



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MICHELÂNGELO CAMÕES FROST SOUSA COSTA ARAÚJO

INTRODUÇÃO AO MODELO PADRÃO DE FÍSICA DE PARTÍCULAS:  
CONSTRUÇÃO DA LAGRANGIANA DO SETOR DE LÉPTONS SEM  
MASSA DA INTERAÇÃO ELETROFRACA

FORTALEZA

2017

MICHELÂNGELO CAMÕES FROST SOUSA COSTA ARAÚJO

INTRODUÇÃO AO MODELO PADRÃO DE FÍSICA DE PARTÍCULAS:  
CONSTRUÇÃO DA LAGRANGIANA DO SETOR DE LÉPTONS SEM MASSA DA  
INTERAÇÃO ELETROFRACA

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

FORTALEZA  
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

A69i Araújo, Michelângelo Camões Frost Sousa Costa.  
Introdução ao Modelo Padrão De Física de Partículas : Construção da Lagrangiana do Setor de Léptons sem Massa da Interação Eletrofraca / Michelângelo Camões Frost Sousa Costa Araújo. – 2017.  
81 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Curso de Física, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

1. Modelo Padrão. 2. Eletrofraca. 3. Léptons. 4. Física de partículas. I. Título.

CDD 530

---

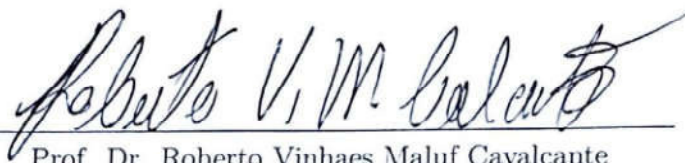
MICHELÂNGELO CAMÕES FROST SOUSA COSTA ARAÚJO

INTRODUÇÃO AO MODELO PADRÃO DE FÍSICA DE PARTÍCULAS:  
CONSTRUÇÃO DA LAGRANGIANA DO SETOR DE LÉPTONS SEM MASSA DA  
INTERAÇÃO ELETROFRACA

Monografia de Bacharelado apresentada à Co-  
ordenação da Graduação do Curso de Física,  
da Universidade Federal do Ceará, como re-  
quisito parcial para a obtenção do Título de  
Bacharel em Física.

Aprovada em 05/07/2017.

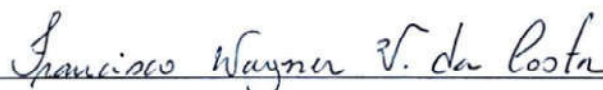
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Dr. Davi Monteiro Dantas  
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Francisco Wagner Vasconcelos da Costa  
UECE Campus de Limoeiro

*Aos Meus Avós*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Maria Fátima de Sousa e Hélio Costa Araújo, por todo apoio e carinho fornecidos ao longo dos anos dedicados a minha formação.

Gostaria de agradecer também a minha noiva Adriana Gomes, minha tia Maria do Amparo e a minha irmã Scarlet Sousa por todo amor dedicado.

Um agradecimento especial ao meu orientador, professor Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante, por ter acreditado em meus esforços e por toda paciência e dedicação prestadas durante os anos em que fui seu aluno de iniciação científica. Gostaria de agradecer também ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida por ter me introduzido ao grupo de Teoria Quântica de Campos e por toda assistência dada no ano em que fui seu aluno de iniciação científica.

Gostaria de agradecer também aos demais professores do Departamento de Física da UFC, por todo conhecimento concedido durante minha formação acadêmica, em especial, ao professor José Ramos que teve toda uma paciência em me receber em sua sala durante os anos de minha formação para conversas motivadoras no domínio da Física.

Também, agradeço a meus novos e antigos companheiros do LASSCO que auxiliaram de forma direta ou indireta no meu desenvolvimento como estudante, em especial, a Davi Monteiro Dantas e ao professor José Euclides Gomes da Silva.

Por fim, gostaria de agradecer, ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, por toda dedicação que presta aos seus alunos, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo financiamento à pesquisa científica, realizada durante os meus anos de Iniciação Científica.

## RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos um método bastante sistemático para a construção da Lagrangiana do setor de léptons sem massa da interação Eletrofraca do Modelo Padrão de Física de Partículas. Iniciaremos fazendo um breve comentário sobre as partículas que compõem a teoria. Em seguida, abordaremos sobre grupos de simetria de Lie e campos clássicos (campo escalar, vetorial, tensorial e espinorial). Por último, construiremos a Lagrangiana fazendo aplicação direta dos conceitos desenvolvidos ao longo do trabalho.

**Palavras-chave:** Modelo Padrão. Léptons. Eletrofraca. Física de Partículas

## ABSTRACT

In this current work, we are going to introduce a systematic method for building up the Lagrangian of the massless lepton sector of the Electroweak interaction within standard model of particle physics. Starting off doing a "brief" comment about the particles in which such theory holds. In the following sections, we'll stamble upon with Lie Groups and classical fields (such as scalar, vectorial, tensorial and spinorial fields). For making out, we'll make the Lagrangian using a direct application of the previous concepts developed through this work.

**Keywords:** Standard Model. Leptons. Electroweak. Particle Physics.



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Fonte: [16]. Classificação dos <i>léptons</i> e a organização dos mesmo em famílias.	11
Tabela 2 – Fonte: [16]. Classificação dos <i>quarks</i> e a organização dos mesmos em famílias. . . . .	12
Tabela 3 – Fonte: [20]. <i>Léptons</i> e anti- <i>léptons</i> e suas respectivas massas em unidades de $MeV/c^2$ . . . . .	12
Tabela 4 – Fonte: [20]. Relações de cargas e massas das partículas bosônicas das interações abordadas pelo Modelo Padrão. O zero simboliza o fato da partícula ter ausência de massa ou qualquer tipo de carga. As cargas elétricas são dadas em unidades elementares de carga elétrica. . . . .	14
Tabela 5 – Fonte: [25]. Divisão das transformações de Lorentz em outras quatro transformações. . . . .	35
Tabela 6 – Fonte: [20]. Bósons de <i>gauge</i> do setor $SU(2)$ e $U(1)$ da interação Eletrofraca.	69
Tabela 7 – Fonte: [20]. Cargas da interação Eletrofraca para elétrons de quiralidades distintas e para o neutrino do elétron. . . . .	71

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	GRUPOS DE LIE . . . . .	16
2.1	Introduzindo Grupos . . . . .	16
2.2	Grupo de Rotação: Uma Primeira Representação . . . . .	17
2.2.1	Rotações em 2-D . . . . .	19
2.2.2	Rotações em 3-D . . . . .	21
2.3	A Álgebra de Lie . . . . .	23
2.3.1	Os Geradores e Álgebra de Lie de $SU(2)$ . . . . .	24
2.3.2	Os geradores e a álgebra de $SO(3)$ . . . . .	27
2.4	O Grupo $SO(N)$ e a Representação Espinorial . . . . .	29
2.5	O Grupo de Lorentz . . . . .	34
2.5.1	Os Geradores e a Álgebra do Grupo de Lorentz . . . . .	36
3	CAMPOS CLÁSSICOS . . . . .	40
3.1	O Formalismo Lagrangiano em sua Forma Covariante . . . . .	41
3.1.1	O Princípio de Hamilton . . . . .	41
3.1.2	A densidade Lagrangiana . . . . .	42
3.1.3	As equações de Lagrange . . . . .	43
3.2	Os Campos $\phi$ 's . . . . .	45
3.2.1	O Campo Escalar . . . . .	45
3.2.2	O Campo Vetorial . . . . .	48
3.2.3	O Campo Tensorial . . . . .	50
4	O CAMPO DE DIRAC . . . . .	53
4.1	A Equação de Dirac em sua Forma Covariante . . . . .	53
4.2	O Campo Espinorial de Dirac . . . . .	55
4.3	O Espinor Adjunto e a Lagrangiana de Dirac . . . . .	57
4.4	Solução da Equação de Dirac . . . . .	59
5	TEORIA ELETROFRACA . . . . .	63
5.1	O campo de Dirac na Representação de Weyl . . . . .	63
5.2	Grupos de Simetria, Campos e Cargas da interação Eletrofraca . . . . .	68
5.2.1	Grupos de Gauge e os Campos da Interação Eletrofraca . . . . .	68
5.2.2	Cargas da Interação Eletrofraca . . . . .	70
5.3	Setor de Léptons da Interação Eletrofraca . . . . .	71

6	CONCLUSÃO . . . . .	79
	REFERÊNCIAS . . . . .	80

## 1 INTRODUÇÃO

O Modelo Padrão é uma teoria que especifica todas as partículas elementares conhecidas até hoje e descreve como elas interagem umas com as outras [23]. O termo elementar refere-se as partículas que não possuem estrutura interna [16], ou seja, não são constituídas por partículas menores. Claro que esta designação possui um caráter relativo, os prótons, por exemplo, eram considerados partículas elementares e hoje sabemos que os mesmos são constituídos por partículas ainda menores [16].

Até o momento, as partículas verdadeiramente elementares são os *léptons* e os *quarks*<sup>1</sup> [16,23]. A verdade é que existem seis tipos de *léptons*: o elétron ( $e$ ), o neutrino do elétron ( $\nu_e$ ), o *múon* ( $\mu$ ), o neutrino do *múon* ( $\nu_\mu$ ), o *tau* ( $\tau$ ) e o neutrino do *tau* ( $\nu_\tau$ ) [23]. Estes diferem entre si pela carga elétrica  $Q$  e pelos respectivos números *leptônicos*  $L$  e assim, podem ser organizados em três famílias ou gerações, como mostra a tabela 1 [16].

		Lepton classification				
		$l$	$Q$	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$
First generation	{	$e$	-1	1	0	0
	$\nu_e$	0	1	0	0	0
Second generation	{	$\mu$	-1	0	1	0
	$\nu_\mu$	0	0	1	0	0
Third generation	{	$\tau$	-1	0	0	1
	$\nu_\tau$	0	0	0	0	1

**Tabela 1:** Fonte: [16]. Classificação dos *léptons* e a organização dos mesmo em famílias.

Por outro lado, também existem seis tipos de *quarks*, o *up* (**u**), o *down* (**d**), o *charme* (**c**), o *estranho* (**s**), o *bottom* (**b**) e o *top* (**t**) [23]. Estes diferem entre si pela carga elétrica e pelos números de *quarks*<sup>2</sup> *downness* ( $D$ ), *upness* ( $U$ ), *strangeness* ( $S$ ), *charm* ( $C$ ), *beauty* ( $B$ ) e *truth* ( $T$ ). Além disso, cada um destes pode vir em três cores diferentes<sup>3</sup>: vermelho, verde e azul. Assim como para os *léptons*, os *quarks* podem ser organizados em três tipos de famílias, como mostra a tabela 2.

<sup>1</sup>O próton é constituído por dois tipos distintos de *quarks*, dois *quarks up* e um *quark down*.

<sup>2</sup>Estamos usando a notação da referência [16].

<sup>3</sup>O termo cor é usado apenas para especificar uma propriedade da partícula e assim, não constitui uma cor propriamente dita [23].

		Quark classification							
		$q$	$Q$	$D$	$U$	$S$	$C$	$B$	$T$
First generation	{	$d$	$-1/3$	$-1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
		$u$	$2/3$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$
Second generation	{	$s$	$-1/3$	$0$	$0$	$-1$	$0$	$0$	$0$
		$c$	$2/3$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$
Third generation	{	$b$	$-1/3$	$0$	$0$	$0$	$0$	$-1$	$0$
		$t$	$2/3$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$

**Tabela 2:** Fonte: [16]. Classificação dos *quarks* e a organização dos mesmos em famílias.

A cada partícula existe uma antipartícula associada<sup>4</sup>. Estas se caracterizam por terem a mesma massa e spin das partículas em questão, porém, com cargas elétricas, números *leptônicos* e número de *quarks* invertidos [23]. Ou seja, o pósitron  $\bar{e}$  (antipartícula do elétron), o anti-*múon*  $\bar{\mu}$ , anti-*tau*  $\bar{\tau}$  possuem carga elétrica  $Q = +1$  e números *leptônicos* respectivos  $L_{\bar{e}} = -1$ ,  $L_{\bar{\mu}} = -1$  e  $L_{\bar{\tau}} = -1$ . De um modo geral, o número *leptônico* para partículas é  $+1$  enquanto que para antipartículas<sup>5</sup> é  $-1$  [20]. A tabela 3 especifica as massas dos *léptons* e anti-*léptons*.

Partículas	$e$	$\mu$	$\tau$	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
Antipartículas	$\bar{e}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\tau}$	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$
Massa ( $MeV/c^2$ )	0.511	106	1777	0	0	0

**Tabela 3:** Fonte: [20]. *Léptons* e anti-*léptons* e suas respectivas massas em unidades de  $MeV/c^2$ .

Partículas que possuem estrutura interna são chamadas de *hádrons*. Estes são constituídos de *quarks* e anti-*quarks* [23]. Os *hádrons* ainda se dividem em dois tipos de partículas, *bárions* e *mésons*. Partículas que são *bárions*, por exemplo, são constituídas por três *quarks* ou três anti-*quarks* enquanto as que são *mésons* são constituídas por um *quark* e um anti-*quark* [23]. Assim, podemos resumir as partículas que compõem o Modelo Padrão como sendo de três tipos: *léptons*, *quarks* e *hádrons* [23].

Em geral, o trabalho de um físico de partículas consiste em identificar partículas elementares e tentar descobrir como elas interagem umas com as outras [16]. O Modelo Padrão, como dito no início deste capítulo, descreve como as partículas elementares (*quarks*, *léptons* e *hádrons*) interagem entre si.

<sup>4</sup>Contabilizando partículas, antipartículas e a propriedade cor temos 12 *léptons* e 36 *quarks* [23].

<sup>5</sup>Veja que o que diferencia os antineutrinos dos respectivos neutrinos é o número *leptônico*, pois os mesmo são supostos sem massa. Veja tabela 3.

Até hoje, existem na natureza quatro tipos de interações que são consideradas fundamentais<sup>6</sup> [23]: eletromagnética, fraca, forte e gravitacional. Fenômenos eletromagnéticos e gravitacionais são facilmente percebidos em nosso cotidiano - ao ver um objeto cair ou ao ligar a luz de uma casa, estamos presenciando, respectivamente, a manifestação das interações gravitacional e eletromagnética [10]. Por outro lado, as interações forte e fraca ocorrem em escala subatômica e assim são mais difíceis de serem percebidas [10]. A interação forte é responsável pelo aprisionamento dos *quarks* nos *hádrons*<sup>7</sup> e pela estabilidade da matéria [8, 10, 16] - ela mantém os prótons e os nêutrons juntos no núcleo. Já a interação fraca é responsável pelos fenômenos da transmutação de elementos, ou seja, a transformação de uma partícula em outra [10] - decaimento *beta*, decaimento do *píon* e o decaimento do *múon* são exemplos da manifestação da interação fraca [8, 9].

As interações fundamentais se manifestam devido a uma propriedade chamada carga que é intrínseca às partículas [23]. De forma simétrica, existem na natureza quatro tipos de cargas (carga massa, carga fraca, carga cor e carga elétrica) correspondentes a quatro tipos de interações fundamentais (gravitacional, fraca, forte e eletromagnética) [23]. Cada carga cria um campo que preenche o espaço e que carrega consigo a informação que permite a ocorrência de uma determinada interação. Uma vez que a interação ocorre, as partículas podem estar sujeitas a até quatro tipos de forças fundamentais (força gravitacional, força fraca, força forte e força eletromagnética), bastando que elas estejam carregadas com as respectivas cargas. Assim, se uma partícula está carregada com a carga cor, ela interage via força forte [20].

Por outro lado, os campos fundamentais, criados pelas respectivas cargas, são quantizados em partículas chamadas bósons [23], os quanta dos campos. Estes, também conhecidos na literatura por partículas virtuais ou de interação [23], podem ou não ter massa e aparecem na teoria (Modelo Padrão) como consequência da aplicação de algum grupo de simetria interna<sup>8</sup> [4]. A interação passa a ser explicada então pela troca de partículas virtuais, ou seja, como cada carga se associa a um campo cujo *quantum* é um bóson, dizemos que duas partículas carregadas com a mesma carga interagem via troca de um bóson correspondente [23]. Os quanta dos campos eletromagnéticos, fraco, forte e gravitacional são, respectivamente, os fótons  $\gamma$ , as partículas  $W^\pm$  e  $Z^0$ , os glúons e os grávitons (ainda não detectados). Assim, por exemplo, a interação eletromagnética entre duas partículas com carga elétrica ocorre pela troca de fótons e para duas partículas

---

<sup>6</sup>Estas interações são fundamentais no sentido de que todas as interações conhecidas na natureza são manifestações de uma ou combinações entre as quatro interações [20].

<sup>7</sup>Esse é o motivo pelo qual os *quarks* nunca podem ser detectados separadamente, estão sempre unidos nos *hádrons* [10].

<sup>8</sup>Simetrias internas, como veremos nos capítulos 2 e 3, são aquelas que não envolvem transformações no espaço-tempo [4].

carregadas com carga cor, pela troca de glúons. A tabela 4 ilustra a configuração de cargas e massas das partículas de interação já detectadas. Veja, por exemplo, que os bósons  $W^\pm$  interagem com eles mesmos via interação eletromagnética e gravitacional, pois os mesmos possuem as cargas elétrica e massa [20]. Por outro lado, os glúons interagem entre eles apenas via interação forte enquanto os fótons não interagem entre si [20].

Bósons	$\gamma$	$W^+$	$W^-$	$Z^0$	Glúons
Cargas	0	Carga elétrica +1	Carga elétrica -1	0	Carga cor
Massa ( $GeV/c^2$ )	0	80	80	91	0

**Tabela 4:** Fonte: [20]. Relações de cargas e massas das partículas bosônicas das interações abordadas pelo Modelo Padrão. O zero simboliza o fato da partícula ter ausência de massa ou qualquer tipo de carga. As cargas elétricas são dadas em unidades elementares de carga elétrica.

Em resumo, o Modelo Padrão consiste de uma teoria que reúne todas as informações necessárias para descrever um sistema físico de partículas [16]. No entanto, ele ainda apresenta certos questionamentos sem resposta [16, 19, 21]. Dentre estes, por exemplo, existe o problema da hierarquia entre as interações gravitacional e fraca - as massas dos bósons  $W$  e  $Z$  são cerca de  $10^{15}$  vezes menor do que a massa (massa de Planck) do menor buraco negro possível [2]. Isto está relacionado com a magnitude do campo de Higgs e coloca em dúvida a validade do Modelo Padrão [2, 19] - como desenvolvido, o Modelo Padrão não descreve a interação gravitacional [16, 19]. Além disso, ele apresenta certas inconsistências quanto as massas dos neutrinos. Estes, na teoria, são supostos sem massa, mas experimentos recentes [12, 17, 22] mostram o contrário, mesmo que pequena, os neutrinos possuem massa [20].

Este trabalho se dedica a apresentar ferramentas introdutórias que permitem a construção da Lagrangiana do Modelo Padrão de Física de Partículas. Com este propósito, no capítulo 2 apresentaremos o conceito de grupo de simetria. Como veremos, a aplicação de um elemento de transformação nos permitirá enxergar propriedades fundamentais existentes na natureza [31]. No entanto, daremos ênfase aos grupos de simetria que são de interesse para a construção da Lagrangiana do setor de *léptons* da interação Eletrofraca, os grupos  $U(1)$ ,  $SU(2)$  e o de Lorentz.

No capítulo 3 explanaremos sobre Campos Clássicos que, como veremos, funcionam como ponto de partida para sistemas quânticos [4]. Começaremos por apresentar um método para se chegar as equações de Campos e em seguida, finalizaremos o capítulo fazendo uma breve explicação sobre os campos que comporão a Lagrangiana do setor de *léptons* da interação Eletrofraca.

O capítulo 4 será dedicado exclusivamente ao campo de Dirac que, como veremos, é um espinor, uma vez que ele se transforma segundo a representação espinorial do grupo de Lorentz. O motivo é que a Lagrangiana de Dirac será nosso ponto de partida para a construção da Lagrangiana do setor de *léptons* da interação Eletrofraca do Modelo Padrão. Como veremos, suporemos que esta Lagrangiana seja invariante sob as transformações de simetria que serão apresentadas no capítulo 2 e como consequência imediata, ganharemos as interações [34].

Por último, no capítulo 5 construiremos a Lagrangiana do setor de *léptons* sem massa da interação Eletrofraca. Iniciaremos introduzindo conceitos fundamentais para o desenvolvimento da teoria, como por exemplo, quiralidade e helicidade e em seguida, faremos aplicação direta das ferramentas apresentadas nos capítulos anteriores. Como veremos, os bósons da interação Eletrofraca estão associados aos grupos de simetria interna  $U(1)$  e  $SU(2)$  e que a invariância da Lagrangiana sob tais grupos permitem naturalmente o surgimento das interações.



## 2 GRUPOS DE LIE

As leis da física, como algo universal, são as mesmas independente do ponto no espaço e da orientação do sistema de coordenadas utilizados para observação do sistema físico. Assim, ao girar o sistema de referência com o qual estamos trabalhando, ou mesmo transladando-o de uma certa distância, as medidas realizadas no ponto em que o evento físico ocorreu devem concordar com as realizadas antes das transformações impostas ao sistema de coordenada. Isso nos diz que as equações de movimento que descrevem a evolução dinâmica de um sistema devem permanecer invariantes sob determinada transformação de simetria. Assim, simetria se relaciona com o conceito de invariância das equações da dinâmica que por sua vez, garantem a preservação das medidas físicas. De um modo geral, estas ideias formam a base para a construção do Modelo Padrão. Neste, se insiste que as equações do movimento permaneçam inalteradas, em forma, sob determinada transformação de simetria [9].

Este capítulo tem como objetivo desenvolver toda uma linguagem matemática que permite tratar o conceito de simetria de uma forma bastante simplista e como resultado, teremos propriedades fundamentais da natureza sendo reveladas.

### 2.1 Introduzindo Grupos

Um grupo de simetria pode ser entendido como um conjunto de transformações realizadas em um objeto qualquer que deixam o mesmo invariante [31]. Um quadrado por exemplo, permanece o mesmo após uma rotação por  $90^\circ$ . O mesmo não é verdade para um ângulo de  $3^\circ$ . Seguindo a mesma ideia, o módulo de um vetor é sempre o mesmo ao realizarmos rotações mantendo a distância entre as extremidades fixa. Assim, rotações constituem um grupo de simetria e o mesmo pode ser dividido em discreto e contínuo. Estes caracteres são determinados pelos parâmetros de transformação (o ângulo de rotação nos exemplos anteriores). Para o quadrado, apenas rotações por  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,... são permitidas e assim rotações deste tipo constituem um grupo de simetria discreto. Entretanto, como um círculo pode ser rotacionado por qualquer ângulo e ainda permanecerá invariante, rotações em um círculo constitui um grupo de simetria contínuo.

A linguagem matemática envolvida na definição de uma grupo está relacionada com uma série de axiomas que o mesmo tem de cumprir. Assim [27,31]:

*Dado um conjunto  $G$ , cujos elementos  $g$  se combinam através de uma operação binária  $\circ$ , definimos um grupo  $(G, \circ)$  através dos axiomas*

- Fechamento: Se  $g_1$  e  $g_2 \in G$ , então  $g_1 \circ g_2 = g \in G$ .
- Elemento identidade: Sendo  $e$  o elemento identidade do grupo  $G$ , então  $e \circ g = g \circ e = g$ .
- Elemento inverso: Como  $g \in G$ ,  $g^{-1} \in G$  de tal modo que  $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$ .
- Associatividade: Se  $g_1, g_2$  e  $g_3 \in G$ , temos que as combinações entre eles são associativas, ou seja,  $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ .

É importante ter em mente que um grupo de simetria é algo bastante abstrato. Qualquer conjunto de objetos que satisfaçam esses axiomas podem ser definidos como um grupo de simetria. No entanto, a conexão entre grupo de simetria e física se faz através do conceito de representação [25].

*Uma representação é um mapeamento entre qualquer elemento do grupo e uma transformação linear, de algum espaço vetorial, que preserva as propriedades do grupo [31].*

Assim, seja  $g_1$  e  $g_2$  elementos de um grupo  $G$ , então o mapeamento

$$g \rightarrow D(g)$$

é de tal forma que

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2); \quad D(e) = I; \quad D(g^{-1}) = D^{-1}(g).$$

Para nossos propósitos, como veremos, as transformações lineares são matrizes quadradas [7, 25]. Para cada elemento do grupo existe uma representação na forma matricial. O conjunto de todas as representações matriciais dos elementos de um grupo, junto a operação binária de multiplicação de matrizes também formam um grupo [25].

Dedicaremos este capítulo para tratar dos conceitos estabelecidos pela teoria de Lie. Esta aborda simetrias contínuas e, como veremos, será de bastante relevância estudá-las. Agora que já definimos o que é um grupo de simetria e aprendemos sobre o conceito de representação, começaremos por discorrer sobre transformações que envolvem rotações, pois estas constituem um exemplo simples e bastante ilustrativo.

## 2.2 Grupo de Rotação: Uma Primeira Representação

Como já mencionado, as rotações também constituem um grupo de simetria contínuo e portanto fazem parte da teoria de Lie. Se realizarmos qualquer rotação em

torno do eixo perpendicular ao plano que define um círculo unitário, todos pontos  $(x, y)$ , tais que  $x^2 + y^2 = 1$ , serão mapeados no próprio círculo unitário, deixando o mesmo invariante. Veja que o grau da rotação aqui fica em um segundo plano, de tal modo que é possível rotações tão próximas quanto se deseja da transformação identidade. Esta não realiza qualquer alteração no objeto. Portanto, definiremos um grupo de simetria contínuo por aqueles que permitem transformações arbitrariamente próximas da transformação identidade.

Coloquemos nossa atenção dirigida aos vetores. Podemos então nos perguntar qual é o tipo da transformação de simetria que deixa o módulo de qualquer vetor invariante. A resposta a esta pergunta pode ser encontrada analisando o produto escalar entre dois vetores. Considere então a transformação  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' = R\mathbf{v}$  que deixa o módulo do vetor  $\mathbf{v}$  inalterado. Então

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = (R\mathbf{v})^T(R\mathbf{v}) = v^T R^T R v = v^T v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.1)$$

Portanto, para o módulo de um vetor permanecer o mesmo após uma transformação  $R$ , a mesma deve cumprir a condição

$$R^T R = I. \quad (2.2)$$

Tal expressão ainda pode ser explorada fazendo uso do conceito de determinante de matrizes. Veja:

$$\det(R^T R) = \det(R^T) \det(R) = (\det(R))^2$$

$$\det(R^T R) = \det I = 1$$

$$\det(R) = \pm 1. \quad (2.3)$$

Mas o que as expressões (2.2) e (2.3) nos dizem? A ideia é bem simples. A primeira nos informa sobre o grupo cujo os elementos são representados por matrizes ortogonais<sup>1</sup>. A segunda nos diz que este grupo é dividido em dois outros. O valor positivo na expressão (2.3) refere-se ao grupo das rotações, enquanto que o valor negativo pode ser associado ao grupo das reflexões espaciais<sup>2</sup> [31].

Com a definição do grupo de rotação bem estabelecida, podemos seguir estudando o mundo das rotações em sua forma algébrica de uma maneira bastante simples e esclarecedora.

<sup>1</sup>Uma matriz  $A$  é dita ortogonal se  $A^T = A^{-1}$ .

<sup>2</sup>Uma reflexão no espaço é permitida pela transformação  $x_i \rightarrow x'_i = -x_i (i = 1, 2, 3)$ .

### 2.2.1 Rotações em 2-D

Rotações em duas dimensões que deixam o módulo de qualquer vetor invariante podem ser efetuadas fazendo o uso do grupo  $SO(2)$ . Tal denominação refere-se ao fato de o grupo ser constituído por elementos que são representados por matrizes  $2 \times 2$ , ortogonais ( $O^T O = I$ ) e especiais ( $\det(O) = 1$ ).

Já se sabe que para um vetor rotacionado de um ângulo  $\theta$  no sentido horário em relação a origem, mantendo o módulo fixo, as coordenadas novas e antigas se relacionam respectivamente por [5]

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Tais equações, que podem ser reescritas na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nos diz que a matriz que permite uma rotação em duas dimensões é dada por:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

A matriz (2.4), junto com a multiplicação ordinária de matrizes (operação binária), satisfaz todos os axiomas requeridos pela definição de um grupo [31]. Além disso, como

$$R^T(\theta)R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} = I$$

e

$$\det R(\theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

o grupo em questão deve ser o  $SO(2)$ .

Se formos um pouco mais astutos em nossa análise à rotações bidimensionais, lembraremos que os números complexos podem ser representado, sem perda de informação, por um vetor no plano complexo. Consideremos o número complexo unitário

$$z = u + vi$$

onde

$$z^* z = u^2 + v^2 = 1.$$

Em coordenadas polares se escreve

$$z = R(\theta) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

uma vez que

$$R^*R = e^{-i\theta}e^{i\theta} = 1.$$

Podemos seguir investigando qual é o efeito que um número complexo unitário causa quando multiplicado por um outro número complexo qualquer. Assim, seja  $z = u + vi$  e apliquemos no mesmo, através da multiplicação de números complexos, o complexo unitário  $R(\pi) = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ . Assim:

$$z' = R(\pi)z = -1(u + vi) = -u - vi$$

Concluimos assim que o número complexo  $z$  sofreu uma rotação de  $180^\circ$  em torno da origem, mas seu módulo permaneceu fixo em tal transformação. Com esta pequena sondagem, deslumbramos o conceito por trás de um grupo conhecido como  $U(1)$ , aquele constituído por todos os números complexos unitários<sup>3</sup>. A condição que o define é dada por

$$U^*U = 1 \tag{2.5}$$

Isso nos diz claramente que  $U(1)$  e  $SO(2)$  realizam a mesma tarefa, exercem uma rotação em um vetor. Para ficar ainda mais claro o que estamos explorando, façamos a definição

$$1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

É importante observar que

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{e} \quad i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I$$

Escrevendo  $R(\theta)$  como

$$R(\theta) = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

vemos algo muito semelhante a (2.4), que permite rotações bidimensionais. Pelo o mesmo raciocínio, podemos escrever  $z = u + iv$  como

---

<sup>3</sup>Como veremos no capítulo 5, este é o grupo associado as interações eletromagnéticas.

$$z = u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

Assim, transformação  $z \rightarrow z' = R(\theta)z$  passa a ser dada por

$$z' = \begin{pmatrix} u' & -v' \\ v' & u' \end{pmatrix} = R(\theta)z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' & -v' \\ v' & u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos \theta - v \sin \theta & -v \cos \theta - u \sin \theta \\ u \sin \theta + v \cos \theta & -v \sin \theta + u \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ou, de uma forma bem mais ilustrativa,

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Tudo isso ratifica a nossa afirmação anterior de que os grupos  $SO(2)$  e  $U(1)$  realizam a mesma tarefa, desempenham uma rotação no plano.

### 2.2.2 Rotações em 3-D

As matrizes que permitem uma rotação em três dimensões são dadas por [25]

$$R_x(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad R_y(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad R_z(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

onde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  são chamados de ângulos de Euler [9]. Estas matrizes de rotação satisfazem tanto os axiomas listados anteriormente na definição de um grupo de simetria quanto as condições (2.2) e (2.3) com o sinal positivo e, portanto, fazem parte de um grupo sob multiplicação de matrizes. Sendo mais específico, elas ainda constituem uma base para este grupo, denominado  $SO(3)$ . Ou seja, qualquer elemento do mesmo pode ser encontrado fazendo uma combinação linear de (2.7) [31]. Ou seja,

$$R = \alpha_1 R_x(\theta_1) + \alpha_2 R_y(\theta_2) + \alpha_3 R_z(\theta_3)$$

onde  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são parâmetros reais.

Da mesma forma que encontramos uma segunda maneira para descrever rotações em um plano, podemos determinar aqui ferramentas que possibilitem rotações no espaço tridimensional diferentes de (2.7). Essa ideia é fundamentada no conceito por trás da possível extensão dos números complexos. Uma rotação em três dimensões é possível quando se faz presente três parâmetros [9]. Até agora em nosso desenvolvimento teórico,

para manter o comprimento de um vetor constante, estamos sempre acrescentando um vínculo a nossas transformações, esta tem que ser unitária. Tal condição extra faz com que tenhamos exatamente um grau de liberdade ao considerar números complexos convencionais ( $z = u + iv$ )<sup>4</sup>. Isso nos induz a suposição de que em uma rotação tridimensional, com a condição de transformação unitária  $U$ , se faz necessário a construção de um objeto de modo que, com a aplicação do vínculo, possibilite a existência dos três graus de liberdade requeridos. Assim, tais objetos devem possuir quatro parâmetros. Eles são conhecidos pela comunidade física por quatérnios<sup>5</sup>.

Os quatérnios podem ser entendidos como uma extensão ao números complexos [31]. O que diferencia um número complexo de um real é, em princípio, a presença de uma parte imaginária  $iv$  ( $z = u + iv$ ), onde  $i^2 = -1$ . De forma semelhante, podemos supor a existência de outras unidades imaginárias  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  e definir os quatérnios por [31]

$$q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \quad (2.9)$$

e

$$\mathbf{ijk} = -1 \quad (2.10)$$

Esta última nos possibilita a combinação de quatérnios<sup>6</sup>. Colocando em prática (2.9) e (2.10), definimos um quatérnio unitário como sendo aquele que satisfaz o vínculo

$$q^\dagger q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (2.11)$$

A expressão (2.8) pode ainda ser colocada em uma forma matricial. Podemos definir as matrizes [31]

$$\mathbf{1} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

de modo que condições (2.9) e (2.10) sejam satisfeitas(2.4). Veja por exemplo que

$$\mathbf{ijk} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I}$$

<sup>4</sup>Um número complexo, em duas dimensões, é constituído por dois parâmetros,  $u$  e  $v$  ( $z = u + iv$ ). Quando se considera que eles são unitários, temos associado o vínculo  $u^2 + v^2 = 1$ . Assim, um parâmetro é escrito em função do outro e, portanto, permanecendo apenas um único grau de liberdade.

<sup>5</sup>Uma demonstração de que esses objetos permitem rotações em três dimensões pode ser encontrada em [31]. No decorrer da subseção, temos como objetivo somente mostrar que eles constituem um grupo.

<sup>6</sup>Veja por exemplo que,  $\mathbf{ijk} = -1 \rightarrow \mathbf{i}^2\mathbf{jk} = -\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{jk} = \mathbf{i}$

Assim, podemos escrever um quatérnio em sua forma matricial

$$q = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + id & -b - ic \\ b - ic & a - id \end{pmatrix}$$

e verificar que

$$\det q = (a + id)(a - id) - (-b - ic)(b - ic) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad (2.12)$$

Por outro lado, seja  $q_1$  e  $q_2$  quatérnios unitários escritos em sua forma matricial. A combinação das duas, por multiplicação de matrizes, fornece também uma matriz unitária.

Ou seja,

$$(q_1 q_2)^\dagger = q_2^\dagger q_1^\dagger = q_2^{-1} q_1^{-1} = (q_1 q_2)^{-1}$$

e

$$\det(q_1 q_2) = \det q_1 \det q_2 = 1.$$

Concluimos assim que os quatérnios unitários formam um grupo, conhecido como  $SU(2)$  ( $\det U = 1, U^\dagger U = 1$ ), cujos elementos são construídos pela combinação linear das matrizes  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ . Este grupo de simetria, como veremos, é de extrema importância para a física, pois junto ao grupo  $U(1)$ , possibilita a unificação entre as interações Fraca e Eletromagnética, a interação Eletrofraca.

### 2.3 A Álgebra de Lie

*Para um grupo de Lie  $G$  (dado por matrizes  $n \times n$ ), a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  é dada pelas matrizes  $n \times n$   $X$  tais que  $e^{tX} \in G$  para  $t \in \mathbb{R}$  [31].*

A definição acima nos diz que os objetos  $X$ , de algum modo, geram um elemento do grupo com o qual eles se associam. Deste modo, as matrizes  $X$  serão ditas geradores do grupo e os elementos do mesmo serão dados por exponenciais. Ou seja,

$$e^{tX} \quad (2.13)$$

onde  $t$  é um parâmetro<sup>7</sup> que permite a transformação. Os geradores  $X$ , que compõem o que definimos como álgebra de Lie, permitem a combinação dos elementos do grupo, antes através da requerida operação binária, de uma forma bastante simplista. No entanto, devemos entender primeiro como os próprios geradores se combinam. Esta operação deve ser fechada sobre a álgebra de Lie, ou seja, ao combinar dois elementos da álgebra de

<sup>7</sup>Um exemplo ilustrativo para um parâmetro de transformação seria o ângulo de rotação  $\theta$  em (2.4).



Lie, o elemento resultante deve fazer parte da mesma [31]. A ferramenta que permite esta operação é conhecida como colchetes de Lie  $[\cdot, \cdot]$ . Assim, dado dois gerados  $X$  e  $Y$ , a combinação dos mesmos ocorre através do que chamamos de comutador,

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (2.14)$$

Com esta definição, afirmamos que a álgebra de Lie é fechada sobre os colchetes de Lie<sup>8</sup> [32]. Por último, a operação binária, que permite a combinação de dois elementos do grupo, se associa com a combinação, ou melhor, soma dos elementos da álgebra de Lie pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [31],

$$e^X + e^Z = e^{X+Z+\frac{1}{2}[X,Z]+\frac{1}{12}[X[X,Z]]-\dots} \quad (2.15)$$

onde  $X$  e  $Z$  são os já definidos geradores.

Até agora, falamos da álgebra de Lie de uma forma bem simplificada. No entanto, existe toda uma linguagem matemática que a define.

*A álgebra de Lie é um espaço vetorial  $g$  equipado com uma operação binária  $[\cdot, \cdot] : g \times g \rightarrow g$  que satisfaz os seguintes axiomas [6, 24]:*

- *Bilinearidade:*  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  e  $[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$ .
- *Anticomutatividade:*  $[X, Y] = -[Y, X]$ .
- *Identidade de Jacobi:*  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ .

*onde  $X, Y$  e  $Z$  compõe a álgebra de Lie e  $a, b$  e  $c$  são quaisquer números escalares arbitrários.*

Mostrar que o comutador satisfaz estes axiomas constitui uma tarefa bastante simples. Veja por exemplo que

$$[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X].$$

### 2.3.1 Os Geradores e Álgebra de Lie de $SU(2)$

Como vimos,  $SU(2)$ , junto a multiplicação ordinária de matrizes, constitui um grupo cujos elementos são matrizes  $2 \times 2$ , unitárias e com determinante igual a 1. Faremos uso destas características de definição para encontrar os geradores da álgebra de Lie e

---

<sup>8</sup> $XY$  e  $YX$ , de forma individual, podem não ser parte da álgebra de Lie. No entanto,  $XY - YX$  sempre serão.

entender como os mesmos se combinam sob a relação de comutação<sup>9</sup>. Vejamos como isso é feito. Para  $SU(2)$ , temos

- Grupo unitário:  $U^\dagger U = I$ .
- Determinante 1:  $\det U = 1$ .

No entanto, sabemos que os geradores, ao serem exponenciados, fornecem um elemento correspondente do grupo. Assim, pensemos em um elemento de  $SU(2)$  como sendo

$$e^{iJ_j}$$

onde  $J_j$  é o gerador. Veja então que

$$U^\dagger U = (e^{iJ_j})^\dagger e^{iJ_j} = e^{-iJ_j^\dagger} e^{iJ_j} = I = e^0.$$

Aplicando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (2.15),

$$\begin{aligned} i(J_j - J_j^\dagger) + \frac{1}{2} [J_j^\dagger, J_j] - \dots &= 0 \\ \Rightarrow [J_j^\dagger, J_j] &= 0 \\ \Rightarrow J_j^\dagger &= J_j \\ \Rightarrow [J_j, J_j] &= 0. \end{aligned}$$

Veja que os geradores de  $SU(2)$  são quantidades hermitianas<sup>10</sup>. Isto é extremamente importante para a física, pois se reflete diretamente ao fato de que observáveis físicos devem ser quantidades reais [31]. Por outro lado,

$$\det U = \det e^{iJ_j} = e^{i\text{Tr}J_j} = e^0 \Rightarrow \text{Tr}J_j = 0.$$

Desta forma, os geradores de  $SU(2)$  devem ser matrizes hermitianas e de traço nulo. Seja  $A$  uma matriz geral com estas características [9]. Então<sup>11</sup>,

$$A = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & -a \end{pmatrix}$$

<sup>9</sup> Apesar de a álgebra de Lie ter toda um arcabouço teórico desenvolvido, faremos uso dos colchetes de Lie  $[,]$  como a própria definição de álgebra de Lie. Assim, a partir de agora, quando falarmos de uma álgebra de Lie, estaremos nos referindo ao comportamento dos geradores sob os colchetes de Lie.

<sup>10</sup> Uma quantidade  $A$  é dita hermitiana se  $A^\dagger = A$  [15].

<sup>11</sup> Veja que estamos tratando com valores completamente arbitrários aqui e como  $A^\dagger = A$ , concluímos que esta matriz engloba qualquer matriz hermitiana de traço nulo.

onde  $a, b$  e  $c$  são números reais arbitrários. Esta matriz ainda pode ser decomposta em uma soma, ou seja,

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}.$$

Veja que uma matriz hermitiana de traço nulo qualquer pode ser escrita como uma combinação linear de três outras matrizes. Estas são chamadas na literatura por matrizes de spin de Pauli [15]  $\sigma^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), onde

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

A álgebra de Lie (relação de comutação), satisfeitas por estas matrizes, pode ser verificada facilmente. Basta calcular a relação  $[\sigma^j, \sigma^k] = \sigma^j \sigma^k - \sigma^k \sigma^j$ . Veja por exemplo que

$$[\sigma^1, \sigma^2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i\epsilon^{213}\sigma^3.$$

Seguindo com o mesmo raciocínio para todas as matrizes  $\sigma$ , chegaremos a relação de comutação

$$[\sigma^j, \sigma^k] = 2i\epsilon^{jkl}\sigma^l,$$

onde fazemos uso do tensor de Levi-Civita

$$\epsilon^{ijk} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ para permutações cíclicas nos índices } (123, 312 \text{ e } 231). \\ -1, \text{ para permutações não cíclicas dos índices } (213, 321 \text{ e } 132). \\ 0, \text{ para quaisquer índices repetidos.} \end{array} \right\}.$$

Por questão de conveniência, definiremos os geradores de  $SU(2)$  como sendo<sup>12</sup>

$$J^i = \frac{1}{2}\sigma^i,$$

de modo que a álgebra de Lie passa a ser

$$[J^j, J^k] = i\epsilon^{jkl}J^l. \quad (2.17)$$

---

<sup>12</sup> Isso nos diz que  $SU(2)$  e  $SO(3)$  possuem a mesma álgebra de Lie [31]

### 2.3.2 Os geradores e a álgebra de $SO(3)$

Por questão de completeza, listarei aqui os geradores do grupo  $SO(3)$  e derivarei a sua álgebra de Lie. O procedimento utilizado é análogo ao da subseção anterior [31]. Assim, levando em consideração que  $SO(3)$  é constituído por todas as matrizes  $3 \times 3$ , ortogonais ( $O^T O = 1$ ) e com determinante igual a 1, seus geradores são<sup>13</sup>

$$J_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Fazendo uso do tensor de Levi-Civita, podemos escrever (2.18) em uma forma mais compacta<sup>14</sup>,

$$J_j = -i(\epsilon_{jkl})_{3 \times 3}. \quad (2.19)$$

Veja por exemplo que

$$J_1 = \begin{pmatrix} (J_1)_{11} & (J_1)_{12} & (J_1)_{13} \\ (J_1)_{21} & (J_1)_{22} & (J_1)_{23} \\ (J_1)_{31} & (J_1)_{32} & (J_1)_{33} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \epsilon_{111} & \epsilon_{112} & \epsilon_{113} \\ \epsilon_{121} & \epsilon_{122} & \epsilon_{123} \\ \epsilon_{131} & \epsilon_{132} & \epsilon_{133} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o elemento que se encontra na linha 2 e na coluna 3 do gerador  $J_2$  é, por exemplo,  $(J_2)_{23} = -i\epsilon_{223} = 0$ . Esta notação nos permite encontrar a álgebra de Lie do grupo  $SO(3)$  de uma forma bastante simples e direta [25]. Veja que  $[J_j, J_k]$  é uma matriz  $3 \times 3$  em que o elemento que se encontra na  $m$ -ésima linha e  $n$ -ésima coluna é dado por

$$\begin{aligned} [J_j, J_k]_{mn} &= (J_j)_{mp}(J_k)_{pn} - (J_k)_{mp}(J_j)_{pn} \\ &= \epsilon_{jmp}\epsilon_{pkn} + \epsilon_{kmp}\epsilon_{pnj} \\ &= (\delta_{jk}\delta_{mn} - \delta_{jn}\delta_{mk}) + (\delta_{kn}\delta_{mj} - \delta_{kj}\delta_{mn}) \\ &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \\ &= \epsilon_{jkp}\epsilon_{pmn} \\ &= i\epsilon_{jkp}(-i\epsilon_{pmn}) \\ &= i\epsilon_{jkp}(J_p)_{mn}. \end{aligned}$$

<sup>13</sup>O imaginário  $i$  foi colocado nessas matrizes afim de se conseguir objetos hermitianos, ou seja  $J^\dagger = J$ . Em contra partida, ao fazer  $J \rightarrow iJ$ , um elemento de  $SO(3)$  passa a ser dado por  $e^{i\phi J}$ , onde  $\phi$  em um parâmetro de transformação [31].

<sup>14</sup>O índice  $k$  refere-se a linha e o índice  $l$  refere-se a coluna.

Portanto, a álgebra de Lie satisfeita pelos geradores de  $SO(3)$  é dada por<sup>15</sup>

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkp}J_p. \quad (2.20)$$

É de grande relevância, como veremos na próxima seção, reconhecer que esta é a mesma álgebra satisfeita pela momento angular  $\mathbf{L}$  [15],

$$[L_j, L_k] = i\epsilon_{jkl}L_l \quad (2.21)$$

onde

$$L_l = \epsilon_{jkl}x_jp_k \quad (2.22)$$

e<sup>16</sup>

$$\mathbf{p} = -i\nabla.$$

Estabelecidos os geradores e a álgebra de Lie, um elemento  $R_1$ , de  $SO(3)$ , pode ser escrito na forma

$$R_1(\phi_1) = e^{i\phi_1 J_1}.$$

No entanto, podemos expandir está exponencial em uma série de Taylor [5, 7]. Ou seja,

$$R_1(\phi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \phi_1^n J_1^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} \phi_1^{2k} J_1^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} \phi_1^{2k+1} J_1^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

É muito simples verificar que<sup>17</sup>

$$\begin{cases} i^{2k} = (-1)^k \\ i^{2k+1} = i(-1)^k \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} J_1^{2k} = \begin{cases} I, & \text{se } k = 0 \\ j_1, & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \\ J_1^{2k+1} = J_1 \end{cases},$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $j_1$  é dado por

$$j_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$R_1(\phi_1) = I + j_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi_1^{2k}}{(2k)!} + iJ_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi_1^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

<sup>15</sup>Os índices matriciais  $m$  e  $n$  foram omitidos.

<sup>16</sup>Estamos utilizando o sistema de unidades em que  $\hbar = c = 1$ .

<sup>17</sup>Primeiro reconheça que  $i^2 = -1$  e use-o para calcular as outras potências ( $i^3 = -i$ ), em seguida, faça o mesmo para  $J$ . Uma análise acurada conduzirá a esses resultado.

Ou seja,

$$R_1(\phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi_1^{2k}}{(2k)!} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi_1^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Em uma forma mais compacta<sup>18</sup>,  $R_1(\phi_1)$  toma a forma da primeira matriz em (2.7),

$$R_1(\phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ 0 & -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{pmatrix}.$$

Esse já era um resultado esperado. Da teoria de Lie, ao exponenciar um elemento da álgebra obtemos um elemento correspondente do grupo.

## 2.4 O Grupo $SO(N)$ e a Representação Espinorial

O conjunto de todas as matrizes  $N \times N$ , especiais ( $\det O = 1$ ) e ortogonais ( $O^T O = I$ ) constituem um grupo sob multiplicação de matrizes. A este grupo damos a designação  $SO(N)$  e as características que o definem serão de grande utilidade para a definição da representação espinorial que, de um modo bastante singelo, permitirá transformações de objetos conhecidos como espinores [25]. Tais objetos serão apresentados em mais detalhes no capítulo 4 e a um tratamento mais abstrato é que esta seção se dedica.

Já estamos bastante acostumado com a ideia de que um elemento do grupo de Lie pode ser escrito em termos dos geradores. Assim, de um modo geral, um elemento  $O$  de  $SO(N)$  pode ser parametrizado da forma [25]

$$O = e^{i\alpha_j J_j}, \quad (2.23)$$

onde  $\alpha_j (j = 1, \dots, n)$  são parâmetros reais que permitem a transformação<sup>19</sup>. A condição de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} O^T O &= e^{i\alpha_j J_j^T} e^{i\alpha_j J_j} \\ &= \left( I + i\alpha_j J_j^T - \frac{(\alpha_j J_j^T)^2}{2} - \dots \right) \left( I + i\alpha_j J_j - \frac{(\alpha_j J_j)^2}{2} - \dots \right) \\ &= I + i\alpha_j (J_j^T + J_j) - \dots = I, \end{aligned}$$

nos diz que  $J_j^T = -J_j$ <sup>20</sup>. Isto faz com que o número de parâmetros  $\alpha$ , que possibilita

<sup>18</sup>Usamos a expansão em série de Taylor para o  $\cos \phi_1$  e para o  $\sin \phi_1$  [5].

<sup>19</sup>A letra  $O$  foi escolhida pela condição de transformação ortogonal.

<sup>20</sup>Teríamos obtido o mesmo resultado se tivéssemos usado (2.15) [31].

(2.23), seja diferente<sup>21</sup>. Ou seja, se

$$i\alpha_j J_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

então, a condição de ortogonalidade faz com que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -a_{ji}, & j \neq i \end{cases},$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_{n \times n},$$

onde

$$b_{jk} = \sum_{m=1}^n a_{mj} a_{mk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}. \quad (2.25)$$

É fácil notar que  $b_{jk} = b_{kj}$ . Isto faz com que tenhamos  $N$  equações de vínculo tipo (2.25) para  $j = k$  (elementos da diagonal principal) e  $\frac{N^2 - N}{2}$  equações para  $j \neq k$  (elementos fora da diagonal principal<sup>22</sup>). Uma vez que os elementos da diagonal principal em (2.24) devem ser nulos, a condição de grupo especial não acrescenta nenhum vínculo extra. Assim, temos  $N^2$  parâmetros ( $a_{jk}$ ) satisfazendo  $N + \frac{N^2 - N}{2}$  equações de vínculo. Então, podemos concluir que o número de parâmetros necessários para escrever (2.24) junto a condição de matriz ortogonal, passa a ser

$$n^2 - \left( n + \frac{n^2 - n}{2} \right) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (2.26)$$

O modo como propomos (2.23) foi completamente arbitrário, de modo que os argumentos apresentados acima ainda seriam verdadeiros se tivéssemos estabelecido que

---

<sup>21</sup>Antes da condição de ortogonalidade são necessários  $N^2$  parâmetros para se escrever uma matriz  $N \times N$  geral.

<sup>22</sup>A divisão por 2 se deve a simetria à diagonal principal.

$O$  assumisse a forma<sup>23</sup>

$$O = e^{\frac{1}{2}i\alpha_{jk}J_{jk}}, \quad (2.27)$$

onde  $\alpha_{jk}$  (como antes,  $\alpha_{jk}$  são parâmetros reais que permitem a transformação) e  $J_{jk}$  são quantidades anti-simétricas<sup>24</sup>. Assim, ainda seriam necessários  $\frac{n(n-1)}{2}$  parâmetros  $\alpha_{jk}$  para que (2.28) fosse possível<sup>25</sup>.

Podemos prosseguir perguntando que aspecto teria a álgebra de Lie satisfeita pelos geradores  $J_{jk}$ . A derivação da mesma, como veremos, pode ser entendida como uma simples questão de generalização. Começemos por lembrar que para três dimensões<sup>26</sup> a álgebra é a mesma obedecida pelo momento angular  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ , onde

$$L_\ell = \epsilon_{jkl}x_jp_k.$$

Esta expressão, restrita ao caso tridimensional, pode ser generalizada para qualquer dimensão [25]. Basta multiplicarmos por  $\epsilon_{mnl}$  do dois lados e definir

$$\begin{aligned} L_{mn} = \epsilon_{mnl}L_\ell &= \epsilon_{mnl}\epsilon_{ljk}x_jp_k \\ &= (\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})x_jp_k \\ &= x_m p_n - x_n p_m. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Uma vez que [15]

$$[x_j, x_k] = [p_j, p_k] = 0 \quad (2.29)$$

e

$$[x_j, p_k] = i\delta_{jk}, \quad (2.30)$$

podemos facilmente determinar a álgebra de Lie satisfeita por (2.28). No entanto, precisaremos de duas relações extras envolvendo comutadores [15],

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (2.31)$$

e

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]. \quad (2.32)$$

<sup>23</sup>O fator  $\frac{1}{2}$  evita termos repetidos na soma. Por exemplo, se  $j = 1, 2$  e  $k = 1, 2$ , então  $\frac{1}{2}\alpha_{jk}J_{jk} = \frac{1}{2}(\alpha_{1k}J_{1k} + \alpha_{2k}J_{2k}) = (\alpha_{12}J_{12} + \alpha_{21}J_{21}) = \alpha_{12}J_{12}$ .

<sup>24</sup>Se  $a_{ij}$  é dito anti-simétrico, então  $a_{ji} = -a_{ij}$ .

<sup>25</sup>É importante notar que os índices  $j$  e  $k$  não são matriciais. Eles têm o papel de rotular os geradores e seus respectivos parâmetros. Assim, o lado direito de (2.24) tem a mesma forma após a transição  $\alpha_j J_j \rightarrow \alpha_{jk} J_{jk}$  [25].

<sup>26</sup>Veja subseção 2.3.2.



Calculemos assim a álgebra,

$$\begin{aligned} [L_{mn}, L_{pq}] &= [x_m p_n - x_n p_m, x_p p_q - x_q p_p] \\ &= [x_m p_n, x_p p_q] - [x_m p_n, x_q p_p] - [x_n p_m, x_p p_q] + [x_n p_m, x_q p_p]. \end{aligned}$$

Aplicando (2.31), (2.32), (2.29) e (2.30) podemos ver que<sup>27</sup>,

$$[x_a p_b, x_c p_d] = -i\delta_{cb}x_a p_d + i\delta_{ad}x_c p_b$$

e assim,

$$\begin{aligned} [L_{mn}, L_{pq}] &= -i\delta_{pm}x_m p_q + i\delta_{mq}x_p p_n - (-i\delta_{qn}x_m p_p + i\delta_{mp}x_q p_n) + \\ &\quad -(-i\delta_{pm}x_n p_q + i\delta_{nq}x_p p_m) - i\delta_{qm}x_n p_p + i\delta_{np}x_q p_m \\ &= i[\delta_{pm}(x_n p_q - x_q p_n) - \delta_{qm}(x_n p_p - x_p p_n) + \\ &\quad -\delta_{pn}(x_m p_q - x_q p_m) + \delta_{qn}(x_m p_p - x_p p_m)] \\ &= i(\delta_{pm}L_{nq} - \delta_{qm}L_{np} - \delta_{pn}L_{mq} + \delta_{qn}L_{mp}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

De fato, como no caso tridimensional, esta é a mesma álgebra satisfeita pelos geradores  $J_{jk}$  em (2.27) [25], onde<sup>28</sup>

$$[J_{jk}, J_{\ell m}] = i(\delta_{\ell j}J_{km} - \delta_{mj}J_{k\ell} - \delta_{\ell k}J_{jm} + \delta_{mk}J_{j\ell}). \quad (2.34)$$

Os geradores  $J_{jk}$  de  $SO(N)$  podem ser facilmente determinados considerando transformações infinitesimais. Seja assim  $\alpha_{jk}$  parâmetros infinitesimais. Então, as coordenadas de um vetor  $N$ -dimensional se transformam como [25]

$$\begin{aligned} x'_m &= \left[ e^{\left(\frac{1}{2}\alpha_{jk}J_{jk}\right)} \right]_{mn} x_n \\ &\simeq \left[ \delta_{mn} + \frac{i}{2}\alpha_{jk}(J_{jk})_{mn} \right] x_n. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\delta x_m = x'_m - x_m = \frac{i}{2}\alpha_{jk}(J_{jk})_{mn}x_n.$$

Por outro lado, para transformações infinitesimais, também é verdade que [25]

$$\delta x_m = \alpha_{mn}x_n.$$

<sup>27</sup>Os índices  $a, b, c$  e  $d$  foram colocados apenas para generalizar.

<sup>28</sup>Os índices matriciais serão omitidos. De fato, a álgebra se escreve  $[J_{jk}, J_{\ell m}]_{pq} = i(\delta_{\ell j}(J_{km})_{pq} + \delta_{mj}(J_{k\ell})_{pq} - \delta_{\ell k}(J_{jm})_{pq} + \delta_{mk}(J_{j\ell})_{pq})$ , onde  $p$  e  $q$  são os índices que rotulam as entradas da matriz.

Como exemplo ilustrativo, pensemos no caso tridimensional, onde<sup>29</sup>

$$\delta R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e

$$\delta x_1 = 0; \quad \delta x_2 = \theta x_3; \quad \delta x_3 = -\theta x_2.$$

Então, podemos concluir que

$$\alpha_{mn} = \frac{i}{2} \alpha_{jk} (J_{jk})_{mn}$$

e assim, afim de satisfazer essa relação<sup>30</sup>,

$$(J_{jk})_{mn} = -i(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}) \quad (2.35)$$

É muito conveniente saber que (2.35) satisfaz (2.34) [25]. Isto não poderia ser diferente.

Agora sim estamos equipados com ferramentas que possibilitam a definição de uma representação espinorial,

*Se existem  $N(N-1)/2$  matrizes  $\Gamma_j$  tais que*

$$\{\Gamma_j, \Gamma_k\} = \Gamma_j \Gamma_k + \Gamma_k \Gamma_j = 2\delta_{jk}$$

*onde  $\{\Gamma_j, \Gamma_k\}$  é chamado de anti-comutador entre as matrizes  $\Gamma_j$  e  $\Gamma_k$ , temos que*

$$M_{jk} = -\frac{i}{4} [\Gamma_j, \Gamma_k] \quad (2.36)$$

*também satisfaz a álgebra do grupo  $SO(N)$  e corresponde, portanto, a outra representação do grupo, a espinorial [25].*

Um exemplo ilustrativo de uma representação espinorial se faz presente nas rotações através do grupo  $SU(2)$ . As matrizes de spin de Pauli (2.16) satisfazem a condição de anti-comutação requerida [15],

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk},$$

<sup>29</sup>O símbolo  $\delta$  rotula uma transformação infinitesimal. Esta é obtida expandindo as entradas da matriz de transformação em série de Taylor até primeira ordem.

<sup>30</sup>Mais uma vez usamos a anti-simetria de  $\alpha$ ,  $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$ .

e assim seus geradores são dados por

$$M_{jk} = -\frac{i}{4}[\sigma_j, \sigma_k]. \quad (2.37)$$

Esse mesmo valor é encontrado reescrevendo os geradores de  $SU(2)$  ( $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ ), derivados na subseção 2.3.1, como

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}.$$

Isto pode ser visto diretamente de (2.17),

$$\begin{aligned} [J_j, J_k] &= i\epsilon_{jkl}J_l \Rightarrow \frac{1}{4}[\sigma_j, \sigma_k] = i\epsilon_{jkl}J_l \Rightarrow -\frac{i}{4}[\sigma_j, \sigma_k] = \epsilon_{jkl}J_l \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{jk} = \epsilon_{jkl}J_l \Rightarrow \epsilon_{ijk}M_{jk} = -\epsilon_{ijk}\epsilon_{kjl}J_l \Rightarrow \epsilon_{ijk}M_{jk} = 2\delta_{il}J_l \Rightarrow \\ &\Rightarrow J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}. \end{aligned}$$

Para finalizarmos esta seção, conseguimos um elemento de  $SU(2)$  (representação espinorial do grupo das rotações [25]) exponenciando os geradores (2.37), ou seja,

$$U = e^{\frac{i}{2}\alpha_{jk}M_{jk}} = e^{\frac{i}{8}\alpha_{jk}[\sigma_j, \sigma_k]} \quad (2.38)$$

## 2.5 O Grupo de Lorentz

Na relatividade especial, onde as coordenadas espaciais e temporais ganham o mesmo status na teoria (as duas compõem juntas e de forma dependente o que chamamos de espaço-tempo), existe um objeto que é invariante sob as transformações de Lorentz. Ou seja, se  $I$  for este objeto, então<sup>31</sup> [16],

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2.$$

Podemos ainda escrever a expressão anterior em uma notação mais compacta,

$$I = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu, \quad (2.39)$$

onde  $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$  e  $\eta_{\mu\nu}$ , chamada métrica do espaço de Minkowski<sup>32</sup> definida como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

<sup>31</sup>Continuando com o sistema de unidades em que  $c = \hbar = 1$ , temos as correspondências  $x^0 \rightarrow t, x^1 \rightarrow x, x^2 \rightarrow y$  e  $x^3 \rightarrow z$ .

<sup>32</sup>Também chamada de métrica do espaço plano [28].

Se denotarmos as transformações de Lorentz por  $\Lambda$ , então, como  $I$  é um invariante,

$$x'^{\sigma}x'_{\sigma} = x'^{\sigma}\eta_{\sigma\rho}x'^{\rho} = (\Lambda^{\sigma}_{\mu}x^{\mu})\eta_{\sigma\rho}(\Lambda^{\rho}_{\nu}x^{\nu}) = x^{\mu}(\Lambda^{\sigma}_{\mu}\eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu})x^{\nu} = x^{\mu}\eta_{\mu\nu}x^{\nu} = x^{\mu}x_{\mu},$$

ou seja<sup>33</sup>,

$$\Lambda^{\sigma}_{\mu}\eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad \Lambda^T\eta\Lambda = \eta. \quad (2.41)$$

A expressão (2.41), que defini as transformações de Lorentz [31], tem algumas características interessantes para a definição do grupo de Lorentz. Veja que

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^T\eta\Lambda) &= \det\eta \\ \det\Lambda^T \det\eta \det\Lambda &= 1 \\ (\det\Lambda)^2 &= 1 \\ \det\Lambda &= \pm 1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda^{\sigma}_{0}\eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{0} &= \eta_{00} \\ (\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i_0)^2 &= 1 \\ \Lambda^0_0 &= \pm \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Desta forma, as transformações de Lorentz se dividem em quatro. A tabela 5 resume o que acabamos de fazer.

	$L_+^{\uparrow}$	$L_-^{\uparrow}$	$L_-^{\downarrow}$	$L_+^{\downarrow}$
$\det\Lambda$	+1	-1	-1	+1
$\Lambda^0_0$	$\geq +1$	$\geq +1$	$\leq -1$	$\leq -1$

**Tabela 5:** Fonte: [25]. Divisão das transformações de Lorentz em outras quatro transformações.

De todos esses conjuntos, o único que forma um grupo é  $L_+^{\uparrow}$ <sup>34</sup>, o grupo *ortocrono próprio* [25]. Para nossos propósitos, este será o próprio grupo de Lorentz e assim será nosso objeto de estudo<sup>35</sup>.

O grupo de Lorentz envolve rotações e *Boosts*<sup>36</sup> e assim, uma transformação

<sup>33</sup>As duas notações são equivalentes. Uma colocamos na notação indicial e a outra na forma matricial, onde  $\Lambda^{\sigma}_{\mu} = (\Lambda_{\mu}^{\sigma})^T$ .

<sup>34</sup>Veja que a combinação de dois elementos de um grupo com determinante igual a  $-1$ , gera um elemento com determinante  $+1$ , este já não pertence ao grupo. O mesmo raciocínio vale para  $\Lambda^0_0$

<sup>35</sup>A razão encontra-se no fato de que o grupo de Lorentz completo possui quatro componentes. Estas são obtidas por transformações de paridade e de reversão temporal aplicadas a  $L_+^{\uparrow}$  [31].

<sup>36</sup>Os *boosts* relaciona as coordenadas do espaço-tempo  $x'$  e  $x$  de dois referenciais inerciais  $S$  e  $S'$  em

completa é escrita como

$$\Lambda = \Lambda(R)\Lambda(\vec{\beta}), \quad (2.44)$$

onde  $\vec{\beta} = \vec{V}/c$ . A forma destas matrizes  $\Lambda$  já deve ser bem familiar para nós, uma vez que são assuntos bem explanados em um curso de relatividade especial<sup>37</sup>. Entretanto, como exemplo ilustrativo, uma rotação no espaço de Minkowski é dada por

$$\Lambda(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & R_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

e um *boost* na direção  $x$ , por<sup>38</sup>

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

e  $R_{3 \times 3}$  são as matrizes que permitem rotações em três dimensões (2.7) [25, 31].

### 2.5.1 Os Geradores e a Álgebra do Grupo de Lorentz

Podemos começar esta seção nos perguntando quantas quantidades reais são necessárias para parametrizar um elemento do grupo de Lorentz. É importante observar que as matrizes  $\Lambda$  possuem 16 entradas. No entanto, (2.41) nos garante 10 equações de vínculos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^\sigma{}_\rho \eta_{\sigma\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma = 1 \quad \rightarrow \quad 1 \text{ equação.} \\ \Lambda^\sigma{}_i \eta_{\sigma\rho} \Lambda^\rho{}_i = -1, \quad i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad \rightarrow \quad 3 \text{ equações.} \\ \Lambda^\sigma{}_i \eta_{\sigma\rho} \Lambda^\rho{}_j = 0, \quad i \neq j \quad (i = 1, 2 \text{ e } 3 ; j = 1, 2 \text{ e } 3) \quad \rightarrow \quad 6 \text{ equações.} \end{array} \right. .$$

---

movimento relativo um em relação ao outro.

<sup>37</sup>Veja por exemplo [28]

<sup>38</sup>Seja  $v$  a velocidade relativa entre os referenciais.

Portanto, o número de parâmetros necessários são 6. Sendo assim, comecemos, de modo equivalente a seção 2.4, com uma parametrização do tipo<sup>39</sup>

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}}, \quad (2.45)$$

onde  $\omega^{\mu\nu}$  são quantidades anti-simétricas reais que representam os 6 parâmetros e  $L_{\mu\nu}$ , também anti-simétrico nos índices, são os geradores<sup>40</sup>. Então, uma transformação do grupo de Lorentz [25],

$$x'^{\sigma} = \Lambda^{\sigma}_{\rho} x^{\rho},$$

é dada por

$$x'^{\sigma} = (e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}})^{\sigma}_{\rho} x^{\rho}. \quad (2.46)$$

Como usual, se supormos que  $\omega^{\mu\nu}$  são parâmetros infinitesimais, temos,

$$\begin{aligned} \Lambda^{\sigma}_{\rho} &\simeq (1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho} \\ &= \delta^{\sigma}_{\rho} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(L_{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho}. \end{aligned}$$

E assim,

$$\delta x^{\sigma} = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(L_{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho} x^{\rho} \quad (2.47)$$

Por outro lado, também é verdade (veja seção 2.4) que [25]

$$\delta x^{\sigma} = \omega^{\sigma}_{\rho} x^{\rho}$$

e assim,

$$\omega^{\sigma}_{\rho} = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(L_{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho}. \quad (2.48)$$

É muito simples verificar que a solução para esta equação é [25]

$$(L_{\mu\nu})^{\sigma}_{\rho} = i(\delta^{\sigma}_{\mu}\eta_{\nu\rho} - \delta^{\sigma}_{\nu}\eta_{\mu\rho}). \quad (2.49)$$

---

<sup>39</sup>Na seção 2.4, havíamos parametrizado com o sinal de mais e as transformações eram feitas no espaço euclidiano. Assim, não havia distinção entre quantidades contravariante e covariante, requeridas pelo espaço de Minkowski [28]. Para preservar a mesma convenção de sinal positivo na parte espacial, lembrando que a métrica acrescenta um sinal negativo nela, colocamos um sinal de menos.

<sup>40</sup>Como antes, os índices  $\mu$  e  $\nu$  apenas rotulam os geradores e portanto, não devemos confundir os índices matriciais.

Veja<sup>41</sup>,

$$\begin{aligned}\omega^\sigma{}_\rho &= -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}i(\delta_\mu^\sigma\eta_{\nu\rho} - \delta_\nu^\sigma\eta_{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2}(\omega^\sigma{}_\rho - \omega_\rho{}^\sigma) \\ &= \frac{1}{2}(\omega^\sigma{}_\rho + \omega^\sigma{}_\rho) = \omega^\sigma{}_\rho.\end{aligned}$$

De (2.45),

$$\begin{aligned}-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu} &= -\frac{i}{2}(\omega^{00}L_{00} + \omega^{0j}L_{0j} + \omega^{i0}L_{i0} + \omega^{ij}L_{ij}) \\ &= -\frac{i}{2}(2\omega^{0j}L_{0j} + 2\omega^{12}L_{12} + 2\omega^{13}L_{13} + 2\omega^{23}L_{23}) \\ &= -i(\omega^{01}L_{01} + \omega^{02}L_{02} + \omega^{03}L_{03} + \omega^{12}L_{12} + \omega^{13}L_{13} + \omega^{23}L_{23}),\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade de anti-simetria, ou seja,  $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$  e  $L^{\mu\nu} = -L^{\nu\mu}$ , podemos escrever os geradores do grupo de Lorentz fazendo uso de (2.49) [25],

$$L_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

e

$$L_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Estes geradores ainda satisfazem uma álgebra, chamada a álgebra de Lie do grupo de Lorentz, que pode ser determinada diretamente de (2.49),

$$\begin{aligned}[L_{\mu\nu}, L_{\gamma\sigma}]^\rho{}_\lambda &= (L_{\mu\nu})^\rho{}_\alpha(L_{\gamma\sigma})^\alpha{}_\lambda - (L_{\gamma\sigma})^\rho{}_\beta(L_{\mu\nu})^\beta{}_\lambda \\ &= i^2[\eta_{\mu\sigma}(\delta_\nu^\rho\eta_{\gamma\lambda} - \delta_\gamma^\rho\eta_{\nu\lambda}) + \eta_{\nu\gamma}(\delta_\mu^\rho\eta_{\sigma\lambda} - \delta_\sigma^\rho\eta_{\mu\lambda}) + \\ &\quad -\eta_{\mu\gamma}(\delta_\nu^\rho\eta_{\sigma\lambda} - \delta_\sigma^\rho\eta_{\nu\lambda}) - \eta_{\nu\sigma}(\delta_\mu^\rho\eta_{\gamma\lambda} - \delta_\gamma^\rho\eta_{\mu\lambda})] \\ &= i(\eta_{\mu\sigma}(L_{\nu\gamma})^\rho{}_\lambda + \eta_{\nu\gamma}(L_{\mu\sigma})^\rho{}_\lambda - \eta_{\mu\gamma}(L_{\nu\sigma})^\rho{}_\lambda - \eta_{\nu\sigma}(L_{\mu\gamma})^\rho{}_\lambda),\end{aligned}$$

ou, omitindo os índices matriciais,

$$[L_{\mu\nu}, L_{\gamma\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma}L_{\nu\gamma} + \eta_{\nu\gamma}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\gamma}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\gamma}). \quad (2.52)$$

<sup>41</sup>Fazemos uso da propriedade de anti-simetria, ou seja,  $\omega^\sigma{}_\rho = -\omega_\rho{}^\sigma$  e  $L^\sigma{}_\rho = -L_\rho{}^\sigma$ .

Antes de finalizarmos este capítulo, já adiantando o que iremos explicar no capítulo 4, gostaríamos de citar uma propriedade interessante satisfeita pelas matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$ . Estas, que compõem a equação de Dirac<sup>42</sup>, se relacionam por

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (2.53)$$

Esta relação de anti-comutação é equivalente aquela vista na 2.4, quando definimos a representação espinorial. A única diferença encontra-se na métrica, onde no espaço euclidiano temos a identidade ( $\delta_{ij}$ ) e no espaço-tempo de Minkowski temos (2.40) [28]. Portanto, por analogia, os geradores da representação espinorial da álgebra de Lorentz são dados por<sup>43</sup>

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (2.54)$$

uma vez que os mesmo satisfazem (2.52) [25]. Um elemento do grupo de Lorentz na representação espinorial, no lugar de (2.45), passa a ser dado por

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}} = e^{\frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}. \quad (2.55)$$

---

<sup>42</sup>Veja equação 4.11.

<sup>43</sup>O sinal positivo é para manter a forma como definimos os geradores da representação espinorial(2.37). Veja que a métrica acrescenta um sinal negativo na parte espacial de (2.54)



### 3 CAMPOS CLÁSSICOS

Quando estudamos Mecânica Clássica, nos deparamos com dois novos tipos de formalismos, o Lagrangiano e o Hamiltoniano, alternativos ao tão conhecido método vetorial proposto por Isaac Newton. Esses, não só fornecem um meio de se chegar aos mesmos resultados estabelecidos pelas leis de Newton, como fazem isso de uma forma bem mais simplificada, uma vez que a teoria deixa de lado os vetores para tratar com quantidades escalares (Energia cinética e Potencial) [3]. Por razões que se tornarão bastante claras a posteriori, iremos nos restringir a estudar o primeiro formalismo citado acima, o Lagrangiano. Entretanto, insistindo um pouco mais na mecânica clássica, devemos lembrar que o estado de um sistema físico, ou seja, as informações momentâneas contidas no mesmo, é mapeado em um único ponto<sup>1</sup>  $(q(t), \dot{q}(t))$  do chamado espaço de configurações<sup>2</sup>. Quando a evolução dinâmica acontece, esse ponto dá lugar a uma curva neste mesmo espaço e tudo passa a ser regido segundo as equações usuais de Euler-Lagrange [3]:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (3.1)$$

Podemos ir um pouco além e começar a nos perguntar como seria se os  $N$  graus de liberdade passassem a ser infinitos. Deste modo, embora trabalhoso, ainda conseguiríamos rotular as coordenadas generalizadas, ou seja,  $q(t) = (q^1(t), q^2(t), \dots)$ . Por outro lado, se abrissemos mão da contagem entraríamos em um novo domínio da física, onde o contínuo toma seu lugar. É exatamente assim que definimos, de uma forma um tanto simplista, Campos Clássicos<sup>3</sup>, um contínuo infinito de graus de liberdade [4]. Ou seja, os objetos com os quais denominaremos campos serão funções com valores clássicos, podendo estes ser reais ou complexos [4].

Por fim, podemos nos perguntar o porquê de se estudar Campos Clássicos uma vez que nossos objetivos mais profundos encontram-se no mundo do diminuto. A verdade é que uma teoria de campos puramente quântica ainda está fora de nosso domínio, ou seja, ainda não temos ferramental suficiente para tal descrição [4]. Assim, somos forçados a um estágio intermediário. Começamos com o que, de certa forma, dominamos e estendemos nossos conhecimentos ao desconhecido através de modificações impostas as

<sup>1</sup> $q(t) = (q^1(t), q^2(t), \dots, q^N(t))$ , chamado de coordenada generalizada, representa os  $N$  graus de liberdade existentes no sistema.

<sup>2</sup> Também conhecido como  $\mu$ -space [4]. Fazemos aqui, alusão direta com o formalismo Lagrangiano. No Hamiltoniano, o estado de um sistema é caracterizado por um ponto  $(q, p)$  no espaço de fase.

<sup>3</sup>O termo Clássico refere-se a uma teoria não quântica.

álgebras presentes<sup>4</sup>.

### 3.1 O Formalismo Lagrangiano em sua Forma Covariante

Existem um conjunto de fatores que fazem da teoria que estamos prestes a desenvolver atraentes para nossos objetivos. Talvez um dos mais importantes está ligado ao fato de que o formalismo Lagrangiano engloba muito bem as simetrias presentes na natureza [31] - é uma verdade que a invariância presente na densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$ <sup>5</sup> é diretamente refletida nas equações que regem a evolução dinâmica do sistema físico, de modo que, se ela não se modifica sob uma determinada transformação de simetria, então, o mesmo ocorre com as equações de campo, garantindo assim a covariância destas<sup>6</sup> [4].

#### 3.1.1 O Princípio de Hamilton

Para chegarmos as equações que regem a evolução de um sistema físico, precisamos estar atentos a um dos objetos mais importantes da teoria, o Funcional Ação  $S$ , onde

$$S[\phi] = \int dtL,$$

ou<sup>7</sup>

$$S[\phi] = \int d^4x\mathcal{L}, \quad (3.2)$$

onde definimos  $L$  em termos da densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  [4],

$$L = \int d^3x\mathcal{L}.$$

O funcional  $S[\phi]$  tem um caráter global para o sistema, pois carrega consigo todas as informações pertinentes a descrição de um fenômeno físico<sup>8</sup>, tanto, que a natureza parece se adequar as peculiaridades concernentes ao mesmo [4, 31]. A ele, existe associado um princípio, denominado Princípio da Mínima Ação, que diz,

*Os estados físicos que realmente se realizam na natureza são aqueles para os quais a Ação assume um valor mínimo [4].*

<sup>4</sup>Na mecânica quântica, por exemplo, o momento tridimensional  $\vec{p}$  torna-se um operador, onde  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$  [15].

<sup>5</sup>A definição deste objeto será apresentada nas seções que se seguem.

<sup>6</sup>Duas equações são covariantes se elas tomam a mesma forma em diferentes referenciais inerciais. Assim, por exemplo, se  $\vec{F} = m\vec{a}$  é a força em um referencial inercial  $S$ , então, no referencial inercial  $S'$ , devemos ter  $\vec{F}' = m\vec{a}'$  [28, 31].

<sup>7</sup> $d^4x = dt dx dy dz$ .

<sup>8</sup>Veja que na integral (3.2) também está implícito as condições de contorno e assim o funcional Ação abrange todo o espaço ocupado pelo sistema físico [4].

Considerando então uma variação da forma

$$S \rightarrow S + \delta S$$

e sabendo que esta variação, segundo os preceitos da natureza, representa um mínimo, devemos concluir que [20]

$$\delta S [\phi] = 0 \tag{3.3}$$

### 3.1.2 A densidade Lagrangiana

Existe uma série de requisitos que devemos estar cientes antes de considerarmos o método por trás da construção de nossa teoria. Portanto, esta seção tem como objetivo esclarecer sobre o formato do objeto com o qual o formalismo propõe trabalhar, o Lagrangiano.

Na seção anterior, (3.2) coloca o funcional Ação em termos do que chamamos de densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Apesar deste ser o objeto mais perceptível em toda a teoria, devemos sempre ter em mente que as informações necessárias para descrição do fenômeno físico estão fundamentadas na Ação. Tendo essa primazia, deseja-se que todas as transformações de simetria, inerentes a evolução dinâmica do sistema, estejam em completa harmonia com  $S$ . Para nossa satisfação, tais argumentos são naturalmente estendidos da Ação para a densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  [4] e assim, a este, devemos incorporar todas as informações que nos fazem capazes de descrever o sistema por completo.

Como primeira exigência, a nossa teoria deve ser consistente com a relatividade especial<sup>9</sup>. Assim, de modo a preservar a covariância das equações da dinâmica, devemos supor que nossa densidade Lagrangiana seja invariante sob o grupo de Poincaré<sup>10</sup>.

Por outro lado, já estamos acostumado, da Mecânica Clássica, com a ideia de que para se descrever um sistema por completo se faz necessário o conhecimento dos graus de liberdade e das correspondentes velocidades [33]. Aqui, de forma análoga, construiremos nossos objetos levando em conta apenas os campos  $\phi$  e seus gradientes  $\partial_\mu \phi$  (devemos aceitar dependências apenas em derivadas de primeira ordem, pois, caso contrário, seria preciso mais do que os campos e seus gradientes para caracterizar um sistema como um todo) [4].

Uma terceira exigência, a fim de simplificar o formalismo, é supor que estejamos trabalhando com teorias locais e assim, *a Lagrangiana será suposta depender, em cada*

---

<sup>9</sup>Aqui, trabalharemos com campos relativísticos. No entanto, os argumentos apresentados ainda são válidos no limite em que  $v \ll c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz.

<sup>10</sup>No capítulo 2 apresentamos o grupo de Lorentz, aquele que trata de rotações e *boosts*. Se acrescentarmos as translações, estaremos no domínio do grupo de Poincaré.

ponto do espaço, somente dos valores dos campos e de suas derivadas na vizinhança infinitesimal de cada ponto [4].

Por último, devemos querer uma Lagrangiana escrita na forma mais simples quanto possível. No entanto, tal conveniência deve ser consistente com os resultados experimentais. Uma primeira tentativa seria supor  $\mathcal{L}$  do tipo polinomial em  $\phi$  e  $\partial_\mu\phi$ . Ou seja,

$$\mathcal{L} = \alpha_1\phi + \alpha_2(\phi)^2 + \dots + \beta_1\partial_\mu\phi + \beta_2(\partial_\mu\phi)^2 + \dots$$

No entanto, construímos nossa densidade Lagrangiana evitando termos de terceira ordem em diante nos campos<sup>11</sup>. Este requerimento permite tratar teorias sem interação, ou seja teorias de campos livre [31].

Assim, em resumo,<sup>12</sup>

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \quad (3.4)$$

### 3.1.3 As equações de Lagrange

Começaremos esta seção fazendo um pequeno comentário sobre os conceitos por trás do cálculo das variações - uma abordagem direta e simples pode ser vista tanto em [3] como em [4].

Quando falarmos em uma variação total, devemos ter em mente que, em um mesmo objeto, estão sendo levadas em consideração variações nas coordenadas,

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (3.5)$$

ao mesmo tempo que variações nos campos [4],

$$\phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x). \quad (3.6)$$

Por outro lado, quando falarmos em variações funcionais estaremos nos referindo apenas a variações na forma funcional dos campos e assim, estaremos desconsiderando as transformações ligadas ao parâmetro do espaço-tempo  $x$ <sup>13</sup>. Em uma linguagem matemática, uma variação funcional é entendida como [4]

$$\phi'(x) = \phi(x) + \bar{\delta}\phi(x). \quad (3.7)$$

<sup>11</sup>Um termo de terceira ordem, por exemplo, é do tipo  $\phi^2\partial_\mu\phi$ .

<sup>12</sup> $\phi(x) = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \dots\}$  e  $\partial_\mu\phi(x) = \{\partial_\mu\phi_1(x), \partial_\mu\phi_2(x), \partial_\mu\phi_3(x), \dots\}$ .

<sup>13</sup>Transformações ligadas ao espaço-tempo são chamadas de transformações de simetrias externas. Caso contrário, estaremos tratando com transformações de simetrias internas [4].

De (3.5), (3.6) e (3.7) podemos derivar as relações de comutação [4]

$$[\partial_\mu, \delta]\phi(x) = [\partial_\mu(\delta x^\lambda)]\partial_\lambda\phi(x) \quad (3.8)$$

e

$$[\partial_\mu, \bar{\delta}]\phi(x) = 0. \quad (3.9)$$

Passemos, então, a considerar uma variação do tipo funcional imposta a Ação  $S$ , ou seja,

$$\bar{\delta}S = \bar{\delta} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi).$$

Como se trata de uma variação na forma funcional dos campos, os pontos do espaço-tempo são mantidos fixos ( $\delta x^\mu = 0$ ) e assim,  $\bar{\delta}$  transpõe a integral e atua diretamente na densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  [4],

$$\bar{\delta}S = \int d^4x \delta\mathcal{L} = \int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \bar{\delta}(\partial_\mu\phi) \right].$$

Por outro lado, (3.9) nos diz que

$$\bar{\delta}(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\bar{\delta}\phi),$$

de modo que podemos escrever

$$\bar{\delta}S = \int d^4x \delta\mathcal{L} = \int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\bar{\delta}\phi) \right].$$

Entretanto,

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \bar{\delta}\phi \right] = \left[ \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\bar{\delta}\phi)$$

nos permite escrever a última integral após o segundo sinal de igualdade como

$$\int d^4x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\bar{\delta}\phi) = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \bar{\delta}\phi \right] - \left[ \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \bar{\delta}\phi \right\}$$

e assim, fazendo uso do teorema de Gauss quadridimensional<sup>14</sup>, onde

$$\int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \bar{\delta}\phi \right] = \int d\sigma_\gamma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\phi)} \bar{\delta}\phi = 0, \quad (3.10)$$

podemos escrever a variação funcional na Ação como

$$\bar{\delta}S = \int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \bar{\delta}\phi.$$

<sup>14</sup>De modo análogo a Mecânica Clássica, as variações nos campos são supostas nulas nos contornos ( $\bar{\delta}\phi = 0$ ).

Observe que este é um resultado bem geral, válido para qualquer tipo de variação  $\bar{\delta}\phi$ <sup>15</sup>. Isto nos permite, finalmente, ao aplicar o princípio da mínima ação (3.3), chegarmos as equações de Lagrange em sua forma covariante<sup>16</sup> [4],

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0. \quad (3.11)$$

### 3.2 Os Campos $\phi$ 's

Definimos Campos Clássicos, no início deste capítulo, como um contínuo infinito de graus de liberdade. No entanto, está é uma definição bem geral, no sentido de que podemos nos deparar com uma variedade de campos que satisfazem a mesma. A distinção entre essas quantidades, denominadas campos, torna-se perceptível quando passamos a analisar a maneira como elas se transformam segundo algum grupo de simetria.

Nesta seção, apresentaremos os campos escalar, vetorial, e tensorial. No entanto, o capítulo seguinte se dedicará por completo a um tratamento mais detalhado do campo spinorial. Este, servirá como ponto de partida para o desenvolvimento da teoria Eletrofraca do Modelo Padrão e assim, um tratamento mais abrangente torna-se extremamente conveniente.

#### 3.2.1 O Campo Escalar

Na mecânica quântica não relativística, a evolução dinâmica de um sistema é descrita pela equação de Schrödinger, que para uma única partícula restrita a se mover na direção  $x$  é dada por [15]

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V\psi(x) = -i\hbar \frac{\partial\psi(x)}{\partial t}. \quad (3.12)$$

No entanto, esta equação não é compatível com o mundo relativístico [4, 25], basta ver, por exemplo, que a coordenada espacial  $x$  e a temporal  $t$  não recebem o mesmo status em (3.12) - para a primeira temos uma derivada de ordem dois e para a segunda de ordem um.

Como primeira alternativa relativística a equação de Schrödinger, veio a equação de Klein-Gordon<sup>17</sup> [13, 20],

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad (3.13)$$

<sup>15</sup>Em nenhum momento especificamos qual o tipo de variação estamos considerando.

<sup>16</sup>Veja que a todo momento tratamos a coordenada tempo ( $x^0 = ct$ ) em pé de igualdade com a coordenada espaço ( $x^i$ ). Isto é requerido pela Relatividade Especial e quando satisfeito por uma equação, dizemos que esta está em sua forma covariante [4].

<sup>17</sup>Schrödinger, de forma independente, primeiro sugeriu esta equação. No entanto, após acreditar que a mesma possuía problemas que comprometiam a teoria, acabou descartando-a em troca de sua famosa equação (3.12) [20]

onde<sup>18</sup>

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial^0 + \partial_i \partial^i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

é chamado de operador D'Alambertiano. Em (3.13), como podemos ver, as derivadas espaciais e temporais possuem a mesma ordem.

A equação (3.13), como requerido pela Relatividades Especial, deve ser covariante de Lorentz, ou seja, ela deve manter sua forma após uma transformação de simetria correspondente ao grupo de Lorentz,

$$(\square' + m^2)\phi'(x') = 0.$$

Entretanto, o operador D'Alambertiano é um invariante de Lorentz, ou seja, ele se transforma como um escalar,

$$\square' = \partial'_\mu \partial'^\mu = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda^\mu_\beta \partial_\alpha \partial^\beta = \delta^\alpha_\beta \partial_\alpha \partial^\beta = \partial_\alpha \partial^\alpha = \square.$$

Como a massa é um escalar, temos que

$$\square + m^2$$

é, como um todo, escalar de Lorentz e assim, a covariância de (3.13) estará garantida se o campo  $\phi(x)$  também se transformar como um escalar [20].

Definimos um campo escalar  $\phi$  como sendo aquele que é um invariante de Lorentz [4], ou seja,

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (3.14)$$

A equação que este campo satisfaz<sup>19</sup>, portanto, é a equação de Klein-Gordon (3.13), uma equação de campos escalares livres, isto é, sem interação<sup>20</sup> [4].

A densidade Lagrangiana, que permite encontrar a equação de Klein-Gordon, pode ser facilmente encontrada levando em consideração as condições descritas na subseção 3.1.2. Se  $\phi(x)$  for um campo escalar real, então

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2), \quad (3.15)$$

<sup>18</sup>Adotamos o sistema de unidades em que  $c = \hbar = 1$ .

<sup>19</sup>A equação de Klein-Gordon é também chamada de equação do campo escalar, pois ela é a única equação que eles satisfazem [4].

<sup>20</sup>A equação de Klein-Gordon foi primeiramente pensada para se aplicar a uma partícula relativística livre, ou seja sem a interação via um potencial  $V$  como na equação (3.12). Entretanto, na realidade, o campo pode tanto interagir com outros campos como sofrer uma auto-interação que, matematicamente falando, é representada por  $\lambda\phi^3$ ,  $\lambda\phi^4$ , ...,  $\lambda\phi^n$  [4].

uma vez que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \phi} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\delta_\mu^\gamma \partial_\nu \phi + \delta_\nu^\gamma \partial_\mu \phi) = \partial^\gamma \phi;$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\gamma \phi} = -m^2 \phi - \partial_\gamma \partial^\gamma \phi = 0$$

nos conduz a equação<sup>21</sup> (3.13).

Além dos campos escalares reais, existem aqueles que assumem valores complexos. Um campo escalar complexo pode ser pensado como a união de dois campos escalares reais,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , colocados juntos como [4]

$$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x). \quad (3.16)$$

Ao fazer isto, devemos impor uma condição extra à nossa densidade Lagrangiana. Afim de se evitar algum tipo de energia complexa<sup>22</sup>, devemos assumir que  $\mathcal{L}$  deve ser real [4]. Assim, de modo semelhante a (3.15), temos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad (3.17)$$

Observe ainda que (3.17) pode ser escrita como a soma de duas densidades Lagrangianas referentes a cada campo escalar,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \\ &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi_1 - i\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_1 + i\partial^\mu \phi_2) - m^2(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2)] \\ &= \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2) \right] + \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2) \right] \\ &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De modo simétrico, ao aplicarmos (3.11), chegaremos a duas equações de Klein-Gordon independentes,

$$(\square + m^2)\phi_1 = 0$$

e

$$(\square + m^2)\phi_2 = 0,$$

uma para cada campo escalar.

Por outro lado, poderíamos trabalhar diretamente com os campos complexos

---

<sup>21</sup>A densidade Lagrangiana (3.15) é referente a campos livres. No entanto, quando a interação se faz presente, devemos assumir que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{livre}} + \mathcal{L}_{\text{interação}}$ .

<sup>22</sup>De um modo geral  $\mathcal{L} = T - V$  e como *nenhum sistema Clássico tem sido encontrado sugerindo algum tipo de energia complexa*, devemos assumir que  $\mathcal{L}$  deve ser real [4].



uma vez que de (3.17),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi = 0$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\square + m^2)\phi^* = 0.$$

### 3.2.2 O Campo Vetorial

*Com exceção da gravitação, todas as interações fundamentais da natureza são mediadas por campos vetoriais [4].*

A afirmação acima deixa bastante claro o quão importante são os campos vetoriais para o Modelo Padrão. Em outras palavras, os campos (campos bosônicos<sup>23</sup>) que permitem as interações Eletromagnética, Fraca e Forte são do tipo vetorial.

Definimos um campo vetorial como aquele cujo as componentes se transformam como as componentes de um vetor de Lorentz [4], ou seja,

$$\phi'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu \phi^\nu(x). \quad (3.19)$$

Assim,  $\phi$  é deve ser um objeto de 4 componentes<sup>24</sup>,

$$\phi^\mu = \begin{pmatrix} \phi^0(x) \\ \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \phi^3(x) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Como no caso escalar, a natureza permite que os campos vetoriais possam assumir a forma real ou complexa. A título de exemplificação, na interação Eletrofraca temos tanto campos bosônicos complexo  $W_\mu^\pm$ , onde

$$W_\mu^+ = \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad W_\mu^- = \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad (3.21)$$

como campos bosônicos reais  $Z_\mu^0$  [4].

Seja  $\phi^\mu$  um campo vetorial real de massa<sup>25</sup>  $m$ , uma densidade Lagrangiana

<sup>23</sup>Bósons são partículas de spin inteiro que permitem as interações fundamentais do Modelo Padrão. Os campos correspondentes a essas partículas são chamados de campos bosônicos.

<sup>24</sup>Veja que  $\mu$  vai de 0 a 3 e assim  $\phi^\mu$  deve ter 4 entradas.

<sup>25</sup>Na linguagem do Modelo Padrão os bósons são partículas que são os quantas do campo bosônico e, portanto, como partículas, podem ou não ter massa.

adequada é escrita, de modo análogo ao caso escalar, como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_\nu\partial^\mu\phi^\nu + \frac{1}{2}m^2\phi_\nu\phi^\nu. \quad (3.22)$$

Veja que

$$\begin{aligned} \partial'_\mu\phi'_\nu\partial'^\mu\phi'^\nu &= (\Lambda_\mu^\alpha\partial_\alpha\Lambda_\nu^\beta\phi_\beta)(\Lambda^\mu_\gamma\partial^\gamma\Lambda^\nu_\eta\phi^\eta) \\ &= \Lambda_\mu^\alpha\Lambda^\mu_\gamma\Lambda_\nu^\beta\Lambda^\nu_\eta\partial_\alpha\phi_\beta\partial^\gamma\phi^\eta \\ &= \delta_\gamma^\alpha\delta_\eta^\beta\partial_\alpha\phi_\beta\partial^\gamma\phi^\eta \\ &= \partial_\gamma\phi_\eta\partial^\gamma\phi^\eta \end{aligned} \quad (3.23)$$

e

$$\begin{aligned} \phi'_\nu\phi'^\nu &= \Lambda_\nu^\beta\Lambda^\nu_\alpha\phi_\beta\phi^\alpha \\ &= \delta_\alpha^\beta\phi_\beta\phi^\alpha \\ &= \phi_\alpha\phi^\alpha \end{aligned} \quad (3.24)$$

nos diz que (3.22) é invariante de Lorentz e assim, está em completa harmonia com as restrições abordadas na subseção 3.1.2. Com isso, ao aplicar (3.11), onde

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha} = \frac{m^2}{2}\eta^{\nu\beta}\frac{\partial}{\partial\phi_\alpha}(\phi_\beta\phi_\nu) = m^2\phi^\alpha$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\gamma\phi_\alpha} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial\partial_\gamma\phi_\alpha}(\partial_\mu\phi_\nu\partial_\beta\phi_\sigma) = -\partial^\gamma\phi^\alpha$$

chegaremos a quatro equações independentes semelhantes a Klein-Gordon (3.13) [4],

$$(\square + m^2)\phi^\mu(x) = 0. \quad (3.25)$$

No entanto, a densidade Lagrangiana (3.22) traz consigo um problema para teoria,

*A Lagrangiana sozinha não determina, via o princípio da mínima ação, as condições aceitáveis para o sistema [4].*

Sendo mais específico, ela proporciona uma densidade de energia que não é positiva-definida e conseqüentemente, um Hamiltoniano que não é positivo-definido é um problema para teorias não interagentes<sup>26</sup>. Se por outro lado associarmos a densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  um

<sup>26</sup>Veja mais detalhes em Aldrovandi [4].

vínculo extra,

$$\partial_\nu \phi^\nu = 0, \quad (3.26)$$

nosso problema estará resolvido, ou seja, termos como resultado uma densidade de energia positiva-definida [4].

Por outro lado, para um campo vetorial complexo  $\phi^\mu$ , sabendo que nossa densidade Lagrangiana deve ser real, podemos escrever

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_\nu^* \partial^\mu \phi^\nu + \frac{1}{2} m^2 \phi_\nu^* \phi^\nu, \quad (3.27)$$

onde, em analogia ao caso complexo,

$$\phi^\mu = \phi_1^\mu + i\phi_2^\mu \quad (3.28)$$

$$\phi^{*\mu} = \phi_1^\mu - i\phi_2^\mu, \quad (3.29)$$

com  $\phi_1^\mu$  e  $\phi_2^\mu$  sendo campos vetoriais reais [4]. Outra vez, para uma descrição aceitável do sistema, devemos ter

$$\partial_\nu \phi^\nu = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\nu \phi^{*\nu} = 0. \quad (3.30)$$

As equações de campo são facilmente encontradas por (3.11), onde pra  $\phi \rightarrow \phi^{*\alpha}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{*\alpha}} = m^2 \delta_\alpha^\nu \phi_\nu = m^2 \phi_\alpha$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\sigma \phi^{*\alpha}} = -\delta_\mu^\sigma \delta_\alpha^\nu \partial^\mu \phi_\nu = -\partial^\sigma \phi_\alpha,$$

temos

$$(\square + m^2) \phi^\nu = 0 \quad (3.31)$$

e para  $\phi \rightarrow \phi^\alpha$ , de modo análogo ao anterior, temos

$$(\square + m^2) \phi^{*\nu} = 0. \quad (3.32)$$

### 3.2.3 O Campo Tensorial

Na Relatividade Especial, onde o espaço de Minkowski surge naturalmente, definimos quadri-vetores covariantes e contravariantes pela forma como eles se transformam segundo Lorentz [25]. Um quadri-vetor contravariante  $A^\mu$  se transforma segundo regra

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu, \quad (3.33)$$

enquanto que um quadrivetor covariante  $A_\mu$  se transforma segundo<sup>27</sup>

$$A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu. \quad (3.34)$$

Podemos definir os tensores no espaço de Minkowski fazendo uma extensão de (3.33) e (3.34) [28], ou seja, um tensor contravariante de ordem- $n$   $T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$  é definido por

$$T'^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\beta_1} \Lambda^{\alpha_2}{}_{\beta_2} \dots \Lambda^{\alpha_n}{}_{\beta_n} T^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}, \quad (3.35)$$

enquanto que, em sua forma covariante, temos<sup>28</sup>

$$T'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \Lambda_{\alpha_1}{}^{\beta_1} \Lambda_{\alpha_2}{}^{\beta_2} \dots \Lambda_{\alpha_n}{}^{\beta_n} T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}. \quad (3.36)$$

Ao apresentarmos os campos vetoriais nos deparamos com o problema de que (3.22) sozinha não era suficiente para descrever o sistema como um todo, se fazia necessário a condição extra (3.26). No entanto, o problema pode ser facilmente resolvido ao adicionar um termo extra a (3.22). A nova densidade Lagrangiana, chamada de Lagrangiana de Wentzel-Pauli, é obtida por [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_\nu \partial^\nu \phi^\mu \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu \phi_\nu \partial^\mu \phi^\nu + \partial_\mu \phi_\nu \partial^\nu \phi^\mu - \partial_\mu \phi_\nu \partial^\nu \phi^\mu - \partial_\mu \phi_\nu \partial^\nu \phi^\mu) + \frac{m^2}{2} \phi^\nu \phi_\nu \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu) (\partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu) + \frac{m^2}{2} \phi^\nu \phi_\nu \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} \phi^\nu \phi_\nu, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu \quad (3.38)$$

é chamado de *tensor campo de força* [20]. Veja que (3.38) se transforma como um tensor contravariante de ordem-2, ou seja,

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial'^\mu \phi'^\nu - \partial'^\nu \phi'^\mu \\ &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta (\partial^\alpha \phi^\beta - \partial^\beta \phi^\alpha) \\ &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Aplicando (3.11) a (3.37), onde

<sup>27</sup>Um quadrivetor pode vir de duas formas, como contravariante ou como covariantes. A relação entre elas é dada por  $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$ .

<sup>28</sup>Ainda é possível a construção de tensores mistos, estes misturam índices contra e covariantes. Como exemplo, um tensor misto de ordem-2 é definido por  $T'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta T^{\alpha\beta}$ .

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} = m^2 \phi_\alpha$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \beta \phi^\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta \phi^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta \phi^\alpha} (\partial_\mu \phi_\nu \partial^\nu \phi^\mu) \\ &= \partial_\alpha \phi_\beta - \partial_\beta \phi_\alpha = F_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

chegamos a equação<sup>29</sup>

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \phi^\nu = 0, \quad (3.39)$$

chamada equação da proca [29, 31].

Para concluir, mesmo sabendo que os campos que mediam as interações fundamentais do Modelo Padrão são do tipo vetorial, iremos construir quantidades que se transformam como tensores, os campos tensoriais, e fazer uso de densidades Lagrangianas, como veremos no capítulo 5, semelhantes a da proca (3.37). Isto nos permite contornar o problema da densidade de energia não ser positiva-definida [4].

---

<sup>29</sup>Observe que  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ .

## 4 O CAMPO DE DIRAC

Uma segunda alternativa relativística a equação de Schrödinger veio através da famosa equação proposta por Dirac<sup>1</sup> [9, 30],

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi, \quad (4.1)$$

onde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x^1}\hat{e}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2}\hat{e}^2 + \frac{\partial}{\partial x^3}\hat{e}^3 = \partial_i\hat{e}^i$$

e

$$\vec{\alpha} = \alpha^1\hat{e}^1 + \alpha^2\hat{e}^2 + \alpha^3\hat{e}^3 = \alpha^i\hat{e}^i,$$

pois estamos no mundo relativístico e assim trabalhando com o espaço de Minkowski. Veja, por exemplo, que esta equação rebaixa, em comparação a equação (3.12), a derivada espacial para primeira ordem e assim, deixando as coordenadas de espaço em pé de igualdade com a temporal, status requerido pela Relatividade Especial.

A equação (4.1) trás consigo algumas características interessantes. A primeira delas é que  $\alpha_i$  e  $\beta$  são matrizes  $4 \times 4$  que, como veremos, possuem algumas representações distintas [20]. Uma segunda, seria que ela, a equação de Dirac (4.1), se aplica a partículas (campos) de spin- $\frac{1}{2}$ . Isto não poderia deixar de ser verdade, ela foi pensada primeiramente para resolver o problema de um elétron relativístico livre e, como dita o experimento, estes têm spin- $\frac{1}{2}$  [9, 20].

### 4.1 A Equação de Dirac em sua Forma Covariante

A equação (4.1) pode ser escrita em uma forma mais compacta definindo as matrizes, chamadas matrizes de Dirac [9], por

$$\gamma^0 = \beta \quad (4.2)$$

$$\gamma^i = \beta\alpha^i = \gamma^0\alpha^i. \quad (4.3)$$

Estas, como adiantado anteriormente, possuem algumas representações distintas. Neste trabalho usaremos duas, a representação de Dirac-Pauli [11], onde<sup>2</sup>

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

<sup>1</sup>Devemos ter em mente que já estamos considerando o sistema de unidades em que  $\hbar = c = 1$ .

<sup>2</sup>O índice em  $I_2$  indica a ordem da matriz identidade.

e a de Weyl, também conhecida como a representação quirial, onde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Estas duas representações se relacionam através da transformação de similaridade [4]

$$\gamma_{\text{quiral}}^\mu = U \gamma_{\text{Dirac}}^\mu U^{-1}$$

onde

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Na verdade, qualquer representação obtida por uma transformação de similaridade é igualmente equivalente [4]. Além disso  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli (2.16), já abordadas no capítulo 2.

Para nossos propósitos, torna-se muito conveniente definir ainda uma outra matriz,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (4.6)$$

onde, por exemplo, na representação de Weyl, por simples cálculo direto, obtemos [20]

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

As matrizes gamas, independentemente da representação, satisfazem uma propriedade fundamental, a álgebra de Clifford [4], também chamada de relação de anti-comutação, onde, para a métrica (2.40), é dada por [11, 30]

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}I_4. \quad (4.8)$$

Veja por exemplo que, na representação de Dirac,

$$\begin{aligned} \{\gamma^0, \gamma^0\} &= \gamma^0\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0 \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \\ &= I_4 + I_4 = 2I_4 = 2\eta^{00}I_4 \end{aligned} \quad (4.9)$$

e, na representação de Weyl,

$$\begin{aligned}
\{\gamma^0, \gamma^0\} &= \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= I_4 + I_4 = 2I_4 = 2\eta^{00}I_4
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Assim, a equação de Dirac na forma covariante pode ser facilmente escrita como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{4.11}$$

pois

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi \\
i\partial_0\psi &= (-i\alpha^j \partial_j + \gamma^0 m)\psi \\
i\gamma^0 \partial_0\psi &= (-i\gamma^0 \alpha^j \partial_j + (\gamma^0)^2 m)\psi \\
i\gamma^0 \partial_0\psi &= (-i\gamma^j \partial_j + m)\psi \quad \Rightarrow \quad i\gamma^\mu \partial_\mu - m\psi = 0.
\end{aligned}$$

## 4.2 O Campo Espinorial de Dirac

Definimos um campo espinorial como sendo aquele que se transforma segundo a representação espinorial do grupo de Lorentz vista no capítulo 2, ou seja, se  $\psi(x)$  é um espinor, ele se transforma como [25]

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}}\psi(x). \tag{4.12}$$

Mostraremos agora que o campo de Dirac que aparece na equação (4.11) é de fato um campo espinorial. Para isto, consideremos que ele seja realmente um campo espinorial, ou seja,

$$\psi'(x') = S\psi(x)$$

ou, na forma inversa,

$$\psi(x) = S^{-1}\psi'(x').$$

Em seguida, sabendo que

$$\begin{aligned}
\partial'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu & \Rightarrow & \quad \Lambda^\mu{}_\alpha \partial'_\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \\
& & \Rightarrow & \quad \Lambda^\mu{}_\alpha \partial'_\mu = \delta_\alpha^\nu \partial_\nu \\
& & \Rightarrow & \quad \partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu,
\end{aligned}$$



podemos reescrever a equação de Dirac (4.11) como<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m)S^{-1}\psi' = 0 & \Rightarrow (i\gamma^\mu S^{-1}\Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - mS^{-1})\psi' = 0 \\ & \Rightarrow (iS\gamma^\mu S^{-1}\Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m)\psi' = 0, \end{aligned}$$

onde multiplicamos tudo por  $S(\Lambda)$  pelo lado esquerdo. Esta última equação, afim de ser consistente com a Relatividade Especial, deve ser covariante de Lorentz e para isso as matrizes  $\gamma^\mu$  devem satisfazer a relação

$$\Lambda^\nu{}_\mu S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1} = \gamma^\nu. \quad (4.13)$$

Vamos então mostrar que a equação (4.13) é realmente satisfeita. Das equações (2.45), (2.48) e (2.55), onde mais uma vez, por questão de simplicidade, estamos considerando parâmetros de transformações infinitesimais, temos que

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu + \omega^\nu{}_\mu$$

e

$$S(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}.$$

Substituindo esse valores em (4.13),

$$\begin{aligned} \gamma^\nu &= (\delta^\nu{}_\mu + \omega^\nu{}_\mu)\left(1 - \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right)(\gamma^\mu + \frac{i}{2}\gamma^\mu\omega^{\eta\rho}\Sigma_{\eta\rho}) \\ &= \gamma^\nu + \omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(\gamma^\nu\Sigma_{\alpha\beta} - \Sigma_{\alpha\beta}\gamma^\nu), \end{aligned}$$

temos que

$$\frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] = \omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu. \quad (4.14)$$

Por outro lado<sup>4</sup>,

$$[[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\nu] = 4(\gamma_\alpha\delta^\nu{}_\beta - \gamma_\beta\delta^\nu{}_\alpha) \quad (4.15)$$

e com isso, trabalhando com a parte esquerda da equação<sup>5</sup> (4.14),

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu] &= -\frac{1}{8}\omega^{\alpha\beta}[[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\nu] \\ &= -\frac{1}{2}(-\gamma_\alpha\omega^{\nu\alpha} - \gamma_\beta\omega^{\nu\beta}) \\ &= \gamma^\mu\omega^\nu{}_\mu \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Devemos ter em mente que  $\Lambda^\nu{}_\mu$  é um elemento de matriz.

<sup>4</sup>Para dedução veja Aldrovandi [4].

<sup>5</sup>Lembremos que  $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ .

conseguimos provar que a equação (4.14) é realmente verdadeira e como consequência, o campo de Dirac é realmente espinorial.

Além disso, as quantidades  $\gamma^\mu$  são matrizes  $4 \times 4$  de modo que nosso campo espinorial  $\psi$  é uma matriz coluna com quatro entradas,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \\ \psi^4(x) \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Por razões que ficarão claras no decorrer deste capítulo, chamaremos o campo  $\psi(x)$  de espinor de Dirac.

### 4.3 O Espinor Adjunto e a Lagrangiana de Dirac

Vimos na seção anterior, equação (4.12), como o espinor  $\psi(x)$  se transforma segundo Lorentz. Iremos agora, seguindo o procedimento padrão apresentado no capítulo 3, construir objetos que são invariantes de Lorentz, ou seja, escalares. Estes constituirão a Lagrangiana que fornecerá a equação de Dirac (4.11).

Começemos por analisar como o objeto  $\psi^\dagger\psi$  se transforma. No entanto uma propriedade extra, satisfeita pelas matrizes<sup>6</sup>  $\gamma^\mu$ ,

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \quad (4.17)$$

se faz necessária. Assim<sup>7</sup>,

$$\begin{aligned} (\psi')^\dagger \psi' &= (S\psi)^\dagger S\psi \\ &= \psi^\dagger S^\dagger S\psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S\psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} \gamma^0 S\psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 \Lambda^\nu_\nu \gamma^\nu \psi \neq \psi^\dagger \psi, \end{aligned}$$

ou seja,  $\psi^\dagger\psi$  não é um escalar de Lorentz. Entretanto, o objeto

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (4.18)$$

<sup>6</sup>Para mais detalhes veja Barcelos [25].

<sup>7</sup>Veja que de (4.8)  $(\gamma^0)^2 = I_4$

chamado de espinor adjunto, permite a construção do escalar de Lorentz

$$\bar{\psi}\psi. \quad (4.19)$$

Veja que<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\psi' &= \psi'^{\dagger}\gamma^0\psi' \\ &= (S\psi)^{\dagger}\gamma^0S\psi \\ &= \psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0S\psi \\ &= \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^0S^{\dagger}\gamma^0S\psi \\ &= \psi^{\dagger}\gamma^0S^{-1}S\psi \\ &= \bar{\psi}\psi. \end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando (4.13) por  $S(\Lambda)$  a direita e por  $S^{-1}$  a esquerda, obtemos

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}.$$

Com isso, podemos mostrar que outro escalar de Lorentz, que será de nosso interesse para construção da Lagrangiana, é dado por

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi, \quad (4.20)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\gamma^{\mu}\partial'_{\mu}\psi' &= \psi'^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu}\partial_{\nu}S\psi \\ &= \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^0S^{\dagger}\gamma^0\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu}\partial_{\nu}S\psi \\ &= \bar{\psi}\Lambda_{\mu}^{\nu}S^{-1}\gamma^{\mu}S\partial_{\nu}\psi \\ &= \bar{\psi}\Lambda_{\mu}^{\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\alpha}\partial_{\nu}\psi \\ &= \bar{\psi}\delta_{\alpha}^{\nu}\gamma^{\alpha}\partial_{\nu}\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\psi \end{aligned}$$

Uma maneira interessante de se obter a Lagrangiana que fornece a equação de Dirac é multiplicar o lado esquerdo de (4.11) por um objeto que faça do conjunto um invariante de Lorentz, de modo que ao aplicar (3.11) para este objeto, recuperamos a própria equação de Dirac. Este objeto não podia deixar de ser o espinor adjunto  $\bar{\psi}$ , basta

---

<sup>8</sup>De (4.4) e (4.5) é trivial ver que  $(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0$ .

olhar para (4.19) e (4.20). Assim, a Lagrangiana de Dirac é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (4.21)$$

pois

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

#### 4.4 Solução da Equação de Dirac

Imaginemos que estejamos observando uma partícula, cuja evolução é descrita pela equação de Dirac, em seu referencial de repouso. Como esta não realiza qualquer movimento em relação a mesmo o seu momento é zero e assim, a equação de Dirac que temos que nos preocupar é dada por [9]

$$i\gamma^0\partial_0\psi - m = 0 \quad \Rightarrow \quad i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}\psi - m = 0 \quad (4.22)$$

As matrizes  $\gamma^\mu$  na representação de Dirac (4.4) permitem reorganizar o campo  $\psi(x)$ , que como vimos é uma matriz coluna composta por quatro parâmetros, em um espinor de duas componentes em que cada uma é composta por dois campos, ou seja [20],

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \\ \psi^4(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

onde

$$u = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} \psi^3(x) \\ \psi^4(x) \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Assim, substituindo (4.4) e (4.23) em (4.22),

$$i \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

obtemos duas equações diferenciais de primeira ordem independentes<sup>9</sup>, ou seja,

$$\dot{u} = -imu \quad (4.25)$$

$$\dot{v} = -imv \quad (4.26)$$

---

<sup>9</sup>Estamos usando a notação  $\dot{a} = \partial_0 a$ .

Se supormos que  $u = Ae^{rAt}$  e  $v = Be^{rBt}$ , com  $A$  e  $B$  constantes, então as soluções de (4.25) e (4.26) são dadas, respectivamente, por<sup>10</sup>

$$u(t) = u(0)e^{-imt} \quad (4.27)$$

$$v(t) = v(0)e^{imt}. \quad (4.28)$$

Como estamos no domínio relativístico<sup>11</sup> [16]

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (4.29)$$

e para o referencial de repouso considerado temos que

$$E^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad E = \pm m.$$

Isto nos permite escrever as soluções (4.27) e (4.28) como<sup>12</sup>

$$u(t) = u(0)e^{-iE_u t} \quad (4.30)$$

$$v(t) = v(0)e^{-iE_v t}. \quad (4.31)$$

onde

$$E_u = m$$

$$E_v = -m.$$

Veja então que nos deparamos com estados de energias negativas. Interpretamos isso dizendo estados com energias negativas caracterizam antipartículas [9, 20]. Dirac propôs que estados de energias negativas estavam, de modo geral, todos preenchidos por elétrons e assim, a não ocupação destes estados devia-se ao princípio da exclusão de Pauli [15, 25]. No entanto, um desses elétrons poderiam ir para um estado de energia positivo pela absorção de um fóton e assim deixando um espaço vazio. Este foi interpretado como sendo uma partícula de carga<sup>13</sup>  $+1$  e energia negativa, ou seja, uma antipartícula<sup>14</sup>. Tal proposta ficou conhecida como *o mar de Dirac* [14, 25].

Agora, imaginemos a partícula relativística como sendo observada de um

---

<sup>10</sup>Fazemos o uso da famosa fórmula de Einstein que relaciona massa e energia,  $E = mc^2$ . Veja que estamos trabalhando com  $c = \hbar = 1$ .

<sup>11</sup>Uma afirmação mais formal seria dizer que toda solução da equação de Dirac satisfaz também a equação de Klein-Gordon e por isso (4.29) pode se usada [9].

<sup>12</sup>Estamos fazendo uma analogia entre a mecânica relativística e a não-relativística. Para esta última, a solução da parte temporal da equação de Schrödinger é da forma  $e^{-iEt}$  [15], com  $\hbar = 1$ .

<sup>13</sup>Em unidade elementar de carga elétrica.

<sup>14</sup>Em 1932, Carl David Anderson descobriu uma partícula, que a chamou de pósitron, com mesma massa e spin do elétron, mas com carga  $+1$ . A Anderson foi dado o prêmio Nobel de 1936 pela descoberta [25].

referencial em que ela possui um momento  $\vec{p}$ . Neste caso, sabendo que

$$\begin{aligned} p \cdot x \equiv p^\mu x_\mu &= p^0 x_0 + p^j x_j \\ &= Et - \vec{p} \cdot \vec{x}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

podemos fazer uso das soluções (4.30) e (4.31) para supor soluções generalizadas do tipo<sup>15</sup>

$$u(x) = Ae^{-ip^\mu x_\mu} \quad (4.33)$$

$$v(x) = Be^{ip^\mu x_\mu}, \quad (4.34)$$

onde  $A$  e  $B$  constantes. A equação de Dirac para esta configuração,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

nos conduz a

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu u - mu = 0 &\Rightarrow i\gamma^\mu e^{-ip^\nu x_\nu} (-ip_\nu \partial_\mu x^\nu) - me^{-ip^\nu x_\nu} = 0 \\ &\Rightarrow i\gamma^\mu e^{-ip^\nu x_\nu} (-ip_\nu \delta_\mu^\nu) - me^{-ip^\nu x_\nu} = 0 \\ &\Rightarrow \gamma^\mu p_\mu u - mu = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu v - mv = 0 &\Rightarrow i\gamma^\mu e^{ip^\nu x_\nu} (ip_\nu \partial_\mu x^\nu) - me^{ip^\nu x_\nu} = 0 \\ &\Rightarrow i\gamma^\mu e^{ip^\nu x_\nu} (ip_\nu \delta_\mu^\nu) - me^{ip^\nu x_\nu} = 0 \\ &\Rightarrow -\gamma^\mu p_\mu v - mv = 0, \end{aligned}$$

ou ainda em uma notação mais conveniente,

$$(\not{p} - m)u = 0 \quad (4.35)$$

$$(\not{p} + m)v = 0, \quad (4.36)$$

---

<sup>15</sup>O sinal negativo em  $u$  pode ser entendido analisando (4.32) em conjunto com (4.30). Nesta a parte temporal é negativa pois  $E_u$  é positiva. De forma análoga podemos entender o sinal positivo em (4.34).

onde  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ . A solução desta equação é facilmente obtida observando que [20]

$$\begin{aligned}
 (\not{p} - m)(\not{p} + m) &= (\gamma^\mu p_\mu - m)(\gamma^\nu p_\nu + m) \\
 &= \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu - m^2 \\
 &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu p_\mu) - m^2 \\
 &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu - m^2 \\
 &= \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 \\
 &= p_\mu p^\mu - m^2 \\
 &= E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = m^2 - m^2 = 0,
 \end{aligned}$$

pois se

$$u(p) = (\not{p} + m)u(0) \tag{4.37}$$

e

$$v(p) = (\not{p} - m)v(0), \tag{4.38}$$

as equações (4.35) e (4.36) estão automaticamente satisfeitas<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup>As condições iniciais  $u(0)$  e  $v(0)$  são os estados de spin para cima ou para baixo livres de escolha [20].

## 5 TEORIA ELETROFRACA

A interação Eletrofraca, descrita pelo Modelo Padrão de Física de Partículas, provem da unificação de duas interações fundamentais, a eletromagnética e a fraca [20]. Ela foi desenvolvida e aprimorada pelo os cientistas Sheldon Glashow, Abdus Salam e Steven Weinberg, aos quais, foi dado o Prêmio Nobel de Física em 1979 [20, 26].

Em um primeiro momento, o objetivo original de Glashow era promover a unificação de modo que as interações eletromagnética e fraca fossem vistas como manifestações de uma única interação mais fundamental, a interação Eletrofraca [16]. No entanto, ele acabou se deparando com questionamentos que não conseguia responder de forma satisfatória. Na época, em concordância com Glashow, cientistas acreditavam que a diferença de magnitudes das forças eletromagnética e fraca poderiam ser explicadas se esta última fosse mediada por uma partícula pesadas [16]. De fato, isto é condizente com a realidade, uma olhada na tabela 4 nos revela que os bósons da interação fraca possuem massa enquanto o fóton, que media a interação eletromagnética, é uma partícula sem massa. Mas, como explicar essa disparidades de massas? A resposta a esta pergunta só veio com Weinberg e Salam, em 1969, com a introdução do mecanismo de Higgs [16]. Este, fornece as massas para todas as partículas especificadas pelo Modelo Padrão<sup>1</sup> [20]. Em resumo, afim de contornar esta disparidade de massas, a teoria foi primeiro desenvolvida desconsiderando as massas das partículas para posteriormente seriam recuperadas pelo mecanismo de Higgs [16, 26].

Neste capítulo, apresentaremos um método bastante sistemático para a construção do setor de léptons sem massa da interação Eletrofraca do Modelo Padrão.

### 5.1 O campo de Dirac na Representação de Weyl

No capítulo 4, apresentamos duas representações possíveis para as matrizes  $\gamma$ . Estas, em particular na representação quiral (Weyl), assumem a forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>Com exceção do neutrino. Como vimos, estes, para o Modelo Padrão, são partículas sem massa e, no entanto, experimentos conduzem a neutrinos massivos [20].



O termo quiral refere-se a uma propriedade puramente quântica intrínseca a todas as partículas de spin não nulo, a quiralidade<sup>2</sup> [16]. No entanto, no limite de altas-energias<sup>3</sup> quiralidade coincide com o conceito de helicidade, de modo que essas propriedades podem ser entendidas como sendo uma só [1]. Isto se tornará mais claro em instantes.

De uma forma bastante simplificada, helicidade pode ser entendida como uma propriedade de orientação espacial expressa por todas as partículas. Fazendo uma analogia com o mundo clássico, imaginemos que o spin de uma partícula caracterize seu sentido de rotação e que este sentido seja representado simbolicamente pelos dedos da nossa mão que não sejam o polegar - reservaremos o polegar para especificar a direção do momento da partícula. Se uma partícula é dita de helicidade direita, então ela possui orientação definida pela mão direita, onde o polegar aponta na direção do movimento da partícula e os outros dedos envolvem a direção do spin<sup>4</sup> [1]. Por outro lado, se uma partícula tem helicidade esquerda, então podemos entender sua orientação como sendo dada pela mão esquerda, onde, mais uma vez, o polegar aponta na direção do movimento enquanto os outros dedos envolvem a direção do spin.

A propriedade helicidade, no entanto, é relativa ao referencial inercial ao qual se observa a partícula. Podemos, por exemplo, considerar um referencial fixo  $S$  ao qual uma partícula possui helicidade direita e outro referencial  $S'$  que viaja na mesma direção do movimento da partícula, porém com uma velocidade maior em relação a ela, então, vista de  $S'$ , a partícula se move no sentido contrário e portanto passa a exibir uma helicidade esquerda<sup>5</sup> [1].

Ao contrário do que acontece com a helicidade, a quiralidade é sempre bem definida [1]. Como dito anteriormente, quiralidade e helicidade se confundem no limite de altas-energias. Nesse limite, onde as massas tendem a zero, não existe referencial inercial que viaja na mesma velocidade da partícula<sup>6</sup> e assim quiralidade e helicidade passam a ter o mesmo significado [1].

Os conceitos de quiralidade e de helicidade são de extrema importância para o Modelo Padrão. Este, de fato, como veremos, é uma teoria quiral, no sentido que partículas de quiralidades distintas interagem de formas diferentes [9].

---

<sup>2</sup>Quiralidade é uma das três simetrias do teorema CPT (C-Carga, P-Paridade/Quiralidade e T-Tempo). Para mais detalhes veja referências [20, 31].

<sup>3</sup>Limite em que as massas das partículas tendem a zero [34].

<sup>4</sup>Isto é um artifício simbólico, apenas para facilitar a compreensão, onde podemos pensar em uma partícula girando e a orientação do giro como sendo a orientação do spin. No entanto, devemos ter em mente que o spin é uma propriedade puramente quântica [1].

<sup>5</sup>Veja que se pensarmos no spin como uma partícula girando, ao ser vista de  $S'$ , a mesma não muda o sentido de spin.

<sup>6</sup>Partículas sem massa se movimentam na velocidade da luz e assim, não existe referencial de repouso para essas partículas [1].

Na linguagem da mecânica quântica, helicidade é um operador  $\hat{h}$  que informa a projeção do spin na direção do momento [18, 30],

$$\hat{h} \equiv \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

onde<sup>7</sup>

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Voltemos nossa atenção para as matrizes  $\gamma$  na representação quirial, lembradas no início dessa seção. Elas permitem reescrever o campo de Dirac (4.16) como um espinor de duas componentes de quiralidades distintas, ou seja,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_L \end{pmatrix} \equiv \psi_R + \psi_L, \quad (5.2)$$

onde  $\psi_R$  é o espinor de quiralidade direita e  $\psi_L$  o de quiralidade esquerda<sup>8</sup> e

$$\psi_R \equiv \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$$\psi_L \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_L \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Agora, para o caso sem massa, o espinor é conhecido como espinor de Weyl [20] e sua evolução dinâmica passa a ser dada pela equação de Dirac sem massa<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} &= (\gamma_0 p_0 - \gamma_i p_i) \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \\ &= \left[ \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0_2 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0_2 \end{pmatrix} p_i \right] \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_2 & EI_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ EI_2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Assim como em  $I_2$ ,  $0_2$  indica uma matriz nula de ordem 2. Um cuidado que devemos ter, é de não confundir  $\vec{\Sigma}$  com (2.54), usamos o mesmo símbolo e apesar de elas se relacionarem entre si [20], não são a mesma coisa.

<sup>8</sup>Tanto  $\psi_R$  como  $\psi_L$  são espinores de duas componentes, o que totaliza uma matriz coluna de quatro entradas [20]. Por outro lado, em (5.3) e (5.4) devemos considerar  $0 = 0_{2 \times 1}$ , ou seja uma matriz coluna com duas entradas nulas.

<sup>9</sup>Devemos ter em mente que  $p^\mu = (E, \vec{p})$  [28].

Estas, nos fornecem duas equações,

$$(EI_2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_R = 0 \quad (5.5)$$

$$(EI_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_L = 0. \quad (5.6)$$

Por outro lado,

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$$

e para partículas sem massa [16],

$$E = |\vec{p}|.$$

Outra forma de verificar essa relação seria multiplicando (5.5) por  $E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= (E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})(E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_R \\ &= [E^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2] \psi_R \\ &= (E^2 - \sigma^i \sigma^j p^i p^j) \psi_R \\ &= \left[ E^2 - \frac{1}{2}(\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i) p^i p^j \right] \psi_R \\ &= (E^2 - \delta^{ij} p^i p^j) \psi_R = (E^2 - |\vec{p}|^2) \psi_R. \end{aligned}$$

Com isso verificamos<sup>10</sup> que

$$E = |\vec{p}|$$

e como consequência, obtemos duas equações de autovalores [20]

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_L = -EI_2 \psi_L = -|\vec{p}| I_2 \psi_L \quad (5.7)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_R = +EI_2 \psi_R = +|\vec{p}| I_2 \psi_R. \quad (5.8)$$

As definições (5.1), (5.3) e (5.4) nos permitem ver as equações (5.7) e (5.8) de uma forma bastante interessante. Veja que,

$$\begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{h} \psi_L = -\psi_L \quad (5.9)$$

e

$$\begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{h} \psi_R = +\psi_R, \quad (5.10)$$

ao efetuarmos as multiplicações de matrizes, fornecem exatamente as equações (5.7) e (5.8) e assim podemos ver explicitamente que  $\psi_L$  e  $\psi_R$  são auto-estados<sup>11</sup> do operador helicidade com autovalores respectivos,  $-1$  e  $+1$ .

<sup>10</sup>Fizemos uso da relação de anti-comutação satisfeita pelas matrizes de Pauli (2.16),  $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$  [9].

<sup>11</sup>No limite de altas-energias, onde as massas tendem a zero [34].

É importante observar que ainda podemos escrever as componentes quirais em termos do espinor de Weyl aplicando o operador<sup>12</sup>  $\frac{1}{2}(I_4 \pm \gamma_5)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I_4 + \gamma_5)\psi &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_R \end{aligned} \quad (5.11)$$

enquanto que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I_4 - \gamma_5)\psi &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_L \end{pmatrix} = \psi_L. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Isto nos permite demonstrar que  $\psi_R$  e  $\psi_L$  são auto-estados da matriz  $\gamma_5$  com autovalores  $+1$  e  $-1$ , respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} \gamma_5\psi_R &= \frac{1}{2}(\gamma_5 + \gamma_5^2)\psi \\ &= \frac{1}{2}(I_4 + \gamma_5)\psi = \psi_R \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_5\psi_L &= \frac{1}{2}(\gamma_5 - \gamma_5^2)\psi \\ &= \frac{1}{2}(\gamma_5 - I_4)\psi = -\psi_L. \end{aligned}$$

A matriz  $\gamma_5$  é chamada de operador quiralidade e assim  $\psi_R$  e  $\psi_L$  são auto-estados do operador quiralidade com autovalores  $+1$  e  $-1$  [31]. O operador quiralidade, no limite sem massa, comuta com o operador helicidade,

$$\begin{aligned} [\gamma_5, \hat{h}] &= \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0_2 \\ 0_2 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \\ &= 0_4. \end{aligned}$$

Assim,  $\gamma_5$  e  $\hat{h}$  compartilham dos mesmos auto-estados e, portanto, tendo os mesmos

---

<sup>12</sup>Devemos ter em mente que  $\gamma_5 = -\gamma^5$ .

autovalores, eles podem ser vistos como sendo a mesma propriedade [1, 20, 31].

Para concluir esta seção, o campo de Dirac na representação quiriral (5.2) junto as equações (5.11) e (5.12) nos possibilita escrever a Lagrangiana de Dirac (4.21) sem massa em uma forma que separa campos de quiralidade esquerda e direita<sup>13</sup>, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\
&= i(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)\gamma^\mu\partial_\mu(\psi_L + \psi_R) \\
&= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + i(\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L) \\
&= i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R &= \frac{1}{2}(I_4 - \gamma_5)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\frac{1}{2}(I_4 + \gamma_5)\psi \\
&= \frac{1}{4}(I_4^2 - \gamma_5^2)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\
&= \frac{1}{4}(I_4 - I_4)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0
\end{aligned}$$

e, de forma semelhante,

$$i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = 0.$$

## 5.2 Grupos de Simetria, Campos e Cargas da interação Eletrofraca

Nesta seção encontra-se algumas informações extras de extrema importância para o desenvolvimento da teoria referente ao setor de Léptons da interação Eletrofraca. Veremos que aos grupos de simetria presentes estão associados os bósons que promovem as interações e que estas só são possíveis entre os campos que estão carregados com as correspondentes cargas.

### 5.2.1 Grupos de Gauge e os Campos da Interação Eletrofraca

Introduzimos este capítulo falando que as interações fundamentais eletromagnética e fraca são manifestações diferentes de uma interação ainda mais fundamental, a interação Eletrofraca. Esta unificação é possível, como veremos, pelo requerimento da invariância da Lagrangiana de Dirac sob transformações de simetria dadas pelo grupo de *gauge* [9, 20]

$$SU(2) \otimes U(1). \tag{5.14}$$

O setor  $SU(2)$  é responsável pela interação fraca. Esta é possível pela troca

---

<sup>13</sup>O termo de massa mistura as quiralidades e assim quebra a simetria direita-esquerda,  $m\bar{\psi}\psi = m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L$ .

de bósons  $W^\pm$  e  $Z^0$  que são os quanta do campo fraco [23]. Como veremos, eles surgem naturalmente da invariância da Lagrangiana sob tal grupo de simetria<sup>14</sup> [20].

Por outro lado, o setor  $U(1)$  é responsável pela interação eletromagnética [20] cujo os bósons, quanta do campo eletromagnético, são os fótons [23]. Como vimos, estes são partículas sem massa.

Sendo mais específico, os bósons  $W^\pm$ ,  $Z^0$  e os fótons são consequências das combinações entre outros tipos de bósons associados, de forma independente, aos setores  $SU(2)$  e  $U(1)$  da interação Eletrofraca [20]. A tabela 6 mostra a correspondência entre os grupos de simetria e os respectivos bósons de *gauge* enquanto que a equação (3.21) exemplifica a combinação destes bósons para gerar  $W^\pm$ .

Grupo de <i>gauge</i>	Bósons de <i>gauge</i>
$SU(2)$	$W_\mu^1, W_\mu^2$ e $W_\mu^3$
$U(1)$	$B_\mu$

**Tabela 6:** Fonte: [20]. Bósons de *gauge* do setor  $SU(2)$  e  $U(1)$  da interação Eletrofraca.

Vimos anteriormente que os léptons, juntos com os quarks, são partículas verdadeiramente elementares, ou seja, não possuem estrutura interna [23]. Vimos ainda que existem seis tipos de léptons, o elétron, o múon e o tau junto a seus respectivos neutrinos. Eles se diferenciam entre si<sup>15</sup> em suas cargas, números *leptônicos* e massas, veja as tabelas 1 e 3.

O Modelo Padrão, como dito anteriormente, é uma teoria quiral, ele distingue entre partículas de quiralidade esquerda e partículas de quiralidade direita [9]. Por outro lado, para nossos propósitos, suporemos as partículas como sendo sem massa<sup>16</sup> e assim quiralidade pode ser entendida como helicidade. Uma olhada na tabela 3 nos revela que o elétron, o múon e o tau, por serem massivos, devem possuir uma versão direita e esquerda da helicidade enquanto que os neutrinos, supostos sem massa pela teoria, só podem vir com um tipo de helicidade [20]. Aqui, o neutrino do elétron  $\nu_e$  é considerado puramente de quiralidade esquerda [1, 20]. Como veremos, eles possuem um determinado tipo de carga, assim como os elétrons de quiralidade esquerda, que permitem o acoplamento com os bósons  $W_\mu^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), ou seja, a interação acontece via a troca destes bósons [1].

De um modo geral, quando falamos em partículas, devemos assumir que, na

<sup>14</sup>O grupo  $SU(2)$  já foi abordado no capítulo 2.

<sup>15</sup>Uma característica em comum dos léptons é que eles são partículas de  $\text{spin}=\frac{1}{2}$ .

<sup>16</sup>A teoria, como mencionado anteriormente, foi primeiramente construída desconsiderando as massas das partículas. A tarefa de dar massas as partículas veio posteriormente com a introdução do campo de Higgs [20].

verdade, estamos falando de campos<sup>17</sup> [20]. Sendo mais específico, os campos de léptons são campos de Dirac, no sentido que os mesmos são soluções da equação de Dirac [20]. Ou seja, por exemplo, um campo de elétrons livre<sup>18</sup> ( $e$ ) satisfaz a equação

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_e)e = 0 \quad (5.15)$$

e, de forma semelhante, o campo de neutrino do elétron livre ( $\nu_e$ ) satisfaz

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{\nu_e})\nu_e = 0. \quad (5.16)$$

### 5.2.2 Cargas da Interação Eletrofraca

Existem três tipos de cargas presentes na interação Eletrofraca: a carga elétrica  $Q$ , a carga isospin fraca<sup>19</sup>  $\vec{I}$  e a hipercarga fraca  $Y$  [20]. É um fato experimental que essas cargas se relacionam pela fórmula de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2}, \quad (5.17)$$

onde  $I^3$  é a terceira componente da carga isospin fraca  $\vec{I}$  [26, 29].

Como vimos, cada carga, ou melhor partícula carregada, cria um campo que preenche o espaço e comunica as outras da sua presença [23]. Os quanta desses campos são os bósons de *gauge* mencionados na tabela 6 [20]. Sendo mais específico, a interação entre partículas carregadas com isospin fraca  $\vec{I}$  ocorre através da troca de bóson  $W_\mu^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) enquanto que a interação entre partículas carregadas com hipercarga fraca  $Y$  se deve através da troca de bósons  $B_\mu$  [20]. A tabela 7 mostra a relação experimental de cargas para elétrons de quiralidades diferente e para o neutrino do elétron. Veja por exemplo que o elétron de quiralidade direita possui carga elétrica e hipercarga fraca, logo, ele interage eletromagneticamente pela troca de fótons e participa da interação fraca via bósons  $B_\mu$ <sup>20</sup> [20].

<sup>17</sup>Esta é uma interpretação requerida pela teoria e permite entender aspectos antes considerados estranhos como, por exemplo, a antimatéria. Para mais detalhes veja referência [20].

<sup>18</sup>O termo livre significa sem interação.

<sup>19</sup>A carga isospin fraca pode ser entendida como um vetor de três componentes  $\vec{I} = (I^1, I^2, I^3)$ .

<sup>20</sup>Na verdade o campo  $B_\mu$  compõe o campo de fótons junto com o campo  $W_\mu^3$ . Veja mais detalhes na referência [20].

	$e_L$	$e_R$	$\nu_e$
$Q$	-1	-1	0
$I^3$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$
$Y$	-1	-2	-1

**Tabela 7:** Fonte: [20]. Cargas da interação Eletrofraca para elétrons de quiralidades distintas e para o neutrino do elétron.

### 5.3 Setor de Léptons da Interação Eletrofraca

Nesta seção encontra-se o objetivo ao qual este trabalho se dedica. Todas as ferramentas necessárias para construção da Lagrangiana do setor de léptons da interação Eletrofraca já foram apresentadas e, como veremos, faremos uma aplicação direta das mesmas.

A Lagrangiana de léptons do Modelo Padrão deve ser a soma das Lagrangianas individuais para cada campo [20], ou seja,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\mu + \mathcal{L}_\tau + \mathcal{L}_{\nu_e} + \mathcal{L}_{\nu_\mu} + \mathcal{L}_{\nu_\tau}. \quad (5.18)$$

No entanto, como mencionado repetidas vezes, partiremos da suposição que os campos em princípio são sem massa e assim, analisando a tabela 1, vemos que elétron, múon e tau possuem as mesmas características<sup>21</sup> e portanto, podemos construir a Lagrangiana apenas considerando elétrons e neutrinos de elétrons<sup>22</sup> [20], ou seja,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_{\nu_e}. \quad (5.19)$$

No entanto, vimos que a cada carga presente na interação Eletrofraca existe um bóson associado e a cada um destes existe um grupo de simetria de *gauge* correspondente, veja tabela 6. Sendo mais preciso, campos carregados com isospin fraca se transformam segundo o grupo de simetria  $SU(2)$  enquanto que campos carregados com hipercarga fraca se transformam segundo o grupo  $U(1)$  [20]. Analisando a tabela 7, por exemplo, podemos concluir que tanto elétrons de quiralidade esquerda como os neutrinos do elétron se transformam segundo  $SU(2)$  e  $U(1)$ . Por outro lado, o elétron de quiralidade direita se transforma apenas por  $U(1)$  [20]. Com isso podemos construir dubletos<sup>23</sup> de  $SU(2)$  [29,34],

<sup>21</sup>O mesmo é verdade para seus respectivos neutrinos, no entanto estes já são supostos sem massa.

<sup>22</sup>Termos semelhantes podem ser adicionados no final a Lagrangiana por questão de completeza [20].

<sup>23</sup>A designação dubleto de  $SU(2)$  se deve ao fato de  $\psi_L$  e  $\psi_R$  se transformarem de formas diferentes sob tal grupo de simetria. Porém, tanto  $\psi_L$  como  $\psi_R$  se transformam sob o grupo  $U(1)$  [34].



$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ e_R \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

onde, se  $U$  for um elemento deste grupo, então

$$\psi'_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}' = U \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} = U\psi_L \quad (5.21)$$

e

$$\psi'_R = \begin{pmatrix} 0 \\ e_R \end{pmatrix}' = U \begin{pmatrix} 0 \\ e_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_R \end{pmatrix} = \psi_R. \quad (5.22)$$

Os dubletos de  $SU(2)$  permitem escrever a Lagrangiana para o campo de elétrons e de seus respectivos neutrinos de uma forma bastante interessante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{e_L} + \mathcal{L}_{\nu_e} + \mathcal{L}_{e_R} \\ &= i\bar{e}_L\gamma^\mu\partial_\mu e_L + i\bar{\nu}_e\gamma^\mu\partial_\mu\nu_e + i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R \\ &= i \begin{pmatrix} \bar{\nu}_e & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu\partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} + \\ &\quad + i \begin{pmatrix} 0 & \bar{e}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu\partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_R \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

ou, em uma notação simbólica<sup>24</sup> [34],

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R. \quad (5.24)$$

No capítulo 2 estudamos sobre os grupos de simetria  $U(1)$  e  $SU(2)$ . Elementos destes grupos, escritos em termos dos geradores, são dados respectivamente por [31]

$$U_1(\chi) = e^{ig_B\chi} \quad \text{e} \quad U_2(\vec{\alpha}) = e^{\frac{i}{2}g_W\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}}, \quad (5.25)$$

onde  $\chi$  e  $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$  são os parâmetros que permitem as transformações correspondentes e  $\frac{1}{2}\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$  são os geradores<sup>25</sup> de  $SU(2)$ . No entanto, estes grupos se dividem em dois tipos, grupo de simetria global e grupo de simetria local [18]. Para o segundo, diferentemente do primeiro, os parâmetros de transformação são funções dependentes das coordenadas do espaço-tempo [4]. Além disso, é muito simples verificar que a Lagrangiana (5.24) é invariante sob transformações globais [34] e, portanto, passaremos a analisar-la

<sup>24</sup>Aqui, devemos estar atentos a sutilezas, sabemos que  $\gamma^\mu$  são matrizes  $4 \times 4$  e assim, os dubletos de  $SU(2)$   $\psi_R$  e  $\psi_L$  totalizam, cada um, um objeto de oito entradas. Em outras palavras, os campos  $e_L$ ,  $e_R$  e  $\nu_e$  por satisfazerem a equação de Dirac, são objetos com quatro entradas cada [34].

<sup>25</sup>Adotaremos a notação  $\tau^i$  para as matrizes de Pauli (2.16).

sob o ponto de vista de simetrias locais.

Comentamos anteriormente que o Modelo Padrão de Física de Partículas é construído fazendo o requerimento de que a Lagrangiana da teoria seja invariante sob transformação de simetrias [9]. Isto garante que as equações de campo sejam covariantes sob tais transformações [4]. Passemos então a considerar a equação de Dirac sem massa,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0. \quad (5.26)$$

Para transformações de *gauge* local  $U(1)$  temos, de (5.25) e (5.26),

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi' &= i\gamma^\mu \partial_\mu (U_1 \psi) \\ &= i\gamma^\mu (\partial_\mu U_1) \psi + i\gamma^\mu U_1 \partial_\mu \psi \\ &= i\gamma^\mu (ig_B \partial_\mu \chi) U_1 \psi + i\gamma^\mu U_1 \partial_\mu \psi \\ &= U_1 [i^2 g_B \gamma^\mu (\partial_\mu \chi) \psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \psi] \\ &= i^2 g_B \gamma^\mu (\partial_\mu \chi) \psi' \neq 0, \end{aligned} \quad (5.27)$$

ou seja,  $\psi' = U_1 \psi$  não é solução da equação (5.26) e, portanto, a requerida covariância não foi satisfeita. No entanto,  $\psi'$  é solução da equação de Dirac sem massa modificada [34]

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_B \partial_\mu \chi) \psi' = 0. \quad (5.28)$$

Observe que  $\partial_\mu \chi$  é um quadrivetor de Lorentz [34]. Isto nos possibilita dizer que a equação

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu + ig_B B_\mu) \psi = 0 \quad (5.29)$$

será covariante sob transformações de simetria local  $U(1)$  desde que consigamos achar uma lei de transformação para o campo extra  $B_\mu$  [18, 34]. Ou seja,

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu + ig_B B'_\mu) \psi' = i\gamma^\mu (\partial_\mu + ig_B B_\mu) \psi = 0 \quad (5.30)$$

ou, em forma mais compacta,

$$i\gamma^\mu D'_\mu \psi' = i\gamma^\mu D_\mu \psi = 0, \quad (5.31)$$

onde definimos a derivada covariante  $D_\mu$  por [34]

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_B B_\mu. \quad (5.32)$$

Da equação (5.31) podemos concluir que se a derivada covariante se transformar por

simetria local  $U(1)$  da mesma forma que o campo se transforma

$$D'_\mu \psi' = (D_\mu \psi)' = U_1(D_\mu \psi), \quad (5.33)$$

então, a covariância estará satisfeita. Portanto, de (5.33),

$$\begin{aligned} (\partial^\mu + ig_B B'^\mu)U_1\psi = U[(\partial^\mu + ig_B B^\mu)\psi] &\Rightarrow ig_B B'^\mu U\psi = -(\partial^\mu U)\psi + U(\partial^\mu \psi) + ig_B U B^\mu \psi \\ &= -(\partial^\mu U)\psi + ig_B U B^\mu \psi. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\psi$  é completamente arbitrário, podemos descartá-lo da equação e ao multiplicar tudo por  $U^{-1}$  do lado direito obtemos a lei de transformação para o campo  $B^\mu$  [34],

$$B'^\mu = UB^\mu U^{-1} - \frac{1}{ig_B}(\partial^\mu U)U^{-1}. \quad (5.34)$$

Como de costume, para facilitar nossos cálculos, vamos considerar transformações infinitesimais<sup>26</sup> fazendo o parâmetro  $\chi(x)$  ser bem pequeno [4], ou seja,

$$U_1 \approx 1 + ig_B \chi. \quad (5.35)$$

Substituindo (5.35) em (5.34) obtemos explicitamente como o campo  $B^\mu$  deve se transformar para preservar a covariância da equação de Dirac sem massa modificada (5.29),

$$\begin{aligned} B'^\mu &= (1 + ig_B \chi)B^\mu(1 - ig_B \chi) - \frac{1}{ig_B}ig_B(\partial^\mu)UU^{-1} \\ &= B^\mu - ig_B B^\mu \chi + ig_B \chi B^\mu - \partial^\mu \chi \\ &= B^\mu - \partial^\mu \chi. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Veja que o termo  $\partial^\mu \chi$  é exatamente o que cancela o termo que resulta da aplicação da derivada no campo transformado, ou seja,

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_B B'_\mu)\psi' &= i\gamma^\mu[\partial_\mu + ig_B(B_\mu - \partial_\mu \chi)]U_1\psi \\ &= i\gamma^\mu[ig_B \partial_\mu \chi \psi' + U_1(\partial_\mu \psi) + ig_B(B_\mu - \partial_\mu \chi)\psi'] \\ &= U_1[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_B B_\mu)\psi] = 0, \end{aligned}$$

pois o campo  $\psi$  satisfaz (5.29).

O ponto importante a se observar é que, para mantermos a covariância da equação de Dirac sob transformações de simetria  $U(1)$  local, precisamos construir uma derivada covariante  $D^\mu$  adicionando a teoria um campo  $B^\mu$  extra que se transforma segundo a equação (5.36). A presença desse campo extra adiciona um termo de interação a Lagrangiana (5.24) [20]. Veja que  $B^\mu$  é um campo vetorial, porém, pelos mesmos

<sup>26</sup>Uma transformação finita pode ser alcançada realizando infinitas transformações infinitesimais [31].

argumentos apresentados no capítulo 3, podemos construir um objeto que se transforma como um tensor de Lorentz, chamada *tensor campo de força*  $f^{\mu\nu}$  [20], onde

$$f^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \quad (5.37)$$

e cuja a contribuição para a Lagrangiana é dada pela Lagrangiana de Wentzel-Pauli sem massa (3.37), ou seja,

$$\mathcal{L}_{\text{interação-}U(1)} = -\frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu}. \quad (5.38)$$

Passemos agora a considera o grupo de simetria local  $SU(2)$ . Como vimos, um elemento desse grupo é dado por  $U_2$  em (5.25), onde  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(x)$ . Então, semelhantemente ao que acabamos de fazer para o setor  $U(1)$ , se  $\psi$  for solução da equação de Dirac sem massa (5.26), temos que

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi' &= i\gamma^\mu \partial_\mu (U_2 \psi) \\ &= i\gamma^\mu \left[ \frac{i}{2} g_W (\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} \psi' + U_2 \partial_\mu \psi \right] \\ &= \frac{i^2}{2} g_W \gamma^\mu (\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} \psi' \end{aligned}$$

e assim,  $\psi'$  não é solução da equação (5.26). No entanto, ele é solução de uma nova equação de Dirac sem massa modificada,

$$i\gamma^\mu \left[ \partial_\mu - \frac{i}{2} g_W (\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} \right] \psi' = 0. \quad (5.39)$$

Como anteriormente, vamos construir uma derivada covariante  $D_\mu$  adicionando um novo campo a teoria que faça com que a nossa equação seja covariante sob transformações de  $SU(2)$  local [34]. Veja que  $\partial_\mu \vec{\alpha}$  é um quadrivetor de Lorentz<sup>27</sup>, e mais uma vez podemos sugerir algo parecido com (5.29), ou seja,

$$i\gamma^\mu \left[ \partial_\mu + \frac{i}{2} g_W \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} \right] \psi = 0, \quad (5.40)$$

onde<sup>28</sup>

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} g_W \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau}. \quad (5.41)$$

Veja que está equação será covariante sob  $SU(2)$  local se a equação (5.33) for satisfeita para tal grupo de simetria, ou seja,

$$D'_\mu \psi' = (D_\mu \psi)' = U_2 (D_\mu \psi). \quad (5.42)$$

<sup>27</sup>Sendo mais preciso, cada componente de  $\partial_\mu \vec{\alpha}$  se transforma como o quadrivetor de Lorentz.

<sup>28</sup>Devemos ter em mente que  $\vec{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$ .

Assim,

$$(\partial_\mu + \frac{i}{2}g_W \vec{W}'_\mu \cdot \vec{\tau})U\psi = U(\partial_\mu + \frac{i}{2}g_W \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau})\psi$$

e como consequência<sup>29</sup>

$$\frac{i}{2}g_W \vec{W}'_\mu \cdot \vec{\tau} = \frac{i}{2}g_W U \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} U^{-1} - (\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (5.43)$$

Fazendo  $\vec{\alpha}$  ser um parâmetro infinitesimal, temos que [4]

$$U_2 \approx I + \frac{i}{2}g_W \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \quad (5.44)$$

e assim<sup>30</sup>,

$$\begin{aligned} \vec{W}'_\mu \cdot \vec{\tau} &= -(\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} + \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} + \frac{i}{2}g_W [(\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau})(\vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau}) - (\vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau})(\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau})] \\ &= -(\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} + \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} + \frac{i}{2}g_W [\alpha^j \tau^j W_\mu^k \tau^k - W_\mu^k \tau^k \alpha^j \tau^j] \\ &= -(\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} + \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} + \frac{i}{2}g_W [\alpha^j W_\mu^k (\tau^j \tau^k - \tau^k \tau^j)] \\ &= -(\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} + \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} + \frac{i}{2}g_W (\alpha^j W_\mu^k [\tau^j, \tau^k]) \\ &= -(\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} + \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} + \frac{i}{2}g_W (\alpha^j W_\mu^k 2i\epsilon^{jkl} \tau^\ell) \\ &= -(\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} + \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} - g_W \epsilon^{jkl} \alpha^j W_\mu^k \tau^\ell \\ &= -(\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} + \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} - g_W (\vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu)^\ell \tau^\ell \\ &= -(\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot \vec{\tau} + \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} - g_W (\vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu) \cdot \vec{\tau}, \end{aligned}$$

ou seja, a lei de transformação para o campo  $\vec{W}_\mu$  é dada por

$$\vec{W}'_\mu = -(\partial_\mu \vec{\alpha}) + \vec{W}_\mu - g_W (\vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu). \quad (5.45)$$

Neste ponto, devemos tomar cuidado com a notação que estamos considerando. A verdade é que  $\vec{W}_\mu$  representa três campos do tipo vetorial, a saber  $W_\mu^1$ ,  $W_\mu^2$  e  $W_\mu^3$ . Assim, haverá três contribuições do tipo Wntzel-Pauli sem massa (3.37) para a Lagrangiana que vamos construir [20], ou seja,

$$\mathcal{L}_{\text{interação-SU(2)}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j F^{j\mu\nu}, \quad (5.46)$$

onde  $j = 1, 2, 3$ . No entanto, essas contribuições devem ser invariantes de  $SU(2)$  uma vez

<sup>29</sup>Este é o mesmo procedimento que fizemos para obter (5.34) e assim, basta substituir nesta equação  $i g_B B_\mu$  por  $\frac{i}{2} g_W \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau}$ .

<sup>30</sup>Estamos desconsiderando termos de segunda ordem ou superiores [4] e levando em conta a relação de comutação para as matrizes de Pauli apresentada no capítulo 2.

que queremos preservar a covariância de (5.40) [4]. Assim, para que

$$F'_{\mu\nu} F'^{j\mu\nu} = F_{\mu\nu} F^{j\mu\nu},$$

devemos definir o *tensor campo de força*  $\vec{F}_{\mu\nu}$  como<sup>31</sup> [20]

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g_W \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu, \quad (5.47)$$

pois

$$\begin{aligned} \vec{F}'_{\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{W}'_\nu - \partial_\nu \vec{W}'_\mu - g_W \vec{W}'_\mu \times \vec{W}'_\nu \\ &= \partial_\mu [-\partial_\nu \vec{\alpha} + \vec{W}_\nu - g_W (\vec{\alpha} \times \vec{W}_\nu)] - \partial_\nu [-\partial_\mu \vec{\alpha} + \vec{W}_\mu - g_W (\vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu)] + \\ &\quad - g_W [-\partial_\mu \vec{\alpha} + \vec{W}_\mu - g_W (\vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu)] \times [-\partial_\nu \vec{\alpha} + \vec{W}_\nu - g_W (\vec{\alpha} \times \vec{W}_\nu)] \\ &= \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g_W \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu - g_W [(\partial_\mu \vec{\alpha}) \times \vec{W}_\nu + \vec{\alpha} \times (\partial_\mu \vec{W}_\nu)] + \\ &\quad + g_W [(\partial_\nu \vec{\alpha}) \times \vec{W}_\mu + \vec{\alpha} \times (\partial_\nu \vec{W}_\mu)] + g_W (\partial_\mu \vec{\alpha}) \times \vec{W}_\nu + g_W \vec{W}_\mu \times (\partial_\nu \vec{\alpha}) \\ &= \vec{F}_{\mu\nu} - g_W \vec{\alpha} \times (\partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu) \end{aligned}$$

e, portanto<sup>32</sup>,

$$\begin{aligned} F'^j_{\mu\nu} F'^{j\mu\nu} &= [F^j_{\mu\nu} - g_W \epsilon^{k\ell j} \alpha^k (\partial_\mu W_\nu^\ell - \partial_\nu W_\mu^\ell)] [F^{j\mu\nu} - g_W \epsilon^{k\ell j} \alpha^k (\partial^\mu W^{\ell\nu} - \partial^\nu W^{\ell\mu})] \\ &= F^j_{\mu\nu} F^{j\mu\nu} - g_W \epsilon^{k\ell j} \alpha^k [F^j_{\mu\nu} (\partial^\mu W^{\ell\nu} - \partial^\nu W^{\ell\mu}) - (\partial_\mu W_\nu^\ell - \partial_\nu W_\mu^\ell) F^{j\mu\nu}] \\ &= F^j_{\mu\nu} F^{j\mu\nu} - g_W \epsilon^{k\ell j} \alpha^k [2F^{j\mu\nu} \partial_\mu W_\nu^\ell - 2F^{j\mu\nu} \partial_\nu W_\mu^\ell] \\ &= F^j_{\mu\nu} F^{j\mu\nu}. \end{aligned}$$

Por fim, voltemos a Lagrangiana (5.24). Sabemos que a covariância da equações de campo sob transformações de simetrias locais  $SU(2)$  e  $U(1)$  estarão garantidas se definirmos derivadas covariantes dadas respectivamente por (5.41) e (5.32) [34]. Por outro lado, como mencionado anteriormente,  $\psi_L$  deve se transformar tanto por  $SU(2)$  como por  $U(1)$ , enquanto que  $\psi_R$  se transforma apenas por  $U(1)$ . Além disso, devemos incluir a nossa Lagrangiana final as contribuições dos campos de interação [20] de modo que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{léptons}} + \mathcal{L}_{\text{interação}}. \quad (5.48)$$

Assim, levando em consideração todos os requerimentos impostos no desenvolvimento deste trabalho, podemos escrever a Lagrangiana do setor de léptons da interação Eletrofraca

<sup>31</sup>Devemos ter em mente que  $\vec{F}_\mu = (F_{\mu\nu}^1, F_{\mu\nu}^2, F_{\mu\nu}^3)$ .

<sup>32</sup>Vamos considerar mais uma vez transformações infinitesimais, ou seja, o parâmetro  $\vec{\alpha}$  é suposto infinitesimal e termos de segunda ordem neste podem ser negligenciados [4].

por<sup>33</sup> [20]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{\psi}_L\gamma^\mu \left( \partial_\mu + ig'_B B_\mu + \frac{i}{2}g_W \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} \right) \psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu \left( \partial_\mu + ig_B B_\mu \right) \psi_R + \\ & -\frac{1}{4}f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^j F^{j\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde  $\psi_L$ ,  $\psi_R$ ,  $f^{\mu\nu}$  e  $\vec{F}_{\mu\nu}$  são dados respectivamente por (5.20), (5.37) e (5.47).

---

<sup>33</sup>Veja que as constantes de acoplamento  $g_B$  e  $g'_B$  são distintas. De fato,  $g'_B = \frac{g_B}{2}$ . Isto, é consequência da hipercarga fraca  $Y$ , onde  $Y_L = -1$  e  $Y_R = -2$ . Assim, os campos de quiralidade direita interagem duas vezes mais fortes que os de quiralidade esquerda [20].

## 6 CONCLUSÃO

Podemos concluir deste trabalho que o Modelo Padrão de Física de Partículas é uma teoria construída de modo a especificar as partículas existentes na natureza e descrever como elas interagem umas com as outras. Isto é possível, como podemos perceber, fazendo a correspondência entre dados experimentais e ferramentas conceituais desenvolvidas nos capítulos que aqui se encontram. Assim, na introdução e no início do capítulo 5, abordamos sobre as propriedades experimentais que compõem as partículas elementares e as partículas de interação (bósons) como, por exemplo, cargas, quiralidade e helicidade. Tal conhecimento nos possibilitou discernir entre os tipos de interações presentes e como os campos de quiralidade distintas (5.20) se comportam sob uma determinada interação.

Nos capítulos seguintes nos deparamos com conceitos teóricos fundamentais para o desenvolvimento da teoria. Como vimos, para a construção da Lagrangiana do setor de léptons sem massa da interação Eletrofraca (5.49), foi necessário ter o conhecimento dos grupos de simetria  $SU(2)$  e  $U(1)$ , além do grupo de Lorentz, apresentados no capítulo 2. Além disso o ponto de partida foi requerer a invariância da Lagrangiana de Dirac, apresentada no capítulo 4, sob as transformações de simetrias correspondente a cada interação.

Concluimos também que os campos de interação  $B_\mu$  e  $\vec{W}_\mu$  são do tipo vetorial. No entanto, pelos argumentos apresentados no capítulo 3, construímos quantidades que se transformam como tensores e cuja a contribuição a Lagrangiana, referente as interações, são dadas por (5.38) e (5.46).

Concluimos ainda que para construir a Lagrangiana (5.49), levando em consideração todos os dados experimentais e conceitos teóricos abordados em todos os capítulos deste trabalho, foi preciso definir as derivadas covariantes (5.32) e (5.41). Como vimos isto garante a covariância das equações de campos e permite que a interação surja de forma natural na teoria.

Também, concluimos que apesar de ser muito bem construído, o Modelo Padrão ainda apresenta algumas deficiências. Além da interação gravitacional ser um ponto ainda não abordado pela teoria [16], vimos que os neutrinos são supostos sem massa. No entanto experimentos conduzem a existência de neutrinos massivos [17, 22]. Apesar disso, uma refutação completa do Modelo Padrão não é bem vista pelos cientistas. Estes acreditam numa extensão da mesma para explicar questionamentos ainda em aberto [16].

Como perspectivas futuras visamos estudar o Modelo Padrão com um viés mais fenomenológicos fazendo aplicabilidade em cosmologia, matéria escura e etc.



## REFERÊNCIAS

- [1] Helicidade, quiralidade, massa e o higgs. <http://arsphysica.wordpress.com/2011/06/24/helicidade-quiralidade-massa-e-o-higgs/>. Accessed: 2017-06-13.
- [2] The hierarchy problem. <https://profmattstrassler.com/articles-and-posts/particle-physics-basics/the-hierarchy-problem/>. Accessed: 2017-07-12.
- [3] N. L. Agostinho. *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, second edition, 2007.
- [4] R. Aldrovandi and J. G. Pereira. Notes for a Course on Classical Fields, 2008. Apostila, IFT (Instituto de Física Teórica), São Paulo, Brazil.
- [5] George B Arfken and Hans J Weber. *Mathematical Methods For Physicists International Student Edition*. Academic press, 2005.
- [6] J. F. Cornwell. *Group Theory In Physics*, volume 2. Academic Press, 1986.
- [7] G Costa and G. Fogli. *Symmetries and Group Theory in Particle Physics, An Introduction to Space-Time and Internal Symmetries*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2012.
- [8] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood. *An Introduction to Nuclear Physics*. Cambridge University Press, second edition, 2001.
- [9] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood. *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. Cambridge University Press, second edition, 2015.
- [10] G. da Costa Marques. *De que tudo é feito?* Editora da Universidade de São Paulo - Edusp, first edition, 2010.
- [11] A. Das. *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific Publishing Company, 2008.
- [12] F. E. P. dos Santos. Estudo Analítico das Probabilidades de Oscilação de Neutrinos na Matéria em Três Gerações. Master's thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- [13] F. E. P. dos Santos. Espalhamento de Férmions sob Influência da Violação de Lorentz no Setor Fotônico. Master's thesis, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2010.
- [14] W. Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, third edition, 2000.
- [15] David J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.
- [16] David J. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-Vch, second edition, 2008.

- [17] T. Kajita. Nobel lecture: Discovery of atmospheric neutrino oscillations. *Reviews of Modern Physics*, 88(3), 2016.
- [18] R. D. Klauber. *Student Friendly Quantum Field Theory*. Sandtrove Press, second edition, 2013.
- [19] P. Langacker. *The Standard Model and Beyond*. CRC Press, first edition, 2009.
- [20] D. MacMahon. *Quantum Field Theory Demystified: A Self-Teaching Guide*. McGraw-Hill Professional Publishing, 2008.
- [21] R. Mann. *An Introduction to Particle Physics and the Standard Model*. CRC Press, first edition, 2009.
- [22] A. B. McDonald. Nobel lecture: The sudbury neutrino observatory: Observation of flavor change for solar neutrinos. *Reviews of Modern Physics*, 88(3), 2016.
- [23] Marco Antonio Moreira. O modelo padrão de física de partículas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 31(1):1306, 2009.
- [24] Hamermesh Morton. *Group Theory and Its Application to Physical Problems*. Dover Publications, 1989.
- [25] João B. Neto. *Matemática para Físicos com aplicações: Vetores, Tensores e Spinores*, volume 1. Livraria da Física, 2010.
- [26] S. F. Novaes. Standard Model: An Introduction, 2000. Apostila, IFT (Instituto de Física Teórica), São Paulo, Brazil.
- [27] P. Ramond. *Group Theory, A Physicist's Survey*. Cambridge University Press, first edition, 2010.
- [28] W. Rindler. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford, second edition, 2006.
- [29] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, second edition, 1996.
- [30] S. S. Schweber. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Dover Publications, second edition, 2005.
- [31] Jakob Schwichtenberg. *Physics from Symmetry*. Springer, 2015.
- [32] J. Stillwell. *Naive Lie Theory*. Springer, 2008.
- [33] J. R. Taylor. *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.
- [34] C. G. Tully. *Elementary Particle Physics in a Nutshell*. Princeton University Press, second edition, 2011.