

OTIMIZANDO COM A VERSÁTIL SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

José Américo Rodrigues Araújo Filho

02 ex.
CONSULTA LOCAL

MONOGRAFIA SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

UFC/BU/BCM 02/09/1998



R655260 Otimizeando com a versatil
C414727 sequencia de
T510 A689o

FORTALEZA - 1989

BCM

A G R A D E C I M E N T O S

Ao professor Marcelo Pinheiro Klein, deixo aqui meus mais sinceros agradecimentos pela sua orientação e também pela sua notável paciência para comigo durante a elaboração desta.

Agradeço também a todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática desta Universidade, que direta ou indiretamente contribuíram para que eu obtivesse sucesso nesta etapa de minha carreira.

Ao Sr. José Alves Ferreira agradeço pelo excelente trabalho de datilografia e revisão.

Agradeço a Deus por tudo que tenho recebido em minha vida.

INTRODUÇÃO 1

1 - A IMPORTÂNCIA DA ECONOMIA EM SUAS APLICAÇÕES 2

1.1 - A Economia em Geral 3

1.2 - A Economia das Indústrias 4

1.3 - A Economia do Comércio 5

1.4 - A Economia da Agricultura 6

1.5 - A Economia da Indústria e do Comércio 7

1.6 - A Economia da Indústria e do Comércio 8

1.7 - A Economia da Indústria e do Comércio 9

1.8 - A Economia da Indústria e do Comércio 10

2 - A ECONOMIA E A ATIVIDADE DO ALGORITMO DE PROBLEMA 11

2.1 - Problemas Preliminares 12

2.2 - O Problema da Atividade do Algoritmo 13

2.3 - Resolução do Problema 14

3 - BIBLIOGRAFIA 15

Dedico este trabalho a minha vó *Luíza Gomes*,
minhas tias *Clara*, *Auroliza* e *Albaniza*, que
nunca mediram esforços para com minha educa-
ção.

Também dedico a conclusão deste ao Professor
Marcondes Cavalcante França, que durante es-
tes dez anos tratou-me e auxiliou-me como a
um filho.

SUMÁRIO

	página
0 - <u>INTRODUÇÃO</u>	1
1 - <u>OS NÚMEROS DE FIBONACCI E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES</u>	2
1.1 - <u>Leonardo de Pisa</u>	2
1.2 - <u>O Problema dos Coelhos</u>	3
1.3 - <u>A Filotaxia</u>	4
1.4 - <u>Números de Fibonacci e as Frações Contínuas</u>	6
1.5 - <u>Números de Fibonacci e a Teoria dos Números</u>	13
1.6 - <u>A fórmula de Binet</u>	17
1.7 - <u>Números de Fibonacci e a Geometria</u>	20
2 - <u>O PROBLEMA DA OTIMALIDADE DO ALGORÍTMO DE FIBONACCI</u>	29
2.1 - <u>Conceitos Preliminares</u>	29
2.2 - <u>O que é um "Algoritmo Ótimo"</u>	38
2.3 - <u>Resolução do Problema III</u>	44
3 - <u>BIBLIOGRAFIA</u>	50

INTRODUÇÃO

Muitas tem sido as aplicações da sequência de Fibonacci em várias áreas do conhecimento, como arquitetura, economia, matemática, bem como a constatação de sua presença em certos comportamentos biológicos.

Em otimização tem-se utilizado tal seqüência para obter aproximações do ponto ótimo de uma função (problemas sem restrições). No caso particular de uma variável, Kiefer J. [7], escreveu um artigo no qual afirma que obtém-se o melhor resultado quando utilizamos o algoritmo de busca de Fibonacci (baseado na seqüência citada acima).

O objetivo de meu trabalho é apresentar algumas aplicações da seqüência de Fibonacci (Capítulo 1) e tornar mais acessível aos não especialistas em Otimização o trabalho de Kiefer citado anteriormente (Capítulo 2).

1 - OS NÚMEROS DE FIBONACCI E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo faremos uma exposição sobre os números de Fibonacci, partindo desde o seu aparecimento e relacionando algumas de suas propriedades que aparecem em Geometria, Teoria dos Números, etc.... Também será estabelecido no contexto fatos que estabelecem ligação entre tais números e certos fenômenos ligados à natureza.

O próximo capítulo abordará uma importante aplicação dos números de Fibonacci à Matemática em si: sua utilização num algoritmo que calcula aproximações para extremos de funções e que, sob certas condições, fornece a melhor aproximação para o extremo procurado.

1.1 - Leonardo de Pisa

Antes de conhecermos os números de Fibonacci, façamos um breve histórico acerca do homem que deu origem a tal seqüência de números.

Leonardo Fibonacci (fillius Bonacci - filho de Bonacci), aliás Leonardo de Pisa, nasceu em 1175. Seus primeiros anos foram vividos numa comunidade cristã, mas ele recebeu sua instrução acadêmica entre os maometanos da Barbária. Alí conheceu o sistema arábico - ou decimal - de numeração, bem como os ensinamentos da Álgebra de Alkarismi. Com cerca de vinte e sete anos de idade, retornou a sua terra natal e lá publicou, em 1202, uma obra que tornou-se amplamente conhecida como o Liber Abacci (O Livro do Ábaco), na qual demonstrava as grandes vantagens que sobre o sistema romano de numeração tinha o sistema arábico. Liber Abacci foi uma obra modelo durante duzentos anos e o principal veículo da introdução do sistema

hindu-arábico de notação nas camadas cultas da Europa Cristã.

A reputação de Leonardo entre os estudiosos era merecidamente boa. Ele era tão proeminente que Frederico II, ao visitar Pisa, em 1225, promoveu ali uma competição pública de matemática para testar a capacidade de Leonardo. Um dos problemas foi: "Quais os números racionais que, elevados ao quadrado e aumentado ou diminuído de 5, ainda continua sendo um quadrado perfeito?". Leonardo apresentou como solução o número $41/12$, que é correta, pois.

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 \quad \text{e} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2.$$

Note-se que ainda não eram conhecidos os números reais. Por isso é que o problema apresentado tem solução tão difícil para época.

Os concorrentes de Leonardo não conseguiram solucionar nenhum dos problemas propostos.

1.2 - O Problema dos Coelhos

A seqüência dos números de Fibonacci originou-se de um problema matemático apresentado por Leonardo no Liber Abacci.

"Supondo-se que a genética procriadora dos coelhos seja tal que eles são sexualmente adultos com um mês e que mensalmente cada casal procria um outro casal, pergunta-se: Quantos casais de coelhos nascem, no transcurso de um ano, iniciando-se com apenas um casal?"

Resolveremos este problema de um modo geral. Sejam n , $n+1$ e $n+2$ três meses consecutivos e F_n , F_{n+1} e F_{n+2} a quantidade de casais de coelhos existentes em cada um deles, respectivamente. De acordo com a genética citada acima pode-se observar que $F_n + F_{n+1}$ é a quantidade de casais existentes no $(n+2)$ -ésimo mês e, portanto, tem-se que $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Indicando por F_0 a quantidade de casais ao iniciar-se a experiência

4

temos $F_0 = 1$. No mês seguinte temos $F_1 = 1$ e assim por diante, isto é, $F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, \dots, F_{12} = 233$.

A seqüência $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dos números de Fibonacci, é definida pela regra segundo a qual cada termo é a soma dos dois termos imediatamente anteriores:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (F_0 = F_1 = 1). \quad (1.2.1)$$

1.3 - A Filotaxia

Filotaxia é um termo de Botânica para o tópic que inclui a disposição das folhas nos ramos das árvores. As disposições são características dos gêneros. "Divergência" das folhas é o termo técnico empregado para descrever a separação angular das bases de duas folhas sucessivas no talo, medida através de uma espiral traçada da base da planta para o ponto de crescimento. A disposição das folhas pode ser especificada em termos desta divergência.

Antes de especificarmos como se calcula a divergência, é necessário uma palavra de esclarecimento sobre o termo separação angular, usado no parágrafo anterior. Tomando-se a secção do caule que contém duas folhas sucessivas e projetando-o sobre o plano obtemos uma circunferência a qual é seccionada pelas retas que contém as bases das folhas. O ângulo entre as bases de duas folhas consecutivas no talo é então definido como o arco da circunferência, medido no sentido anti-horário, compreendido entre as retas suportes das respectivas bases das sucessivas folhas.

Voltemos agora ao assunto da divergência. Traça-se uma espiral que passe pela extremidade de cada folha até atingir a primeira extremidade verticalmente acima do ponto de partida (ver Fig. 1.1). Tomemos p como o número de voltas da espiral e q como o número de folhas pelas quais a

espiral passou (excluindo-se a primeira). Então p/q é uma fração característica de algumas plantas, ou seja, a divergência das folhas. Constatase que num grande número de espécies, tanto o numerador quanto o denominador têm tendência a ser membros da seqüência de Fibonacci:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \dots$$



Figura 1.1 - A Filotaxia. A espiral é traçada através das extremidades das folhas.

O interesse dos botânicos na divergência das folhas não é fundamentalmente matemático; sua atenção está voltada antes para o fato de que todos os termos desta série de frações situam-se entre $1/2$ e $1/3$, de modo que as sucessivas folhas estão separadas umas das outras por ao menos um terço da circunferência do talo, assegurando o máximo de iluminação e ar para a base de cada folha. Observamos que, em geral, as divergências nas várias plantas (veja [3]) podem ser dispostas como segue:

gramíneas comuns :	$1/2$
ciperáceas :	$1/3$
Frutíferas(macieira):	$2/5$
Tanchagens:	$3/8$
Liláceas :	$5/13$

O aparecimento dos termos da seqüência de Fibonacci no mundo

o processo interrompe-se se $r_{n+1} = 0$ para algum n . Os números $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ são chamados "quocientes incompletos".

Da primeira igualdade temos:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{b/r_1}$$

Da segunda igualdade de (1.4.2) obtemos

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{r_1/r_2}$$

de modo que

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{r_1/r_2}}$$

Da terceira igualdade de (1.4.2) vem que

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{r_2/r_3}$$

e daí

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{r_2/r_3}}}$$

Prosseguindo dessa maneira é fácil observar que chegaremos à expressão (1.4.1).

Se $r_{n+1} = 0$ para algum n , então é fácil ver que $q_n > 1$. Com efeito, se fosse $q_n = 1$, resultaria $r_{n-1} = r_n$, r_{n-2} seria divisível por r_{n-1} e o algoritmo de Euclides haveria de ter sido interrompido no passo anterior.

O desenvolvimento de um número em fração contínua é único. Com efeito, suponhamos que ω e ω' são dois desenvolvimentos obtidos para a/b . Sejam q_0, q_1, \dots, q_n e q'_0, q'_1, \dots, q'_n seus respectivos quocientes

incompletos. Provemos que a igualdade $\omega = \omega'$ implica $q_i = q'_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$. De fato, q_0 é a parte inteira de ω e q'_0 é a parte inteira de ω' ; por isso, $q_0 = q'_0$. Agora, podemos representar ω e ω' da forma seguinte:

$$\omega = q_0 + \frac{1}{\omega_1} \quad \text{e} \quad \omega' = q'_0 + \frac{1}{\omega'_1}$$

Visto que $\omega = \omega'$ e $q_0 = q'_0$, deve-se ter $\omega_1 = \omega'_1$. Logo, são iguais as partes inteiras de ω_1 e ω'_1 , ou seja, $q_1 = q'_1$. Prosseguindo dessa forma obtemos $q_2 = q'_2, \dots, q_n = q'_n$, como desejávamos.

Para exemplificar o desenvolvimento em fração contínua, transformemos a fração imprópria $236/139$ usando (1.4.2). Observe-se que

$$\frac{236}{139} = 1 + \frac{97}{139} = 1 + \frac{1}{139/97},$$

a partir daí segue que

$$\frac{236}{139} = 1 + \frac{97}{139} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}}} . \quad (1.4.3)$$

Na expressão (1.4.1), consideremos os números

$$q_0, q_0 + \frac{1}{q_1}, q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, \dots$$

Tais números expressos mediante frações irredutíveis

$$\begin{aligned}
 \frac{P_0}{Q_0} &= \frac{q_0}{1} \\
 \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{1}{q_1} \\
 \frac{P_2}{Q_2} &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 \frac{P_n}{Q_n} &= \omega,
 \end{aligned}
 \tag{1.4.4}$$

se denominam as *convergentes* da função contínua (1.4.1). Observe-se que $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ se obtém de $\frac{P_k}{Q_k}$ substituindo o último quociente incompleto desta convergente, ou seja, q_k , por $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$.

Na expressão (1.4.3) as convergentes, desde que primeira são respectivamente, 1 , $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{30}{43}$ e $\frac{97}{139}$. A fração $\frac{97}{139}$ é chamada de *fração terminal*. As convergentes, neste exemplo, oscilam em torno da fração terminal.

Mais geralmente tem-se o seguinte:

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}.
 \tag{1.4.5}$$

Com efeito, considere $\frac{P_k}{Q_k}$ e $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ duas convergentes sucessivas. Então

$$\frac{P_k}{Q_k} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_k}}}} \quad \text{e} \quad \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_k + \frac{1}{q_{k+1}}}}}$$

Veja que

$$q_k < q_k + \frac{1}{q_{k+1}}
 \tag{1.4.6}$$

Logo

$$\frac{1}{q_k} > \frac{1}{q_k + \frac{1}{q_{k+1}}} \quad (1.4.7)$$

daí

$$q_{k-1} + \frac{1}{q_k} > q_{k-1} + \frac{1}{q_k + \frac{1}{q_{k-1}}} \quad (1.4.8)$$

então

$$\frac{1}{q_{k-1} + \frac{1}{q_k}} < \frac{1}{q_{k-1} + \frac{1}{q_k + \frac{1}{q_{k+1}}}} \quad (1.4.9)$$

Diremos que de (1.4.7) para (1.4.9) houve uma *inversão*. Associaremos, para cada inversão ocorrida, o número (-1) . Observe então que o número de inversões desde q_{k+1} até q_k é igual a $(-1)^k$. Também pode-se notar que, a partir de (1.4.7), na 2ª inversão voltaremos ao sinal positivo, isto é, de q_{k+1} até q_{k-2} o sinal volta a ser o mesmo de (1.4.7). Uma consequência desse raciocínio é o seguinte resultado.

Lema 4.1 - Para toda fração contínua (1.4.1) as relações seguintes são verdadeiras:

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1} \quad , \quad (1.4.10)$$

$$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1} \quad , \quad (1.4.11)$$

$$P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k \quad . \quad (1.4.12)$$

A prova deste lema é feita usando-se indução sobre k e pode ser encontrada em [9].

Consideremos agora as seguintes seqüências de frações convergentes

$$\frac{P_0}{Q_0} , \frac{P_2}{Q_2} , \dots , \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} , \dots \quad e \quad (1.4.13)$$

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots, \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \dots \quad (1.4.14)$$

Pelo lema 4.1, temos:

$$\begin{aligned} \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} &= \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} + \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \\ &= \frac{-1}{Q_{2n+2} Q_{2n+1}} + \frac{1}{Q_{2n+1} Q_{2n}} > 0, \end{aligned}$$

pois (1.4.11) mostra que $Q_{2n+2} > Q_{2n}$ se $k = 2n+1$. Logo conclui-se que

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} \quad (1.4.15)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} &= \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} + \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} - \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} = \\ &= \frac{1}{Q_{2n+1} Q_{2n}} - \frac{1}{Q_{2n} Q_{2n-1}} < 0, \end{aligned}$$

em virtude de ter-se, neste caso, $Q_{2n+1} > Q_{2n-1}$ (basta colocar $k = 2n$ em (1.4.11)). Segue-se assim que

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} \quad (1-4.16)$$

Resta-nos provar que $\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$. Com efeito, usando (1.4.12) vê-se que

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n+1}}{Q_{2n+2} Q_{2n+1}} = -\frac{1}{Q_{2n+2} Q_{2n+1}} < 0,$$

provando o que desejávamos. E isto encerra a prova de (1.4.5).

O próximo resultado nos mostrará a relação existente entre as frações contínuas e a sequência $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dos números de Fibonacci.

Antes, porém, convém observar que uma fração contínua é dita

incompleta quando os seus quocientes incompletos são em número infinito.

Teorema 4.1 - Se uma fração incompleta tem n coeficientes incompletos, todos iguais a 1, então esta fração é igual a $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Prova: Observe que

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F_n/F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{(F_{n-1} + F_{n-2})/F_{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{F_{n-1}/F_{n-2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots + \frac{F_1}{F_0}}}} = 1, \end{aligned}$$

ou seja, $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ é uma fração contínua que tem n quocientes todos iguais a 1. Em virtude da unicidade que existe no desenvolvimento de frações contínuas, segue que qualquer outra fração que possua n quocientes incompletos iguais a 1, deve ser igual a $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, como queríamos.

Ilustrando o teorema 4.1 podemos observar que as convergentes abaixo

$$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \dots,$$

geram a fração contínua incompleta

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

que é convenientemente representada por

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

1.5 - Números de Fibonacci e a Teoria dos Números

Consideremos neste parágrafo algumas propriedades dos números de Fibonacci, relacionadas à Teoria dos Números.

Teorema 5.1 - Para todos os números naturais n e m temos:

$$F_{n+m} = F_{n-1} F_{m-1} + F_n F_m \quad (1.5.1)$$

Prova: Note que

$$\begin{aligned} F_{n+m} &= F_{n+m-1} + F_{n+m-2} & (1.5.2) \\ &= (F_{n+m-2} + F_{n+m-3}) + F_{n+m-2} \\ &= 2F_{n+m-2} + F_{n+m-3} \\ &= 3F_{n+m-3} + 2F_{n+m-4} \end{aligned}$$

Mais geralmente, ocorre

$$\begin{aligned} F_{n+m} &= a_j F_{n+m-j} + b_j F_{n+m-(j+1)} & (1.5.3) \\ &= (a_j + b_j) F_{n+m-(j+1)} + a_j F_{n+m-(j+2)} \\ &= a_{j+1} F_{n+m-(j+1)} + b_{j+1} F_{n+m-(j+2)} \end{aligned}$$

Logo conclui-se que

$$a_{j+1} = a_j + b_j \quad \text{e} \quad b_{j+1} = a_j,$$

e por conseguinte

$$a_{j+1} = a_j + a_{j-1} \quad (1.5.4)$$

A equação de diferenças (1.5.4) possui como soluções reais os números $(1 + \sqrt{5})/2$ e $(1 - \sqrt{5})/2$. Logo, toda solução de (1.5.4) tem a forma

$$a_k = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (1.5.5)$$

Usando as condições iniciais do problema em (1.5.2) tem-se as equações abaixo:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a_0 = 1 \\ c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = a_1 = 1, \end{cases} \quad (1.5.6)$$

que possui $c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $c_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ como soluções. Substituindo os valores de c_1 e c_2 em (1.5.5) temos $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, ..., isto é, $a_j = F_j$. Dado que $b_{j+1} = a_j$, então $b_j = F_{j-1}$. Agora, tomando-se $j = m$ em (1.5.3), é fácil ver que

$$F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1},$$

estabelecendo assim o resultado desejado.

Teorema 5.2 - Se n é divisível por m então F_{n-1} é divisível por F_{m-1} .

Prova: Suponhamos que m/n , ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = mk$. Usaremos indução sobre k para concluirmos o resultado acima.

Se $k = 1$ então $n = m$ e nada há a demonstrar. Suponhamos agora que $F_{m-1} | F_{mk-1}$ e mostremos que isto implica que $F_{m-1} | F_{m(k+1)-1}$. Com efeito, note que $F_{m(k+1)-1} = F_{(mk-1)+m}$. Daí, usando-se o teorema 5.1 vem

$$F_{(mk-1)+m} = F_{mk-2} F_{m-1} + F_{mk-1} F_m.$$

É fácil observar que F_{m-1} divide a primeira e segunda parcelas da igualdade acima e, portanto, F_{m-1} divide a soma delas, provando assim o resultado desejado.

Teorema 5.3 - Dois números consecutivos de Fibonacci são primos entre si.

Prova: Suponhamos, por contradição, que F_n e F_{n+1} possuam um divisor comum $d > 1$. A diferença $F_{n+1} - F_n$ é, portanto, divisível por d . Mas $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$, donde obtemos que $d | F_{n-1}$. Prosseguindo com um raciocínio análogo provaremos que d divide F_{n-2} , F_{n-3} , etc.; e finalmente, F_1 . Como $F_1 = 1$, é claro então que F_1 não pode ser divisível por $d > 1$. Em virtude desta contradição fica provado o teorema 5.3.

Os teoremas que se seguem serão enunciados sem demonstração. O leitor interessado poderá consultar [9].

Teorema 5.4 - Se o índice de um número de Fibonacci é ímpar então todos os seus divisores ímpares são do tipo $4t + 1$.

Teorema 5.5 - Se um número primo p é da forma $5t \pm 1$, os números F_{p-1} e F_{p+1} são divisíveis por p .

Teorema 5.6 - Qualquer que seja o número inteiro m , entre os $m^2 - 1$ primeiros números de Fibonacci haverá pelo menos um que é divisível por m .

Percebe-se que os números de Fibonacci possuem propriedades as mais interessantes e curiosas possíveis. Pode-se afirmar, sem sombra de dúvidas, que para cada uma das propriedades aqui expostas existem outras tantas na literatura sobre o assunto. Encerramos este parágrafo com mais algumas delas.

Observe que

$$F_0 = F_2 - F_1$$

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$\dots$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Efetuando-se a soma das igualdades acima temos:

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1 \quad (1.5.7)$$

Os dois resultados a seguir têm uma prova similar:

$$\sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \quad (1.5.8)$$

e

$$\sum_{k=0}^n F_{2k+1} = F_{2n} - 1 \quad (1.5.9)$$

Usando $F_m F_{m+1} - F_{m-1} F_m = F_m (F_{m+1} - F_{m-1}) = F_m^2$, obtemos as seguintes igualdades:

$$F_1^2 = F_1 F_2 - F_0 F_1 = F_1 F_2 - 1 = F_1 F_2 - F_0^2$$

$$F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2$$

$$F_3^2 = F_3 F_4 - F_2 F_3$$

.....

.....

$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$$

Por adição segue-se que

$$\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1} \quad (1.5.10)$$

Outra identidade interessante é a que se segue:

$$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^n \quad (1.5.11)$$

A demonstração de (1.5.11) é feita usando-se indução sobre n . De fato, se $n = 1$, temos que $F_1^2 = 1 = 2 - 1 = F_0 F_2 + (-1)^1$, ficando provado o início da indução. Suponhamos que (1.5.11) seja válida para um número natural n e provemos sua validade para $n+1$. Somemos $F_n F_{n+1}$ a ambos os membros de (1.5.11):

$$F_n^2 + F_n F_{n+1} = F_{n+1} F_{n+1} + F_n F_{n+1} + (-1)^n$$

daí

$$\begin{aligned} F_n(F_n + F_{n+1}) &= (F_{n-1} + F_n)F_{n+1} + (-1)^n \\ &= F_{n+1}^2 + (-1)^n \end{aligned}$$

Usando novamente a definição da seqüência de Fibonacci obtemos:

$$F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^{n+1}$$

A última expressão completa a prova de (1.5.11)

1.6 - A Fôrmla de Binet

Neste parágrafo, vamos deduzir uma fôrmla, encontrada pelo Matemático J.P.M. Binet, a qual determina diretamente qualquer número F_n , bastando para tal apenas ter o número n .

Já sabemos que a fôrmla de recorrência usada para determinar a seqüência dos números de Fibonacci é a seguinte:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{1.6.1}$$

Para estabelecer a "Fôrmla de Binet" trataremos de estudar todas as seqüências distintas de números $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots$, que satisfazem à equação (1.6.1).

Daqui por diante denotaremos por V, V' e V'' as seqüências

$$\begin{aligned} &v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, \\ &v_1', v_2', \dots, v_n', \dots \text{ e} \\ &v_1'', v_2'', \dots, v_n'', \dots, \text{ respectivamente.} \end{aligned}$$

Os seguintes resultados podem ser verificados em forma imediata como conseqüência da linearidade de (1.6.1).

Lema 6.1 - Se V é uma solução da equação (1.6.1) e c é uma constante, então a seqüência cV é também solução desta equação.

Lema 6.2 - Se as seqüências V' e V'' são soluções da equação (1.6.1), então a soma $V' + V''$ é também solução desta equação.

Definição 6.1 - Diremos que duas soluções V' e V'' são *proporcionais* se existe c tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v'_n}{v''_n} = c$.

Nosso próximo passo é mostrar que se V' e V'' são soluções não proporcionais de (1.6.1) então para toda seqüência V que é solução de (1.6.1), tem-se

$$V = c_1 V' + c_2 V'' , \quad (1.6.2)$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Uma solução da forma (1.6.2) é chamada solução geral de (1.6.1).

Observe inicialmente que se V' e V'' não são proporcionais, então ocorre que

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} . \quad (1.6.3)$$

Tomemos agora uma seqüência V que é solução de (1.6.1). Já sabemos que para determinar V basta-nos que tenhamos v_1 e v_2 . Portanto encontraremos o valor das constantes c_1 e c_2 tais que

$$\begin{cases} c_1 v'_1 + c_2 v''_1 = v_1 \\ c_1 v'_2 + c_2 v''_2 = v_2 \end{cases} \quad (1.6.4)$$

O sistema (1.6.4) tem solução pois se o determinante $\Delta = v'_1 v''_2 - v''_1 v'_2$ fosse zero então $\frac{v'_1}{v''_1} = \frac{v'_2}{v''_2}$, isto é, V' e V'' seriam proporcionais, contradizendo (1.6.3).

Por conseguinte, vemos que

$$c_1 = \frac{v_1 v_2'' - v_2 v_1''}{v_1' v_2'' - v_1'' v_2'} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{v_1' v_2 - v_2' v_1}{v_1' v_2'' - v_1'' v_2'}$$

Logo, para descrever todas as soluções da equação (1.6.1) basta-nos encontrar duas soluções não proporcionais da mesma.

Pela lei de recorrência (1.6.1) procuraremos estas soluções entre as progressões geométricas. Pelo Lema 6.1, basta considerar as progressões cujos primeiros termos são iguais a 1. Consideremos então a progressão

$$1, q, q^2, \dots$$

Para que esta seja uma solução de (1.6.1) é suficiente que, para todo n , tenhamos:

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n ;$$

dado que queremos $q \neq 0$, dividindo por q^n , resulta

$$q^2 = q + 1 \quad . \quad (1.6.5)$$

As raízes desta equação são

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$$

Obtemos portanto duas progressões geométricas que são, ambas, soluções de (1.6.1). Por isso, todas as seqüências do tipo

$$c_1 + c_2, c_1 \alpha + c_2 \beta, c_1 \alpha^2 + c_2 \beta^2, \dots, \quad (1.6.6)$$

também são soluções de (1.6.1). Visto que $\alpha \neq \beta$, as soluções encontradas não são proporcionais, logo a fórmula (1.6.6) nos oferece, para distintos valores de c_1 e c_2 , todas as soluções de (1.6.1).

Em particular, para algum valor de c_1 e c_2 , a fórmula (1.6.6) deve coincidir com a seqüência $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Fibonacci. Para isso, basta-nos determinar c_1 e c_2 a partir das equações

$$c_1 + c_2 = F_0 \quad \text{e} \quad c_1 \alpha + c_2 \beta = F_1$$

ou seja, a partir do sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

cuja solução é

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

de modo que

$$\begin{aligned} F_n &= c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \\ F_n &= \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

1.7 - Números de Fibonacci e a Geometria

Consideremos um segmento de reta AB de comprimento ℓ , dividido em dois segmentos pelo ponto C (Fig. 7.1). Tomemos a e b como comprimento de AC e CB, respectivamente. Se C é um ponto tal que $\frac{\ell}{a} = \frac{a}{b}$, diremos que C é a "seção áurea" ou divisão áurea de AB.

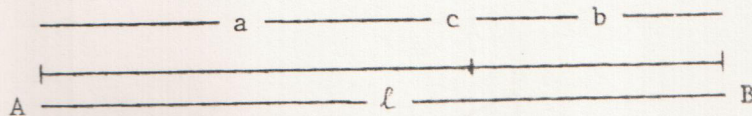


Figura 7.1 - A Divisão Áurea.

A razão ℓ/a ou a/b é chamada de *razão áurea*. Na terminologia dos antigos Matemáticos, o segmento AB está dividido pelo ponto C em

"extrema e média razões" ou também em "divisão em justa proporção". Kepler a chamava de "a divina proporção".

Parece não haver dúvida que os escultores e arquitetos gregos faziam uso dela em suas obras. Por exemplo, Fídias, incorporava esta razão em suas construções. As proporções do Partenon são um exemplo disso (Veja [4]).

Sugeriu-se, no início do século, que a letra grega ϕ - a letra inicial do nome Fídias - fosse adotada para designar a razão áurea.

O valor numérico de ϕ pode ser calculado facilmente. Tomemos $AC = x$ e $CB = 1$ na figura 7.1, de modo que $AC/CB = x = \phi$. Pela definição de razão áurea temos:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}, \text{ isto é, } x^2 - x - 1 = 0. \quad (1.7.1)$$

Note-se que a equação $x^2 - x - 1 = 0$ é igual a (1.6.5) cujas raízes são

$$x' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Chamaremos ϕ a solução positiva e ϕ' a solução negativa.

Não há dificuldade alguma na construção geométrica do ponto que oferece uma justa proporção para um dado segmento AB.

Tomemos AB (fig. 7.2) como o segmento dado. Traçamos $BD = AB/2$ perpendicular a AB. Unimos A e D.

Com centro em D e raio BD, traçamos um arco cortando DA em E. Com centro em A e raio AE, traçamos um arco cortando AB em C.

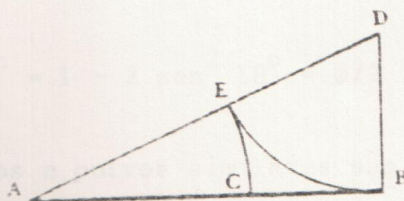


Figura 7.2 - Divisão Áurea: Construção Geométrica

Então C é a seção áurea de AB . De fato, usando o triângulo retângulo ABD temos:

$$AD^2 = AB^2 + DB^2 = \frac{5}{4} AB^2$$

Logo, $AD = \frac{\sqrt{5}}{2} AB$. A partir daí segue que $AE = AD - ED = \left[\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right] AB$.

Teremos por construção que $AC = AE$, isto é, $\frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, como queríamos provar.

O número ϕ é mais conhecido pelo nome de "número áureo". Daremos aqui um exemplo dos mais simples de como o número áureo surge em uma aplicação à Trigonometria.

Suponhamos que procuramos a solução da equação

$$\text{sen } 2\theta = \cos 3\theta, \quad (1.7.4)$$

ou, o que seria equivalente, qual é o triângulo retângulo cujos ângulos agudos são 2θ e 3θ ?

Pode-se ver ϕ à espreita nestes símbolos inocentes? Uma vez que o seno de um ângulo é igual ao coseno de seu complemento, $2\theta + 3\theta = \frac{\pi}{2}$, ou $\theta = \frac{\pi}{10}$.

A equação (1.7.4) pode ser reduzida a

$$4 \text{sen}^2 \theta + 2 \text{sen} \theta - 1 = 0. \quad (1.7.5)$$

Assim, $\text{sen } 18^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)$ ou $\text{sen } 18^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)$. Considerando-se que $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, é fácil ver que $\text{sen } 18^\circ = \frac{1}{2\phi}$. Daí obtemos que

$$\cos 36^\circ = 1 - 2 \text{sen}^2 18^\circ = \phi/2.$$

Estes resultados e outros similares são obtidos através da figura 7.3(a) abaixo. Consideremos o pentágono regular $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ cujas diagonais $P_1 P_3$, $P_2 P_4$, $P_3 P_5$, $P_4 P_1$ e $P_5 P_2$ têm comprimento unitário.

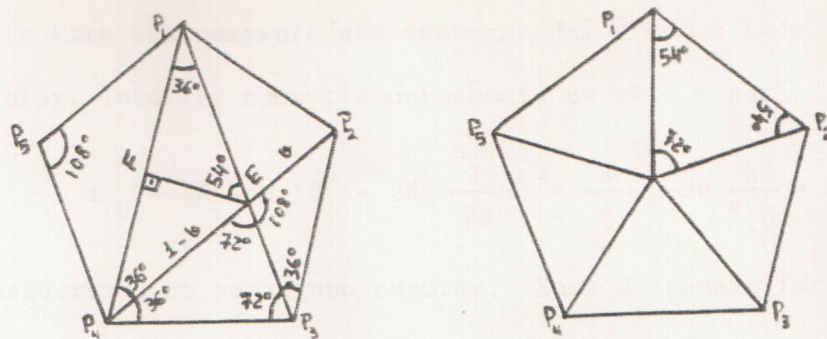


Figura 7.3

Traçando-se raios do centro do pentágono (Fig. 7.3(b)) formam-se cinco triângulos cujos ângulos são 54° , 54° e 72° , pois cada ângulo do vértice do pentágono é 108° . Dado que o triângulo $P_1P_2P_3$ é isósceles, seus ângulos de base são

$$\frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ ; \angle P_2EP_3 = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ$$

e $\angle P_1EP_2 = 72^\circ$.

Note que os triângulos EP_2P_3 e $P_3P_4P_2$ são isósceles e semelhantes. Sejam $EP_2 = v$ e $P_2P_3 = x$. Sendo $P_2P_4 = 1$, temos

$$\frac{v}{x} = \frac{x}{1} ; \text{ ou seja } v = x^2 .$$

Observando que os ângulos do triângulo EP_4P_3 são 72° , 72° e 36° , tal triângulo é isósceles, de modo que

$$EP_4 = 1 - v = x \quad \text{ou} \quad v = 1 - x .$$

Portanto,

$$x^2 = 1 - x$$

Dizemos que o triângulo $P_1P_2P_4$ é o triângulo "aureo" devido a propriedade seguinte:

"A bissetriz dos ângulos iguais intercepta os lados opostos na razão aurea".

Em virtude do triângulo P_1EP_4 ser isósceles, a bissetriz do ângulo $\angle P_1EP_4$ intercepta perpendicularmente o lado P_4P_1 , donde obtemos o triângulo P_1EF , que é solução da equação (1.7.4).

Outro fato interessante que segue-se daí é que o lado a_{10} de um decágono regular, inscrito numa circunferência de raio R será:

$$a_{10} = 2R \operatorname{sen} 18^\circ = 2R \left(\frac{1}{2\phi} \right) = \frac{R}{\phi}, \text{ ou } \frac{R}{a_{10}} = \phi.$$

Consideremos um pentágono regular. Suas diagonais formam um polígono regular estrelado (Fig. 7.4).

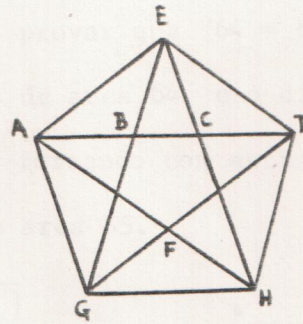


Figura 7.4 - O polígono Regular estrelado.

Observe que os ângulos \widehat{AFD} e \widehat{ADF} são iguais a 108° e 36° , respectivamente. Assim, se aplicarmos a lei dos senos no triângulo ADF , obtemos:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{\operatorname{sen} 108^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 72^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ} = 2 \cos 36^\circ = \phi.$$

Dado que $AF = AC$, temos :

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AD}{AC} = \phi$$

e C é o ponto de justa proporção do segmento AD .

Por definição de justa proporção teremos

$$\frac{AC}{CD} = \phi$$

Observando que $AB = CD$, e aplicando novamente a definição de justa proporção no segmento AC , temos:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \phi$$

ou seja, cada um dos segmentos BC, AB, AC e AD é ϕ vezes maior que o anterior, respectivamente.

$$\text{Também é fácil ver que } \frac{AD}{AE} = \phi .$$

Vamos agora ilustrar, através de um velho sofisma geométrico bem simples, mais uma ligação entre o número ϕ e a seqüência de números de Fibonacci.

Na realidade, vamos provar que "64 = 65". Tomemos para isso um quadrado de lado 8, portanto de área 64, e o dividamos em quatro partes como mostra a figura 7.5(a), formando com estas um retângulo (Figura 7.5(b)) de lados 13 e 5, ou seja, de área 65.

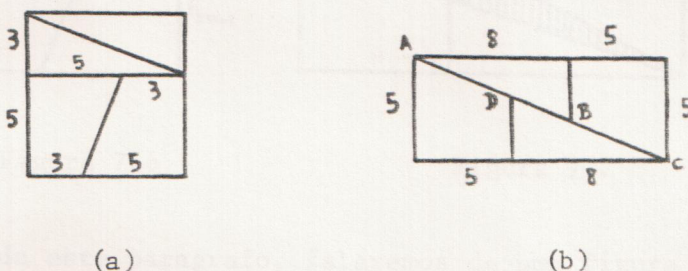


Figura 7.5

Como explicar o surgimento de uma unidade, tomando-se como ponto de partida o quadrado de lado 8 ?

De fato, é fácil explicar este aparente enigma: os pontos A, B, C e D da figura 7.5(b) não se acham, na realidade, sobre uma mesma reta, sendo vértices de um paralelogramo cuja área é precisamente igual a unidade da área acrescentada.

Esta demonstração correta, mas que é bastante imprecisa em detalhes, explica a proposição falsa (o sofisma). No entanto, ficará mais evidente e elegante se em lugar do quadrado de lado 8 tomarmos um quadrado de dimensão igual a um número de Fibonacci F_{2n} de índice par suficientemente grande. Dividamos este quadrado em partes (Figura 7.6) e formemos com estas um retângulo (Figura 7.7) O "vazio" em forma de paralelogramo que comparece ao longo da diagonal é de área 1, em virtude da relação (1.5.11). A altura máxima desse paralelogramo se calcula facilmente,

sendo igual a

$$\frac{1}{\sqrt{F_{2n}^2 + F_{2n-2}^2}}$$

Portanto, formando um quadrado de dimensão 21cm e "convertendo-o" a um retângulo de dimensões 34cm e 13cm, obteremos $\frac{1}{\sqrt{34^2 + 13^2}}$ cm = 0,4mm, aproximadamente, de altura máxima para o paralelogramo, entidade numérica que escapa à vista humana.

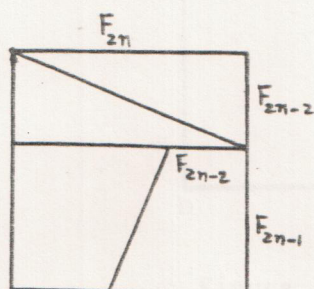


Figura 7.6

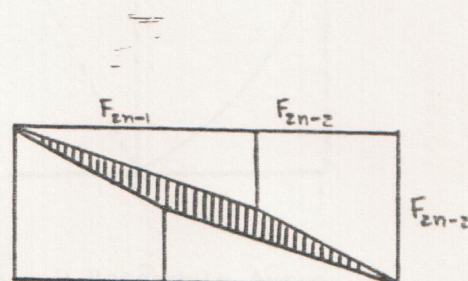


Figura 7.7

Encerrando este parágrafo, falaremos de uma figura geométrica muito interessante. Trata-se de um retângulo conhecido pelos gregos desde 500 D.C. . Tal retângulo satisfaz à propriedade de que seus lados estão em proporção áurea. Por este motivo recebeu a designação de "retângulo áureo" ou "retângulo de justa proporção". Seu formato parece exercer atrações estéticas superiores às de outros retângulos. A evidência, baseada em estudos da Psicologia, pode ser encontrada em [4], cap 5. Qualquer que seja a realidade acerca do assunto, parece não haver dúvida de que os arquitetos gregos utilizavam-se desse formato em seus projetos. Pode-se ver um exemplo na representação do Partenon ([4], cap 5). Mais significativamente, o retângulo áureo está associado de modo natural a quatro dos cinco sólidos convexos regulares conhecidos pelos gregos. Uma descrição sobre o assunto é encontrada em [4], cap 2.

A construção do retângulo áureo é uma questão simples. O ponto E representa o ponto médio do lado AB de um quadrado ABCD (Figura 7.8).

Com centro em E e raio EC desenhe um arco de círculo que corte o prolongamento do lado AB no ponto indicado por F. Desenhemõs FG perpendicular a AF encontrando o prolongamento de DC no ponto indicado por G. AFGD é então o retângulo áureo.

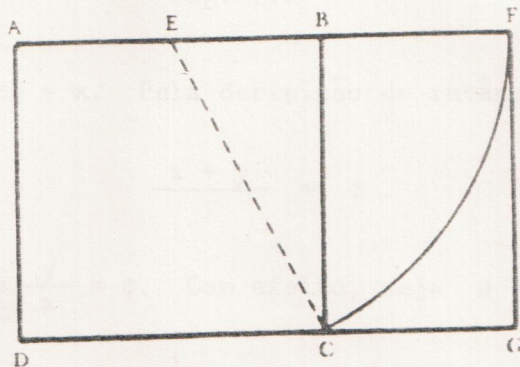


Figura 7.8 - O Retângulo Áureo.

A prova é igualmente simples. Tomemos $AB = x$. Então $EC = EF = \frac{\sqrt{5}}{2}x$. Logo

$$\frac{AF}{FG} = \frac{AE + EF}{FG} = \frac{\frac{x}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi .$$

AF está dividido por B na seção áurea. O ponto B é às vezes chamado de "corte áureo". Já dissemos anteriormente que ele está associado a idéia de "média geométrica": AB é a média geométrica de AF e BF:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{AF}{AB} , \text{ isto é, } AB^2 = AF \cdot BF .$$

Outro fato que vale a pena ser demonstrado é que o retângulo BFGC também é áureo, isto é,

$$\frac{FG}{GC} = \phi .$$

Para demonstrar tal resultado vamos fazê-lo de um modo bem geral. Considere um retângulo áureo ABCD como na figura 7.9 e seja E o seu corte áureo.

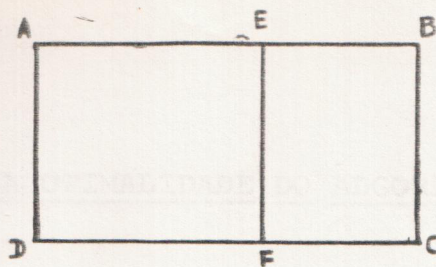


Fig. 7.9

Tomemos $AE = y$ e $EB = x$. Pela definição de retângulo áureo temos que

$$\frac{x + y}{y} = \phi .$$

Queremos demonstrar que $\frac{y}{x} = \phi$. Com efeito, seja $a = \frac{y}{x}$, então

$$\frac{1}{a} = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad \frac{1}{a} + 1 = \frac{x + y}{y} = \phi .$$

Logo,

$$\frac{1}{a} = \phi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\phi} .$$

Portanto, concluímos que $a = \frac{y}{x} = \phi$, provando que todo retângulo obtido de um retângulo áureo é também áureo.

O capítulo 2 trata de mais uma das propriedades da seqüência de Fibonacci, mas, devido ao seu caráter estritamente técnico, foi separada das demais para uma melhor compreensão do leitor.

2 - O PROBLEMA DA OTIMALIDADE DO ALGORÍTMO DE FIBONACCI

2.1 - Conceitos Preliminares

Diversos problemas em que temos que aplicar a Matemática, necessitam para sua resolução, do conhecimento de métodos de otimização, isto é, algoritmos que têm por objetivo determinar um ponto extremo de uma função (podendo este ponto ser de máximo ou de mínimo) ou uma sua aproximação. Em geral, tais processos são classificados em duas categorias: a dos métodos indiretos e a dos métodos diretos.

Na primeira categoria situam-se os métodos que não dependem da comparação direta dos valores da função assumidos em alguns pontos; eles se utilizam de condições matemáticas que são necessárias para que um ponto seja de máximo ou de mínimo. Geralmente estas condições necessárias são expressas através de relações matemáticas que são por sua própria natureza, indiretas. A título de exemplo citamos o Método dos multiplicadores de Lagrange, o qual utiliza apenas condições sobre a diferenciabilidade da função a otimizar.

Já na segunda categoria, situam-se os métodos que utilizam a *determinação e comparação* dos valores da função a otimizar em diversos pontos do seu domínio. Vale ressaltar que, os algoritmos inseridos nesta categoria, não utilizam as condições envolvendo a continuidade ou a diferenciabilidade da função em estudo. Outra característica dos métodos diretos é a de não fornecer precisamente o ponto ótimo. No caso de funções de uma variável, o que nós obtemos, usando tais métodos, é apenas um intervalo, (chamado *intervalo final*), o qual contém o ponto ótimo.

Dessa forma, chega-se a um resultado que apresenta um certo *erro relativo*, erro este expresso pela razão entre os comprimentos dos intervalos final e o inicial (aquele aonde está definida a função, o qual é sempre limitado).

A título de exemplo de métodos desta categoria vamos citar a *busca exaustiva* e a *busca de fibonacci*, os quais serão mais detalhados adiante.

Neste capítulo abordaremos um estudo comparativo entre métodos diretos para funções reais de uma variável real, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, as quais admitiremos *unimodais*, isto é, funções que apresentam apenas um ponto extremo dentro do intervalo de definição $[a, b]$.

As funções da figura 2.1(a) são unimodais, pois apresentam apenas um ponto de máximo dentro do intervalo considerado. As da figura 2.1(b) não são unimodais.

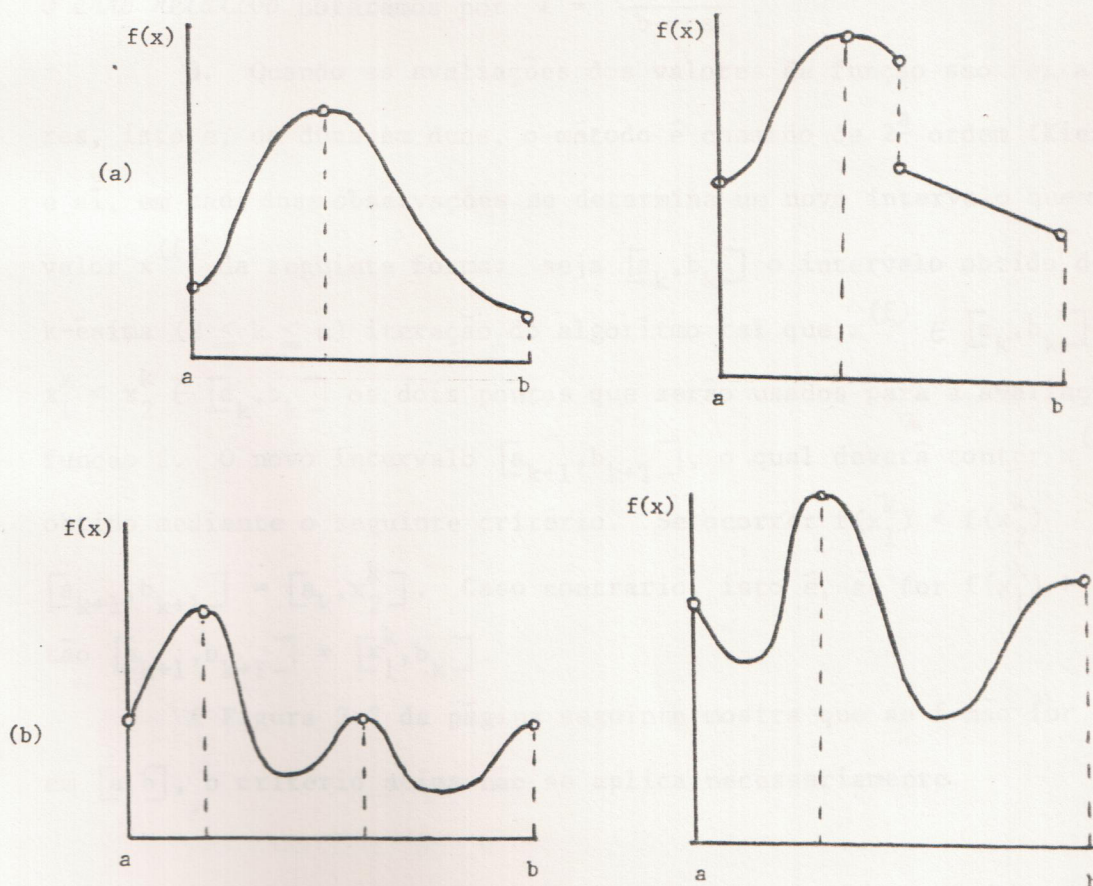


Fig. 2.1(a) Tipos de funções unimodais. (b) Tipos de funções não unimodais.

Antes de precisarmos mais detalhadamente a que nos propomos neste capítulo, faremos algumas considerações que facilitarão o entendimento de nosso objetivo.

1. Será considerado, para efeitos de exposição, o ponto ótimo como sendo de máximo. É claro que não há perda da generalidade, pois para minimizar uma função $f(x)$, basta considerar o problema da maximização da função $f_1(x) = -f(x)$. De agora em diante, o ponto ótimo da função f será denotado por $x^{(f)}$.

2. Os algoritmos a serem considerados apresentam a seguinte característica: conhecido o domínio $[a, b]$ da função f e fixado um número natural $n \geq 2$, encontra-se, após n avaliações da função f , (utilizando o algoritmo) um intervalo $[a_n, b_n] \subset [a, b]$, tal que $x^{(f)} \in [a_n, b_n]$.

Note que $\sigma = b_n - a_n$ é o *erro absoluto* cometido na aproximação de $x^{(f)}$ utilizando tal algoritmo, pois $x \in [a_n, b_n]$ então $|x - x^{(f)}| < \sigma$. O *erro relativo* notaremos por $\ell = \frac{b_n - a_n}{b - a}$.

3. Quando as avaliações dos valores da função são feitas aos pares, isto é, de duas em duas, o método é chamado de 2ª ordem (Kiefer [7]), e aí, em cada duas observações se determina um novo intervalo que conterá o valor $x^{(f)}$ da seguinte forma: seja $[a_k, b_k]$ o intervalo obtido durante a k -ésima ($2 \leq k \leq n$) iteração do algoritmo tal que $x^{(f)} \in [a_k, b_k]$. Sejam $x_1^k < x_2^k \in [a_k, b_k]$ os dois pontos que serão usados para a avaliação da função f . O novo intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, o qual deverá conter $x^{(f)}$, será obtido mediante o seguinte critério. Se ocorrer $f(x_1^k) < f(x_2^k)$ então $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_2^k]$. Caso contrário, isto é, se for $f(x_1^k) > f(x_2^k)$ então $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_1^k, b_k]$.

A Figura 2.2 da página seguinte mostra que se f não for unimodal em $[a, b]$, o critério acima não se aplica necessariamente.

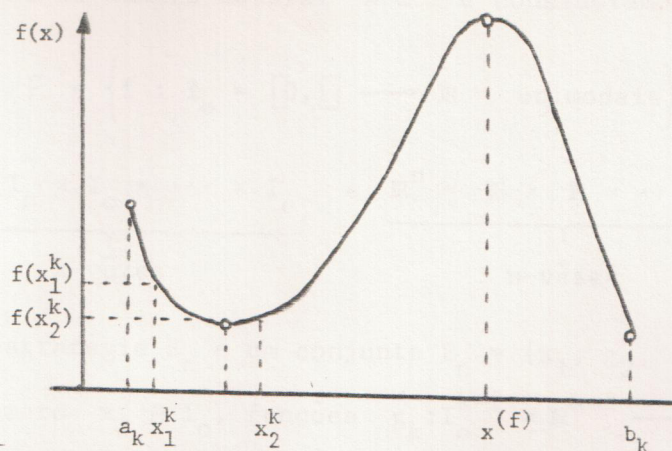


Fig. 2.2 - Note que $f(x_1^k) > f(x_2^k)$ mas $x^{(f)} \notin [a_k, x_2^k]$

4. De agora em diante, salvo em excessões que serão explicitadas, usaremos o intervalo $I_0 = [0, 1]$ como o domínio das funções a maximizar. Não havendo perda de generalidade nisto, visto que o que nos interessa para o cálculo de $x^{(f)}$ é o erro relativo, o qual é expresso pela razão l/L , onde l é o comprimento do intervalo ao final do processo e $L = b-a$ é o comprimento do intervalo ao iniciar-se o processo. Por outro lado, usando I_0 como intervalo inicial, o que nos interessará será a razão $l'/1$, onde l' é o comprimento do intervalo obtido ao final do processo iniciado com I_0 (Já que o comprimento de I_0 é 1).

Considerando o homeomorfismo canônico $\Psi: [0,1] \rightarrow [a,b]$, $\Psi(t) = (b-a)t+a$ e fixando $n \geq 2$, provamos que $l/L = l'/1$. De fato, sejam $l = b_n - a_n$ e $l' = b'_n - a'_n$, onde $[a_n, b_n]$ e $[a'_n, b'_n]$ são os intervalos finais do processo iniciado com $[a,b]$ e I_0 , respectivamente. Então

$$\begin{aligned} l &= b_n - a_n = \Psi(b'_n) - \Psi(a'_n) = (b-a)b'_n + a - [(b-a)a'_n + a] \\ &= (b-a)(b'_n - a'_n) = L \cdot l' , \end{aligned}$$

como queríamos.

5. Definição de Estratégia

Todo algoritmo nas condições do item 2 acima será, de agora em diante, denominado de *estratégia*, denotado por E_n (n é o número de avaliações fixado a priori) e que definimos formalmente a seguir.

Fixemos um número natural $n \geq 2$ e consideremos os conjuntos

$$F = \left\{ f : I_0 = [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ unimodais} \right\},$$

$$\underbrace{I_0^k = I_0 \times I_0 \times \cdots \times I_0}_{k\text{-vêzes}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-vêzes}}$$

Uma estratégia E_n é um conjunto $E_n = \{x_1, g_2, \dots, g_n, s, t\}$ consistindo de um número $x_1 \in I_0$, funções $g_k : I_0^{k-2} \times \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow I_0$ ($2 \leq k \leq n$), e funções $s, t : I_0^{n-1} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow I_0$ com $s \leq t$. Uma estratégia E_n é usada da seguinte forma: observamos (ou computamos) os valores $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, onde $x_k = g_k(x_2, \dots, x_{k-1}, f(x_1), \dots, f(x_{k-1}))$ para $2 \leq k \leq n$. com $x_2 = g_2(f(x_1))$.

Dáí escolhemos o intervalo fechado

$$D(f; E_n) = [s(x_2, \dots, x_n, f(x_1), \dots, f(x_n)), t(x_2, \dots, x_n, f(x_1), \dots, f(x_n))]$$

Cada subintervalo de I_0 obtido desse modo será chamado uma *decisão*.

Designaremos por ξ_n o conjunto consistindo de todas as estratégias E_n que se utilizam de n avaliações e para as quais $x^{(f)} \in [a_n, b_n]$, para toda função f em F .

Seguem-se agora exemplos ilustrando os conceitos apresentados.

EXEMPLO 1. A BUSCA EXAUSTIVA

Entre todos os processos de busca direta, este apresenta-se como o mais simples de ser aplicado a qualquer função unimodal.

A essência desse método reside em calcular os valores da função em pontos equidistantes no intervalo inicial I_0 . Fixando $d = |x_{i+1} - x_i| = 1/n+1$, $i=1, 2, \dots, n-1$, temos que o ponto x_1 será marcado a uma distância igual a d unidades à direita de zero; o ponto x_2 será marcado a uma distância igual a d unidades do ponto x_1 , e assim por diante até marcarmos o

ponto x_n . De fato, é fácil ver que $x_i = d \cdot i$, $i=1,2,\dots,n$. Desta constatação e relembrando a definição de estratégia segue-se que $g_i = d \cdot i$, isto é, as funções g_i , $2 \leq i \leq n$, dependem apenas do valor pré-fixado d . (Neste caso não dependem dos valores que f assume nos pontos anteriormente calculados, conforme a definição de estratégia.) Assim teríamos

$$[s(x_2, \dots, x_n, f(x_1), \dots, f(x_n)), t(x_2, \dots, x_n, f(x_1), \dots, f(x_n))] = [x_{i-1}, x_{i+1}],$$

para algum $i=1, \dots, n$, tal que $f(x_{i+1}) < f(x_i)$. Usando a observação 2, indicamos tal intervalo por $[a_n, b_n]$. Na prática, em virtude do caráter unimodal da função, paramos o processo quando $f(x_{i+1}) < f(x_i)$, isto é, quando a função passar a decrescer.

A figura 2.3 ilustra o método acima para $n = 5$.

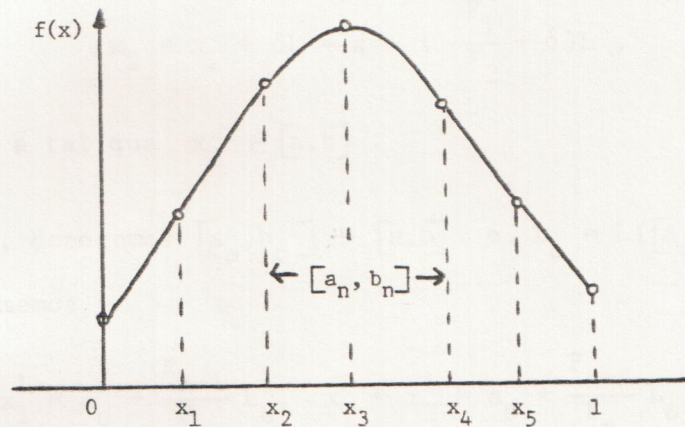


Fig 2.3 - Busca exaustiva para $n = 5$.

Observe que, na figura acima, $d = \frac{1}{6}$, sendo o intervalo de decisão final $[a_n, b_n] = [x_2, x_4]$ e seu comprimento, que denotaremos por $L([a_n, b_n]) = b_n - a_n$, será igual a

$$b_n - a_n = x_4 - x_2 = \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

De um modo geral, pondo $d = \frac{1}{n+1}$ e $[a_n, b_n] = [x_{i-1}, x_{i+1}]$, ob-

temos

$$L([a_n, b_n]) = x_{i+1} - x_{i-1} = \frac{2}{n+1} .$$

Assim apresentamos o processo de Busca Exaustiva. Passaremos ao exemplo mais importante do capítulo.

EXEMPLO 2. A BUSCA DE FIBONACCI

Neste exemplo, é mais instrutivo usarmos um intervalo $[a, b]$ qualquer. Consideremos então uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unimodal e sejam $L = L([a, b]) = b - a$ e n um número natural fixo. Lembremos que denotamos por $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a seqüência dos números de Fibonacci. Definamos a estratégia para a localização dos pontos x_1, \dots, x_n .

I. Se $n = 2$, tome $x_1 = a + \frac{F_1}{F_2} L = \frac{a+b}{2}$ e

$$x_2 = x_1 + \delta L = a + \left(\frac{F_1}{F_2} + \delta \right) L ,$$

onde $\delta > 0$ é tal que $x_2 \in [a, b]$.

II. Se $n > 2$, denotemos $[a_0, b_0] = [a, b]$ e $L_0 = L([a_0, b_0])$. No primeiro passo tomemos

$$x_1 = x_1^1 = a_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0, \quad x_2 = x_2^1 = a_0 + \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0 ;$$

Note que $x_2^1 < x_1^1$ pois $F_{n-2} < F_{n-1}$. Se ocorrer $f(x_2) > f(x_1)$ escolhermos $[a_1, b_1] = [a_0, x_1]$ como o novo intervalo que contém $x^{(f)}$; caso contrário, isto é, se $f(x_2) \leq f(x_1)$ escolhermos $[a_1, b_1] = [x_2, b_0]$. Observe que

$$L([a_0, x_1]) = x_1 - a_0 = \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0$$

e

$$L([x_2, b_0]) = b_0 - x_2 = \frac{F_n - F_{n-2}}{F_n} L_0 = \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0 .$$

Logo, qualquer um dos intervalos a escolher têm o mesmo comprimento:

$$L_1 = \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0$$

Escolhido o intervalo $[a_1, b_1]$ após a primeira iteração, trabalharemos neste intervalo, usando a mesma técnica descrita para encontrá-lo, a fim de determinar o intervalo $[a_2, b_2]$. Devemos, para tanto, considerar fixado agora o valor $n-1$. Tomemos então

$$x_1^2 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} L_1 \quad \text{e} \quad x_2^2 = a_1 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} L_1.$$

Aqui também observa-se $x_2^2 < x_1^2$.

OBSERVAÇÕES. 1) Se $[a_1, b_1] = [a, x_1^2]$, temos que $x_1^2 = x_2^1$ (portanto já calculado no passo anterior). Com efeito,

$$x_1^2 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \cdot \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0 = x_2^1.$$

Definimos neste caso (vide definição de estratégia) x_3 por $x_3 = x_2^2$

2) Se $[a_1, b_1] = [x_2, b]$, temos $x_2^2 = x_1^1$ (portanto, já calculado no passo anterior). De fato,

$$\begin{aligned} x_2^2 &= a_1 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} L_1 = x_2^1 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} L_1 = a + \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} \cdot \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0 = \\ &= a + \left(\frac{F_{n-2} + F_{n-3}}{F_n} \right) L_0 = a + \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0 = x_1^1. \end{aligned}$$

Definimos neste caso $x_3 = x_1^2$.

Feito isto, comparamos os valores $f(x_2)$ e $f(x_3)$ ou $f(x_1)$ e $f(x_3)$, conforme estejamos trabalhando no intervalo $[a_1, b_1] = [a, x_1^1]$ ou $[a_1, b_1] = [x_2, b]$, respectivamente. Aí escolhe-se o novo intervalo, o qual será denotado por $[a_2, b_2]$. Assim chegamos ao terceiro passo usando a técnica já descrita, tomamando-se agora o cuidado de considerar como fixado, o va

$n-2$ (para uso dos números de Fibonacci).

Utilizando-se sempre este processo, continuamos até a determinação do último ponto x_n . Convém observar que quando vamos determinar tal valor x_n , iremos aplicar o primeiro passo no intervalo $[a_{n-2}, b_{n-2}]$, de comprimento L_{n-2} . Assim:

$$\begin{aligned} x_1^{n-1} &= a_{n-2} + \frac{F_1}{F_2} L_{n-2} = a_{n-2} + \frac{1}{2} (b_{n-2} - a_{n-2}) = \\ &= \frac{a_{n-2} + b_{n-2}}{2}, \end{aligned}$$

$$x_2^{n-1} = a_{n-2} + \frac{F_0}{F_0} L_{n-2} = \frac{a_{n-2} + b_{n-2}}{2}.$$

Note que a cada iteração um dos pontos da iteração seguinte coincide com algum dos anteriores. Neste caso vê-se que tal ponto é o ponto médio do intervalo $[a_{n-2}, b_{n-2}]$. Portanto toma-se

$$x_n = a_{n-2} + \left(\frac{F_1}{F_2} + \delta\right) L_{n-2},$$

de modo que $x_n \in [a_{n-2}, b_{n-2}]$.

Note-se portanto que, dado o número $\delta > 0$ é sempre possível obter uma busca de Fibonacci, a qual depende desse δ fixado a priori.

Além disso, existe uma relação bastante forte entre o δ fixado a priori e a busca de Fibonacci a ele associada. Tal resultado consta da seguinte proposição.

Proposição 2.1. Fixado $n \geq 2$ e dado $\varepsilon > 0$ fixo, é sempre possível construir uma busca de Fibonacci tal que

$$L_{n-1} < \left(\frac{1}{F_n} + \varepsilon\right) L_0$$

Demonstração: Conforme a determinação dos pontos x_1, \dots, x_n , temos que o intervalo final $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, de comprimento L_{n-1} é ou

$[a_{n-1}, b_{n-1}] = [a_{n-2}, x_n]$ ou $[a_{n-1}, b_{n-1}] = [(a_{n-2} + b_{n-2})/2, b_n]$. Para o primeiro caso, temos

$$\begin{aligned} L_{n-1} &= x_n - a_{n-2} = \left(\frac{F_1}{F_2} + \delta\right)L_{n-2} = \frac{F_1}{F_2} (1 + 2\delta)L_{n-2} \\ &= (1 + 2\delta) \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{F_2}{F_3} L_{n-3} = \dots = (1 + 2\delta) \frac{1}{F_n} L_0 = \\ &= \left(\frac{1}{F_n} + \frac{2\delta}{F_n}\right)L_0. \end{aligned}$$

Agora basta tomar $\delta < \frac{F_n}{2L_0} \varepsilon$ e desde que, evidentemente satisfaça a condição imposta na definição deste algoritmo.

Para o segundo caso, temos:

$$L_{n-1} = \frac{1}{2} L_{n-2} = \frac{F_1}{F_2} L_{n-2} = \frac{F_1}{F_2} \frac{F_2}{F_3} L_{n-3} = \dots = \frac{1}{F_n} L_0$$

A última expressão satisfaz a condição requerida, concluindo a demonstração da Proposição 2.1.

2.2 - O que é um "Algoritmo Ótimo"

Consideremos agora dois problemas.

Problema I. Fixados $f \in F$ e $\varepsilon > 0$, determinar n natural e $E_n \in \xi_n$ tal que

$$L(D(f; E_n)) < \varepsilon$$

Problema II. Fixado n natural maior do que ou igual a 2 e $f \in F$, determinar $E_n^* \in \xi_n$ tal que

$$L(D(f; E_n^*)) = \inf_{E_n \in \xi_n} L(D(f; E_n))$$

Observação. Entenda-se por $L(D(f; E_n))$ como sendo o comprimento do intervalo final usando a estratégia E_n na função f .

O problema I apresenta solução (embora não seja única) conforme veremos a seguir. De fato, basta considerar a busca exaustiva como n pontos e de tal modo que o comprimento do intervalo final, dada por $\frac{2}{n}$ (como foi visto anteriormente) satisfaça a condição $(2/n) < \epsilon$, isto é, $n > 2/\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Em virtude dessa infinidade de soluções, o problema II surge de maneira natural, e seu objetivo é determinar a "melhor" estratégia $E_n \in \xi_n$, que será denotado por E_n^* , para cada $f \in F$ fixa.

Infelizmente tal problema não admite solução, como mostraremos a seguir. Com efeito, sejam $I = [0, 2]$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função unimodal possuindo um máximo $x^{(f)} \in I$. Fixemos $n = 2$ e tomemos α um número real suficientemente pequeno de modo que $1 - \alpha$ e $1 + \alpha$ estejam em $[0, 2]$. Calculemos os valores da função f nos pontos $1 - \alpha$ e $1 + \alpha$. Temos:

- 1) Se ocorrer $f(1 - \alpha) \geq f(1 + \alpha)$ então $x^{(f)} \in [0, 1 + \alpha]$
- 2) Se ocorrer $f(1 - \alpha) \leq f(1 + \alpha)$ então $x^{(f)} \in [1 - \alpha, 2]$

Note que, em ambos os casos, o comprimento do intervalo final

($L = L([0, 1 + \alpha])$ ou $L = L([1 - \alpha, 2])$) é sempre $L = 1 + \alpha$. Veja que se $\alpha \rightarrow 0$ então $L \rightarrow 1$. No entanto, se $\alpha = 0$ então $1 - \alpha = 1 + \alpha$ e a comparação destes valores não nos oferecerá pista nenhuma para a localização do ponto $x^{(f)}$, além do que estaríamos apenas com uma observação, contradizendo o fato de ser, neste caso, $n = 2$. Para cada $\alpha > 0$, se chamarmos a estratégia acima de E_2^α , usando o fato de que sempre existe $\alpha' \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha' < \alpha$, segue-se que, sempre existe também outra estratégia $E_2^{\alpha'}$, tal que o comprimento do intervalo final de $E_2^{\alpha'}$ é menor do que o comprimento do intervalo final da do por E_2^α . Portanto não existe a melhor estratégia $E_n^* \in \xi_n$.

Entretanto, em 1952, J. Kiefer [7] propôs e demonstrou o seguinte problema, objeto principal do presente trabalho.

Problema III. Fixados $n \geq 2$, número natural, e $\epsilon > 0$, determinar

$E_n^* \in \xi_n$ tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} L(D(f; E_n^*)) \leq \inf_{E_n \in \xi_n} \sup_{f \in \mathcal{F}} L(D(f; E_n)) + \epsilon. \quad (2.1)$$

Uma estratégia E_n^* satisfazendo a condição (2.1) acima será denominada, de agora em diante, de *estratégia ótima*.

O que faremos a seguir tem por objetivo demonstrar o problema III acima, tomando por base as idéias apresentadas em [7], as quais foram reformulados em alguns pontos para tornar a prova mais compreensível, especialmente a leitores não especialistas no assunto.

Além do problema III em si ser realmente interessante, temos que a busca de Fibonacci com n avaliações, E_n^* , satisfaz (2.1), o que sem dúvida é mais uma das muitas aplicações (e surpresas) da seqüência de Fibonacci.

A partir de agora veremos em separado alguns resultados que, uma vez juntos, formarão o corpo da solução para o problema III.

Dados $f \in \mathcal{F}$ e $y_0 \neq 0 \in I_0$, definamos $f: I_0 = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{f}(y) = \begin{cases} \exp \left[f \left(\frac{y}{y_0} \right) \right], & \text{se } 0 \leq y < y_0 \\ -y, & \text{se } y_0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Então $\hat{f} \in \mathcal{F}$ e $y^{(\hat{f})} = y_0 x^{(f)}$

De fato, suponhamos que f possui um gráfico como o da figura 2.4 abaixo:

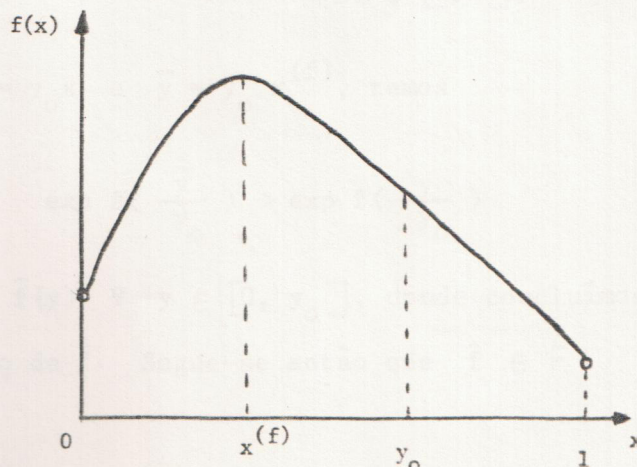


Figura 2.4

Como para $y \in [0, y_0)$, $\hat{f}(y) > 0$ e para $y \in [y_0, 1]$, $\hat{f}(y) < 0$, temos $y^{(\hat{f})} \in [0, y_0]$. Por outro lado, a exponencial é monótona, e assim, \hat{f} é também unimodal. A figura 2.5 nos dá uma idéia do gráfico de \hat{f} obtido a partir do gráfico de f na figura 2.4:

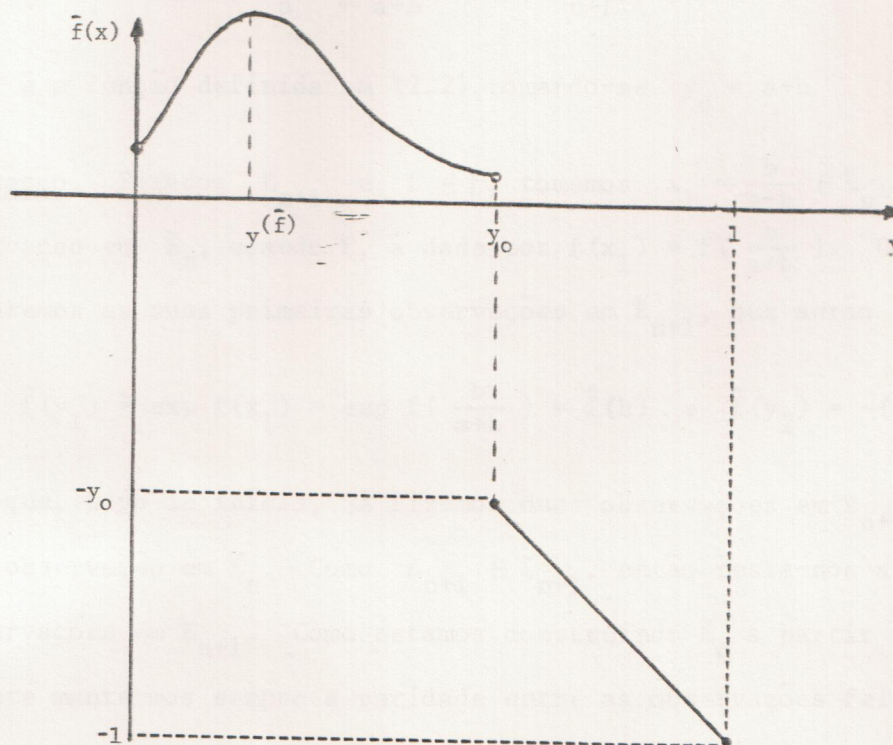


Figura 2.5

Temos, por outro lado, que

$$f(x^{(f)}) > f(x) \quad \forall x \in [0, 1], \quad x \neq x^{(f)}.$$

Daí

$$\exp f(x^{(f)}) > \exp f(x) \quad \forall x \in [0, 1], \quad x \neq x^{(f)}.$$

Tomando-se $y = y_0 x$ e $\bar{y} = y_0 x^{(f)}$, temos

$$\exp f\left(\frac{\bar{y}}{y_0}\right) > \exp f\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

Logo $\hat{f}(\bar{y}) > \hat{f}(y) \quad \forall y \in [0, y_0]$, donde concluimos que $\bar{y} = y^{(\hat{f})}$ é o ponto de máximo de \hat{f} . Segue-se então que $\hat{f} \in F$.

Teorema 2.1. Dadas $f \in F$ e $E_{n+1} \in \xi_{n+1}$, sejam $y_1 = b$ e $y_2 = a + b$, com $a > 0$, os dois primeiros pontos em E_{n+1} para observação. Então existe $\tilde{E}_n \in \xi_n$ tal que

$$L(D(f; \tilde{E}_n)) \leq \frac{1}{a+b} L(D(\hat{f}; E_{n+1})), \quad (2.3)$$

onde \hat{f} é a função definida em (2.2) tomando-se $y_0 = a+b$

Demonstração. Fixados E_{n+1} e $f \in F$, tomemos $x_1 = \frac{b}{a+b} \in \tilde{E}_n$. A primeira observação em \tilde{E}_n , usando f , é dada por $f(x_1) = f(\frac{b}{a+b})$. Com a função \hat{f} faremos as duas primeiras observações em \tilde{E}_{n+1} , que serão

$$\hat{f}(y_1) = \exp f(x_1) = \exp f\left(\frac{b}{a+b}\right) = \hat{f}(b) \quad \text{e} \quad \hat{f}(y_2) = -(a+b).$$

Note-se que, logo de início, já fizemos duas observações em E_{n+1} para apenas uma observação em \tilde{E}_n . Como $E_{n+1} \in \xi_{n+1}$, então resta-nos ainda fazer $n-1$ observações em E_{n+1} . Como estamos construindo \tilde{E}_n a partir de E_{n+1} , é importante mantermos sempre a paridade entre as observações feitas em E_{n+1} e \tilde{E}_n , pois \tilde{E}_n deverá, ao final dessa construção, pertencer a ξ_n . Para definir $x_2 \in \tilde{E}_n$, consideremos y_3 o próximo ponto a ser observado em E_{n+1} . Se ocorrer $y_3 \geq a+b$ então tome $x_2 = 0$ e considere (para manter a paridade) como observação o valor $f(x_2)$. Note que em E_{n+1} já teremos observados os valores $\hat{f}(y_2)$ e $\hat{f}(y_3)$. Se for $y_3 < a+b$, tome $x_2 = \frac{y_3}{a+b}$ e considere então $f(x_2)$ como uma observação. Em geral, para $2 \leq k \leq n-1$, se a k -ésima observação sobre E_{n+1} é tomada em um valor $y_k \geq a+b$, basta por $x_{k-2} = 0$ e tomar $f(x_{k-1})$ como uma observação em \tilde{E}_n . Caso contrário, isto é, se $y_k < a+b$, tome $x_k = \frac{y_k}{a+b}$ e então $f(x_{k-1})$ será a observação a ser considerada em \tilde{E}_n . Esta maneira de definir os pontos $x_k \in \tilde{E}_n$ leva-nos claramente a obter n pontos em \tilde{E}_n a partir dos $n+1$ pontos de E_{n+1} .

Resta mostrar que $x^{(f)}$ deve estar no intervalo final do processo ao usarmos \tilde{E}_n . De fato, como E_{n+1} atua em \hat{f} e $y^{(\hat{f})} \in [0, a+b)$, ponhamos

$[\bar{s}, \bar{t}]$ como sendo o intervalo final de E_{n+1} . É possível, que este algoritmo não seja "muito inteligente" e tome $\bar{t} > a+b$. Desse modo, definiremos o intervalo final de \tilde{E}_n , $[\tilde{s}, \tilde{t}]$, como sendo $[\tilde{s}, \tilde{t}] = \left[\frac{\bar{s}}{a+b}, 1 \right]$. Caso contrário, tomemos $[\tilde{s}, \tilde{t}] = \left[\frac{\bar{s}}{a+b}, \frac{\bar{t}}{a+b} \right]$ e como $x^{(f)} = \frac{y^{(\hat{f})}}{a+b}$, é claro que em ambos os casos temos $x^{(f)} \in [\tilde{s}, \tilde{t}]$.

Segue-se que $\tilde{E}_n \in \xi_n$.

Observe-se, neste ponto, que $L([\bar{s}, \bar{t}]) = \bar{t} - \bar{s}$. Colocando $D(f; \tilde{E}_n) = [\tilde{s}, \tilde{t}]$ e $D(\hat{f}; E_{n+1}) = [\bar{s}, \bar{t}]$, temos que, no primeiro caso, isto é, quando $[\tilde{s}, \tilde{t}] = \left[\frac{\bar{s}}{a+b}, 1 \right]$, vale

$$L(D(f; \tilde{E}_n)) = 1 - \frac{\bar{s}}{a+b} \leq \frac{\bar{t} - \bar{s}}{a+b} = \frac{1}{a+b} L(D(\hat{f}; E_{n+1})).$$

No segundo caso, isto é, quando $[\tilde{s}, \tilde{t}] = \left[\frac{\bar{s}}{a+b}, \frac{\bar{t}}{a+b} \right]$, temos

$$L(D(f; \tilde{E}_n)) = \frac{\bar{t}}{a+b} - \frac{\bar{s}}{a+b} = \frac{\bar{t} - \bar{s}}{a+b} \equiv \frac{1}{a+b} L(D(\hat{f}; E_{n+1}))$$

o que completa a demonstração.

Teorema 2.2. Dadas $f \in F$ e $E_{n+1} \in \xi_{n+1}$, sejam $y_1 = b$ e $y_2 = a+b$, $a > 0$ os dois primeiros pontos em E_{n+1} para observação. Então existe $\tilde{E}_{n-1} \in \xi_{n-1}$ tal que

$$L(D(f; \tilde{E}_{n-1})) \leq \frac{1}{b} L(D(\hat{f}; E_{n+1})), \quad (2.4)$$

onde \hat{f} é a função definida em (2.2) fazendo-se $y_0 = b$.

Demonstração. Fixemos $E_{n+1} \in \xi_{n+1}$ nas condições acima. Dada $f \in F$ qualquer, façamos as duas primeiras observações em E_{n+1} , a saber: $\hat{f}(y_0) = -b$ e $\hat{f}(y_2) = -(a+b)$. Usando a técnica do teorema 2.2, para manter a paridade entre o número de observações entre a estratégia E_{n+1} dada e a estratégia E_{n-1} , a ser construída, somente faremos a primeira observação em \tilde{E}_{n-1} quando fizermos a terceira observação em E_{n+1} . Desse modo, a k -ésima

observação em E_{n+1} corresponderá, com certeza, a $(K-2)$ -ésima observação de \tilde{E}_{n-1} . Sendo $y^{(\hat{f})} = bx^{(f)}$, então $x^{(f)} = \frac{y^{(\hat{f})}}{b}$, logo basta por

$$D(f ; \tilde{E}_{n-1}) = \left[\frac{s'}{b}, \min \left\{ 1, \frac{t'}{b} \right\} \right],$$

onde

$\left[s', t' \right] = D(\hat{f} ; E_{n+1})$. Segue portanto que $x^{(f)} \in D(\hat{f}; \tilde{E}_{n-1})$ e, assim, $\tilde{E}_{n-1} \in \xi_{n-1}$.

A conclusão do teorema 2.2, isto é, a desigualdade (2.4), segue da seguinte seqüência de cálculos:

$$L(D(f ; \tilde{E}_{n-1})) = 1 - \frac{s'}{b} = \frac{b-s'}{b} \leq \frac{t' - s'}{b} \quad (2.5)$$

para o caso em que $D(f ; \tilde{E}_{n-1}) = \left[\frac{s'}{b}, 1 \right]$. Caso contrário, isto é, se

$D(f ; \tilde{E}_{n-1}) = \left[\frac{s'}{b}, \frac{t'}{b} \right]$, então temos

$$L(D(f ; \tilde{E}_{n-1})) = \frac{t'}{b} - \frac{s'}{b} = \frac{t' - s'}{b}. \quad (2.6)$$

Como a igualdade em (2.6) não é sempre válida, podemos garantir, com certeza, que (2.5) é válida, de modo que a desigualdade (2.4) é verificada, encerrando assim a prova do teorema.

2.3 - Resolução do Problema III

Agora estamos aptos a mostrar que para $n \in \mathbb{N}$ fixo, a estratégia de Fibonacci com n avaliações, que denotaremos por E_n^* , satisfaz à desigualdade (2.1). Usaremos indução sobre n para chegar a tal resultado e vamos considerar novamente $I_0 = [0, 1]$.

Consideremos $n = 2$ e $\varepsilon > 0$ dado.

Pela proposição 2.1, $E_2^* = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta \right\}$, onde $0 < \delta < \varepsilon$. Daí

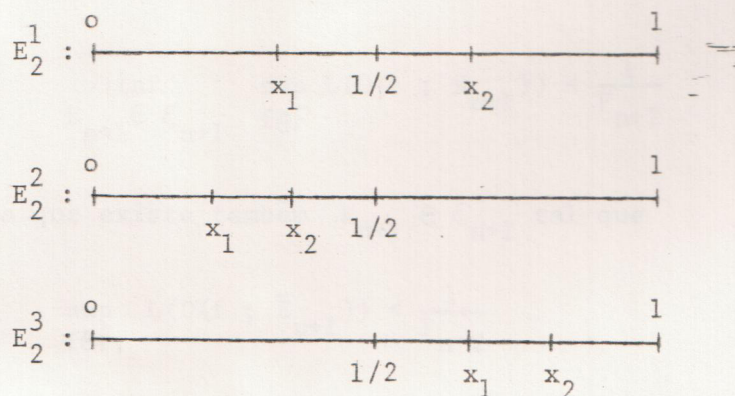
$D(f ; E_2^*) = \left[0, \frac{1}{2} + \delta \right]$ ou $D(f ; E_2^*) = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$. Segue-se então que

$$L(D(f; E_2^*)) = \frac{1}{2} + \delta \quad \text{ou} \quad L(D(f; E_2^*)) = \frac{1}{2} .$$

Observe que o conjunto ξ_2 tem os seguintes elementos:

$$\xi_2 = \{E_2^1, E_2^2, E_2^3, E_2^*\} ,$$

onde os elementos E_2^1 , E_2^2 e E_2^3 são, respectivamente, os das figuras abaixo:



Note que, para todas as estratégias E_2^i , $i = 1, 2, 3$, acima temos

$$\sup_{f \in F} L(D(f; E_2^1)) \geq \frac{1}{2} ,$$

$$\sup_{f \in F} L(D(f; E_2^2)) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$\sup_{f \in F} L(D(f; E_2^3)) \geq \frac{1}{2} .$$

Portanto, segue-se que

$$\sup_{f \in F} L(D(f; E_2^*)) = \frac{1}{2} + \delta < \frac{1}{2} + \varepsilon \leq \inf_{E_2 \in \xi_2} \sup_{f \in F} L(D(f; E_2)) + \varepsilon .$$

A última expressão prova (2.1) para $n = 2$.

Suponhamos então, por hipótese de indução, que o resultado vale para um número natural n . Provaremos que a desigualdade é válida também para $n + 1$.

Suponhamos que (2.1) seja falsa para $n+1$. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{f \in F} L(D(f; E_{n+1}^*)) > \inf_{E_{n+1} \in \xi_{n+1}} \sup_{f \in F} L(D(f; E_{n+1})) + \varepsilon \quad (2.7)$$

Para este mesmo $\varepsilon > 0$ existe, pela Proposição 2.1, uma estratégia de Fibonacci $\bar{E}_{n+1}^* \in \xi_{n+1}$ tal que

$$\frac{1}{F_{n+2}} + \varepsilon \geq \sup_{f \in F} L(D(f; \bar{E}_{n+1}^*)) > \inf_{E_{n+1} \in \xi_{n+1}} \sup_{f \in F} L(D(f; E_{n+1})) + \varepsilon$$

Logo, concluímos que

$$\inf_{E_{n+1} \in \xi_{n+1}} \sup_{f \in F} L(D(f; E_{n+1})) < \frac{1}{F_{n+2}} \quad (2.8)$$

Isto significa que existe também $\bar{E}_{n+1} \in \xi_{n+1}$ tal que

$$\sup_{f \in F} L(D(f; \bar{E}_{n+1})) < \frac{1}{F_{n+2}}$$

pois caso contrário, teríamos

$$\inf_{E_{n+1} \in \xi_{n+1}} \sup_{f \in F} L(D(f; E_{n+1})) \geq \frac{1}{F_{n+2}}$$

De posse dessa estratégia \bar{E}_{n+1} , imporemos algumas condições necessárias que viabilizarão a obtenção do resultado desejado.

Seja $\bar{E}_{n+1} = \{ \bar{x}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n, \bar{s}, \bar{t} \}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que \bar{g}_2 é constante em \bar{E}_{n+1} . Com efeito, caso \bar{g}_2 não o seja, tomemos $\bar{x}_1 \in \bar{E}_{n+1}$ e definamos uma outra estratégia $\bar{E}_{n+1}^1 \in \xi_{n+1}$ utilizando a função $f - f(\bar{x}_1)$ em lugar de f . Note que $\bar{x}_2 = \bar{g}_2(f(\bar{x}_1))$ e, após a permutação das funções obtemos $x_2 \in \bar{E}_n^1$ tal que

$$x_2 = \bar{g}_2(f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_1)) = \bar{g}_2(0).$$

Isto mostra que $\bar{g}_2 \in \bar{E}_{n+1}^1$ é constante pois $\bar{g}_2(0)$ independe da função f . Além disso, \bar{E}_{n+1}^1 satisfaz à condição (2.9), pois $f - f(\bar{x}_1) \in F$ e $\sup L(D(f - f(\bar{x}_1); \bar{E}_{n+1}^1)) = \sup L(D(f; \bar{E}_{n+1}))$, já que aqui o supremo é tomado dentre todas as funções que compõem a família e não apenas sobre uma particular função f .

De agora em diante, usaremos sempre a notação \bar{E}_{n+1} ao invés de \bar{E}_{n+1}^1 . Isto posto, substituamos o \bar{x}_1 e o \bar{x}_2 de \bar{E}_{n+1} por b e $a + b = 1 - c$ com $a \geq 0$. Os valores correspondentes na estratégia de Fibonacci, E_{n+1}^* , serão denotados por $d = \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ e $d + e = 1 - d = \frac{F_n}{F_{n+1}}$.

Usando esta notação e partindo de (2.9), vamos provar que

$$a + b \leq d + e \quad e \quad a + c \leq d + e \quad (2.10)$$

Em virtude da semelhança entre as desigualdades acima, nossa demonstração se restringirá apenas à desigualdade do lado esquerdo de (2.10). A outra demonstração é feita de modo análogo "*mutatis mutandis*".

Suponhamos, por absurdo, que $a + b > d + e$. A idéia aqui é construir uma estratégia $E'_n \in \xi_n$ tal que

$$\sup_{f \in F} L(D(f ; E'_n)) < \frac{1}{F_n}, \quad (2.11)$$

contradizendo nossa hipótese de indução, pois tal desigualdade só se verifica se supusermos que (2.1) é falsa para o valor n , o que não é o caso.

Utilizando-se o Teorema 2.1, é fácil concluir a existência de $E_n^1 \in \xi_n$ tal que

$$L(D(f ; E_n^1)) \leq \frac{1}{a+b} L(D(\hat{f} ; \bar{E}_{n+1})). \quad (2.12)$$

Mas, por hipótese, $a + b > d + e$. Então, de (2.12), vem

$$\begin{aligned} \sup_{f \in F} L(D(f ; E_n^1)) &\leq \frac{1}{a+b} \sup_{\hat{f} \in F} L(D(\hat{f} ; \bar{E}_{n+1})) \\ &< \frac{1}{d+e} \sup_{\hat{f} \in F} L(D(\hat{f} ; \bar{E}_{n+1})) \\ &< \frac{F_{n+1}}{F_n} \cdot \frac{1}{F_{n+1}} = \frac{1}{F_n}. \end{aligned}$$

Logo, (2.11) é satisfeita, contradizendo, como queríamos, a hipótese de indução. Em virtude disso deve ser $a + b \leq d + e$.

Observe que, em virtude da definição dos números $a + b$, d e $d + e$, é fácil concluir que

$$a + b + c = 2d + e = 1 \quad (2.13)$$

Assim, como $a + c = 1 - b$ e, uma vez provado que $a + c \leq d + e$, então $1 - b \leq d + e$. Visto que $2d + e = a + b + c$, segue que $(2d + e) - b \leq d + e$. Daí obtemos que $b \geq d$. Analogamente é possível concluir que $c \geq d$, isto é, valem as desigualdades:

$$b \geq d \quad e \quad c \geq d \quad . \quad (2.14)$$

Por intermédio destas observações e usando o Teorema 2.2, podemos concluir a existência de uma estratégia $E''_{n-1} \in \xi_{n-1}$ tal que

$$L(D(f ; E''_{n-1})) \leq \frac{1}{b} L(D(\hat{f} ; \bar{E}_{n+1})) \quad (2.15)$$

Por (2.14) e (2.15) segue que

$$\begin{aligned} \sup_{f \in F} L(D(f ; E''_{n-1})) &\leq \frac{1}{b} \sup_{\hat{f} \in \hat{F}} L(D(\hat{f} ; \bar{E}_{n+1})) \\ &< \frac{1}{d} \sup_{\hat{f} \in \hat{F}} L(D(\hat{f} ; \bar{E}_{n+1})) \\ &< \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}} \cdot \frac{1}{F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n-1}} \quad . \end{aligned}$$

A última desigualdade nos indica a existência de uma estratégia $E''_{n-1} \in \xi_{n-1}$ satisfazendo a condição

$$\sup_{f \in F} L(D(f ; E''_{n-1})) < \frac{1}{F_{n-1}} \quad (2.16)$$

Observe então que (2.16) contradiz a hipótese de indução, pois tal desigualdade também só se verifica se supusermos que (2.1) é falsa para o valor $n-1$, o que também não é o caso.

Perceba que as contradições obtidas em (2.11) e (2.16) são oriundas da suposição feita sobre a não validade da desigualdade (2.1) para o valor $n+1$.

Portanto (2.7) é falsa, implicando na validade da expressão (2.1) para a estratégia E_n^* de Fibonacci como desejávamos.

3 - B I B L I O G R A F I A

- [1] - Coxeter, H.S.M - Geometry Revisited, Randon House, New York, 1967.
- [2] - Ibidem - Introduction to Geometry, John Wiley & Sons, 2^a Ed., New York, 1969.
- [3] - H.E. Licks - Recreations in Matematics.
- [4] - H.E. Huntley - A Divina Proporção, Ed. UNB, Brasília, 1985.
- [5] - Ibidem, Fibonacci Quartely, Vol. 2, Nº 2 (abril de 1964), pg. 104.
- [6] - Ibidem, Vol. 2, Nº 3 (outubro de 1964), pg. 184.
- [7] - Kiefer, J - Sequential Minimax Search for a Maximum, Ann. Math. Statist., Vol. 23 (1952), pp. 501/505.
- [8] - Novaès, A.G. - Métodos de Otimização: Aplicações aos transportes, Edgard Blucher, São Paulo, 1978.
- [9] - Voroviov, N.N. - Números de Fibonacci, Editora Mir, Moscou, 1974.