência em vigas de concreto armado. Quanto ao custo monetário, o aço é o material que exerce maior influência, sendo seguido pela forma e pelo concreto. Este último, no entanto, é o que mais afeta o meio ambiente.

García-Segura *et al.* (2015) utilizaram um algoritmo híbrido, denominado HSTA, que combina o método da Busca Harmônica com a estratégia *Threshold Acceptance* (TA), para encontrar a geometria e os materiais de pontes para pedestres com tabuleiro celular pré-moldado em concreto protendido para os quais os custos e a emissão de CO₂ são mínimos. Foi utilizado um método experimental para ajustar os parâmetros do algoritmo. Os resultados indicaram que a otimização com objetivo ambiental também garante soluções econômicas, já que poluem 1% a menos e custam 2% a mais.

García-Segura e Yepes (2016) aplicaram o método da Busca Harmônica na otimização multiobjetivo de pontes rodoviárias com tabuleiro celular pré-moldado em concreto protendido, com intuito de minimizar o custo monetário, a emissão de CO₂ e o fator de segurança global. Os resultados mostram que as emissões de CO₂ e o custo estão próximas uma da outra para qualquer faixa de segurança. Sendo assim, a otimização de custo se mostra como uma boa abordagem para alcançar um projeto ambientalmente amigável. Uma redução de 1 euro no custo reflete em uma redução de 2,34 kg de CO₂ emitido. Para aumentar o fator de segurança global de 1 para 1,4, os custos aumentam de 40000 euros para 450000 euros. Foi desenvolvida no trabalho uma ferramenta computacional que liga o *software CSiBridge* ao *Matlab* para integrar a análise por elementos finitos, utilizada na verificação dos estados limites, e a otimização multiobjetivo.

Kaveh e Ardalani (2016) desenvolveram a otimização do custo e das emissões de CO₂ de pórticos de concreto armado através da meta-heurística recentemente desenvolvida chamada *Enhanced Colliding Bodies Optimization* (ECBO) e o algoritmo *Non-dominated Sorting Enhanced Colliding Bodies Optimization* (NSECBO). O algoritmo ECBO mostrou uma melhoria na eficiência computacional em relação aos projetos realizados pelo algoritmo BB-BC. A análise revela que as duas funções objetivas são bastante relevantes e que os projetos centrados na minimização das emissões de CO₂ podem ser alcançados com um aumento de custos aceitável na prática. Embora a função de emissões de CO₂ provoque um aumento relativo no custo, diminui as emissões de CO₂ em 9,74%. Os ótimos de Pareto do algoritmo NSECBO indicam que ambos os objetivos produzem soluções semelhantes. Os resultados mostraram que as variáveis de projeto associadas à geometria são diferentes para cada objetivo, de tal forma que a área das vigas é maior em relação ao projeto de emissões de baixa emissão de CO₂ do que no projeto de baixo custo.

4 MODELO DE OTIMIZAÇÃO

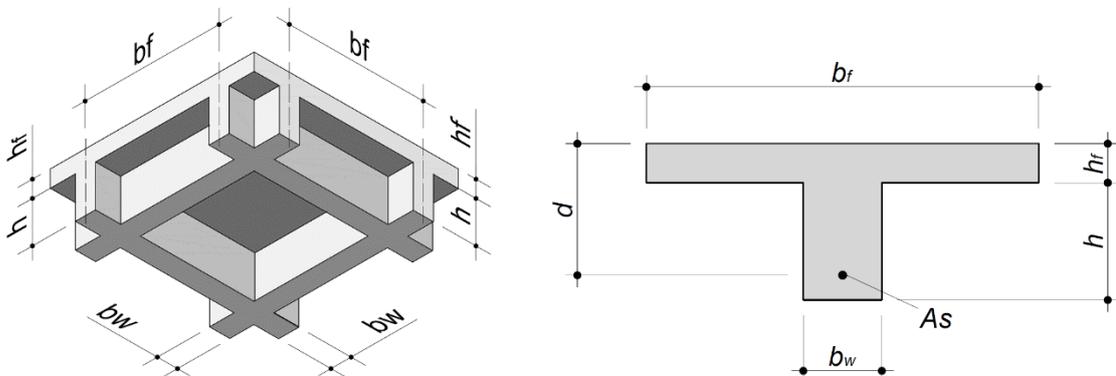
Nesta seção, a formulação matemática do problema de otimização de lajes nervuradas em concreto armado, sujeitas às prescrições da NBR 6118/2014 e da NBR 15575/2013, é exposta e discutida.

4.1 Variáveis de projeto

Nas aplicações práticas, por questões construtivas, os moldes plásticos reutilizáveis, usados na confecção de lajes nervuradas bidirecionais moldadas no local, possuem base quadrada. Nesse caso, a largura da nervura e o espaçamento entre elas é igual nas duas direções. Sendo assim, neste trabalho, as variáveis de projeto serão consideradas iguais nas duas direções. Além disso, a espessura da nervura é variável ao longo da sua altura para facilitar o desmolde. Todavia, é consistente considerar, por simplificação, que a mesma possui um valor constante igual à largura média da mesma. Outra prática comum, também por facilidade construtiva, é admitir apenas uma barra na nervura.

As variáveis cuja mudança causam influência mais significativa no comportamento de uma laje nervurada e que serão, portanto, alteradas na busca da solução ótima são: a resistência do concreto à compressão (f_{ck}), o diâmetro das barras de flexão (ϕ), a distância entre eixos das nervuras (b_f), a espessura da mesa (h_f), a largura da nervura (b_w) e sua altura (h). A Figura 22 apresenta uma seção típica de uma laje nervurada com as variáveis destacadas.

Figura 22 – Seção típica de uma laje nervurada



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

O momento fletor solicitante de cálculo por nervura (M_d), o esforço cortante (V_{sd}) de cálculo por nervura e a flecha imediata (δ_i) serão as variáveis dependentes das variáveis de

projeto. Já a massa específica (γ_s), o módulo de elasticidade (E_s) e a tensão de escoamento do aço (f_y), o cobrimento da armadura (c), o coeficiente de fluência (α_f), o volume de concreto (V_c), o volume de aço (V_s), os custos monetários do aço por unidade de massa (C_s), o custo monetário de concreto por unidade de volume (C_c) e as emissões de CO₂ do aço (e_s) e do concreto (e_c) são considerados parâmetros constantes durante o processo de otimização.

4.2 Funções objetivo

As funções objetivo quantificam uma determinada medida de desempenho que se deseja minimizar ou maximizar e funcionam como um indicador da qualidade da solução. O problema deste estudo envolve a minimização do custo monetário, a minimização da emissão de CO₂ e a maximização da frequência natural de lajes nervuradas de concreto armado. Embora os algoritmos de otimização possam ser empregados em vários objetivos simultaneamente, nesse trabalho será realizada a otimização dos objetivos em pares, para que se possa analisar as implicações dos outros objetivos no custo.

O custo com as fôrmas não foi considerado neste modelo, tendo em vista que seu valor é dado em função da área do pavimento, que não irá se alterar na busca da solução ótima. A função que descreve o custo da laje com materiais, $f_1(\mathbf{x})$, pode, assim, ser expressa por

$$f_1(\mathbf{x}) = C_c V_c + C_s V_s \gamma_s \quad (57)$$

sendo γ_s o peso específico do aço, considerado 78,50 kN/m³, V_c o volume de concreto, obtido por

$$V_c = \ell_x \ell_y (h + h_f) - h (b_f - b_w)^2 n_f - V_s \quad (58)$$

e V_s o volume do aço, dado por

$$V_s = (n_{f,y} + 1) A_{s,x} \ell_x + (n_{f,x} + 1) A_{s,y} \ell_y \quad (59)$$

onde

ℓ_x e ℓ_y são, respectivamente, o menor e maior vão da laje;

$A_{s,x}$ e $A_{s,y}$ são, respectivamente, as áreas de aço das armaduras de flexão na direção de ℓ_x e ℓ_y ;

$n_{f,x}$ é o número de vazios entre as nervuras (número de fôrmas plásticas) na direção de x , dado pelo arredondamento da razão ℓ_x/b_f para o número inteiro imediatamente abaixo;

$n_{f,y}$ é o número de fôrmas plásticas na direção de y , dado pelo arredondamento da razão ℓ_y/b_f para o número inteiro imediatamente abaixo;

n_f é o número de fôrmas plásticas no pavimento, obtido pelo produto entre $n_{f,x}$ e $n_{f,y}$.

A função $f_2(\mathbf{x})$, que quantifica a massa de CO₂ emitida nas diferentes etapas de produção e fixação dos elementos estruturais, é um indicador do impacto ambiental e pode ser representada por

$$f_2(\mathbf{x}) = e_c V_c + e_s V_s \gamma_s \quad (60)$$

sendo e_c e e_s , respectivamente, a quantidade em kg de CO₂ emitido na produção de 1 m³ de concreto e de um kg de aço.

A função $f_3(\mathbf{x})$ representará a frequência natural. A mesma dependerá da massa e da rigidez do sistema estrutural, sendo, portanto, função das propriedades geométricas da laje. No cálculo da massa da laje, será considerado o peso próprio, as demais cargas permanentes e a carga acidental. Os valores serão ponderados conforme uma combinação frequente das ações.

4.3 Restrições

As variáveis de projeto devem assegurar, basicamente, a obtenção de um sistema seguro, durável, com adequado desempenho nas condições normais de utilização e que seja exequível. Na otimização, os requisitos que garantem essas condições são tratados como restrições. Uma solução possível para o sistema é, assim, a configuração que confere à estrutura um desempenho satisfatório para o propósito no qual foi projetada. Para as lajes nervuradas de concreto armado, a solução deve atender às restrições associadas ao comportamento nos estados limites último e de serviço, além de limitações de dimensões impostas pelas normas. Restrições relativas à boa prática de projeto também podem ser consideradas.

Nem sempre a solução com menor consumo de materiais é a mais econômica. A construtibilidade exerce influência significativa no custo da estrutura. Sendo assim, embora uma solução com estribos possa levar a um menor consumo de material, sua utilização em lajes nervuradas não é uma prática comum, tendo em vista que o processo construtivo se tornaria bem mais dispendioso, o que, provavelmente, aumentaria o custo total da laje. Dessa forma, neste trabalho não será considerada armação transversal nas lajes.

Para minimizar as chances de problemas numéricos decorrentes da diferença da ordem de grandeza das variáveis, as restrições serão normalizadas. As restrições de comportamento consideradas no modelo são apresentadas a seguir.

- a) verificação da armadura de flexão requerida, mínima e máxima nas duas direções:

$$g_1 = 1 - \frac{A_{s\phi x}}{A_{sx,req}} \leq 0 \quad ; \quad (61)$$

$$g_2 = 1 - \frac{A_{s\phi x}}{A_{s,\min}} \leq 0 \quad ; \quad (62)$$

$$g_3 = \frac{A_{s\phi x}}{A_{s,\max}} - 1 \leq 0 \quad ; \quad (63)$$

$$g_4 = 1 - \frac{A_{s\phi y}}{A_{sx,req}} \leq 0 \quad ; \quad (64)$$

$$g_5 = 1 - \frac{A_{s\phi y}}{A_{s,\min}} \leq 0 \quad ; \quad (65)$$

$$g_6 = \frac{A_{s\phi y}}{A_{s,\max}} - 1 \leq 0 \quad ; \quad (66)$$

b) garantia da ductilidade pela limitação da posição relativa da linha neutra:

$$g_7 = \frac{kx_x}{kx_{\lim}} - 1 \leq 0 \quad ; \quad (67)$$

$$g_8 = \frac{kx_y}{kx_{\lim}} - 1 \leq 0 \quad ; \quad (68)$$

d) atendimento do estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF):

$$g_9 = \frac{\delta_t}{\delta_{\lim}} - 1 \leq 0 \quad ; \quad (69)$$

e) dispensa da armadura transversal e verificação da resistência das diagonais comprimidas:

$$g_{10} = \frac{V_{Sd}}{V_{Rd1}} - 1 \leq 0 \quad ; \quad (70)$$

$$g_{11} = \frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} - 1 \leq 0 \quad ; \quad (71)$$

As variáveis de projeto serão consideradas discretas para que as soluções obtidas tenham aplicação prática. Sendo assim, essas só poderão assumir valores contidos dentro de um determinado conjunto, que será discretizado em incrementos que tornem as variáveis usuais. As restrições impostas diretamente sobre as variáveis de projeto, como, por exemplo, as dimensões mínimas que garantem a função de corta fogo, serão apresentadas nas aplicações numéricas.

Em problemas de otimização irrestrita, a própria função objetivo $f(\mathbf{x})$ pode ser utilizada para mensurar a qualidade (aptidão) da resposta. Quando o problema possui restrições, é comum transformá-lo em irrestrito e considerar as restrições por meio da penalização das

soluções que as violarem. Dessa maneira, a função aptidão $F(\mathbf{x})$ pode ser obtida somando uma função de penalidade $P(\mathbf{x})$ à função objetivo, na forma

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + P(\mathbf{x}) \quad (72)$$

Não há diretrizes gerais para definir a função de penalidade para problemas de otimização (CASTILHO; DEBS; NICOLETTI, 2007). Neste trabalho, a função penalidade será

$$P(\mathbf{x}) = k \sum_{i=1}^m \max(g_i(\mathbf{x}), 0) \quad (73)$$

onde k é um fator de penalidade e m é o número de restrições. Assim, quando a solução for viável, não haverá penalização. As soluções penalizadas serão menos aptas e, por conseguinte, terão menor probabilidade de passar para próxima geração.

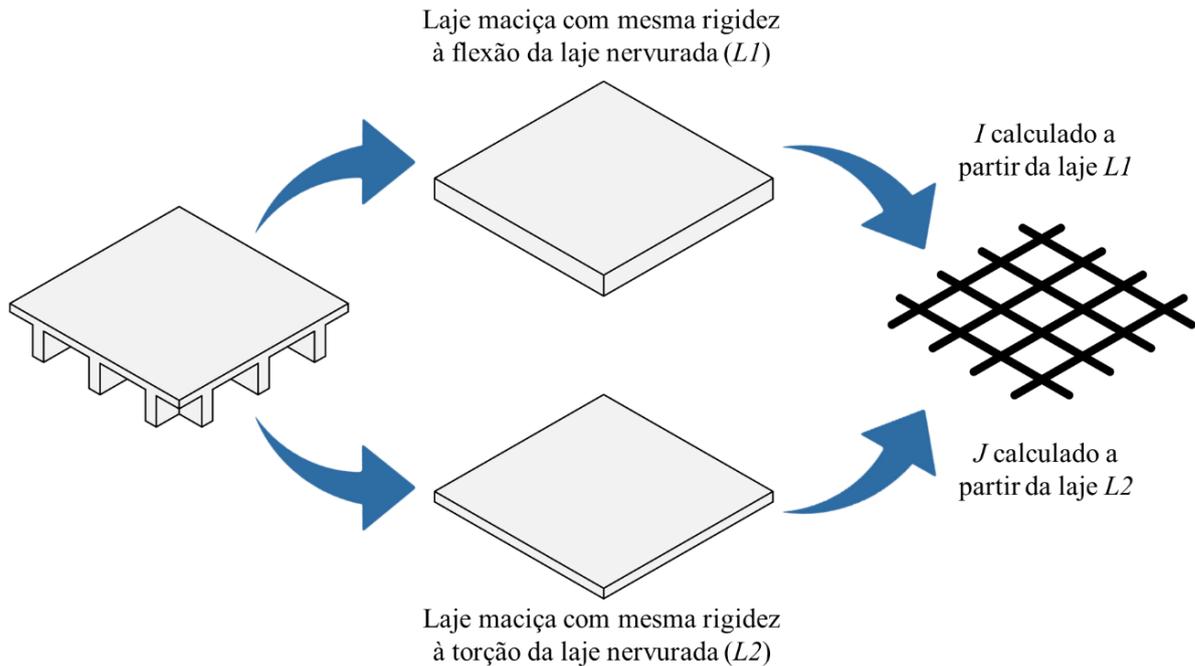
4.4 Análise estrutural

Em um problema de otimização de lajes nervuradas, manter a posição da barra da grelha condicionada à posição do eixo da nervura pode trazer um custo a mais se esta for considerada uma variável de projeto. Nesse caso, para cada solução factível avaliada no processo de busca, deverá ser gerada uma nova malha para a grelha, fato que tornará o processo mais dispendioso, principalmente quando se trabalha com AGs, que avaliam um número significativo de soluções.

Para tornar a malha da grelha independente da distância entre os eixos da nervura, alguns autores recomendam que a laje nervurada seja transformada em uma laje maciça com espessura que confira uma mesma rigidez à flexão daquela. Essa técnica, no entanto, só é viável se a rigidez à torção da laje nervurada for desconsiderada, haja vista que uma laje maciça tem uma rigidez à torção bem superior a uma laje nervurada. Em lajes nervuradas de concreto armado, a redução da rigidez à torção é consistente devido ao aparecimento de fissuras. Em lajes nervuradas protendidas, entretanto, o mesmo não pode ser feito.

Neste trabalho será proposta uma metodologia para desacoplar o problema de otimização da geração da malha da grelha na análise de lajes nervuradas. A premissa consiste em calcular as propriedades geométricas das barras da grelha com base em duas lajes maciças equivalentes, sendo uma com espessura que confira a mesma rigidez à flexão da laje nervurada (L1) e a outra que confira a mesma rigidez à torção (L2). A Figura 23 mostra um esquema dessa proposta.

Figura 23 – Processo para aplicação da espessura equivalente na analogia de grelha



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Em um primeiro momento, são calculadas as espessuras equivalentes à flexão ($h_{eq,I}$) e à torção ($h_{eq,J}$) a partir do momento de inércia à flexão (I) e à torção (J) de uma nervura da laje por meio das expressões:

$$h_{eq,I} = \left(\frac{12 I}{b_f} \right)^{1/3} \quad (74)$$

$$h_{eq,J} = \left(\frac{6 J}{b_f} \right)^{1/3} \quad (75)$$

De posse desses valores, pode-se definir uma malha para grelha com espaçamento a_1 diferente do espaçamento das nervuras b_f . Dessa forma, o momento de inércia à flexão (I_b) e à torção (J_b) das barras que compõem a grelha serão obtidos por:

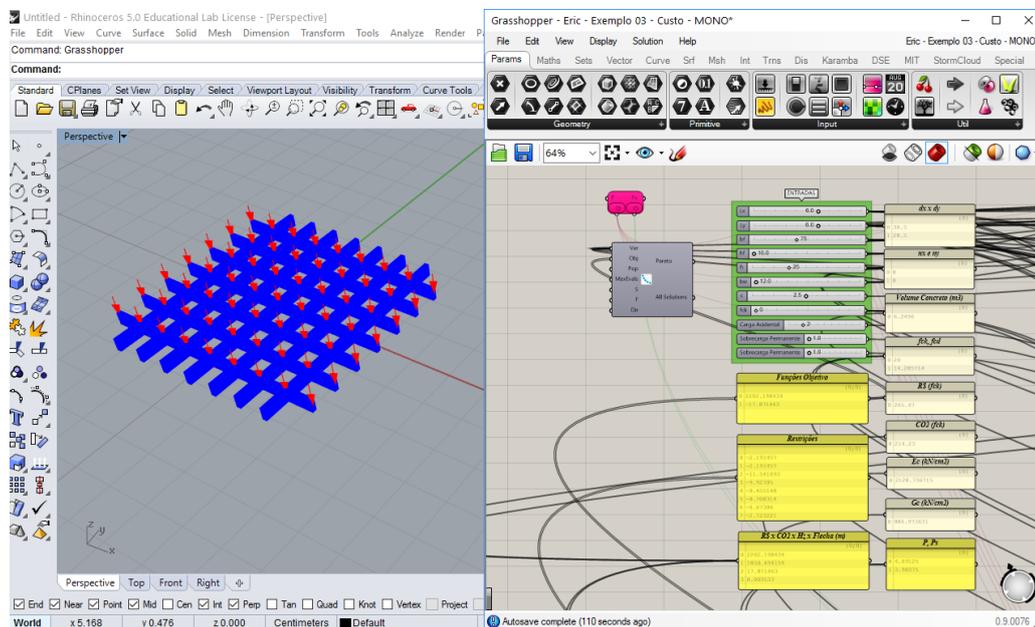
$$I_b = \frac{a_1 h_{eq,I}^3}{12} \quad (76)$$

$$J_b = \frac{a_1 h_{eq,J}^3}{6} \quad (77)$$

4.5 Implementação computacional

Os algoritmos para o projeto das lajes nervuradas foram implementados no *Grasshopper*[®] (Gh3D), que é um editor gráfico de algoritmos que funciona como um *plug-in* de programação visual vinculado às ferramentas de modelagem 3D do *Rhinceros*[®] (Rhino). Este, por sua vez, é um *software* de modelagem 3D baseado na tecnologia NURBS (*Non Uniform Rational Basis Spline*). A Figura 24 mostra o ambiente onde foi feita a implementação do algoritmo.

Figura 24 – Rhino e Gh3D



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

O Gh3D, atualmente na versão 0.9.0076, é uma ferramenta gratuita desenvolvida por David Rutten e está disponível para *download* no site www.grasshopper3d.com. Na análise estrutural, foi utilizado o *Karamba 3D*[®], versão 1.2.2, que é um programa de Elementos Finitos que pode ser incorporado no ambiente paramétrico do Gh3D, fato que facilita a combinação de modelos geométricos parametrizados, análise estrutural por elemento finitos e algoritmos de otimização como *Octopus*[®] ou *Galapagos*[®] (PREISINGER, 2013).

Para a otimização, foi utilizada uma versão na linguagem *C#* do algoritmo NSGA-II, disponível gratuitamente na biblioteca computacional *jMetal*, desenvolvida por Durillo e Nebro (2011). A biblioteca inclui um conjunto de metaheurísticas para solução de problemas de otimização multiobjetivo, tais como NSGA-II, SPEA2 (*Strength Pareto Evolutionary*

Algorithm II), PAES (*Pareto Archived Evolution Strategy*), MOCeII (*Cellular Genetic Algorithm*), AbYSS (*Archive-Based hYbrid Scatter Search*), SMPSO (*Speed constrained Multi-objective PSO*), entre outras. Nessa ferramenta, é possível trabalhar tanto com codificação binária como real.

5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

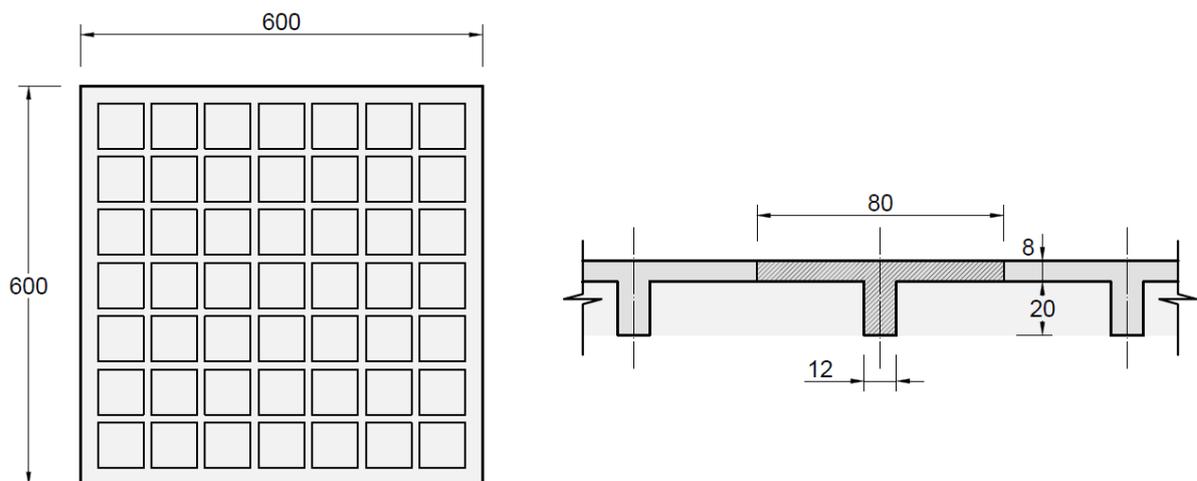
Para testar a metodologia proposta, algumas aplicações numéricas foram desenvolvidas. A princípio, foi feita a avaliação da aplicação da espessura equivalente para estimar os esforços e os deslocamentos de lajes nervuradas com as posições das barras da grelha independentes das posições das nervuras. Na sequência, foi realizada a otimização de lajes nervuradas mediante a aplicação do algoritmo NSGA-II.

5.1 Análise estrutural

5.1.1 Exemplo I

Nesse primeiro problema pretende-se obter os esforços e os deslocamentos de uma laje, cuja geometria é mostrada na Figura 25, utilizando a técnica da espessura equivalente. Sobre a laje atuam, além do peso próprio de $3,85 \text{ kN/m}^2$, uma carga acidental de 2 kN/m^2 , uma carga de revestimento de 1 kN/m^2 e uma carga de alvenaria de 1 kN/m^2 , totalizando uma carga de $7,85 \text{ kN/m}^2$. O concreto utilizado é da classe C20, o que leva a $E = 21287 \text{ MPa}$ e $G = 8870 \text{ MPa}$. A laje será considerada simplesmente apoiada e as vigas de borda são tratadas como apoios indeslocáveis.

Figura 25 – Laje do Exemplo I



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

A Tabela 7 mostra as propriedades geométricas da seção T das nervuras e a espessura equivalente à flexão e à torção.

Tabela 7 – Propriedades geométricas das nervuras do Exemplo I

y_{cg} (cm)	I (cm ⁴)	J (cm ⁴)	$h_{eq,I}$ (cm)	$h_{eq,J}$ (cm)
20,18	45624,24	24578,78	18,99	12,26

Foram analisadas várias malhas distintas, com as propriedades geométricas das barras calculadas a partir das espessuras equivalentes. Todas as malhas geradas contam com uma barra passando pelo centro da laje e com ausência de barras no contorno. A malha dita de referência é aquela cuja posição das barras da grelha é a mesma das nervuras, isto é, quando $b_f = a_l = 80$ cm (malha 80 cm x 80 cm).

Em um primeiro momento, a carga nodal foi adotada, por simplificação, igual em todos os nós da grelha, e sua intensidade foi calculada multiplicando a carga distribuída na superfície por a_l^2 (área de influência). Em seguida, a carga nodal foi avaliada de acordo com a área de influência de cada nó. Os resultados para os dois casos, considerando a malha de referência e 100% da rigidez à torção, são apresentados na Tabela 8 e comparados com a solução da Teoria Clássica de Kirchhoff (Placa finas).

Tabela 8 – Valores máximos dos esforços e da flecha para a grelha de referência

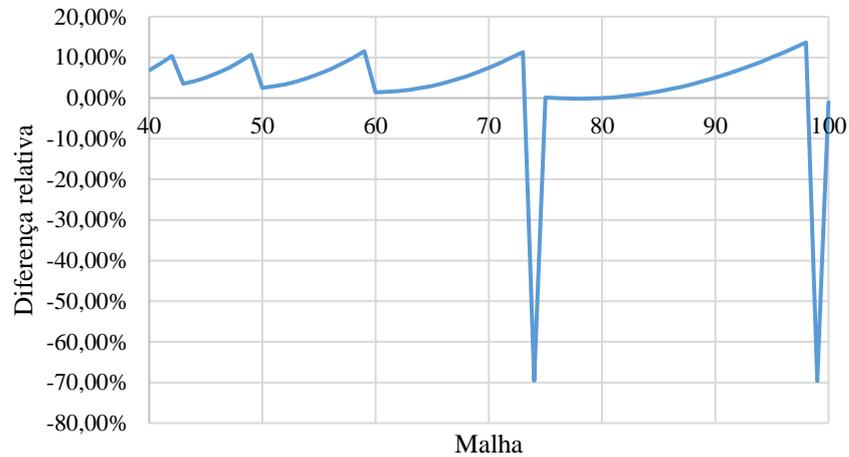
Solução	$M_x = M_y$ (kNm)	$V_x = V_y$ (kN)	δ (mm)
Grelha: cargas nodais iguais	15,48	13,70	6,23
Grelha: cargas nodais por área de influência	15,07	12,95	6,04
Analítica (TCK)	12,46	11,78	3,26

Percebe-se que a aplicação da mesma carga em todos os nós da malha superestimou o momento fletor em 4,59%, o esforço cortante em 5,47% e a flecha máxima em 3,05%, já que, a rigor, as áreas de influência e, por conseguinte, as cargas em nós mais próximos das bordas diminuem. Já a solução analítica subestima o momento fletor, o esforço cortante e a flecha máxima, em relação à grelha com as cargas calculadas por área de influência, em, respectivamente, 17,31%, 8,88% e 46,03%. A diferença é maior na estimativa dos deslocamentos, tendo em vista que estes são mais suscetíveis à rigidez à torção que os esforços. Se a rigidez à torção das nervuras for desconsiderada devido à fissuração, esses erros tendem a aumentar ainda mais.

Com o intuito de avaliar o efeito da não coincidência da malha da grelha com a posição das nervuras, o problema é agora resolvido para malhas da grelha variando de 40 cm a 100 cm com incrementos de 1 cm, considerando ainda 100% da rigidez à torção. As diferenças

entre os deslocamentos máximos da laje em relação à malha de referência são mostradas na Figura 26. O sinal negativo indica que os valores foram maiores que o de referência.

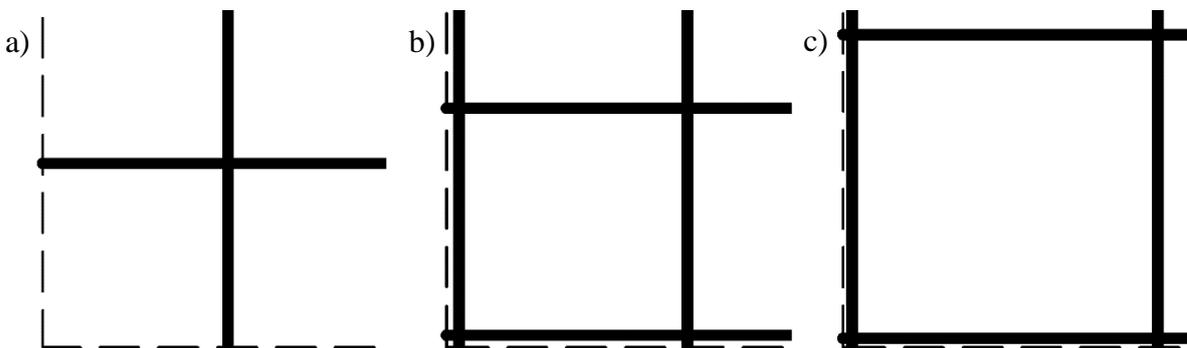
Figura 26 – Diferença percentual dos deslocamentos em relação à malha de referência



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

É possível notar que, nas malhas de 74 cm x 74 cm e 99 cm x 99 cm, a diferença relativa chegou a aproximadamente 70%. Isso ocorre porque nessas malhas as barras ficam muito próximas da borda (Figura 27), o que resultaria, pela área de influência, em uma carga nodal inferior à que está sendo considerada neste modelo. Na malha 60 cm x 60 cm, onde, de fato, as cargas são iguais em todos os nós, o erro foi de 1,44%.

Figura 27 – Malhas de a) 60 cm x 60 cm, b) 74 cm x 74 cm e c) 99 cm x 99 cm

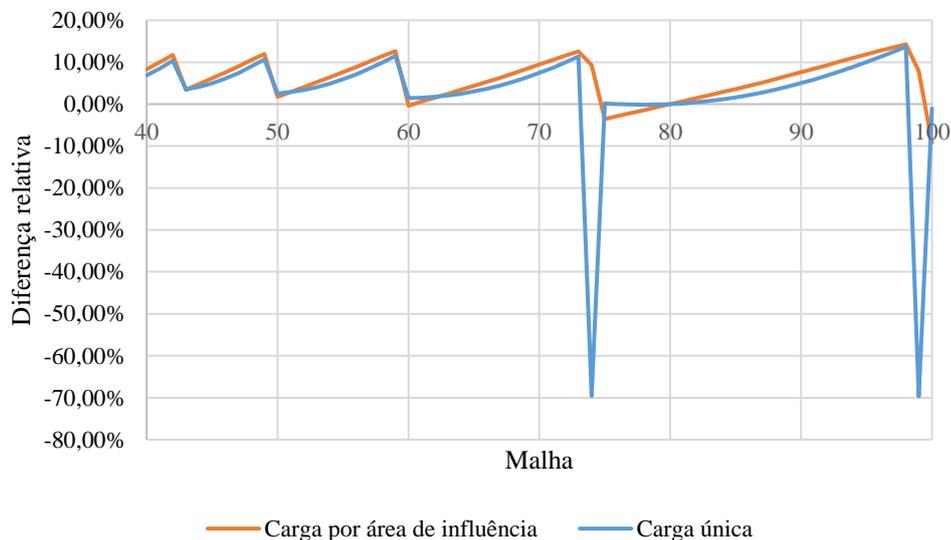


Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Calculando a carga nodal de acordo com a área de influência de cada nó, as diferenças relativas dos deslocamentos máximos da laje em relação à malha de referência passam a ser as mostradas na Figura 28. É possível notar as diferenças nas malhas 74 cm x

74 cm e 99 cm x 99 cm diminuem substancialmente. Com isso, a maior diferença o para o deslocamento ocorre na malha 98 cm x 98 cm e é de 14,28%, enquanto a menor diferença se encontra na malha 60 cm x 60 cm, sendo de 0,35%. Dessa maneira, para considerar apenas uma carga nodal como simplificação, é recomendada a escolha de uma malha que conduza a áreas de influência similares entre os nós, haja vista que tal desconformidade pode afetar significativamente nos resultados. Percebe-se, ainda, que a maioria das malhas apresentaram deslocamentos inferiores ao de referência.

Figura 28 – Diferença percentual dos deslocamentos em relação à malha de referência para uma carga nodal única e a carga calculada pela área de influência



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

A Tabela 9 mostra, para algumas malhas, a carga aplicada nos nós e o momento de inércia à flexão e à torção das barras da grelha, enquanto a Tabela 10 evidencia o momento fletor e o esforço cortante por nervura e a deflexão máxima na laje. Válido se faz lembrar que os esforços encontrados em cada malha foram multiplicados pelo fator b_f/a_1 para ser obtido seu valor por nervura.

Tabela 9 – Dados de entrada das grelhas do Exemplo I

Malha	P (kN)	I_b (cm ⁴)	J_b (cm ⁴)
80 x 80	5,03	45624,24	24578,78
100 x 100	7,85	57030,3	30723,47
90 x 90	6,36	51327,27	27651,12
70 x 70	3,85	39921,21	21506,43
60 x 60	2,83	34218,18	18434,08
50 x 50	1,96	28515,15	15361,74
40 x 40	1,26	22812,12	12289,39

Tabela 10 – Resultados do Exemplo I

Malha	$M_x = M_y$ (kNm)	$V_x = V_y$ (kN)	δ (mm)
100 x 100	15,70	11,46	6,91
80 x 80	15,48	13,70	6,32
90 x 90	15,83	14,87	5,84
70 x 70	15,81	14,48	5,73
60 x 60	15,23	13,03	6,35
50 x 50	15,05	13,35	6,21
40 x 40	14,53	14,93	5,80

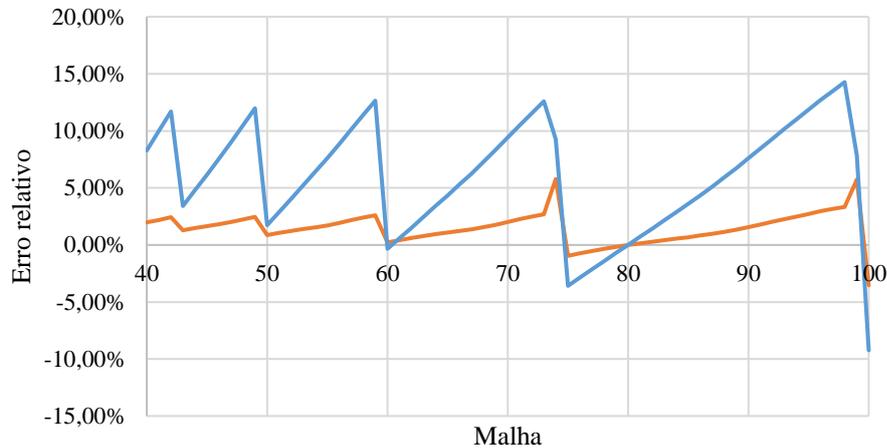
Dentre o conjunto apresentado na Tabela 10, em relação à malha de referência, a maior diferença para a flecha foi de 9,34% para mais, obtida na malha 100 cm x 100 cm. Quanto ao momento fletor, a maior variação foi de cerca de 6,14% para menos, obtida na malha 40 x 40. Já para o esforço cortante, a maior diferença foi de 16,35% para menos, verificada na malha 100 cm x 100 cm. A menor diferença do deslocamento foi de 0,47% para mais, na malha 60 x 60, do momento fletor de 1,42% para mais na malha 100 x 100 e do cortante de 2,55% para menos na malha 50 x 50.

5.1.2 Exemplo II

Neste exemplo, o mesmo problema do Exemplo I será analisado, considerando, no entanto, apenas 1% da rigidez à torção. Nesse caso, a espessura equivalente à torção, calculada a partir de 1% de J , será de 2,64 cm. As diferenças dos deslocamentos máximos da laje em

relação à malha de referência, considerando 100% e 1% da rigidez à torção, são apresentados na Figura 29.

Figura 29 – Malhas de a) 60 cm x 60 cm, b) 74 cm x 74 cm e c) 99 cm x 99 cm



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Nessa segunda aplicação, é possível notar uma diminuição da diferença relativa tanto para flecha quanto para o momento fletor. Para a flecha, a maior diferença foi 3,42%, enquanto o momento fletor foi de 2,9%, ambas na malha 80 cm x 80 cm. Já para o esforço cortante, a maior diferença ocorreu na malha 85 cm x 85 cm e foi de 32,16%. Assim como na aplicação anterior, a menor diferença foi verificada na malha 72 cm x 72 cm, sendo de 0,68% para a flecha, 0,43% para o momento fletor e 4,19% para o esforço cortante.

A Tabela 11 mostra o momento fletor e o esforço cortante por nervura e a deflexão máxima na laje. A maior e a menor diferenças para o momento fletor foram, respectivamente, de 1,47% (malha 60 x 60) e 4,64% (malha 90 x 90), enquanto para deflexão foi de 2,10% (malha 60 x 60) e 4,35% (malha 70 x 70) e para o esforço cortante foi de 12% (malha 60 x 60) e 39,92% (malha 90 x 90).

Tabela 11 – Dados de entrada das grelhas do Exemplo II

Malha	$M_x = M_y$ (kNm)	$V_x = V_y$ (kN)	δ (mm)
80 x 80	17,60	12,09	6,95
100 x 100	17,02	10,22	6,67
90 x 90	17,81	14,30	7,04
70 x 70	17,61	14,30	6,96
60 x 60	17,27	11,47	6,81
50 x 50	17,31	11,79	6,84
40 x 40	17,50	13,36	6,92

5.2 Otimização

5.2.1 Exemplo III

Para mostrar a eficácia da formulação proposta para o problema de otimização, será realizada uma otimização multiobjetivo com intuito de, simultaneamente, minimizar o custo monetário e maximizar as frequências naturais de uma laje quadrada com vãos de 8 m. Para tanto, será utilizado o algoritmo NSGA-II. Nesse modelo, foi adotado: população com 100 indivíduos; 100 gerações; probabilidade de mutação de 0,10; taxa de cruzamento de 0,80; proporção de elitismo de 0,05; fator de penalidade k de 15000. Será feita seleção por torneio binário, cruzamento de dois pontos e mutação polinomial.

A laje proposta está sujeita, além do peso próprio, a uma carga acidental de 2 kN/m² e uma sobrecarga permanente de 2 kN/m². Admite-se que a laje é simplesmente apoiada em seu contorno. As posições das barras da grelha serão condicionadas às posições das nervuras e apenas 1% da rigidez à torção das barras será considerada. Como não haverá armadura de compressão, o coeficiente de fluência, para flecha imediata calculada aos 30 dias e vida útil maior do que 70 meses, será igual a 1,32. Além disso, será considerado um TRRF de 90 minutos, o que faz com que os valores mínimos para b_w e h_f sejam, respectivamente, 12 cm e 10 cm. Para esse caso, o valor de c_l para nervura será de 4,5 cm e para mesa 1,5 cm. Para atender a esse critério, a altura útil (d) será, dessa maneira, dada por h_t menos c_l . Esse valor atende, para todos os diâmetros disponíveis para as barras, ao cobrimento mínimo para a Classe de Agressividade Ambiental I (2 cm), que foi adotada neste trabalho.

Os valores unitários dos custos dos materiais foram extraídos do Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil (SINAPI) para o Estado do Ceará, referente

ao mês de setembro 2017. A Tabela 12 mostra o custo para 1 m³ de concreto usinado de acordo com o f_{ck} , enquanto a Tabela 13 mostra o custo de 1 kg de aço CA-50 em função do diâmetro da barra utilizada.

Tabela 12 – Custo por m³ de concreto de acordo com o f_{ck} .

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
Custo (R\$/m ³)	265,47	275,77	288,01	300,31	313,69	402,00	476,77

Tabela 13 – Custo por kg de aço CA-50 de acordo com o diâmetro da barra.

Diâmetro (mm)	6,3	8	10	12,5	16	20	25
Custo (R\$/kg)	3,54	3,98	3,38	3,22	3,22	3,01	3,48

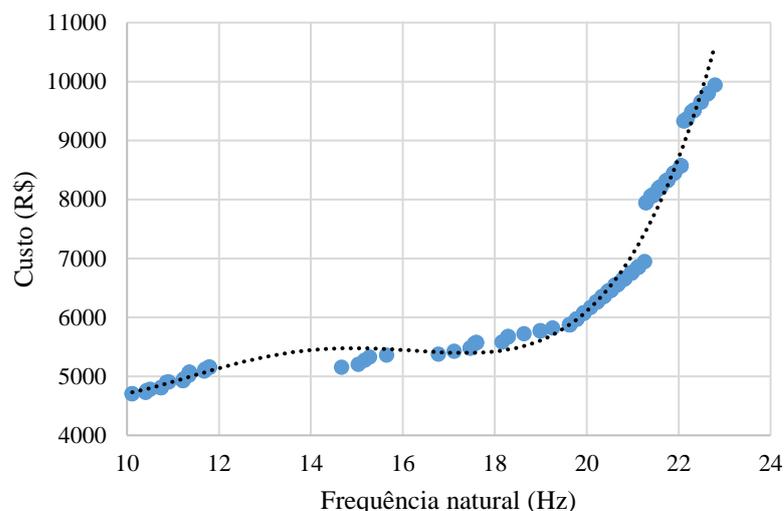
As restrições laterais, que delimitam o espaço de busca das variáveis, e o incremento usado para definir os conjuntos que contêm os valores que cada variável poderá assumir são apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 – Espaço de busca das variáveis de projeto

Variáveis	Domínio	Incremento
f_{ck} (MPa)	{20; 25; ... ; 50}	5
b_f (cm)	{65; 66; ... ; 90}	1
h_f (cm)	{10; 10,5; ... ; 15}	0,5
b_w (cm)	{12; 12,5; ... ; 25}	0,5
h (cm)	{12; 12,5; ... ; 50}	0,5
ϕ (mm)	{6,3; 8; ... ; 25}	-

A curva de Pareto para o custo e as frequências naturais é apresentada na Figura 30. Nota-se que, de fato, os objetivos são de naturezas conflitantes. Isso ocorre porque a maximização da frequência natural pode se dar por meio do aumento da rigidez, o que resulta em um maior consumo de concreto e, portanto, um custo mais elevado. A curva de Pareto apresenta um aspecto invertido pelo fato de um objetivo ser de minimização enquanto o outro é de maximização.

Figura 30 – Relação custo x frequência natural do Exemplo III



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

A NBR 6118/2014 estabelece que, para que o comportamento da estrutura seja seguramente satisfatório, sua frequência natural (f) deve se afastar o máximo possível da frequência crítica (f_{crit}). Especificamente, a mesma designa que o desempenho será satisfatório quando a frequência natural superar em 20% a frequência crítica. A análise de vibração livre pode ser feita em regime linear elástico no caso das estruturas usuais. A referida norma fornece, ainda, valores para frequência crítica de alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas que podem ser utilizados na ausência de valores experimentais, como, por exemplo, uma frequência crítica de 4 Hz para estruturas de escritórios.

Com base na Tabela 15, que apresenta os melhores resultados obtidos para o custo e para a frequência natural, é possível notar que a melhor solução para o custo leva a uma frequência natural de 10,11 Hz, que é significativamente superior ao limite estabelecido pela NBR 6118/2014 para escritórios (4,8 Hz). Dessa maneira, a solução que minimiza o custo e que atende às demais prescrições da norma possui rigidez e massa suficientes para ser pouco suscetível às vibrações induzidas pela ação de pessoas.

Não há dúvida que o projetista escolherá a solução que minimiza apenas o custo e, neste caso, o problema multiobjetivo só tem sentido se o projetista tiver interesse, por algum motivo, em uma frequência fundamental maior que 10,11 Hz. Da análise do resultado, recomenda-se executar inicialmente as otimizações individuais (ponto utópico) para se avaliar a necessidade da montagem do modelo multiobjetivo. A Tabela 15 mostra as melhores soluções isoladas (ponto utópico).

Tabela 15 – Melhor solução para o custo e para a frequência natural

Soluções extremas	f_{ck} (MPa)	b_f (cm)	h_f (cm)	b_w (cm)	h (cm)	ϕ (mm)	Custo (R\$)	Frequência (Hz)
Menor custo	20	80	10,5	12,0	29	20	4709,34	10,11
Maior frequência	50	88	12,5	15,0	50	20	9944,67	22,79

5.2.2 Exemplo IV

Com intuito de investigar a relação entre o custo monetário e a emissão de CO₂ de lajes nervuradas, será realizada uma otimização objetivando minimizar, simultaneamente, estas duas medidas. As características do problema e os parâmetros do algoritmo são os mesmos utilizados no Exemplo III.

A definição de um valor para representar a quantidade de CO₂ emitida por cada material é uma tarefa difícil, tendo em vista sua natureza variável. A emissão depende da distância da jazida à usina e desta à obra, das máquinas utilizadas na extração da matéria-prima e na produção e transporte do concreto, da matriz energética do local, entre outras. Com isso, há uma divergência significativa dos valores adotados para e_c e e_s nos estudos discutidos anteriormente. Por exemplo, para um concreto com resistência de 40 MPa, Santoro e Kripka (2016), que levaram em consideração as etapas de extração/produção e transporte até o local de utilização das matérias-primas do concreto (areia, brita e cimento), juntamente com as emissões na fabricação e transporte do concreto até a obra, obtiveram uma emissão de 167,73 kgCO₂/m³ de concreto produzido na região norte do Rio Grande do Sul. Vieira (2014), considerando que para cada 1 kg de cimento produzido é emitido 1 kg de CO₂, obteve, para mesma classe de resistência, uma emissão de 360 kgCO₂/m³, sem considerar as etapas de extração e transporte. Já García-Segura e Yepes (2016), García-Segura *et al* (2015) e Yepes, Martí e García-Segura (2015), que tomaram como base o banco de dados (BEDEC) do Instituto de Tecnologia da Construção da Catalunha (ITeC) de 2013, consideraram 338,90 kgCO₂/m³. Camp e Assadollahi (2013), Camp e Assadollahi (2015) e Yepes *et al* (2012) também tomaram como base BEDEC do ITeC, mas de 2009, que fornece um valor de 265,28 kgCO₂/m³. Paya-Zaforteza *et al* (2008), Paya-Zaforteza *et al* (2009), Camp e Huq (2013) e Kaveh e Ardalani (2016) utilizaram os dados do BEDEC de 2007, que fornecia uma emissão de 143,77 kgCO₂/m³, e não incluíram as emissões com transporte.

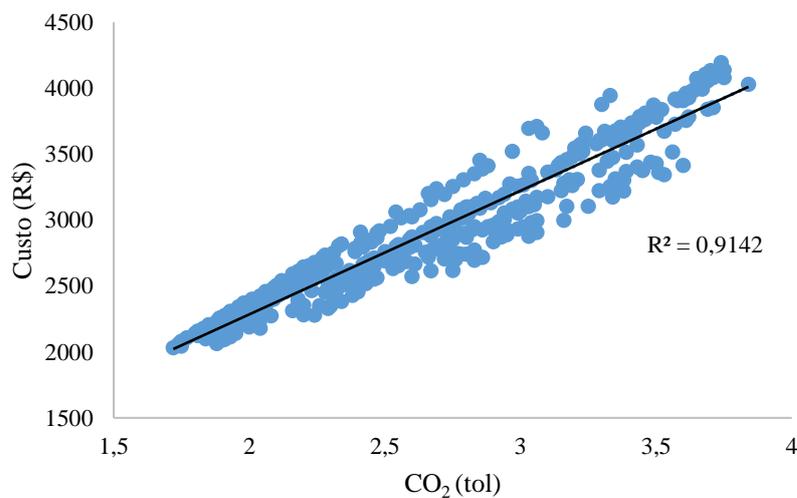
Tendo em vista a preferência dos autores pelos dados fornecidos pelo BEDEC do ITeC para estimar e_c e e_s , esses, na versão de 2013, serão utilizados neste trabalho. Os mesmos estão presentes em Yepes *et al* (2015) e os valores de e_c , sem incluir as emissões devido à etapa de transporte, já que essa depende do caso estudado, são apresentados na Tabela 16. No trabalho mencionado, no entanto, não consta o valor de e_c para um concreto com f_{ck} de 20 MPa. Para estima-lo, foi traçada uma curva de tendência a partir dos valores das outras classes de resistência e obtida a função $e_c = -0,0388 f_{ck}^2 + 8,326 f_{ck} + 63,23$ que interpola exatamente os resultados da tabela. Já para e_s , foi adotado 3,03 kg de CO₂ emitido para cada 1 kg de aço produzido.

Tabela 16 – Quantidade de CO₂ emitido para 1 m³ de concreto de acordo com o f_{ck}

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
e_c (kg/m ³)	214,23	247,13	278,09	307,11	334,19	359,33	382,53

A Figura 31 mostra a relação entre o custo e a emissão de CO₂ do problema. É possível inferir que a solução obtida para o custo mínimo é a mesma para a mínima emissão de CO₂, fato que indica que, ao minimizar o custo monetário, naturalmente estará sendo obtida uma boa solução ambiental. Além disso, traçando a reta de regressão para as soluções, percebe-se que o coeficiente de determinação R^2 possui um valor alto (0,9142), indicando que a reta se ajusta bem aos pontos e que, assim, há uma relação quase linear entre as funções.

Figura 31 – Relação custo x emissão de CO₂ do Exemplo IV



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

A Tabela 17 apresenta os resultados para as variáveis de projeto e para as funções objetivos no ponto que minimiza as duas funções simultaneamente, enquanto a Tabela 18 mostra as restrições.

Tabela 17 – Resultados para melhor solução para o custo e para o CO₂

f_{ck} (MPa)	b_f (cm)	h_f (cm)	b_w (cm)	h (cm)	ϕ (mm)	Custo (R\$)	CO ₂ (kg)
20	75	10,0	12,0	25	16	2202,20	1850,69

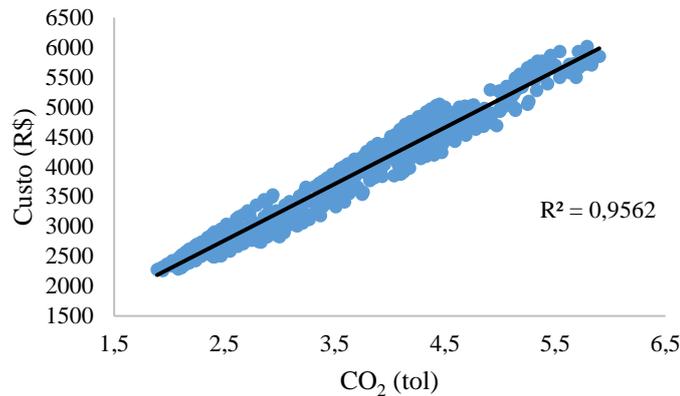
Tabela 18 – Resultados para as restrições do Exemplo IV

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
-0,06	-1,98	-0,89	-0,06	-1,98	-0,89	-0,92	-0,91	-0,62	-0,08	-0,86

O diâmetro da barra encontrado na otimização foi o menor diâmetro comercial dentro da lista que confere uma área de aço superior à área de aço requerida, tanto em x (g_1) como em y (g_4). Como a área de aço requerida (1,88 cm²) foi bem maior do que a área de aço mínima e bem menor do que a máxima, a área de aço da barra escolhida atende com folga as restrições (g_2 , g_3 , g_5 , g_6). A garantia da ductilidade também foi atendida com folga (g_7 e g_8), uma vez que a posição da linha neutra adimensional em x e y foram, respectivamente, 0,0368 e 0,0422, com modo de falha característico do domínio 2 (seção subarmada). Quanto à verificação do cisalhamento, foi possível identificar que o esforço cortante ficou próximo à resistência mínima para dispensa da armadura transversal (g_{10}). Já a resistência das bielas comprimidas da laje foi cerca de 86% maior que o esforço cortante de cálculo (g_{11}). Ressalte-se que a NBR 6118/2014 retirou essa verificação em relação à sua versão predecessora, fato que pode ser justificado por essa folga acentuada. Por fim, a flecha total foi cerca de 62% menor do que a flecha limite, o que mostrou uma folga também nessa restrição (g_9).

5.2.3 Exemplo V

O problema proposto no Exemplo IV será agora resolvido usando o conceito da espessura equivalente na análise estrutural. Para grelha, foi pré-definida uma malha de 60 cm x 60 cm, invariável no processo de otimização. A relação entre o custo e a emissão de CO₂ é apresentada na Figura 32.

Figura 32 – Relação custo x emissão de CO₂ do Exemplo V

Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

A partir da Figura 32, nota-se que a relação para custo e CO₂ foi similar à obtida no Exemplo IV. Os resultados para melhor solução podem ser vistos na Tabela 19. Considerando a grelha condicionada à posição do eixo das nervuras, os valores para o momento fletor, esforço cortante e flecha total foram, respectivamente, 17,53 kNm, 12,04 kN e 17,61 mm, enquanto considerando a espessura equivalente foi de 17,20 kNm (diferença de 1,92 %), 11,42 kN (diferença de 5,15 %) e 16,72 mm (diferença de 2,8 %). Como os esforços e os deslocamentos elásticos foram próximos, a solução foi conduzida à mesma do Exemplo IV.

Tabela 19 – Resultados para melhor solução do custo e do CO₂

f_{ck} (MPa)	b_f (cm)	h_f (cm)	b_w (cm)	h (cm)	ϕ (mm)	Custo (R\$)	CO ₂ (kg)
20	75	10,0	12,0	25	16	2202,20	1850,69

5.2.4 Exemplo VI

Tendo em vista que boas soluções ambientais podem ser obtidas a partir da minimização do custo, será realizada uma otimização com objetivo de minimizar apenas o custo de alguns pavimentos isolados quadrados formados por lajes nervuradas bidirecionais. Com isso, pretende-se estudar o efeito das mudanças nas dimensões mínimas da espessura das nervuras e da altura da mesa estabelecidas pela norma de desempenho para assegurar a segurança contra incêndio. O estudo será feito comparando as soluções obtidas para lajes nervuradas com as restrições da norma NBR 15575-1/2013 e da NBR 6118/2014 (Modelo I) com a solução ótima para uma laje nervurada com os padrões de forma atual (Modelo II), que atendem, apenas, às prescrições da NBR 6118/2014.

Com exceção do tamanho dos vãos, as lajes analisadas terão os mesmos parâmetros dos Exemplos III e IV. A Tabela 20 mostra os resultados das variáveis de projeto e da função objetivo para vários vãos do Modelo I.

Tabela 20 – Variáveis de projeto e custo para as lajes do Modelo I

Vão ($\ell_x \times \ell_y$)	b_f (cm)	h (cm)	h_f (cm)	b_w (cm)	ϕ (mm)	f_{ck} (MPa)	Custo/m ²
3 x 3	75,00	12,00	10,00	12,00	10,00	20	R\$ 42,80
4 x 4	80,00	12,00	10,00	12,00	16,00	20	R\$ 50,47
5 x 5	83,00	17,00	10,50	12,00	16,00	20	R\$ 54,33
6 x 6	75,00	25,00	10,00	12,00	16,00	20	R\$ 61,17
7 x 7	77,00	25,00	10,00	12,50	20,00	30	R\$ 72,03
8 x 8	80,00	29,00	10,50	12,00	20,00	25	R\$ 73,77

Observando as soluções ótimas para vários vãos, pode-se inferir que a largura das nervuras (b_w) e a espessura da mesa (h_f) tendem a seus limites inferiores. Além disso, em seis dos oito casos, o concreto utilizado na solução ótima foi de 20 MPa. Nota-se que as melhores respostas tendem a ocorrer quando o espaçamento entre nervuras é de, em média, 80 cm.

A única diferença na formulação do problema de otimização do Modelo I e do Modelo II está nos limites para b_w e h_f . No Modelo I, o menor valor de b_w foi de 12 cm, de h_f 10 cm e, devido a esses limites, foi adotado um b_f entre 65 cm e 90 cm. Para o Modelo II, as dimensões mínimas serão dadas apenas pelas prescrições da NBR 6118/2014, isto é, b_w terá valor mínimo de 5 cm, h_f de 4 cm e, para se dispensar os estribos, b_f poderá assumir valor máximo de 65 cm. Dessa forma, os conjuntos de valores possíveis para as variáveis de projeto tornam-se os apresentados na Tabela 21.

Tabela 21 – Espaço de busca das variáveis de projeto do Modelo II

Variáveis	Domínio	Incremento
f_{ck} (MPa)	{20; 25; ... ; 50}	5
b_f (cm)	{40; 41; ... ; 65}	1
h_f (cm)	{4; 4,5; ... ; 10}	0,5
b_w (cm)	{5; 5,5; ... ; 15}	0,5
h (cm)	{12; 12,5; ... ; 50}	0,5
ϕ (cm)	{6.3; 8.0; ... ; 25}	-

Os resultados das variáveis de projeto e da função objetivo para as lajes do Modelo II são apresentados na Tabela 22.

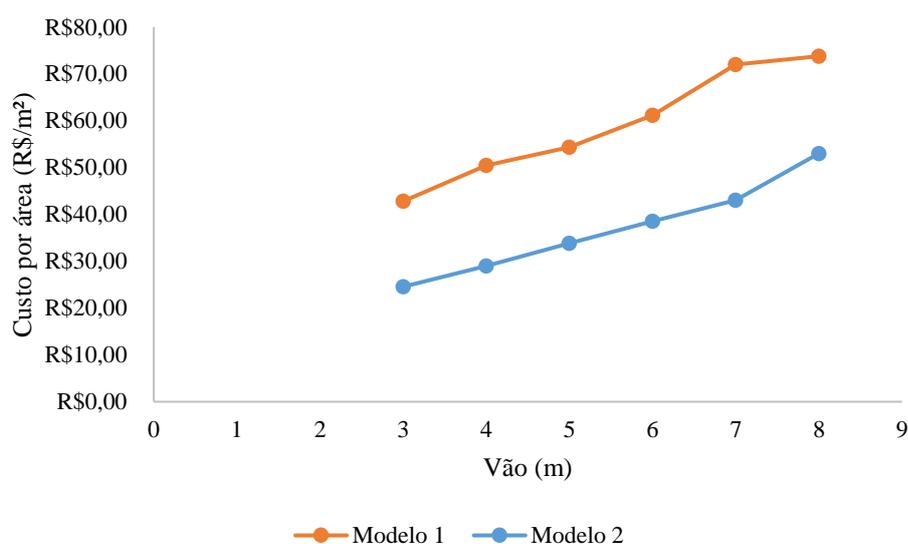
Tabela 22 – Variáveis de projeto e custo para as lajes do Modelo II

Vão ($\ell_x \times \ell_y$)	b_f (cm)	h (cm)	h_f (cm)	b_w (cm)	ϕ (mm)	f_{ck} (MPa)	Custo/m ²
3 x 3	50,00	16,00	4,00	5,00	8,00	20	R\$ 25,96
4 x 4	50,00	18,00	4,00	5,00	10,00	20	R\$ 28,98
5 x 5	50,00	28,00	4,00	5,00	10,00	20	R\$ 33,82
6 x 6	50,00	29,00	4,00	5,00	12,50	20	R\$ 38,55
7 x 7	50,00	36,00	4,00	5,00	12,50	25	R\$ 43,04
8 x 8	61,00	41,00	4,00	6,50	16,00	25	R\$ 53,01

Assim como no Modelo I, é possível notar que os valores de h_f e b_w tendem para os seus limites inferiores e que o f_{ck} de 20 MPa se repetiu com maior frequência. Quanto ao b_f , o valor foi predominantemente de 50 cm.

Comparando as soluções ótimas do Modelo I e do Modelo II, presentes na Figura 33, percebe-se que as novas imposições da norma de desempenho provocam um aumento considerável nos custos das lajes nervuradas. O aumento médio do custo é de 37,51%, com desvio padrão de 5%.

Figura 33 – Custo em função do vão para os Modelos I e II



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma abordagem para o projeto ótimo mono e multiobjetivo de painéis isolados de lajes nervuradas bidirecionais em concreto armado foi apresentada neste trabalho. A NBR 6118/2014 foi utilizada para verificar as condições mínimas para garantia da segurança e adequado desempenho em serviço das lajes. Algoritmos Genéticos, que têm mostrado excelente desempenho na otimização de estruturas, foram aplicados na otimização das lajes propostas. Na análise estrutural foi utilizada a analogia de grelha e uma extensão do conceito da espessura equivalente foi discutido para desacoplar o modelo de otimização da geração da malha da grelha. Nesse caso é feita a substituição da laje nervurada por duas lajes maciças equivalentes, uma com mesma rigidez à torção e outra com mesma rigidez à flexão, e as propriedades geométricas das barras das grelhas são calculadas a partir destas.

Para os problemas de otimização multiobjetivo, foi adotado o algoritmo NSGA II e os resultados mostraram que o mesmo é uma ferramenta robusta e eficiente para encontrar um conjunto de soluções ótimas de lajes de concreto armado com mais de um objetivo. Uma abordagem multiobjetivo se mostra extremamente válida para projetos de engenharia por oferecer alternativas de projeto para consideração simultânea de diferentes medidas relevantes, condicionando a melhor solução às preferências do projetista.

Com intuito de aplicar a metodologia proposta na otimização de grandezas com características conflitantes e obter a Fronteira de Pareto, foi realizada uma simultânea minimização do custo e maximização das frequências naturais de uma laje. Por meio desta foi possível obter a curva de Pareto e identificar que, para o caso estudado, a melhor solução para o custo conferiu uma rigidez suficiente à laje para torna-la pouco suscetível às vibrações induzidas pelas atividades humanas. Para o problema analisado, essa abordagem multiobjetivo só teria sentido se o projetista tivesse interesse em uma frequência fundamental maior que 10,11 Hz (frequência obtida quando minimizando somente o custo), que excede significativamente o limite mínimo de 4,8 Hz sugerido pela NBR 6118/2014. Como o modelo multiobjetivo é mais dispendioso do que o mono-objetivo, recomenda-se executar inicialmente as otimizações individuais para se avaliar a sua necessidade.

Por meio da minimização simultânea do custo e das emissões de CO₂, foi possível inferir que há uma relação quase linear do custo monetário e da emissão de CO₂, não sendo estas, portanto, de naturezas conflitantes. Dessa maneira, a minimização dos custos monetários se apresenta como uma boa abordagem para obtenção de um projeto ambientalmente amigável. Ressalta-se a dificuldade em mensurar a quantidade de CO₂ emitido para fabricação do concreto

e do aço. Os valores adotados para as emissões de CO₂ foram baseados nos dados do Instituto de Tecnologia da Construção Catalunha devido à inexistência de estudos para realidade brasileira. Há, dessa forma, uma necessidade do desenvolvimento de trabalhos com essa linha para refletir de forma mais adequada a região e, por conseguinte, integrar a sustentabilidade no projeto de estruturas.

A técnica das espessuras equivalentes foi testada em diversas malhas com as barras da grelha em posições não coincidentes com os eixos das nervuras. Inicialmente, foi utilizada uma única carga aplicada em todos os nós da grelha. Para malhas com barras muito próximas à borda, a diferença do deslocamento máximo em relação à malha de referência chegou a cerca de 70%. Ao calcular as cargas de acordo com a área de influência de cada nó, a diferença diminuiu significativamente. As diferenças foram menores ainda quando foi considerado apenas 1% da rigidez à torção. Quando a técnica foi aplicada na otimização, foi obtido o mesmo resultado de quando a análise foi realizada considerando as posições das barras da grelha coincidentes com os eixos das nervuras. Em muitas aplicações, as soluções apresentadas foram contra a segurança em relação à malha de referência (com barras coincidentes com as nervuras). Entretanto, é sabido que a desconsideração da continuidade da capa na analogia de grelha traz um erro a favor de segurança que pode ser suficiente para compensar essa deficiência da técnica. Um estudo mais aprofundado com modelos em elementos finitos de casca se torna necessário para validar essa hipótese.

Por meio da otimização com intuito de minimizar o custo de várias lajes quadradas, foi possível investigar a influência das alterações nas dimensões mínimas da espessura da nervura e da mesa devido à exigência da garantia da segurança contra incêndio imposta pela NBR 15575/2013. As modificações refletiram em um aumento do custo do sistema em cerca de 37,51%. Os resultados indicaram que a largura da nervura e a espessura da mesa tendem a seus limites inferiores e que o espaçamento entre eixos da nervura foram, em média, 80 cm. Houve, além disso, uma preferência das soluções em concretos com menores resistências.

Não foram encontrados na literatura problemas *benchmarks* que pudessem ser usados na validação e na comparação da metodologia proposta. Isso decorre da diversidade de métodos que podem ser aplicados na análise estrutural e das normas restritivas que são específicas à realidade de cada região. Além disso, nota-se que há um número ainda exíguo de trabalhos que tratam da otimização de lajes nervuradas bidirecionais em concreto. Na otimização multiobjetivo, por exemplo, não foi encontrado nenhum trabalho aplicado a lajes nervuradas. Salienta-se que as ferramentas de análise e otimização que foram utilizadas nesse trabalho já foram validadas nos trabalhos que as conceberam.

Muitas vezes a otimização é aplicada com intuito de melhorar a performance de um sistema, não obtendo necessariamente a melhor solução, mas sim uma alternativa mais eficiente e atrativa do que a comumente adotada. Nessas situações, é pertinente a adoção de modelos simplificados para simulação do comportamento do sistema, que serão, naturalmente, menos dispendiosos e, ainda assim, fornecerão uma boa resposta inicial para o desenvolvimento do projeto completo. Neste trabalho, embora tenham sido adotadas algumas simplificações, os problemas foram formulados com intenção de considerar recomendações práticas e exequíveis para subsidiar projetistas no desenvolvimento de projetos com abordagem sustentável.

Diante do exposto, o trabalho se encerra com as seguintes sugestões para pesquisas futuras:

- Aplicar o modelo na análise de um pavimento formado por várias lajes e considerando as vigas de apoio;
- Implementar o efeito da punção e estender a formulação para lajes lisas nervuradas;
- Utilizar outros métodos na análise estrutural;
- Estender o modelo para lajes nervuradas em concreto protendido;
- Testar outros algoritmos de otimização multiobjetivo;
- Comparar a técnica da espessura equivalente com um modelo mais representativo baseado em elementos finitos de casca.

REFERÊNCIAS

- AHMADKHANLOU, F.; ADELI, H. Optimum cost design of reinforced concrete slabs using neural dynamics model. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 18, p. 65-72, 2005.
- AL-ASSAF, A.; SAFFARINI, H. S. Optimization of slabs using object oriented programming. **Computers and Structures**, v. 82, p. 741-752, 2004.
- ALBUQUERQUE, A. T. de. **Otimização de pavimentos de edifícios com estruturas de concreto pré-moldado utilizando algoritmo genético**. 2007. 264 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.
- ALBUQUERQUE, A. T. de; EL DEBS, M. K.; MELO, A. M. C. A cost optimization-based design of precast concrete floors using genetic algorithms. **Automation in Construction**, v. 22, p. 348-356, 2012.
- AHMADI-NEDUSHAN, B.; VARAEE, H. Minimum cost design of concrete slabs using particle swarm optimization with time varying acceleration coefficients. **World Applied Sciences Journal**, v. 13, n. 12, p. 2484-2494, 2011.
- ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 3rd ed. Waltham: Elsevier, 2012.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. 3. ed. v. 4. Rio Grande: Dunas, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15200**: Projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio. Rio de Janeiro, 2012.
- _____. **NBR 14432**: Exigências de resistência ao fogo de elementos construtivos de edificações – Procedimento. Rio de Janeiro, 2001.
- _____. **NBR 15575-1**: Edificações habitacionais – Desempenho. Parte 1: Requisitos gerais. Rio de Janeiro, 2013.
- _____. **NBR 15575-2**: Edificações habitacionais – Desempenho. Parte 2: Requisitos para os sistemas estruturais. Rio de Janeiro, 2013.
- _____. **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.
- _____. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- BABAEI, M.; MOLLAYI, M. Multi-objective optimization of reinforced concrete frames using NSGA-II algorithm. **Engineering Structures and Technologies**, v. 8, n. 4, p. 157-164, 2016.
- BARBIRATO, C. B. C. **Contribuições à análise de pavimentos de edifícios em laje nervurada**. 1997. 155 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

BARBOZA, A. S. R. **Contribuição à análise estrutural de sistemas lajes- vigas de concreto armado mediante analogia de grelha**. 1992. 137 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

BOCCHI JÚNIOR, C. F. **Lajes nervuradas de concreto armado: projeto e execução**. 1995. 204 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

CAMP, C. V.; HUQ, F. CO₂ and cost optimization of reinforced concrete frames using a big bang-big crunch algorithm. **Engineering Structures**, v. 48, p. 363-372, 2013.

CAMP, V. C.; ASSADOLLAHI, A. CO₂ and cost optimization of reinforced concrete footings using a hybrid big bang-big crunch algorithm. **Struct Multidisc Optim**, v. 48, p. 411-426, 2013.

CAMP, C. V.; ASSADOLLAHI, A. CO₂ and cost optimization of reinforced concrete footings subjected to uniaxial uplift. **Journal of Building Engineering**, v. 3, p. 171-183, 2015.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. Vol. 2. São Paulo: Pini, 2013.

CARVALHO, R. C. **Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha**. 1994. 218 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.

CASTILHO, V. C. de; LIMA, M. C. V. de. Cost optimisation of lattice-reinforced joist slabs using genetic algorithms. **Structural Concrete**, v. 8, n. 1, 2007.

CASTILHO, V. C. DE; EL DEBS, M. K.; NICOLETTI, M. C. Using a modified genetic algorithm to minimize the production costs for slabs of precast prestressed concrete joists. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 20, p. 519-530, 2007.

CLÍMACO, J. C. T. S. **Estruturas de Concreto Armado: fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação**. 3. ed. Brasília: Campus, 2016.

COELHO, J. A. **Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha**. 2000. 220 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

COELLO, C. A. C. Evolutionary multi-objective optimization: a historical view of the field. **IEEE Computational Intelligence Magazine**, 2006.

COELLO, C. C.; HERNÁNDEZ, F. S.; FARRERA, F. A. Optimal design of reinforced concrete beams using genetic algorithms. **Expert Systems with Applications**, v. 12, n. 1, p. 101-108, 1997.

CORRÊA, M. R. S. **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios**. 1991. 342 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **A introduction to structural optimization**. 9th ed. Springer, 2009.

DEB, K.; PRATAP, A.; AGARWAL, S.; MEYARIVAN, T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 6, n. 2, p. 182-197, 2002.

DIAS, R. H. **Análise numérica de pavimentos de edifícios em lajes nervuradas**. 2003. 455 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

DIAS, T. F. **Otimização multiobjetivo de uma máquina pentafásica utilizando NSGA-II**. 2016. 93 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

DORNELLES, F. L. **Estudo sobre a modelagem da protensão em lajes lisas com o uso da analogia de grelha**. 2009. 128 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

DURILO, J. J.; NEBRO, A. J. jMetal: A Java framework for multi-objective optimization. **Advances in Engineering Software**, v. 42, n. 10, p. 760-771, 2011.

EL SEMELAWY, M.; NASSEF, A. O.; EL DAMATTY, A. A. Design of prestressed concrete flat slab using modern heuristic optimization techniques. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 5, p. 5758-5766, 2012.

FIGUEIREDO FILHO, J. R. de. **Sistemas estruturais de lajes sem viga: subsídios para o projeto e execução**. 1989. 272 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1989.

FIALA, C.; HÁJEK, P. Environmentally based optimization of RC slab floor structures. **Conference Central Europeon Towards Sustainable Building**, Prague, 2007.

FRANÇA, A. B. M.; FUSCO, P.B. **As lajes nervuradas na moderna construção de edifícios**. São Paulo: AFALA & ABRAPEX, 1997.

FRAGA, J. L. T.; KRIPKA, M. Projeto estrutural de vigas de concreto armado visando a minimização do impacto ambiental. **Revista de Engenharia e Tecnologia**, v. 7, p. 123-131, 2015.

GALEB, A. C.; ATIYAH, Z. F. Optimum design of reinforced concrete waffle slabs. **International Journal of Civil and Structural Engineering**, v. 1, n. 4, 2011.

GALEB, A. C.; IBRAHIM, T. E. Optimum dimension of post-tension concrete waffle slabs. **International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology**, v. 3, n. 7, 2014.

GARCÍA-SEGURA, T.; YEPES, V.; MARTÍ, J. V.; ALCALÁ, J. Optimization of concrete I-beams using a new hybrid glowworm swarm algorithm. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 11, p. 1190-1205, 2014.

GARCÍA-SEGURA, T.; YEPES, V.; ALCALÁ, J.; PÉREZ-LÓPEZ, E. Hybrid harmony search for sustainable design of post-tensioned concrete box-girder pedestrian bridges. **Engineering Structures**, v. 92, p. 112-122, 2015.

GARCÍA-SEGURA, T.; YEPES, V. Multiobjective optimization of post-tensioned concrete box-girder road bridges considering cost, CO₂ emissions, and safety. **Engineering Structures**, v. 125, p. 325-336, 2016.

GHANDI, E.; SHOKROLLAHI, N.; NASROLAHI, M. Optimum cost design of reinforced concrete slabs using cuckoo search optimization algorithm. **International Journal of Optimization in Civil Engineering**, v. 7, n. 4, p. 539-564, 2017.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning**. U.S.A., Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

HAMBLY, E. C. **Bridge deck behavior**. London: Chapman and Hall, 1976.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of structural optimization**. 3rd ed. Kluwer Academic Publishers, 1991.

HAJEK, P. Concrete Structures for Sustainability in a Changing World. **Procedia Engineering**, v. 171, p. 207-214, 2017.

HENNRICH, C. A. **Estudos sobre a modelagem de lajes planas de concreto armado**. 2003. 201 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

HIBBELER, R. C. **Mechanics of materials**. 8th ed. Pearson, 2011.

KAVEH, A.; ABADI, A. S. M. Cost optimization of a composite floor system using an improved harmony search algorithm. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 66, n. 5, p. 664-669, 2010.

KAVEH, A.; ABADI, A. S. M. Cost optimization of reinforced concrete one-way ribbed slabs using Harmony Search Algorithm. **Arabian Journal for Science and Engineering**, v. 36, n. 7, p.1179-1187, 2011.

KAVEH, A.; ARDALANI, S. Cost and CO₂ emission optimization of reinforced concrete frames using enhanced colliding bodies algorithm. **Asian Journal of Civil Engineering**, v. 17, p. 831-858, 2016.

KAVEH, A.; BEHNAM, A. F. Cost optimization of a composite floor system, one-way waffle slab, and concrete slab formwork using a charged system search algorithm. **Scientia Iranica**, v. 19, n. 3, p. 410-416, 2012.

KAVEH, A.; MASSOUDI, M. S. Cost optimization of a composite floor system using ant colony system. **Transactions of Civil Engineering**, v. 36, n. 2, p. 139-148, 2012.

KHAJEHZADEH, M.; TAHA, M. R.; ESLAMI, M. Multi-objective optimisation of retaining walls using hybrid adaptive gravitational search algorithm. **Civil Engineering and Environmental Systems**, v. 31, p. 229-242, 2013.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto**. Vol. 3. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

LIMA NETO, A. F.; FERREIRA, M. P.; OLIVEIRA, D. R. C.; MELO, G. S. S. A. Análise experimental e numérica de lajes cogumelo de concreto armado. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, Vol. 6, n. 2, 2013.

LUENBERGER, D. G; YE, Y. **Linear and nonlinear programming**. 3rd ed. Springer, 2008.

MARLER, R. T.; ARORA, J. S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, n. 6, p. 369-395, 2004.

MARTINEZ-MARTIN, F. J.; GONZÁLEZ-VIDOSA, F.; HOSPITALER, A.; YEPES, V. Multi-objective optimization design of bridge piers with hybrid heuristic algorithms. **Journal of Zhejiang University-SCIENCE A**, v. 13, p. 420-432, 2012.

MEDEIROS, G. F.; KRIPKA, M.; Optimization of reinforced concrete columns according to diferente environmental impact assessment parameters. **Engineering Structures**, v. 59, p. 185-194, 2014.

MEHTA, P. K. Greening of the concrete industry for sustainable development. **Concrete International**, v. 24, n. 7, p. 23-28, 2002.

MOHAMMED, A. H.; TAYSI, N.; NASSANI, D. E.; HUSSEIN, A. K. Finite element analysis and optimization of bonded post-tensioned concrete slabs. **Cogent Engineering**, v. 4, n. 1, 2017.

MOTA, J. P. A. S.; MELO, A. M. C. de. Projeto ótimo de lajes nervuradas: considerações de situação de incêndio. **XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Rio de Janeiro, 2015.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. 2nd ed. New Yourk: Springer, 2006.

OLIVEIRA, L. F. de. **Otimização multinível de vigas de concreto armado via algoritmos genéticos**. 2014. 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

OLIVIERI, B. P. **Otimização do projeto de pontes protendidas pré-moldadas pelo método dos algoritmos genéticos**. 2004. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2004.

PARK, H. S.; KWON, B.; SHIN, Y.; YOUSOK, K.; TAEHOON, H.; CHOI, S. W. Cost and CO₂ emission optimization of steel Reinforced concrete columns in high-rise buildings. **Energies**, v. 6, p. 5609-5624, 2013.

PARK, H. S.; LEE, H.; KIM, Y.; HONG, T.; CHOI, S. W. Evaluation of the influence of design factors on the CO₂ emissions and costs of reinforced concrete columns. **Energy and Buildings**, v. 82, p. 378-384, 2014.

PARK, J. H.; JEON, J. H.; PARK, H. S. Optimization of CO₂ Emissions and cost for composite building design with NSGA-II. **International Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering**, v. 2, n. 2, 2012.

PAYÁ-ZAFORTEZA, I.; YEPES V.; GONZÁLEZ-VIDOSA, F.; HOSPITALER, A. Multiobjective optimization of concrete frames by simulated annealing. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 23, p. 596-510, 2008.

PAYÁ-ZAFORTEZA, I.; YEPES, V.; HOSPITALER, A.; GONZÁLEZ-VIDOSA, F. CO₂-optimization of reinforced concrete frames by simulated annealing. **Engineering Structures**, v. 31, p. 1501-1508, 2009.

PRASAD, J.; CHANDER, S.; AHUJA, A. K. Optimum dimensions of waffle slab for medium size floors. **Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)**, v. 6, n. 3, p. 183-197, 2005.

PREISINGER, C. Linking structure and parametric geometry. **Architectural Design**, v. 83, n. 2, p. 110-113, 2013.

PRIOR, R. C. **Identification and preliminary assessment of existing precast concrete floor framing systems**. Dissertação (mestrado) – Lehigh University, Bethlehem, 1993.

RAFIQ, M. Y.; SOUTHCOMBE, C. Genetic algorithms in optimal design and detailing of reinforced concrete biaxial columns supported by a declarative approach for capacity checking. **Computers and Structures**, v. 69, p. 443-457, 1998.

RAJEEV, S.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Genetic algorithm–based methodology for design optimization of reinforced concrete frames. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 13, p. 63-74, 1998.

REIS, E. M. dos. **Análise de pavimentos de edifícios utilizando analogia de grelha**. 2007. 139 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

ROCHA, I. B. C. M. da. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando não-linearidade geométrica e falha progressiva**. 2013. 165 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

SAHAB, M. G.; ASHOUR, A. F.; TOROPOV, V. V. Cost optimization of reinforced concrete flat slab buildings. **Engineering Structures**, n. 27, p. 313-322, 2005.

SANTORO, J. F.; KRIPKA, M. Determinação das emissões de dióxido de carbono das matérias primas do concreto produzido na região norte do Rio Grande do Sul. **Ambiente Construído**, v. 16, n. 2, p. 35-49, 2016.

SENA, R. W. R. **Otimização de sistema e configuração de pavimentos de concreto pré-moldado via algoritmos evolucionários**. 2015. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

SILVA, E. E. da. **Otimização de estruturas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. 2001. 194 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

SIVANANDAM, S. N.; DEEPA, S. N. **Introduction to Genetic Algorithms**. Springer, 2008.

SRINIVAS, N.; DEB, K. Multiobjective function optimization using nondominated sorting genetic algorithms. **Evolutionary Computation**, v. 2, n. 3, p. 221–248, 1995.

STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. 2003. 199 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

TALAEI, A. S.; NASROLLAHI, A.; GHAYEKHLOO, M. An automated approach for optimal design of prestressed concrete slabs using PSOHS. **Ksce Journal of Civil Engineering**, v. 21, n. 3, p.782-791, 2016.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design – with Applications**. 3rd ed. Colorado Springs: Vanderplaats Research & Development, 1999.

VASCONCELOS, R. F.; ALMEIDA, S. R. M.; PRADO, A. A. Otimização de lajes alveolares pré-moldadas de concreto protendido segundo as normas brasileiras. **XXXIV Iberian-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Pirenópolis, 2013.

VÉLEZ, D. I. A. **Otimização de estruturas reticuladas utilizando algoritmos genéticos**. 2015. 115 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade Federal de Brasília, Brasília, 2015.

VIEIRA, A. A. **Redução do impacto ambiental das estruturas em concreto pré-moldado através de otimização por algoritmos genéticos**. 2014. 197 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

YEO, D.; POTRA, F. A. Sustainable design of reinforced concrete structures through CO₂ emission optimization. **Journal of Structural Engineering**, v. 141, 2013.

YEPES, V.; GONZÁLEZ-VIDOSA, F.; ALCALÁ, J.; VILLALBA, P. CO₂-optimization design of reinforced concrete retaining walls based on a vns-threshold acceptance strategy. **Journal of Computing in Civil Engineering**, v. 26, n. 3, p. 378–386, 2012.

YEPES, V.; MARTÍ, J. V.; GARCÍA-SEGURA, T. Cost and CO₂ emission optimization of precast–prestressed concrete U-beam road bridges by a hybrid glowworm swarm algorithm. **Automation in Construction**, v. 49, p. 123-134, 2015.

YOUNG, W. C.; BUDYNAS, R. G. **Roark's formulas for stress and strain**. 7th ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2002.