



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CHRISTYAN COSTA DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ SEM INVARIÂNCIA DA  
VELOCIDADE DA LUZ E O PRINCÍPIO DA INÉRCIA EM ESPAÇOS  
NÃO-EUCLIDIANOS

FORTALEZA

2016

CHRISTYAN COSTA DE OLIVEIRA

TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ SEM INVARIÂNCIA DA VELOCIDADE DA  
LUZ E O PRINCÍPIO DA INÉRCIA EM ESPAÇOS NÃO-EUCLIDIANOS

Monografia de Bacharelado apresentada à  
Coordenação da Graduação do Curso de  
Física, da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito parcial para a obtenção do  
Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alen-  
car Filho.

FORTALEZA  
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

O46t Oliveira, Christyan Costa de.  
Transformação de Lorentz sem Invariância da Velocidade da Luz e o Princípio da Inércia em Espaços Não-Euclidianos / Christyan Costa de Oliveira. – 2016.  
57 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2016.  
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Transformação de Lorentz. 2. Princípio da Inércia. 3. Espaços Não-Euclidianos. 4. Espaço-Tempo de Schwarzschild. I. Título.

CDD 530

---

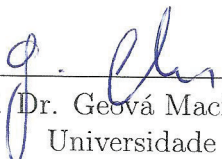
CHRISTYAN COSTA DE OLIVEIRA

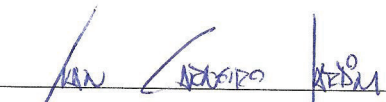
TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ SEM INVARIÂNCIA DA VELOCIDADE DA LUZ  
E O PRINCÍPIO DA INÉRCIA EM ESPAÇOS NÃO-EUCLIDIANOS

Monografia de Bacharelado apresentada à Co-  
ordenação da Graduação do Curso de Física,  
da Universidade Federal do Ceará, como re-  
quisito parcial para a obtenção do Título de  
Bacharel em Física.

Aprovada em 12/07/2016.

BANCA EXAMINADORA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Fernanda Ester Camillo Camargo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*Aos Meus Pais,  
Colegas e Amigos.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à toda minha família. Especialmente, expresso minha gratidão à meus pais - Isaurina Sousa Costa e Francisco de Assis de Oliveira - pelo pleno apoio dado durante todo o período de minha graduação. Agradeço à minha namorada Érika de Santana da Silva pela compreensão e carinho incomensuráveis durante toda esta etapa da minha vida.

Meus sinceros agradecimentos ao Prof. Ivan Carneiro Jardim pela orientação na escolha do tema e pelo minucioso acompanhamento do desenvolvimento deste trabalho, a Prof. Fernanda Estér Camillo Camargo pelas preciosas sugestões, e ao professor Geová Maciel de Alencar pelo acompanhamento das minhas atividades acadêmicas.

Expresso minha profunda gratidão aos professores e colegas do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará pelas inúmeras experiências enriquecedoras de inestimável valor para minha formação. Agradeço ao Prof. Renivaldo Sena pela atitude sempre solícita e esclarecedora com relação as minhas infindáveis dúvidas.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual a manutenção das minhas atividades acadêmicas e a subsequente produção deste trabalho seriam inviáveis.

## RESUMO

Neste trabalho apresentamos, primeiramente, uma dedução da transformação de Lorentz baseada em postulados sobre as simetrias do espaço e do tempo. Em seguida, apresentamos os conceitos geométricos básicos para descrição da noção de espaço-tempo emergida com a interpretação da transformação de Lorentz. Por fim, apresentamos uma generalização simples do Princípio da Inércia de Galileu (da Mecânica Clássica) para espaços não-Euclidianos e discutimos algumas de suas consequências para o caso específico do espaço-tempo de Schwarzschild.

**Palavras-chave:** Transformação de Lorentz. Princípio da Inércia. Espaços Não-Euclidianos. Espaço-Tempo de Schwarzschild.

## ABSTRACT

On this paper we present, at first, a deduction of the Lorentz Transformation based on assumptions about symmetries of space and time. Then we present the basic geometrical concepts to describe the notion of spacetime emerged with the interpretation of Lorentz Transformation. Finally, we present a simple generalization of the Galileo's Inertia Principle (from Classical Mechanics) to non-Euclidean spaces and discuss some of its implications for the specific case of Schwarzschild spacetime.

**Keywords:** Lorentz Transformation. Inertia Principle. Non-Euclidean spaces. Schwarzschild spacetime.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
2	TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ SEM INVARIÂNCIA DA VELOCIDADE DA LUZ . . . . .	11
2.1	Introdução . . . . .	11
2.2	Transformação de Lorentz . . . . .	12
2.3	Espaço de Minkowski . . . . .	20
2.4	Quadrivetores . . . . .	22
3	CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL .	25
3.1	Introdução . . . . .	25
3.2	Variedades Diferenciáveis . . . . .	26
3.3	Espaço Tangente . . . . .	28
3.4	Campos de Vetores; Colchete de Lie . . . . .	29
3.5	Métrica . . . . .	31
3.6	Conexão Afim; Derivada Covariante . . . . .	32
4	PRINCÍPIO DA INÉRCIA EM ESPAÇOS NÃO-EUCLIDIANOS	39
4.1	Princípio da Inércia; Geodésicas . . . . .	39
4.2	Geodésicas em Coordenadas Ortogonais . . . . .	42
4.3	Espaço-tempo de Schwarzschild . . . . .	43
5	CONCLUSÃO . . . . .	50
	APÊNDICE A - LINEARIDADE DA TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ . . . . .	51
	APÊNDICE B - PROPRIEDADES DO COLCHETE DE LIE	53
	APÊNDICE C - VERIFICAÇÃO DE QUE A CONEXÃO $\nabla$ DO TEOREMA 3.6.8 ESTÁ BEM DEFINIDA . . . . .	55
	REFERÊNCIAS . . . . .	57

## 1 INTRODUÇÃO

Uma das principais características da Teoria da Relatividade é sua descrição do universo através de princípios que postulam a existência de várias simetrias inerentes a estrutura da natureza. O objetivo deste trabalho é apresentar duas manifestações deste caráter da Teoria da Relatividade e ressaltar a importância do estudo da geometria em problemas físicos.

No capítulo 2, mostramos que a estrutura das equações que relacionam a descrição do espaço e do tempo por dois observadores quaisquer decorre da existência de uma simetria entre estes. Neste caso, tal simetria manifesta-se na forma de dois princípios fundamentais: (i) Princípio da Relatividade, o qual afirma que a forma das (equações que representam) leis físicas é a mesma para todos os observadores inerciais; (ii) A descrição de fenômenos físicos por um observador inercial particular é completamente equivalente a descrição de qualquer outro, ou seja, não existem observadores inerciais privilegiados para realização de experimentos físicos, de modo que podemos passar arbitrariamente de um referencial inercial para qualquer outro. Usualmente o princípio (ii) é substituído pelo postulado da invariância da velocidade da luz. Esta abordagem não é aqui utilizada porque pode sugerir uma certa posição de destaque para as interações eletromagnéticas em relação as outras interações fundamentais da natureza. O ponto de vista aqui apresentado busca revelar que, antes de qualquer coisa, a velocidade da luz é a mais alta velocidade pela qual um evento pode causar outro.

No capítulo 3, apresentamos alguns conceitos e métodos da geometria diferencial que nos permitem estudar as propriedades do espaço-tempo, introduzido no capítulo 2, de modo preciso. Assim, começamos apresentando o conceito de variedade diferenciável, o qual possui papel central em nossa abordagem. Em seguida, introduzimos a noção de métrica, o que permite a realização de um estudo das propriedades geométricas das variedades diferenciáveis. Descrevemos o espaço-tempo como uma variedade diferenciável e, portanto, a métrica permite o desenvolvimento de um estudo sobre a geometria do espaço-tempo. Posteriormente, introduzimos uma noção de diferenciação para campos de vetores, denominada conexão afim. Esta noção torna possível a generalização de conceitos e métodos do cálculo diferencial em espaços Euclidianos. Introduzimos ainda a noção de derivada covariante, a qual leva a uma generalização natural do conceito de paralelismo da geometria Euclidiana usual. Por fim, mostramos que a conexão e a métrica estão intimamente relacionadas (Teorema de Levi-Civita). A discussão apresentada neste capítulo segue as mesmas linhas de [5].

No capítulo 4, apresentamos uma simples generalização do Princípio da Inércia de Galileu da mecânica clássica e utilizamos os métodos do capítulo 3 para analisar algumas de suas consequências para o caso específico do espaço-tempo de Schwarzschild. A principal referência utilizada para este fim foi [8].

A exposição aqui realizada possui caráter essencialmente qualitativo e introdutório, buscando utilizar a intuição como guia e o rigor lógico como crivo tanto na introdução de conceitos como na apresentação de resultados.

## 2 TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ SEM INVARIÂNCIA DA VELOCIDADE DA LUZ

### 2.1 Introdução

A Teoria Especial da Relatividade surgiu no início do século XX, tendo como objetivo resolver um desacordo entre princípios fundamentais da mecânica clássica e as leis do eletromagnetismo. Mais especificamente, o Princípio da Relatividade de Galileu estabelece que: “*As leis da física são invariantes por transformações entre referenciais inerciais*”. Podemos enunciar este princípio de um modo equivalente, porém mais simples de utilizar para os fins que buscamos, como: “*A forma de uma equação representando uma lei física independe do referencial inercial considerado e é a mesma para todos eles*”. Deste e de outros postulados fundamentais da mecânica clássica (Leis de Newton, tempo e espaço “absolutos”<sup>1</sup>, ...) deduz-se o conjunto de equações que relaciona as coordenadas dos eventos aferidas por dois referenciais inerciais quaisquer. Este conjunto de equações é conhecido como *transformação de Galileu*. No fim do século XIX já eram conhecidas as equações representando as leis fundamentais do eletromagnetismo (Equações de Maxwell) e a inerente incompatibilidade entre estas e a transformação de Galileu.

A pista fundamental para resolução deste problema foi obtida com a interpretação dos resultados do experimento dos cientistas Michelson e Morley realizado em 1887<sup>2</sup>, que tinha por objetivo constatar a existência de uma substância que permeava todo o espaço e servia como meio de propagação para as ondas eletromagnéticas. Esta substância hipotética era denominada *Éter*. A experiência teve resultado negativo, isto é, seus resultados não permitiam constatar a existência do *Éter*, mas, a partir dos resultados deste experimento, alguns membros da comunidade científica concluíram que a velocidade de propagação da radiação eletromagnética era sempre a mesma, independentemente do referencial inercial considerado para sua medida. Assim, postulando a invariância da velocidade da luz e o princípio da Relatividade de Galileu, Einstein obteve, em 1905, o conjunto de equações relacionando as coordenadas de eventos medidas em diferentes referenciais inerciais. Este conjunto de equações é conhecido como *Transformação de Lorentz*<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup>Na mecânica clássica considera-se que o tempo é uma grandeza que “flui permanentemente e universalmente”, de modo que as medidas de intervalos de tempo de quaisquer observadores concordam. Considera-se também que a distância medida entre dois pontos do espaço é a mesma para quaisquer observadores.

<sup>2</sup>Para uma discussão sobre o experimento de Michelson-Morley veja [3].

<sup>3</sup>As equações da transformação de Lorentz já eram conhecidas antes de Einstein obtê-las em 1905. No entanto, segundo palavras do próprio Hendrik Lorentz:

Na próxima seção, mostraremos que a transformação de Lorentz decorre diretamente das propriedades de simetria do universo (homogeneidade e isotropia espacial; homogeneidade temporal; inexistência de referenciais inerciais privilegiados para a realização de experimentos de natureza física.) e da hipótese, bastante natural, que podemos passar arbitrariamente de um referencial inercial para outro. Algebricamente isto significa que a composição de um número finito de transformações de Lorentz é, ainda, uma transformação de Lorentz. Este resultado é conhecido na literatura especializada desde 1911 (V. Ignatowsky) e foi reobtido de maneira mais elementar em 2015 por A. Pelisseto e M. Testa. Estas considerações nos levarão a concluir que as características cinemáticas do universo independem das leis do eletromagnetismo, ou seja, a estrutura intrínseca do universo (sua “geometria”) resulta exclusivamente de suas propriedades de simetria.

## 2.2 Transformação de Lorentz

O Princípio da Inércia de Galileu pode ser enunciado como: “ *Uma partícula livre (da atuação de forças externas) descreve um movimento retilíneo com velocidade constante* ”. A fim de sistematizar a discussão que se segue fazemos a seguinte definição

**Definição 2.2.1.** *Um sistema de referência  $S$  é dito **inercial** quando nele é válido o Princípio da Inércia de Galileu.*

Equivalentemente, podemos dizer que um referencial inercial  $S$  é um sistema de referência no qual uma partícula livre possui aceleração nula.

Dados referenciais inerciais  $S$  e  $S'$ , nosso objetivo é relacionar as coordenadas de um evento  $(x, y, z, t)$ , em  $S$ , com suas coordenadas  $(x', y', z', t')$ , em  $S'$ . Sabemos que a transformação relacionando estes referenciais é linear<sup>4</sup>. Por questão de simplicidade e visto que não há perda de generalidade (pela isotropia e homogeneidade do espaço), vamos assumir que os eixos espaciais de  $S$  e  $S'$  são paralelos, têm a mesma orientação, e que o movimento ocorre na direção do eixo  $Ox$ . Deste modo podemos considerar a transformação das coordenadas  $(x, t)$  somente. Assim, pondo

$$x^0 = \bar{v}t, \tag{2.1}$$

---

Se tivesse de escrever agora o último capítulo, certamente teria dado um lugar de maior destaque à Teoria da Relatividade de Einstein, na qual o estudo dos fenômenos eletromagnéticos em sistemas móveis ganha uma simplicidade que eu não pude obter. A causa do não-êxito deve-se à ideia fixa de que somente a variável  $t$  pudesse representar o tempo verdadeiro; o tempo local  $t'$  seria apenas uma quantidade matemática auxiliar. Na teoria de Einstein,  $t'$  tem o mesmo status que  $t$ .

Portanto, a interpretação de Einstein foi fundamental para formulação da Teoria Especial da Relatividade.

<sup>4</sup>O apêndice A contém uma demonstração para esta afirmação.

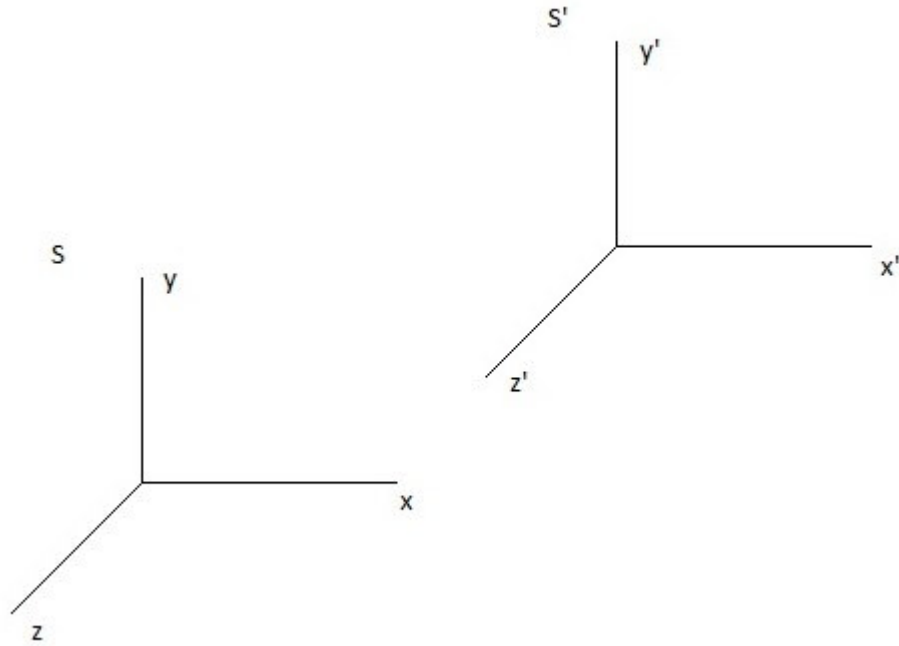


Figura 1 – Referenciais inerciais

onde  $\bar{v}$  é uma constante com dimensão de velocidade, podemos escrever as equações da transformação entre  $S$  e  $S'$  como

$$x^{0'} = Ax^0 + Bx, \quad (2.2)$$

$$x' = Cx^0 + Dx, \quad (2.3)$$

ou em forma matricial

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Pondo

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

a última expressão fica

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

temos também

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

onde  $\Delta \equiv AD - BC \neq 0$ . Portanto, a transformação inversa é

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x' \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Explicitamente, as equações da transformação inversa são

$$x^0 = \frac{1}{\Delta}(Dx^{0'} - Bx'), \quad (2.9)$$

$$x = \frac{1}{\Delta}(-Cx^{0'} + Ax'). \quad (2.10)$$

Consideremos dois eventos  $E_1, E_2$ , no mesmo ponto do eixo- $x$  no referencial  $S$ , mas separados por um intervalo de tempo  $\tau$ . No referencial  $S'$  estes eventos diferem por um intervalo de tempo  $T'$ . Decorre da inexistência de referenciais privilegiados que, se considerarmos dois eventos  $E_3, E_4$  que ocorrem no mesmo ponto do eixo- $x'$ , em  $S'$ , com uma separação temporal de  $\tau$  (em  $S'$ ), então estes dois eventos diferem por intervalo de tempo  $T = T'$ , em  $S$ . Analogamente, se um observador em  $S$  mede o comprimento  $l$  de uma haste (ao longo do eixo- $x$ ) que está em repouso com respeito a  $S'$  e tem comprimento  $l_0$  neste referencial, o mesmo resultado é obtido por um observador em  $S'$  que mede o comprimento  $l'$  de uma haste (ao longo do eixo- $x'$ ) em repouso e com comprimento  $l_0$  no referencial  $S$ , ou seja,  $l = l'$ . Sabemos que toda informação a respeito da transformação entre  $S$  e  $S'$  está contida na matriz  $\Lambda$ , vejamos o que estas considerações implicam sobre os seus elementos.

Primeiramente, da equação (2.2) temos, para os eventos  $E_1$  e  $E_2$ , que

$$T' = A\tau, \quad (2.11)$$

por outro lado, para os eventos  $E_3$  e  $E_4$ , tem-se, pela equação (2.9), que

$$T = \frac{D}{\Delta}\tau. \quad (2.12)$$

Como vimos acima, o Princípio da Relatividade de Galileu (“inexistência de referenciais

privilegiados”) implica que  $T = T'$ . Logo, das duas últimas expressões, segue que

$$A = \frac{D}{\Delta}. \quad (2.13)$$

Analogamente, se uma haste (posta ao longo do eixo- $x$ ) tem comprimento  $l_0$  em  $S'$ , seu comprimento  $l$  medido em  $S$  é tal que, pela equação (2.3),

$$l_0 = Dl. \quad (2.14)$$

Da equação (2.10) vemos que o comprimento  $l'$ , medido em  $S'$ , de uma haste idêntica em repouso com respeito a  $S$  satisfaz

$$l_0 = \frac{A}{\Delta}l'. \quad (2.15)$$

De modo similar ao caso anterior, o Princípio da Relatividade de Galileu implica que  $l = l'$ . Portanto, das equações (2.14) e (2.15) resulta que

$$D = \frac{A}{\Delta}. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.13), obtemos

$$A = \frac{A}{\Delta^2}. \quad (2.17)$$

A solução  $A = 0$  não possui significado físico, pois leva ao resultado  $x^{0'} = Bx$ . Portanto, para as transformações fisicamente aceitáveis, devemos ter  $A \neq 0$  e, conseqüentemente,

$$|\Delta| = 1. \quad (2.18)$$

Restringindo-nos as transformações *próprias*<sup>5</sup>, ficamos com

$$\Delta = 1, \quad (2.19)$$

de modo que

$$A = D, \quad (2.20)$$

e a matriz  $\Lambda$  da transformação fica

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

com, pela equação (2.19),

$$A^2 - BC = 1. \quad (2.22)$$

---

<sup>5</sup>Para um esclarecimento acerca da importância das transformações próprias em física veja [4], páginas 89 e 90.



Utilizemos agora a hipótese de podermos passar arbitrariamente, por meio de transformações do tipo dado pela equação (2.21), de um referencial inercial para outro, isto é, a composição de transformações do tipo (2.21) é uma transformação desta mesma forma.

Consideremos as transformações,

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & A_2 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

a composição é dada pelo produto,

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= \Lambda_1 \Lambda_2 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & A_2 \end{pmatrix} \\ \Lambda_3 &= \begin{pmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 A_2 \\ C_1 A_2 + A_1 C_2 & C_1 B_2 + A_1 A_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A matriz  $\Lambda_3$  tem a forma dada em (2.21) se, e somente se, os elementos de sua diagonal são iguais, ou seja,

$$B_1 C_2 = C_1 B_2. \quad (2.25)$$

A fim de que a condição (2.25) seja válida para qualquer par de transformações do tipo dado em (2.23), as matrizes de transformação admissíveis devem cumprir uma das seguintes condições:

1.  $C = 0$ ;
2.  $B = 0$ ;
3.  $B = \alpha C$ , onde  $\alpha$  é uma constante não nula.

O caso 1 não possui interesse físico.

No caso 2, temos  $B = 0$  e, pela equação (2.22),  $A = 1$ . Portanto, a matriz de transformação  $\Lambda$  fica

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

e as equações da transformação

$$\begin{cases} x^{0'} &= x^0 \\ x' &= Cx^0 + x \end{cases}. \quad (2.27)$$

Utilizando (2.1), obtemos

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = (C\bar{v})t + x \end{cases} . \quad (2.28)$$

Em (2.28) o parâmetro  $C$  é a velocidade relativa entre  $S$  e  $S'$ , medida em unidades de  $\bar{v}$ . O conjunto de equações (2.28) é conhecido como a **transformação de Galileu** entre os referenciais  $S$  e  $S'$ , e cumpre o papel de relacionar referenciais inerciais no contexto da Mecânica Clássica.

No caso 3, definimos

$$\tilde{x}^0 = \bar{c}t, \quad (2.29)$$

escolhendo  $\bar{c}$  como

$$\bar{c} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{|\alpha|}}. \quad (2.30)$$

Observemos que  $\tilde{x}^0$  se relaciona com  $x^0$  por

$$\tilde{x}^0 = \frac{\bar{c}}{\bar{v}}x^0. \quad (2.31)$$

Para obter a equação de transformação de  $\tilde{x}^0$ , multiplicamos a equação (2.2) por  $\frac{\bar{c}}{\bar{v}}$ , o que resulta em

$$\tilde{x}^{0'} = A\tilde{x}^0 + \frac{\alpha}{|\alpha|}C'x, \quad (2.32)$$

onde

$$C' = \frac{C}{\sqrt{|\alpha|}}. \quad (2.33)$$

Nas variáveis  $(\tilde{x}^0, x)$  as equações de transformação são as (2.3) e (2.32). Expressando-as em forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^{0'} \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \frac{\alpha}{|\alpha|}C' \\ C' & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ x \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

e a condição (2.22) se torna

$$A^2 - \frac{\alpha}{|\alpha|}C'^2 = 1. \quad (2.35)$$

Se  $\alpha$  é negativo, a matriz  $\Lambda = \begin{pmatrix} A & \frac{\alpha}{|\alpha|}C' \\ C' & A \end{pmatrix}$  representa uma rotação no plano  $(\tilde{x}^0, x)$ .

Este resultado não tem sentido físico, pois existem transformações  $\Lambda$  para as quais  $\Lambda^n$  é igual a matriz identidade<sup>6</sup>. Concentremo-nos, então, no caso em que  $\alpha > 0$ , ou seja,

<sup>6</sup>Por exemplo, se  $A = \cos\frac{2}{3}\pi$  e  $C' = \sin\frac{2}{3}\pi$ , temos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix},$$

consideremos as transformações da forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & C' \\ C' & A \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

onde  $A^2 - C'^2 = 1$ . Neste caso, a velocidade com que  $S'$  se move em relação a  $S$  satisfaz

$$\frac{C'}{A} = -\frac{w}{\bar{c}}. \quad (2.37)$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} A^2 - C'^2 & = 1 \\ \frac{C'}{A} & = -\frac{w}{\bar{c}} \end{cases}, \quad (2.38)$$

em termos de  $w$ , obtemos como solução

$$A = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{\bar{c}^2}}}, \quad (2.39)$$

$$C' = \frac{w/\bar{c}}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{\bar{c}^2}}}, \quad (2.40)$$

ou

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{\bar{c}^2}}}, \quad (2.41)$$

$$C' = -\frac{w/\bar{c}}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{\bar{c}^2}}}, \quad (2.42)$$

Pondo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{\bar{c}^2}}}$ , as matrizes de transformação admissíveis ficam, então, dadas por

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{w}{\bar{c}} \\ -\gamma\frac{w}{\bar{c}} & \gamma \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma\frac{w}{\bar{c}} \\ \gamma\frac{w}{\bar{c}} & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

A matriz  $\Lambda_2$  leva às equações de transformação

$$\begin{cases} x' & = -\gamma(x - wt) \\ t' & = -\gamma\left(t - \frac{w}{\bar{c}^2}x\right) \end{cases}. \quad (2.44)$$

Estas equações violam as relações entre causa e efeito. Por exemplo, consideremos dois eventos ocorrendo no mesmo ponto  $x$  de  $S$  e com uma diferença temporal  $\tau > 0$ . A  


---

e, portanto,  $\Lambda^4 = \Lambda$ . Logo,  $\Lambda^3 = I$ .

equação (2.44) para  $t'$  nos leva a concluir que

$$\Delta t' = -\gamma\tau, \quad (2.45)$$

ou seja, a ordem dos eventos é invertida para um observador em  $S'$ . Vemos, assim, que as equações (2.44) levam a incoerências na descrição física dos fenômenos. Concluimos, então, que as matrizes de transformações admissíveis entre referenciais inerciais tem a forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{w}{\bar{c}} \\ -\gamma\frac{w}{\bar{c}} & \gamma \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

e as equações da transformação associada são

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - wt) \\ t' = \gamma(t - \frac{w}{\bar{c}^2}x) \end{cases}. \quad (2.47)$$

A transformação determinada pelas equações (2.47) é denominada a **transformação de Lorentz** entre os referenciais  $S$  e  $S'$ . Notemos que a inversa da matriz (2.46) é

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{w}{\bar{c}} \\ \gamma\frac{w}{\bar{c}} & \gamma \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

e, portanto, as equações da transformação inversa de (2.47) são

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + wt') \\ t = \gamma(t' + \frac{w}{\bar{c}^2}x') \end{cases}. \quad (2.49)$$

Observemos que a expressão  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{\bar{c}^2}}}$  só está bem definida para  $|w| \neq \bar{c}$  e só é um número real se  $|w| < \bar{c}$ . Além destas razões de natureza técnica, existem motivos de coerência na descrição física para assumir que a velocidade  $\bar{c}$  é um limitante superior para as velocidades de "objetos físicos" (partículas e sinais)<sup>7</sup>.

Por argumentos de simetria pode-se concluir que as coordenadas nas direções  $Oy$  e  $Oz$  permanecem inalteradas<sup>8</sup> de modo que a transformação de Lorentz em sua forma completa fica

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - wt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{w}{\bar{c}^2}x) \end{cases}, \quad (2.50)$$

---

<sup>7</sup>Veja [1], página 54.

<sup>8</sup>Veja [1], página 44.

com inversa dada por

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + wt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{w}{c^2}x') \end{cases}. \quad (2.51)$$

Em forma matricial estas transformações podem ser escritas como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \bar{c}t' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \bar{c}t \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \bar{c}t \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \bar{c}t' \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

onde as matrizes  $\Lambda$  e  $\Lambda^{-1}$  são dadas por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\frac{w}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\frac{w}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\frac{w}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\frac{w}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

### 2.3 Espaço de Minkowski

Dado um referencial inercial  $S$  podemos atribuir coordenadas  $(x, y, z, \bar{c}t) \in \mathfrak{R}^4$  aos eventos que ocorrem no universo<sup>9</sup>. O conjunto de todos os eventos é chamado **Espaço de Minkowsky** e será denotado por  $\tilde{M}^4$ . Observe que um dado evento  $A \in \tilde{M}^4$  pode ter coordenadas  $(x_A, y_A, z_A, \bar{c}t_A)$  com respeito a um referencial inercial  $S$  e  $(x'_A, y'_A, z'_A, \bar{c}t'_A)$  com respeito a  $S'$ , sem que necessariamente ocorra  $(x_A, y_A, z_A, \bar{c}t_A) = (x'_A, y'_A, z'_A, \bar{c}t'_A)$ .

A transformação de Lorentz (2.50) possui uma característica importante que decorre diretamente de sua definição. Precisamente, dados quaisquer eventos  $A, B \in \tilde{M}^4$ , de coordenadas  $(x_A, y_A, z_A, \bar{c}t_A)$  e  $(x_B, y_B, z_B, \bar{c}t_B)$  com respeito a um referencial  $S$  fixado, um cálculo direto revela que a quantidade definida por

$$\Delta S^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2, \quad (2.55)$$

---

<sup>9</sup>Veja [1], página 41.

tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais (i.e,  $\Delta S^2 = \Delta S'^2$ ), diz-se que uma grandeza com esta propriedade é um *invariante relativístico*. A grandeza  $\Delta S^2$  é chamada o **intervalo espaço-temporal** entre os eventos  $A$  e  $B$ . Podem ocorrer três situações distintas:

(Por questão de simplicidade, e sem perda de generalidade, consideramos  $t_A < t_B$ .)

1.  $\Delta S^2 > 0$

Neste caso diz-se que  $\Delta S^2$  é um intervalo do tipo temporal (ou, simplesmente, que  $\Delta S^2$  é "tipo-tempo"). Temos  $\bar{c}^2(\Delta t)^2 > (\Delta \vec{r})^2$ , onde  $(\Delta \vec{r})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$ , e um observador em  $A$  pode comunicar um sinal com velocidade  $v = |\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}| < \bar{c}$  a um observador em  $B$ . Dizemos que os eventos  $A$  e  $B$  são causalmente conectados (ênfatizando o fato de que  $A$  pode causar  $B$ ).

2.  $\Delta S^2 = 0$

Dizemos que  $\Delta S^2$  é um intervalo do tipo luminoso (ou nulo; ou  $\Delta S^2$  é "tipo-luz"). Neste caso, um sinal com velocidade  $v = \bar{c}$  pode ser emitido em  $A$  e recebido em  $B$ , de modo que  $A$  e  $B$  são causalmente conectados.

**Observação:** Note que, como foi colocado, o fato de dois eventos serem causalmente conectados não significa que um deles causa (necessariamente) o outro, mas, somente, que um *pode* causar o outro.

3.  $\Delta S^2 < 0$

Diz-se que  $\Delta S^2$  é um intervalo do tipo espacial (ou "tipo-espaço"). Tem-se  $\bar{c}^2(\Delta t)^2 < (\Delta \vec{r})^2$  e para que  $A$  possa comunicar um sinal a  $B$ , este sinal deve possuir velocidade  $v = |\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}| > \bar{c}$ . Como  $\bar{c}$  é um limitante superior para as velocidades de objetos físicos, este sinal não é fisicamente possível dentro do contexto da Teoria da Relatividade (Especial e Geral). Portanto, neste caso, os eventos  $A$  e  $B$  não estão causalmente conectados.

Vemos assim que o parâmetro  $\bar{c}$  da transformação de Lorentz (2.50) determina as relações de causa e efeito entre os eventos do universo. De maneira um tanto informal podemos dizer que " $\bar{c}$  é a velocidade da causalidade", significando que  $\bar{c}$  é a maior velocidade pela qual um evento pode causar outro.

Notemos o seguinte fato que decorre imediatamente da invariância de  $\Delta S^2$ : Se uma partícula (ou um sinal) se move com velocidade constante de magnitude igual a  $\bar{c}$ ,  $|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}| = \bar{c}$ , num dado referencial  $S$ , então sua velocidade em qualquer outro referencial  $S'$

tem magnitude  $\left|\frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t'}\right| = \bar{c}$ . De fato, como  $\Delta S'^2 = \Delta S^2$ , temos

$$(\Delta t')^2 \left[ \bar{c}^2 - \left( \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t'} \right)^2 \right] = (\Delta t)^2 \left[ \bar{c}^2 - \left( \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right)^2 \right] = 0,$$

logo

$$\left| \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t'} \right| = \bar{c}.$$

Concluimos então que a velocidade  $\bar{c}$  é um invariante relativístico. Vemos, ainda, que  $\bar{c}$  é a única velocidade com esta propriedade. Como foi mencionado anteriormente, na experiência de Michelson-Morley observou-se que a magnitude da velocidade de propagação da radiação eletromagnética  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$  independe do referencial inercial em que é efetuada sua medida. Estes fatos nos levam a concluir que o valor do parâmetro  $\bar{c}$  da transformação de Lorentz (2.50) é igual a velocidade de propagação da luz  $c$ ,

$$\bar{c} = c. \quad (2.56)$$

## 2.4 Quadrivetores

Fixando um sistema de coordenadas no espaço tridimensional  $\mathfrak{R}^3$ , o estudo da geometria espacial pode ser visto como a investigação das propriedades que são invariantes sob transformações que preservam as distâncias entre pontos (translações e rotações). Um vetor em  $\mathfrak{R}^3$  pode ser caracterizados a partir do seu comportamento mediante rotações do sistema de coordenadas. O protótipo dos vetores em  $\mathfrak{R}^3$  é o vetor deslocamento  $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , sob translações suas componentes permanecem inalteradas e sob rotações transformam-se como

$$\begin{cases} \Delta x' &= R_1^1 \Delta x + R_2^1 \Delta y + R_3^1 \Delta z \\ \Delta y' &= R_1^2 \Delta x + R_2^2 \Delta y + R_3^2 \Delta z, \\ \Delta z' &= R_1^3 \Delta x + R_2^3 \Delta y + R_3^3 \Delta z \end{cases} \quad (2.57)$$

onde  $(R_j^i)_{3 \times 3}$  é uma matriz (ortogonal) que depende do ângulo e do eixo em torno do qual é efetuada a rotação do sistema de coordenadas. Assim, definimos que um conjunto  $(v^1, v^2, v^3)$  representa um vetor se suas componentes permanecem inalteradas sob translações e transformam-se como

$$v^{i'} = \sum_{j=1}^3 R_j^i v^j, \quad (2.58)$$

sob rotações do sistema de coordenadas.<sup>10</sup>

O protótipo dos quadrivetores é o quadrivetor deslocamento  $\Delta\mathbf{R} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta(ct))$  e, de modo análogo ao caso euclidiano, um conjunto  $(A^1, A^2, A^3, A^4)$  representa um quadrivetor  $\mathbf{A}$  se obedece a mesma regra de transformação que  $\Delta\mathbf{R}$ . Os sistemas de coordenadas admissíveis são os referenciais inerciais e as transformações relevantes são composições de : translações; rotações em torno da origem espacial; transformações de Lorentz. Portanto, sob uma transformação de Lorentz as componentes do quadrivetor  $\mathbf{A}$  transformam-se como

$$A^{\mu'} = \sum_{\nu=1}^4 \Lambda_{\nu}^{\mu'} A^{\nu}, \quad (2.59)$$

onde  $(\Lambda_{\nu}^{\mu})_{4 \times 4}$  é dada pela (2.54) (i.e,  $(\Lambda_{\nu}^{\mu})_{4 \times 4} = \Lambda$ ), com o índice superior  $\mu$  denotando a linha e o inferior  $\nu$  a coluna correspondente ao elemento  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  da matriz  $\Lambda$ .

Dado um quadrivetor  $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3, A^4)$  definimos

$$\mathbf{A}^2 := (A^4)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2, \quad (2.60)$$

a invariância de  $\mathbf{A}^2$  decorre da invariância de

$$(\Delta\mathbf{R})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (2.61)$$

A mesma classificação utilizada para intervalos de espaço-tempo (2.55) é utilizada para quadrivetores, ou seja, quando  $\mathbf{A}^2 > 0$  dizemos que  $\mathbf{A}$  é um quadrivetor do tipo temporal (ou “tipo-tempo”), se  $\mathbf{A}^2 = 0$  diz-se que  $\mathbf{A}$  é do tipo luminoso (ou nulo) e se  $\mathbf{A}^2 < 0$  diz-se que  $\mathbf{A}$  é do tipo espacial (ou, “tipo-espaço”). A magnitude de  $\mathbf{A}$  é definida como

$$|\mathbf{A}| := |\mathbf{A}^2|^{1/2} \geq 0. \quad (2.62)$$

A partir da invariância de  $|\mathbf{A}|$ ,  $|\mathbf{B}|$  e  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$  conclui-se que o produto escalar

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = A^4 B^4 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3, \quad (2.63)$$

é também um invariante relativístico.

O intervalo de *tempo próprio*  $\Delta\tau$ , definido por

$$(\Delta\tau)^2 := \frac{(\Delta S)^2}{c^2} = (\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2], \quad (2.64)$$

é também um invariante relativístico (i.e,  $\Delta\tau$  é um escalar!).

A evolução de uma partícula no espaço-tempo de Minkowski é descrita por

---

<sup>10</sup>As componentes dos vetores e da matriz  $(R_j^i)_{3 \times 3}$  estão sendo tomadas com respeito a base canônica  $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$  de  $\mathfrak{R}^3$ .



uma curva  $\mathbf{R} : I \rightarrow \tilde{M}^4$ , onde  $I \subset \mathfrak{R}$  é um intervalo, com  $\tau \in I$ , esta curva é chamada de **linha de mundo** da partícula. A linha de mundo tem um papel análogo ao da trajetória  $\vec{r}(t)$  de uma partícula na mecânica clássica, seguindo esta analogia temos

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta\tau} = \left( \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{d(ct)}{d\tau} \right), \quad (2.65)$$

o quadrivetor  $\mathbf{U}$  é chamado de *quadrivelocidade* da partícula. De (2.64) segue que

$$\frac{dt}{d\tau} = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \gamma(u), \quad (2.66)$$

onde  $u$  é o módulo do vetor velocidade usual,  $u = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2}$ . Utilizando a regra da cadeia podemos escrever

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \gamma(u) \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d(ct)}{dt} \right) = \gamma(u)(\vec{u}, c), \quad (2.67)$$

ou seja,

$$\mathbf{U} = \gamma(u)(\vec{u}, c). \quad (2.68)$$

Calculando  $\mathbf{U}^2$  no referencial de repouso (pois a escolha do referencial é arbitrária, visto que  $\mathbf{U}^2$  é um invariante relativístico), obtemos

$$\mathbf{U}^2 = c^2 > 0. \quad (2.69)$$

Logo a quadrivelocidade de uma partícula  $\mathbf{U}$  é um quadrivetor do tipo temporal. Se  $\mathbf{U}$  é a quadrivelocidade de um sinal com velocidade  $c$ , então

$$\mathbf{U}^2 = 0. \quad (2.70)$$

De modo análogo, definimos a *quadriaceleração*  $\mathbf{A}$  de uma partícula

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{d^2\mathbf{R}}{d\tau^2}, \quad (2.71)$$

sua relação com o vetor aceleração  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  é obtida utilizando-se, novamente, a regra da cadeia

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \gamma(u) \frac{d}{dt} [\gamma(u)(\vec{u}, c)] = \gamma(\dot{\gamma}\vec{u} + \gamma\vec{a}, c\dot{\gamma}), \quad (2.72)$$

onde  $\gamma = \gamma(u)$  e  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ .

### 3 CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

#### 3.1 Introdução

A intuição que temos do espaço-tempo a partir da relatividade especial é a de um conjunto quadridimensional no qual podemos aplicar os métodos do Cálculo Diferencial. Analogamente, a noção intuitiva que temos de superfície é a de um conjunto que pode ser mapeado por dois parâmetros. Entretanto, no estudo clássico da geometria das superfícies a “caracterização” (mais precisamente, a definição) destas envolve de maneira crucial o ambiente em que estão inseridas, a saber, o espaço euclidiano  $\mathfrak{R}^3$ . A fim de realizar um estudo das propriedades gerais das superfícies faz-se necessário um conceito (uma definição) que seja independente do ambiente em que a superfície está inserida. Tal conceito tem a vantagem de poder ser estendido para um estudo em dimensões mais altas, ou seja, para a investigação das propriedades de objetos com dimensão arbitrária. Com base nestas considerações esperamos que haja alguma semelhança entre o estudo das propriedades geométricas do espaço-tempo e a geometria das “superfícies quadridimensionais”.

Devemos observar, ainda, que apesar de toda superfície ser localmente isomorfa a um plano, pode ocorrer que, no que diz respeito a geometria, ela seja bastante diferente de um plano. A fim de elucidar esta observação consideremos a seguinte situação hipotética: Uma equipe de profissionais investigadores da estrutura da superfície terrestre (geógrafos, geólogos, topógrafos, etc) verifica que em cada ponto do globo pode-se mapear uma vizinhança com um sistema de coordenadas cartesianas planares  $(x, y)$ , ou seja, na vizinhança de cada ponto a superfície da terra parece ser plana. Em suma, podemos realizar medidas na superfície terrestre como se estivéssemos num plano. No entanto, se a partir destas verificações os investigadores concluírem que a superfície da terra como um todo é plana, estarão cometendo um grave erro. Para obter uma descrição mais adequada, os investigadores podem notar que a superfície terrestre está contida no espaço tridimensional e, portanto, o estudo das superfícies imersas em  $\mathfrak{R}^3$  fornece os conceitos necessários a tal descrição. No caso da Teoria Geral da Relatividade, apesar de existirem outras teorias e modelos nos quais postula-se que o espaço-tempo está contido num ambiente de dimensão superior, *a priori* não há razão suficiente para assumir que o espaço-tempo esteja imerso em um espaço Euclidiano de dimensão mais alta. Portanto, não devemos esperar que sua estrutura geométrica global seja idêntica a do espaço de Minkowski.

O conceito de variedade diferenciável, que apresentamos a seguir, cumpre os

requisitos necessários tanto à generalização da geometria das superfícies quanto a descrição do espaço-tempo na Teoria Geral da Relatividade.

### 3.2 Variedades Diferenciáveis

**Definição 3.2.1.** Uma *variedade diferenciável* de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações injetivas  $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de conjuntos abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que:

1.  $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ ;
2. Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $x_\alpha^{-1}(W)$  e  $x_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \rightarrow x_\beta^{-1}(W)$ ,  $x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\beta^{-1}(W) \rightarrow x_\alpha^{-1}(W)$  são diferenciáveis\*;
3. A família  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  é maximal relativamente as condições 1 e 2.

\*Observação: A menos que façamos menção explícita em contrário, diferenciável significará de classe  $C^\infty$ .

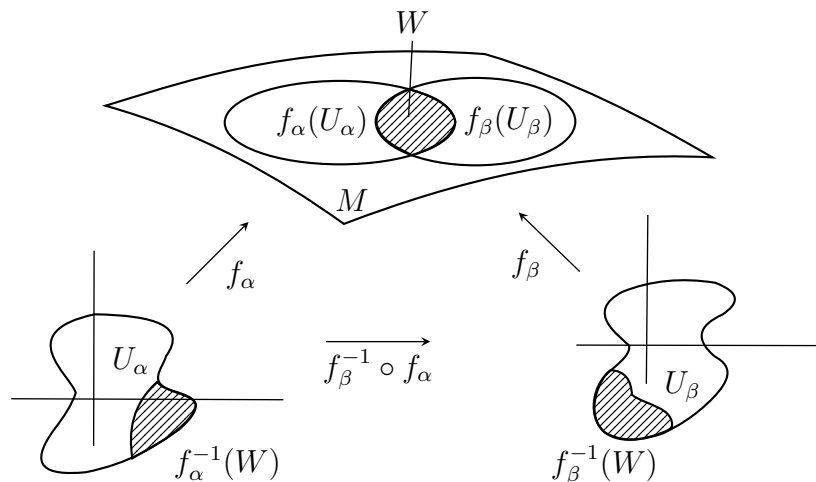


Figura 2 – Ilustração do conceito de *Variedade Diferenciável*. Aqui a variedade é denotada por  $M$  e os sistemas de coordenadas por  $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ .

A aplicação  $x_\alpha$ , com  $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ , é chamada um *sistema de coordenadas* (ou *carta*, ou *parametrização*) de  $M$  em  $p$ ;  $x_\alpha(U_\alpha)$  é chamada uma *vizinhança coordenada* em  $p$ ; Uma família  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  cumprindo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em  $M$ .

Dada uma estrutura diferenciável em  $M$ , é sempre possível completá-la de modo a obter uma família  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  maximal (veja [7], páginas 2 e 3).

Uma estrutura diferenciável em um conjunto  $M$  induz naturalmente uma topologia. Definimos uma topologia  $\tau$  pondo:  $A \subset M$  é um *aberto* de  $M$  se  $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$

é um aberto de  $\mathfrak{R}^n$ , para todo  $\alpha$ . Com efeito, primeiramente notamos que  $\phi$  é aberto. Temos, ainda, que a união  $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  de abertos  $A_\lambda$ , onde  $L$  é um conjunto de índices, é um conjunto aberto, pois

$$x_\alpha^{-1}\left(\left(\bigcup_{\lambda} A_\lambda\right) \cap x_\alpha(U_\alpha)\right) = x_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} (A_\lambda \cap x_\alpha(U_\alpha))\right) = \bigcup_{\lambda} x_\alpha^{-1}(A_\lambda \cap x_\alpha(U_\alpha)),$$

como, por hipótese,  $x_\alpha^{-1}(A_\lambda \cap x_\alpha(U_\alpha)) \in \mathfrak{R}^n$  é aberto, para todo  $\alpha$ , segue-se que  $\bigcup_{\lambda} x_\alpha^{-1}(A_\lambda \cap x_\alpha(U_\alpha))$  é um aberto de  $\mathfrak{R}^n$ , logo  $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  é um aberto de  $M$ . Donde, como  $x_\alpha(U_\alpha)$  é aberto  $\forall \alpha$ , segue que  $M = \bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha)$  é aberto. Vejamos, agora, que se  $A_1, A_2 \in M$  são abertos então  $A_1 \cap A_2$  é aberto. De fato,

$$\begin{aligned} x_\alpha^{-1}((A_1 \cap A_2) \cap x_\alpha(U_\alpha)) &= x_\alpha^{-1}((A_1 \cap x_\alpha(U_\alpha)) \cup (A_2 \cap x_\alpha(U_\alpha))) = \\ &= x_\alpha^{-1}(A_1 \cap x_\alpha(U_\alpha)) \cup x_\alpha^{-1}(A_2 \cap x_\alpha(U_\alpha)) = x_\alpha^{-1}(A_1 \cap x_\alpha(U_\alpha)) \cup x_\alpha^{-1}(A_2 \cap x_\alpha(U_\alpha)), \end{aligned}$$

logo  $x_\alpha^{-1}((A_1 \cap A_2) \cap x_\alpha(U_\alpha))$  é aberto (pois é a união dos abertos  $x_\alpha^{-1}(A_1 \cap x_\alpha(U_\alpha))$  e  $x_\alpha^{-1}(A_2 \cap x_\alpha(U_\alpha))$ ), para todo  $\alpha$ . Portanto,  $A_1 \cap A_2$  é aberto. Aplicando este resultado um número  $n$  de vezes conclui-se que  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ , onde  $A_i \subset M$  é aberto  $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ , é um aberto de  $M$ . Assim, vemos que  $\tau$  é uma topologia de  $M$ .

A topologia natural de uma variedade  $M$  (induzida pela estrutura diferenciável) pode ser bastante estranha. A fim de que o conceito de variedade forneça o substrato necessário à abordagem a ser desenvolvida, devemos impor algumas restrições sobre a topologia de  $M$ . Mais especificamente, precisamos que a topologia de  $M$  cumpra as seguintes condições:

- (a) (Hausdorff) Dados  $p, q \in M$ , com  $p \neq q$ , existem abertos  $V, W \subset M$  tais que  $p \in V$ ,  $q \in W$  e  $V \cap W = \phi$ ;
- (b) (Base enumerável)  $M$  pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas (i.e,  $\exists L \subset \mathfrak{N}$  tal que  $\bigcup_{j \in L} A_j \supset M$ , onde  $\mathfrak{N}$  denota o conjunto dos números naturais).

Dito isto, assumiremos que toda variedade diferenciável considerada daqui em diante cumpre (a) e (b) <sup>1</sup>.

Agora vamos estender a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades.

**Notação:** Quando indicarmos uma variedade por  $M^n$  o índice superior  $n$  indicará a dimensão de  $M$ .

<sup>1</sup>Para uma justificativa mais específica veja [9], APPENDICE A, ou [5], páginas 29 e 30.

**Definição 3.2.2.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\psi : M_1^n \rightarrow M_2^m$  é **diferenciável** em  $p \in M_1^n$  se para todo sistema de coordenadas  $y : V \subset \mathfrak{R}^m \rightarrow M_2^m$  em  $\psi(p)$  existe uma parametrização  $x : U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow M_1^n$  em  $p$  tal que  $\psi(x(U)) \subset y(V)$  e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \psi \circ x : U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$$

*é diferenciável em  $x^{-1}(p)$ ,  $\psi$  é diferenciável num aberto de  $A \subset M_1^n$  se é diferenciável em cada ponto de  $A$ .*

### 3.3 Espaço Tangente

A noção de plano tangente desempenha um papel fundamental no estudo da geometria das superfícies em  $\mathfrak{R}^3$ , o conceito chave envolvido é o de *vetor tangente*.

**Definição 3.3.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $D = \{f : M \rightarrow \mathfrak{R}; f \text{ é diferenciável em } p\}$  o conjunto das funções reais diferenciáveis em  $p \in M$ . Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathfrak{R} \rightarrow M$  é chamada uma **curva** em  $M$ . Suponha que  $\alpha(0) = p$ , a função  $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathfrak{R}$  dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0}, \quad (3.1)$$

*é chamada o **vetor tangente** à curva  $\alpha$  em  $t = 0$ . Um vetor tangente à variedade  $M$  no ponto  $p$  é o vetor tangente, em  $t = 0$ , de alguma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , com  $\alpha(0) = p$ .*

Indicaremos por  $T_p M$  o conjunto dos vetores tangentes à variedade  $M$  em  $p$ .

Escolhendo um sistema de coordenadas  $x : U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow M$  em  $p = x(0)$ , podemos expressar a função  $f \in D$  e a curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ,  $\alpha(0) = p$ , em coordenadas como

$$f \circ x(q) = f(x^1, \dots, x^n), \quad q = (x^1, \dots, x^n) \in \mathfrak{R}^n,$$

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

e restringindo  $f$  a curva  $\alpha$ , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^n(t)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^{-1}(p)) \frac{dx^i}{dt}(0) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n (x^i)'(0) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_0 \right) f. \end{aligned}$$

Logo, na parametrização  $\mathbf{x}$ , temos

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n (x^i)'(0) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_0. \quad (3.2)$$

Observemos que  $\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_0$  é o vetor tangente à *curva coordenada*  $\beta^i(t) = \mathbf{x}(0, \dots, t, \dots, 0)$ ,  $\beta(0) = p$ , pois

$$\begin{aligned} \beta'(0)f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \beta) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}f(0, \dots, t, \dots, 0) \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}(0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_0 f. \end{aligned}$$

Podemos definir operações de adição e produto por escalar em  $T_pM$  a partir das operações usuais de funções  $((\alpha'(0) + \gamma'(0))f = \alpha'(0)f + \gamma'(0)f; (c\alpha'(0))f = c(\alpha'(0)f), c \in \mathfrak{R})$ , de modo que  $T_pM$  torna-se um espaço vetorial. Pode-se mostrar que o conjunto  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right)_0 \right\}$  é linearmente independente e, pela equação (3.2), vemos que  $\text{Span} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right)_0 \right\} = T_pM$ . O espaço vetorial  $T_pM$  é chamado o **espaço tangente** a  $M$  em  $p$ .

### 3.4 Campos de Vetores; Colchete de Lie

**Definição 3.4.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um **campo de vetores (tangentes)**  $V$  em  $M$  é uma correspondência  $p \rightarrow V(p)$  que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor tangente  $V(p) \in T_pM$ .*

Considerando um sistema de coordenadas  $\mathbf{x} : U \in \mathfrak{R}^n \rightarrow M$  em  $p$ , podemos escrever

$$V(p) = \sum_i v^i(q) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_q, \quad q = \mathbf{x}^{-1}(p), \quad (3.3)$$

onde cada  $v^i : U \rightarrow \mathfrak{R}$  é uma função real e  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right\}$  é a base de  $T_pM$  associada ao sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$ . Dizemos que  $V$  é **diferenciável** se  $v^i : U \rightarrow \mathfrak{R}$  é diferenciável,  $\forall i = 1, \dots, n$ , seja qual for a parametrização  $\mathbf{x}$ .

A partir da equação (3.3) podemos interpretar  $V$  como uma aplicação  $V : D \rightarrow \mathfrak{S}$  do conjunto  $D$  das funções reais diferenciáveis em  $M$  no conjunto  $\mathfrak{S}$  das funções definidas em  $M$ . Para isto, pomos, para cada  $f \in D$ ,

$$V(p)f = \sum_i v^i(q) \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) \quad , \quad q = \mathbf{x}^{-1}(p). \quad (3.4)$$

Observemos que à direita do sinal de igualdade na equação (3.4)  $f$  indica (por um abuso de notação) a expressão de  $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$  no sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$ . Vemos também que

a função no lado direito da igualdade, definida em  $U \in \mathfrak{R}^n$ , é diferenciável se, e somente se,  $v^i : U \rightarrow \mathfrak{R}$  é diferenciável, para cada  $i = 1, \dots, n$ . A menos de um difeomorfismo, podemos pensar que o lado direito está definido em  $x(U) \subset M$ . Daí, vemos que a diferenciabilidade de  $V$  equivale ao fato de ser  $V(p)f \in D, \forall f \in D$ . Mais explicitamente, o campo  $V$  é diferenciável se, e somente se,  $V$  é um operador (linear)  $V : D \rightarrow D$ .

Esta interpretação permite considerar iteradas  $V(Wf), W(Vf)$  de campos diferenciáveis  $V, W$ . Em geral tais iteradas não resultam em campos diferenciáveis por envolverem derivadas de ordem superior a primeira. No entanto, o seguinte resultado mostra um caso de especial interesse.

**Proposição 3.4.1.** *Sejam  $V, W$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ . Então existe um único campo diferenciável  $[V, W]$  em  $M$  tal que  $[V, W]f = (VW - WV)f$ , para toda função  $f \in D$ .*

*Demonstração.* Suponhamos primeiramente que  $[V, W]$  existe, e mostremos que ele é único. Consideremos um ponto  $p \in M$  e um sistema de coordenadas  $x : U \rightarrow M$  em torno de  $p$ . Podemos expressar os campos  $V$  e  $W$  na base coordenada  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (p) \right\}$  como

$$V = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad W = \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (3.5)$$

Portanto, para toda  $f \in D$  temos

$$VWf = V(Wf) = V \left( \sum_j w^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j} \left( v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + v^i w^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right), \quad (3.6)$$

e

$$WVf = W(Vf) = W \left( \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \sum_{i,j} \left( w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + w^j v^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right). \quad (3.7)$$

Trocando os índices da soma em (3.7) e subtraindo (3.7) de (3.6) obtemos

$$[V, W]f = (VW - WV)f = \sum_{i,j} \left( v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad (3.8)$$

ou seja,

$$[V, W] = \sum_j \left\{ \sum_i \left( v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (3.9)$$

o que mostra que  $[V, W]$  é único na vizinhança  $x(U)$ , e como  $p \in M$  é um ponto arbitrário, segue-se que  $[V, W]$  é único em toda variedade  $M$ .

Para mostrar a existência, definimos  $[V, W]_\alpha$  em cada vizinhança coordenada de uma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  de  $M$  por (3.9). Da unicidade, segue-se que

$[V, W]_\alpha = [V, W]_\beta$  sempre que  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ , de modo que  $[V, W]$  fica definido em toda a variedade  $M$ . Além disso, pela expressão (3.9), a diferenciabilidade dos campos  $V$  e  $W$  garante que  $[V, W]$  é diferenciável.  $\square$

O campo  $[V, W]$  definido na proposição 3.4.1 é chamado de **colchete de Lie**, ou **comutador**, dos campos  $V$  e  $W$ . O colchete de Lie possui as seguintes propriedades:

- (i)  $[V, W] = -[W, V]$  (anticomutatividade);
- (ii)  $[aV + bW, Z] = a[V, Z] + b[W, Z]$  (linearidade);
- (iii)  $[[V, W], Z] + [[Z, V], W] + [[W, Z], V] = 0$  (identidade de Jacobi);
- (iv)  $[fV, gW] = fg[V, W] + fV(g)W - gW(f)V$ .

Uma demonstração para estas propriedades pode ser encontrada no Apêndice B.

Outros exemplos de estruturas algébricas presentes em física que possuem estas três primeiras propriedades são: o parêntese de Poisson (Mecânica Analítica) e o comutador de operadores quânticos.

### 3.5 Métrica

No estudo da Relatividade Especial feito no capítulo anterior vimos que o produto escalar de quadri-vetores  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \tilde{M}$ , onde  $\tilde{M}$  denota o espaço de Minkowski, tem vital importância na formulação da teoria. A este produto escalar associamos uma aplicação  $I : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  dada por  $I(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}$ , de modo que o tipo do quadri-vetor  $\mathbf{A}$  é determinado pelo sinal de  $I(\mathbf{A})$  ( $I(\mathbf{A}) > 0 \Rightarrow \mathbf{A}$  tipo-tempo;  $I(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}$  tipo-luz;  $I(\mathbf{A}) < 0 \Rightarrow \mathbf{A}$  tipo-espaço.). No caso da geometria de superfícies, podemos estudar suas propriedades geométricas (distância, ângulo,...) de um ponto de vista intrínseco utilizando somente um produto escalar definido no plano tangente à superfície, em cada ponto desta (veja: [6], capítulo 2, seção 2.5).

O conceito definido a seguir generaliza os casos acima discutidos.

**Definição 3.5.1.** *Uma **métrica** em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  uma forma bilinear simétrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $x : U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas em  $p$ , com  $x(x^1, \dots, x^n) = q \in x(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x^i}(q) = dx_p(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(q), \frac{\partial}{\partial x^j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$  é uma função diferenciável em  $U$ .*

Caso  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  seja positiva definida (i.e.  $\langle V, V \rangle \geq 0, \forall V \in T_pM, p \in M$ , e  $\langle V, V \rangle = 0$  se, e somente se,  $V = 0$ .) dizemos que a métrica é **Riemanniana**. O caso de maior



interesse em Relatividade é quando a métrica  $\langle , \rangle_p$  advém de uma forma quadrática do tipo

$$Q(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^4)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2, \quad (3.10)$$

ou seja,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Neste caso diz-se que  $\langle , \rangle_p$  é uma métrica **Lorentziana**.

**Exemplo 3.5.2.** Seja  $M = \mathfrak{R}^n$  e identifiquemos  $T_p M \approx \mathfrak{R}^n$ ,  $\frac{\partial}{\partial x^i} \approx e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Tomamos uma métrica pondo  $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \delta_{ij}$ .  $\mathfrak{R}^n$  é chamado *espaço Euclidiano de dimensão  $n$*  e a geometria Riemanniana deste espaço é a geometria Euclidiana usual.

**Exemplo 3.5.3.** Seja  $M = \mathfrak{R}^4$  com a métrica  $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$  dada por:  $g_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ ;  $g_{ij} = -1$ , se  $i = j = 1, 2, 3$ ;  $g_{ij} = 1$ , se  $i = j = 4$ . Neste caso,  $M$  é o espaço de Minkowski  $\tilde{M}^4$  apresentado no capítulo anterior, e o estudo de sua geometria é a Teoria da Relatividade Especial.

O comprimento  $s_\alpha(t)$  da curva  $\alpha : I \rightarrow M$ , de  $t_0$  a  $t$ , é definido como

$$s_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left| \left\langle \frac{d\alpha}{du}, \frac{d\alpha}{du} \right\rangle \right|} du, \quad (3.12)$$

e o volume de uma região  $R \subset x(U)$  contida numa vizinhança coordenada é

$$vol(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx_1 \dots dx_n. \quad (3.13)$$

### 3.6 Conexão Afim; Derivada Covariante

Fundamental para a descrição das propriedades geométricas das superfícies (por exemplo: curvatura; paralelismo) sob um ponto de vista intrínseco é a noção de *derivada covariante*. Intuitivamente, a derivada covariante de uma curva contida numa superfície indica a aceleração da curva “como vista da superfície”. Entretanto, antes de apresentar este conceito vamos munir nossa variedade diferenciável com uma estrutura univocamente relacionada com a métrica <sup>2</sup>. A saber, o conceito de *conexão afim*.

<sup>2</sup>Esta afirmação será validada com teorema de Levi-Civita.

Indicaremos com  $\Upsilon(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$  e por  $D(M)$  o conjunto das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $M$ .

**Definição 3.6.1.** Uma **conexão afim**  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação  $\nabla : \Upsilon(M) \times \Upsilon(M) \rightarrow \Upsilon(M)$ , indicada por  $(V, W) \rightarrow \nabla_V W$ , que cumpre as seguintes condições:

$$(i) \quad \nabla_{fV+gW} Z = f\nabla_V Z + g\nabla_W Z;$$

$$(ii) \quad \nabla_W(V + Z) = \nabla_W V + \nabla_W Z;$$

$$(iii) \quad \nabla_W(fV) = W(f)V + f\nabla_W V,$$

onde  $V, W, Z \in \Upsilon(M)$  e  $f, g \in D(M)$ .

O teorema a seguir torna clara a importância da conexão afim  $\nabla$ .

**Teorema 3.6.2.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial  $V$ , definido ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  um outro campo  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado **derivada covariante** de  $V$  ao longo de  $c$ , tal que:

$$(a) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

$$(b) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt};$$

(c) Se  $V$  é induzido por um campo de vetores  $Y \in \Upsilon(M)$ , isto é,  $V(t) = Y(c(t))$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$ .

*Demonstração.* Suponhamos primeiramente que existe uma correspondência satisfazendo (a), (b), e (c). Seja  $x : U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow M$  um sistema de coordenadas tal que  $c(I) \cap x(U) \neq \emptyset$  e denotemos  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Então podemos expressar localmente o campo  $V$  por  $\sum_j v^j X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , onde  $v^j = v^j(t)$ ,  $X_j = X_j(c(t))$ , e a curva  $c$  por  $x^{-1} \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ . De (a) e (b) segue que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt},$$

por (c) e pela condição (i) da definição 3.6.1, temos

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j = \nabla_{\sum_i \frac{dx^i}{dt} X_i} X_j = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Logo,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{dx^i}{dt} \nabla_{X_i} X_j. \quad (3.14)$$

Como  $\nabla_{X_i} X_j \in \Upsilon(M)$  e  $\{X_1, \dots, X_n\}$  é uma base de  $T_p M$ , podemos escrever  $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ . Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k, i, j, k = 1, \dots, n$ , são chamados de *símbolos de Christoffel* ou *coeficientes da conexão*  $\nabla$ . Assim, a equação (3.14) fica

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left( \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j \right) X_k. \quad (3.15)$$

A expressão (3.15) mostra que se existe uma correspondência satisfazendo (a), (b) e (c), então tal correspondência é única.

Para mostrar a existência, defina  $\frac{DV}{dt}$  em  $x(U)$  por (3.15). Note que (3.15) satisfaz (a), (b) e (c). Se  $y(W)$  é uma outra vizinhança coordenada, com  $y(W) \cap x(U) \neq \emptyset$ , e definirmos  $\frac{DV}{dt}$  em  $y(W)$  por (3.15), as definições concordam em  $y(W) \cap x(U)$ , pela unicidade de  $\frac{DV}{dt}$  em  $x(W)$  (demonstrada acima). Segue-se que a definição pode ser estendida para toda a variedade  $M$ , o que implica a existência do campo  $\frac{DV}{dt}$  satisfazendo (a), (b) e (c).  $\square$

A discussão a seguir estabelece conceitos que serão de suma importância na extensão do princípio da inércia de Galileu (cf. seção 2.2) para o caso do espaço-tempo quadridimensional da Teoria Geral da Relatividade. De um ponto de vista estritamente geométrico, a exposição que se segue estende a noção de paralelismo em superfícies<sup>3</sup> bidimensionais para o caso de dimensões arbitrárias.

**Definição 3.6.3.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Um campo  $V$  de vetores ao longo de uma curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  é chamado **paralelo** quando  $\frac{DV}{dt} = 0, \forall t \in I$ .*

**Teorema 3.6.4.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ ,  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$  e  $V_0$  um vetor tangente a  $M$  em  $c(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  (i.e.,  $V_0 \in T_{c(t_0)} M$ ). Então existe um único campo de vetores  $V$  paralelo ao longo de  $c$  tal que  $V(t_0) = V_0$ . Nestas condições, o campo  $V$  é chamado o **transporte paralelo** de  $V_0$  ao longo de  $c$ .*

*Demonstração.* Suponha que o teorema foi demonstrado para o caso em que  $c(I)$  está contido em uma vizinhança coordenada. Como, para todo  $t \in I$ , o segmento  $c([t_0, t]) \subset M$  é um conjunto compacto (pois é a imagem do compacto  $[t_0, t]$  pela função contínua  $c|_{[t_0, t]} : [t_0, t] \rightarrow M$ ), segue do teorema de Heine-Borel que  $c([t_0, t])$  pode ser coberto por uma quantidade finita de vizinhanças coordenadas  $c([t_0, t]) \subset \bigcup_{l=1}^m x_l(U_l)$ . Pelo suposto acima podemos definir  $V$  em cada vizinhança coordenada  $x_l(U_l)$ . Da unicidade de  $V$  em cada  $x_l(U_l)$  segue que as definições coincidem em cada interseção não vazia  $x_l(U_l) \cap x_k(U_k)$ .

<sup>3</sup>Veja [6], capítulo 4, seção 4.4.

Provemos o teorema no caso em que  $c(I) \subset x(U)$ , onde  $x : U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow M$  é um sistema local de coordenadas. Seja  $x^{-1}(c(t)) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$  a expressão local da curva  $c$  e seja  $V_0 = \sum_j v_0^j X_j$ , onde  $\{X_j = \frac{\partial}{\partial x^j}(c(t_0)); j = 1, \dots, n.\}$  é a base coordenada de  $T_{c(t_0)}M$ . Consideremos um campo de vetores tangentes  $V = \sum_j v^j X_j$  ao longo de  $c$ . O campo  $V$  será paralelo se, e somente se,

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_k \left( \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j \right) X_k,$$

onde utilizamos (3.15). Logo a determinação do campo  $V$  depende da resolução do sistema linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.16)$$

O Teorema de Existência e Unicidade das EDO's<sup>4</sup> garante que, dada a condição inicial  $V(t_0) = V_0$ , isto é,  $v^k(t_0) = v_0^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , o sistema (3.16) admite uma única solução definida no intervalo  $I$ . Concluimos que o campo  $V$  dado pela solução de (3.16) é paralelo e cumpre  $V(t_0) = V_0$ .  $\square$

A definição a seguir relaciona a conexão  $\nabla$  com a métrica  $\langle, \rangle$ , proporcionando uma interpretação geométrica para o estudo aqui apresentado.

**Definição 3.6.5.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$  e uma métrica  $\langle, \rangle$ . Diz-se que a conexão  $\nabla$  é **compatível** com a métrica  $\langle, \rangle$  quando para toda curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow M$  e quaisquer campos de vetores paralelos  $P$  e  $P'$  ao longo de  $\alpha$ , tivermos  $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$ .*

Intuitivamente, a definição acima diz que o ângulo entre dois campos de vetores paralelos ao longo de uma curva  $\alpha$  é constante (ao longo de  $\alpha$ ). Além disso, o teorema a seguir mostra que se  $\nabla$  é compatível com  $\langle, \rangle$ , então podemos diferenciar o produto interno pela “regra do produto” (ou “regra de Leibniz”) usual.

**Teorema 3.6.6.** *Seja  $M$  uma variedade munida de uma métrica  $\langle, \rangle$  e uma conexão afim  $\nabla$ . Então,  $\nabla$  é compatível com  $\langle, \rangle$  se, e somente se, para quaisquer campos de vetores  $V, W$  ao longo de uma curva diferenciável qualquer  $\alpha : I \rightarrow M$ , tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad (3.17)$$

para todo  $t \in I$ .

---

<sup>4</sup>Veja [11].

*Demonstração.* Se vale (3.17) para quaisquer campos  $V, W$ , então dados dois campos  $P$  e  $P'$  paralelos (ao longo de  $\alpha$ ) temos  $\frac{d}{dt}\langle P, P' \rangle = 0$ , logo  $\langle P, P' \rangle = \text{const.}$ , donde segue que  $\nabla$  é compatível com  $\langle, \rangle$ . Reciprocamente, seja  $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$  uma base ortonormal de  $T_{\alpha(t_0)}M$ . Através do teorema anterior, podemos estender paralelamente cada vetor  $P_i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ao longo de  $\alpha$  de modo que, como  $\nabla$  é compatível com  $\langle, \rangle$ , o conjunto  $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$  constitui uma base ortonormal de  $T_{\alpha(t)}M$ ,  $\forall t \in I$ . Logo, os campos  $V, W \in \Upsilon(M)$  podem ser expressos como

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_j w^j P_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.18)$$

e, como os  $P_i$  são paralelos ( $\frac{DP_i}{dt} = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) temos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_j \frac{dw^j}{dt} P_j. \quad (3.19)$$

Assim,

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i v^i w^i \right\} = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle.$$

□

Suponhamos que  $\nabla$  é compatível com  $\langle, \rangle$ . Consideremos campos  $Y, Z \in \Upsilon(M)$ , dado um ponto  $p \in M$  e uma curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$ , com  $c(t_0) = p$ ,  $t_0 \in I$ , e  $\frac{dc}{dt}\Big|_{t_0} = X(p)$ , temos

$$X(p)\langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle \Big|_{t=t_0} = \left\langle \frac{DY}{dt}, Z \right\rangle + \left\langle Y, \frac{DZ}{dt} \right\rangle, \quad (3.20)$$

ou seja,

$$X(p)\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle. \quad (3.21)$$

O teorema de Schwarz tem vasta aplicação onde os métodos do cálculo diferencial são empregados. No estudo da geometria diferencial de superfícies, por exemplo, este teorema garante a simetria dos símbolos de Christoffel<sup>5</sup>. Esta consideração motiva a seguinte definição.

**Definição 3.6.7.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita **simétrica** quando*

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W] \quad (3.22)$$

para quaisquer campos  $V, W \in \Upsilon(M)$ .

<sup>5</sup>Veja [6], capítulo 4, seção 4.3.

Em um sistema de coordenadas  $x : U \in \mathfrak{R}^n \rightarrow M$  a simetria de  $\nabla$  implica

$$(\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i)f = [X_i, X_j]f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \right) f = 0,$$

$\forall f \in D(M)$ , isto é,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0.$$

Por outro lado,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X_k.$$

Vemos, pelas duas últimas expressões, que a simetria da conexão  $\nabla$  implica

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (3.23)$$

Raciocinando de maneira inversa concluimos que se vale  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , em qualquer sistema de coordenadas, então a conexão  $\nabla$  é simétrica. Mais explicitamente, a simetria da conexão  $\nabla$  equivale a simetria dos símbolos de Christoffel (com respeito aos índices inferiores) em todos os sistemas de coordenadas.

O teorema a seguir nos mostra que existe um único “operador de derivação” (i.e., uma conexão afim  $\nabla$ ) naturalmente associado a uma variedade  $M$  munida de uma métrica.

**Teorema 3.6.8** (Levi-Civita). *Dada uma variedade diferenciável  $M$  com uma métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  cumprindo as condições:*

(a)  $\nabla$  é simétrica;

(b)  $\nabla$  é compatível com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Demonstração.* Mostraremos primeiramente a unicidade. Vamos supor que existe uma conexão afim  $\nabla$  cumprindo as condições (a) e (b). Logo, para quaisquer campos  $V, W, Z \in \mathfrak{T}(M)$ , temos

$$V\langle W, Z \rangle = \langle \nabla_V W, Z \rangle + \langle W, \nabla_V Z \rangle, \quad (3.24)$$

$$W\langle Z, V \rangle = \langle \nabla_W Z, V \rangle + \langle Z, \nabla_W V \rangle, \quad (3.25)$$

$$Z\langle V, W \rangle = \langle \nabla_Z V, W \rangle + \langle V, \nabla_Z W \rangle. \quad (3.26)$$

Somando (3.24), (3.25), subtraindo (3.26), e usando a simetria de  $\nabla$ , obtemos

$$\begin{aligned} V\langle W, Z \rangle + W\langle Z, V \rangle - Z\langle V, W \rangle = & \langle [V, Z], W \rangle + \langle [W, Z], V \rangle \\ & + \langle [V, W], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_W V \rangle, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_W V, Z \rangle = & \frac{1}{2} \{ V \langle W, Z \rangle + W \langle Z, V \rangle - Z \langle V, W \rangle \\ & - \langle [V, Z], W \rangle - \langle [W, Z], V \rangle - \langle [V, W], Z \rangle \} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por (3.27) vemos que  $\nabla$  fica univocamente determinada pela métrica  $\langle , \rangle$ . Para mostrar a existência, definimos  $\nabla$  pela expressão (3.27) e verificamos que as condições da definição 3.6.1 são satisfeitas. O Apêndice C contém os detalhes desta verificação.  $\square$

Vamos agora utilizar a expressão (3.27) para calcular os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ , que são a expressão da conexão  $\nabla$  em um sistema de coordenadas, em termos dos coeficientes  $g_{ij}$  da métrica  $\langle , \rangle$ .

Aplicando (3.27) aos elementos da base  $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}(p)\}$  de um sistema de coordenadas  $x : U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow M$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_i} X_j, X_l \rangle = & \frac{1}{2} \{ X_j \langle X_i, X_l \rangle + X_i \langle X_l, X_j \rangle - X_l \langle X_j, X_i \rangle \} , \\ \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ji} \right\} , \end{aligned}$$

multiplicando pela matriz  $(g^{ij})$  inversa de  $(g_{ij})$ , ficamos com

$$\Gamma_{ij}^m = \sum_{k,l} \Gamma_{ij}^k g_{kl} g^{lm} = \frac{1}{2} \sum_l g^{lm} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\} . \quad (3.28)$$

Por (3.28) vemos que para o espaço Euclidiano  $\mathfrak{R}^n$  e para o espaço de Minkowski  $\tilde{M}^4$  (com as métricas dadas nos exemplos 3.5.2 e 3.5.3, respectivamente) tem-se  $\Gamma_{ij}^k = 0, \forall i, j, k$ .

## 4 PRINCÍPIO DA INÉRCIA EM ESPAÇOS NÃO-EUCLIDIANOS

### 4.1 Princípio da Inércia; Geodésicas

Até aqui não fizemos restrições sobre a dimensão ou sobre a métrica da variedade  $M$  considerada. A partir de agora seremos mais específicos, visando tratar do caso de interesse para a Teoria Geral da Relatividade. Nesta seção nossa tarefa será estender o Princípio da Inércia de Galileu para o caso de um espaço-tempo não-Euclidiano.

O universo será modelado por uma variedade  $E^4$  de dimensão  $n = 4$  com uma métrica  $\langle , \rangle$  Lorentziana, isto fornece naturalmente uma conexão afim  $\nabla$ ,  $E^4$  será chamada **espaço-tempo**. A trajetória de uma partícula no espaço-tempo será especificada por uma curva  $\tilde{\alpha} : J \rightarrow E^4$ , onde  $J \subset \mathfrak{R}$  é um intervalo,  $\alpha$  é chamada de **linha de mundo** da partícula. No caso de uma partícula massiva há um escalar naturalmente associado ao objeto, o tempo próprio  $\tau$ , de modo que podemos reparametrizar a curva  $\tilde{\alpha}$  a fim de obter  $\alpha : I \rightarrow E^4$ , com  $\tau \in I$ . O vetor tangente  $\frac{d\alpha}{d\tau}|_{\tau} \in T_{\alpha(\tau)}E^4$  é chamado de **quadrivelocidade** do objeto,  $\frac{d\alpha}{d\tau} = \mathbf{U}$ , e sua **quadriaceleração**  $\mathbf{A}$  é definida intrinsecamente por  $\mathbf{A} = \frac{D}{d\tau} \left( \frac{d\alpha}{d\tau} \right)$ . No caso de um sinal (ou uma partícula não-massiva como, por exemplo, o fóton) podemos definir a quadrivelocidade e a quadriaceleração de modo análogo, mas devemos observar que não podemos utilizar o tempo próprio  $\tau$  nem o comprimento de arco  $s$  como parâmetro (pois  $\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = 0$ ). Observe que estas definições se reduzem as dadas na seção 2.4, onde a variedade  $M$  (implicitamente) considerada é o espaço-tempo de Minkowski  $\tilde{M}^4$ .

Como vimos no capítulo 2 (cf. seção 2.2), o princípio da inércia de Galileu equivale a admitir que uma partícula livre possui aceleração nula com relação a qualquer referencial inercial. Uma maneira simples de estender este princípio é admitir que uma partícula livre no espaço-tempo  $E^4$  segue uma trajetória tal que  $\frac{D}{d\tau}\mathbf{U} = \mathbf{A} = 0, \forall \tau \in I$ . Em outras palavras: “O quadrivetor  $\mathbf{U}$  de uma partícula livre no espaço-tempo  $E^4$  é transportado paralelamente ao longo de sua linha de mundo”. Esperamos que este princípio seja válido tanto para partículas que possuem massa quanto para partículas não-massivas, lembrando que no caso de partículas não-massivas devemos utilizar um parâmetro afim<sup>1</sup> diferente do comprimento de arco e do tempo próprio.

Passaremos agora ao estudo das propriedades das trajetórias de partículas livres no espaço-tempo. A fim de evitar restrições desnecessárias, vamos considerar, em geral, que as curvas estão parametrizadas por um parâmetro afim arbitrário. No entanto,

<sup>1</sup>Dizemos que  $\lambda$  é um parâmetro afim se  $\lambda = as + b$ , onde  $s$  é o comprimento de arco e  $a, b$  são constantes.



sempre que escrevermos  $\tau$  como parâmetro de uma curva em alguma equação (por exemplo:  $\frac{D\alpha}{d\tau}, \frac{d\alpha}{d\tau}, etc...$ ) estaremos supondo tacitamente que tal curva admite parametrização pelo tempo próprio.

**Definição 4.1.1.** Uma curva diferenciável  $\gamma : I \rightarrow E^4$  é dita ser uma **geodésica** quando

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0, \quad \forall t \in I. \quad (4.1)$$

Se  $\gamma : I \rightarrow E^4$  é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[ \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \right] = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0, \quad (4.2)$$

e, portanto, o quadrado  $\left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2$  da quadrivelocidade é constante. Isto nos permite classificar as geodésicas do espaço-tempo  $E^4$  de acordo com o tipo da quadrivelocidade: (i) Se  $\left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 > 0$  diz-se que  $\gamma$  é do tipo temporal; (ii) Se  $\left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 = 0$  diz-se que  $\gamma$  é do tipo luminosa, ou nula; (iii) Se  $\left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 < 0$  diz-se que  $\gamma$  é do tipo espacial.

Consideremos uma geodésica  $\gamma : I \rightarrow E^4$  do tipo temporal,  $\left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 = c > 0$ , o comprimento de arco  $s(t)$  a partir de um ponto com  $t = t_0$  é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left( \frac{d\gamma}{dt'} \right)^2} dt' = c \int_{t_0}^t dt' = c(t - t_0). \quad (4.3)$$

Vamos agora determinar as equações satisfeitas por uma geodésica  $\gamma : I \rightarrow E^4$  em um sistema de coordenadas locais  $(U, x)$  em torno do ponto  $\gamma(t_0) \in E^4$ . A expressão local de  $\gamma$  em  $(U, x)$  é

$$x^{-1} \circ \gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t)),$$

e a condição para  $\gamma$  ser uma geodésica é dada por

$$0 = \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_{k=1}^4 \left( \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^4 \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Portanto, as equações procuradas são

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^4 \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.4)$$

O conjunto de equações (4.4) constitui um sistema linear de equações diferenciais or-

dinárias de segunda ordem. Introduzindo as variáveis

$$y^k = \frac{dx^k}{dt}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (4.5)$$

obtemos

$$\begin{cases} y^k &= \frac{dx^k}{dt} \\ \frac{dy^k}{dt} &= -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j \end{cases}, \quad (4.6)$$

que é um sistema de EDO's de primeira ordem. Logo, o Teorema de Existência e Unicidade para EDO's garante que, dada a condição inicial

$$(x^1(t_0), \dots, x^4(t_0), y^1(t_0), \dots, y^4(t_0)), \quad y^k(t_0) = \frac{dx^k}{dt}(t_0), \quad (4.7)$$

existe uma única solução para (4.6). Isto significa que localmente uma geodésica fica completamente determinada pela sua posição  $x^{-1} \circ \gamma(t_0) = (x^1(t_0), \dots, x^4(t_0))$  e por sua quadrivelocidade  $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \sum_i \left( \frac{dx^i}{dt}(t_0) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t_0)}$  no instante  $t = t_0$ .

Concluimos que o princípio da inércia implica que uma partícula livre no espaço-tempo  $E^4$  se move de acordo com o sistema de equações (4.4). Portanto, a forma de sua trajetória depende somente da métrica do espaço-tempo, e em geral não será um caminho retilíneo.

Nos casos do espaço-tempo de Minkowsky  $\tilde{M}^4$  e do espaço euclidiano  $\mathfrak{R}^n$ , com as métricas dadas nos exemplos 3.5.2 e 3.5.3, temos  $\Gamma_{ij}^k = 0, \forall i, j, k = 1, 2, 3, 4$ . Portanto, o sistema (4.4) se reduz a

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (4.8)$$

e as geodésicas desses espaços são linhas retas.

A seguir analisaremos as consequências do princípio da inércia em uma situação de grande interesse na aplicação da Teoria Geral da Relatividade, um espaço-tempo com a métrica de Schwarzschild. Este é o espaço-tempo gerado por uma distribuição esfericamente simétrica de massa (ex.: estrela; buraco negro). Especificamente, consideramos uma variedade diferenciável  $E^4$ , de dimensão  $n = 4$ , com coordenadas:  $x^1 = r; x^2 = \theta; x^3 = \phi; x^4 = t$ ; e uma métrica dada por

$$\begin{cases} g_{ij} &= 0 & \text{se } i \neq j \\ g_{11} &= -h^{-1}(r) \\ g_{22} &= -r^2 \\ g_{33} &= -r^2 \text{sen}^2 \theta \\ g_{44} &= h(r) \end{cases}, \quad (4.9)$$

onde  $h : (2GM, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  é definida como

$$h(r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (4.10)$$

e as unidades de medida foram escolhidas de modo que  $c = 1$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. Mais precisamente, a variedade  $E^4$  é constituída pelo produto  $E^4 = P \times S^2$ , onde

$$P = \{(t, r) \in \mathfrak{R}^2; r > 2GM \text{ e } t \in (0, +\infty)\},$$

$$S^2 = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^3; \|(x, y)\| = 1\}.$$

Utilizamos as coordenadas  $(\theta, \phi)$ , com  $\theta \in (0, \pi)$  e  $\phi \in (0, 2\pi)$ , na esfera unitária  $S^2 \subset \mathfrak{R}^3$ ,  $t \in (0, +\infty)$  denota o tempo coordenada e  $r \in (2GM, +\infty)$  uma coordenada com dimensão de comprimento. O produto  $P \times S^2$  possui uma estrutura natural de variedade diferenciável<sup>2</sup>, de modo que podemos aplicar os conceitos apresentados no capítulo 3. No entanto, antes de prosseguir com a discussão deste exemplo, faremos algumas considerações que permitem simplificar a forma das equações (4.4) no caso em que  $g_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$ .

## 4.2 Geodésicas em Coordenadas Ortogonais

Dizemos que um sistema de coordenadas  $x : U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow M$ , numa variedade diferenciável  $M^n$  (munida de uma métrica e sua conexão afim correspondente), é ortogonal quando

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.11)$$

Neste caso, a expressão para os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\} \quad (4.12)$$

se torna

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.13) nas (4.4) obtemos

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + g^{kk} \sum_i \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} - \frac{1}{2} g^{kk} \sum_i \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} = 0, \quad (4.14)$$

---

<sup>2</sup>Veja [7], página 4.

multiplicando esta equação por  $g_{kk}$  e passando o termo com sinal negativo para o segundo membro concluímos que

$$\frac{d}{dt} \left( g_{kk} \frac{dx^k}{dt} \right) = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \left( \frac{dx^i}{dt} \right)^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.15)$$

### 4.3 Espaço-tempo de Schwarzschild

Voltemos a situação considerada no final da seção 4.1, onde consideramos um espaço-tempo dado pelo produto  $E^4 = P \times S^2$  com uma métrica dada pelas (4.9). Vamos estudar as órbitas de uma partícula livre neste espaço-tempo. Consideremos uma geodésica  $\gamma : I \rightarrow E^4$  parametrizada por um parâmetro afim  $\lambda$ . Para  $k = 2$  na equação (4.15),  $g_{22} = -r^2$ , obtemos

$$\frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) = r^2 \sin\theta \cos\theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2. \quad (4.16)$$

Observando as expressões dos coeficientes da métrica (4.9), notamos que a transformação  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  não altera a forma destas expressões, ou seja, a métrica (4.9) é invariante sob a transformação  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ <sup>3</sup>. Esta transformação constitui uma reflexão do espaço-tempo  $E^4$  sob o conjunto  $\Theta = \left\{ (r, \theta, \phi, t) \in E^4; \theta = \frac{\pi}{2} \right\}$ . Dizemos que  $\Theta$  é uma *superfície de simetria*. A superfície de simetria  $\Theta$  possui as seguintes propriedades<sup>4</sup>:

- (1) Toda geodésica de  $\Theta$  é também geodésica de  $E^4$ ;
- (2) Qualquer geodésica de  $E^4$  tangente à  $\Theta$  (em algum ponto) está totalmente contida em  $\Theta$ .

A partir destas considerações, vemos que é suficiente analisar o caso em que  $\theta(\lambda) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall \lambda$ , e a equação (4.16) se torna inócua para nosso estudo.

Primeiramente vamos estudar as linhas de mundo de partículas massivas (i.e, com  $\frac{d\gamma}{d\tau} > 0$ ) e o parâmetro afim utilizado será o tempo próprio  $\tau$ . Para  $k = 3$  e  $k = 4$  em (4.15), obtemos, respectivamente,

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = L = \text{const.}, \quad (4.17)$$

$$h(r) \frac{dt}{d\tau} = E = \text{const.}. \quad (4.18)$$

A equação (4.17) decorre do fato de os termos da métrica  $g_{ij}$  serem independentes de  $\phi$ , a constante  $L$  é chamada o *momento angular* da partícula, por analogia com a Mecânica

<sup>3</sup>Uma transformação com esta propriedade é dita *isométrica*.

<sup>4</sup>Para uma breve discussão sobre superfícies de simetria veja [1], capítulo 9, seção 9.5.

Clássica. Analogamente, (4.18) decorre de a métrica ser independente de  $t$ , a constante  $E$  é chamada *energia* da partícula.

A quadrivelocidade da partícula é dada por

$$\frac{d\gamma}{d\tau}(\tau) = r'(\tau) \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_{\gamma(\tau)} + \theta'(\tau) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)_{\gamma(\tau)} + \phi'(\tau) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right)_{\gamma(\tau)} + t'(\tau) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\gamma(\tau)}, \quad (4.19)$$

onde usamos a notação  $f'(\tau) = \frac{df}{d\tau}(\tau)$  no segundo membro da igualdade. De  $\left\langle \frac{d\gamma}{d\tau}, \frac{d\gamma}{d\tau} \right\rangle = 1$  concluímos que

$$h \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - h^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - 0 - r^2 \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 1, \quad (4.20)$$

utilizando as expressões (4.17) e (4.18) para eliminar  $\frac{d\phi}{d\tau}$  e  $\frac{dt}{d\tau}$ , obtém-se

$$E^2 = \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right) h(r), \quad (4.21)$$

definindo o potencial  $V : [2GM, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  como

$$V(r) = \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right) h(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3}, \quad (4.22)$$

a equação (4.21) toma a forma

$$E^2 = \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r). \quad (4.23)$$

Vemos que, para qualquer órbita, os valores possíveis de  $r$  estão restritos a um intervalo  $I$  tal que  $r(0) \in I$  e

$$I \subset \{r \in [2GM, +\infty); V(r) \leq E^2\}.$$

A forma específica da órbita dependerá da magnitude relativa de  $L$ ,  $GM$ , e  $E$ .

Observamos que  $V(2GM) = 0$  e  $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 1$ . A fim de determinar como  $V(r)$  vai de 0 a 1, com  $r \in [2GM, +\infty)$ , calculamos

$$V'(r) = \frac{2}{r^4} \{GM r^2 - L^2 r + 3GML^2\}. \quad (4.24)$$

O discriminante do polinômio de segundo grau entre chaves é dado por

$$\Delta = L^2 (L^2 - 12M^2 G^2). \quad (4.25)$$

Analisaremos os casos:  $\Delta \leq 0$ ;  $\Delta > 0$ . Notemos que  $V'(2GM) > 0$ , portanto  $V$  é crescente numa vizinhança de  $r = 2GM$ .

### 1. $\Delta \leq 0$

No caso em que  $\Delta = 0$ , temos  $V'(r) > 0, \forall r$ . No caso  $\Delta < 0$  temos  $L^2 < 12M^2 G^2$ , e o

polinômio quadrático entre chaves na equação (4.24) não tem raiz real, logo  $V'(r) > 0, \forall r \in (2GM, +\infty)$ . Concluimos que em ambos os casos  $V$  é monotonicamente crescente em seu domínio. O comportamento de  $r(\tau)$  se divide em quatro situações, dependendo se  $E^2$  é maior ou menor que 1 e se  $r'(0)$  é positivo ou negativo.

(i)  $E^2 < 1$  e  $r'(0) < 0$ .

Como  $r'(0) < 0$  devemos ter  $r'(\tau) < 0$ , para todo  $\tau$  no qual  $r(\tau)$  está definida. Logo,  $r(\tau)$  é decrescente, portanto a partícula atinge  $r = 2GM$  para um valor finito de  $\tau$ .

(ii)  $E^2 < 1$  e  $r'(0) > 0$ .

A partícula se move inicialmente com  $r(\tau)$  crescente, alcança seu máximo  $\tilde{r}$ , onde  $V(\tilde{r}) = E^2$ , depois retorna e atinge  $r = 2GM$ . O valor  $\tilde{r}$  é o que chamamos um *ponto de retorno* da órbita.

(iii)  $E^2 > 1$  e  $r'(0) > 0$ .

A partícula escapa para o infinito.

(iv)  $E^2 > 1$  e  $r'(0) < 0$ .

A partícula atinge  $r = 2GM$ .

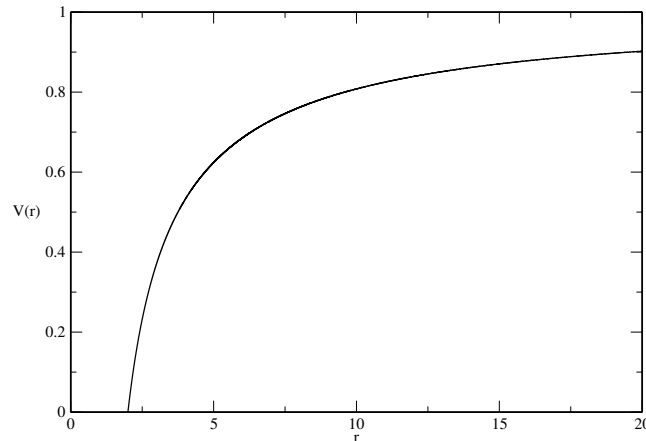


Figura 3 – Gráfico  $V$  versus  $r$ , para  $L^2 \leq 12M^2G^2$ .

## 2. $\Delta > 0$

Existem dois pontos críticos  $r_1 < r_2$ ,  $r_1$  é ponto de máximo e  $r_2$  é ponto de mínimo. Temos as seguintes situações: (a)  $V(r_1)$  não é valor máximo global de  $V$ ; (b)  $V(r_1)$  é valor máximo global de  $V$ .

(a) Neste caso temos  $V(r_1) < 1$  e  $12M^2G^2 < L^2 < 16M^2G^2$ . Há quatro situações possíveis:

(i)  $E^2 < V(r_1)$  e  $r(0) < r_1$ .

O intervalo  $I$  está à esquerda de  $r_1$ . Se  $r'(0) > 0$ , a partícula segue com  $r(\tau)$  crescente até atingir o ponto de retorno  $r = \tilde{r}$ , onde  $V(\tilde{r}) = E^2$ , então retorna até atingir  $r = 2GM$ . Caso  $r'(0) \leq 0$ , a partícula vai com  $r(\tau)$  decrescente até atingir  $r = 2GM$ .

(ii)  $E^2 < V(r_1)$  e  $r(0) > r_1$ .

Neste caso, a partícula está confinada numa região à direita de  $r_1$  e o intervalo  $I$  é limitado superiormente e inferiormente. Uma órbita nestas condições é dita *estacionária*.

(iii)  $V(r_1) < E^2 < 1$ .

O intervalo  $I$  possui extremo esquerdo igual a  $2GM$  e é limitado à direita (isto é,  $r$  possui um valor máximo  $\tilde{r}$  permitido para o qual se tem  $V(\tilde{r}) = E^2$ ). O comportamento é análogo ao caso (ii), a partícula atinge  $r = 2GM$ , passando pelo ponto de retorno  $\tilde{r}$  caso  $r'(0) > 0$ .

(iv)  $E^2 > 1$ .

A partícula escapa para o infinito, caso  $r'(0) > 0$ , ou atinge  $r = 2GM$  para um tempo finito, caso  $r'(0) < 0$ .

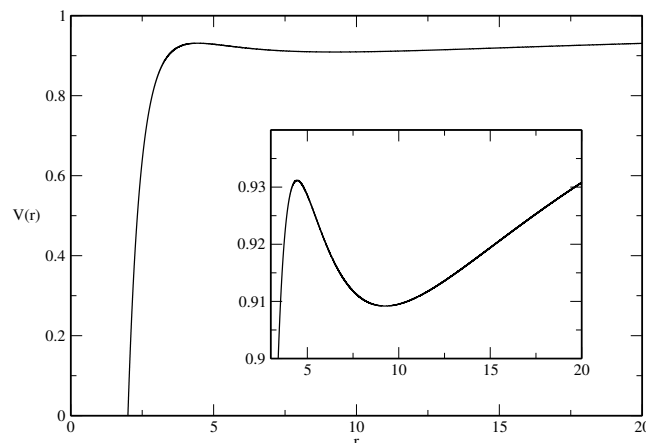


Figura 4 – Gráfico  $V$  versus  $r$ , para  $12M^2G^2 < L^2 < 16M^2G^2$ . No centro, o gráfico foi ampliado para destacar o ponto de máximo  $r_1$  e o de mínimo  $r_2$ .

(b) Temos  $V(r_1) > 1$  e  $L > 4M$ . Podem ocorrer as seguintes situações:

(i)  $E^2 < V(r_1)$  e  $r(0) < r_1$ .

O intervalo  $I$  dos valores possíveis de  $r$  está à esquerda da barreira de

potencial  $V(r_1)$ . A partícula atinge  $r = 2GM$ , passando antes pelo ponto de retorno  $r = \tilde{r}$  ( $V(\tilde{r}) = E^2$ ) caso  $r'(0) > 0$ .

(ii)  $1 < E^2 < V(r_1)$  e  $r(0) > r_1$ .

O intervalo  $I$  está à direita da barreira de potencial, sendo superiormente ilimitado,  $I = [\tilde{r}, +\infty)$ ,  $V(\tilde{r}) = E^2$ . A partícula escapa para o infinito, passando antes pelo ponto de retorno  $r = \tilde{r}$  caso  $r'(0) < 0$ .

(iii)  $E^2 > V(r_1)$ . O intervalo  $I$  é dado por  $I = [2GM, +\infty)$ . A partícula atinge  $r = 2GM$ , caso  $r'(0) < 0$ , ou escapa para o infinito, caso  $r'(0) > 0$ .

(iv)  $V(r_2) < E^2 < 1$  e  $r(0) > r_1$ .

O intervalo  $I$  dos valores possíveis de  $r$  é limitado (superiormente e inferiormente) e fica situado à direita de  $r_1$ . Tem-se  $I = [a, b]$ ,  $r_2 \in [a, b]$ ,  $r_1 \notin [a, b]$ . A partícula fica confinada na região  $r \in [a, b]$  e sua órbita é estacionária.

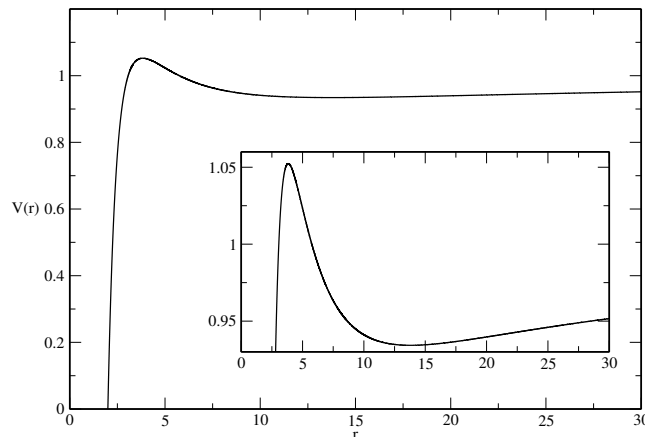


Figura 5 – Gráfico  $V$  versus  $r$ , para  $L > 4M$ .

Consideremos agora uma linha de mundo (geodésica)  $\gamma : I \rightarrow E^4$  de uma partícula não-massiva, parametrizada pelo parâmetro afim  $\lambda$ . Para  $k = 3$  e  $k = 4$  em (4.15), obtemos

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \tilde{L} = \text{const.} \quad (4.26)$$

$$h(r) \frac{dt}{d\lambda} = \tilde{E} = \text{const.}, \quad (4.27)$$

analogamente às equações (4.17) e (4.18).



A quadrivelocidade é dada por

$$\frac{d\gamma}{d\lambda}(\lambda) = r'(\lambda) \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_{\gamma(\lambda)} + \theta'(\lambda) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)_{\gamma(\lambda)} + \phi'(\lambda) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right)_{\gamma(\lambda)} + t'(\lambda) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\gamma(\lambda)}, \quad (4.28)$$

e de  $\left\langle \frac{d\gamma}{d\lambda}, \frac{d\gamma}{d\lambda} \right\rangle = 0$  segue-se que

$$0 = \frac{\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2}{\left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)} + r^2 \left\{ \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \text{sen}^2\theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \right\} - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2, \quad (4.29)$$

dividindo por  $\left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2$  (considerando  $\frac{dt}{d\lambda} \neq 0$ ), obtemos

$$0 = \frac{\left( \frac{dr}{dt} \right)^2}{\left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)} + r^2 \left\{ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \text{sen}^2\theta \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right\} - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right). \quad (4.30)$$

Efetuada a mudança de coordenadas

$$r = \rho \left( 1 + \frac{GM}{2\rho} \right)^2, \quad 2GM < r < \infty, \quad \frac{GM}{2} < \rho < \infty, \quad (4.31)$$

ficamos com as seguintes expressões:

$$\frac{dr}{dt} = \left( \frac{d\rho}{dt} \right) \left( 1 + \frac{GM}{2\rho} \right) \left( 1 - \frac{GM}{2\rho} \right); \quad (4.32)$$

$$1 - \frac{2GM}{r} = \frac{\left( 1 - \frac{GM}{2\rho} \right)^2}{\left( 1 + \frac{GM}{2\rho} \right)^2}. \quad (4.33)$$

Substituindo (4.32) e (4.33) em (4.30)

$$\left( 1 + \frac{GM}{2\rho} \right)^4 \left\{ \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \rho^2 \text{sen}^2\theta \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right\} - \frac{\left( 1 - \frac{GM}{2\rho} \right)^2}{\left( 1 + \frac{GM}{2\rho} \right)^2} = 0. \quad (4.34)$$

O termo entre chaves é igual ao quadrado da magnitude da velocidade  $v^2$  em coordenadas “esféricas”  $(\rho, \theta, \phi)$ , portanto

$$\left( 1 + \frac{GM}{2\rho} \right)^4 v^2 - \frac{\left( 1 - \frac{GM}{2\rho} \right)^2}{\left( 1 + \frac{GM}{2\rho} \right)^2} = 0. \quad (4.35)$$

Lembrando que escolhemos unidades de modo que  $c = 1$ , temos o resultado

$$n(\rho) = \frac{c}{v} = \frac{\left( 1 + \frac{GM}{2\rho} \right)^3}{\left( 1 - \frac{GM}{2\rho} \right)}. \quad (4.36)$$

A equação (4.36) implica que o raio de luz desloca-se através do espaço do mesmo modo que se moveria num meio com índice de refração dado por  $n(\rho)$ .

## 5 CONCLUSÃO

Com a discussão desenvolvida nos capítulos anteriores esperamos ter enfatizado o papel central desempenhado pela geometria no estudo das propriedades do movimento da matéria e da energia no espaço-tempo. Na verdade, esta ideia está no cerne da Teoria (Geral da Relatividade) e talvez sua manifestação mais evidente esteja expressa nas equações de campo de Einstein, as quais revelam o modo como matéria e energia determinam a estrutura geométrica do espaço-tempo. Apesar de não tratarmos especificamente das equações de Einstein, o conteúdo apresentado nos capítulos anteriores leva a concluir que física e geometria estão intimamente relacionadas, de modo que uma compreensão mais profunda de uma implica um avanço na interpretação da outra. Nossa abordagem é essencialmente introdutória e busca fornecer um vislumbre sobre alguns dos princípios fundamentais da física e da geometria envolvida na descrição do universo pela Teoria da Relatividade.

No capítulo 2 estudamos as propriedades do espaço-tempo da Relatividade Especial (Espaço de Minkowski  $\tilde{M}^4$ ) e vimos como suas propriedades geométricas determinam as relações de causa e efeito no universo. No capítulo 3 desenvolvemos de maneira mais precisa os conceitos geométricos motivados pelo estudo da Relatividade Especial. Finalmente, no capítulo 4 generalizamos o Princípio da Inércia de Galileu para um espaço-tempo com uma métrica Lorentziana, e analisamos suas consequências no caso específico do espaço-tempo de Schwarzschild. Estudamos as geodésicas deste espaço-tempo, as quais descrevem a evolução das partículas físicas. Devemos notar, ainda, a riqueza de situações possíveis quando comparamos as órbitas do espaço-tempo de Schwarzschild com seu problema análogo em Mecânica Clássica, o problema da força central.

Por fim, reiteramos a importância do estudo das relações entre física e geometria para a obtenção de uma melhor compreensão acerca da natureza de fenômenos que envolvem as noções intuitivas de tempo e espaço.

## APÊNDICE A - LINEARIDADE DA TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Consideremos referenciais inerciais  $S$  e  $S'$  com velocidade relativa  $v$ , e um relógio  $C$  movendo-se na ausência de forças. Pelo Princípio da Inércia temos  $\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0$  e, portanto,  $\frac{dx^i}{dt} = \text{const.}$ , onde  $x^i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , representam as coordenadas espaciais em  $S$ . Se  $\tau$  representa o tempo marcado por  $C$ , a homogeneidade temporal implica que  $\Delta t \propto \Delta\tau$ , ou seja, o experimento, em  $S$ , que consiste em medir o intervalo  $\Delta t$  entre os "ticks" do relógio  $C$  fornece sempre o mesmo resultado, independente de quando é realizado. Temos, portanto,  $\frac{dt}{d\tau} = \text{const.}$  e  $\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \text{const.}$ , isto é,

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \text{const.}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.1})$$

Logo,

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.2})$$

Aplicando o mesmo raciocínio a  $S'$ , obtemos

$$\frac{d^2x^{\mu'}}{d\tau^2} = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.3})$$

Calculando

$$\frac{dx^{\mu'}}{d\tau} = \sum_{\nu} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d^2x^{\mu'}}{d\tau^2} = \sum_{\nu, \sigma} \left( \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} \right) \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} + \sum_{\nu} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.2) e (A.3) em (A.5), concluímos que

$$\sum_{\nu, \sigma} \left( \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} \right) \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0. \quad (\text{A.6})$$

A equação (A.6) deve ser válida para qualquer partícula livre  $C$ . Segue-se, então, que

$$\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} = 0, \quad \mu, \nu, \sigma = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.7})$$

Portanto,

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} x^{\nu} + B_{\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.8})$$

Ajustando a marcação dos relógios em 0 quando as origens dos sistemas de coordenadas coincidem, podemos admitir que  $B_\mu = 0$ , de modo que

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} x^\nu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (\text{A.9})$$

mostrando assim que a transformação de coordenadas  $\{x^\mu\} \rightarrow \{x^{\mu'}\}$  é linear.

## APÊNDICE B - PROPRIEDADES DO COLCHETE DE LIE

No final da seção 3.4 afirmamos que o colchete de Lie possui as seguintes propriedades:

- (i)  $[V, W] = -[W, V]$  (anticomutatividade);
- (ii)  $[aV + bW, Z] = a[V, Z] + b[W, Z]$  (linearidade);
- (iii)  $[[V, W], Z] + [[Z, V], W] + [[W, Z], V] = 0$  (identidade de Jacobi);
- (iv)  $[fV, gW] = fg[V, W] + fV(g)W - gW(f)V$ .

onde  $V, W \in \Upsilon(M)$  e  $f, g \in D(M)$ .

Vamos mostrar agora que estas propriedades são verdadeiras. A propriedade (i) decorre imediatamente da definição de  $[V, W]$ . De fato,

$$[V, W] = VW - WV = -(WV - VW) = -[W, V].$$

Do mesmo modo, a propriedade (ii) resulta de

$$\begin{aligned} [aV + bW, Z] &= (aV + bW)Z - Z(aV + bW) \\ &= a(VZ - ZV) + b(WZ - ZW) \\ &= a[V, Z] + b[W, Z]. \end{aligned}$$

Para demonstrar (iii), calculamos

$$[[V, W], Z] = [VW - WV, Z] = VWZ - WVZ - ZVW + ZWV, \quad (\text{B.1})$$

$$[[Z, V], W] = [ZV - VZ, W] = ZVW - VZW - WZV + WVZ, \quad (\text{B.2})$$

$$[[W, Z], V] = [WZ - ZW, V] = WZV - ZWV - VWZ + VZW. \quad (\text{B.3})$$

Somando (B.1), (B.2) e (B.3), concluimos que

$$[[V, W], Z] + [[Z, V], W] + [[W, Z], V] = 0.$$

A propriedade (iv) segue de

$$\begin{aligned} [fV, gW] &= fV(gW) - gW(fV) \\ &= fV(g)W + fgVW - gW(f)V - fgWV \\ &= fg[V, W] + fV(g)W - gW(f)V. \end{aligned}$$

**APÊNDICE C – VERIFICAÇÃO DE QUE A CONEXÃO  $\nabla$  DO  
TEOREMA 3.6.8 ESTÁ BEM DEFINIDA**

No final da demonstração do teorema 3.6.8 afirmamos que a expressão

$$\begin{aligned} \langle \nabla_W V, Z \rangle = & \frac{1}{2} \{ V \langle W, Z \rangle + W \langle Z, V \rangle - Z \langle V, W \rangle \\ & - \langle [V, Z], W \rangle - \langle [W, Z], V \rangle - \langle [V, W], Z \rangle \}, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde  $V, W, Z \in \Upsilon(M)$ , define uma conexão  $\nabla$  na variedade  $M$ . Vamos agora verificar que  $\nabla$  definida pela equação (C.1) cumpre as condições da definição 3.6.1.

Mostremos que  $\nabla_{fW+gY} V = f\nabla_W V + g\nabla_Y V$ , para todo  $V, W, Y \in \Upsilon(M)$  e  $f, g \in D(M)$ . Primeiramente vejamos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{fW} V, Z \rangle = & \frac{1}{2} \{ V \langle fW, Z \rangle + fW \langle Z, V \rangle - Z \langle V, fW \rangle \\ & - \langle [V, Z], fW \rangle - \langle [fW, Z], V \rangle - \langle [V, fW], Z \rangle \}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{fW} V, Z \rangle = & \frac{1}{2} \{ fV \langle W, Z \rangle + V(f) \langle W, Z \rangle + fW \langle Z, V \rangle \\ & - fZ \langle V, W \rangle - Z(f) \langle V, W \rangle - f \langle [V, Z], W \rangle - f \langle [W, Z], V \rangle \\ & + Z(f) \langle W, V \rangle - f \langle [W, V], Z \rangle - V(f) \langle W, Z \rangle \}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

pondo  $f$  em evidência na expressão anterior, concluímos que

$$\langle \nabla_{fW} V, Z \rangle = f \langle \nabla_W V, Z \rangle = \langle f \nabla_W V, Z \rangle. \quad (\text{C.4})$$

Logo,

$$\langle \nabla_{fW} V - f \nabla_W V, Z \rangle = 0, \quad \forall Z \in \Upsilon(M), \quad (\text{C.5})$$

o que implica

$$\nabla_{fW} V = f \nabla_W V. \quad (\text{C.6})$$

De modo análogo, vemos que

$$\langle \nabla_{W+Y} V, Z \rangle = \langle \nabla_W V, Z \rangle + \langle \nabla_Y V, Z \rangle = \langle \nabla_W V + \nabla_Y V, Z \rangle, \quad (\text{C.7})$$

e, portanto,

$$\langle \nabla_{W+Y} V - \nabla_W V - \nabla_Y V, Z \rangle = 0, \quad \forall Z \in \Upsilon(M), \quad (\text{C.8})$$



donde

$$\nabla_{W+Y}V = \nabla_WV + \nabla_YV. \quad (\text{C.9})$$

De (C.6) e (C.9) segue-se que

$$\nabla_{fW+gY}V = f\nabla_WV + g\nabla_YV. \quad (\text{C.10})$$

Mostremos agora que  $\nabla_W(V + Y) = \nabla_WV + \nabla_WY$ . Da equação (C.1) concluimos que

$$\langle \nabla_W(V + Y), Z \rangle = \langle \nabla_WV, Z \rangle + \langle \nabla_WY, Z \rangle = \langle \nabla_WV + \nabla_WY, Z \rangle, \quad (\text{C.11})$$

logo,

$$\langle \nabla_W(V + Y) - \nabla_WV - \nabla_WY, Z \rangle = 0, \quad \forall Z \in \Upsilon(M), \quad (\text{C.12})$$

e, portanto,

$$\nabla_W(V + Y) = \nabla_WV + \nabla_WY. \quad (\text{C.13})$$

Finalmente, mostremos que  $\nabla_WfV = W(f)V + f\nabla_WV$ . Por (C.1) temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_WfV, Z \rangle &= \frac{1}{2} \{ fV \langle W, Z \rangle + W \langle Z, fV \rangle - Z \langle fV, W \rangle \\ &\quad - \langle [fV, Z], W \rangle - \langle [W, Z], fV \rangle - \langle [fV, W], Z \rangle \}, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

logo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_WfV, Z \rangle &= \frac{1}{2} \{ fV \langle W, Z \rangle + W(f) \langle Z, V \rangle + fW \langle Z, V \rangle - Z(f) \langle V, W \rangle \\ &\quad - fZ \langle V, W \rangle - f \langle [V, Z], W \rangle + Z(f) \langle V, W \rangle - f \langle [W, Z], V \rangle \\ &\quad - f \langle [V, W], Z \rangle + W(f) \langle V, Z \rangle \}, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

donde

$$\langle \nabla_WfV, Z \rangle = f \langle \nabla_WV, Z \rangle + \langle W(f)V, Z \rangle = \langle f\nabla_WV + W(f)V, Z \rangle. \quad (\text{C.16})$$

Portanto,

$$\langle \nabla_WfV - f\nabla_WV - W(f)V, Z \rangle = 0, \quad \forall Z \in \Upsilon(M), \quad (\text{C.17})$$

o que implica

$$\nabla_WfV = W(f)V + f\nabla_WV. \quad (\text{C.18})$$

Por (C.10), (C.13) e (C.18), concluimos que a expressão (C.1) define uma conexão  $\nabla$  na variedade  $M$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] W. Rindler, *Relativity, Special, General and Cosmological*, 2ed., Oxford University Press, New York (2006).
- [2] A. Pelissetto, M. Testa, *Getting the Lorentz transformations without requiring an invariant speed*, disponível em: <http://arxiv.org/abs/1504.02423>.
- [3] F. Caruso e V. Oguri, *Física Moderna - Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos*, Editora Campus, Rio de Janeiro (2006).
- [4] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, 2ed., Editora Livraria da Física, São Paulo (2007).
- [5] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, 2ed., IMPA, Rio de Janeiro (1988).
- [6] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 3ed., IMPA, Rio de Janeiro (2008).
- [7] B. O' Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York (1983).
- [8] S. Sternberg, *Semi-Riemann Geometry and General Relativity*, (2003).
- [9] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [10] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2ed., Springer, New York (2011).
- [11] J. M. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro (1979).