

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

WELLINGTON DE QUEIROZ NEVES

**METAMATERIAIS: A FÍSICA DO MANTO DE INVISIBILIDADE DE  
HARRY POTTER**

FORTALEZA

2010

WELLINGTON DE QUEIROZ NEVES

**METAMATERIAIS: A FÍSICA DO MANTO DE INVISIBILIDADE DE  
HARRY POTTER**

Trabalho de final de curso submetida à Coordenação do Curso de Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Araujo Silva

FORTALEZA

DEZEMBRO, 2010

WELLINGTON DE QUEIROZ NEVES

**METAMATERIAIS: A FÍSICA DO MANTO DE INVISIBILIDADE DE  
HARRY POTTER**

Esta monografia foi julgada para a obtenção do grau de Bacharel em Física, e aprovada em sua forma final pela Coordenação do Curso de Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará.

**Aprovada em** 10 / 12 / 2010

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Marcos Antonio Araujo Silva (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará - UFC

---

Prof. Dr. Paulo de Tarso Cavalcante Freire.  
Universidade Federal do Ceará - UFC

---

Prof. Dr. Alejandro Pedro Ayala  
Universidade Federal do Ceará - UFC

*“À Deus pelas infinitas bênçãos e a meus Familiares pelo apoio incondicional”*

## AGRADECIMENTOS

À Deus pela força concedida nas horas mais tenebrosas e por saber me escutar nos momentos em que não conseguia pronunciar nenhuma palavra. Obrigado pela saúde, ânimo e por mais esta etapa que se conclui.

À minha Mãe **Edinelda** pelo exemplo de perseverança (a maior lição que aprendi na minha vida). Obrigado pela formação pautada de honestidade, humildade respeito e princípios morais. Sem seu apoio jamais teria alcançado meu objetivo.

Aos meus irmãos: **Washington, Cristina e Cristiane** pelas palavras de incentivo e pelas passagens também;

Aos meus Familiares, em especial ao **Erivaldo**, por acreditarem no meu trabalho.

Aos amigos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho;

Aos amigos da turma de graduação, não citarei nomes por correr o risco de esquecer alguém.

Aos zeladores e funcionários do Departamento de Física.

Ao professor Dr. Nildo Loiola Dias, pelo projeto que participei ao longo de toda a graduação (Monitoria de Física);

Ao professor Dr. Marcos Antonio Araujo Silva, pela orientação no desenvolvimento desse trabalho. Agradeço pela paciência e discussões construtivas;

À PROGRAD-UFC/PID pela bolsa de monitoria.

*“... A luz é a sombra de Deus.”*  
*(Einstein)*

## RESUMO

O manto da invisibilidade tem atraído a atenção tanto de cientistas como de leigos, isso devido à frequência com que este tema aparece nos contos e filmes de ficção científica. Neste trabalho, mostramos que é possível a existência de uma capa que possa tornar pequenos objetos invisíveis. Antes de analisar fisicamente as propriedades deste manto, nós fazemos uma breve passagem sobre o eletromagnetismo clássico, verificando as interações da matéria com as ondas eletromagnéticas. Como proposto pelo físico Veselago em 1968, nós inserimos valores negativos da permissividade elétrica e permeabilidade magnética nas equações de Maxwell, produzindo teoricamente os metamateriais. Analisamos as transformações ópticas com a intenção de manipular as ondas eletromagnéticas, possibilitando assim, a existência do manto da invisibilidade.

**PALAVRAS-CHAVES:** Metamateriais; Eletromagnetismo; Transformações Ópticas.

## **ABSTRACT**

The cloak of invisibility has attracted the attention of both scientists and laymen, that is due to the frequency with which this theme appears in the tales and science fiction films. In this work, we show that it is possible that there is a cloak that can make small objects invisible. Before analyzing the physical properties of this cloak, we make a brief passage on classical electromagnetism, verifying the interactions of matter with electromagnetic waves. As proposed by physicist Veselago in 1968, we inserted the negative values of electric permittivity and magnetic permeability in Maxwell's equations, theoretically producing metamaterials. We analyze the optical changes with the intention of manipulating electromagnetic waves, thus enabling the existence of the cloak of invisibility.

**KEYWORDS:** Metamaterials; Electromagnetism; Optics Transformations.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01 – Uma superfície em forma cilíndrica na interface entre dois meios .....	15
Figura 02 – Trajetória retangular, na interface entre dois meios .....	16
Figura 03 – Orientação dos vetores: intensidade magnética $\mathbf{H}$ , campo elétrico $\mathbf{E}$ e vetor de propagação $\mathbf{k}$ .....	24
Figura 04 – Orientação do vetor de Poynting .....	27
Figura 05 – Orientação de $\mathbf{E}$ , $\mathbf{H}$ e $\mathbf{k}$ num material com $\varepsilon > 0$ e $\mu > 0$ [CUI, 2010] ..	30
Figura 06 – Orientação de $\mathbf{E}$ , $\mathbf{H}$ e $\mathbf{k}$ num material com $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$ [CUI, 2010] ...	30
Figura 07 – Orientação dos raios: 1) Raio incidente; 2) raio refletido; 3) raio refratado para substância direita; 4) raio refratado para uma substância “canhota” [CUI, 2010]. .....	31
Figura 08 – O ponto de luz divergente, incidindo sobre uma lamina de material com índice de refração negativo [PENDRY; 2000] .....	32
Figura 09 – Trajetória de um raio em um meio com $n < 0$ . Ilustração computadorizada. ....	33
Figura 10 – a) Orientação dos vetores $\mathbf{S}$ e $\mathbf{k}$ quando $\varepsilon > 0$ e $\mu > 0$ ; b) orientação dos mesmos vetores quando $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$ [VESELAGO, 1968] .....	34
Figura 11 – a) Reflexão da luz que se propaga num material com $\varepsilon > 0$ e $\mu > 0$ , b) Reflexão da luz que se propaga num material com $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$ . ....	36
Figura 12 – a) Efeito Doppler em um material com $\varepsilon > 0$ e $\mu > 0$ , b) Mesmo efeito numa subs- tância com $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$ . ....	37
Figura 13 – a) Polarização simétrica, b) polarização assimétrica. ....	39
Figura 14 – Ângulo entre a radiação de Cerenkov e a direção do movimento da partícula .....	39
Figura 15 – a) Efeito Cerenkov numa “substância direita”, b) O mesmo efeito numa “substância esquerda”. ....	40
Figura 16 – a) sistema de coordenadas cartesiano; b) sistema modificado. ....	43
Figura 17 – Trajetória dos raios contornando o objeto camuflado. ....	46
Figura 18 – Sistema de coordenadas esféricas. ....	47

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\nabla \cdot$  - Divergente de
- $\mathbf{D}$  - Vetor deslocamento elétrico
- $\rho$  - Densidade de carga elétrica
- $\mathbf{B}$  - Indução magnética
- $\nabla \times$  - Rotacional de
- $\mathbf{E}$  - Campo elétrico
- $\mathbf{H}$  - Intensidade magnética
- $\mathbf{J}$  - Densidade de corrente elétrica
- $g$  - Condutividade elétrica
- $\varepsilon$  - Permissividade elétrica
- $\mu$  - Permeabilidade magnética
- $\nabla^2$  - Laplaciano
- $\varepsilon_0$  - Permissividade do vácuo
- $\mu_0$  - Permeabilidade do vácuo
- $c$  - Velocidade da luz
- $n$  - Índice de refração
- $j$  - Número complexo
- $\omega$  - Frequência angular
- $\mathbf{k}$  - Vetor de propagação ou vetor de onda

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
<b>1. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS</b> .....	<b>14</b>
1.1 Equações de Maxwell .....	14
1.2 Condições de contorno sobre os campos .....	15
1.3 Equação de onda .....	17
1.4 Casos particulares de uma onda em um meio não condutor .....	19
1.5 Índice de refração .....	21
1.6 Solução para H e E no vácuo e em um meio material .....	21
1.7 Onda eletromagnética em um meio convencional .....	23
1.8 Lei de Snell .....	27
1.9 Vetor de Poynting .....	27
<b>2. METAMATERIAIS</b> .....	<b>28</b>
2.1 Breve história dos metamateriais .....	28
2.2 Orientação dos vetores H, k e E em um meio material com $\epsilon > 0$ e $\mu > 0$ ...	29
2.3 Orientação dos vetores H, k e E em um meio material com $\epsilon < 0$ e $\mu < 0$ ...	30
2.4 Refração de uma substância com índice de refração negativo e com $\epsilon < 0$ e $\mu < 0$ .....	30
<b>3. MATERIAL NATURAL <i>VERSUS</i> METAMATERIAL</b> .....	<b>34</b>
3.1 Propriedades da matéria convencional/metamaterial .....	34
3.2 Velocidade da onda e vetor de Poynting .....	34
3.3 Pressão de radiação .....	35
3.4 Efeito Doppler .....	36
3.5 Radiação de Cherenkov .....	38
<b>4. O MANTO DA INVISIBILIDADE</b> .....	<b>41</b>
4.1 Transformações Óticas .....	42
4.2 Exemplo de um manto da invisibilidade .....	46
4.3 Condições para um manto da invisibilidade ideal .....	50
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>51</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>53</b>

## INTRODUÇÃO

A permissividade elétrica e a permeabilidade magnética são duas constantes características de um material, e que normalmente são dependentes da frequência, e também, dependendo dos valores destas o meio material permitirá ou não a propagação de ondas eletromagnéticas. Assim, a transparência da água no visível deve-se aos sinais destas duas grandezas serem positivas, o que possibilita que a luz se propague no interior da água.

Em 1968, o físico russo Veselago [VESELAGO, 1968] realizou estudos teóricos que mostraram que, uma onda plana monocromática pode se propagar em um meio onde a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética são simultaneamente negativas. A direção do vetor de Poynting, nesse meio, é antiparalelo à direção da velocidade de fase, ou seja, as ondas que se propagam neste meio são ondas regressivas, contrariamente ao caso da propagação de ondas planas nos meios simples convencionais.

No decorrer deste trabalho faremos um estudo teórico demonstrando algumas das propriedades dos metamateriais (materiais que possuem  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ ); estes meios permitem obter novos efeitos eletromagnéticos tais como refração anômala, radiação de Cherenkov e efeito Doppler inverso.

O índice de refração negativo não exprime a natureza destes meios. O produto das constantes do meio é positivo, não sendo assim evidente que o índice de refração seja negativo. Esta escolha de sinal só faz sentido para valores complexos da grandeza. Assim, não se trata de um índice de refração negativo trata-se, mais propriamente, de um índice de refração com parte real negativa. Por outro lado, a designação de um meio levógiro, apesar de fazer sentido no contexto da relação do triedro “constante de propagação, campo magnético e campo elétrico”, pode induzir alguma confusão num contexto de meios quirais.

Em 1999 Pendry [PENDRY, 1999] sugere uma estrutura periódica que permite exibir valores de  $\mu$  negativos para frequência próxima da ressonância. A obtenção de um metamaterial com  $\epsilon < 0$  é possível com um arranjo de fios metálicos dispostos periodicamente, de modo a apresentar um comportamento similar a um plasma frio. Os fios simulam um conjunto de cargas afastadas, correspondendo aos íons de um plasma real.

Através das transformações óticas proposta em 2006 pelo físico Pendry [PENDRY, 2006], faremos um tratamento teórico sobre a capa da invisibilidade. Conforme proposto, estas transformações devem fazer os raios fluírem ao redor do objeto, da mesma forma que um rio consegue contornar um objeto que esteja imerso nele. As manipulações que faremos nos campos eletromagnéticos, para construir o manto da invisibilidade não violam as leis da física, pois ao aplicar uma transformação para um novo sistema que possa fazer um raio adquirir uma trajetória curva, nas equações de Maxwell elas se tornam invariantes. Mas as constantes características devem ser redefinidas, como a permissividade elétrica, permeabilidade magnética, densidade de corrente elétrica e a densidade de carga elétrica. Na interpretação de Pendry, estas modificações que surgem devido modificação nas coordenadas é apenas uma

mudança nos parâmetros eletromagnético, quando consideramos um material convencional; Porém, quando consideramos os metamateriais, os parâmetros modificados tornam-se as características do metamaterial em um sistema real [PENDRY, 2006].

No final, abordaremos as propriedades que deverão ter um manto no formato esférico, cujo objetivo é camuflar pequenos objetos em um dado volume. Porém, veremos que a nossa capa está limitada, pois o metamaterial deve ser um meio que disperse a frequência, o que restringe seu funcionamento apenas para uma dada frequência. Não mencionaremos neste trabalho as estruturas para a construção de um meio metamaterial, limitaremos apenas em mostrar a base teórica destas substâncias, ou seja, a física do manto de invisibilidade do bruxinho Harry Potter.

Vários grupos de investigação estão, por todo o mundo, a estudar variados aspectos desta classe de metamateriais e várias idéias e sugestões para futuras aplicações destes materiais têm sido propostas para camuflagem de aviões, “lentes perfeitas”, antenas planas com foco, dentre outras.

Não poderíamos deixar de falar que a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética são grandezas físicas que dependem da frequência, portanto, pode existir algum material natural que seja normal numa dada frequência e metamaterial em outra. Particularmente, para materiais dielétricos a propriedade relevante é a permissividade elétrica que está relacionada à resposta dielétrica do meio. Esse fato tem levado os pesquisadores a analisarem as propriedades ópticas de algum material normal em novas frequências para inferir sua metamaterialidade, ou mesmo aproveitando a anisotropia de cristais para esse fim. Por exemplo, Rodrigues da Silva [SILVA, 2010] e outros observaram a resposta negativa de fônons em cristais de quartzo numa região de pouca absorção óptica, um comportamento de metamaterial.

# 1. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

“... isso porque na pedra magnética Deus altíssimo depositou um mistério que a faz ser amada pelo ferro”  
Livro das mil e uma noites

## 1.1. Equações de Maxwell

Até metade do século XIX acreditava-se que os fenômenos da eletricidade e do magnetismo eram totalmente distintos, quando em 1860 o físico escocês, James Clerk Maxwell (1831-1879) deu sua maior contribuição para a ciência. Maxwell conseguiu unir, em um conjunto de quatro equações fundamentais a descrição de todos os fenômenos da eletricidade do magnetismo e da óptica. Esta unificação ficou conhecida como *eletromagnetismo*. Para realizar isso, ele postula sem evidência experimental o complemento simétrico da lei de indução de Faraday: a lei de indução de Maxwell. A primeira lei diz que um campo magnético variável produz um campo elétrico; a segunda, que um campo elétrico variável gera um campo magnético [REITZ; 1988]. Desde então, nenhum fenômeno eletromagnético foi descoberto, que não obedeça a este conjunto de equações mais as condições de contorno para a forma diferencial, juntamente também com a expressão da força de Lorentz. As expressões de todo o eletromagnetismo podem ser vistas abaixo, na forma diferencial (equações 1.1a, 1.1b, 1.1c, e 1.1d) (mais compacta) e na forma integral (equações 1.1a', 1.1b', 1.1c', e 1.1d').

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1d)$$

Na forma integral, estas equações tornam-se

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q \quad (1.1a')$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (1.1b')$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.1c')$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.1d')$$

Onde  $\mathbf{D}$  é o vetor deslocamento elétrico,  $\rho$  a densidade de carga elétrica,  $\mathbf{B}$  representa o campo magnético,  $\mathbf{E}$  campo elétrico,  $\mathbf{H}$  indica o vetor intensidade magnética e  $\mathbf{J}$  a densidade de corrente elétrica.

Essas equações são perfeitamente gerais, no sentido de que são válidas também para meios não homogêneos, não lineares e não isotrópicos. Cada uma destas equações representa uma generalização de certas observações experimentais. As Eqs. (1.1a e 1.1a') representam a lei de Gauss; as Eqs.(1.1b e 1.1b') representam a lei de Gauss do magnetismo pelo fato de que até hoje nunca foi observado monopólo magnético, o fluxo do vetor indução magnético é sempre nulo; as Eqs.(1.1c e 1.1c') representam a lei de Faraday da indução eletromagnética; e as Eqs.(1.1d e 1.1d') são uma extensão da lei de Ampère, contribuição do próprio Maxwell ao eletromagnetismo.

## 1.2. Condições de contorno sobre os campos

Quando a situação envolver diferentes meios materiais, algumas condições sobre os campos devem ser obedecidas na interface entre os dois meios. Estas condições de contorno podem ser deduzidas a partir das equações de Maxwell, e podem ser mais facilmente analisadas, quando trabalhamos com as equações em sua forma integral [REITZ; 1988].

A primeira condição aplica-se ao campo magnético  $\mathbf{B}$ , que aparece na equação (1.1b'), esta diz que: o fluxo da indução magnética em uma área fechada é nulo. Podemos construir uma caixa cilíndrica na fronteira entre os dois meios, como mostra a Figura 01, e calcular o fluxo do vetor indução magnética sobre este volume.

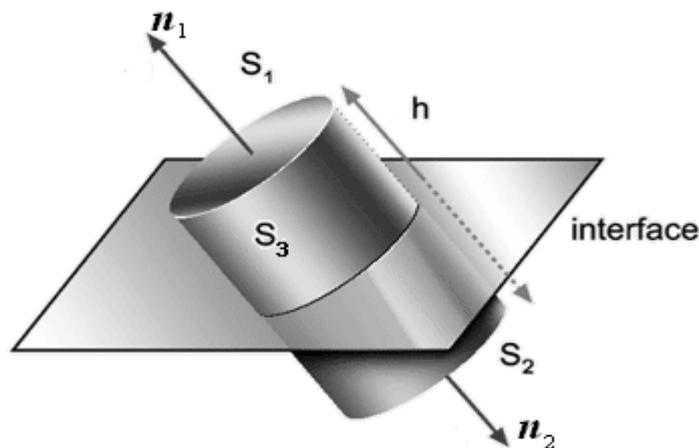


Figura 01 – Uma superfície em forma cilíndrica na interface entre dois meios.

A integral sobre toda área pode ser decomposta em três integrais, cada integral correspondendo às áreas  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ . Como estamos interessados em saber o que acontece com o campo  $\mathbf{B}$  na interface, consideremos o limite quando a altura do cilindro tende para zero, o que leva a anular o fluxo sobre as laterais, admitindo que  $\mathbf{B}$  seja limitado. Mas os vetores

normais às bases do cilindro têm sentidos opostos, concluimos que a componente normal da indução magnética é contínua, ou seja,  $\mathbf{B}_1^n = \mathbf{B}_2^n$ , ou ainda

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0. \quad (1.2)$$

Da Eq. (1.1c') obtemos as condições de contorno do campo elétrico  $\mathbf{E}$ . Calculando esta integral de linha sobre o circuito como pode ser vista na Figura. 02.

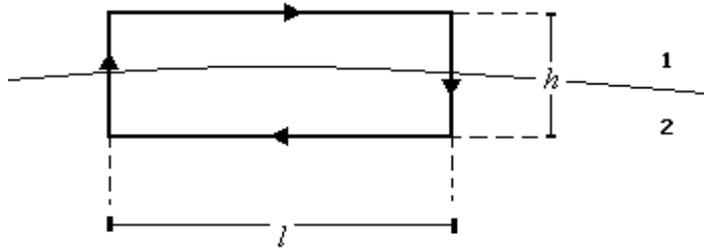


Figura 02 – Trajetória retangular, na interface entre dois meios.

Fazendo a integral de linha em quatro parcelas, uma para cada lado do retângulo, e fazendo a largura do circuito se aproximar de zero, e aplicando a condição de que a derivada temporal de  $\mathbf{B}$  seja limitado isso fará o lado esquerdo da equação (1.1c') se anular, então a componente tangencial do campo elétrico será contínua, ou seja,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (1.3)$$

Calculando o fluxo de  $\mathbf{D}$  Eq.(1.1a') na caixa de pílula da figura (01), podemos separar o lado esquerdo desta equação em três, uma integral para cada base e uma para a lateral da caixa de pílula. Fazendo o limite quando a altura tende a zero ( $h \rightarrow 0$ ) não haverá fluxo da componente tangencial de  $\mathbf{D}$  na lateral, o que anula uma integral. Porém o vetor normal a cada base tem sentidos contrários, ou seja,  $(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)A = Q$ , onde  $A$  é a área da base. Encontramos que, a componente normal do vetor deslocamento tem uma descontinuidade na interface, e é igual à densidade de carga na superfície, como mostra a equação (1.4).

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma \quad (1.4)$$

Em um caso específico onde a densidade é nula  $\sigma = 0$ , temos uma continuidade da componente normal do vetor deslocamento elétrico.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \quad (1.5)$$

A última condição de contorno é aplicada sobre o vetor intensidade magnética, podemos obtê-la partindo da Eq.(1.1d') e usando novamente a Figura 02 como *Circuito Amperiano*, onde a integral de linha será calculada. Na Figura 02, no limite quando ( $h \rightarrow 0$ ), consideramos que o vetor deslocamento elétrico é limitado, então a última integral será nula. Assim, temos  $(\mathbf{H}_1^t - \mathbf{H}_2^t)l = I$ , onde  $I$  é a corrente que está passando dentro do circuito amperiano. A descontinuidade da componente tangencial do vetor intensidade magnética é igual à densidade de corrente elétrica perpendicular à componente do campo que está sendo tratada, ou seja,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_\perp. \quad (1.6)$$

A densidade  $\mathbf{j}_\perp$  aparece quando se divide a corrente pelo comprimento  $l$  do retângulo, e representa uma corrente finita numa camada infinitesimal. A corrente superficial é nula exceto para uma condutividade infinita. Para um meio com condutividade finita, temos

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0. \quad (1.7)$$

Isto é, caso a condutividade não seja infinita, teremos uma continuidade na componente tangencial de  $\mathbf{H}$ .

### 1.3. Equação de onda

Uma das predições mais importantes da formulação de James Clerk Maxwell quando unificou a eletricidade, o magnetismo e a óptica, é a existência de ondas eletromagnéticas. Podemos deduzir a partir do conjunto de equações (1.1) que o campo magnético e campo elétrico satisfazem à equação de uma onda. Se o campo elétrico e o campo magnético oscilam conjuntamente, então uma onda eletromagnética é produzida [REITZ; 1988].

Agora, partindo das equações (1.1), vamos demonstrar que ondas eletromagnéticas são conseqüências das equações de Maxwell. Iniciamos reescrevendo as equações (1.1) na forma diferencial abaixo

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1d)$$

Calculando o rotacional da equação (1.1d)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.8)$$

Verifica-se experimentalmente para temperatura constante, que  $\mathbf{J}$  é diretamente proporcional ao campo elétrico (lei de Ohm), ou seja,

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (1.9)$$

onde,  $g$  é a condutividade elétrica; nos materiais onde a equação (1.9) é válida, chamamos de meios lineares ou meios ôhmicos.

Para materiais isotrópicos tem-se a igualdade  $\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E})\mathbf{E}$ , onde  $\varepsilon(\mathbf{E})$  é a permissividade elétrica do material, por meio de experiências achou-se que  $\varepsilon$  independe do campo elétrico, exceto para campos muito intensos, portanto a permissividade é uma constante.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.10)$$

Materiais que obedecem à equação (1.10) são chamados de dielétricos lineares. Substituindo as equações (1.9) e (1.10) na (1.8), ficamos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = g \nabla \times \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} \quad (1.11)$$

usamos a equação (1.1c) para eliminar o rotacional do campo elétrico da equação (1.11)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -g \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

Para materiais magnéticos lineares a indução magnética é proporcional ao vetor intensidade magnética, ou seja,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  onde  $\mu$  é a permeabilidade; assim a equação (1.12) fica

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

aplicando a propriedade vetorial (rotacional do rotacional) sobre um vetor  $\mathbf{X}$ , por exemplo.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{X} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}) - \nabla^2 \mathbf{X} \quad (1.14)$$

A Eq. (1.7) torna-se:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.15)$$

Mas pela equação (1.1b) temos que o divergente do campo magnético é nulo  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , porém  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  isso implica que:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{0}$$

pois  $\mu$  é constante, anulando assim o primeiro termo da Eq. (1.15). Obtemos uma equação de onda para o vetor intensidade magnética.

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.16)$$

Procedendo da mesma forma para o campo elétrico, tomando o rotacional da equação (1.1c)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.17)$$

Substituindo as equações (1.9) e (1.10) na equação (1.1d) ficamos com:

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = g\mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu g \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.18)$$

para eliminar o termo que envolve o campo magnético desta equação, derivamos em relação ao tempo os dois membros, depois aplicando na equação (1.17), o que nos leva à equação (1.19)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu g \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.19)$$

Aplicando a propriedade vetorial (rotacional do rotacional de um vetor) Eq.(1.14) do lado esquerdo da igualdade (1.19) e fazendo a restrição de que o meio não contém cargas livres de tal forma que  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ , ou seja, não há densidade de carga líquida no meio  $\rho = 0$ . Como o vetor deslocamento elétrico é proporcional ao campo elétrico Eq.(1.10) isso implica que o divergente de  $\mathbf{E}$  também é nulo, temos então:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu g \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{E} &= \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + g \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.20)$$

As equações (1.16) e (1.20) ditam o comportamento do vetor intensidade magnética e vetor campo elétrico num meio material geral. Observa-se que há uma semelhança na estrutura dessas equações.

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + g \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.16)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + g \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.20)$$

#### 1.4. Casos particulares de uma onda em um meio não condutor

Analisaremos primeiramente as equações (1.16) e (1.20) no vácuo, onde a resistência à passagem de corrente elétrica é infinita, ou seja, a condutividade é nula  $g = 0$ ; a permissividade do vácuo é  $\varepsilon_0$  e a permeabilidade magnética do vácuo é  $\mu_0$  [NUSSENZVEIG, 1997]. Levando em consideração estes dados nas equações (1.16) e (1.20), as equações para os campos ficam como mostram as equações abaixo

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.22)$$

Sabemos da mecânica clássica [NUSSENZVEIG, 2002] que a equação de uma onda que propaga com a velocidade  $v$  tem a seguinte forma

$$v^2 \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1.23)$$

Se compararmos (1.21) e (1.22) com a equação da onda Eq.(1.23), vemos facilmente que essas equações, têm a forma da equação de onda tridimensional. Isso significa que o campo elétrico e a intensidade magnética, podem se propagar com uma velocidade  $v$ .

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1.24).$$

Substituindo os valores de  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  da literatura encontramos o valor para a velocidade de propagação da onda  $c = 2,9979 \times 10^8 \text{m/s}$  que é a velocidade da luz no vácuo (costuma-se representar a velocidade da luz por  $c$ ).

Até o século XVII, a maioria das pessoas acreditava que a velocidade da luz era infinita, ou seja, ela se propagava instantaneamente, independente da distância entre dois pontos. A questão de a velocidade da luz ser finita ou não, foi discutida por Galileu Galilei (1564-1642) na sua famosa obra, *Diálogos sobre Duas Novas Ciências*, publicada em 1638. Nesta obra, Galileu relata uma experiência, feita por ele mesmo, na tentativa de encontrar o tempo que a luz levaria para percorrer um determinado percurso de ida e volta, determinando assim a velocidade da luz. Hoje, sabemos que o tempo que a luz levaria para percorrer o espaço de 1milha (1.609,35m), usada na experiência de Galileu é de apenas  $11\mu\text{s}$ , algumas ordens de grandeza menor do que o tempo de reação humana. Apesar disso, é atribuída a Galileu Galilei a primeira tentativa de medir a velocidade da luz.

Um segundo caso particular, é quando o meio material for um dielétrico e com permissividade elétrica e permeabilidade magnética valendo, respectivamente,  $\epsilon$  e  $\mu$ . Nesse caso há uma pequena mudança nas equações (1.21) e (1.22) ficando:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.25)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.26)$$

Novamente comparando com a equação de onda (1.23), vemos que mesmo num meio dielétrico, os campos: elétrico e intensidade magnética podem se propagar com uma velocidade  $v$ , dada pela Eq. (1.27)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (1.27).$$

### 1.5. Índice de refração

Tomando a razão entre a equação (1.24) e (1.27), ficamos com:

$$\frac{c}{v} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

onde,  $\epsilon_r$  ( $= \epsilon/\epsilon_0$ ) é a permissividade elétrica relativa e  $\mu_r$  ( $= \mu/\mu_0$ ) é a permeabilidade magnética relativa.

Chamando

$$\sqrt{\epsilon_r \mu_r} = n \quad (1.28)$$

$$v = \frac{c}{n} \quad (1.29)$$

a quantidade  $n$  é denominada índice de refração do meio dielétrico, e que normalmente depende da frequência da onda. Isso explica os efeitos de refração em materiais transparentes, onde cada frequência propaga-se com velocidade diferente dando origem, por exemplo, ao arco-íris.

### 1.6. Solução para $\mathbf{H}$ e $\mathbf{E}$ no vácuo e em um meio material

Iremos considerar nas nossas soluções, tanto no vácuo como num meio material qualquer, a notação dos números complexos onde,  $j = \sqrt{-1}$ . Usaremos a notação de Euler  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  para representar o termo que oscila no tempo; assim cada grandeza terá uma parte real e uma imaginária. Porém, se quisermos medir uma dada grandeza, deveremos desprezar a parte imaginária, pois o que medimos é a parte real.

As equações (1.21) e (1.22) nos dizem como os vetores intensidade magnética e o campo elétrico se comporta no vácuo. Calculamos a velocidade com que estes campos se propagam no vácuo. Queremos encontrar agora a solução para  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{E}$ , tal que as equações de onda (1.21) e (1.22) sejam verificados (no vácuo).

Seja uma onda plana monocromática (caracterizada por possuir apenas uma única frequência de propagação) e consideremos que a dependência temporal seja do tipo  $e^{-j\omega t}$ , onde  $\omega$  é a frequência angular da onda. Juntando a parte da solução com dependência temporal com a parte espacial, ficamos com as soluções do tipo

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp\{-j\omega t\} \quad (1.30)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp\{-j\omega t\}. \quad (1.31)$$

Para encontrar a parcela espacial, devemos aplicar as Eqs. (1.30) e (1.31) nas respectivas equações (1.21) e (1.22); ficaremos então com:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E},$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{H} = 0 \quad (1.32)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = 0. \quad (1.33)$$

O fator  $e^{-j\omega t}$  foi omitido por ser um fator comum aos dois membros da igualdade.

Estas equações são bem conhecidas pelos físicos como equação de Helmholtz, que é matematicamente a mesma que a do oscilar harmônico, e tem as soluções:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H} \exp\{\pm j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} \exp\{\pm j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\} \quad (1.35)$$

onde,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são vetores constantes. A grandeza  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda que dá a direção de propagação da onda, e seu módulo vale

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0. \quad (1.36)$$

Substituindo a Eq.(1.24) na (1.36), ficamos com o módulo do vetor de propagação da onda no vácuo Eq.(1.37), obtemos

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.37)$$

Logo, a solução completa que descreve a forma como o campo eletromagnético de uma onda monocromática se comporta no espaço vazio, é dada pelas equações abaixo:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \exp\{-j(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} \quad (1.38)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp\{-j(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}, \quad (1.39)$$

onde,  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  e os sinais  $\pm$  são as direções opostas de propagação.

Para encontrar as soluções das Eqs. (1.25) e (1.26), quando o meio é um material qualquer, com permissividade elétrica  $\varepsilon$  e permeabilidade magnética  $\mu$ , devemos proceder da mesma forma que fizemos para o caso particular, onde o meio era o vácuo. Porém, além da diferença entre os meios, há uma diferença no vetor de propagação  $\mathbf{k}$ . Neste caso as Eqs. (1.32) e (1.33) ficam

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{H} = 0 \quad (1.40)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} = 0, \quad (1.41)$$

Como vimos anteriormente, a parte espacial das soluções, é:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H} \exp \{ \pm j \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} \} \quad (1.42)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} \exp \{ \pm j \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} \} \quad (1.43)$$

o módulo de  $\mathbf{k}'$  é

$$k'^2 = \omega^2 \varepsilon \mu. \quad (1.44)$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da Eq.(1.44) por  $\varepsilon_0 \mu_0$ , ficamos com  $k'^2 = \omega^2 \frac{\varepsilon \mu (\varepsilon_0 \mu_0)}{\varepsilon_0 \mu_0}$ , usando a Eq.(1.24)  $k'^2 = \omega^2 \frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0 c^2}$  ou melhor  $k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \mu_r$ ; levando em conta a definição do índice de refração Eq.(1.28), temos o módulo do vetor de propagação da onda eletromagnético

$$k'^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \quad (1.45)$$

Assim, a solução geral que dita como o campo eletromagnético se comporta em um meio material qualquer, é dado pelas Eqs. (1.46) e (1.47)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \exp \{ -j(\omega t \mp \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp \{ -j(\omega t \mp \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \}, \quad (1.47)$$

onde  $k'^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}$ .

## 1.7. Onda eletromagnética em um meio convencional

Considere uma onda eletromagnética plana incidindo obliquamente sobre dois meios homogêneos, isotrópicos e não condutores ( $\mathbf{J} = 0$ ) e com densidade de carga nula; os índices de refração  $n_1$  e  $n_2$  para os respectivos meios. A onda incidente faz um ângulo  $\theta_1$  com a normal à interface. O vetor normal  $\mathbf{n}$  tem o sentido de  $-\hat{\mathbf{k}}$ , onde  $\hat{\mathbf{k}}$  é o vetor unitário que aponta para o sentido positivo de  $z$ .

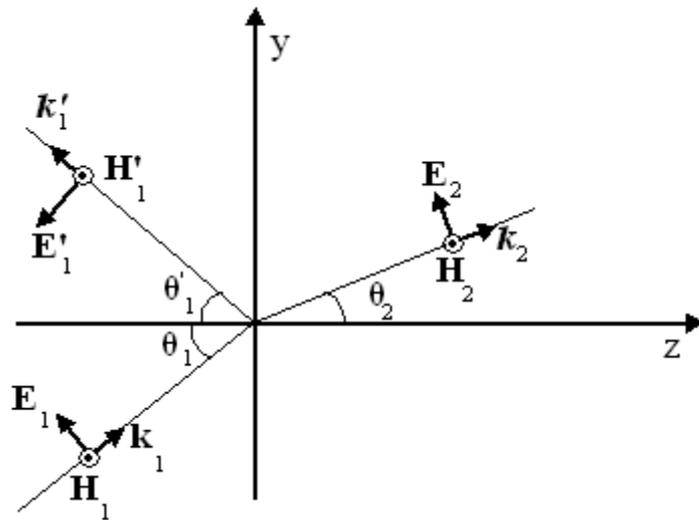


Figura 03 – Orientação dos vetores: intensidade magnética  $\mathbf{H}$ , campo elétrico  $\mathbf{E}$  e o vetor de propagação  $\mathbf{k}$ .

A experiência nos diz que, além do raio incidente, teremos mais outros dois: um chamado de raio refletido, a parcela que volta ao mesmo meio da onda incidente, e a outra chamada de raio refratado (a parte que passou para outro meio diferente daquele do raio incidente).

Sem perda de generalidade, supomos que as três ondas estão no mesmo plano ( $yz$ ). Das equações de Maxwell chegamos a uma forma das ondas incidente, refletida e refratada dadas, respectivamente, pelas equações (1.48), (1.49) e (1.50) mostradas na Figura 03.

$$\mathbf{E}_1 = \widehat{\mathbf{E}}_{1P} \exp\{j(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)\} \quad (1.48)$$

$$\mathbf{E}'_1 = \widehat{\mathbf{E}}'_{1P} \exp\{j(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} - \omega'_1 t)\} \quad (1.49)$$

$$\mathbf{E}_2 = \widehat{\mathbf{E}}_{2P} \exp\{j(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)\} \quad (1.50)$$

Os vetores intensidade magnética estão representado na Figura 03 de tal forma que seu sentido é aquele saindo do plano da folha (perpendicular ao plano de incidência  $yz$ ). As grandezas  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\mathbf{k}_3$  são os vetores de propagação.

A condição de contorno sobre o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , diz que a componente tangencial do campo elétrico será contínua, ou melhor,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (1.3)$$

A Eq. (1.3) implica que, na fronteira ( $z = 0$ ), a soma da onda incidente mais a onda refletida será igual, à onda refratada.

$$\widehat{\mathbf{E}}_{1P} \exp\{j(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)\} + \widehat{\mathbf{E}}'_{1P} \exp\{j(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} - \omega'_1 t)\} = \widehat{\mathbf{E}}_{2P} \exp\{j(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)\} \quad (1.51)$$

A igualdade (1.51) deve ser válida para qualquer tempo e para qualquer ponto  $\mathbf{r}$  na interface; isso só pode ser verdade se as frequências da onda incidente, refletida e refratada tiverem o mesmo valor, ou seja,

$$\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2 \quad (1.52)$$

as fases também devem ser iguais, para que Eq.(1.51) seja verificada na fronteira.

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} \quad (1.53)$$

usando a igualdade vetorial:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r} \quad (1.54)$$

para qualquer ponto localizado na fronteira dos dois meios temos que,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$ , ficamos então com:

$$-\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \quad (1.55)$$

substituindo esta equação acima na Eq.(1.53), obtemos.

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{k}_1 \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})]$$

pela propriedade do produto vetorial misto, onde é possível permutar as operações vetoriais, produto escalar pelo produto vetorial. Então:

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = -(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \quad (1.56)$$

o mesmo vale para os outros vetores de propagação, ou seja,

$$(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{k}'_1 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \quad (1.57)$$

a igualdade será sempre válida na interface para qualquer ponto  $\mathbf{r}$  que esteja na fronteira, concluímos que

$$(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}) = (\mathbf{k}'_1 \times \mathbf{n}) = (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}), \quad (1.58)$$

ou seja, os vetores de propagação da onda incidente, refletida e transmitida são todos coplanares, e o plano que contém os três vetores designa-se por plano de incidência.

Voltando novamente à Eq.(1.58), porém, calculando o módulo de cada produto vetorial, encontramos uma relação entre os vetores de propagação e os ângulos. Como mostra o conjunto de equações abaixo.

$$|\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}| = k_1 \sin \theta_1 \quad (1.59 \text{ a})$$

$$|\mathbf{k}'_1 \times \mathbf{n}| = k'_1 \sin \theta'_1 \quad (1.59 \text{ b})$$

$$|\mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}| = k_2 \sin \theta_2 \quad (1.59 \text{ c})$$

Tendo em vista que a Eq.(1.58) é verdadeira, então podemos igualar (1.59 a) com (1.59 b), e que os vetores de propagação dependem tanto do índice de refração como da frequência Eq.(1.45) Uma vez que a onda refletida retorna ao mesmo meio da onda incidente, e que as frequências são as mesmas, como mostramos anteriormente (1.52); vemos assim que  $k_1 = k'_1$  disto concluímos que:

$$\begin{aligned}\sin \theta_1 &= \sin \theta'_1 \\ \theta_1 &= \theta'_1\end{aligned}\tag{1.60}$$

O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

### 1.8. Lei de Snell

Para encontrar uma relação entre os índices de refração desses meios e os ângulos de incidência e de refração, igualando as equações (1.59a) com a (1.59c)

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$$

e substituindo a raiz quadrada da Eq.(1.45) nesta, obtemos:

$$\frac{n_1 \omega}{c} \sin \theta_1 = \frac{n_2 \omega}{c} \sin \theta_2;$$

cancelando os fatores iguais nos dois membros,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.\tag{1.61}$$

Da Eq.(1.61) concluímos que, quando uma onda eletromagnética atravessa a superfície que separa dois meios de índice de refração iguais ou diferentes, a quantidade  $n \sin \theta$  é conservada. Esta lei de conservação é conhecida por *lei de Snell*. As leis da reflexão de Snell são absolutamente gerais. São válidas para quaisquer dois meios homogêneos, isotrópicos, lineares e estacionários, sejam eles condutores ou não [LORRAIN, 1988].

### 1.9. Vetor de Poynting

O fluxo de energia por unidade de tempo e por unidade de área que atravessa uma superfície é descrito pelo vetor de Poynting, denominação dada em homenagem ao físico *John Henry Poynting* (1852-1914). A direção deste vetor é a do vetor de propagação de onda, seu módulo e sentido é definido pela equação (1.62)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.\tag{1.62}$$

Representam-se os vetores  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , como apresentado na Figura 04.

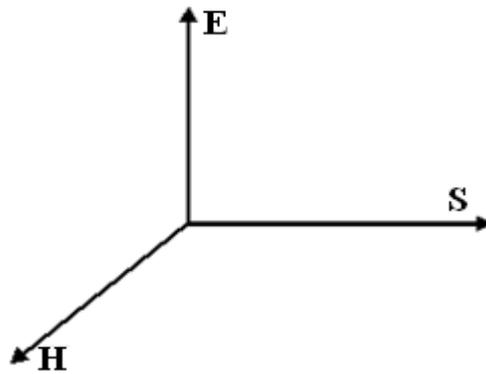


Figura 04 – Orientação do vetor de Poynting.

Uma vez que a equação (1.62) independe da permissividade elétrica e da permeabilidade magnética, concluímos que o sistema formado por estes três vetores sempre formam um conjunto dextrógiro, seja qual for o material sempre obedecerá à regra da mão direita.

## 2. METAMATERIAL

*“O belo é uma manifestação de leis secretas da natureza,  
que, se não se revelassem a nós por meio do belo,  
permaneceriam eternamente ocultas”.*  
(Johann Goethe)

### 2.1. Breve História dos Metamateriais

A primeira dedução da expressão analítica para o índice de refração, só foi conseguida, em 1865 pelo físico e matemático, James Clerk Maxwell. Depois de fazer várias manipulações com suas quatro equações fundamentais, Maxwell conseguiu demonstrar que uma perturbação eletromagnética deverá se propagar em um meio com constantes características  $\epsilon$  e  $\mu$ , isso porque os campos elétrico e magnético obedecem à equação de onda. Em suas Análises, tinha um termo que dependia das constantes características do material, que foi definido como índice de refração.

A velocidade com que uma perturbação eletromagnética se propaga em um meio qualquer, foi definida em função do índice de refração ( $n$ ), ou seja,  $v = c/n$ . Sendo assim, uma onda se propaga com maior velocidade em meios com índice de refração menores.

Para analisar os possíveis valores para  $n$ , podemos pensar que, o produto das duas constantes características do material (permissividade e permeabilidade) deverá ser igual ao quadrado do índice de refração. Porém, como  $n$  está elevado à segunda potência, há duas possibilidades para este índice, seu valor poderá ser tanto positivo quanto negativo, ou seja,  $n = \pm\sqrt{\epsilon\mu}$ . Até então, o sinal positivo do índice de refração sempre teve maior ênfase no eletromagnetismo clássico, o valor negativo foi sempre desprezado. Em 1968, o físico russo Victor G. Veselago [VESELAGO, 1968] considerou, pela primeira vez, o sinal negativo (-) que aparece na expressão para  $n$ . A proposta de Veselago foi incluir uma hipótese de que em materiais com  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ , seria possível obter o índice de refração negativo, e chamou esses materiais de *Metamaterias*.

Quando uma onda eletromagnética incide num meio com  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ , os elétrons se movimentam em um sentido contrário à força aplicada pelo campo elétrico e pelo campo magnético da onda incidente. Independente de o material ser convencional ou metamaterial o vetor de Poynting sempre formará um sistema dextrógiro com os vetores  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . Porém quando se insere os valores de  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$  nas equações de Maxwell, vemos que a velocidade de grupo da onda tem o sentido contrário ao vetor que indica o “fluxo de energia”. Estas são apenas algumas características dos metamateriais mostrada no trabalho de Veselago.

Até então, as propostas de Victor G. Veselago não passavam de uma fundamentação teórica, quando em 1996, físico inglês John B. Pendry [PENDRY, 1996] observaram que estruturas microscópicas de circuitos elétricos, poderiam adquirir a propriedades eletromagnéticas interessante, como o índice de refração negativo. Pendry concluiu que, estas estruturas

poderiam ser usadas para focalizar raios de luz, com melhor qualidade que as lentes com  $n > 0$ , ou seja, as superlentes poderiam ser criadas utilizando metamateriais. Acredita-se que provavelmente, o tema índice de refração negativo, será objeto de prêmio Nobel no futuro próximo devido às inúmeras aplicações que vem surgindo hoje em dia.

## 2.2. Orientação dos vetores $\mathbf{H}$ , $\mathbf{k}$ e $\mathbf{E}$ em um meio material com $\epsilon > 0$ e $\mu > 0$

Partiremos das equações de Maxwell para entender como o campo elétrico, o vetor intensidade magnética e o vetor de propagação, estão orientado em uma onda plana eletromagnética, quando esta se propaga num meio com permissividade elétrica e permeabilidade magnética positivas simultaneamente, e onde a densidade de carga é igual a zero.

O conjunto de equações (1.1) toma uma forma simplificada quando usamos os seguintes operadores  $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$  e  $\nabla = j\mathbf{k}$ , aplicado na solução da onda plana para  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (2.1c)$$

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \omega \mathbf{D} \quad (2.1d)$$

Os termos  $j$  e as exponenciais foram omitidos, por serem comum aos dois membros. Em todo este trabalho, estamos tratando meios lineares, isotrópicos e homogêneos, ou seja, onde as relações  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  são verificadas no material. Então o conjunto de Eqs. (2.1) nos leva às equações a seguir:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.1a')$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.1b')$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k}}{\omega\mu} \times \mathbf{E} \quad (2.1c')$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{k}}{\omega\epsilon} \times \mathbf{H} \quad (2.1d')$$

Das Eqs. (2.1a') e (2.1b') nós concluímos que os vetores campo elétrico e os vetores intensidade magnética são perpendiculares ao vetor de propagação. Na Figura 05 representamos os vetores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{k}$  de acordo como orientam as equações (2.1c') e (2.1d') para um material convencional. Observamos que esses três vetores formam, nessa ordem, um sistema dextrógiro (que obedece à regra da mão direita).

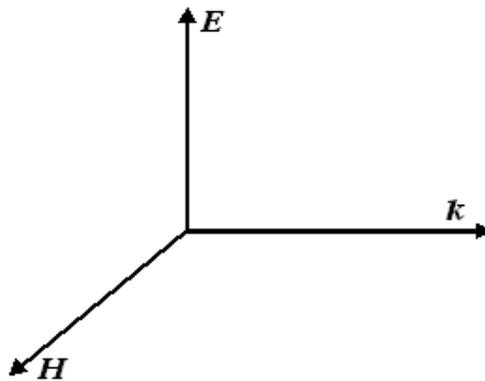


Figura 05 – Orientação de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{k}$  num material com  $\varepsilon > 0$  e  $\mu > 0$  [CUI, 2010].

### 2.3. Orientação dos vetores $\mathbf{H}$ , $\mathbf{E}$ e $\mathbf{k}$ em um meio material com $\varepsilon < 0$ e $\mu < 0$

Em um material com  $\varepsilon < 0$  e  $\mu < 0$  (metamaterial) há uma alteração nos sinais das duas últimas equações de Maxwell (2.1c') e (2.1d'), ficamos agora com

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{k}}{\omega\mu} \times \mathbf{E} \quad (2.2a')$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{k}}{\omega\varepsilon} \times \mathbf{H} \quad (2.2b')$$

Na Figura 06 temos a orientação dos vetores campo elétrico, intensidade magnética e vetor de propagação, da forma como propõe as equações (2.2a') e (2.2b').

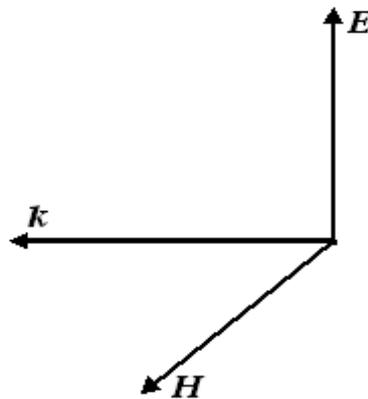


Figura 06 – Orientação de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{k}$  num material com  $\varepsilon < 0$  e  $\mu < 0$  [CUI, 2010].

Observamos que os três vetores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{k}$  formam, nessa ordem, um sistema levógiro. Chamaremos no decorrer deste trabalho, os materiais onde este sistema é satisfeito de “*substância canhota*” devido ao sistema obedecer à regra da mão esquerda.

### 2.4. Refração em um metamaterial

Analisaremos agora, o comportamento de um raio que incide sobre um metamaterial. Vamos considerar que o raio incidente, vem de um meio natural com constantes caracte-

rísticas  $\varepsilon_1$  e  $\mu_1$  positivos, e incide sobre a interface passando a se propagar em um meio com índice de refração negativo e com  $\varepsilon_2 < 0$  e  $\mu_2 < 0$ . Aplicando a lei de Snell, vista na Eq.(1.61), temos que

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \beta. \quad (1.61)$$

Da expressão (1.28), obtemos

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \beta \quad (2.3)$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \beta} = - \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}. \quad (2.4)$$

O sinal negativo aparece pelo fato de estarmos supondo que o segundo meio, é uma substância sinistra. A expressão (2.4) pode ser generalizada se fizermos

$$\frac{\sin \theta}{\sin \beta} = \frac{p_1}{p_2} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \right| \quad (2.4)$$

onde, os valores possíveis para  $p_1$  e  $p_2$  é  $\pm 1$ , positivo caso a substância seja natural e negativo para um metamaterial.

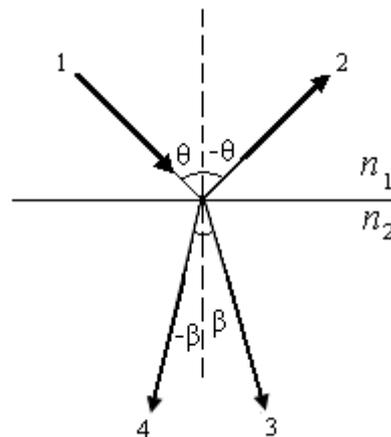


Figura 07 – Orientação dos raios: 1) Raio incidente; 2) raio refletido; 3) raio refratado para substância direita; 4) raio refratado para uma substância “canhota” [CUI, 2010].

Fazendo a convenção de que, a orientação positiva para os ângulos é aquela anti-horária; da Eq.(2.4) concluímos que se o ângulo incidente for positivo, o ângulo refratado será negativo, pelo princípio da reversibilidade da luz, o inverso também é verdadeiro. Tomando a normal como eixo de referência, então em um meio com  $n < 0$ ,  $\varepsilon_2 < 0$  e  $\mu_2 < 0$ ; o raio refratado estará sempre no mesmo lado que o raio incidente. Da igualdade (2.4) podemos verificar a trajetória do raio refratado quando a substância tem índice de refração negativo (ou positivo), como mostra a Figura 07.

Um caso interessante é quando uma onda eletromagnética passa de uma substância natural com permissividade  $\epsilon_1$  e permeabilidade  $\mu_1$ , para um segundo meio com:  $\epsilon_2 = -\epsilon_1$  e  $\mu_2 = -\mu_1$ . Das Eqs. (1.61) e (1.28), tiramos que

$$\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta = \pm \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \beta. \quad (2.5)$$

Usaremos o sinal negativo para o índice de refração do segundo meio, já que esta é uma substância “canhota”

$$\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta = -\sqrt{-\epsilon_1 (-\mu_1)} \sin \beta. \quad (2.6)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, ficamos com

$$\sin \theta = -\sin \beta. \quad (2.7)$$

Usando a relação trigonométrica, encontramos

$$\sin \theta = \sin(-\beta) \quad (2.8)$$

Neste caso particular, estamos trabalhando com os ângulos no intervalo de:  $0 < \theta < \pi/2$ , da igualdade (2.8), isso implica que  $\beta = \theta$  (sem levar em conta a orientação). Concluimos que na interface entre dois meios: “*material direito/material sinistro*”, cujas constantes características são:  $\epsilon_2 = -\epsilon_1$  e  $\mu_2 = -\mu_1$ , ou seja, com índice de refração relativo  $n = -1$ . O raio refratado fará um ângulo com a normal igual aquele feito pelo raio incidente com esta, porém com a orientação contrária a do ângulo de incidente.

A Figura 08 mostra um feixe de luz que incide sobre uma barra feita de um metamaterial, com constantes  $\epsilon_2 = -\epsilon_1$  e  $\mu_2 = -\mu_1$ , ou melhor, o índice de refração da barra  $n = -1$ .

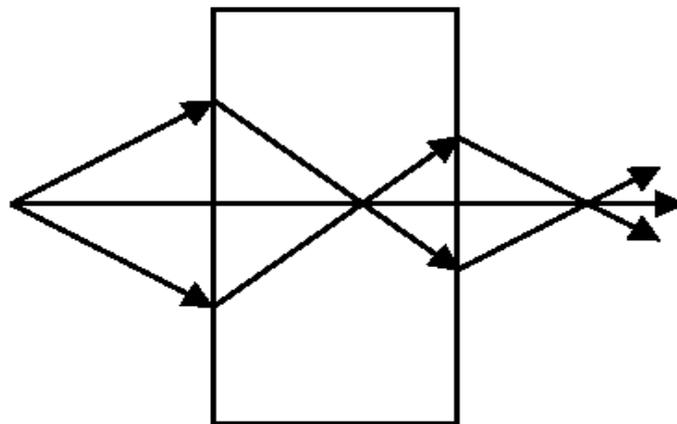


Figura 08 – O ponto de luz divergente, incidindo sobre uma lamina de material com índice de refração negativo [PENDRY; 2000].

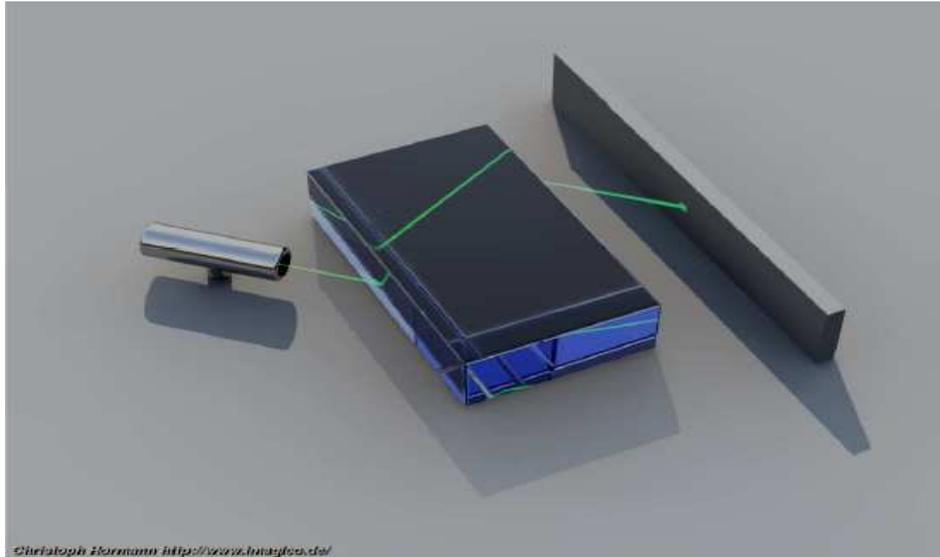


Figura 09 – Trajetória de um raio em um meio com  $n < 0$ . Ilustração computadorizada.

Um meio de índice de refração negativo desvia a luz num ângulo negativo com relação à reta normal. Assim o ponto de luz divergente volta a convergir em um ponto dentro do meio, e ao emergir do metamaterial, volta novamente a convergir em um segundo foco.

### 3. MATERIAL NATURAL *VERSUS* METAMATERIAL

*“O amor é o centro invisível de todos os atos  
e de todos os fatos”  
(Schopenhauer)*

#### 3.1. Propriedades da matéria convencional/metamaterial

Se olharmos uma colher dentro de um copo cheio de água, temos a falsa impressão de que ela está quebrada; quando nos aproximamos de uma fonte sonora que emite uma dada frequência, percebemos que o som que recebemos é mais agudo que, caso estivéssemos parado. Temos diariamente contato com as propriedades da matéria natural. Mas nunca tivemos nenhuma experiência com um material que contém o seu índice de refração negativo e os sinais da permissividade e da permeabilidade simultaneamente negativos. Apesar de muitos metais (como prata e ouro) terem o valor da permissividade negativo, nunca se encontrou  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$  (ambos negativos).

Faremos uma comparação de algumas propriedades que normalmente acontecem com a matéria natural, com as que deverá ocorrer com os metamateriais. Por estarmos acostumado com predições das equações de Maxwell, que dita o comportamento da matéria ou ondas eletromagnéticas quando se propagam em quaisquer meios, algumas destas propriedades parecerão muito estranha.

#### 3.2. Velocidade da onda e Vetor de Poynting

Se compararmos a equação que define o vetor de Poynting com as equações que ditam a orientação do vetor de propagação da onda num meio material natural, encontraremos que este vetor é paralelo ao vetor de propagação da onda. Porém, para um material com  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$  o sistema torna-se levógiro. Assim, o vetor  $\mathbf{k}$  tem o sentido contrário ao vetor  $\mathbf{S}$ , apesar de estarem na mesma direção.

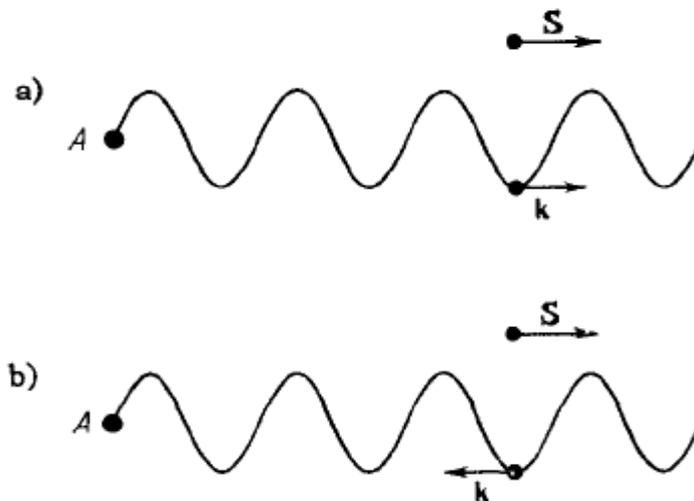


Figura 10 – a) Orientação dos vetores  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{k}$  quando  $\epsilon > 0$  e  $\mu > 0$ ; b) orientação dos mesmos vetores quando  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$  [VESELAGO, 1968].

A Figura 10 mostra a orientação do vetor  $\mathbf{S}$  para uma onda eletromagnética que se propaga num meio material natural (Figura 10-a) e num meio “esquerdo” (Figura 10-b).

Concluimos desta ilustração, que quando uma onda se propaga em um meio com os valores da permissividade e permeabilidade simultaneamente negativos, o vetor de Poynting tem o sentido contrário à velocidade de fase da onda.

### 3.3. Pressão de radiação

Consideremos uma onda eletromagnética se propagando em um meio onde os valores de  $\varepsilon$  e  $\mu$  são simultaneamente positivos (substância direita); considerando que esta onda seja a luz, então pelo princípio da dualidade onda-partícula da mecânica quântica, podemos considerá-la como constituída de pequenas partículas chamada de fótons [NUSSENZVEIG, 1998]. Cada fóton tem um momento linear  $\mathbf{p} = h\mathbf{k}$ , onde  $h$  é a constante de Planck e  $\mathbf{k}$  é o vetor de propagação, no caso de uma substância direita este vetor tem o sentido que aponta para fora da fonte de radiação. Quando a luz que se propaga neste meio encontra um corpo que apenas a reflete (considerando uma incidência normal), então ela sofre uma mudança no sentido de propagação, ou seja, o vetor  $\mathbf{k}$  inverte o sentido, cada fóton sofre uma variação no momento linear de:  $\Delta\mathbf{p}_{\text{fot}} = -2h\mathbf{k}$ . Como mostra a Figura 10-a, pela conservação do momento linear o corpo também sofre uma variação no momento de mesma intensidade, porém, de sentido contrário ao do fóton, ou seja,  $\Delta\mathbf{p}_{\text{cor}} = 2h\mathbf{k}$ . Devido à  $\Delta\mathbf{p}_{\text{cor}}$  o objeto refletor sofre uma pressão apenas devido à radiação eletromagnética.

Para um meio constituído de “material canhoto”  $\varepsilon < 0$  e  $\mu < 0$  como mostra a Figura 11-b, neste caso o vetor de propagação tem o sentido que aponta para dentro da fonte de radiação. Da mesma forma que no material convencional, quando os fótons incidirem (considerando uma incidência normal) sobre o corpo, cada fóton sofrerá uma variação no seu momento linear de:  $\Delta\mathbf{p}_{\text{fot}} = 2h\mathbf{k}$ ; o sinal negativo desaparece devido o fato que a onda incidente tem  $\mathbf{k}$  negativo e positivo para a refletida; fazendo a variação (final menos inicial) teremos  $\Delta\mathbf{p}_{\text{fot}}$ . Assim,  $\Delta\mathbf{p}_{\text{cor}} = -2h\mathbf{k}$ . O sinal negativo indica que o corpo sofrerá uma tensão, quando uma onda eletromagnética incide sobre ele.

A Figura 11-a mostra uma radiação se propagando em uma substância direita, quando incide sobre um corpo que a reflete totalmente, a Figura 11-b mostra a mesma experiência, porém, a luz se propaga agora em uma substância “canhota”.

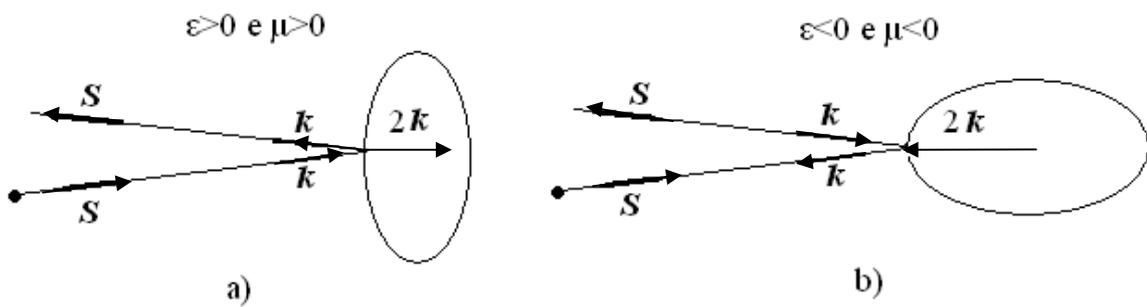


Figura 11 – a) Reflexão da luz que se propaga num material com  $\varepsilon > 0$  e  $\mu > 0$ ; b) Reflexão da luz que se propaga num material com  $\varepsilon < 0$  e  $\mu < 0$ .

Portanto, o efeito da radiação eletromagnética no metamaterial é inverso ao que ocorre com a matéria natural, tração na primeira e pressão na segunda.

### 3.4. Efeito Doppler

Quando nos aproximamos de uma fonte que emite uma dada frequência, percebemos que a frequência que recebemos é maior que aquela emitida pela fonte. Isso acontece porque quando estamos nos aproximando da fonte com uma dada velocidade, conseqüentemente o número de frente de onda que nos alcança em um dado tempo será maior, que no caso de estarmos parado. Trata-se da manifestação do efeito Doppler. A frequência recebida poderá ser maior ou menor que a frequência original dependendo do observador estar aproximando ou afastando do emissor de ondas (consideramos que o emissor está parado).

Foi o cientista *Armand Fizeau* (1819 - 1896), quem fez as primeiras constatações da validade do efeito Doppler para ondas eletromagnéticas. As radiações emitidas pelas estrelas nos permitem calcular a distância que elas se encontram da Terra, também sua composição dependendo da frequência da luz emitida. Essas constatações estão de acordo com a teoria da expansão do universo, e em virtude do chamado deslocamento para o vermelho pode-se constatar o afastamento das galáxias.

Consideremos uma onda eletromagnética de frequência  $\omega_0$  que se propaga numa substância “direita”, e um “observador” (detector) se aproximando do emissor com uma velocidade  $u$ , como mostra a Figura 12-a; a frequência detectada  $\omega$  será o número de cristas que o aparelho recebe por unidade de tempo, sendo assim o aparelho capta uma “superposição de frequências”, ou seja, uma soma da frequência que ele detectaria se estivesse parado  $\omega_0$ , com o número de cristas que receberia se a onda estivesse “parada” e apenas o detector se deslocasse com velocidade  $u$ .

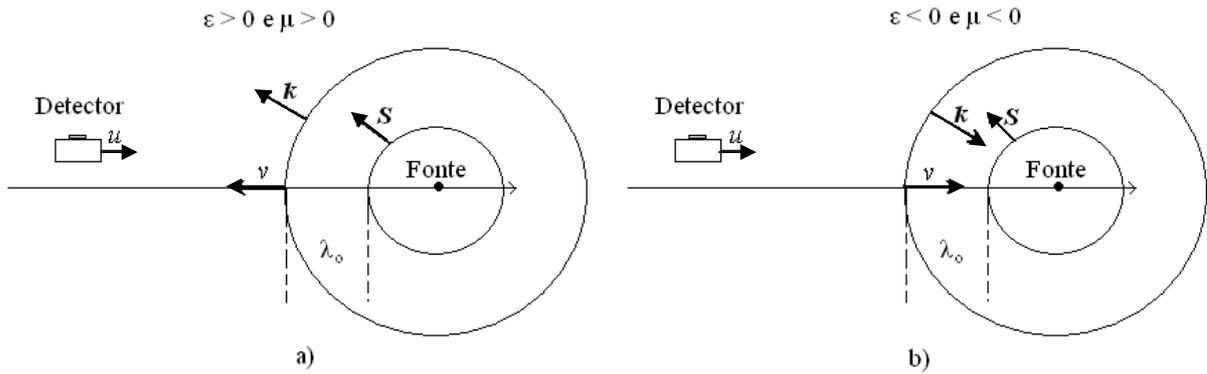


Figura 12 – a) Efeito Doppler em um material com  $\varepsilon > 0$  e  $\mu > 0$ , b) Mesmo efeito numa substância com  $\varepsilon < 0$  e  $\mu < 0$ .

Logo, a frequência recebida pelo detector é

$$\omega = \omega_0 + \frac{u}{\lambda_0} \quad (3.1)$$

onde  $\lambda_0$  é o comprimento da onda eletromagnética, mas como a onda está se propagando num meio que não é o vácuo, sua velocidade  $v$  é menor que  $c$ , da Eq. (1.18)  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ .

Porém, a velocidade de uma onda é dada por:

$$v = \omega_0 \lambda_0. \quad (3.2)$$

Substituindo o comprimento de onda  $\lambda_0$ , obtido da Eq. (3.2) na (3.1), ficamos

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \omega_0 \frac{u}{v} \therefore \\ \omega &= \omega_0 \left( 1 + \frac{u}{v} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

O sinal de  $u$  será positivo quando o detector se aproxima da fonte. A igualdade (3.3) nos diz que a frequência que o “observador” registra é maior que a frequência original da fonte. O que está em total acordo com o que observamos no dia-a-dia.

Fazendo esta mesma análise para uma substância que tem valores para a permissividade e permeabilidade simultaneamente negativos, portanto, índice de refração negativo. A frequência detectada será:

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{u}{v} \right) \quad (3.4)$$

O sinal negativo aparece, pelo fato de que nesse caso, a velocidade de grupo da onda tem o mesmo sentido que a velocidade do detector. Assim, a frequência recebida pelo detector será menor que  $\omega_0$ , como mostra a Eq. (3.4).

Podemos condensar as Eqs. (3.3) e (3.4), ficamos então com

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + p \frac{u}{v} \right). \quad (3.5)$$

$p$  será positivo se o material é convencional e negativo se for um metamaterial, ou seja,  $p = +1$ , para  $\epsilon > 0$  e  $\mu > 0$ ; e  $p = -1$ , para  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$ .

Comparando as Eqs. (3.3) e (3.4) vemos que o efeito Doppler quando uma onda eletromagnética se propaga numa “substância sinistra” é inverso ao efeito quando se tem um material convencional.

### 3.5. Radiação de Cherenkov

Um postulado da relatividade de Einstein diz que: nenhuma partícula pode superar a velocidade de  $2,9979 \times 10^8$  m/s, que é a velocidade da luz no vácuo. Mas uma partícula (um elétron, por exemplo) pode atravessar um depósito cheio de água com uma velocidade superior a  $2,2490 \times 10^8$  m/s, que é exatamente a velocidade com que a luz se propaga na água. Quando isso acontece, pode se observar uma radiação azulada com uma envolvente cônica de eixo coincidente com a direção do movimento da partícula. Esta radiação recebe o nome do físico Russo *Cherenkov* (1904 – 1990) (também escrito como Cerenkov). Esta radiação pode, por exemplo, ser observada num reator nuclear moderado com água [CERENKOV, 1958].

O efeito Cerenkov é equivalente ao efeito Mach em aerodinâmica quando um avião supersônico rompe a barreira do som. Entretanto esta radiação só poderá ser observada se a partícula que atravessa o meio tiver carga elétrica; além disso, o meio deverá ser um dielétrico, pois as moléculas da substância devem interagir com o campo elétrico da partícula. A radiação só começa a se propagar quando as moléculas da substância, inicialmente polarizadas pelo campo da partícula, se despolarizam espontaneamente. Assim, são as moléculas do meio quem emitem a radiação e não a partícula incidente.

A polarização das moléculas do meio quando uma partícula incide sobre um dielétrico, está representado, na Figura 13.

Para partículas que incidem com rapidez maior que a velocidade da luz no meio, ocorrerá uma quebra de simetria na polarização. Isso porque as moléculas adiante da partícula não receberam a informação da existência do campo elétrico da partícula, uma vez que ela viaja mais rápido que a luz naquele meio.

Quando a partícula viaja com rapidez menor que a velocidade da luz no meio, não há radiação de Cerenkov. Este efeito é muito útil quando se quer medir a massa das partículas com velocidade grandes, tal que não tem tempo suficiente para se obter uma densidade de ionização nas câmaras de bolhas.

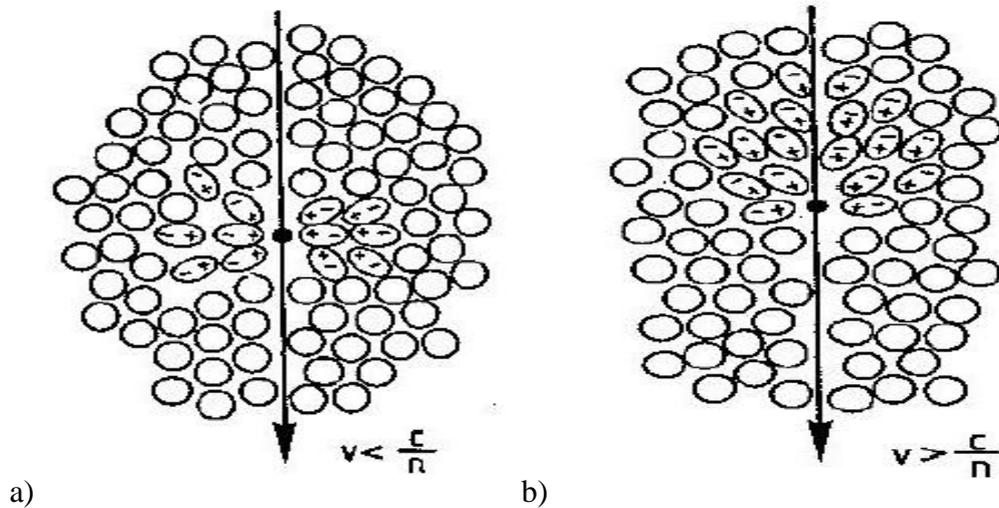


Figura 13 – a) Polarização simétrica, b) polarização assimétrica.

Para analisar a orientação do vetor que indica o fluxo da radiação de Cerenkov, atentaremos primeiramente para o caso em que o meio é natural, depois em um metamaterial. Consideremos que uma partícula se movimenta no eixo das abscissas no sentido positivo. Na Figura 14, o seguimento AB representa o deslocamento da partícula em um dado tempo, e o seguimento AC mostra o quanto um fóton da radiação emitida se moveu neste mesmo tempo, ou seja,  $AC = vt$  e  $AB = ut$ , onde  $v$  é a velocidade dos fótons naquele meio material e  $u$  é a velocidade da partícula; para que o efeito aconteça devemos ter  $u > v$ .

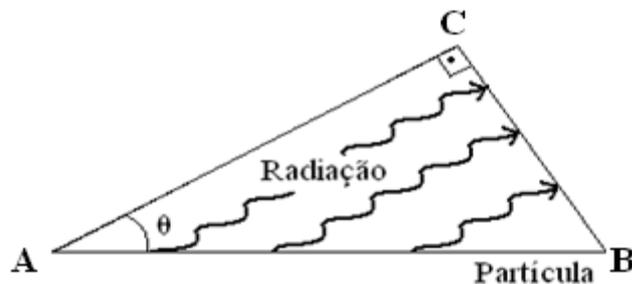


Figura 14 – Ângulo entre a radiação de Cerenkov e a direção do movimento da partícula.

Calculando o cosseno do ângulo que a radiação faz com a direção que a partícula se movimenta,

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{(c/n)t}{ut} \quad (3.6)$$

Pois,  $v = c/n$

assim,

$$\cos \theta = \frac{c}{nu} . \quad (3.7)$$

Observamos facilmente que, para um material com índice de refração negativo  $n < 0$ , o lado direito da expressão (3.7) torna-se negativo, ou seja,  $\cos \theta < 0$ . Concluimos que, num metamaterial, o ângulo que a radiação de Cerenkov faz com a direção de propagação da partícula, está no intervalo de  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ . Neste material os fótons da radiação são liberados no sentido contrário do movimento da partícula, o oposto do que ocorre para um material ordinário, que irradia para frente. A Figura 15 mostra o sentido da radiação nos dois tipos de materiais, Figura 15-a para os normais e Figura 15-b para os metamateriais.

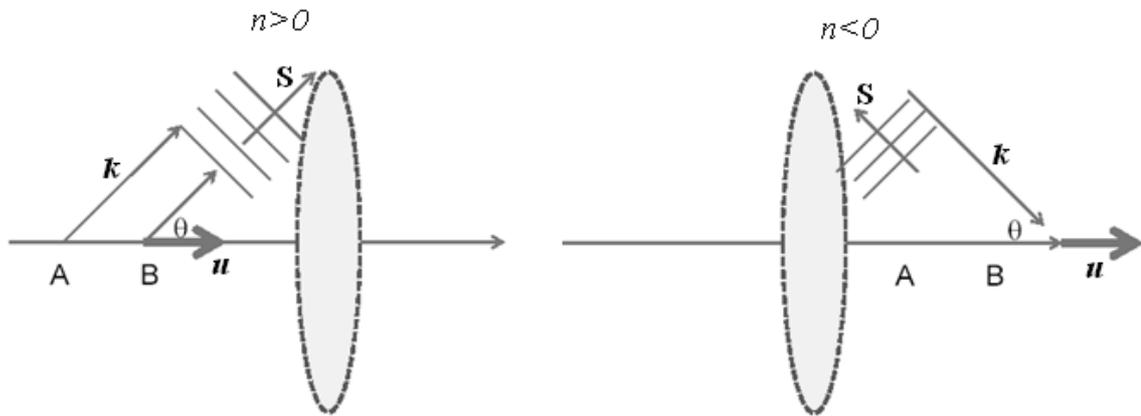


Figura 15 – a) Efeito Cerenkov numa “substância direita”, b) O mesmo efeito numa “substância esquerda”.

## 4. O MANTO DA INVISIBILIDADE

*“... Não declares que as estrelas estão mortas  
só porque o céu está nublado.  
(Provérbio árabe)*

A invisibilidade é um tema comum em narrações nascidas na ficção científica, na fantasia, nas fábulas e na mitologia. No Homem Invisível, de H. G. Wells, uma série de experimentos químicos gera um homem invisível. Ao tentar explicar cientificamente o mecanismo necessário para isso, poderíamos pensar que a bioquímica tenha alterado as propriedades das moléculas do homem invisível, a tal ponto que elas não interagem com a luz que incide sobre ele. Esta possibilidade seria inimaginável, pois algumas funções biológicas vitais decorre quando as moléculas complexas interagem com a luz. Grandes manipulações ao nível molecular, colocaria em risco a existência do homem invisível.

Numa outra possibilidade poderíamos criar misteriosos “campos” que sejam capaz de tornar pessoas e objetos indetectáveis, talvez desviando os raios de luz ao redor do objeto a ser camuflado. Exemplos desse tipo de invisibilidade podem ser facilmente encontrados na ficção científica: a Mulher Invisível do Quarteto Fantástico é capaz de produzir campos que podem disfarçar pessoas e outros objetos. Nesta possibilidade encontramos uma limitação a essa tecnologia, pois é necessário muita energia para criar os campos intensos.

Um exemplo de mecanismo mágico e sobrenatural da invisibilidade que mais se aproxima da realidade científica que conhecemos hoje, é a capa do Harry Potter. A camuflagem perfeita não passava de tema de ficção científica, até que em 2006 Sir John B. Pendry [PENDRY, 2006], observou esta questão de uma maneira mais formal, ele propôs a descrição matemática de transformação óptica como uma estratégia para manipular as ondas eletromagnéticas, quando estas se propagam em um meio heterogêneo e anisotrópico. A capa da invisibilidade é uma aplicação especial da ótica de transformação, o material da capa é um dispositivo que impõe uma mudança de coordenadas para os campos eletromagnéticos. As constantes características do meio podem ser derivadas da transformação ótica. Devido à propriedade de controlar os campos eletromagnéticos, diversas aplicações novas foram encontradas, além do manto da invisibilidade, como por exemplo, antenas planares com foco, a possibilidade de construir cristais de metamateriais. Esses cristais são a base para a criação de chips fotônicos.

Podemos esconder um objeto contido num dado volume, utilizando as transformações óticas que sejam capaz de desviar os raios de luz (ondas eletromagnéticas) ao redor

deste. Além disso, os raios deverão retornar à sua trajetória inicial. Nenhuma radiação deverá entrar ou sair do volume camuflado, qualquer tentativa deverá ser guiado suavemente até que saia como se tivesse “refratado” sem desvio pelo objeto e sem que haja mudança na velocidade da luz, ou seja, passado pelo espaço vazio.

#### 4.1. Transformações Óticas

Mostramos nas seções anteriores as equações de Maxwell na sua forma diferencial e integral. Quando escrevemos estas equações em uma notação tensorial [PENDRY; 2007] elas tornam-se:

$$\partial_i \epsilon_{ij} E_j = \rho \quad (4.1a)$$

$$\partial_i \mu_{ij} H_j = 0 \quad (4.1b)$$

$$\epsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\mu_{ij} \frac{\partial H_j}{\partial t} \quad (4.1c)$$

$$\epsilon_{ijk} \partial_j H_k = \epsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t} + j_i \quad (4.1d)$$

onde,  $\epsilon_{ij}$  e  $\mu_{ij}$  indicam a permissividade elétrica e permeabilidade magnética, respectivamente. Em um caso mais geral (meio não homogêneo), estas grandezas não são isotrópicas, ou seja, elas dependem da direção que se esteja analisando. O termo  $\epsilon_{ijk}$  é o tensor de Levi-Civita [apêndice i], e nessas equações usamos a notação de Einstein na qual quando dois índices aparecerem repetidos em um termo, subtende-se um somatório sobre esse índice.

Analisaremos qual a forma adquirida por estas equações, quando mudamos para o novo sistema de coordenadas. Faremos uma transformação de um sistema  $x_n$  para  $x'_i$ , onde  $x'_i = x'_i(x_n)$ . A Figura 16 mostra um esquema de como uma transformação de coordenadas, pode afetar um vetor: campo elétrico, campo magnético ou vetor de Poynting.

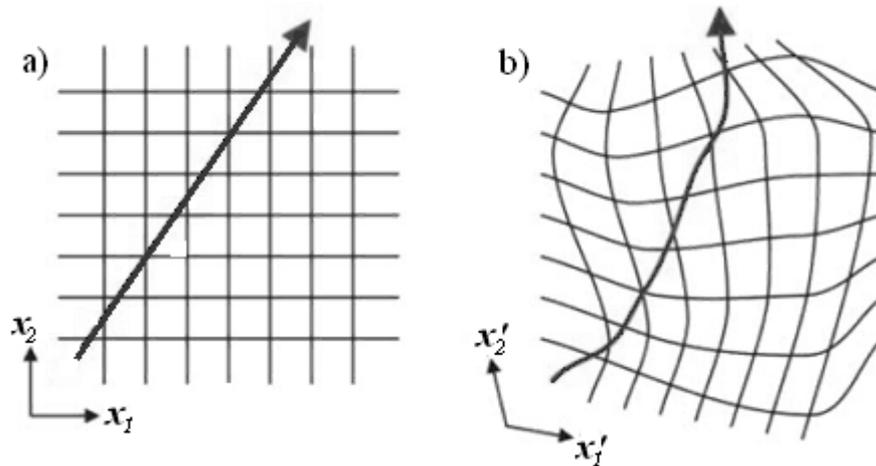


Figura 16 – a) sistema de coordenadas cartesiano; b) sistema modificado.

Usaremos a matriz Jacobiana para fazer uma mudança no sistema de coordenadas, assim um vetor escrito com coordenadas  $x_n$  pode ser transformado para  $x'_i$  como pode ser visto na igualdade (4.2)

$$B_\alpha = \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} B'_\beta \quad (4.2)$$

Para simplificar a notação:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x'_\beta}$$

Assim,

$$\partial_\alpha = \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \partial'_\beta. \quad (4.3)$$

O termo  $\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} = J_{\beta\alpha}$  é conhecido como Jacobiana. Expressando a mudança de variáveis (4.2) e (4.3) em termos desta matriz, temos:

$$B_\alpha = J_{\beta\alpha} B'_\beta \quad (4.4a)$$

$$\partial_\alpha = J_{\beta\alpha} \partial'_\beta. \quad (4.4b)$$

Com as Eqs.(4.4a) e (4.4b) que indica como transformamos as coordenadas do sistema  $x_n \rightarrow x'_i$ , podemos aplicar agora em cada uma das equações de Maxwell, começaremos pela quarta.

$$\epsilon_{ijk} \partial_j H_k = \epsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t} + j_i \quad (4.1d)$$

As mudanças para os campos e para as derivadas

$$H_k = J_{\beta k} H'_\beta, \text{ e } \partial_j = J_{\alpha j} \partial'_\alpha \quad (4.5)$$

Chamamos à componente  $\alpha$  igual a  $k$  do vetor intensidade magnética, porém, a derivada na segunda igualdade de (4.5) é em relação à componente  $j$ . Assim trocamos  $\alpha \rightarrow \beta$  na segunda igualdade de (4.5), e chamamos  $\beta$  igual a  $j$ .

Substituindo (4.5) em (4.1d)

$$\epsilon_{ijk} J_{\alpha j} \partial'_\alpha [J_{\beta k} H'_\beta] = \epsilon_{ij} \frac{\partial [J_{\alpha j} E'_\alpha]}{\partial t} + j_i$$

Usando a regra da cadeia, no lado esquerdo da igualdade acima

$$\epsilon_{ijk} J_{\alpha j} \{H'_\beta \partial'_\alpha J_{\beta k} + J_{\beta k} \partial'_\alpha H'_\beta\} = \epsilon_{ij} \frac{\partial [J_{\alpha j} E'_\alpha]}{\partial t} + j_i \quad (4.6)$$

desenvolvendo o primeiro termo do lado esquerdo de (4.6)

$$\partial'_\alpha J_{\beta k} = \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \left( \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial x'_\beta}{\partial x'_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \delta_{\alpha\beta},$$

onde  $\delta_{\alpha\beta}$  é o delta de Kronecker, definido por  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  se  $\alpha \neq \beta$  e  $\delta_{\alpha\beta} = 1$  se  $\alpha = \beta$ .

Considerando que  $\alpha \neq \beta$ , isso implica que  $\partial'_\alpha J_{\beta k} = 0$ , eliminado o primeiro termo do lado esquerdo de (4.6). Ficamos então com

$$\epsilon_{ijk} J_{\alpha j} J_{\beta k} \partial'_\alpha H'_\beta = \epsilon_{ij} \frac{\partial [J_{\alpha j} E'_\alpha]}{\partial t} + j_i \quad (4.6)$$

Desenvolvendo a derivada em relação ao tempo

$$\epsilon_{ijk} J_{\alpha j} J_{\beta k} \partial'_\alpha H'_\beta = \epsilon_{ij} \left\{ E'_\alpha \frac{\partial J_{\alpha j}}{\partial t} + J_{\alpha j} \frac{\partial E'_\alpha}{\partial t} \right\} + j_i$$

Usando a condição de que  $J$  é constante no tempo, então o termo  $\frac{\partial J_{\alpha j}}{\partial t} = 0$ , logo

$$\epsilon_{ijk} J_{\alpha j} J_{\beta k} \partial'_\alpha H'_\beta = \epsilon_{ij} J_{\alpha j} \frac{\partial E'_\alpha}{\partial t} + j_i \quad (4.7)$$

Multiplicando, pelo lado esquerdo, ambos os membros de (4.7) por  $J_{ci}$

$$\epsilon_{ijk} J_{ci} J_{\alpha j} J_{\beta k} \partial'_\alpha H'_\beta = J_{ci} \epsilon_{ij} J_{\alpha j} \frac{\partial E'_\alpha}{\partial t} + J_{ci} j_i \quad (4.8)$$

Mas,  $\epsilon_{ijk} J_{ci} J_{\alpha j} J_{\beta k} = \epsilon_{c\alpha\beta} \det J$  [apêndice (ii)], então (4.8) fica:

$$\epsilon_{c\alpha\beta} \det J \partial'_\alpha H'_\beta = J_{ci} \epsilon_{ij} J_{\alpha j} \frac{\partial E'_\alpha}{\partial t} + J_{ci} j_i$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} \partial'_\alpha H'_\beta = \frac{J_{ci} \epsilon_{ij} J_{aj}}{\det J} \frac{\partial E'_\alpha}{\partial t} + \frac{J_{ci} j_i}{\det J} \quad (4.8)$$

Esta equação é válida para cada nova coordenada, podemos generalizar

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \frac{J \boldsymbol{\epsilon} J^T}{\det J} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \frac{J \mathbf{j}}{\det J} \quad (4.9)$$

chamando:  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{J \boldsymbol{\epsilon} J^T}{\det J}$  e  $\tilde{\mathbf{j}} = \frac{J \mathbf{j}}{\det J}$  a quarta equação de Maxwell, torna-se

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \tilde{\mathbf{j}} \quad (4.10)$$

Procedendo de maneira análoga para a terceira equação (4.1c), encontraremos

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{J \boldsymbol{\mu} J^T}{\det J} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}$$

chamando  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \frac{J \boldsymbol{\mu} J^T}{\det J}$ , ficamos com

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\tilde{\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} \quad (4.11)$$

Após a mudança de coordenadas, o conjunto de equações que descreve o eletromagnetismo fica:

$$\nabla'(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{E}') = \tilde{\rho} \quad (4.12a)$$

$$\nabla'(\tilde{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{H}') = 0 \quad (4.12b)$$

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\tilde{\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} \quad (4.12c)$$

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \tilde{\mathbf{j}} \quad (4.12d)$$

Onde:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{J \boldsymbol{\epsilon} J^T}{\det J}, \quad (4.12e)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \frac{J \boldsymbol{\mu} J^T}{\det J}, \quad (4.12f)$$

$$\tilde{\mathbf{j}} = \frac{J \mathbf{j}}{\det J}, \quad (4.12g)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\det J}. \quad (4.12h)$$

Comparando as equações (4.10) com (1.1d) e (4.11) com (1.1c), vemos que as equações de Maxwell, além de não mudarem sua forma sob a transformação de Lorentz, tam-

bém são invariantes sobre uma transformação de coordenadas, porém, a permissividade elétrica, densidade de corrente e permeabilidade magnética terão que ser ajustadas.

## 4.2. Exemplo de um manto da invisibilidade

As leis da física não podem depender do sistema de coordenadas, na qual o sistema é descrito. Demonstramos anteriormente que a aplicação de uma transformação não altera as equações de Maxwell. Assim, os metamateriais apesar de não existirem naturalmente, não violam as leis da Física.

Recorreremos às Transformações Óticas ao tentar tornar um objeto invisível. Esta transformação deverá “pegar” todos os raios que incidem sobre o objeto que queremos camuflar, e orientá-los suavemente ao redor do objeto. Para que a invisibilidade seja completa, uma condição deve ser imposta sobre esta transformação: os raios deverão retornar ao seu trajeto original, dando a impressão de que o espaço onde a luz percorreu está vazio. A capa da invisibilidade, que vamos tratar a seguir, tem como função principal aplicar esta transformação às ondas incidente.

Consideremos que queremos camuflar uma pequena esfera. As capas esféricas, apesar de serem ineficiente quando os objetos são longos e finos, ainda assim, atendem aos nossos objetivos. Além disso, estas capas podem esconder qualquer objeto, desde que tenham dimensões pequenas.

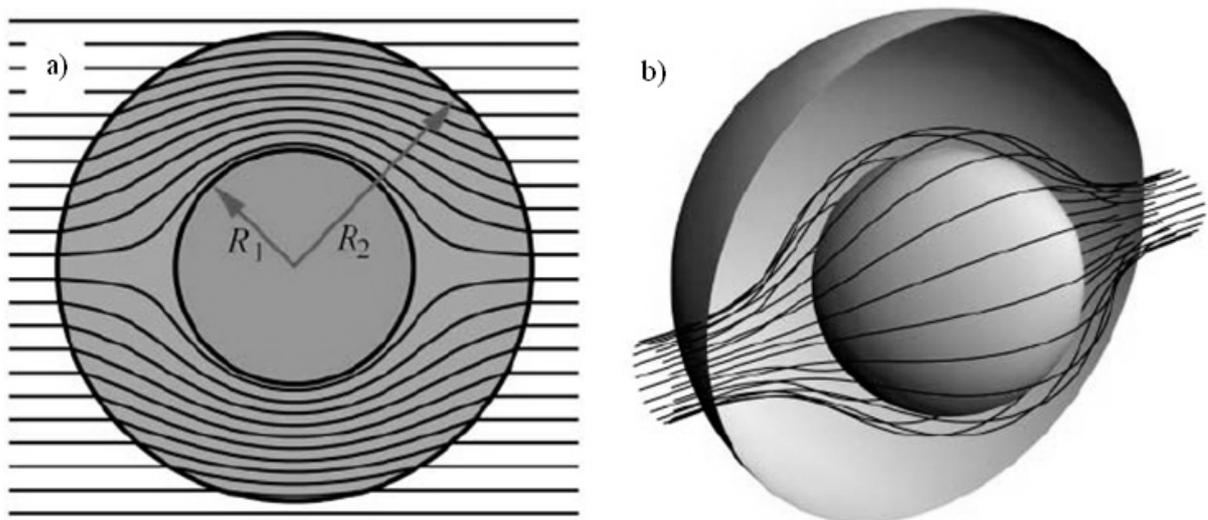


Figura 17 – Trajetória dos raios contornando o objeto camuflado.

A Figura 17 mostra como os raios devem contornar o objeto a ser escondido. A esfera ocupa uma região  $r < R_1$ , onde  $R_1$  é o raio desta. O manto da invisibilidade restringe-se no volume onde  $R_1 < r < R_2$ . Levando em consideração a simetria, uma das transformações que atende ao nosso objetivo, poderia ser

$$r'' = R_1 + \frac{r'(R_2 - R_1)}{R_2} \quad (4.13a)$$

$$\theta'' = \theta' \quad (4.13b)$$

$$\varphi'' = \varphi' \quad (4.13c)$$

Onde o sistema  $(r', \theta', \varphi')$ , está em coordenadas esféricas. Os detalhes deste sistema estão representados na Fig. 18.

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.14a)$$

$$\theta' = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (4.14b)$$

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.14c)$$

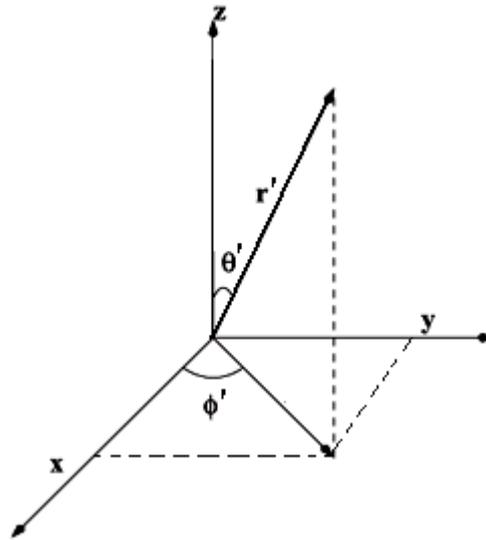


Figura 18 – Sistema de coordenadas esféricas.

A matriz que representa a transformação das coordenadas cartesianas para as esféricas, é  $J_{\beta\alpha} = \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha}$ . Logo a matriz de mudança fica

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial r'}{\partial x} & \frac{\partial r'}{\partial y} & \frac{\partial r'}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x} & \frac{\partial \theta'}{\partial y} & \frac{\partial \theta'}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial x} & \frac{\partial \varphi'}{\partial y} & \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$\frac{\partial r'}{\partial x} = \frac{x}{r'}$ , da Fig.18  $x = \cos\varphi'(r'\text{sen}\theta')$ . Assim,  $\frac{\partial r'}{\partial x} = \cos\varphi'\text{sen}\theta'$ ; computando todas as derivadas e substituindo na matriz, ficaremos com

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi' \operatorname{sen}\theta' & \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen}\theta' & \cos\theta' \\ \frac{\cos\varphi' \cos\theta'}{r'} & \frac{\cos\theta' \operatorname{sen}\varphi'}{r'} & -\frac{\operatorname{sen}\theta'}{r'} \\ -\frac{\operatorname{csec}\theta' \operatorname{sen}\varphi'}{r'} & \frac{\cos\varphi' \operatorname{csec}\theta'}{r'} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16).$$

É fácil verificar que,  $\det J = \frac{\operatorname{sen}\theta'}{r'^2}$ . Usando o valor de  $\det J$  e usando  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}$  na Eq. 4.12e. Transformamos assim, a permissividade relativa  $\varepsilon$  para  $\varepsilon'$ .

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} r'^2 \operatorname{sen}\theta' & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}\theta'} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Utilizando a transformação (4.13) para mudar  $\varepsilon'$  para  $\varepsilon''$ . A matriz J, é a jacobiana que faz a mudança do sistema (') para ('').

$$J = \begin{pmatrix} \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Assim, usando novamente  $\tilde{\varepsilon} = \frac{J\varepsilon J^T}{\det J}$  e que o  $\det J = \frac{(R_2 - R_1)}{R_2}$ , temos

$$\varepsilon'' = \begin{pmatrix} \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} r'^2 \operatorname{sen}\theta' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2 \operatorname{sen}\theta'}{(R_2 - R_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{(R_2 - R_1) \operatorname{sen}\theta'} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Invertendo as transformações (4.13)

$$r' = (r'' - R_1) \frac{R_2}{(R_2 - R_1)} \quad (4.20a)$$

$$\theta' = \theta'' \quad (4.20b)$$

$$\varphi' = \varphi'' \quad (4.20c)$$

Substituindo estas na matriz (4.19)

$$\varepsilon'' = \begin{pmatrix} \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} \left[ (r'' - R_1) \frac{R_2}{(R_2 - R_1)} \right]^2 \operatorname{sen}\theta'' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2 \operatorname{sen}\theta''}{(R_2 - R_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{(R_2 - R_1) \operatorname{sen}\theta''} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon'' = \begin{pmatrix} \frac{R_2(r'' - R_1)^2 \text{sen}\theta''}{(R_2 - R_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2 \text{sen}\theta''}{(R_2 - R_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{(R_2 - R_1)\text{sen}\theta''} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

fazendo uma troca de índices, chegamos ao sistema esférico

$$\tilde{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \frac{R_2(r' - R_1)^2 \text{sen}\theta'}{(R_2 - R_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2 \text{sen}\theta'}{(R_2 - R_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{(R_2 - R_1)\text{sen}\theta'} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Porém, podemos observar que (4.22) não é um sistema esférico real normalizado. Usando a condição de normalização, ficamos então com a permissividade relativa:

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} \frac{R_2(r' - R_1)^2}{(R_2 - R_1)r'^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{(R_2 - R_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{(R_2 - R_1)} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Podemos proceder de maneira análoga para encontrar a permeabilidade magnética relativa  $\tilde{\mu}'$ , assim teremos

$$\tilde{\mu}' = \begin{pmatrix} \frac{R_2(r' - R_1)^2}{(R_2 - R_1)r'^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{(R_2 - R_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{(R_2 - R_1)} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Das equações (4.23) e (4.24) [CUI, 2010] concluímos que diferentemente dos materiais convencionais onde as suas propriedades dependem de sua composição, nos metamateriais suas propriedades derivam de sua estrutura, ou seja, a permissividade e a permeabilidade dependem apenas de fatores geométricos, para o nosso exemplo da capa esférica estes fatores eram  $R_1$  e  $R_2$ . Então, ajustando a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética, podemos literalmente manipular as ondas eletromagnéticas, fazendo-as seguir qualquer trajetória que desejarmos. No nosso problema de esconder uma esfera, estas trajetórias eram aquelas que contornam o objeto, como se as ondas fossem um fluido.

Finalmente, transformações ópticas oferecem uma interessante e, de alguma forma, abordagem única para o desenvolvimento de materiais eletromagnéticos com propriedades ópticas não convencionais. Como foi exposto nessa monografia, o método geral é baseado nas transformações de coordenadas covariantes das equações de Maxwell, nas quais os parâmetros eletromagnéticos, tais como permissividade elétrica e permeabilidade magnética se transformam de acordo com elas. Essas transformações, e suas implicações nas propriedades dos materiais, não são consideradas como uma simples transformação de coordenadas, em que não há mudanças na compreensão física no novo sistema. As quantidades permissividade elétrica e permeabilidade magnética modificadas pelas transformadas covariantes podem ser interpretadas como propriedades materiais “reais” de um novo meio material no meio original, o espaço de coordenadas não transformado. Esta interpretação alternativa devido a Pendry [PENDRY, 2006], chamada de “interpretação material” fornece um potente método para elaboração de elementos ópticos com parâmetros de materiais complexos únicos, particularmente adequadas para a exploração da liberdade de escolha dos tensores permeabilidade magnética e permissibilidade elétrica complexas em estruturas metamateriais.

### 4.3. Condições para um manto da invisibilidade ideal

A invisibilidade se tornará perfeita se algumas condições forem atendidas, primeiro de tudo nenhuma radiação deverá entrar ou sair do volume na qual se encontra o objeto a ser camuflado.

Considerando a trajetória tomada pelos raios incidentes, encontramos uma singularidade inevitável no nosso modelo. Se atentarmos para um único raio, aquele que se dirige diretamente ao centro da esfera, este raio não sabe se deve ser desviado para cima ou para baixo, esquerda ou direita. Raios vizinhos a este, devem ser dobrados muito rapidamente, ou seja, deverá haver uma mudança brusca na permissividade elétrica e permeabilidade magnética. Estas variações devem-se a estrutura do metamaterial utilizado para fazer a capa. Diferentemente das características dos materiais normais, nos metamateriais, suas propriedades eletromagnéticas são definidas de acordo com sua estrutura. O meio deverá ser anisotrópico para que haja esta mudança contínua nos parâmetros.

Uma questão importante é se o efeito da camuflagem abrange uma banda larga ou é específico para uma única frequência. No problema considerado anteriormente, vemos facilmente que o efeito da invisibilidade só poderá ser realizado em apenas uma frequência. Como mostra a Figura 17, cada um dos raios que cruzam a esfera seguem necessariamente uma trajetória curva e, portanto, um percurso maior que teria feito caso o espaço fosse livre, e ainda estamos exigindo que o raio ao chegar do outro lado da esfera esteja com a mesma fase. Isso implica que a velocidade de fase deverá ser maior que a velocidade da luz no vácuo, o que não viola nenhuma lei da física. No entanto se nós exigirmos que o meio não seja dispersivo, então a velocidade de fase sempre será igual à velocidade de grupo e esta última jamais poderá exceder a velocidade da luz. Concluímos que no nosso exemplo, os parâmetros da capa da invisibilidade devem dispersar com a frequência e, portanto só será eficaz em uma única frequência.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Primeiramente analisamos algumas propriedades e efeitos que ocorre com a matéria natural quando interage com as ondas eletromagnéticas. A partir das equações de Maxwell e as condições de contorno sobre os campos, demonstramos algumas leis fundamental da óptica geométrica, uma delas foi a lei de Snell-Descartes. Analisamos a orientação dos vetores campo elétrico, campo magnético e o vetor de propagação da onda, verificamos que para uma onda plana que se propaga em um meio material convencional, eles formam (nesta ordem) um sistema dextrógiro.

Das manipulações feitas com as equações de Maxwell, demonstramos que uma onda eletromagnética a se propagar em um meio qualquer, o faz com uma dada velocidade, e essa depende das constantes características do material como: a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética. Ao definir a grandeza índice de refração, concluímos que existem duas possibilidades de sinais: positivo (materiais natural) e negativo (metamateriais).

Verificamos quais mudanças ocorrem quando inserimos os sinais de  $\epsilon$  e  $\mu$  negativos simultaneamente. Apesar de não existirem materiais com estas características, mesmo assim tiramos as mesmas conclusões feitas por Veselago, de que é possível haver propagação de ondas eletromagnéticas nos metamateriais. A introdução dos valores negativos implica em vários fenômenos contrários ao que ocorre com o material comum, por exemplo, a velocidade de fase nos metamateriais tem o sentido oposto ao vetor de Poynting, o efeito Cerenkov invertido, a pressão de radiação que se transforma em tração de radiação, e o efeito Doppler invertido.

Analisamos as possibilidades de se controlar os campos eletromagnéticos, como proposto por Pendry, na intenção de construir um manto da invisibilidade. Concluímos que apesar de aparentar ser assunto de ficção científica, estas manipulações nos campos não violam as leis da física, como vimos ao modificar as equações de Maxwell. Assim, com uma transformação ótica correta, podemos alterar as trajetórias das ondas de modo que possam fluir ao redor do objeto a ser camuflado. Na interpretação de Pendry, estas modificações que surgem devido alteração no sistema de coordenadas é apenas uma mudança nos parâmetros eletromagnético, quando consideramos um material convencional; Porém, quando consideramos os metamateriais, os parâmetros modificados tornam-se as características do metamaterial em um sistema original. E finalmente, fizemos uma análise física da possibilidade de existência da capa da invisibilidade.

Este trabalho estaria incompleto se não déssemos um exemplo de como deveria ser uma capa da invisibilidade. Foi o que fizemos no final, propomos uma capa esférica na intenção de tornar pequenos objetos invisíveis. Concluímos que a capa deverá ser anisotrópica devido a mudança brusca na direção de alguns raios que incidem na capa esférica. E deverá dispersar com a frequência, o que torna sua função limitada apenas para uma faixa específica de frequência.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [CERENKOV, 1958] CERENKOV, A. Pavel. : **Radiation of particles moving at a velocity exceeding that of light, and some of the possibilities for their use in experimental physics** - Nobel Lecture, December 11, 1958
- [CUI, 2010] CUI, T. J.; Smith, D. R.; Liu R.: **Metamaterials: Theory, Design, and Applications** – New York, Springer, 2010.
- [LORRAIN, 1988] LORRAIN, P., Corson D. e Lorrain F. título original: **Campos e Ondas Eletromagnéticas** –New York, 1988. Tradução de Carlos Fiolhais, José Luis Malaquias Lima e Orlando Oliveira.
- [NUSSENZVEIG, 2002] NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor** – 4ª edição – São Paulo: Edgard Blucher, 2002. Vol. 2.
- [NUSSENZVEIG, 1997] NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física básica: Eletromagnetismo** – 1ª edição – São Paulo: Edgard Blucher, 1997. Vol. 3
- [NUSSENZVEIG, 1998] NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física básica: Ótica, Relatividade e Física Quântica** – São Paulo: Edgard Blucher, 1998. Vol. 4.
- [PENDRY, 1996] PENDRY, J. B.; Holden; A. J.; Stewart, W. J.; Youngs, I.: *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4773 (1996).
- [PENDRY, 1999] PENDRY, J. B.; Holden, A. J.; Robbins, D. J.; Stewart, W. J.: *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47**, 2075 (1999).
- [PENDRY, 2000] PENDRY, J. B.: *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
- [PENDRY, 2006] PENDRY, J. B.; Schuring, D.; Smith, D. R.: *Science* **312**, 1780 (2006).
- [PENDRY, 2007] PENDRY, John B., Marco Rahm, David Schurig, Daniel A. Roberts, Steven A. Cummer, David R. Smith. **Design of Electromagnetic Cloaks and Concentrators Using Form-Invariant Coordinate Transformations of Maxwell's Equations.** 17, [Physics.Optics 17 jun] (2007)
- [REITZ, 1988] REITZ, J. R., Milford, F. J. e Christy, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética.** Rio de Janeiro, Campus 1988.
- [SILVA; 2010] RODRIGUES DA SILVA, R.; Macêdo da Silva; R.; Dumelow, T.; da Costa, J. A. P.; Honorato, S. B.; Ayala, A. P. **Using Phonon Resonances as a Route to All-Angle Negative Refraction in the Far-Infrared Region: The Case of Crystal Quartz** Physical Review Letters **105**, 163903 (2010).
- [VESELAGO, 1968] VESELAGO, V. G., *Sov. Phys. Usp.* **10**, 1968.

## ANEXOS

### APÊNDICE i

#### Tensor de Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ for } (1,2,3), (3,1,2) \text{ ou } (2,3,1), \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ for } (1,3,2), (3,2,1) \text{ ou } (2,1,3), \\ 0 & \text{no caso de: } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases}$$

### APÊNDICE ii

#### O Jacobiano

$$\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} = \det J = J_{31} J_{12} J_{23} + J_{11} J_{22} J_{33} + J_{21} J_{32} J_{13} \\ - J_{33} J_{12} J_{21} - J_{13} J_{22} J_{31} - J_{23} J_{32} J_{11}$$

Usando notação compacta:  $\det J = \epsilon_{ijk} J_{ci} J_{\alpha j} J_{\beta k}$  fazendo uma permutação nos elementos haverá uma troca de sinal do determinante, assim

$$\epsilon_{c\alpha\beta} \det J = \epsilon_{ijk} J_{ci} J_{\alpha j} J_{\beta k}.$$