



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

LUCAS DE PAULA MIRANDA

INFLUÊNCIA DO CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UMA PARTÍCULA  
CARREGADA NO BILHAR CLÁSSICO

FORTALEZA

2016

LUCAS DE PAULA MIRANDA

INFLUÊNCIA DO CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UMA PARTÍCULA  
CARREGADA NO BILHAR CLÁSSICO

Monografia de Bacharelado apresentada à  
Coordenação da Graduação do Curso de Física,  
da Universidade Federal do Ceará, como  
requisito parcial para obtenção do Título  
de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira  
da Costa Filho

FORTALEZA  
2016

LUCAS DE PAULA MIRANDA

INFLUÊNCIA DO CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UMA PARTÍCULA  
CARREGADA NO BILHAR CLÁSSICO

Monografia de Bacharelado apresentada à  
Coordenação da Graduação do Curso de Física,  
da Universidade Federal do Ceará, como  
requisito parcial para a obtenção do Título  
de Bacharel em Física.

Aprovada em 02/02/2016.

BANCA EXAMINADORA

*R N L U L*

---

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*Murilo Pereira de Almeida*

---

Prof. Dr. Murilo Pereira Almeida  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*Cláudio Lucas Nunes de Oliveira*

---

Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Física

- 
- M644i      Miranda, Lucas de Paula  
              Influência do campo magnético sobre uma partícula carregada no bilhar clássico / Lucas de  
Paula Miranda. – 2016.  
              38 f. : il. algumas color.
- Monografia (Graduação em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Departamento de Física, Curso de Bacharelado em Física, Fortaleza, 2016.  
              Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.  
              Inclui bibliografia e apêndice.
1. Campo magnético. 2. Movimento de partículas. 3. Dinâmica do bilhar clássico.  
4. Invariantes adiabáticos. 5. Método de integração. I. Costa Filho, Raimundo Nogueira da.  
II. Título.

*Aos Meus Pais  
e  
amigos.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, João Artur da Rocha Miranda e Maria Irlanda de Paula Miranda, pelo carinho e cuidados que me deram.

Ao meu orientador, e professor, Raimundo Nogueira pela orientação, conselhos e paciência que tive comigo durante a minha graduação.

À Lorena Duarte, minha namorada e melhor amiga.

Aos professores Andrey Chaves, André Auto, José Soares, Murilo Pereira, João Milton, Humberto de Andrade Carmona, Eduardo Bedê, Renan Landim, Othon Lopes e Apiano Moraes pelos conhecimentos que me passaram.

Aos meus amigos Daniel Brito, Laura Barth, Emanuel Fonteles, João Paulo Nogueira, Raul Vitor, Julia Gondim, Mardônio França, Paulo Gleison, Renato Pinheiro, Lucas Moreira, Mateus Andrade, Bianca Gondim, Misael Moura e muitos outros que me acompanharam durante toda a minha graduação.

## RESUMO

O bilhar clássico consiste de uma partícula confinada em uma região com duas dimensões delimitada por fronteira fixa ( $f(r, \theta) = f_0$ ) na qual a partícula se move em linha reta com velocidade constante e colide elasticamente com a fronteira. Iremos utilizar esse modelo para estudar os efeitos de um campo magnético sobre uma partícula carregada no bilhar. Esse tipo de estudo é de grande utilidade para física de *plasmas*, onde se estuda amplamente o movimento de partículas carregadas sobre a influência de campos magnéticos. Quando uma partícula entra em uma região com campo magnético constante, esta passa a apresentar um movimento de órbita definida como órbita de *armor*. Associado ao movimento em órbita da partícula carregada temos um *momento de dipolo magnético* que surge para resistir a mudanças de fluxo de campo magnético na órbita da partícula. Iremos mostrar que o momento de dipolo magnético é *invariante adiabático* do sistema e ver como este se comporta em uma região com campo magnético não uniforme. Seguindo a linha de estudo para sistemas dinâmicos, iremos estudar o espaço de fase gerado pelo bilhar e descrever como este se comporta com mudanças no campo magnético.

**Palavras-chave:** Bilhar. Campo Magnético. Dinâmica.

## ABSTRACT

The classic billiard consists of a particle confined in a region by fixed boundary  $\mathbf{f}(r, \theta) = \mathbf{f}_0$  in which the particle moves in a straight line at constant speed and collides elastically with the boundary. We will use this model to study the effects of a charged particle under the influence of a magnetic field in the billiard. This type of study is useful in *plasma* physics, which it heavily studies the movement of a particle under the influence of magnetic fields. When a particle enters a region with a constant magnetic field, it starts to describe orbiting movement, defined as *Larmor* orbit. Associated with the charged particle orbits we have a *magnetic dipole moment* that comes opposite to the changes in the magnetic field flux in the orbits of the particle. We will show that the magnetic dipole moment is an *adiabatic invariant* of the system and see how it behaves in a region with nonuniform magnetic field. Following the line of Dynamic Systems, we will study the phase space generated by the billiard and see how it behaves under changes of the magnetic field.

**Keywords:** Billiard. Magnetic Field. Dynamic.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Uma imagem da estrela do nosso sistema planetário exemplificando o plasma{ Fonte: <a href="http://goo.gl/jmT82S">http://goo.gl/jmT82S</a> } . . . . .	11
Figura 2 – Imagem demonstrando a magnetosfera{Fonte: <a href="https://goo.gl/nSFSve">https://goo.gl/nSFSve</a> }. . . . .	12
Figura 3 – Imagem demonstrando a magnetosfera{Fonte: <a href="https://goo.gl/jc24AU">https://goo.gl/jc24AU</a> }. . . . .	12
Figura 4 – Bilhar stádio de Bunimovich. {Fonte: <a href="https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_billiardshold.jpg">https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_billiardshold.jpg</a> }. . . . .	13
Figura 5 – Mapa de fase e a seção de Poincaré para um pêndulo{ Fonte: <a href="http://goo.gl/00snq8">http://goo.gl/00snq8</a> }. . . . .	15
Figura 6 – À esquerda a trajetória de uma partícula em um bilhar clássico. À direita, o mapeamento da trajetória em um espaço de fase. . . . .	17
Figura 7– Trajetória da partícula em movimento ciclotrônico, no plano(x, y), em colisão com uma fronteira elíptica.. . . . .	19
Figura 8– Valor do momento dipolo magnético gerado por uma partícula carregada em movimento ciclotrônico durante simulação mostrada na Figura( ??). . . . .	19
Figura 9 – Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético $B = 0.0$ . . . . .	25
Figura 10 –A Figura mostra dois tipos de trajetórias da partícula em um bilhar clássico ( $B = 0.0$ ) cujo as órbitas no espaço de fase são caracterizadas com libração (a esquerda) e rotação (a direita). . . . .	26
Figura 11–Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético $B = 0.5Z$ . . . . .	26
Figura 12–Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético $B = 1.0Z$ . . . . .	27
Figura 13–Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético $B = 2.0Z$ . . . . .	27
Figura 14–Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético $B = 3.0Z$ . . . . .	28
Figura 15–Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético $B = -1.0Z$ . . . . .	28
Figura 16 –Trajetória da partícula sobre a influência de um campo magnético não uniforme descrito pela função (5.2). . . . .	29

Figura 17 –Variação do momento dipolo magnético respectivo a trajetória descrita na Figura (16). . . . .	30
Figura 18 –Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.2) com $\mathbf{A} = 0 \cdot 5$ . . . . .	30
Figura 19 –Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.2) com $\mathbf{A} = 1 \cdot 0$ . . . . .	30
Figura 20 –Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.2) com $\mathbf{A} = 2 \cdot 0$ . . . . .	31
Figura 21 –Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.2) com $\mathbf{A} = 3 \cdot 0$ . . . . .	31
Figura 22 –Trajetória da partícula carrega sobre a influência de uma campo magnético não uniforme descrito pela função (5.3). . . . .	32
Figura 23 –Variação do momento dipolo magnético respectivo a trajetória descrita na Figura (22). . . . .	32
Figura 24 –Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.3) com $\mathbf{A} = 0 \cdot 5$ . . . . .	32
Figura 25 –Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.3) com $\mathbf{A} = 1 \cdot 0$ . . . . .	33
Figura 26 –Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.3) com $\mathbf{A} = 2 \cdot 0$ . . . . .	33
Figura 27 –Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.3) com $\mathbf{A} = 3 \cdot 0$ . . . . .	33
Figura 28 –Trajetória e espaço de fase bilhar elíptico, com excentricidade 0.5, $\mathbf{A} = 3.0$ , para uma única condição inicial. . . . .	34

## SUMÁRIO

1	INT RODUÇÃO . . . . .	11
2	DINÂMICA DO BILHAR CLÁSSICO. . . . .	14
2.1	Dinâmica Clássica . . . . .	14
2.2	Bilhar clássico . . . . .	16
3	MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA CARREGADA. . . . .	18
3.1	Movimento ciclotrônico . . . . .	18
3.2	Momento dipolo magnético . . . . .	18
3.3	Efeitos do campo magnético não uniforme. . . . .	19
4	INVARIANTES ADIABÁTICOS. . . . .	23
4.1	O momento dipolo magnético como um invariante adiabático. . . . .	23
4.2	O fluxo do campo magnético como um invariante adiabático . . . . .	24
5	SIMULAÇÕES E RESULTADOS. . . . .	25
5.1	Campo Magnético constante. . . . .	26
5.2	Campo magnético não uniforme. Função exponencial. . . . .	29
5.3	Campo magnético não uniforme. . . . .	31
6	CONCLUSÕES. . . . .	35
7	APÊNDICE. . . . .	36
7.1	Método de integração . . . . .	36
	REFERÊNCIAS . . . . .	38

## 1 INTRODUÇÃO

Temos como objetivo neste projeto estudar o movimento de uma partícula carregada sobre o efeito de um campo magnético em um bilhar clássico [1].

O estudo do movimento de partículas carregadas torna-se interessante devido à sua aplicação em física de plasmas [2]. O plasma pode ser descrito como um gás eletricamente neutro formado por íons positivos e negativos, ou seja, átomos ionizados. Para que ocorra a ionização é necessário fornecer uma enorme quantidade de energia para o átomo. Assim, é preciso uma alta temperatura para criar e, conseqüentemente, manter o plasma. A Figura (1) mostra uma estrela como um exemplo de plasma.

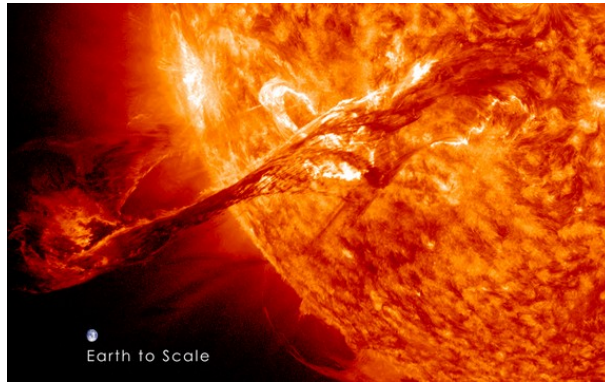


Figura 1: Uma imagem da estrela do nosso sistema planetário exemplificando o plasma  
{Fonte: <http://goo.gl/jmT82S>}

Um assunto de grande interesse em física de plasma é o confinamento de partículas carregadas devido a um campo magnético [2]. Como o plasma não pode colidir com as paredes de seu reservatório, se faz uso de confinamento por meio de campos magnéticos, onde uma partícula carregada oscila dentro de uma região devido ao campo magnético. Na Figura (2) temos um exemplo de um fenômeno chamado de *espelhos magnéticos* [2]. O aumento da intensidade do campo magnético nas extremidades de uma região faz com que uma partícula carregada permaneça em um movimento periódico entre as duas extremidades.

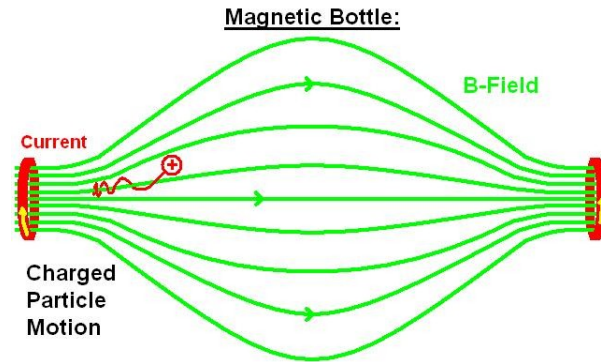


Figura 2: Imagem demonstrandoa magnetosfera

{Fonte: <https://goo.gl/nSFSve>}.

Outro incentivo para o estudo de partículas carregadas envolve o estudo da ionosfera e da magnetosfera [3], assim como o estudo de descargas elétricas.

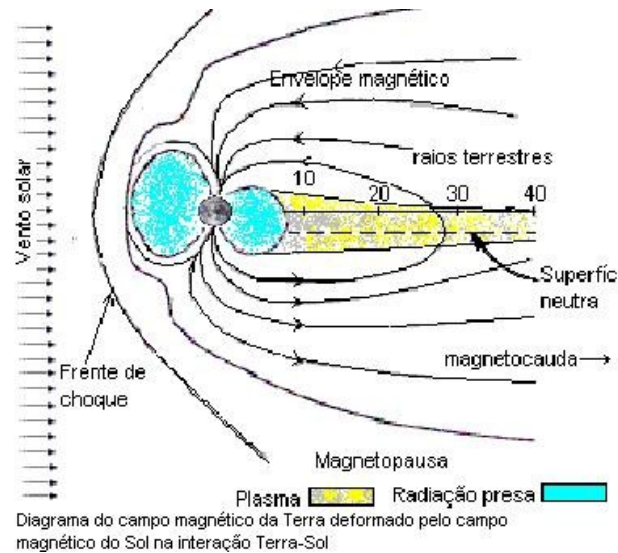


Figura 3: Imagem demonstrandoa magnetosfera

{Fonte: <https://goo.gl/jc24AU>}.

Como sistema de estudo, iremos utilizar um bilhar circular para realizar as simulações. No bilhar a partícula encontra-se e confinada dentro de uma fronteira fixa dada por uma função  $f(r, \theta) = f_0$ , em que as colisões com esta fronteira são elásticas. O bilhar clássico já foi amplamente estudado [4]. A Figura (4) mostra a trajetória de uma partícula em um bilhar clássico típico.

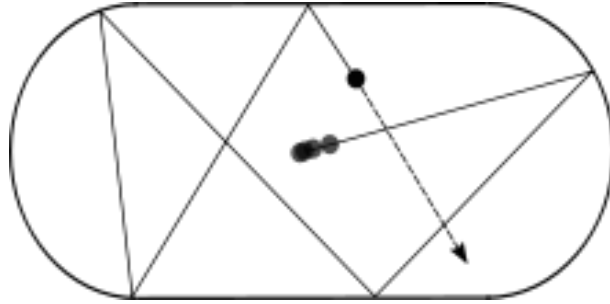


Figura 4: Biliar stádiodo Bunimovich.

{Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical\\_billiardshold.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_billiardshold.jpg)}.

Em sistemas dinâmicos, é de interesse encontrar constantes de movimento para analisar a integrabilidade do sistema [5]. Assim iremos analisar o comportamento dos invariantes adiabáticos [6] já conhecidos do movimento de uma partícula carregada, nomeadamente, o momento dipolo magnético e o fluxo magnético [2].

No atual projeto iremos estudar quais efeitos a presença de um campo magnético provoca em uma partícula em um bilhar clássico. Iremos aplicar campos magnéticos constantes com intensidades diferentes e campos magnéticos não uniformes (em orientação espacial) no sistema.

## 2 DINÂMICA DO BILHAR CLÁSSICO

Antes de começarmos a estudar o sistema sugerido no título precisamos definir algumas propriedades do sistema a fim de analisar e caracterizar nossos resultados.

### 2.1 Dinâmica Clássica

Um sistema dinâmico pode ser descrito através da Hamiltoniana,

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}_i), \quad (2.1)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, N$ . Sendo  $\mathbf{q}$  um grau de liberdade do sistema e  $\mathbf{p}_i$  seu momento conjugado.

Tal função obedece as seguintes relações, conhecidas como equações de Hamilton,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.2)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.3)$$

Um sistema com  $N$  graus de liberdade é então dito integrável quando este apresenta  $N$  constantes de movimento,

$$f_i = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}_i) = \text{constante}, \quad (2.4)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

A curva formada pelo conjunto de pontos  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}_i)$  formam uma trajetória em plano. O plano formado pela variável  $q$  e seu momento conjugado  $p$  é denominado espaço de fase. Para analisar o espaço de fase do sistema iremos utilizar a abordagem criada por Henry Poincaré [7]. Em vez de analisar a curva em um espaço de fase formada por  $\mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{p}(t)$ , Poincaré analisa os pontos em que a trajetória dessa curva atravessa em seção do espaço de fase. Na Figura (5) temos o espaço de fase e a seção de Poincaré para um pêndulo com um grau de liberdade. Uma linha é traçada em uma certa região do espaço de fase, e o mapa da seção de Poincaré é o conjunto de pontos em que as trajetórias do espaço de fase cruzam essa linha. Vemos então que a seção de Poincaré para um sistema com dois graus de liberdade, como o bilhar clássico, deve possuir duas dimensões.

Ainda no mapa de fase mostrado na Figura (5) vemos dois tipos de orbitas <sup>1</sup> distintas:

<sup>1</sup> Chamamos de órbita no espaço um conjunto de valores (estados) que se repetem em uma dada

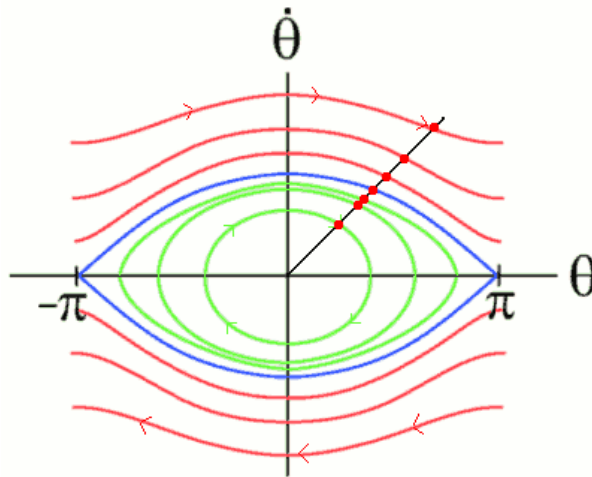


Figura 5: Mapa de fase e a seção de Poincaré para um pêndulo{ Fonte: <http://goo.gl/00snq8>}.

libração e rotação [6]. Em um espaço de fase, curvas fechadas são que definimos como libração. Quando as curvas não são fechadas mas se repetem com uma certa frequência, são o que chamamos de rotação.

Algo que precisamos dar atenção é o fato de, a princípio, não termos informações sobre  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$ . Então precisamos transformar as variáveis que temos. Devido a presença das constantes de movimento podemos encontrar um novo conjunto de variáveis  $(\varphi_i, I_i)$  aplicando uma transformação canônica <sup>2</sup> nas variáveis  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}_i)$ . Definimos as novas variáveis de tal forma que a nova hamiltoniana fique na forma,

$$H = H(I_i). \quad (2.5)$$

As novas equações de Hamilton ficam,

$$\frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega = \text{constante}. \quad (2.7)$$

Com isso, temos,

$$I_i = C_i, \quad (2.8)$$

$$\varphi_i = \omega t + \varphi_i^0, \quad (2.9)$$

tra jetória.

<sup>2</sup>Uma transformação canônica transforma um conjunto de variáveis canônicas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$  de forma que as equações de hamilton (2.2) e (2.3) mantém a mesma forma.



onde  $q = \text{constante}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Temos então, para um sistema integrável, um novo conjunto de variáveis onde  $\phi_i$  apresenta valores periódicos com frequência dada por  $\omega$ , e  $I_i$  permanece constante. Assim, para um sistema integrável, apenas certos valores do espaço de fase são acessíveis ao sistema. Quando não podemos integrar o sistema por meio de quadratura, através das equações de Hamilton (2.2) e (2.3), passamos a lidar com sistema não-integráveis, ou quase-integráveis [5]. Sistemas assim apresentam um comportamento ergódico [4]. Um sistema é dito ergódico, quando todos os possíveis estados de energia são igualmente acessíveis. No caso em estudo, um sistema é dito ergódico quando o espaço de fase é preenchido para um número grande de interações do sistema.

## 2.2 Bilhar clássico

O bilhar consiste de uma partícula se movendo livremente em uma região confinada por uma fronteira, onde as colisões entre a partícula e a fronteira são elásticas. Em um bilhar clássico a energia se conserva, logo ele é um sistema conservativo. Para uma fronteira circular dada pela equação (2.10) o momento angular com relação ao centro também é conservado.

Momento angular no ponto de colisão com a fronteira é dado por  $L = r \times mv = mr v \sin(\beta)$ ,  $\beta$  é o ângulo entre o vetor  $r$  e  $v$ . No caso do bilhar circular não deformado, o ângulo da direção da trajetória, referente a reta tangente ao ponto de impacto, não muda e  $r$  é sempre normal a reta tangente ao ponto de impacto. Vemos então que o ângulo entre  $r$  e  $v$  é sempre o mesmo, e logo o momento angular se conserva.

Assim em um sistema com dois graus de liberdade temos duas grandezas que são conservadas. Logo o bilhar descrito é um sistema integrável e escrito na forma,

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = r^2. \quad (2.10)$$

O espaço de fase para o bilhar clássico é mapeado através das colisões que a partícula faz com a fronteira. Assim a seção de Poincaré é formada pelo conjunto de pontos  $(S(\theta)_i, p(\alpha)_i) \rightarrow (S(\theta)_{i+1}, p(\alpha)_{i+1})$ , onde  $S(\theta)$  é a distância do ponto de colisão à um ponto de origem (distância dada por um comprimento de arco) descrita por (2.11)  $p(\alpha)$  é o cosseno do ângulo  $(\alpha)$  da trajetória referente a tangente do ponto de impacto (2.12) e o índice  $i$  é a  $i$ -ésima colisão da partícula com a fronteira.

$$S(\theta) = \frac{1}{L} \int_0^\theta \sqrt{r^2(\theta) + \frac{dr(\theta)}{d\theta}^2} d\theta, \quad (2.11)$$

$$p = \cos \alpha. \quad (2.12)$$

Vemos na Figura (6) o bilhar clássico para um fronteira circular dada pela equação (2.10) e seu respectivo espaço de fase para uma única condição inicial.

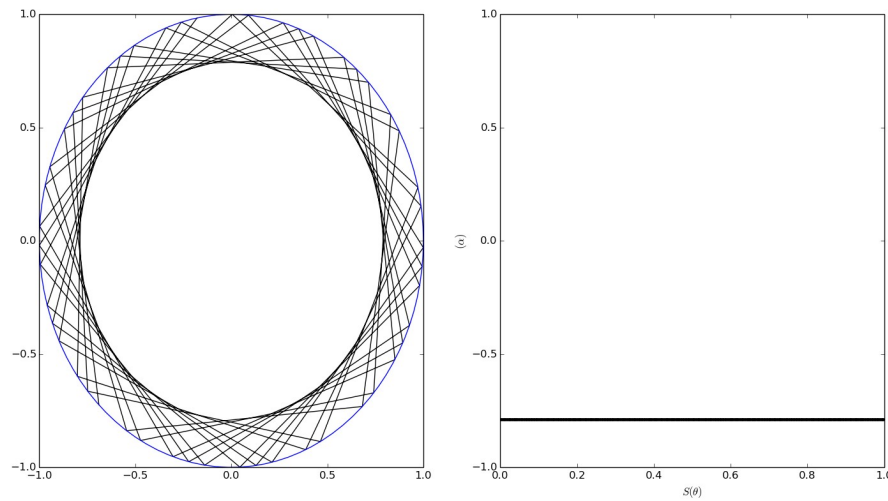


Figura 6: À esquerda a trajetória de uma partícula em um bilhar clássico. À direita, o mapeamento da trajetória em um espaço de fase.

O raio do bilhar é dado pela equação,

$$R(\theta, e) = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\theta)}, \quad (2.13)$$

onde  $\theta$  é a coordenada angular da partícula e  $e$  deforma o bilhar circular na forma de uma elipse.

### 3 MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA CARREGADA

#### 3.1 Movimento ciclotrônico

Uma partícula se movimentando, em um plano  $(x,y)$ , sobre a influência de um campo eletromagnético percebe uma força descrita por:

$$F = QE + v \times B. \quad (3.1)$$

Chamada **força de Lorentz** [8]. Consideramos que a partícula se move em uma região onde o campo elétrico é nulo e o campo magnético é constante  $B = Bz$ . O movimento característico é um movimento ciclotrônico com uma órbita perpendicular à direção do campo magnético. No sistema em estudo, o campo magnético é perpendicular ao plano ao plano no qual a partícula se movimenta. Assim, a força de Lorentz nesse sistema equivale a força centrípeta,

$$F = Q|v|B = m\frac{v^2}{R}, \quad (3.2)$$

onde  $R = \frac{mv}{QB}$  é o raio da trajetória da partícula, chamado também raio da órbita de Larmor [8]

#### 3.2 Momento dipolo magnético

Quando uma partícula entra em uma região com campo magnético, um momento magnético surge como uma forma de resistir a variação do fluxo magnético na trajetória da partícula. Logo o momento magnético é paralelo e de sentido oposto ao campo magnético. Para uma partícula carregada em um movimento ciclotrônico, é atribuído um momento de dipolo magnético [8] dado por:

$$\mu = I da, \quad (3.3)$$

onde  $da$  é a área da órbita da partícula e  $I$  é a corrente gerada devido ao movimento da partícula. Vetorialmente o dipolo magnético possui uma direção perpendicular à velocidade de órbita da partícula. No caso em estudo, em módulo,

$$\mu = I\pi R^2, \quad (3.4)$$

com  $I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi R}$  (T sendo o período da órbita) e o raio da órbita  $R = \frac{mv}{qB}$ , temos então que

$$\mu = \frac{mv^2}{2B}. \quad (3.5)$$

Na Figura (7) vemos a trajetória de uma partícula carregada colidindo com uma fronteira elíptica. A presença do campo magnético faz com que a partícula tenha um movimento ciclotrônico como descrito por (3.2). A Figura (8) mostra o momento dipolo magnético gerado pela trajetória descrita em (7). Como esperado, o momento dipolo magnético permanece constante em um sistema regular.

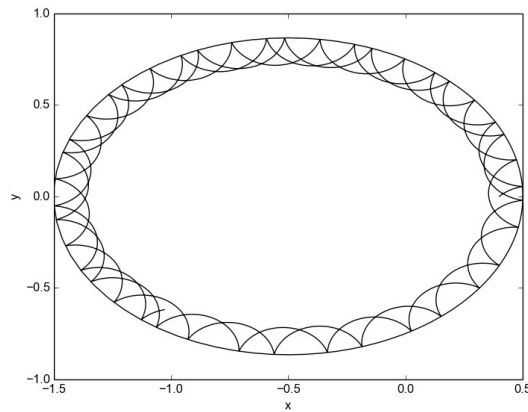


Figura 7: Trajetória da partícula em movimento ciclotrônico, no plano  $(x, y)$ , em colisão com uma fronteira elíptica.

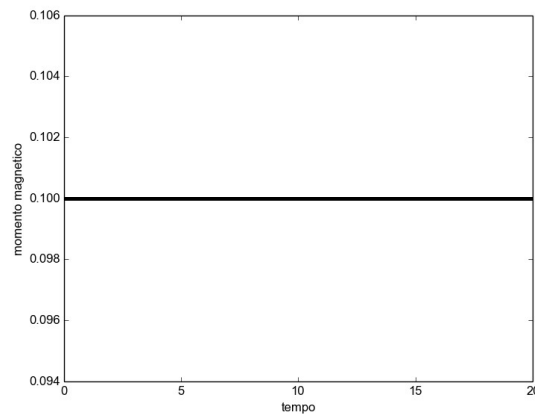


Figura 8: Valor do momento dipolo magnético gerado por uma partícula carregada em movimento ciclotrônico durante a simulação mostrada na Figura (??).

### 3.3 Efeitos do campo magnético não uniforme.

Quando o campo magnético não é uniforme, é necessário analisar que efeitos a variação do campo magnético provoca no movimento da partícula.

A partir da equação de Lorentz (3.1) podemos montar as equações de movimento. Considerando uma região com campo elétrico igual a zero e o campo magnético ao longo do eixo-z em função de  $x$  e  $y$ ,  $\mathbf{B} = B_z(x, y)\mathbf{z}$ , temos,

$$F_x = qv_y B_z(x, y), \quad (3.6)$$

$$F_y = -qv_x B_z(x, y), \quad (3.7)$$

$$F_z = 0. \quad (3.8)$$

O campo magnético variando no espaço, por uma função escalar  $B_z = B_z(x, y)$ , indica que há um gradiente de campo magnético diferente de zero cujo o módulo aponta para a direção de maior variação. Assim, utilizamos a série de Taylor em três dimensões [9] para encontrar o valor do campo em um dado ponto  $(x_0, y_0)$  (centro da órbita de Larmor). Temos a expansão de Taylor [9],

$$\Psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n \Psi(\mathbf{r}), \quad (3.9)$$

então o campo magnético fica na forma:

$$B_z(x - x_0, y - y_0) = B_z(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial B_z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial B_z}{\partial y} + \dots \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) nas equações de movimento, temos,

$$mv_x = qv_y B_z(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial B_z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial B_z}{\partial y}, \quad (3.11)$$

$$mv_y = -qv_x B_z(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial B_z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial B_z}{\partial y}. \quad (3.12)$$

Derivando a equação (3.11) e substituindo  $v_y$  da equação (3.12), temos,

$$v_x = -\omega^2 v_x, \quad (3.13)$$

onde,

$$\omega = \frac{q}{m} B_z(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial B_z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial B_z}{\partial y}, \quad (3.14)$$

é a frequência de oscilação do sistema. Então,

$$v_x = C_1 \exp(i\omega t), \quad (3.15)$$

e,

$$v_y = -\omega C_1 \exp(i\omega t) dt = -iC_1 \exp(i\omega t) + C_2. \quad (3.16)$$

Antes da partícula começar a sofrer influência do campo magnético ela possui as características de uma partícula se movendo em linha reta a velocidade constante  $v_0$ . No momento  $t = 0$  a partícula possui uma velocidade inicial  $v_0$ . Assim, em  $t = 0$ ,  $v_x = v_0 \cos(\theta)$  e  $v_y = v_0 \sin(\theta)$ , para  $\theta$  constante. Temos também que após  $t = 0$  que  $v_{\perp} = v_0$ , sendo  $v_{\perp}$  a velocidade tangencial à órbita da partícula. Com isso vemos que  $C_1 = v_{\perp}$  e  $C_2 = 0$ , Assim, temos

$$v_x = v_{\perp} \exp(i\omega t), \quad (3.17)$$

$$v_y = -iv_{\perp} \exp(i\omega t). \quad (3.18)$$

Porém, estamos interessados apenas na parte real das expressões. Logo,

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega t), \quad (3.19)$$

$$v_y = v_{\perp} \sin(\omega t). \quad (3.20)$$

Agora, considerando o raio de Larmora forma:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad (3.21)$$

podemos escrever,

$$(x - x_0) = r \cos(\omega t), \quad (3.22)$$

$$(y - y_0) = r \sin(\omega t). \quad (3.23)$$

Substituindo as equações (3.10), (3.19), (3.20), (3.22) e (3.23) nas equações do movimento,

$$F_x = qv_{\perp} \sin(\omega t) B_z(x_0, y_0) + r \cos(\omega t) \frac{\partial B_z}{\partial x} + r \sin(\omega t) \frac{\partial B_z}{\partial y}, \quad (3.24)$$

$$F_y = -qv_{\perp} \cos(\omega t) B_z(x_0, y_0) + r \cos(\omega t) \frac{\partial B_z}{\partial x} + r \sin(\omega t) \frac{\partial B_z}{\partial y}, \quad (3.25)$$

$$F_z = 0. \quad (3.26)$$

Em seguida calculamos a média temporal da força que age na partícula durante um ciclo de órbita.

$$\langle F \rangle = \int_0^{\tau_{\text{ciclo}}} (F_x \mathbf{x} + F_y \mathbf{y} + F_z \mathbf{z}) dt. \quad (3.27)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle F \rangle = & \int_0^{\tau_{\text{ciclo}}} qv_{\perp} \sin(\omega t) B_z(x_0, y_0) + r \cos(\omega t) \frac{\partial B_z}{\partial x} + r \sin(\omega t) \frac{\partial B_z}{\partial y} x dt \\ & - \int_0^{\tau_{\text{ciclo}}} qv_{\perp} \cos(\omega t) B_z(x_0, y_0) + r \cos(\omega t) \frac{\partial B_z}{\partial x} + r \sin(\omega t) \frac{\partial B_z}{\partial y} y dt. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Utilizando propriedades do cálculo de integrais em regiões periódicas das funções, temos,  $\langle \sin^2(\theta) \rangle = \langle \cos^2(\theta) \rangle = 1/2$ ,  $\langle \cos(\theta) \sin(\theta) \rangle = \cos(\theta) \sin(\theta) = 0$ , para  $\theta$  variando de  $0$  a  $2\pi$  correspondente ao período de um ciclo. Portanto, a equação (3.27) pode ser escrita como,

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} qv_{\perp} r \left( \frac{\partial B}{\partial x} x + \frac{\partial B}{\partial y} y \right). \quad (3.29)$$

Vemos então que, devido a não uniformidade do campo magnético, há uma força atuando na trajetória da partícula.

## 4 INVARIANTES ADIABÁTICOS

Um invariante adiabático é alguma propriedade do sistema que se mantém constante em uma transformação adiabática [6]. Considerando alguma perturbação no sistema, o invariante adiabático é alguma propriedade, em que, pequenas variações só são notadas em tempos de escala muito grandes.

Na mecânica clássica, temos uma hamiltoniana que sofre uma lenta variação por um parâmetro  $\lambda$ . O invariante é uma integral de ação, dada por (4.1), em uma órbita no espaço de fase,

$$I = \int_{\text{órbita}} p dq, \quad (4.1)$$

onde  $I$  é a área definida por uma trajetória no espaço de fase.

Em sistemas dinâmicos é importante encontrar alguma propriedade do sistema que se mantenha constante, pois isso caracteriza um movimento periódico. Ao aplicarmos o campo magnético (perturbação no sistema) precisamos encontrar grandezas que se mantêm constantes para analisarmos a integrabilidade do sistema.

### 4.1 O momento dipolo magnético como um invariante adiabático

Usando uma integral de ação podemos mostrar que  $\mu$  é um invariante adiabático [6].

Considerando uma integral de ação:

$$I = \int p dq, \quad (4.2)$$

onde  $p$  é o momento angular da partícula em órbita e  $q$  é a variável angular ( $q = \theta$ ), assim  $dq = d\theta$ . E  $p = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mrv_{\perp}$ , sendo  $r$  o raio da órbita da partícula e  $v_{\perp}$  a velocidade perpendicular ao momento dipolo magnético. Logo,

$$I = \int_0^{2\pi} mrv_{\perp} d\theta = 2\pi mrv_{\perp}. \quad (4.3)$$

Como  $r$  é o raio do movimento ciclotrônico,

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{2\mu}{q}. \quad (4.4)$$

Temos então,



$$I = \frac{4\pi m}{q} \mu. \quad (4.5)$$

Logo se  $I$  é uma constante de movimento, logo  $\mu$  deve ser constante [6].

Quando a partícula entra em uma região com um campo magnético maior percebemos que a frequência orbital aumenta. Isso ocorre devido à invariância do momento dipolo magnético. Temos que,

$$\mu = \frac{mv_0^2}{2B_0} = \frac{mv_1^2}{2B_1}, \quad (4.6)$$

logo,  $v_1^2 = \frac{v_0^2 B_1}{B_0}$ .

## 4.2 O fluxo do campo magnético como um invariante adiabático

Devido à órbita da partícula temos um fluxo de campo magnético através da área delimitada pela órbita da partícula.

Temos que:

$$\Phi = \int B \cdot da = B\pi r^2, \quad (4.7)$$

assim,

$$\Phi = \frac{2\pi m}{q^2} \mu, \quad (4.8)$$

como  $\mu$  é um invariante adiabático, temos que,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\pi m}{q^2} \frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (4.9)$$

Assim a conservação do fluxo magnético que passa por uma órbita de uma partícula carregada é uma consequência direta da conservação do momento magnético. Mostrar que o fluxo magnético se conserva se tornar importante na hora de estudarmos campos magnéticos não uniformes.

## 5 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Aplicamos vários tipos de campo magnético à partícula e estudamos de que maneira o campo magnético altera sua trajetória. Para integrarmos numericamente as equações de movimento para a partícula carregada utilizamos o método de Boris [3] descrito no Apêndice 1.

Para cada sistema realizamos 35 simulações, para cada nova simulação definimos, aleatoriamente, novas condições iniciais referentes a posição inicial e direção inicial da trajetória. Para analisar os mapas de fase dos sistemas iremos utilizar o bilhar circular deformado na forma de uma elipse, pois, mesmo sendo um sistema integrável, assim como o bilhar não deformado, este apresenta um comportamento mais rico quando passamos a analisar o espaço de fase. Um bilhar deformado na forma de uma elipse apresenta dois tipos de órbitas: órbitas de libração e órbitas de rotação separadas por uma região que chamamos de separatriz, como podemos ver na Figura (9). O bilhar clássico deformado na forma de uma elipse sem campo magnético já foi amplamente analisado em [10]. Veremos então quais efeitos a presença de um campo magnético cria no espaço de fase.

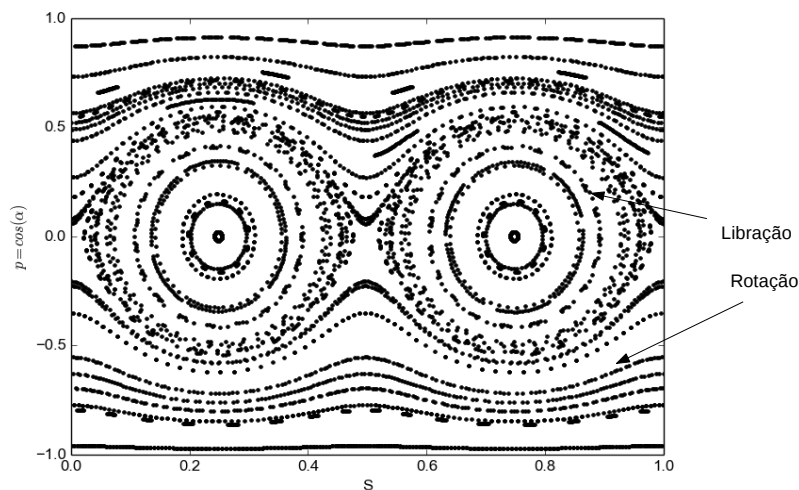


Figura 9: Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético  $B = 0.0$ .

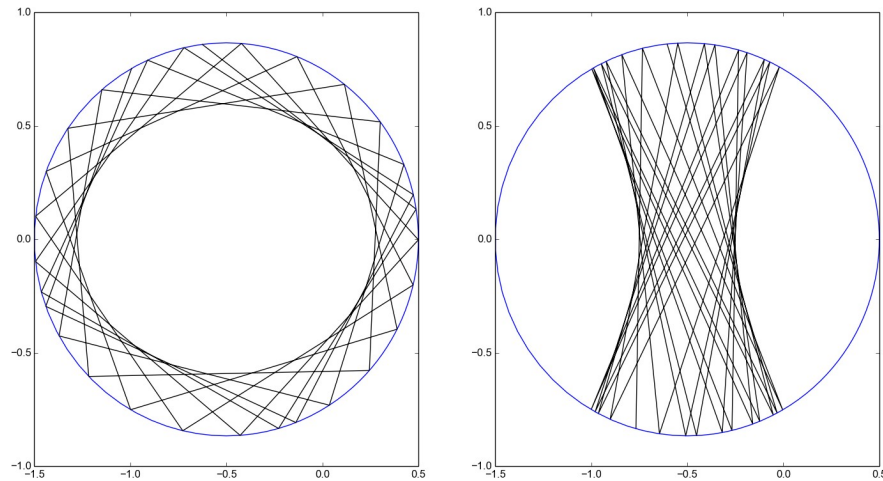


Figura 10: A Figura mostra dois tipos de trajetórias da partícula em um bilhar clássico ( $B = 0.0$ ) cujas órbitas no espaço de fase são caracterizadas como libração (à esquerda) e rotação (à direita).

### 5.1 Campo Magnético constante

O primeiro sistema que estudamos é descrito para um campo magnético constante,

$$B(x, y) = Az, \quad (5.1)$$

onde  $A$  é um parâmetro de controle para aumentarmos a intensidade do campo magnético.

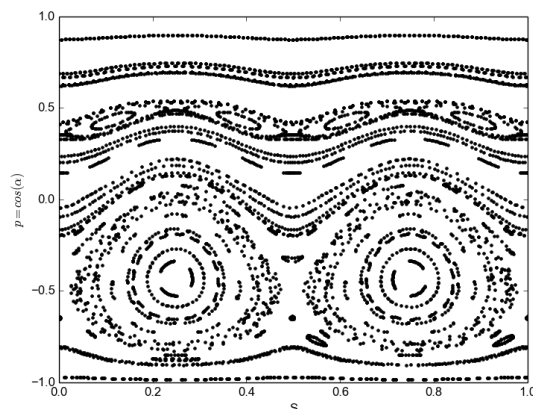


Figura 11: Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético  $B = 0.5z$ .

À medida que aumentamos o campo magnético vemos que as órbitas de libração são gradativamente destruídas até ficarem apenas as de rotação. Sabemos que com aumento do campo magnético o raio da órbita de Larmor diminui, como mostra a equação (3.2). As configurações onde ocorrem colisões com as fronteiras são aquelas onde a distância

da partícula até a fronteira seja menor que o diâmetro da órbita de Larmor. Logo a partícula colide apenas quando esta muito próxima da fronteira, o que descreve as órbitas de rotação.

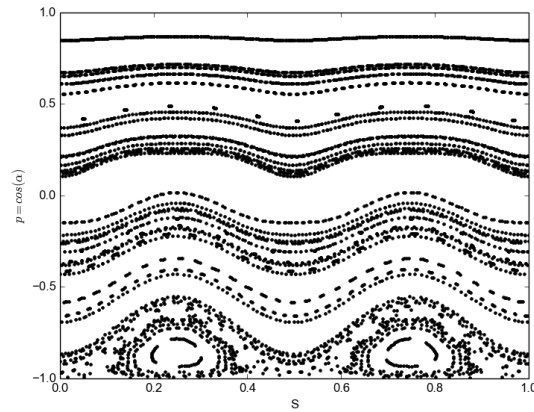


Figura 12: Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético  $\mathbf{B} = 1 \cdot 0\mathbf{Z}$ .

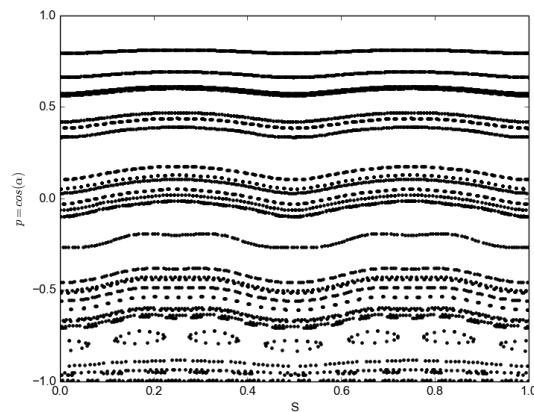


Figura 13: Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético  $\mathbf{B} = 2 \cdot 0\mathbf{Z}$ .

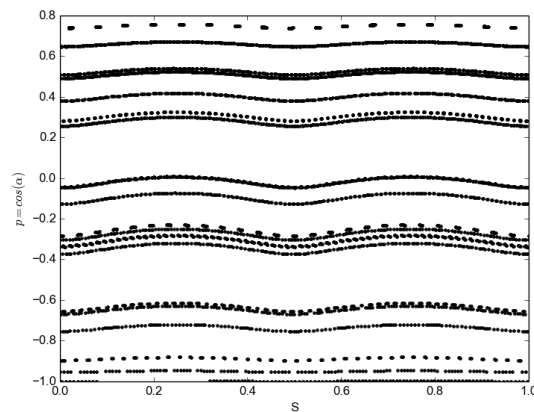


Figura 14: Mapa do espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético  $\mathbf{B} = 3 \cdot 0\mathbf{z}$ .

Algo interessante a se notar no comportamento das trajetórias no espaço de fase é que com o aumento do módulo do campo magnético as órbitas de libração começam a se concentrar na região  $\cos(\theta) < 0$ . As simulações acima foram feitas com um campo magnético orientado na direção  $+\mathbf{z}$ , a partícula então possui uma órbita no sentido horário. Se mudarmos o sentido do campo magnético a partícula irá girar no sentido anti-horário. A Figura (15) mostra o espaço de fase para um campo magnético  $\mathbf{B} = -B\mathbf{z}$ . Vemos que a forma do espaço de fase é o mesmo do mostrado na Figura (12), porém agora temos uma concentração das órbitas de libração na região  $\cos(\theta) > 0$ .

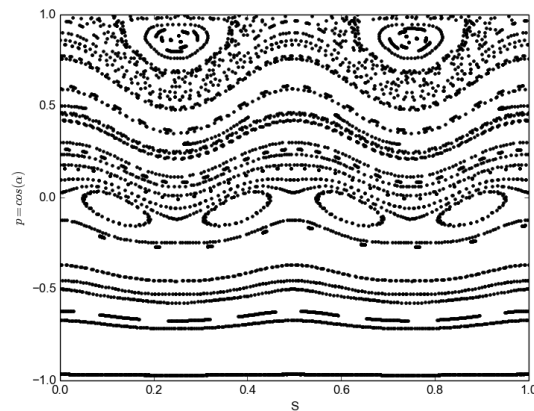


Figura 15: Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5, campo magnético  $\mathbf{B} = -1 \cdot 0\mathbf{z}$ .

## 5.2 Campo magnético não uniforme. Função exponencial.

Como exemplo de campo magnético não uniforme temos um campo dado pela seguinte exponencial,

$$B(x,y) = A(e^{(x+0.5)^2+y^2}). \quad (5.2)$$

O fator 0.5 somado a variável  $x$  é apenas para que o ponto onde a exponencial tem valor máximo coincida com o centro da elipse.

Pela função exponencial vemos que o campo possui valor máximo no centro e vai a zero nas bordas, como mostra a Figura (16).

Devido a não uniformidade do campo o centro da órbita da partícula é deslocado colocando a partícula assim em um movimento de deriva provocado pelo gradiente do campo magnético, como vimos na seção 3.3.

Vemos pela Figura (17) momento dipolo magnético não é mais conservado. Ele oscila com relação a um certo valor e apresenta alterações devido as colisões da partícula com a fronteira.

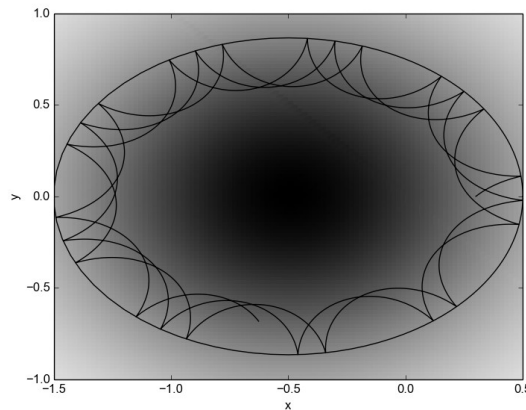


Figura 16: Trajetória da partícula sobre a influência de um campo magnético não uniforme descrito pela função (5.2).

Analisando o espaço de fase, Figuras de (18) a (21), vemos novamente o desaparecimento das órbitas de libração. À medida que aumentamos o valor de  $A$ , uma região caótica logo abaixo de  $p = -0.5$  é formada. Algo interessante surge quando  $A = 3.0$ . Vemos a formação de órbitas de libração entre  $p = -0.5$  e  $p = 1.0$ .

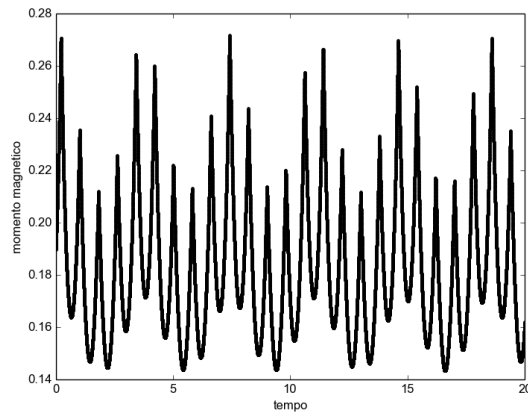


Figura 17: Variação do momento dipolo magnético resp ectivo a trajetória descrita na Figura (16).

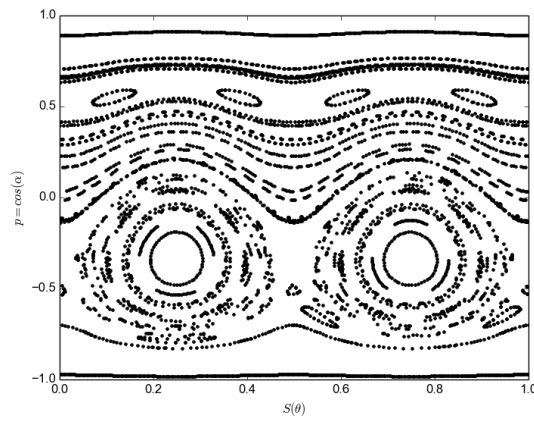


Figura 18: Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e camp o magnético dado pela equação (5.2) com  $A = 0.5$ .

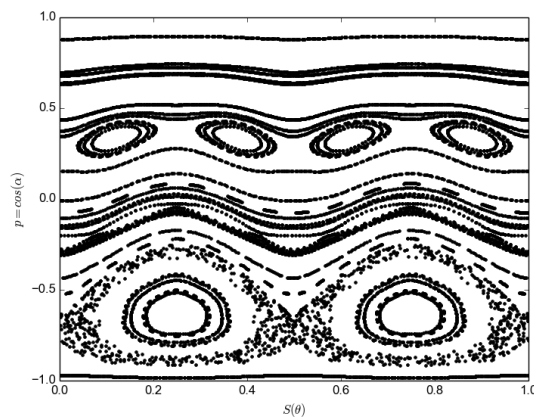


Figura 19: Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e camp o magnético dado pela equação (5.2) com  $A = 1.0$ .

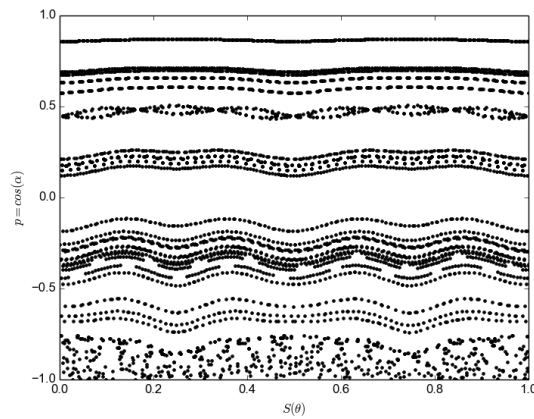


Figura 20: Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.2) com  $A = 2 \cdot 0$ .

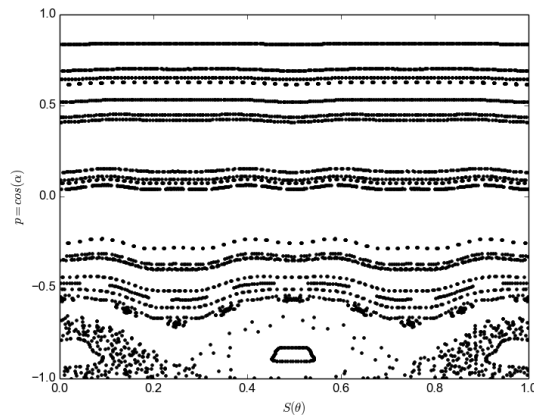


Figura 21: Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.2) com  $A = 3 \cdot 0$ .

### 5.3 Campo magnético não uniforme.

O campo magnético descrito por:

$$B(x,y) = A(1 + ((x - 0.5)^2 + y^2)), \quad (5.3)$$

é proposto no artigo [11], sendo  $A$  um parâmetro de controle introduzido que controla a intensidade do campo. O campo magnético varia na forma de uma circunferência de raio unitário. Ele apresenta valor máximo nas bordas e mínimo em  $(0.5, 0.0)$ .

Devido a não uniformidade do campo magnético o momento magnético não é mais constante, porém seu valor apresenta uma periodicidade com grandes variações quando a partícula colide com a fronteira, Figura(22). Como já vimos, a presença de um gradiente de campo magnético provoca um movimento de deriva na partícula (seção (3)).

Analisando os espaços de fase presentes nas Figuras de (24) à (27) vemos que as órbitas



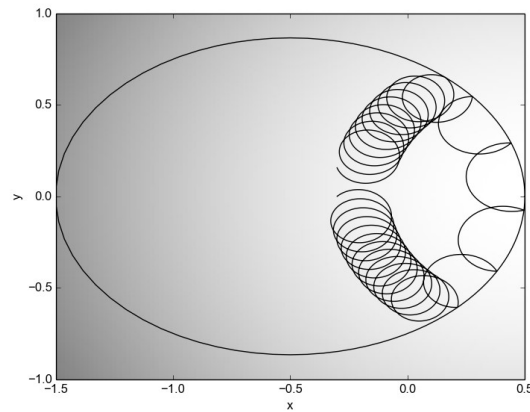


Figura 22: Trajetória da partícula carrega sobre a influência de uma camp o magnético não uniforme descrito pela função (5.3).

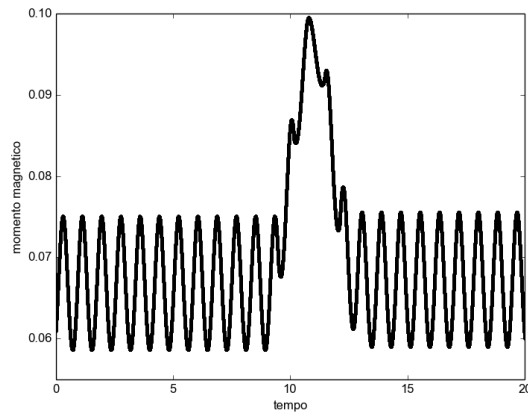


Figura 23: Variação do momento dipolo magnético resp ectivo a trajetória descrita na Figura (22).

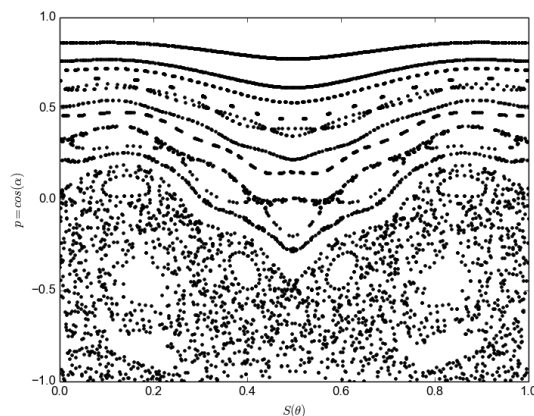


Figura 24: Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e camp o magnético dado pela equação (5.3) com  $A = 0.5$ .

de libração são gradativamente destruídas, assim como ocorre sistemas das seções (5.1) e (5.2). A medida que  $A$  aumenta há a formação de duas regiões ergódicas separadas por órbitas de rotação bem definidas. Vemos que as órbitas de rotação formam estruturas

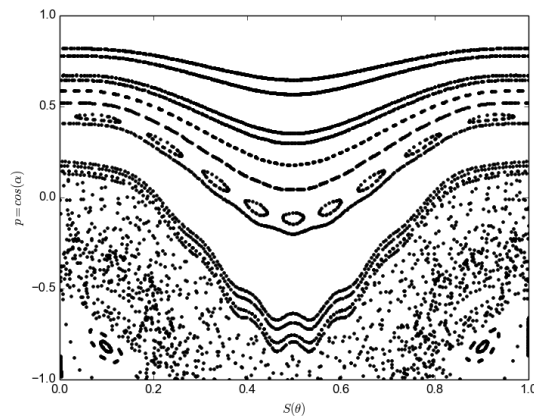


Figura 25: Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.3) com  $A = 1 \cdot 0$ .

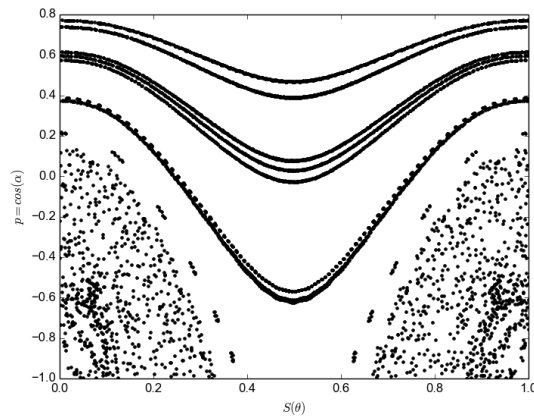


Figura 26: Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.3) com  $A = 2 \cdot 0$ .

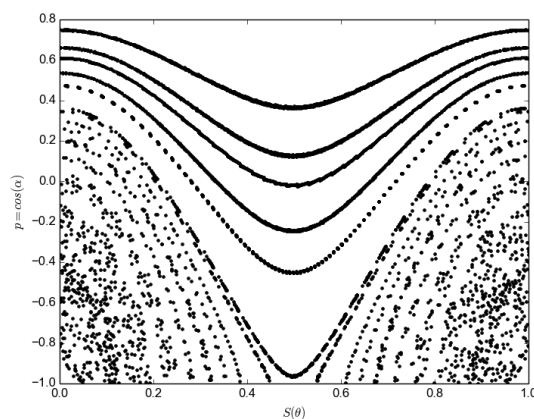


Figura 27: Espaço de fase bilhar elíptico com excentricidade 0.5 e campo magnético dado pela equação (5.3) com  $A = 3 \cdot 0$ .

similares a vales.

A Figura (28) mostra a trajetória e o espaço de fase para uma única condição inicial.

Percebemos que os vales que encontramos no espaço de fase é devido a falta de simetria

do campo magnético com relação ao tipo de fronteira. No caso, o campo magnético é maior em  $\theta = \pi$  e menor em  $\theta = 0$ . Na Figura (28) a partícula não colide com outro extremo da borda, logo a trajetória no espaço de fase é descontinuada próxima a região onde  $S(\theta) = 0.5$ . Assim podemos confirmar que o campo magnético é mais intenso próximo de  $S(\theta) = 0.5$ , nesse sistema específico.

Vemos também, pelos espaços de fase estudados, que quanto maior o valor de  $p$ , ou seja, quanto menor o ângulo que a trajetória faz com a reta tangente ao ponto de impacto, menor é o declive dos vales nos espaços de fase.

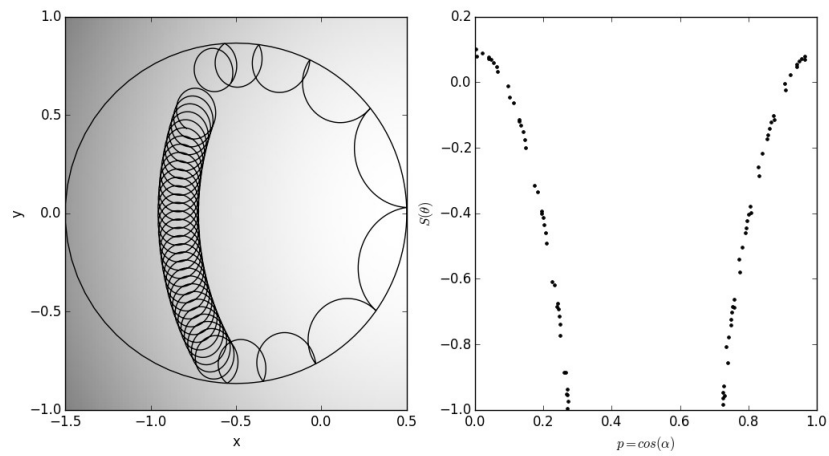


Figura 28: Trajetória e espaço de fase bilhar elíptico, com excentricidade 0.5,  $A = 3.0$ , para uma única condição inicial.

## 6 CONCLUSÕES

A partir de um modelo simples como o bilhar podemos estudar o comportamento de um sistema mais complexo. Analisando o espaço de fase gerado por diversos sistemas vemos o quanto rico pode ser o comportamento do movimento de uma partícula carregada sobre a influência de um campo magnético.

Aplicando uma certa perturbação ao sistema (campo magnético uniforme), vimos que certas grandezas (momento magnético) se mantêm constante (seção 5.1). Vimos também, ao analisarmos o espaço de fase, que o sistema se mantém regular (integrável). À medida que aumentamos a intensidade do campo os raios das órbitas de Larmor ficam menores (seção 3.1), o que diminui o número de configurações do sistema onde ocorrem colisões. Podemos ver esse comportamento analisando as órbitas dos espaços de fase presentes na seção 5.1.

Quando aplicamos campos magnéticos não uniformes ao sistema, seções (5.2) e (5.3), o momento magnético não mais se conserva, e percebemos o aparecimento de regiões ergódicas no espaço de fase. O que caracteriza um trajetória caótica da partícula carregada. Com o aumento da intensidade do campo magnético, vemos o mesmo comportamento mostrado para o campo magnético uniforme. À medida que a intensidade do campo magnético aumenta, o raio da órbita de Larmor diminui e as órbitas de libração desaparecem gradativamente do espaço de fase. Vemos também um comportamento *mixto* [5] do sistema pelos gráficos do espaço de fase. Nele podemos ver comportamentos de sistemas integráveis e ergódicos.

Assim analisando o espaço de fase gerado pelas colisões da partícula com fronteira, para várias condições iniciais, podemos estudar de que modo o campo magnético influencia a trajetória de uma partícula carregada.

## 7 APÊNDICE

### 7.1 Método de integração

O método de Euler para integração das equações de movimento para uma partícula carregada se mostra ineficiente, pois, ao o utilizarmos, percebemos um aumento na energia cinética do sistema. Com isso a partícula não mais se movimenta em uma órbita de Larmor [8], mas sim em uma espiral. Isso ocorre devido a imprecisão do método de Euler, a cada passo calculamos a velocidade da partícula com um certo erro, esse erro se acumula a cada interação e gradativamente a velocidade da partícula muda em módulo. Gerando assim um movimento em espiral.

O método de Boris [3] é o método padrão utilizado para integrar as equações de movimento de uma partícula carregada em um campo eletromagnético [3]. Ele usa o mesmo conceito de método dos como *Leap frog* [12] para calcular a velocidade média em um ponto  $\mathbf{v}_i$  usando as velocidades em pontos  $\mathbf{v}_{i+1/2}$  e  $\mathbf{v}_{i-1/2}$ . Assim,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{v}_{i+1/2} - \mathbf{v}_{i-1/2}}{\delta t} = \frac{Q}{m} \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_{i+1/2} - \mathbf{v}_{i-1/2}}{2} \times \mathbf{B}. \quad (7.1)$$

Escrevendo as velocidades na forma,

$$\mathbf{v}_{i-1/2} = \mathbf{v}^- - \frac{QE \delta t}{m_2}, \quad (7.2)$$

$$\mathbf{v}_{i+1/2} = \mathbf{v}^+ + \frac{QE \delta t}{m_2}, \quad (7.3)$$

temos,

$$\frac{\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-}{\delta t} = \frac{Q}{2m} \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^- \times \mathbf{B}. \quad (7.4)$$

O método de Boris consiste em calcular velocidade média adicionando metade da aceleração à velocidade no momento 'i' e depois outra metade da aceleração usando as equações (7.2) e (7.3). Os pontos 'antes' e 'pós' são dados por transformações geométricas feitas por Boris. Assim, calculamos a primeira rotação adicionando parte da aceleração,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^- \times \boldsymbol{\tau}, \quad (7.5)$$

onde  $\boldsymbol{\tau} = aB\Delta t/2m$ .

Então, adicionamos a outra metade da aceleração,

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \mathbf{v} \times \mathbf{s}. \quad (7.6)$$

O vetor  $\mathbf{S} = 2\boldsymbol{\tau}/(1 + \tau^2)$  é basicamente o mesmo que o vetor de rotação  $\boldsymbol{\tau}$ , ele é normalizado para satisfazer a condição de que a magnitude da velocidade se mantém constante.

O método de Boris, então, nos dá o valor correto da velocidade. Ele é mais utilizado para o cálculo das equações de movimento de partículas carregadas pois, além da precisão nos resultados, os cálculos são mais simples e menores do que em outros métodos de integração, como Runge-Kutta [12].

## REFERÊNCIAS

- [1] M. Robnik and M. V. Berry, “Classical billiards in magnetic fields,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 18, no. 9, p. 1361, 1985.
- [2] R. Fitzpatrick, *"Plasma Physics." Home Page for Richard Fitzpatrick.* The University of Texas at Austin, 03/2011.
- [3] M. K. Öztürk, “Trajectories of charged particles trapped in earth’s magnetic field,”
- [4] M. Hoffmann, Karl Heinz; Schreiber, *Computational Statistical Physics. From Billiards to Monte Carlo.* Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [5] A. Mijolaro, *Estudo da distribuição de espaçamentos de dupletos utilizando o modelo do bilhar anular.* Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista., 2004.
- [6] L. Nivaldo A., *Mecânica Analítica.* LIVRARIADA FÍSICA, 2ed., 2007.
- [7] J. B. Thornton, Stephen T; Marion, *Dinâmica clássica de partículas e sistemas.* CENGAGE Learning, 5ed.
- [8] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica.* PEARSON, 3 ed.
- [9] W.H.J. Arfken, George B., *Mathematical Methods for Physicists* ELSEVIER, 6 ed., 2007.
- [10] L. E. D. Oliveira, Diego F. M., “On the dynamical properties of an elliptical-oval billiard with static boundary,” *Communications In Nonlinear Science and Numerical Simulation.*, vol. 15, pp. 1092–1102, 4 2010.
- [11] A. I. Neishtadt and A. V. Artemyev, “Destruction of adiabatic invariance for billiards in a strong nonuniform magnetic field,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 064102, Feb 2012.
- [12] D. C. Rapaport, *The art of molecular dynamics.* CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2 ed., 2004.