Copo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA ESTABILIDADE DE DIFEOMORFISMOS

ANTONIO GOMES DE AMORIM

MONOGRAFIA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

FORTALEZA, CE. - 1978

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA ESTABILIDADE DE DIFEOMORFISMOS

ANTONIO GOMES DE AMORIM

MONOGRAFIA SUBMETIDA À COORDENAÇÃO DO
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FORTALEZA - 1978

"Condições Necessárias para Estabilidade de Difeoporfismos"

por

Antonio Gomes de Amorim

Monografia aprovada em 15/12/78.

Raimundo Tompson Gonçalves (Orientador)

Alberto Flávio Alves Aguiar

Jorge Manoel Sotomayor Tello

A meus pais e irmãos

À minha esposa Elza e

a minha filha Luciana

P R E F Á C I O

Este trabalho constitui minha dissertação de Mestrado em Matemática o qual foi realizado no Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará sob a orientação do Dr. Raimundo Tompson Gonçalves.

Nesta oportunidade, quero externar meus agradecimentos aos colegas do Curso de Pós-Graduação, assim como aos professores do Departamento de Matemática que, de forma direta ou indireta contribuiram na realização deste trabalho, especialmente Raimundo Tompson Gonçalves que participou ativamente como orientador.

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Norte e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apóio financeiro.

Finalmente, agradeço a Francisco Mavignier C. França pelo excelente trabalho de datilografia.

Fortaleza, dezembro de 1978.

Antonio Gomes de Amorim

ÍNDICE

I N T R O D U Ç Ã O

Este trabalho tem como objetivo principal, estudar condições necessárias para que um difeomorfismo de uma variedade diferenciável M seja Ω-estável e é baseado no trabalho de John Frank "Necessary Conditions for Stability of Diffeomorphisms".

Smale provou em seu "paper" [5] uma condição suficiente para que um difeomorfismo seja Ω-estável. O interêsse de Frank seria encontrar a recíproca do teorema da Ω-estabilidade demonstrado por Smale, o qual não foi demonstrado na sua totalidade, mas em parte.

Esta monografia, divide-se em três seções. A primeira seção estabelece alguns conceitos básicos em Sistemas Dinâmicos os quais são indispensáveis às subsequentes.

Na seção II, mostraremos que todo ponto periódico de um difeomorfismo Ω-estável é hiperbólico.

De início, mostraremos que dados um difeomorfismo f e um conjunto finito de pontos θ em M, podemos modificar f em θ por uma pequena perturbação g na topologia C^1 de tal modo que $f(x) = g(x)$ em um subconjunto compacto de M, disjunto de θ, e $dgx = G|TM_x$ para todo $x \in \theta$, onde G é um isomorfismo de $\underset{x\in\theta}{\oplus} TM_x$ sobre $\underset{x\in\theta}{\oplus} TM_{f(x)}$ tal que $||G - df||_1 < \frac{\varepsilon}{10}$.

Usando este resultado, provaremos o seguinte teorema:

Se $f: M \to M$ é um difeomorfismo Ω-estável então todos os pontos periódicos de f são hiperbólicos e existe uma constante $\lambda \in (0, 1)$ tal que para todo ponto periódico p as desigualdades

$$||df^n v|| \leq C_p \lambda^n ||v|| \quad \forall v \in E_p^s \quad e \quad n > 0$$
$$||df^{-n} v|| \leq C_p \lambda^n ||v|| \quad \forall v \in E_p^u \quad n > 0.$$

são satisfeitas.

Onde C_p é uma constante positiva que depende do ponto p.

A seção III é dedicada às variedades estáveis de um difeomorfismo Ω-estável sobre uma variedade diferenciável M.

Inicialmente, provaremos três lemas dos quais, dois deles necessitam da condição da Ω-estabilidade. Com esses resultados provaremos o último teorema deste trabalho cujo enunciado é o seguinte:

Se $f: M \to M$ é um difeomorfismo Ω-estável e Λ_1, Λ_2 são conjuntos sub-básicos para f, Λ_1 ligado a Λ_2, então

a) $\dim E^s(\Lambda_1) = \dim E^s(\Lambda_2)$;

b) se $x \in \Lambda_1$ e $y \in \Lambda_2$ então $W^s(x)$ e $W^u(x)$ intersetam-se transversalmente;

c) existe um número $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda_1$, $y \in \Lambda_2$ e qualquer ponto de interseção de $W^s(x)$ e $W^u(y)$ o ângulo entre elas é maior do α.

Entendemos por ângulo entre dois subespaços vetoriais V_1 e V_2 de TM_x pelo $\inf(\text{Ar}\cos(v_1, v_2)_x)$ onde $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ e $(\ ,\ )_x$ é o produto interno em TM_x.

Seção I

Variedades e Transversalidade

Esta seção destina-se a apresentar definições e propriedades básicas de Sistemas Dinâmicos considerados como pré-requisitos indispensáveis às seções subsequentes.

Omitiremos parte das demonstrações dos teoremas aqui enunciados, pois o nosso objetivo principal é fixar a notação e a terminologia para o futuro. No entanto, indicaremos as referências onde podem ser encontradas as demonstrações omitidas.

A seguir, M é uma variedade compacta de classe C^∞, munida de uma métrica riemanniana $\| \ \|$. Dif(M) é o espaço dos difeomorfismos de M, de classe C^∞. Representamos por TM_p o espaço tangente a M no ponto p e por $TM = \bigcup_{p \in M} TM_p = \{(p, v);\ p \in M \text{ e } v \in TM_p\}$ o fibrado tangente.

Dizemos que um ponto $p \in M$ é um ponto periódico de $f \in$ Dif f(M) se existe um inteiro n tal que $f^n(p) = p$ e o menor inteiro positivo k satisfazendo $f^k(p) = p$ é chamado período de p. Denotamos por Per(f) o conjunto dos pontos periódicos de f e por $O(p) \doteq \{ f^n(p), n \in Z \}$ a órbita de p.

<u>Observação</u>: Se p é um ponto periódico, então $O(p)$ é um conjunto finito e seus pontos são periódicos de período igual ao período de p.

Um ponto $p \in M$ é um ponto não-errante de f se, e somente se para toda vizinhança U de p e para todo inteiro positivo n_o existe $n \in Z$, $|n| > n_o$, tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Denotamos por $\Omega = \Omega(f)$ o conjunto dos pontos não-errantes de f.

$\Omega(f)$ é um conjunto fechado e invariante sob f e $Per(f) \subset \Omega(f)$.

Um ponto $p \in M$ é um ponto hiperbólico de f se o isomorfismo $df_p: TM_p \to TM_p$ não possui autovalor sobre o círculo unitário S' do plano complexo.

Dizemos que um difeomorfismo $f: M \to M$ é Ω-estável se:

a) Existe uma vizinhança $N(f)$ de f na topologia C' tal que para cada $g \in N(f)$ existe um homeomorfismo $h: \Omega(f) \to \Omega(g)$ tal que $g \circ h = h \circ f$;

b) Se $p \in Per(f)$ então $\dim W^s(p, f) = \dim W^s(h(p), g)$ ($W^s(p, f)$ é a variedade estável de p relativamente a f, definida posteriormente).

Dizemos que um conjunto fechado e invariante sob f, $\Lambda \subset M$ tem uma estrutura hiperbólica para $f \in Dif(M)$ se:

a) Existe uma decomposição contínua da restrição do fibrado tangente a $TM_\Lambda = E^s \oplus E^u$ tal que

$$df(E^s) = E^s \quad \text{e} \quad Df(E^u) = E^u \,;$$

b) Existem constantes $C > 0$, $C' > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ e uma métrica riemanniana $\| \ \|$ em TM tal que

$$\|df^n v\| \leq C \lambda^n \|v\| \quad \text{para} \quad v \in E^s \quad \text{e} \quad n > 0$$

$$\|df^n v\| \geq C' \lambda^{-n} \|v\| \quad \text{para} \quad v \in E^u \quad \text{e} \quad n > 0.$$

A constante λ é chamada assimétria de f. Se C e C' são iguais a um, dizemos que a métrica riemanniana em M é adaptada a Λ. Se M é uma variedade compacta e $\Lambda \subset M$ é um conjunto com uma estrutura hiperbólica para $f \in Dif(M)$, então por um teorema de J, Mather (veja [2]) existe sempre uma metri ca riemanniana em M adaptada a Λ.

Sejam $f: M \to M$ um difeomorfismo e p um ponto hiperbólico de f. O conjunto dos pontos de M que têm p como ω-limite é chamado variedade estável de p e denotamos por $W^s(p)$, e o conjunto dos pontos de M que têm p como α-limite é chamado variedade instável de p e denotamos por $W^u(p)$.

As definições de ω-limite e α-limite poderão ser encontradas em [8].

Sejam $p \in M$, $\varepsilon > 0$ e d a distância induzida pela métrica riemanniana. O conjunto $B_\varepsilon(p) = \{q \in M;\ d(p, q) < \varepsilon\}$ é uma bola aberta em M de centro p e raio ε. Seja $p \in M$ um ponto hiperbólico de $f \in Dif(M)$, $W^s_\varepsilon(p) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(B_\varepsilon(f^n(p)))$ e $W^u_\varepsilon(p) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(B_\varepsilon(f^{-n}(p)))$ são chamadas variedades estável e instável locais de tamanho ε do ponto p.

Uma família $\{W_x\}_{x \in \Lambda}$ de subvariedades de classe C^r $(r \geq 1)$ de M é contínua se para cada $x \in \Lambda$ existe uma vizinhança V de x em Λ e uma aplicação contínua $\psi: V \to C^r(D^n, M)$ tal que ψ_x aplica D^n difeomorficamente sobre uma vizinhança de x em W_x para cada $x \in W_x$. Para enunciar o teorema da variedade estável para um conjunto hiperbólico Λ, vamos supor que a métrica riemanniana em M é adapatada a Λ.

Teorema 1.1: (para Variedade Estável para um Conjunto Hiperbólico)

Seja $\Lambda \subset U$ um conjunto compacto hiperbólico para uma imersão C^r, $f: U \subset M \to M$ $(r \geq 1)$. Então

a) Existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in \Lambda$ corresponde uma variedade estável local $W^s(x)$ de tamanho ε;

b) $\{W^s_\varepsilon(x)\}\}_{x \in \Lambda}$ é uma família contínua de subvariedades C^r;

c) Existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que, se $y, z \in W^s(x)$ então

$d[f^n(y), f^n(z)] \leq \lambda^n d(y, z)$ para todo $n \geq 0$;

d) $W^s_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$ é um comjunto aberto em $W^s_\varepsilon(x)$ para todo $x, y \in \Lambda$;

c) $W^s_\varepsilon(x)$ é tangente a E^s_x em $x \in \Lambda$

Demonstração: veja [3].

Sejam $S \subset N$ uma subvariedade de N de classe C^r e $f: M \to N$ uma aplicação de classe C^k $(k, r \geq 1)$, dizemos que f é transversal a S em $p \in M$ se $f(p) \notin S$ ou se $Df_p(TM_p) + TS_{f(p)} = TN_{f(p)}$. Dizemos que f é transversal a S e representamos por $f \pitchfork S$, se f é transversal a S em cada ponto $p \in M$.

Observamos que:

1) Se $f(M) \cap S \neq \emptyset$ e $f \pitchfork S$ então

$$\dim M + \dim S \geq \dim N$$

2) Se $\dim M + \dim S < \dim N$ e $f \pitchfork S$ então $F(M) \cap S = \emptyset$.

Com efeito:

1) Se $f(M) \cap S \neq \emptyset$ e $f \pitchfork S$ então existe um ponto $p \in M$ tal que $f(p) \in S$ e $df_p(TM_p) + TS_{f(p)} = TN_{f(p)}$.

Desde que os subespaços $df_p(TM_p)$ e $TS_{f(p)}$ geram o espaço $TN_{f(p)}$, então

$$\dim df_p(TM_p) + \dim TS_{f(p)} \geq \dim TN_{f(p)}.$$

Por outro lado,

$$\dim df_p(TM_p) = \dim TM_p = \dim M$$

e portanto

$$\dim M + \dim S \geq \dim N.$$

2) Suponha que $f(M) \cap S \neq \emptyset$ então existe $p \in M$ tal que $f(p) \in S$, por 1)

$$\dim M + \dim S \geq \dim N$$

que é uma contradição a hipótese inicial.

Sejam S_1 e S_2 subvariedades de M, dizemos que S_1 é transversal a S_2 se a aplicação inclusão $i: S_1 \to M$ é transversal a S_2.

Um conjunto sub-básico para $f \in \mathrm{Dif}\, f(M)$ é um conjunto compacto, invariante $\Lambda \subset M$ com uma estrutura hiperbólica tal que f/Λ é topologicamente transitiva e o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em Λ. f/Λ é topologicamente transitivo se existe ponto $x \in \Lambda$ tal que a órbita $O(x)$ é densa em Λ.

Se Λ_1 e Λ_2 são conjuntos sub-básicos de f e $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, escrevemos $\Lambda_1 < \Lambda_2$ quando $W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2) \neq \emptyset$ e $\Lambda_1 \ll \Lambda_2$ quando existem $p_1 \in \Lambda_1$ e $p_2 \in \Lambda_2$ tal que $W^s(p_1)$ e $W^u(p_2)$ têm um ponto de interseção transversal.

Teorema 1.2:

Se Λ_1 e Λ_2 são conjuntos sub-básicos de $f \in \mathrm{Diff}(M)$; $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ e $\Lambda_2 << \Lambda_1 < \Lambda_2$ então

$$W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2) \subset \Omega(f) = \Omega .$$

Na prova do teorema acima, necessitamos do seguintes resultados:

Lema 1.2:

Seja $f: \Lambda \to \Lambda$ um homeomorfismo topologicamente tran sitivo de um espaço métrico compacto com pontos periódicos denso em Λ. Então dados conjuntos abertos não vazios V_1, V_2 em Λ, existe um ponto periódico $p \in V_1$ tal que $f^m(p) \in V_2$ para algum m.

<u>Prova:</u>

Desde que f é topologicamente transitivo, existe $x \in \Lambda$ tal que $(x) \cap V_1 \neq \emptyset$ e $(x) \cap V_2 \neq \emptyset$, logo existem $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $f^{m_1}(x) \in V_1$ e $f^{m_2}(x) \in V_2$. Assim $f^{m_2}(x) \in f^m(V_1)$ onde $m = m_2 - m_1$ e portanto $f^m(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$. Por outro lado, $Per(f)$ é denso em Λ, logo existe $q \in Per(f)$ tal que $q \in f^m(V_1) \cap V_2$, então $p = f^{-m}(q) \in V_1$ e portanto $f^m(p) \in V_2$.

<u>Lema 1.3:</u>

Seja $f: M \to M$ um difeomorfismo com pontos periódicos hiperbólicos p_i, $i = 0, 1, \ldots, n$; tal que $p_o = p_n$. Suponha que para cada $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, $x_i \in W^u(p_i)$ $W^s(p_i + 1)$ é um ponto de interseção transversal. Então cada x_i é não errante.

<u>Demonstração:</u> veja [4].

<u>Prova do Teorema:</u>

Seja $x \in W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2)$, e U uma vizinhança de x. Por hipótese $\Lambda_2 << \Lambda_1$, $W^u(p_1) \cap W^s(p_1)$ tem um ponto de interseção transversal para $p_1 \in \Lambda_1$ e $p_2 \in \Lambda_2$. Sejam V_1 uma vizinhança de p_1 em Λ_1 e U_1 uma vizinhança de p_2 em Λ_2 tal que para todo $p \in V_1$ e $q \in U_1$ $W^u(p)$ e $W^s(q)$ tenham um ponto de interseção transversal. Escolhamos os abertos V_2 em

U_1 e U_2 em Λ_2 tais que se $p' \in V_2$ e $q' \in U_2$, então $W^s(q')$ $W^u(p')$ intersetam U. Aplicando o lema 1.2. obtemos uma órbita γ_1 intersetando V_1 e V_2 e uma órbita γ_2 intersetando U_1 e U_2. Assim, $W^s(\gamma_2)$ e $W^s(\gamma_1)$ têm um ponto de interseção transversal, enquanto $W^s(\gamma_1)$ e $W^u(\gamma_2)$ intersetam U.

Aplicando o lema 1.3., obtemos $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$ apra algum $m \in \mathbb{Z}$.

Isto prova o teorema. $\sqrt{}$

Seção II

Os Pontos Periódicos de um Difeomorfismo Ω-Estável

Nesta seção, provaremos que todos os pontos periódicos de um difeomorfismo Ω-estável são hiperbólicos.

De agora em diante, quase todas as demonstrações deste trabalho, serão usados os difeomorfismos de Kupka-Smale. Dizemos que um difeomorfismo $f: M \to M$ é de Kupka-Smale se:

a) Os pontos periódicos são hiperbólicos;

b) Se p, q são pontos periódicos de f, então

$$W^s(p) \pitchfork W^u(q) .$$

<u>Lema 2.1:</u>

Sejam $f: M \to M$ um difeomorfismo e $\theta \subset M$ um conjunto finito de pontos. Sejam $Q = \bigoplus_{x \varepsilon \theta} TM_x$ e $Q' = \bigoplus_{x \varepsilon \theta} TM_{f(x)}$. Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno e $G: Q \to Q'$ é um isomorfismo tal que $||G - df|| < \frac{\varepsilon}{10}$ então existe um difeomorfismo $f: M \to M$ ε-próximo de f na topologia C' tal que $dg_x = G/TM_x$ para todo $x \varepsilon \theta$. Além disso, se R é um subconjunto compacto de M, $R \cap \theta = \emptyset$, podemos tomar $f(x) = g(x)$ para todo $x \varepsilon R$.

<u>Prova:</u>

Suponhamos por simplicidade que a métrica riemanniana em M seja induzida da métrica usual do $\mathbb{R}^m$ onde M está imersa.

Primeiro, demonstraremos este lema para o caso em que $\theta = \{x_1\}$ e depois estenderemos para o caso em que θ tem um número finito de pontos maior do que um. Seja $\exp: TM_{x_1} \cup TM_{f(x)} \to M$ a restrição da aplicação exponencial de TM em M determina da pela métrica de TM para M. maiores detalhes veja [7].

Escolhamos agora um número $\delta > 0$ satisfazendo as seguintes condições:

1) Se $\{x_1, f(x_1)\} = \{x_1, x_2\}$ e $\hat{B}_i = \{v \in TM_{x_i}; \|v\| \leq \delta\}$ então $\exp: \hat{B}_i \to M$ é uma imersão, e se $B_i = \exp(\hat{B}_i)$ então $B_1 \cap B_2 = \emptyset$;

2) Se $v \in \hat{B}_i$, então $\|\exp(v) - v\| < \frac{\varepsilon}{10}$, onde $\| \ \|$ é a métrica em $\mathbb{R}^m$ na qual M está imersa;

3) $\|d \exp_v\| < 1 + \frac{\varepsilon}{10}$ se $v \in \hat{B}_i$ e $\|d \exp_x^{-1}\| < 1 + \frac{\varepsilon}{10}$ se $x \in B_i$;

4) $\hat{f}: \hat{B}_i \to TM_{f(x_1)} = TM_{x_2}$ pode ser definido por $\hat{f}(v) = \exp^{-1} \circ f \circ \exp(v)$ e $\|G(u) - \hat{f}(u)\| < \frac{\varepsilon}{10}\|u\|$ e $\|G(v) - d\hat{f}_u(v)\| < \frac{\varepsilon}{10}\|v\|$ se $v \in \hat{B}_i$;

5) Se $K = \sup \{\|df_x\| ; x \in M\|$ então $\|d \exp_u - d \exp_v\| < \frac{\varepsilon}{10K}$ se $u, v \in \hat{B}_i$.

Agora vamos justificar as afirmações anteriores.

1) $\exp_x: TM_x \to M$ temos que $d \exp_x(0) = I_{TMx}$ para todo $x \in M$. Pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança $\hat{B}$ de zero em TM_x e uma vizinhança B de x em M tal que $\exp_x: \hat{B} \to B$ é um difeomorfismo. Logo $\exp \hat{B} \to M$ é uma imersão;

2) Podemos pensar $\exp(v) - v$ como a diferença entre dois vetores do $\mathbb{R}^m$ onde M está imersa;

3) Usando a continuidade de d exp e o fato de que $d \exp_x(0) = I_{TM_x}$ para todo $x \in M$;

4) Observe que $\hat{f}(0) = \exp^{-1} \circ f \circ \exp(0) = \exp^{-1} \circ f(x) = 0$ pois $\exp_{f(x)}(0) = f(x)$.

$d\hat{f}_0 = d\exp^{-1}_{f(x)} \cdot df_x \circ d\exp_x(0) = df_x$, logo $\hat{f}(u) = df_x +$ $+ r_1(x, u)||u||$, onde $r_1(x, u) \to 0$ quando $u \to 0$, portanto

$$||G(u) - \hat{f}(u)|| \leq (||G(u) - df_x(u)|| + ||r_1(x, u)||)||u|| \frac{\varepsilon}{10}||u||$$

e $G(v) - d\hat{f}_u(v) = G(v) - \hat{f}(v) + r_2(u, v)$ onde $r_2(u, v)$ tende para zero quando v tende para zero.

Agora vamos escolher uma função $\sigma: R \to [0, 1]$ que satisfaça o seguinte:

a) $\sigma \in C^\infty$;

b) $\sigma(t) = 0$ se $|t| > \delta$;

c) $\sigma(t) = 1$ se $t < \frac{\delta}{4}$;

d) $|\sigma'(t)| < \frac{2}{\delta}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja $\ell: TM \to \mathbb{R}$ definida por $\ell(v) = \sigma(||v||)$.

Vamos definir as funções $\hat{g}: \hat{B}_1 \cup \hat{B}_2 \to TM$ por

$$\hat{g}(v) = (v)\, G(v) + (1 - \ell(v))\, \hat{f}(v)$$

e $g: M \to M$ por $g(x) = \exp \circ \hat{g} \circ \exp^{-1}(x)$ se $x \in B_1$ e $g(x) = f(x)$ se $x \in M - B_1$. Vamos mostrar que g é ε-próximo a f na topologia C^1.

De início mostraremos que $||f(x) - g(x)|| < \varepsilon$.

Se $x \notin B_1$, $f(x) = g(x)$ e se $x \in B_1$,

$$\begin{aligned}
||f(x) - g(x)|| &= ||\exp \circ \hat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \exp \circ \hat{g} \circ \exp^{-1}(x)|| < \\
&< ||\exp \circ \hat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \hat{f} \circ \exp^{-1}(x)|| + ||\hat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \\
&- \exp \circ \hat{g} \exp^{-1}(x)|| = \\
&= ||\exp \circ \hat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \hat{f} \circ \exp^{-1}(x)|| + \\
&+ ||\hat{f} \circ \exp^{-1}(x) - \hat{g} \circ \exp^{-1}(x)|| + \\
&+ ||\hat{g} \circ \exp^{-1}(x) - \exp \circ \hat{g} \circ \exp^{-1}(x)||
\end{aligned}$$

Fazendo $v = \exp^{-1}(x)$, pela condição 2) temos

$$||\exp \hat{f} \circ \exp^{-1} x \; - \; \hat{f} \circ \exp^{-1} x|| < \frac{\varepsilon}{10}$$

e

$$||\exp \hat{g} \circ \exp^{-1}(x) - \hat{g} \circ \exp^{-1}(x)|| < \frac{\varepsilon}{10}$$

então

$$||f(x) \; - \; g(x)|| < \frac{\varepsilon}{\delta} \; + \; ||\hat{f}(v) \; - \; \hat{g}(v)|| \; .$$

Mas

$$||\hat{f}(v) - \hat{g}(v)|| = ||\hat{f}(v) - \;\; (v)G(v) - (1 - \;\; (v)\; \hat{f}(v)|| =$$

$$= ||\ell(v)\, [\hat{f}(v) - G(v)]|| =$$

$$= ||\hat{f}(v) - G(v)|| < \frac{\varepsilon}{10}||v||,$$

logo

$$||f(x) - g(x)|| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{10}||v|| = \frac{\varepsilon}{5} \; + \; \frac{\varepsilon}{10}\delta < \varepsilon \; .$$

Agora vamos mostrar que $||df_x - dg_x|| < \varepsilon$, usando as derivadas de $\hat{f}$ e $\hat{g}$. Se $v \in \hat{B}_1$

$$d\hat{g}_v(u) = \ell(v)\; G(u) + d\ell_v(u)\; G(v) + (1 - \ell(v))d\hat{f}_v(u) - d\ell_v(u)\hat{f}(v).$$

e

$$||d\hat{f}_v(u) - d\hat{g}_v(u)|| < \ell(v)\; ||G(u) - d\hat{f}_v(u)|| + ||d\ell_v(u)||\,||G(v) - \hat{f}(v)||$$

Se $||v|| < \delta$ temos $\ell(v) = 0$ e portanto $\hat{g} = \hat{f}$. Se $||v|| < \delta$, temos

$$||G(u) - d\hat{f}_v(u)|| < \frac{\varepsilon}{10}||u||$$

e

$$||G(v) - \hat{f}(v)|| < \frac{\varepsilon}{10}\delta \qquad \text{por } 4)$$

e

$$||d\ell_v|| < \frac{2}{\delta}\; .$$

Portanto

$$||d\hat{f}_v(u) - d\hat{g}_v(u)|| < \frac{\varepsilon}{10}||u|| \; + \; \frac{2}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{10}||u|| \; = \; \frac{3\varepsilon}{10}||u||.$$

Fazendo $y = \exp^{-1}(x)$, $Z = \hat{f}(y)$ e $W = \hat{g}(y)$ teremos

$$||df_x(v) - dg_x(v)|| = ||d\exp_Z \circ d\hat{f}_y \circ d\exp_x^{-1} v - d\exp_W \circ d\hat{g}_y \circ d\exp_x^{-1} v||.$$

Mas

$$\|\mathrm{dexp}_2 \circ d\bar{f}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v - \mathrm{dexp}_W \circ d\hat{g}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v\| \leq$$

$$\leq \|\mathrm{dexp}_2 \circ d\hat{f}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v - \mathrm{dexp}_W \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v\| +$$

$$+ \| \mathrm{dexp}_W \circ d\hat{g}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v - \mathrm{dexp}_W \circ d\hat{f}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v\|$$

Pela condição 5)

$$\|\mathrm{dexp}_2 \circ d\hat{f}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v - \mathrm{dexp}_W \circ d\hat{f}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v\| < \frac{\varepsilon}{10k} \circ \|d\hat{f}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v\| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{10} \|\mathrm{dexp}_x^{-1} v\| < \frac{\varepsilon}{10}(1 + \frac{\varepsilon}{10})\|v\|$$

por 3). Logo

$$\|\mathrm{dexp}_2 \circ d\hat{f}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v - \mathrm{dexp}_W \circ d\hat{f}_y \circ \mathrm{dexp}_x^{-1} v\| < \frac{\varepsilon}{10}(1 + \frac{\varepsilon}{10})\|v\|$$

Pela condição 3) temos:

$$\|d\,\mathrm{exp}_W \circ d\hat{g}_y \circ d\,\mathrm{exp}_x v - d\,\mathrm{exp}_W \circ d\hat{f}_y \circ d\,\mathrm{exp}_x^{-1} v\| <$$

$$(1 + \frac{\varepsilon}{10})\|d\hat{g}_y + d\hat{f}_y\|\,\|d\,\mathrm{exp}_x^{-1} v\| < (1 + \frac{\varepsilon}{10})^2\|d\hat{g}_y - d\hat{f}_y\| <$$

$$< (1 + \frac{\varepsilon}{10})^2 \cdot \frac{3\varepsilon}{10} .$$

Logo

$$\|df_x v - dg_x v\| < \left|\frac{\varepsilon}{10}(1 + \frac{\varepsilon}{10})\right| + \frac{3\varepsilon}{10}(1 + \frac{3\varepsilon}{10})^2\Big| \|v\|$$

$$\|df_x v - dg_x v\| < (1 + \frac{\varepsilon}{10})\left|\frac{\varepsilon}{10} + \frac{3\varepsilon}{10}(1 + \frac{\varepsilon}{10})\right| \|v\| < \varepsilon \|v\|$$

desde que $0 < \varepsilon < \frac{20}{3}$

Suponhamos agora que $\theta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Para cada $x_i \varepsilon \theta$ podemos escolher uma vizinhança B_i de x_i em M tal que $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $R \cap B_i = \emptyset$. Pelo que acabamos de demosntrar, para cada $x_i \varepsilon \theta$ existe um difeomorfismo $g^i: M \to M$ ε-próximo de f na topologia C' tal que $dg^i x_i = G_i = G/TM_{x_i}$ e $g^i(x) = f(x)$ se $x \varepsilon M - B_i$.

Definimos agora o difeomorfismo $g: M \to M$ por

$g(x) = g^i(x)$ se $x \varepsilon B_i$ e $g(x) = f(x)$ se $x \varepsilon M - \bigcup_{i=1}^{n} B_i$;

e assim acabamos de demonstrar o lema.

Teorema 2.1:

Se $f: M \to M$ é um difeomorfismo Ω-estável então todos os pontos periódicos de f são hiperbólicos e existe uma constante $\lambda \in (0, 1)$ tal que para todo ponto periódico p as desigualdades $||df^n v|| \leq C_p \lambda^n ||v||$ para $v \in E_p^s$ e $n > 0$ $||df^{-n} v|| \leq C_p \lambda^n ||v||$ para $v \in E_p^u$ e $n > 0$ são satisfeitas, onde C_p é uma constante positiva que depende do ponto p.

Demosntração:

Em primeiro lugar, escolhamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que se g é ε-próximo de f na topologia C', então f e g são Ω-conjugados.

Para cada ponto periódico p de período k, definimos $E_p^s = \oplus E_{\alpha_i}$ onde E_{α_i} é o auto-espaço de df_p^k em TM_p correspondente ao auto-valor α_i com $|\alpha_i| \leq 1$. Assim $TM_p = E_p^s \oplus E_p^u$ onde $E_p^u = \oplus E_{\beta_i}$, E_{β_i} é o auto-espaço de df_p^k em TM_p correspondente ao auto-valor β_i com $|\beta_i| > 1$.

Vamos mostrar que E_p^s é isomorfo a $E_{f(p)^i}^s$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Basta mostrar que E_p^s é isomorfo a $E_{f(p)}^s$.

Observe que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} TM_p \arrow[r, "df_p^k"] \arrow[d, "df_p"'] & TM_p \arrow[d, "df_p"] \\ TM_{f(p)} \arrow[r, "df_{f(p)}^k"] & TM_{f(p)} \end{tikzcd}$$

$df^k_{f(p)} \circ df_p = df_p \circ df^k_p$, α é um auto-valor de df^k_p se, e somente se ele é auto-valor de $df^k_{f(p)}$. Seja Bv a base dos auto-vetores correspondentes aos autovalores α_i de df^k_p em TM_p tais que $\|\alpha_i\| \leq 1$. Mostraremos que qualquer $v_i \varepsilon Bv$ $df_p(v_i) \varepsilon E^s_{f(p)}$. Suponha que existe $v_i \varepsilon Bv$ tal que $df_p(v_i) \varepsilon E^u_{f(p)}$. Seja Bw a base de $E^u_{f(p)}$ dos auto-vetores correspondente aos auto-valores γ_j de $df^k_{f(p)}$ em $TM_{f(p)}$ tais que $|\gamma_i| > 1$, então $df_p(v_i) = \sum_{j=1}^{u} a_j w_j$. Assim, $df^k_{f(p)} \cdot df_p(v_i) = df^k_{f(p)}(\sum_{j=1}^{u} a_j W_j) = \sum_{j=1}^{u} a_j \gamma_j W_j$ e $df_p \circ (df^k_p(v_i)) = df_p(\alpha_i v_i) = \alpha_i \sum_{j=1}^{u} a_j W_j$. Desde que $df^k_{f(p)} \circ df_p = df_p \circ df^k_p$, temos que $\sum_{j=1}^{u} a_j \gamma_j W_j = \alpha_i \sum_{j=1}^{u} a_j W_j$ e $\alpha_i = \gamma_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, u$ que é um absurdo. Logo $df_p(E^s_p)$ está contido em $E^s_{f(p)}$. Analogamente, podemos mostrar que $df_p(E^u_p)$ está contido em $E^u_{f(p)}$.

Vamos mostrar que $df_p(E^s_p) = E^s_{f(p)}$. Para cada $W \varepsilon E^s_{f(p)}$ $W + 0 \varepsilon TM_{f(p)}$ onde 0 é a origem de $E^u_{f(p)}$. Desde que $df_p : TM_p \to TM_{f(p)}$ é um isomorfismo, existe um único $Z \varepsilon TM_p$, $Z = x + y$ onde $x \varepsilon E^s_p$ e $y \varepsilon E^u_p$ tal que $df_p(Z) = df_p(x) + df_p(y) = W + 0$, logo $df_1(y) = 0$ o que acarreta $y = 0$. Portanto $df_p(E^s_p) = E^s_{f(p)}$.

Analogamente, podemos mostrar que $E^s_{f(p)}$ é isomorfo a $E^s_{f^2(p)}$ e assim por diante, logo E^s_p é isomorfo a $E^s_{f^i(p)}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k - 1$.

Seja $V_p = \bigoplus_{i=1}^{k} E^s_{f^i(p)}$, onde k é o período de p. V_p é um espaço vetorial cuja dimensão é igual a $k \dim(E^s_p)$.

Definimos o isomorfismo $L_p : V_p \to V_p$ por $L_p = df|V_p = df_p \oplus df_{f(p)} \oplus \ldots \oplus df_{f^{k-1}(p)}$. Pela definição de E^s_p, todo auto valor de L_p tem valor absoluto menor ou igual a um.

Se existe um $\lambda \in [0, 1]$ o qual é uma cota superior do conjunto dos valores absolutos de todos os autovalores de L_p (variando $p \in Per(f)$) e se $\| \quad \|$ é a norma em V_p considerada até agora. Desde que L_p é um isomorfismo hiperbólico de V_p, existe uma norma $\| \quad \|_1$ em V_p equivalente a $\| \quad \|$ tal que $\|L_p\|_1 \leq \lambda < 1$ e $\|v_1\| \leq \|v_1\|_1 \leq c_p \|v_1\|$ onde $c_p = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \|L_p^n\|$. Veja |9|.

Desde que $V_p = E_p^s \oplus E_{f(p)}^s \oplus \dots \oplus E^s_{f^{k-1}_{f(p)}}$ e

$$E_p^s \xrightarrow{df_p} E^s_{f(p)} \xrightarrow{d_{f(p)}} E^s_{f^2(p)} \quad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \xrightarrow{df_{f^{k-1}_{(p)}}} E^s_{f^{k-1}_{(p)}} \xrightarrow{df_{f^{k-1}_{(p)}}} E^s_{(p)}$$

Qualquer vetor $(v_1, v_2, \dots, v_k) \in V_p$ temos $L_p(v_1, v_2, \dots, v_k) = (df_{f^{k-1}_{(p)}}(V_k), df_p(v_1), \dots, df_{f^{k-2}_{(p)}}(v_{k-1}))$. Para qualquer $v_1 \in E_p^s$ consideremos o vetor $(v_1, 0, \dots, 0) \in V_p$, então

$$L_p(v_1, 0, \dots, 0) = (0, df_p v_1, 0, \dots, 0) .$$

Suponha que existe $n_o > 1$ tal que para todo $n \leq n_o$, $n \in \mathbb{N}$ $L_p^n(v_1, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, df_p^n v_1, 0, \dots, 0)$, então

$$L_p^{n_o+1}(v_1, 0, \dots, 0) = L_p(0, \dots, 0, df_p^{n_o} v_1, 0, \dots, 0) =$$

$$= (0, \dots, 0, 0, df_{f^{n_o}_{(p)}}(df_p^{n_o}(v_1)), 0, \dots, 0) .$$

Mas

$$df^{n_o}_{(p)} \circ df_p^{n_o} = df_p^{n_o+1}.$$

Logo

$$L_p^{n_o+1}(v_1, 0, \dots, 0) = (0, \dots, df_p^{n_o+1}(v_1), \dots, 0)$$

ou seja, para todo inteiro $n > 0$

$$L_r^n(v_1, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, df_p^n, 0, \ldots, 0).$$

Agora, usando a equivalência das normas, temos que

$$||df_p^n v_1|| = ||L_p^n(v_1, 0, \ldots, 0)|| \leq ||L_p^n(v_1, 0, \ldots, 0)||_1 \leq$$

$$\leq ||L_p^n||_1 \, ||v_1||_1 \leq ||L_p||_1^n \, ||v_1||_1 \leq c_p \lambda^n ||v_1||$$

Logo

$$||df_p^n v|| \leq c_p \lambda^n ||v||$$

para todo $v \in E_p^s$ e $n > 0$.

Por outro lado, se não existe tal λ satisfazendo a condição acima, encontraremos uma contradição a Ω-estabilidade de f.

Escolhamos um ponto periódico p de período k tal que $L_p = df/V_p$ tenha um autovalor γ satisfazendo $\left(\frac{1}{|\gamma|} - 1\right) < \frac{\varepsilon}{20}$.

Seja $Q_p = \bigoplus_{i=1}^{k} TM_{f^i(p)}$ onde k é o período de p. Definimos $F: Q_p \to Q_p$ por $F(v) = \left(\frac{1}{|\gamma|}\right) df(v)$. Seja $u \in V_p$ o autovetor de de L_p correspondente ao autovalor γ, então $F(u) = \frac{\gamma}{|\gamma|} u$, logo $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ é um autovalor de F. Se $\frac{\gamma}{|\gamma|}$ não é raiz da unidade, definimos $G: Q_p \to Q_p$ de tal modo que G tenha um autovalor o qual é raíz da unidade e $||G - F|| < \frac{\varepsilon}{20}$. Basta tomar $G(v) = \frac{\beta}{\gamma} df(v)$ onde β é uma raiz da unidade e $\frac{1}{|\gamma|^2} \left|\gamma - |\gamma|\beta\right| < \frac{\varepsilon}{20k}$, onde $k = \sup\{||df_x||, \; x \in M\}$. Caso contrário, tome $G = F$. Segue-se que $||G - df|| \leq ||G - F|| + ||F - df|| < \frac{\varepsilon}{10}$. Pelo lema 2.1, existe um difeomorfismo $g: M \to M$ o qual é ε-próximo de f na topologia C' e que $dg_p = G/TM_p$.

Desde que $G(u) = \beta u$ e $B^n = 1$ para algum inteiro positivo n, então $G^n(u) = u$, logo 1 é autovetor de G^n e assim $G^{nk}(u) = u$ onde k é o período de p. Existe também um vetor unitário $v \in TM_p$ tal que $G^{nk}(v) = v$. Com efeito: Se $v \in TM_p$ $G(v) = \frac{\beta}{\gamma} df_p(v)$ e $G^2(v) = G(\frac{\beta}{\gamma} df_p(v)) = (\frac{\beta}{\gamma})^2 df_p^2(v)$, prosseguindo assim, temos

$$G^k(v) = (\frac{\beta}{\gamma})^k df_p^k(v) \in TM_p .$$

Seja $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ o autovetor de L_p correspondente ao autovalor γ, então $G^{nk}(u_1) = (\frac{\beta}{\gamma})^{nk_1} df_p^{nk}(u_1) = u_1 \in TM_p$ tome $v = \frac{u_1}{||u_1||}$. Seja $\Delta = \max\limits_{0 \leq i \leq nk} \{||G^i||\}$ e $I = \{(tv);\ |t| \leq \frac{\delta}{4\Delta}\}$ onde δ é o mesmo do lema 2.1. Para todo $u \in I$,

$$||G^i(u)|| = ||G^i(tv)|| = ||t|\ ||G^i(v)|| \leq \frac{\delta}{4\Delta}\Delta \leq \frac{\delta}{4},$$

ou seja $||G^i(u)|| \leq \frac{\delta}{4}$ para todo $u \in I$ e para cada $i = 0, 1, \ldots, nk$.

Pela construção do lema 2.1 temos $\hat{g}^{nk}(u) = G^{nk}(u) = u$ para todo $u \in I$. Mas $g = \exp \circ \hat{g} \circ \exp_x^{-1}$ e $g^{nk}_{(x)} = \exp \circ \hat{g}^{nk} \circ \exp^{-1}_{(x)}$, então para todo $x \in \exp(I)$ $g^{nk}(x) = \exp \circ \hat{g}^{nk} \circ \exp^{-1}(x) = \exp \circ \hat{g}^{nk}(u) = \exp(u) = x$ onde $u = \exp^{-1}(x)$. Logo todo ponto de $\exp(I)$ é um ponto periódico de g de período menor ou igual a nk.

Por um teorema de Kupka-Smale [10] temos:

1) $H_n = \{f \in \mathrm{Dif}\, f(M);\ f^n$ tem somente ponto fixo hiperbólico$\}$ é aberto na topologia C' e denso na topologia C^r;

2) $D_n = \{f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i;\ p, q \in \mathrm{Per}(f)$ com período $\leq n$ $W^s(p) \pitchfork W^u(p)\}$ é aberto e denso em $\mathrm{Dif}\, f(M)$. En-

tão existe um difeomorfismo $h \in Dm$, $m \leq nk$ arbitrariamente próximo de f na topologia C' cujos pontos periódicos são hiperbólicos.

Seja $p \in per(h)$ com período menor ou igual a $nk = m$, então $p \in Fix(h^m)$. Como os pontos fixos hiperbólucos são isolados e M é compacta, então $Per(h)$ contém somente um número finito de pontos periódicos hiperbólicos de período menor ou igual a nk. Por outro lado, f é conjugada com h e com g, então h é conjugada com g que é um absurdo, e assim o teorema está demonstrado.

Seção III

As Variedades Estáveis de Difeomorfismo Ω-Estável

Na seção anterior mostramos uma condição necessária para que um difeomorfismo f seja Ω-estável. Esta condição estava ligada diretamente com os pontos periódicos de f.

Aqui temos pelo menos três condições necessárias para Ω-estabilidade de um difeomorfismo e todos elas estão relacionadas com as variedades estáveis de f.

Lema 3.1:

Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade, $x_0 \in S$, U uma vizinhança de x_0 em $\mathbb{R}^n$ e U', uma vizinhança compacta de x_0 contida em U. Suponha que $h: U \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão tal que $h(x_0) = 0$. Se V é o espaço tangente à $h(S)$ na origem e seja $\Pi: \mathbb{R}^n \to V$ a projeção ortogonal. Então dado $\varepsilon > 0$ existe uma aplicação $\tilde{h}: U \to \mathbb{R}^n$ tal que:

1) Existe uma vizinhança N de x_0 em S tal que $\tilde{h}(x) = \Pi \circ h(x)$ para todo $x \in N$;

2) $\tilde{h}$ é ε-próximo de h na topologia C';

3) $h(x) = \tilde{h}(x)$ se $x \notin U'$.

Demonstração:

Sejam $B(\delta) = \{v + u;\ v \in V$ e $u \in V^{\perp};\ ||v|| \leq \delta$ $||u|| \leq \delta\}$ e $B_v(\delta) = \Pi^{-1}(v) \cap B(\delta)$ para cada $v \in V$. Como $h(S)$ e V se tangenciam na origem, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $v \in V$, com $||v|| \leqslant \delta_1$ $B_v(\delta_1) \cap h(S)$ tem um único ponto. Definamos agora $\tilde{\Pi}: B(\delta_1) \to \mathbb{R}^n$ por

$\tilde{\Pi}(x) = B_{\Pi(x)}(\delta_1) \cap h(S)$. Π e $\tilde{\Pi}$ se tangenciam na origem.

Assim, podemos escolher $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \delta_1$ tal que

1) $\delta_2 < \varepsilon$ e $h^{-1}(B(\delta_2)) \subset U^1$;

2) $||\Pi(x) - \tilde{\Pi}(x)|| < \frac{\varepsilon}{4k} ||x||$ quando $||x|| < \delta_2$ onde $K = \operatorname{Sup}\{||dh_z||;\ Z \in U^1\}$;

3) $||d\Pi_x - d\tilde{\Pi}_x|| < \frac{\varepsilon}{2k}$ quando $||x|| < \delta_2$.

Escolhamos também uma função $\sigma: \mathbb{R} \to [0, 1]$ C^∞ tal que

a) $\sigma(t) = 0$ se $|t| \geqslant \delta_2$;

b) $\sigma(t) = 1$ se $|t| \leq \frac{\delta_2}{4}$

c) $\left|\frac{d\ (t)}{dt}\right| < \frac{2}{\delta_2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definimos $\ell(x) = \sigma(||x||)$ e $\tilde{h}: U \to \mathbb{R}^n$ por $\tilde{h}(z) = h(z)$ se $z \notin h^{-1}(B(\delta_2))$ e $\tilde{h}(z) = h(z) + \ell(h(z))|\Pi(h(z) - \tilde{\Pi}(h(z))|$ se $z \in h^{-1}(B(\delta_2))$. Se N é uma vizinhança qualquer de x_0 em S tal que $N \subset h^{-1}(B(\frac{\delta_2}{4}))$ então para todo $z \in N$ $\ell(h(z)) = 1$ e $\tilde{\Pi}(h(z)) = h(z)$, logo

$$\tilde{h}(z) = h(z) + \ell(h(z))|\Pi(h(x)) - \tilde{\Pi}(h(z))| = \Pi \circ h(z).$$

Também se $h(z) \in B(\delta_2)$,

$$||\tilde{h}(z) - h(z)|| = \ell(h(z))\ ||\Pi(h(z)) - \tilde{\Pi}(h(z))|| < \delta_2 < \varepsilon,$$

e

$$d\tilde{h}_2 = dh_2 + d_{h(z)} \circ dh_2 |\Pi(h(z)) - (h(z)| +$$
$$+ \ell(h(z))\ |d\Pi_{h(z)} - d\tilde{\Pi}_{h(z)}|\ dh_2 \ \therefore$$
$$\therefore ||d\tilde{h}_z - dh_2|| = ||d\ell_{h(z)} \circ dh_2||\ \ ||\Pi(h(z)) - \tilde{\Pi}(h(z))|| +$$
$$+ \ell(h(z))\ ||d\Pi_{h(z)} - d\tilde{\Pi}_{h(z)}||\ ||dh_2||$$

$$||d\tilde{h}_z - dh_2|| < \frac{2}{\delta_2} K \cdot \frac{\varepsilon}{4k} ||h(z)|| + K(\frac{\varepsilon}{2k}) < \frac{\varepsilon}{2\delta_2} \delta_2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$||d\tilde{h}_z - dh_z|| < \varepsilon.$$

Dizemos que dois conjuntos sub-básicos Λ_1 e Λ_2 de $f \in \mathrm{Dif}\ f(M)$ são ligados se existem pontos periódicos $p_1, q_1 \in \Lambda_1$ e $p_2, q_2 \in \Lambda_2$ tais que

$$W^s(p_1) \cap W^u(p_2) \neq \emptyset \quad e \quad W^u(q_1) \cap W^s(q_2) \neq \emptyset$$

Lema 3.2:

$f: M \to M$ é um difeomorfismo Ω-estável e se p e q são pontos periódicos de f com $O(p)$ ligada a $O(q)$. então

$$\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$$

Prova:

Desde que a $O(p)$ é ligada a $O(q)$, podemos supor sem perca de generalidade que $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$ e $W^u(p) \cap W^s(q') \neq \emptyset$ para algum $q' \in O(q)$. Suponha que $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$ e $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$. Podemos dar uma perturbação f_1 à f tal que $f_1 = f$ em uma vizinhança V de $O(x) = \{f^n(x);\ n \in \mathbb{Z}\}$ e que $W^s(q')$ e $W^u(p)$ tenham um ponto de interseção transversal. Podemos escolher ainda uma perturbação f_1 bastante próxima de f de tal modo que f_1 seja Ω-estável. Considerando as variedades estáveis de f_1 temos $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$ e $W^u(p)$ e $W^s(q')$ têm um ponto de interseção transversal. Pelo teorema 1.2, $x \in \Omega(f_1)$.

Escolhamos agora uma aproximação de Kupka-Smale f_2 de f_1 a qual é suficientemente próxima de f_1 tal que entre f_1 e f_2 exista uma Ω-conjugação h e que $\dim W^s(h(p)) = \dim W^s(p)$ e $\dim W^u(h(p)) = \dim W^u(p)$.

Por hipótese, $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$, então

$$\dim W^s(h(p)) + \dim W^u(h(p)) < \dim W^s(q) + \dim W^u(q) =$$
$$= \dim M,$$

ou seja;

$$\dim W^s(h(p)) + \dim W^u(h(p)) < \dim M.$$

Desde que f_2 é um difeomorfismo de Kupka-Smale, $h(p)$ e $h(q)$ são pontos periódicos de f_2, por definição as variedades $W^s(h(p))$ e $W^u(h(q))$ intersetam-se transversalmente, logo

$$W^s(\theta(h(p)) \cap W^u(\theta(h(q)) = \emptyset .$$

Isso contradiz o fato de que f_1 e f_2 são Ω - conjugados porque toda conjugação leva x em um ponto de $W^s(h(p)) \cap W^u(h(p))$, portanto a hipótese de que $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$ é falsa. Então, $\dim W^s(p) \geq \dim W^s(q)$.

Analogamente, podemos mostrar que $\dim W^s(q) \geq \dim W^s(p)$. Logo $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$.

Lema 3.3:

Se $f: M \to M$ é um difeomorfismo Ω-estável e p e q são pontos periódicos de f, $O(p)$ ligada a $O(q)$ então $W^s(O(p))$ e $W^u(O(q))$ intersetam-se transversalmente.

Prova:

Suponha que existe um ponto $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$ o qual não é ponto de interseção transversal.

Pelo lema 3.2, $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$ e asssim

$$\dim W^u(p) + \dim W^s(q) = \dim W^u(p) + \dim W^s(p) = \dim M.$$

Desta forma, podemos perturbar f a f_1 de tal modo que f_1 seja Ω-estável, também $f = f_1$ em uma vizinhança V de $O(x) = \{f^n(x),\ n \in \mathbb{Z}\}$, e além disso, $W^u(p_1 f_1)$ e $W^s(q_1' f_1)$ têm um ponto de interseção transversal para algum $q' \in O(q)$.

Existe um $\varepsilon > 0$ tal que se g é ε-próximo de f_1, então g é Ω-conjugado a f_1 e as variedades estável e instável de g correspondentes a $W^s(q', f_1)$ e $W^u(p, f_1)$ têm um ponto de interseção transversal.

Desde que x é um ponto de interseção não transversal de $W^s(p, f_1)$ e $W^u(q, f_1)$. Seja U uma vizinhança de x tal que U, $f_1(U)$ e $f_1^{-1}(U)$ são disjuntos e seja $\exp_x^{-1}: U \to TM_x$ um difeomorfismo sobre sua imagem. Mais ainda, tomemos U suficientemente pequeno tal que se N_s é a componente de x em $W^s(p) \cup U$ e Nu é a componente de x em $W^u(q) \cup U$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(N_p)$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(Nu)$ são disjuntos de U. Sejam $V^s = T\,W^s(p)_x$ e $V^u = TW^u(q)_x$, então $V^s \cap V^u \neq \{0\}$, dado $v \neq 0$, $v \in V^s \cap V^u$, Escolhamos $\delta > 0$ tal que $\exp_x(t\,v) \in U$ para todo $t \in [-\delta, \delta]$ e seja $J = \exp_x\{t\,v\,;\ t \in [-\delta, \delta]\}$.

Escolhamos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \varepsilon'$ e se g é ε-próximo de f_1 então g é Ω-conjugado a f_1.

Seja $K: f_1^{-1}(U) \to TM_x$ definida por $K = \exp_x^{-1} \circ f_1$. Escolhamos um número $\varepsilon_1 > 0$ tal que se $\bar{K}': f_1^{-1}(U) \to TM_x$ é ε_1-próximo a K então $\exp_x \circ \bar{K}$ é $\frac{\varepsilon}{4}$ - próximo de f_1. Pelo lema 3.1, podemos encontrar $K_1: f_1^{-1}(U) \to TM_x$ tal que

1) $K_1 = K$ fora de alguma vizinhança de $f_1^{-1}(x)$ a qual está contida em $f_1^{-1}(U)$;

2) K_1 é ε_1-próximo a K;

3) $K_1(W^u(q)) \cap f_1^{-1}(U)$ contém uma vizinhança do 0 em V^u.

Assim, se definirmos $f_2: M \to M$ por $f_2(x) = f_1(x)$ para $x \notin f_1^{-1}(U)$ e $f_2(x) = \exp_x K_1(x)$ para $x \in f_1^{-1}(U)$, então f_2 é $\frac{\varepsilon}{4}$ - próximo de f, e $W^u(q, f_2)$ contém um sub-intervalo de J.

Analogamente, podemos definir f_3 tal que $f_3(x) = f_2(x)$ se $x \notin f_1(U)$, f_3 é $\frac{\varepsilon}{4}$ - próximo de f_2 e $W^s(p, f_3)$ contém um subintervalo de J.

Se J' é o subintervalo de J contido em $W^u(q, f_2)$ então $f_3^{-n}(J')$ é disjunto de $f_1(U)$ também $f_3^{-n}(J') = f_2^{-n}(J')$ portanto $J' \subset W^u(q, f_3)$. Assim existe uma vizinhança de x em J a qual está contida em $W^s(p, f_3) \cap W^u(q, f_3)$. Desde que $W^u(p, f_3)$ e $W^s(q', f_3)$ têm ponto de interseção transversal, cada ponto de $W^s(p, f_3) \cap W^u(q, f_3)$ é não-errante. (Veja 1.2).

Mas sabemos que todo difeomorfismo de Kupka-Smale possui somente uma quantidade enumerável de pontos na interseção das variedades estável e instável de dimensões complementares, portanto o mesmo deveria ocorrer com f_3 já que o mesmo é Ω-conjugado a um Kupka-Smale. Mas temos que $\dim W^s(q, f_3) + \dim W^u(q, f_3) \geq \dim M$ e $W^s(p, f_3) \cap W^u(q, f_3)$ contém um intervalo de pontos não errantes e assim, a hipótese inicial é falsa o que acarreta $W^s(O(p))$ e $W^u(O(q))$ intersetam-se transversalmente.

<u>Teorema 3.1</u>:

Se $f: M \to M$ é um difeomorfismo Ω-estável e Λ_1 e Λ_2 são conjuntos sub-básicos os quais são ligados, então

$$\dim E^s(\Lambda_1) = \dim E^s(\Lambda_2)$$

Se $x \in \Lambda_1$ e $y \in \Lambda_2$ então $W^s(x)$ e $W^u(y)$ intersetam-se transversalmente e além disso existe uma constante $\alpha > 0$ tal que para $x \in \Lambda_1$ e $y \in \Lambda_2$ e qualquer ponto de interselão de $W^s(x)$ e $W^u(y)$ o ângulo entre $W^s(x)$ e $W^s(y)$ é maior do que α.

Prova:

Escolha $\varepsilon > 0$ tal que se g é ε-próximo a f na métrica C' então g é Ω-estável e Ω-conjugado a f. Por hipotese existem pontos periódicos $p_1, q_1 \in \Lambda_1$ e $p_2, q_2 \in \Lambda_2$ tal que

$$W^u(q_1) \cap W^s(q_2) \neq \emptyset \quad e \quad W^s(p_1) \cap W^u(p_2) \neq \emptyset .$$

Suponha sem perca de generalidade que $\dim W^s(p_1) + \dim W^u(p_2) = \dim M$. Seja $w \in W^u(q_1) \cap W^s(q_1)$ então podemos obter uma aproximação f_1 a qual é $\frac{\varepsilon}{4}$ - próximo de f na métrica C' e mais, $f = f_1$ no fecho do conjunto $O(w) \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ e a qual tem a propriedade que $W^s(p_1, f_1)$ e $W^u(p_2, f_1)$ tem um ponto de interseção transversal. Pelo teorema 7.6 de [4], $W^s(\Lambda_1, f_1)$ é denso em Λ_2. Portanto $W^s(O(q_1) f_1)$ é denso em $W^s(\Lambda_1, f_1)$ e $W^u(O(q_2), f_1)$ é denso em $W^u(\Lambda_2, f_1)$. Pelo teorema 1.2, $W^s(O(q_1), f_1)$ e $W^u(O(q_2), f_1)$ têm um ponto de interseção e desde que $W^s(p_1, f_1)$ e $W^u(p_2, f_1)$ intersetam-se transversalmente. Isto é, considerando o difeomorfismo f_1, $O(q_1)$ e $O(q_2)$ são ligados. Portanto, pelo lema 3.2 $\dim W^s(q_1) = \dim W^s(q_2)$. ASsim $\dim E^s(\Lambda_1) = \dim W^s(q_2)$. ASsim, $\dim E^s(\Lambda_1) = \dim E^s(\Lambda_2)$.

Suponhamos que não existe uma cota inferior nos ângulos de interseção de $W^s(\Lambda_1)$ e $W^u(\ _2)$, então vamos chegar a uma contradição da Ω-estabilidade de f.

Escolhamos $\beta > 0$ tal que:

1) Se $V_1, V_2 \in TM_x$ são vetores unitários com ângulo entre V_1 e V_2 menor do que β então existe $L: TM_x \to TM_x$ tal que $L(V_1) V_2$ e $||L - id|| < \frac{\varepsilon}{20} (\mathrm{Sup}||df_x|| + 1)^{-1}$;

2) Para cada $x \in \Lambda_1$ ou $x \in \Lambda_2$ o ângulo entre E^s_x e E^u_x é maior do que β.

Suponhamos que existem $x_1 \in \Lambda_1$ e $x_2 \in \Lambda_2$ tal que $W^s(x_1, f_1)$ e $W^u(x_2; f_1)$ interseta em Z com o ângulo entre elas menor do que $\beta/2$ (isto implíca $Z \not\in \Lambda_1 \cup \Lambda_2$). Se $W^s(x_1; f_1)$ não intersseta $W^u(x_2; f_1)$ transversalmente então aproximamos f_1 por f_2 tal que f_2 seja $\frac{\varepsilon}{4}$ - próxima de f_1 na topologia C^1, $f_2 = f_1$ em uma vizinhança de $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup O(Z)$ e $W^s(x_1; f_2)$ interseta $W^u(x_2; f_2)$ transversalmente em Z mas com o ângulo entre elas menor do que β.

Como antes, $W^s(O(q_1); f_2)$ é denso em $W^s(\Lambda_1; f_2)$ e $W^s(O(q_2), f_2)$ é denso em $W^u(\Lambda_2; f_2)$. Portanto, pela continuidade das variedades estáveis locais (teorema 1.1) podemos concluir que existe um ponto Z' próximo a Z onde $W^s(q_1; f_2)$ interseta $W^u(O(q_2); f_2)$ e o ângulo entre elas é menor do que β. Portanto existem vetores unitários $V^s \in TM_z$, tangente à $W^s(O(q_1); f_2)$ e $V^u \in TM_z$ tangente à $W^u(O(q_2); f_2)$ e existe um isomorfismo $L: TM_{z'} \to TM_{z'}$ tal que $L(V^s) = V^u$ e $\|L \circ df_2 - df_2\| < \frac{\varepsilon}{20}$.

Seja $y' = f_2^{-1}(z')$ e defina $G: TM_{y'} \to TM_{z'}$ por $G = L \circ df_2$. Seja $Q = \{f_2^n(y') \; n \neq 0\} \cup O(z)$, aplicando o lema 2.1 ao difeomorfismo f_2 com $\theta = \{y'\}$; G como tinhamos construído e R a vizinhança compacta de $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup Q$ a qual é disjunta de $\{y'\}$.

Obtemos um difeomorfismo $g: M \to M$, Ω-estável e ε-próximo a f na métrica C'. Desde que $g = f_2$ em R então $dg^n(v^s) = df_2^n(v^s)$ para todo $n \geq 0$. Por outro lado $dg^{-n}(v^s) = df_2^{-n}(v^u)$ para $n > 0$. V^s é tangente à $W^s(O(q_1), g)$ e à $W^u(O(q_2), g)$. Portanto, pelo lema 3.3 g não é Ω-estável o que é uma contradição.

Logo existe um número $\alpha > 0$ o qual é cota inferior dos ângulos entre $W^s(x)$ e $W^u(y)$ $\forall x \in \Lambda_1$ e $\forall y \in \Lambda_2$.

B I B L I O G R A F I A

[1] John Frank - Necessary conditions for stability of diffeomorphisms.

[2] R. Abrahan e S. Smale - Non-genericity of Ω-stability.

[3] M. W. Hisch e C. Pugh - "Stable manifolds and hyperbolic sets" in: Global analysis, Proc. Sympos Pure Math. Vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I (to appear).

[4] S. Smale - Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 747 - 817.

[5] S. Smale - "The Ω-stability theorem" in: Global Analisis, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 14, Amer. math. Soc., Providence, R. I (to appear).

[6] Elon Lages Lima - Variedades Diferenciáveis.

[7] M. P. do Carmo - Geometria Riemanniana. Escola de Geometria Diferencial - UFC, de 17 a 28 de julho de 1978.

[8] J. Palis Jr. & Wellington de Melo - Introdução aos sistemas dinâmicos.

[9] J. Palis - "Onthe local struture of hiperbolic ponts in Banach space". Anais da Academia de Ciências.

[10] Nitechi, Zbugniew - Differentiable dynamics.