Valdiane Sales Araújo

A Unicidade da Onda Solitária para a Equação de Benjamin-Ono

Fortaleza
Fevereiro de 2002

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais uma etapa vencida.

Aos meus pais.

Sumário

Introdução

A expressão "onda solitária"apareceu pela primeira vez em um artigo de Scott Russel publicado em 1845. Russel, presenciando a colisão de uma barcaça, que descia um canal, com um obstáculo parcialmente submerso, notou que a parada abrupta da barcaça fez surgir uma onda com crista alongada, com cerca de meio metro de amplitude, que se propagou canal abaixo. Ele então acompanhou a onda e pôde observar que esta se deslocava por longa distância sem alterar a forma ou velocidade. A existência da onda solitária, nos moldes do problema levantado por Russel em 1844, foi provada por Jerry Bona, Deb Bose e T. B. Benjamin.

Em 1967, num estudo de ondas solitárias de um fluido perfeito em um canal bidimensional e profundidade "infinita", T.B. Benjamin introduziu uma equação pseudo-diferencial da forma

$$u(x)^2 - u(x) = \mathscr{H} u_x(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

onde $\mathscr{H}$ denota a transformada de Hilbert definida por

$$(\mathscr{H} u)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} \frac{u(y)}{x-y} dy \, .$$

Benjamin procurou soluções com a propriedade de que $|u(x)| \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Ono, em 1975, estendeu a teoria de Benjamin para investigar o comportamento não-estável de ondas solitárias algébricas (o termo "algébrica"foi introduzido por Ono para designar a propriedade $|u| \to \infty$ quando $|x| \to 0$). Usando método de perturbação não-linear, ele obteve como modelo a equação de evolução

$$u_t + u_x + 2uu_x - (\mathscr{H}(u))_{xx} = 0 \tag{2}$$

(as constantes físicas foram aqui normalizadas) e mostrou ainda que a equação acima reproduz as soluções ondas-solitárias, encontradas por Benjamin, como caso particular. Mais precisamente, se determinarmos uma solução de (2) da forma $v(x,t) = u(x+ct)$, ou seja, soluções que evoluem no tempo com velocidade constante c e mantendo a mesma forma, então u será solução de (1).

A equação (2) que foi retomada por Benjamin como uma versão da equação (1), é atualmente conhecida por equação Benjamin-Ono e constitui nosso principal objeto de estudo.

Este trabalho foi baseado no artigo de C. J. Amick e J. F. Toland de 1991. Nosso objetivo é mostrar que as únicas soluções não-nulas da equação (2), que representam ondas solitárias algébricas são as mesmas encontradas por Benjamin em 1967, dadas por

$$u_a(x) = \frac{2}{1+(x+a)^2}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Para isso consideraremos o fato de que a equação integral (1) é equivalente a uma equação diferencial parcial. A observação fundamental, feita no Capítulo 2, é de que se u é uma solução limitada de (1) e u é estendida como uma função harmônica limitada no fecho do semi-plano superior, então esta função satisfaz o problema de Neumann, no semi-plano superior H, dado por

$$(\mathscr{P})\begin{cases} \triangle u = 0 \quad em \quad H = \{(x,y); y > 0\} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = u - u^2 \quad em \quad y = 0 \\ |u(x,0)| \to 0 \quad com \quad |x| \to \infty \\ \text{u limitada em H} \end{cases}$$

A recíproca também se verifica, isto é, se $u(x,y)$ é solução de $(\mathscr{P})$ então sua restrição $u(x,0)$ satisfaz (1). Em seguida mostra-se que as soluções de $(\mathscr{P})$ satisfazem a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{2}(u_x/u)^2 - u + \frac{1}{2}u^2\Big] = 0 \tag{4}$$

quando $y = 0$. Então se verifica que as únicas soluções homoclínicas de (4) são da forma (3).

Este trabalho está dividido em dois capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo estudaremos essencialmente o Princípio do Máximo para domínios ilimitados. Demonstraremos alguns resultados importantes que serão utilizados posteriormente no desenvolvimento da teoria do problema principal. No capítulo 2, onde serão demonstrados os resultados mais significativos, definiremos e estudaremos uma função especial G definida no semi-plano superior H cuja teoria dará suporte às demonstrações dos resultados subseqüêntes que consistem no estudo de funções do tipo $u : H \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciáveis em H e $u \in C^1(\overline{H})$ satisfazendo as condições do problema dado por $(\mathscr{P})$. No apêndice estarão expostos alguns resultados clássicos que serão utilizados ao longo de todo este trabalho.

Capítulo 1

O Princípio do Máximo para domínios ilimitados

Neste capítulo consideraremos algumas variações do Princípio do Máximo Fraco em que, mais precisamente, iremos considerar domínios ilimitados. Tais resultados são devido a Phragmèn-Lindelöf. Nos restringiremos ao caso particular em que o domínio é o semi-plano superior $y > 0$ de $\mathbb{R}^2$. Os resultados mostrados aqui são também válidos para outros tipos de domínios ilimitados e poderão ser encontrados em [4]. A seguir apresentaremos dois teoremas clássicos para funções harmônicas em domínios limitados.

Teorema 1.1 *(Princípio do Máximo Fraco) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz a condição, $\Delta u \geq 0$ em Ω. Então $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$.*

A demonstração do Princípio do Máximo Fraco para domínios limitados pode ser encontrada em [5], uma conseqüência imediata do Teorema (1.1) é

Teorema 1.2 *(Princípio do Máximo) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e u harmônica em Ω. Então $\inf\limits_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u$, $\forall x \in \Omega$.*

Em todo este capítulo, H denotará o semi-plano superior, isto é, $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, ∂H o bordo de H e (r, θ) representará as coordenadas polares do plano.

A hipótese da limitação do domínio no Princípio do Máximo Fraco não pode ser removida. O exemplo abaixo mostra que esta hipótese é realmente necessária.

Exemplo 1.1 *Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x, y) = e^x seny$. Observe que $\Delta u = 0$ em H e $u = 0$ em ∂H, mas $0 = \sup\limits_{\partial H} u \neq \sup\limits_{H} u = \infty$, isto porque H é ilimitado.*

Por outro lado, se controlarmos o crescimento de uma função harmônica u em H o resultado abaixo nos diz que, podemos obter o Princípio do Máximo Fraco, mesmo em domínios ilimitados.

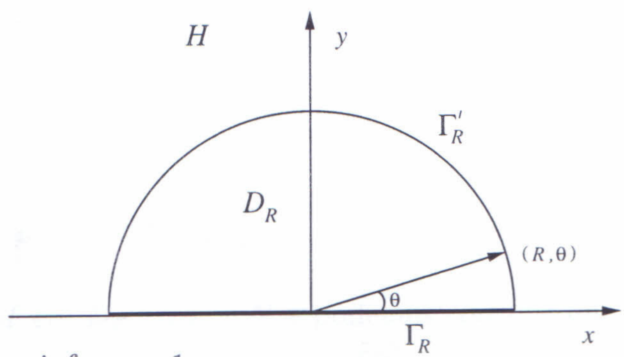
Teorema 1.3 *Seja $u : H \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta u \geq 0$ em H. Suponha que existe M tal que $u \leq M$ em ∂H e $\lim\inf\limits_{R\to\infty} \{R^{-1} \max\limits_{0<\theta<\pi} u(R, \theta)\} \leq 0$. Então $u \leq M$ em H.*

Prova: Para um número $R > 0$ fixado, consideremos o domínio

$D_R = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < R, 0 < \theta < \pi\}$ e a função

$$w_R(r,\theta) = 1 + \frac{2}{\pi}R \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{2Rr\cos(\theta - \frac{\pi}{2})}{R^2 - r^2}\right)$$

definida em D_R.
É fácil verificar que:



i) w_R é harmônica em D_R,

ii) $w_R\Big|_{\Gamma_R} = 1$ onde $\Gamma_R = \partial D_R \cap \partial H$ e,

iii) $w_R\Big|_{\Gamma'_R} = 1 + R$ onde $\Gamma'_R = \partial D_R \backslash \Gamma_R$.

Pelo princípio do máximo temos

$$w_R \geq \inf_{D_R} w_R = \inf_{\partial D_R} w_R = 1$$

isto é, $w_R \geq 1$ em $\overline{D}_R$

Considere a função $v(r,\theta) = \dfrac{u(r,\theta) - M}{w_R(r,\theta)}$ e observe que

$$\triangle v + \frac{2}{w_R}\langle \nabla w_R, \nabla v\rangle \geq 0$$

onde, $\langle , \rangle$ denota o produto interno de $\mathbb{R}^2$. Note que $v \leq 0$ em Γ_R (pois $u \leq M$ em Γ_R) e

$$v(R,\theta) = \frac{u(R,\theta) - M}{1+R} \leq \frac{\max\limits_{0<\theta<\pi}\{u(R,\theta) - M\}}{1+R} \leq \max\left\{0, \frac{\max\limits_{0<\theta<\pi}\{u(R,\theta) - M\}}{1+R}\right\}$$

para $0 < \theta < \pi$. Pelo princípio do máximo fraco temos

$$v(r,\theta) \leq \max\left\{0, \frac{\max\limits_{0<\theta<\pi}\{u(R,\theta) - M\}}{1+R}\right\}$$

Assim podemos escrever:

$$u(r,\theta) \leq M + w_R(r,\theta)\max\left\{0, \frac{\max\limits_{0<\theta<\pi}\{u(R,\theta) - M\}}{1+R}\right\} \tag{1.1}$$

Além disso,

$$\lim_{R\to\infty} R \operatorname{arctg}\left(\frac{2Rr\cos(\theta - \frac{\pi}{2})}{R^2 - r^2}\right) = 2rcos(\theta - \frac{\pi}{2}) \tag{1.2}$$

Por hipótese, existe uma seqüência de raios $R_n \to \infty$ tal que,

$$\frac{1}{R_n} \max_{0<\theta<\pi} u(R_n,\theta) \to \lim_{R\to\infty} \inf\{R^{-1} \max \quad u(r,\theta)\} \leq 0 < \varepsilon$$

Então, existe N natural tal que

$$\frac{1}{R^n} \max\{u(R_n,\theta)\} < \varepsilon, \forall n \geq N$$

Logo,

$$\frac{\max\limits_{0<\theta<\pi} \{u(R_n,\theta) - M\}}{1+R_n} < \varepsilon \tag{1.3}$$

Por (1.1),(1.2) e (1.3) podemos concluir que

$$u(r,\theta) < M + \varepsilon \left\{1 + \frac{4}{\pi} r \cos(\theta - \frac{\pi}{2})\right\},$$

para todo $\varepsilon > 0$ em D_{R_n} . Logo, $u \leq M$ em D_{R_n}, $\forall n > N$ e podemos concluir que $u \leq M$ em $H = \bigcup\limits_{n>N} D_{R_n}$.

■

Teorema 1.4 *Seja $u : H \to \mathbb{R}$ tal que $\triangle u \leq 0$ em H. Suponha que existe m tal que $u \geq m$ em ∂H e $\lim\limits_{R\to\infty} sup\{R^{-1} \min\limits_{0<\theta<\pi} u(R,\theta)\} \geq 0$. Então $u \geq m$ em H.*

A demonstração do teorema acima é feita de forma análoga a do teorema anterior considerando-se $v = -u$

Corolário 1.1 *Seja u harmônica em H e suponha que existem constantes m, M tais que $m \leq u \leq M$ em ∂H e $\lim\limits_{R\to\infty} (R^{-1} \max\limits_{0<\theta<\pi} |u(R,\theta)|) = 0$. Então $m \leq u \leq M$ em H.*

Corolário 1.2 *Se u e v são harmônicas limitadas em H e $u \equiv v$ em ∂H então $u \equiv v$ em H.*

Prova: Considere $w = u - v$. Então w é harmônica e limitada em H com $w \equiv 0$ em ∂H. Como w é limitada,

$$\lim_{R\to\infty} (R^{-1} \max_{0<\theta<\pi} |w(R,\theta)|) = 0$$

Pelo Corolário (1.1) temos que $w = 0$ em H, portanto $u \equiv v$ em H.

■

Observação 1.1 *Uma outra demostração do corolário anterior pode ser obtida estendendo-se w de forma harmônica e limitada, a todo o plano, pelo princípio da reflexão de Schwarz e concluindo que tal função deve ser constante e conseqüentemente nula.*

As aplicações que faremos nesta monografia dos teoremas já enunciados dizem respeito a unicidade de soluções de equações elípticas com condições de fronteira de Dirichlet. Precisaremos também estudar a unicidade para equações com condições de Neumann na fronteira. É o que faremos nos próximos teoremas.

Teorema 1.5 *Seja $u : H \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(H)$, satisfazendo as seguintes condições:*

$$\begin{cases} \triangle u \geq 0 \quad em \quad H; \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} + \alpha u \leq 0 \;\; em \quad \partial H; \end{cases}$$

Considere $D_R = \{(x,y) \in H; x^2 + y^2 < R^2\}$ e $w_R : D_R \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 em D_R satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $w_R > 0$ em D_R

ii) $\triangle w_R \leq 0$ em D_R

iii) Dado $x \in H$, existe $R > 0$ e $w : H \to \mathbb{R}$ tal que, $x \in D_R$ e $w_R \leq w$, em D_R, $\forall R > R_x$

iv) $-\dfrac{\partial w_R}{\partial y} + \alpha w_R \geq 0$ em $\Gamma_R = \partial D_R \cap \partial H$

Se $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \inf \left(\sup_{\Gamma'_R} \frac{u(x)}{w_R(x)} \right) \leq 0$, então $u \leq 0$ em H.

Prova: Definamos, inicialmente, uma seqüência de funções $v_R : D_R \to \mathbb{R}$ por $v_R \equiv \dfrac{u}{w_R}$ e observemos que v_R satisfaz:

$$\triangle v_R + \frac{1}{w_R}\langle \nabla w_R, \nabla v_R \rangle \geq 0.$$

em D_R e v_R também satisfaz a condição de fronteira

$$-\frac{\partial v_R}{\partial y} + \frac{1}{w_R}\left\{-\frac{\partial w_R}{\partial y} + \alpha w_R\right\} v_R \leq 0 \tag{1.4}$$

em Γ_R. Tomando uma seqüência $R_n \to \infty$ tal que

$$\sup_{\Gamma'_{R_n}} \frac{u(x)}{w_{R_n}(x)} \to \lim_{R_n\to\infty} inf \left(\sup_{\Gamma'_{R_n}} \frac{u(x)}{w_{R_n}(x)} \right) \leq 0$$

temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sup_{x\in\Gamma'_{R_n}} \frac{u(x)}{w_{R_n}(x)} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Devemos mostrar que $u \leq 0$ em D_{R_n} para todo $n \geq n_0$. Para isso consideremos $P \in \partial D_{R_n}$ tal que $v_{R_n}(P) = \displaystyle\sup_{\partial D_{R_n}} \left(\frac{u}{w_{R_n}}\right)$.

Temos duas possibilidades:

Caso-1: $P \in \Gamma'_{R_n}$

Se $P \in \Gamma'_{R_n}$ então $\sup\limits_{\partial D_{R_n}} v_{R_n} = \sup\limits_{\Gamma'_{R_n}} v_{R_n} < \varepsilon$, pelo princípio do máximo, segue que $v_{R_n}(x) < \varepsilon$, $\forall x \in D_{R_n}$. Daí temos

$$u(x) \leq \varepsilon w_{R_n}(x) \Rightarrow u(x) \leq \varepsilon w(x)$$

$\forall x \in D_{R_n}$ por (iii). Agora, tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$ temos $u \leq 0$ em D_{R_n}.

Caso-2: $P \in \Gamma_{R_n}$

Se $P \in \Gamma_{R_n}$, pelo Princípio do Máximo na fronteira, temos que , $-\dfrac{\partial v_{R_n}}{\partial y}(P) > 0$ a menos que v_{R_n} seja constante.

Se $v_{R_n} \equiv c$, então, por hipótese, $c \leq 0$ e como, $u = cw_{R_n}$ em D_{R_n}, segue que, $u \leq 0$ em D_{R_n}, pois $w_{R_n} > 0$.

Suponha que $v_{R_n} \not\equiv c$ e portanto que

$$-\frac{\partial v_{R_n}}{\partial y}(P) > 0$$

Temos,

$$-\frac{\partial v_{R_n}}{\partial y} + \frac{1}{w_{R_n}}\left\{-\frac{\partial w_{R_n}}{\partial y} + \alpha w_{R_n}\right\} v_{R_n} \leq 0 \qquad em\ P.$$

Logo, $v_{R_n}(P) \leq 0$, caso contrário, se $v_{R_n}(P) > 0$, então por (1.4) teríamos

$$0 < -\frac{\partial w_{R_n}}{\partial y} + \frac{1}{w_{R_n}}\left\{-\frac{\partial w_{R_n}}{\partial y} + \alpha w_{R_n}\right\} v_{R_n} \leq 0 \qquad (absurdo)$$

Sabemos que

$$v_{R_n}(x) \leq \sup_{D_R} v_R = \sup_{\partial D_R} v_{R_n} = v_{R_n}(P) \leq 0, \qquad \forall x \in D_{R_n}$$

logo

$$\frac{u(x)}{w_{R_n}} \leq 0 \Rightarrow u(x) \leq 0 \quad em\ \ D_{R_n}$$

Em qualquer dos casos temos $u \leq 0$ em D_{R_n} , $\forall n \geq n_0$. Como $H = \bigcup_{n \geq n_0} D_{R_n}$ temos que $u \leq 0$ em H.

■

Corolário 1.3 *Seja $v : H \to \mathbb{R}$ uma função harmônica tal que $-\dfrac{\partial v}{\partial y} + v = 0$ em ∂H e suponha que v seja limitada em H. Então $v = 0$ em H.*

Prova: Consideremos D_R, Γ_R, e Γ'_R como no teorema anterior. Seja

$$w_R(r,\theta) = 1 + \frac{2}{\pi}\ R\text{arc tg}\left(\frac{2Rr\cos(\theta - \frac{\pi}{2})}{R^2 - r^2}\right)$$

como no teorema (1.3) w_R satisfaz

$$\begin{cases} \triangle w_R = 0 \quad \text{em } D_R; \\ w_R = 1 \quad \text{em } \Gamma_R; \\ w_R = 1 + R \quad \text{em } \Gamma'_R; \\ -\dfrac{\partial w_R}{\partial y} + w_R \geq 0 \quad \text{em} \quad \Gamma'_R. \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo, temos que:

$$1 < w_R(r,\theta) < 1 + R \quad \Rightarrow \quad w_R > 0 \quad em \quad D_R.$$

Como v é limitada, existe K tal que, $v(r,\theta) \leq K$, $\forall (r,\theta) \in D_R$. Para $x \in \Gamma'_R$,

$$\frac{v(r,\theta)}{w(r,\theta)} = \frac{v(r,\theta)}{1+R} \leq \frac{K}{1+R}.$$

Fazendo $R \to \infty$, temos:

$$\lim_{R\to\infty} inf \left(\sup_{\Gamma'_R} \frac{v(r,\theta)}{w_R(r,\theta)} \right) \leq \lim_{R\to\infty} inf \left(\frac{K}{1+R} \right) = 0.$$

Agora, vamos mostrar que w_R que é limitada em D_R, ou seja, vamos mostrar que dado $(r,\theta) \in H$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$w_R(r,\theta) \leq w(r,\theta) \equiv 3, \quad \forall R > R_0$$

De fato, basta ver que

$$\lim_{R\to\infty} w_R(r,\theta) = 1 + \frac{4}{\pi} cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \leq 1 + \frac{4}{\pi} < 3$$

logo, exite $R_0 > 0$ tal que $w_R(r,\theta) < w(r,\theta)$ em D_R, $\forall R > R_0$. Portanto v satisfaz as condições do teorema anterior, logo $v \leq 0$ em H.

Verifica-se facilmente que $-v$ também satisfaz as hipóteses do teorema anterior e portanto $-v \leq 0$. Então $v = 0$ em H como queríamos demonstrar.

■

Capítulo 2

Unicidade da onda solitária para a equação de Benjamin-Ono

Iremos, neste capítulo, determinar todas as ondas solitárias da equação Benjamin-Ono

$$u_t + u_x + 2uu_x - (\mathscr{H}(u))_{xx} = 0.$$

onde $u(t,x) \in \mathbb{R}$, para $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. Mas, antes faremos uma mudança de variáveis a fim de simplificar a equação acima. Verifica-se que $v(t,x) = u(t, x+t)$ satisfaz a equação

$$v_t + 2vv_x - (\mathscr{H}(v))_{xx} = 0. \tag{2.1}$$

Por onda solitária, entende-se soluções especiais, de (2.1), da forma $v(t,x) = u(x-t)$. Denotando-se $\xi = x - t$ temos $v_t = u'(\xi) = -v_x$ e, pelas propriedades da Transformada de Hilbert apresentadas no Apêndice A.3,

$$\mathscr{H}v = \mathscr{H}(u(\xi)) = (\mathscr{H}u)(\xi)$$

e, portanto,

$$v_t + 2vv_x - (\mathscr{H}(v))_{xx} = -u'(\xi) + 2u(\xi)u'(\xi) - (\mathscr{H}u)''(\xi) = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}\left(-u + u^2 - \mathscr{H}u_x\right) = 0$$

e como estamos interessados em determinar ondas solitárias algébricas, ou seja, soluções com a propriedade de que $|u(x)| \to 0$ quando $|x| \to \infty$, temos que u deve satisfazer a equação

$$u^2 - u = \mathscr{H}u_x \tag{2.2}$$

É claro que u deve possuir uma certa regularidade para que o termo integral $\mathscr{H}u_x$ possa estar bem definido. Procuremos, portanto, determinar u no conjunto das funções $C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tais que $u_x \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Neste caso, $\mathscr{H}u_x$ está bem definido [8, Teorema 2, p.35]

Nas condições acima, u pode ser estendida ao semi-plano $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ a uma função harmônica limitada [10, Teorema 14, p.38], que denotaremos por $u(x,y)$.

Observa-se também que se $u(x,0)$ é de classe $C^1(\mathbb{R})$ então $u(x,y) \in C^1(\overline{H})$.

Lema 2.1 *Seja $u \in C^1(\overline{H})$ harmônica. Então*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = -\mathscr{H} u_x(x,0)$$

onde a Transformada de Hilbert $\mathscr{H}$ é aplicada a função $x \longmapsto u_x(x,0)$.

Prova: Denotemos por

$$(\mathscr{F}_x u)(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y) e^{-ix\xi} dx$$

a Transformada de Fourier de u na variável x. Note que, se $\triangle u = 0$ então, pela Proposição (B.1) do apêndice temos

$$\mathscr{F}_x(u_{xx} + u_{yy}) = \mathscr{F}_x(u_{xx}) + \mathscr{F}_x(u_{yy}) = 0$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}_x u_{yy})(\xi, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{yy}(x,y) e^{-ix\xi} dx \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y) e^{-ix\xi} dx \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathscr{F}_x u(\xi, y).
\end{aligned}$$

Logo pelo Teorema (B.2) temos

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(\xi, y) = 0 \ ,$$

onde $\hat{u} = \mathscr{F}_x u$. Portanto,

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{u}(\xi, 0) e^{-|\xi| y}.$$

Derivando a equação acima com respeito a variável y e fazendo $y = 0$, temos

$$\frac{\partial}{\partial y} \hat{u}(\xi, 0) = -|\xi| \hat{u}(\xi, 0)$$

e pelo Teorema (A.4)

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = -\left(|\xi| \hat{u}(\xi,0)\right)^{\check{}} = -\left(\xi \text{sing}(\xi) \hat{\text{u}}(\text{x},0)\right)^{\check{}} = -\left(\mathscr{H} \partial_x u\right)(x,0) \ ,$$

sendo que a última igualdade está demonstrada no Apêndice (A.3).

∎

Podemos então escrever o Problema de Neumann, definido em $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, equivalente a equação (1)

$$(\mathscr{P})\begin{cases} \Delta u = 0 \quad em \quad H \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = u - u^2 \quad em \quad y = 0 \\ |u(x,0)| \to 0 \quad com \quad |x| \to \infty \\ u \in C^1(\overline{H}) \cap L^\infty(\overline{H}) \end{cases}$$

Neste capítulo, provaremos que toda função que satisfaz $\mathscr{P}$ é da forma

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t,y)u^2(t)dt$$

em $\overline{H}$. Aqui, G é uma função especial a ser definida na proposição seguinte. Suas propriedades serão usadas diversas vezes nas demonstrações dos resultados posteriores e permitirão chegar às conclusões desejadas. Em geral u é uma função de $(x,y) \in \overline{H}$, mas em algumas ocasiões usaremos $u(x)$ para denotar $u(x,0)$ simplificando assim a notação.

Proposição 2.1 *Seja $G : H \to \mathbb{R}$ dada por*

$$G(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{(y+w)e^{-w}}{x^2+(y+w)^2}dw$$

Então:

1) G é harmônica e $G > 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y)dx = 1, \quad se \ \ y \geq 0;$

3) $G(x,y) \leq C\left(\dfrac{1+y}{x^2+y^2}\right) \quad em \ \ \overline{H};$

4) $G(x,y) \leq C + \dfrac{1}{2\pi}|\log(x^2+y^2)|, \quad se \ \ x^2+y^2 \leq 1;$

5) $G(x,y) \geq C\left(\dfrac{1+y}{x^2+y^2}\right), \quad se \ \ x^2+y^2 \geq 1;$

6) $|G_x(x,y)| \leq \dfrac{2|x|}{x^2+y^2}G(x,y) \ \ em \ \ \overline{H}.$

Prova:

1) Para ver que G é harmônica, note que (pelo Teorema da Derivação Dominada)

$$\Delta G = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-w}\Delta f dw \ ,$$

onde $f(x,y) = \dfrac{y+w}{x^2+(y+w)^2}$. Logo, é suficiente provar que f é harmônica . Note que,

$$\begin{cases} f_{xx} = -2(y+w)[-3x^2+(y+w)^2][x^2+(y+w)^2]^{-3} \\ f_{yy} = -2(y+w)[3x^2-(y+w)^2][x^2+(y+w)^2]^{-3} \end{cases}$$

Assim, $f_{xx}+f_{yy}=0$, ou seja, f é harmônica.

2)Pelo Teorema de Fubini, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y)dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(y+w)e^{-w}}{x^2+(y+w)^2}dwdx \\ &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(y+w)e^{-w}}{x^2+(y+w)^2}dxdw \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left\{(y+w)e^{-w}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+(y+w)^2}\right\}dw \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(y+w)e^{-w}\left[\frac{1}{y+w}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y+w}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-w}\pi dw = -e^{-w}\Big|_0^{+\infty} = 1\ . \end{aligned}$$

3) Observe que:

$$\frac{1}{x^2+(y+w)^2} \leq \frac{1}{x^2+y^2}$$

Daí,

$$\begin{aligned} G(x,y) &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(y+w)e^{-w}}{x^2+y^2}dw \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\left[\int_0^{+\infty}ye^{-w}dw+\int_0^{+\infty}we^{-w}dw\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{y+1}{x^2+y^2}\right)(y+c) \\ &\leq C\left(\frac{1+y}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

4)Integrando por partes a função G, temos :

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{1}{2}\log[x^2+(y+w)^2]e^{-w}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\log[x^2+(y+w)^2]e^{-w}dw \\ &= \frac{1}{2}|\log(x^2+y^2)|+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\log[x^2+(y+w)^2]e^{-w}dw \end{aligned}$$

E como $x^2 \leq 1$ e $y^2 \leq 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\log[x^2+(y+w)^2]e^{-w}dw &\le \int_0^{+\infty}\log[1+(1+w)^2]e^{-w}dw\\ &= -\log[1+(1+w)^2]e^{-w}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-w}\frac{2(1+w)}{1+(1+w)^2}dw\\ &= -\log 2+K=C\ ,\ \text{onde}\ \ \mathrm{K}\le 4.\end{aligned}$$

5)Observe que

$$\frac{1}{x^2+(y+w)^2}\ge\frac{1}{x^2+(y+w)^2+(y-w)^2}\ge\frac{1}{2(x^2+y^2+w^2)}.$$

Como $x^2+y^2\ge 1$, temos

$$\frac{1}{x^2+y^2+w^2}\ge\frac{1}{2(x^2+y^2)e^w}.$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}G(x,y) &\ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\int_0^{\infty}\frac{(y+w)e^{-w}}{e^w}dw\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{y}{2}\right)\ge C\left(\frac{1+y}{x^2+y^2}\right)\ .\end{aligned}$$

6)Em $\overline{H}$, temos

$$\begin{aligned}G_x(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(y+w)e^{-w}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+(y+w)^2}\right)dw\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(-2x)(y+w)e^{-w}}{[x^2+(y+w)^2]^2}dw\\ &\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(-2x)(y+w)e^{-w}}{[x^2+y^2][x^2+(y+w)^2]}dw\\ &= -\frac{2x}{x^2+y^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(y+w)e^{-w}}{x^2+(y+w)^2}dw\\ &= \frac{-2x}{x^2+y^2}G(x,y)\ .\end{aligned}$$

Daí,

$$|G_x(x-t,y)|\le\frac{2|x|}{x^2+y^2}G(x,y)$$

Isto encerra a demonstração da Proposição.

■

Agora, seja u uma função que satisfaz $(\mathscr{P})$ em $\overline{H}$. Fixado $\delta > 0$ tomemos X_δ tal que $u(x) < \delta$ se $|x| > X_\delta$. Para $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$, consideremos $C_\delta^\alpha(u)$ o espaço das funçoes contínuas f de valores reais, definidas no conjunto $\{x \in R; |x| \geq X_\delta\}$, tais que

$$\|f\|_{\delta,\alpha} = \sup\{(1+|x|^\alpha)|f(x)|; |x| \geq X_\delta\} < \infty$$

Lema 2.2 *$C_\delta^\alpha(u)$ é um espaço de Banach com a norma acima.*

Prova: $C_\delta^\alpha(u)$ é, de fato, um espaço vetorial pois dadas $f, g \in C_\delta^\alpha(u)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}(1+|x|^\alpha)|f(x)+\lambda g(x)| &\leq (1+|x|^\alpha)(|f(x)|+|\lambda||g(x)|) \\ &\leq \|f\|_{\alpha,\delta} + |\lambda|\|g\|_{\alpha,\delta}\end{aligned}$$

Ou seja, $f + \lambda g \in C_\delta^\alpha(u)$ e

$$\|f+\lambda g\|_{\alpha,\delta} \leq \|f\|_{\alpha,\delta} + |\lambda|\|g\|_{\alpha,\delta} \tag{2.3}$$

Verifiquemos, agora, que $\| \quad \|_{\alpha,\delta}$ é uma norma. A desigualdade triangular é um caso particular de (2.3) quando $\lambda = 1$. Naturalmente $\|f\| \geq 0$. Suponha que $\|f\|_{\alpha,\delta} = 0$ ou seja,

$$(1+|x|^\alpha)|f(x)| \leq \|f\|_{\alpha,\delta} = 0, \qquad \forall |x| > X_\delta$$

isto implica

$$f(x) \equiv 0 \qquad \forall |x| > X_\delta$$

Logo, $\|.\|_{\alpha,\delta}$ é uma norma. Para mostrar que C_δ^α é completo, consideremos (f_n) sequência de Cauchy.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que $\|f_n - f_m\|_{\alpha,\delta} < \varepsilon$, para $n, m \geq n_0$

$$(1+|x|^\alpha)\,|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \qquad \forall |x| > X_\delta \quad e \quad \text{para } m, n \geq n_0$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{1+|x|^\alpha} < \varepsilon$$

Ou seja, fixando-se $|x| > X_\delta$, a seqüência $(f_n(x))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Denotemos por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Devemos mostrar que:
1) f é contínua no conjunto $\{x \in \mathbb{R}; |x| \geq X_\delta\}$;
2) $\sup\limits_{|x|>X_\delta} \{(1+|x|^\alpha)|f(x)|\} < \infty$;
3) $\|f_n - f\|_{\alpha,\delta} \to 0$ quando $n \to \infty$

Para verificar (1) nada há a fazer, pois f é limite uniforme de funções contínuas. Para (2), observemos que

$$\begin{aligned}(1+|x|^\alpha)|f(x)| &\leq (1+|x|^\alpha)|f(x)-f_n(x)| + (1+|x|^\alpha)|f_n(x)| \\ &\leq \varepsilon + \|f_n\|_{\alpha,\delta} \quad \text{para } n \geq n_0\ ,\end{aligned}$$

o que implica

$$\sup\{(1+|x|^\alpha)|f(x)|\} < \infty$$

Para verificar-se (3), note que dado $n \geq n_0$, tem-se

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + |x|^\alpha}$$

portanto, $\|f_n - f\|_{\alpha,\delta} \to 0$ quando $n \to \infty$. Com isso mostramos que $C_\delta^\alpha(u)$ é fechado, portanto $C_\delta^\alpha(u)$ é espaço de Banach.

■

Doravante, escreveremos C_δ^α para indicar $C_\delta^\alpha(u)$, apenas por uma questão de simplicidade de notação.

Definamos o operador T_δ^α em C_δ^α por

$$T_\delta^\alpha v(x) = \int_{|t| \geq X_\delta} [G(x-t)u(t)]v(t)dt$$

e verifiquemos que $T_\delta^\alpha : C_\delta^\alpha \to C_\delta^\alpha$ é um operador linear contínuo.

Lema 2.3 *$\|T_\delta^\alpha\|_{\alpha,\delta}$ é limitado por um múltiplo de δ.*

Prova: Seja $v \in C_\delta^\alpha$. Temos que

$$\|T_\delta^\alpha v\|_{\alpha,\delta} = \sup\{(1+|x|^\alpha)|T_\delta^\alpha v(x)| : |x| \geq X_\delta\}.$$

Como $G > 0$ e $u > 0$ podemos escrever :

$$\begin{aligned} |T_\delta^\alpha v(x)| &\leq \int_{|t| \geq X_\delta} [G(x-t)u(t)]v(t)dt \\ &\leq \|v\|_{\alpha,\delta} \int_{|t| \geq X_\delta} \frac{G(x-t)}{1+|t|_\alpha} u(t)dt \\ &\leq \delta \|v\|_{\alpha,\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x-t)}{1+|t|_\alpha} dt \end{aligned}$$

$$= \delta \|v\|_{\alpha,\delta} \left\{ \int_{|t-x| \geq \frac{1}{2}|x|} \frac{G(x-t)}{1+|t|^\alpha} + \int_{|t-x| < \frac{1}{2}|x|} \frac{G(x-t)}{1+|t|^\alpha} \right\} \tag{2.4}$$

Por (3), na Proposição (2.1), temos que

$$\int_{|t-x| \geq \frac{1}{2}|x|} \frac{G(x-t)}{1+|t|^\alpha} dt \leq \int_{|t-x| \geq \frac{1}{2}|x|} \frac{dt}{(1+|t|^\alpha)(x-t)^2} .$$

Além disso, existe uma constante x, $C_x = (1 + \frac{4}{|x|^2})$, tal que

$$\frac{1}{(x-t)^2} \leq \left(1 + \frac{4}{|x|^2}\right) \left(\frac{1}{1+(x-t)^2}\right) .$$

Substituindo em (2.4), temos

$$|T_\delta^\alpha v(x)| \leq \delta\|v\|_{\alpha,\delta}\left\{C_x\int_{|t-x|\geq\frac{1}{2}|x|}\frac{dt}{[1+(x-t)^2](1+|t|^\alpha)}+\int_{|t-x|<\frac{1}{2}|x|}\frac{G(x-t)}{1+|t|^\alpha}dt\right\}. \quad (2.5)$$

Note que

$$\int_{|t-x|\leq\frac{1}{2}|x|}\frac{G(x-t)}{1+|t|^\alpha}dt \leq \int_{|t-x|<\frac{1}{2}|x|}\frac{G(x-t)}{1+|\frac{1}{2}x|^\alpha}dt\ ,$$

pois, $|x-t|<\frac{1}{2}|x|$ implica $|t|>\frac{1}{2}|x|$.

Agora , podemos escrever (2.5) como segue

$$\begin{aligned}|T_\delta^\alpha v(x)| \leq\ & \delta\|v\|_{\alpha,\delta}\ \left\{C_x\int_{|t-x|\geq\frac{1}{2}|x|}\frac{dt}{(1+|t|^\alpha)[1+(x-t)^2]}+\int_{|t-x|<\frac{1}{2}|x|}\frac{G(x-t)}{1+|\frac{1}{2}x|^\alpha}dt\right\}\\ \leq\ & C\left(\frac{\delta\|v\|_{\alpha,\delta}}{1+|x|^\alpha}\right)\cdot\left(\int_{|t-x|\geq\frac{1}{2}|x|}\frac{dt}{(1+|t|^\alpha)[1+(x-t)^2]}+\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-t)dt\right)\ ,\quad (2.6)\end{aligned}$$

por (2) na Proposição (2.1). Como $\alpha\in\{0,2\}$, estudaremos cada caso separadamente.

Fazendo $\alpha=0$ em (2.6), temos

$$|T_\delta^\alpha v(x)| \leq C\left(\frac{\delta\|v\|_{\alpha,\delta}}{1+|x|^0}\right)\left(\int_{|t-x|\geq\frac{1}{2}|x|}\frac{dt}{2[1+(x-t)^2]}+1\right)$$

portanto,

$$|T_\delta^\alpha v(x)| \leq C\delta(\|v\|_{0,\delta})\ .$$

Fazendo $\alpha=2$, temos

$$1+|t-x|^2\geq 1+\frac{1}{4}|x|^2\geq\frac{1}{4}(1+|x|^2)\Rightarrow\frac{1}{1+(t-x)^2}\leq\frac{C}{1+|x|^2}\ .$$

Daí,

$$|T_\delta^\alpha v(x)| \leq C\left(\frac{\delta\|v\|_{2,\delta}}{1+|x|^2}\right)\left(\int_{|t-x|\geq\frac{1}{2}|x|}\frac{dt}{(1+|t|^2)[1+(x-t)^2]}+1\right)\leq C\delta\left(\frac{\|v\|_{2,\delta}}{1+|x|^2}\right)\ .$$

Em ambos os casos, temos que

$$|T_\delta^\alpha v(x)| \leq C\delta\left(\frac{\|v\|_\delta^\alpha}{1+|x|^\alpha}\right)\ ,$$

ou seja, $(1+|x|^\alpha)|t_\delta^\alpha v(x)|\leq C\delta\|v\|_\delta^\alpha$, o que equivale a $\|T_\delta^\alpha v\|_\delta^\alpha\leq\|v\|_\delta^\alpha$. Portanto:

$$\sup\frac{\|T_\delta^\alpha v\|_\delta^\alpha}{\|v\|_\delta^\alpha}\leq C\delta\ ,$$

como queríamos.

■

Teorema 2.1 *Seja $u : H \to \mathbb{R}$ satisfazendo $(\mathscr{P})$ e $u \not\equiv 0$. Definamos $w : H \to \mathbb{R}$ por*

$$w(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t,y)u^2(t)dt.$$

Então $w = u$ em $\overline{H}$.

Prova: Primeiro, mostraremos que $\triangle w = 0$ em H e $\left(w - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = u^2$ em ∂H.

Note que, pelo Teorema da Derivação Dominada,

$$\triangle w = \int_{-\infty}^{+\infty} \triangle \left(G(x-t,y)u^2(t)\right) dt$$

Como G e u são harmônicas em H, segue que w também o é.
É fácil verificar-se que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y+w}{x^2+(y+w)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{y+w}{x^2+(y+w)^2}\right)$$

Daí, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{(y+w)}{x^2+(y+w)^2}\right) e^{-w} dw \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{(y+w)e^{-w}}{x^2+(y+w)^2}\right) + \frac{(y+w)e^{-w}}{x^2+(y+w)^2} \right\} dw \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{ \frac{(y+w)e^{-w}}{x^2+(y+w)^2}\Bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(y+w)e^{-w}}{x^2+(y+w)^2} dw \right\} \\
&= G(x,y) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) .
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial y}(y,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial y}(x-t,y)u^2(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ G(x-t,y) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\right)\right\} u^2(t)dt \\
&= w(x,y) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\right) u^2(t)dt .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(w - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\right) u^2(t)dt .$$

Agora, basta mostrar que:

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-t)^2+y^2}\right)u^2(t)dt = u^2(x)\ .$$

Fazendo $\varphi_y = \dfrac{y}{\pi[(x-t)^2+y^2]}$ uma vez que u^2 é contínua e limitada, podemos aplicar o Lema (A.1) para garantirmos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{y}{\pi[(x-t)^2+y^2]}\right)u^2(t)dt = \varphi * u^2 \to u^2$$

uniformemente quando $y \to 0$. Portanto,

$$\left(w - \frac{\partial w}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} = u^2\ .$$

Como $G > 0$, temos a seguinte estimativa para w

$$\begin{aligned}
|w(x,y)| &\le \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t,y)|u^2(t)|dt \\
&\le |u|_\infty^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t,y)dt \\
&= |u|_\infty^2\ ,
\end{aligned}$$

por (1) da Proposição (2.1). Como u é limitada, segue que w também é limitada em H. Assim, podemos definir a função $v = u - w$ limitada em H. Tem-se claramente que $\triangle v = 0$ em H e $v = 0$ em ∂H, além disso, é fácil verificar que $\dfrac{\partial v}{\partial y} - v = 0$ em ∂H, então v satisfaz as hipóteses do Corolário (1.3) do Capítulo 1. Daí, podemos concluir que $v = 0$ em $\overline{H}$, ou seja, $u = w$ em $\overline{H}$.

■

O resultado acima é de extrema relevância para o nosso estudo, pois ele nos garante que se u é solução do problema dado por $(\mathscr{P})$, então

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t,y)u^2(t)dt. \tag{2.7}$$

A partir de agora nos restringiremos ao estudo das propriedades de funções u que são soluções do problema $(\mathscr{P})$ em estudo. Os dois teoremas seguintes nos mostram que a função u dada por (2.7) pode ser estimada e além disso, $|u_x|$ é limitada por um múltiplo de u. Antes, porém, demonstraremos um resultado que nos auxiliará na prova do próximo teorema.

Lema 2.4 *Seja G como na Proposição (2.1) e u satisfazendo $(\mathscr{P})$. Então*

$$\left|\int_{|t|\le X_\delta} G(x-t)u^2(t)dt\right| \le C\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \qquad se \quad |x| \ge 2X_\delta$$

Prova:

$$\left|\int_{|t|\leq X_\delta} G(x-t)u^2(t)dt\right| \leq \int_{|t|\leq X_\delta} G(x-t)|u^2(t)|dt \leq C\int_{|t|\leq X_\delta} G(x-t)dt$$

uma vez que u é limitada e G é positiva. Por outro lado,

$$\int_{|t|\leq X_\delta} G(x-t)dt \leq C\int_{|t|\leq X_\delta} \frac{dt}{(x-t)^2}$$

pois G satisfaz a Proposição (2.1).

Mas, $g(t) = \dfrac{1}{(x-t)^2}$ e $f(t) = \dfrac{1}{1+(x-t)^2}$ são limitadas e $|x| \geq 2X_\delta$, logo existe uma constante C_δ tal que, $g(t) < C_\delta f(t)$ para $-X_\delta \leq t \leq X_\delta$, logo

$$\int_{|t|\leq X_\delta} \frac{dt}{(x-t)^2} \leq C_\delta \int_{|t|\leq X_\delta} \frac{dt}{1+(x-t)^2}$$

E, finalmente, pelo mesmo argumento acima concluímos que existe uma constante K_δ tal que

$$\int_{|t|\leq X_\delta} \frac{dt}{1+(x-t)^2} \leq K_\delta \int_{|t|\leq X_\delta} \frac{1}{1+x^2}dt = \overline{K_\delta}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Daí segue o resultado.

■

Teorema 2.2 *Seja u uma solução não nula de $(\mathscr{P})$. Então, existem constantes m e M, com $0 < m < M$, tais que*

$$\frac{m(1+y)}{1+x^2+y^2} \leq u(x,y) \leq \frac{M(1+y)}{1+x^2+y^2}$$

para todo $(x,y) \in \overline{H}$.

Prova: Vimos no teorema anterior que, se u satisfaz $(\mathscr{P})$ e $u \not\equiv 0$, então u é dada

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t,y)u^2(t)dt, \qquad (x,y) \in \overline{H}$$

Seja $m_0 = \inf\{\mathrm{u}^2(\mathrm{t}) : \mathrm{t} \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]\} > 0$ onde $|u(x,y)| > 0$, $\forall t \in [a,b]$. Tal intervalo existe, pois u é contínua e não-nula. Considere $R = 2\max\{|\mathrm{a}|+1, |\mathrm{b}|+1\}$ e observe que se $x^2+y^2 \leq R$ então $(x-t)^2+y^2 \leq 1$ para todo $t \in [a,b]$. Neste caso, pela propriedade (5) da Proposição (2.1), temos

$$\begin{aligned} u(x,y) &\geq \int_a^b G(x-t,y)u^2(t)dt \\ &\geq Cm_0\int_a^b \frac{1+y}{(x-t)^2+y^2}dt\,, \qquad se \quad (x-t)^2+y^2 \geq 1, \qquad \text{por } (5). \end{aligned}$$

Assim,

$$u(x,y) \geq Cm_0(b-a)C_R\left(\frac{1+y}{1+x^2+y^2}\right) = m_1\left(\frac{1+y}{1+x^2+y^2}\right)$$

Para verificar a última desigualdade acima, consideremos

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-t)^2+y^2} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

definidas em $\{(x,y), x^2+y^2 \geq R\}$. f e g são limitadas em H e, além disso,

$$\lim_{x,y\to\infty} \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = 0,$$

daí resulta que, existe uma constante C_R, dependendo de R, tal que

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \leq C_R, \quad \forall\ x^2+y^2 \geq R^2.$$

Para $x^2+y^2 \leq R^2$, considere

$$m_2 = \frac{\inf(u(x,y); x^2+y^2 \leq R^2)}{\sup\left(\frac{1+y}{1+x^2+y^2}; x^2+y^2 \leq R^2\right)}.$$

Tomemos $m = \min\{m_1, m_2\} > 0$ e verifique que

$$u(x,y) \geq m\left(\frac{1+y}{1+x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \in \overline{H}$$

Assim, está provada a primeira desigualdade.

Para provar a segunda desigualdade do teorema, consideremos u restrita a reta ∂H. Mostraremos primeiro que a desigualdade vale no bordo de H, ou seja,

$$u(x) \leq \frac{M}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Como u satisfaz $(\mathscr{P})$ temos que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t)u^2(t)dt \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{|t|\leq X_\delta} G(x-t)u^2(t)dt + \int_{|t|>X_\delta} G(x-t)u^2(t)dt \\ &= A_\delta(x) + \int_{|t|>X_\delta} [G(x-t)u(t)]u(t)dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pelo Lema (2.3), temos que

$$|A_\delta(x)| \leq cte.\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \qquad \text{se } |x| \geq 2X_\delta$$

Portanto $A_\delta \in C_\delta^\alpha$ para $\delta > 0$ e $\alpha \in \{0, 2\}$

Por outro lado,

$$\int_{|t|>X_\delta} G(x-t)u^2(t)dt = \int_{|t|>X_\delta} [G(x-t)u(t)]u(t)dt = T_\delta^\alpha u(t) \tag{2.10}$$

pelo Lema (2.2), temos que

$$\|T_\delta^\alpha\|_\delta^\alpha \leq C.\delta\|v\|_{\alpha,\delta},$$

donde também concluímos que $T_\delta^\alpha(u) \in C_\delta^\alpha(u)$. Escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $C.\delta < 1$, temos que T_δ^α é contração.

Agora definemos $F : C_\delta^\alpha \to C_\delta^\alpha$, tal que $F(v) = A_\delta + T_\delta^\alpha(v)$ Note que

$$\|F(v_1) - F(v_2)\| = \|T_\delta^\alpha(v_1 - v_2)\| < C\delta\|v_1 - v_2\|$$

Aplicando o princípio da contração (ver [7]), existe um único $v \in C_\delta^\alpha$ tal que $F(v) = v$, ou seja,

$$v = A_\delta + T_\delta^\alpha(v)$$

com,

$$v(x) = \int_{|t|\leq X_\delta} G(x-t)u^2(t)dt + \int_{|t|<X_\delta} [G(x-t)u(t)]v(t)dt$$

mas,

$$u(x) = \int_{|t|\leq X_\delta} G(x-t)u^2(t)dt + \int_{|t|<X_\delta} [G(x-t)u(t)]u(t)dt$$

por (2.9). Isso nos diz que $u \equiv v$ em C_δ^0 daí $u \in C_\delta^2$, pois $C_\delta^2 \subset C_\delta^0$. Logo,

$$\sup_{|x|\geq X(\delta)} \{(1+x^2)|u(x)|\} < \infty.$$

Portanto existe C tal que

$$(1+x^2)|u(x)| \leq C \Rightarrow |u(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$$

se $|x| \geq X(\delta)$. O resultado se verifica também para o compacto $|x| \leq X(\delta)$ pois, $(1+x^2)|u(x)|$ é contínua nesse conjunto, o que prova (2.8).

Para estender o resultado a todo o semi-plano H consideremos $v(x,y) = \dfrac{1+y}{x^2+(1+y^2)}$ harmônica e limitada em H. Definamos

$$U(x,y) = u(x,y) - Mv(x,y)$$

É fácil verificar que U é harmônica, pois v e u o são, e como v é limitada, pois

$$\lim_{(x^2+y^2)\to\infty} v(x,y) = 0$$

U é limitada. Logo,

$$\liminf_{R\to\infty}\{R^{-1}\max_{0,\theta<\pi} U(R,\theta)\} = 0.$$

Além disso, $u < Mv$ em $y = 0$,ou seja, $U \leq 0$ na fronteira de H, com isso U satisfaz as hipóteses do teorema (1.3) daí podemos concluir

$$U(x,y) \leq 0 \quad em \quad \overline{H}$$

portanto

$$u(x,y) \leq Mv(x,y) \qquad em \quad \overline{H}$$

Com isso provamos a segunda desigualdade do teorema e encontramos estimativas, inferior e superior, para u.

■

Teorema 2.3 *Suponha que u satisfaz $(\mathscr{P})$ e $u \not\equiv 0$. Então existe uma constante K tal que*

$$|u_x(x,y)| \leq K\left(\frac{1+|x|}{1+x^2+y^2}\right)u(x,y)$$

Prova: Como vimos no Teorema (2.1), $u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t,y)u^2(t)dt$ é limitada, pois G é C^∞ e u é harmônica, note que, pelo Teorema da Derivação Dominada

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(G(x-t,y)\right)u^2(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}[G(x-t,y)u^2(t)dt] \\
&= -\left\{[u^2(t)G(x-t,y)]\Big|_{-\infty}^{+\infty} - 2\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-t,y)u(t)u_x(t)dt\right\} \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-t,y)uu_x dt
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|u_x(x,y)| &= 2\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-t,y)u(t)u_x(t)dt\Big| \\
&\leq 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-t,y)u^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-t,y)u_x^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.11) \\
&\leq 2|u_x|_\infty|u(x,y)^{\frac{1}{2}} = C|u(x,y)|^{\frac{1}{2}} \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Para $y \in [0,1]$ e $x > 2$, temos

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= 2\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-t,y)u(t)u_x(t)dt \\
&= 2\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}x}G(x-t,y)u(t)u_x(t)dt + 2\int_{\frac{1}{2}x}^{+\infty}G(x-t,y)u(t)u_x(t)dt \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Resolvendo a primeira integral de (2.13), temos

$$\begin{aligned} 2\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}x} G(x-t,y)u(t)u_x(t)dt &= 2\left[\frac{1}{2}G(x-t,y)u^2(t)\Big|_{-\infty}^{\frac{1}{2}x} - \left(-\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}x} G_x(x-t,y)u^2(t)dt\right)\right] \\ &= 2G(\frac{1}{2}x,y)u^2(\frac{1}{2}x) + 2\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}x} G_x(x-t,y)u^2(t)dt \end{aligned}$$

daí,

$$u_x(x,y) = 2G(\frac{1}{2}x,y)u^2(\frac{1}{2}x) + 2\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}x} G_x(x-t,y)u^2(t)dt + 2\int_{\frac{1}{2}x}^{+\infty} G(x-t,y)u(t)u_x(t)dt$$

Pela Proposição (2.1), temos a seguinte estimativa

$$|u_x(x,y)| \leq 2G(\frac{1}{2}x,y)u^2(\frac{1}{2}x) + \left(\frac{4|x|}{x^2+y^2}\right)u(x,y) + \left|2\int_{\frac{1}{2}x}^{+\infty} G(x-t,y)u(t)u_x(t)dt\right| \tag{2.14}$$

e pelo Teorema (2.2),

$$\begin{aligned} \left|\int_{\frac{1}{2}x}^{+\infty} G(x-t,y)u(t)u_x(t)dt\right| &\leq C\int_{\frac{1}{2}x}^{+\infty} G(x-t,y)u^{\frac{3}{2}}(t)dt \\ &\leq \frac{C}{[1+(\frac{1}{2}x)^2]^{\frac{3}{2}}}\int_{\frac{1}{2}x}^{+\infty} G(x-t,y)dt \\ &\leq \frac{C}{(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}(1+x^2))^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t,y)dt \\ &\leq \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Reescrevendo (2.14) temos,

$$|u_x(x,y)| \leq G(\frac{1}{2}x,y)u^2(\frac{1}{2}x) + \left(\frac{C|x|}{x^2+y^2}\right)u(x,y) + \frac{C_1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad . \tag{2.15}$$

Observe que os termos do segundo membro da desigualdade (2.15) podem ainda ser estimados.

Primeiro verificaremos o caso em que $x > 2$ e $y \in [0,1]$.

a)

$$\begin{aligned} G(\frac{1}{2}x,y)u^2(\frac{1}{2}x) &\leq \frac{C(1+y)}{x^2+y^2}.\frac{M_1}{(1+\frac{1}{4}x^2)^2} \\ &= \frac{C(1+y)}{x^2+y^2}.\frac{K_2}{(1+x^2)^2} \\ &\leq C_0\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

b)Pelo teorema (2.1)

$$
\begin{aligned}
\frac{C|x|}{x^2+y^2}u(x,y) &\leq \frac{C|x|}{x^2+y^2}\frac{M}{1+x^2+y^2} \\
&\leq \frac{Cx}{x^2}.\frac{M}{1+x^2+y^2} \\
&\leq \frac{C^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Por (2.15), (a) e (b) segue que

$$
\begin{aligned}
|u_x(x,y)| &\leq C\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\leq C\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{(1+x^2+y^2)}\right)^{\frac{1}{2}}u(x,y) \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Para o caso $y \in [0,1]$ e $x < -2$ o resultado é similar e para $x \in [-2,2]$ é imediato.
Verificaremos agora o caso $y \geq 1$.
Pelo teorema (2.2) temos

$$
\Big|u_x(x,y)\Big| = \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(x-t,y)u^2(t)dt\Big| \leq C\int_{-\infty}^{+\infty} |G_x(x-t,y)|(1+t^2)^{-2}dt \qquad (2.17)
$$

Por (3) e (6) na proposição 2.1

$$
|G_x(x-t,y)| \leq \frac{2|x-t|}{(x-t)^2+y^2}G(x-t,y)
$$

e

$$
G(x-t,y) \leq \frac{1+y}{(x-t)^2+y^2}
$$

Substituindo em (2.17) teremos

$$
\begin{aligned}
|u_x(x,y)| &\leq C\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{|x-t|}{(x-t)^2+y^2}\right)\left(\frac{1+y}{(x-t)^2+y^2}\right)\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt \\
&\leq C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x-t|(1+y)}{((x-t)^2+y^2)^2}\frac{1}{(1+t^2)}dt
\end{aligned}
$$

usando os mesmos argumentos usados anteriormente, segue que existe uma constante C_t, dependendo apenas de t, tal que

$$
\frac{|x-t|}{[(x-t)^2+y^2]^2} \leq C_t\frac{|x|}{(x^2+y^2)^2}
$$

logo

$$C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x-t|(1+y)}{((x-t)^2+y^2)^2}\frac{1}{(1+t^2)}dt \leq C_t\frac{(1+y)|x|}{(x^2+y^2)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = C'\frac{(1+y)|x|}{(x^2+y^2)^2}$$

Portanto se $y \geq 1$ temos

$$|u_x(x,y)| \leq C\frac{(1+y)|x|}{(x^2+y^2)^2} \tag{2.18}$$

Agora combinando (2.16),(2.18) e o teorema anterior obtemos

$$|u_x(x,y)| \leq K\frac{1+|x|}{1+x^2+y^2}u(x,y)$$

$\forall x \in R$ e $y \geq 0$. Isto prova o teorema.

■

Os resultados demonstrados até agora são de fundamental importância para nosso estudo. Segundo o que foi provado, uma solução u de $\mathscr{P}$ é limitada e, além disso, u_x pode ser estimada no semi-plano superior. Apartir de agora definiremos uma função harmônica w, dependendo de u e u_x e através dessa função chegaremos a uma E.D.O. que nos permitirá chegar ao resultado desejado, para isso usaremos fortemente a limitação de u e u_x.

Observemos, primeiro, que, se u é uma solução de $\mathscr{P}$ então, existe uma função harmônica v definida em $\overline{H}$ tal que, $u + iv$ é analítica. Pelos Teoremas (2.2) e (2.3), v é limitada em $\overline{H}$,daí

$$v(x,y) \to 0 \text{ se } \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2 \to \infty$$

Agora, seja $w = u_x + uv$ harmônica em H. De fato, pelas equações de Cauchy-Riemann temos que

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x$$

logo,

$$\begin{aligned} \triangle w &= u_{xxx} + u_{xyy} + u\triangle v + v\triangle u + 2u_y v_y + 2u_x v_x \\ &= v_{yxx} - v_{xxy} - 2v_x v_y + 2v_y v_x \\ &\Rightarrow \triangle w = 0 \end{aligned}$$

Seja W dada por

$$W(x,y) = \frac{w(x,y)}{u(x,y)} = \frac{u_x + uv}{u} \tag{2.19}$$

W está bem definida pois $u > 0$ em H e além disso u e v são harmônicas. Daí,
a)

$$W(x,y) \to 0 \text{ se } (x^2+y^2) \to \infty$$

e b)W satisfaz a equação elíptica

$$\triangle W + \frac{2}{u}\nabla u \nabla W = 0 \text{ em } H$$

com a condição de fronteira

$$W_y(x,0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De fato,

$$W = \frac{w}{u} = \frac{u_x}{u} + \frac{uv}{u} = \frac{u_x}{u} + v$$

como

$$v(x,y) \to 0 \text{ se } (x^2+y^2) \to \infty$$

pelo Teorema(2.3) segue que

$$\frac{|u_x|}{u} \leq cte. \left(\frac{1+|x|}{1+x^2+y^2}\right)$$

a expressão à direita da desigualdade tende a zero se $(x^2+y^2) \to \infty$. Isso prova o item (a).

Como u e v são harmônicas

$$\begin{aligned}
\triangle W &= \triangle\left(\frac{w}{u}\right) \\
&= \partial_x\left(\frac{w_x u - u_x w}{u^2}\right) + \partial_y\left(\frac{w_y u - w u_y}{u^2}\right) \\
&= -2\frac{u_x}{u}\left(\frac{w_x u - w u_x}{u^2}\right) - \frac{2u_y}{u}\left(\frac{w_y u - w u_y}{u^2}\right) \\
&= -2\frac{u_x}{u}W_x - 2\frac{u_y}{u}W_y \\
&= -\frac{2}{u}\nabla u \nabla W
\end{aligned}$$

Logo,

$$\triangle W + \frac{2}{u}\nabla u \nabla W = 0 \tag{2.20}$$

Combinando as equações de Cauchy-Riemann e as equações em (2.19),em $y = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
w_y &= (u_{xy} + u_y v + u v_y) \\
&= (u-u^2)_x + (u-u^2)v + uv_y \\
&= w - uu_x - u^2 v \\
&= w - uw = (1-u)w
\end{aligned}$$

Daí,

$$w_y = (1-u)w$$

Como $u_y\Big|_{y=0} = (1-u)u\Big|_{y=0}$, segue que

$$\frac{\partial W}{\partial y}\Big|_{y=0} = \left(\frac{w}{u}\right)_y = \frac{w_y u - w u_y}{u^2} = \frac{(1-u)wu - (1-u)uw}{u^2} = 0 \tag{2.21}$$

em y=0.

O item (a) acima, juntamente com o princípio do máximo, mostra que W atinge seu máximo ou mínimo na reta $y = 0$ e são distintos se W não é constaste em H. Nesse ponto, de máximo ou mínimo, segundo o lema de Hopf [PW] $W_y \neq 0$, o que contradiz o item(b). Concluímos que W só pode ser constante em H e assim $W \equiv 0$ em H pois $W \to 0$ no infinito.

A discussão acima mostra que

$$u_x(x,y) + u(x,y)v(x,y) = 0 \tag{2.22}$$

$\forall (x,y) \in \overline{H}$

Agora diferenciando (2.22) com respeito a x e usando as equações de Cauchy-Riemann teremos em $y = 0$

$$u_{xx} - \frac{u_x^2}{u} - u^2(1-u) = 0$$

ou seja,

$$\left(\frac{u_x}{u}\right)_x = u(1-u).$$

e daí

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}(u_x/u)^2 - u + \frac{1}{2}u^2\right] = 0 \tag{2.23}$$

Como u é solução de $(\mathscr{P})$, u satisfaz os teoremas (2.2) e (2.3), então tomando o limite de (2.23) quando $|x| \to \infty$ temos

$$\frac{1}{2}(u_x/u)^2 - u + \frac{1}{2}u^2 = 0 \tag{2.24}$$

em $\mathbb{R}$. Multiplicando (2.24) por $2u^2$ temos

$$u_x^2 - 2u^3 + u^4 = 0 \qquad em \quad \mathbb{R}$$

daí,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 2u^3 - u^4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sqrt{2u^3 - u^4}$$

logo,

$$\int \frac{du}{\sqrt{2u^3 - u^4}} = x + c$$

Resolvendo a integral acima

$$\int \frac{du}{\sqrt{2u^3 - u^4}} = -\left(\frac{2-u}{u}\right)^{\frac{1}{2}} = x + c$$

temos

$$u(x) = \frac{2}{(x+c)^2+1} \tag{2.25}$$

que representa a mesma solução onda solitária encontrada por Benjamin no seu trabalho original. Para verificar que a função acima realmente satisfaz a equação (1) da introdução, observe que

$$\mathscr{H}\left(\partial_x u\right) = \partial_x\left(\mathscr{H} u\right)$$

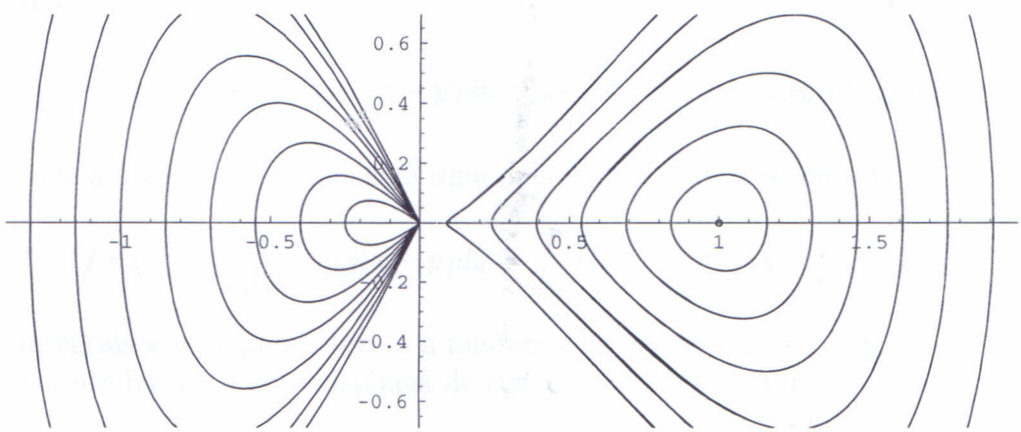
mas,

$$\left(\mathscr{H} u\right)(x) = \frac{-2x}{a(x^2+a^2)}$$

com $a = 1$ (veja (6) na tabela da secção (3) do Apêndice), logo

$$\partial_x\left(\mathscr{H} u\right)(x,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = u(x,0) - u^2(x,0).$$

Analisando o retrato de fases, abaixo, da E.D.O. (2.23) vemos que ele apresenta uma única órbita homoclínica, essa órbita representa a solução onda solitária da equação (2). Podemos observar também que existem outras soluções, as x-periódicas.



Benjamin encontrou não só soluções ondas-solitárias como também soluções x-periódicas do problema

$$(\mathscr{D})\begin{cases} \Delta u = 0 \quad em \quad H \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = u - u^2 \quad em \quad y = 0 \end{cases}$$

Uma outra demonstração desse resultado pode ser encontrada em outro trabalho de (1990) Amick e Toland. Eles provaram também que toda solução limitada não-constante de $(\mathscr{D})$ é da forma (2.25) ou é periódica na direção x , mostraram também que as soluções ondas solitárias e ondas x-periódicas encontradas por Benjamin, são as únicas soluções de $(\mathscr{D})$ limitadas não-constante, isto prova que não existem soluções ondas-solitárias sub-críticas da equação Benjamin-Ono.

Apêndice A

A.1 A identidade aproximada

O objetivo dessa seção é simplesmente introduzir um resultado de importante aplicação sem o qual não poderíamos concluir nosso estudo. Evitaremos discussões aprofundadas. Para maiores detalhes, consulte [6]. Primeiro, faremos algumas definições e apresentaremos resultados correlatos. Embora nossos resultados estejam definidos para a reta, eles poderão ser estendidos facilmente para $\mathbb{R}^n$.

Definição A.1 *Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. A convolução de f e g, denotada por $f * g$, é uma função definida por*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy, \quad \textit{desde que essa integral exista.}$$

Note que a operação convolução é uma operação comutativa, ou seja,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = (g * f)(x),$$

as duas integrais sendo iguais devido a mudança de variável $y \to x - y$.

O resultado básico sobre existência de convolução é o seguinte

Teorema A.1 *(Desigualdade de Young). Se $f \in L^1$ e $g \in L^p$, $(1 \leq p \leq \infty)$, então $f * g \in L^p$ e $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [10]. O teorema abaixo representa um dos resultados mais importantes acerca da teoria de convoluções.

Teorema A.2 *Seja $\phi \in L^1$ tal que $\int \phi(x)dx = a$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos a função ϕ_ε por $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \phi(\varepsilon^{-1}x)$. Se $f \in L^1$,$(1 \leq p \leq \infty)$, então $f * \phi_\varepsilon \to af$ na norma L^p com $\varepsilon \to 0$. Se $f \in L^\infty$ e f é uniformemente contínua num conjunto V, então $f * \phi_\varepsilon \to af$ uniformemente em V, quando $\varepsilon \to 0$*

O lema abaixo apresenta uma aplicação direta do teorema acima.

Lema A.1 *Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_y(s) = \dfrac{y}{\pi(s^2 + y^2)}$ e f uma função contínua e limitada em $\mathbb{R}$. Então* *i)* $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(s)ds = 1,$

ii) $\varphi_y * f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),$

iii) $\varphi_y * f \to f$ *uniformemente , quando* $y \to 0$.

Prova :
i)$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi(s^2+y^2)}ds = \frac{y}{\pi}\left(\frac{1}{y}\mathrm{arctg}(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{y}})\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
ii)Vemos claramente que $\varphi_y * f \in C^\infty$. Note ainda que

$$\partial_x(\varphi_y * f) = (\partial_x \varphi_y) * f$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\ \partial_x(\varphi_y * f)(x)\ | &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x \varphi_y(x-s)||f(s)|ds \\ &\leq |f|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x \varphi_y(x-s)|ds \\ &= |f|_\infty, \end{aligned}$$

o que mostra que $\varphi_y * f \in L^\infty$.

iii)Se $f \equiv 0$ nada há a fazer.

Suponha $f \not\equiv 0$. Devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tal que, se $|y| < \delta$ então $|(\varphi_y * f)(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observe que,

$$|(\varphi_y * f)(x) - f(x)| < \varepsilon$$

e, portanto,

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(x-s)f(s)ds - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(x-s)f(x)ds\Big| < \varepsilon,$$

o que eqvale a

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(x-s)[f(s)-f(x)]ds\Big| < \varepsilon.$$

Mas ,

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(x-s)[f(s)-f(x)]ds\Big| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(x-s)|f(s)-f(x)|ds.$$

Como f é contínua , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x) > 0$ tal que

$$|f(s) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \text{se } |\mathrm{x}-\mathrm{s}| < \delta_1 \ .$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(x-s)|f(s)-f(x)|ds \leq \int_{|x-\delta|<\delta_1} \varphi_y(x-s)|f(s)-f(x)|ds + \int_{|x-\delta|>\delta_1} \varphi_y(x-s)|f(s)-f(x)|ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{|x-s|<\delta_1} \varphi_y(x-s)ds + \int_{|x-s>\delta_1|} \varphi_y(x-s)[|f(s)+f(x)|]ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2|f|_\infty \left\{\int_{-\infty}^{x-\delta_1} \varphi_y(x-s)ds + \int_{x-\delta_1}^{+\infty} \varphi_y(x-s)ds\right\} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + 2|f|_\infty \left\{\int_{\delta_1}^{+\infty} \varphi_y(t)dt + \int_{-\infty}^{\delta_1} \varphi_y(t)dt\right\} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2|f|_\infty}{\pi}\left\{\pi - 2arctg\left(\frac{\delta_1}{y}\right)\right\} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

onde $|f|_\infty$ representa o $\sup f(x)$.

■

A família de funções φ_y satisfazendo as propriedades apresentadas no lema acima é conhecida por identidade aproximada.

A.2 A Transformada de Fourier na Reta

Nesta seção, faremos uma rápida introdução a teoria da Trasnformada de Fourier. Para um estudo mais completo e detalhado, veja [6].

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, sua Transformada de Fourier $\hat{f}$ é uma função limitada em $\mathbb{R}$ definida por

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Proposição A.1 *Suponha $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Então*
a) $(f+\lambda g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \lambda\hat{g}(\xi)$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall\xi \in \mathbb{R}$.
b)Se $f_y(x) = f(x+y)$ então $(\hat{f_y})(\xi) = e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi)$.
c) $\hat{\overline{f}} = \overline{\hat{f}(-\xi)}$, $\forall\xi \in \mathbb{R}$.
d)$|\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_\infty$, $\forall\xi \in \mathbb{R}$.
e) Se $f, g \in L^1$, então $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$.

De (d) cooncluímos que a Transformada de Fourier é sempre limitada. Além disso, ela é sempre uniformemente contínua.

Proposição A.2 *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então $\hat{f}$ é uniformemente contínua e limitada com* $\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_1$.

Para exibirmos outras propriedades da Transformada de Fourier, consideraremos sua restrição ao espaço de Schwartz (ou espaço das funções C^∞ rapidamente decrescentes) denotado por $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ que é definido como o espaço das funções $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$

$$\|f\|_{\alpha,\delta} = \sup_{x\in R} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty$$

para todo par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}\mathrm{x}\mathbb{N}$.

Teorema A.3 *Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Então $f^{(\alpha)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ e*

$$(\hat{f^\alpha})(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \quad \xi \in \mathbb{R}$$

O teorema acima, diz algo muito importante, a saber, o operador $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ agindo em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ é transformado no operador de multiplicação por $(i\xi)^\alpha$.

Teorema A.4 *Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Então $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.*

Proposição A.3 *Se $f \in L^1$ então $\hat{f}$ é contínua e $\hat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$*

O teorema a seguir descreve o comportamento da transformada de Fourier em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Teorema A.5 *Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Então vale a fórmula da inversão,*

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, a transformada inversa de f é definida pela fórmula,

$$\check{f} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(\varepsilon) e^{i\varepsilon x} d\varepsilon$$

O teorema acima mostra então que

$$\hat{f}^{\vee} = f = \check{f}^{\wedge}$$

para toda $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Teorema A.6 *(o teorema de Plancherel) A transformada de Fourier em $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ estende-se de forma única a um isomorfismo unitário de $L^2(\mathbb{R})$ sobre si mesmo.*

A.3 Um breve comentário sobre a Transformada de Hilbert

Nesta secção definiremos e citaremos algumas propriedades da Transformada de Hilbert. Para um estudo mais aprofundado veja [8].

Para todo $p \in (1, \infty)$ a Transformada de Hilbert $\mathscr{H}$, definida pontualmente para $\phi \in L^p(\mathbb{R})$ por

$$\mathscr{H}\phi(x) = \lim_{\xi \searrow 0} \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_{|y| \leq \xi} \frac{\phi(y)}{x-y} dy, \quad x \in \mathbb{R} \tag{A.1}$$

é um operador linear limitado em $L^p(\mathbb{R})$ e comuta com translações e dilatações. A expressão (A.1) também pode ser entendida como o valor principal da integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(y)}{(x-y)} dy$$

onde $x \in \mathbb{R}$.

Uma importante propriedade da Transformada de Hilbert mostra sua relação com a transformada de Fourier, como segue

$$\mathscr{H}\phi(\xi) = (i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi}(\xi))\check{},$$

onde

$$\mathrm{sgn}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi > 0 \\ -1, & \text{se } \xi < 0 \end{cases}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(\mathscr{H}\phi)\hat{}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}\phi(x) e^{-ix\xi} dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(y)}{y-x} dy \right) e^{-ix\xi} dx \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi} dx}{y-x} \right) dy
\end{aligned} \tag{A.2}$$

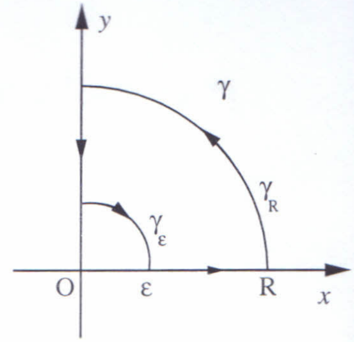
para chegarmos a identidade acima devemos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{y-x} dx = \pi i \mathrm{sgn}(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}$$

Aplicando o Teorema da Mudança de Variável e tomando $\xi > 0$ temos,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{y-x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(y-x)\xi}}{x} dx = e^{-iy\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{x} dx \tag{A.3}$$

Note que a função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ tem um pólo simples em $z = 0$. Seja γ a curva fechada representada na figura ao lado. Pelo teorema de Cauchy, $\int_\gamma f = 0$. Dividindo γ em partes teremos



$$0 = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\gamma_y} \frac{e^{iz}}{z}dz$$

onde $\gamma_y = ix$ para $\varepsilon \leq x \leq R$, como
$\int f(\gamma_y(x)).\gamma_y'(x) = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-x}}{x}dx$, a expressão acima fica

$$0 = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-x}}{x}dx$$

fazendo novamente a mudança de variável e substituindo $\frac{e^{ix}}{x}$ por $\frac{cos(x) + isen(x)}{x}$, temos

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{cos(x)}{x}dx = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{sen(x)}{x}dx - i\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} exp(iRe^{i\theta})d\theta - i\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} exp(i\varepsilon e^{i\theta})d\theta - \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-x}}{x}dx \tag{A.4}$$

Fazendo
$-i\int_0^{\frac{\pi}{2}} exp(iRe^{i\theta})d\theta = I_1$ temos

$$|I_1| = \left| -i\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} exp(iRe^{i\theta})d\theta \right| \leq \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |exp(iRe^{i\theta})|d\theta.$$

Note que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o maior valor possível de $exp(-Rsen(\theta))$, com $\delta \leq \theta \leq \pi - \delta$ é $exp(-Rsen(\delta)$, então para a expressão acima temos

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} exp(-Rsen\theta)d\theta &= \int_{0}^{\delta} |exp(-Rsen\theta)|d\theta + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} exp(-Rsen\theta)d\theta \\
&\leq \int_{0}^{\delta} d\theta + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} exp(-Rsen\theta)d\theta \\
&= \delta + (\frac{\pi}{2} - \delta)exp(-Rsen\theta)d\theta \\
&< \delta + \frac{\pi}{2}exp(-Rsen\delta).
\end{aligned}$$

De maneira análoga mostra-se que

$$|I_2| = \left| -i\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} exp(i\varepsilon e^{i\theta})d\theta \right| < \delta + \frac{\pi}{2}exp(-\varepsilon sen\delta).$$

Para calcularmos

$$I_3 = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-x}}{x}dx$$

podemos tomar $x \geq \varepsilon$, daí $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Substituindo na expressão acima, temos

$$I_3 \leq -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{R} e^{-x}dx = -\frac{1}{\varepsilon}\Big[e^{-x}\Big]_{\varepsilon}^{R} = \frac{1}{\varepsilon}(e^{-\varepsilon} - e^{-R})$$

Estimando (A.4) e fazendo $R \to \infty$, temos

$$\Big|\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{cosx}{x}dx\Big| \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{senx}{x}dx + 4\delta + \frac{\pi}{2}exp(-\varepsilon sen\delta) + \frac{\pi}{2}exp(-Rsen\delta) + \frac{1}{\varepsilon}(e^{-\varepsilon} - e^{-R}).$$

Daí,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{cosx}{x}dx\Big| &\leq \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{senx}{x}dx + 4\delta + \frac{\pi}{2}exp(-\varepsilon sen\delta) + \frac{e^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\\ &= \int_{0}^{+\infty}\frac{senx}{x}dx - \int_{0}^{\varepsilon}\frac{senx}{x}dx + 4\delta + \frac{\pi}{2}exp(-\varepsilon sen\delta) + \frac{e^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\\ &\leq \frac{\pi}{2} + 4\delta + \frac{\pi}{2}exp(-\varepsilon sen\delta) + \frac{e^{-\varepsilon}}{\varepsilon} < \infty.\end{aligned}$$

como a função $cosx$ é ímpar, segue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cosx}{x}dx = \int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{cosx}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{cosx}{x}dx = 0$$

quando $\varepsilon \to \infty$. Assim temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{senx}{x}dx = i\pi$$

Para $\varepsilon < 0$, o cálculo é análogo e solução é a mesma a menos de sinal. Agora, substituindo na expressão (4.2) temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix\xi}}{y-x}dx = i\pi\mathrm{sgn}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}$$

e finalmente, substituindo em (A.3), temos

$$(\mathscr{H}\phi)\hat{}(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\left(i\pi\mathrm{sgn}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\right)dy = i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{\phi}$$

A tabela abaixo contém algumas das propriedades, já mencionadas, e aplicações da transformada de Hilbert a funções elementares

	$f(x)$	$(\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)(y-x)^{-1}dx$
(1)	$f(x)$	$g(y)$
(2)	af	$a\,(\mathscr{H}f)$
(3)	$\mathscr{H}f$	$-f$
(4)	$f(ax)$	$sing(a)\,(\mathscr{H}f)\,(ay)$
(5)	$f(x+a)$	$\mathscr{H}f(y+a)$
(6)	$(x^2+a^2)^{-1}$ Re $a>0$	$-\dfrac{y}{a(y^2+a^2)}$

Referências Bibliográficas

[1] AMICK, C. J. and TOLAND,J.F. Uniqueness of Benjamin's solitary wave solution of the Benjamin-Ono equation. J. Inst. Math. Anal. Appl.1990, To appear.

[2] AMICK, C. J. and TOLAND,J.F. Uniqueness and related analytic properties of the Benjamin-Ono equation-a nonlinear boundary-value problem in the plane. Acta Math. 1990, to appear.

[3] ONO H.Algebric solitary waves in stratified fluids, J. Phys. Soc. Japan, Vol 39, n.4, (1975), 1082-1091.

[4] PROTTER, M.H.,and WEINBERGER, H. F. 1967. Maximum Principles for Differential Equations. Englewood Cliffs, N. J. :Prentice-Hall.

[5] TRUDINGER, N. S, and GILBARG, D. Elliptical Partial Diferential Equations of Second Order, (2nd ed), Springer, 1983.

[6] IÓRIO, R. J. e MAGALHÃES, V. I., Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução, Projeto Euclides, CNP_q,(1988).

[7] SOTOMAYOR, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, CNP_q,(1979).

[8] STEIN, E. M., "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press.Princeton, New Jersey (1970).

[9] SNEDDON, I. H., The use of integral Transforms, McGraw-Hill. (1972).

[10] EVANS L. C.,Partial Differential Equations, American Math. Society. v. 19, (1998)