

Francisco Bento Lustosa

Paredes de Domínio geradas por kinks
continuamente deformáveis em várias
dimensões

Fortaleza

30 de novembro de 2011

Francisco Bento Lustosa

Paredes de Domínio geradas por kinks continuamente deformáveis em várias dimensões

Monografia de final de curso submetida à coordenação do curso de graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do diploma de Bacharel em Física

Orientador:

Carlos Alberto Santos Almeida

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza

30 de novembro de 2011

Francisco Bento Lustosa

Paredes de Domínio geradas por kinks continuamente deformáveis em várias dimensões

Monografia de final de curso submetida à coordenação do curso de graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do diploma de Bacharel em Física

Aprovada em 30 de novembro de 2011

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos Almeida
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. André Auto Moreira
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará

Aos que virão

AGRADECIMENTOS

Aproveito esta oportunidade para agradecer a todos os que contribuíram não só para este trabalho, mas para toda a minha formação como físico e como pessoa durante meus anos na Universidade;

aos meus pais, Isabel Lustosa e César Duarte, por terem me proporcionado em todas as etapas da vida uma educação emancipadora, me ensinando a ver e viver com os próprios pés e decidir os meus caminhos com liberdade;

ao Centro Educacional Anísio Teixeira e a todos os seus funcionários, em especial Denise Laureano, Marcelo Sá Correa, Cláudio Veloso e, mais especialmente ainda aquele que me fez ver que “Física é vida!”, Antonio César;

aos meus amigos e familiares que fizeram de Fortaleza minha cidade, principalmente à super Clélia Lustosa e às amigas Lila, Mariana, Louise e Julianna;

aos meus amigos universitários de muitos cursos que me proporcionaram vivenciar este espaço como ele deve ser vivenciado, trocando experiências com as diversas áreas, aproveitando os diversos espaços, criando diversos conhecimentos;

em especial aos amigos dos cursos de Arquitetura e Urbanismo – Nicole, Bujinha, Gabriel, Icaro – e de Comunicação Social – João, Iane, Amanda, Raquel – que me permitiram desenvolver muitos outros conhecimentos e experiências;

aos grandes companheiros que fiz no meu curto espaço de tempo no movimento estudantil, que me ensinam a cada dia mais o significado da palavra companheiro, Cecília, Poti, Pedrinho, Louise, Germano, Jonas, Monalisa, Renata, Leonardo, Julio e muitos outros que foram e que virão;

aos muitos amigos com quem tive a oportunidade de conversar e discutir sobre os problemas mais profundos do conhecimento físico, biológico e até social, me instigando a ir cada vez mais longe na tentativa de entender a Física;

aos colegas do curso de Física (da UFC e da UFRJ), e em especial aos colegas de Lassco, que em muitos momentos, mesmo sem perceber, me mostraram que eu estava mesmo no lugar certo, dando conselhos e servindo de exemplo;

aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFC, em especial aos professores José Ramos, André Auto, Marcos Antonio e ao meu orientador, Carlos Alberto;

ao CNPQ e à UFC pelo apoio financeiro.

Gênesis

*Primeiro não havia nada
Nem gente, nem parafuso
O céu era então confuso
E não havia nada
Mas o espírito de tudo
Quando ainda não havia
Tomou forma de uma jia
Espírito de tudo
(Caetano Veloso)*

“Only by pressing on to study the history of the universe at still earlier times can these final mysteries be resolved. But at earlier times the universe was hotter, and we can extend the study of the universe to the very earliest times only by considering the behavior of matter at the very highest energies. Thus, with the deepest questions about particle physics pointing us to ever smaller distances, and the deepest questions about cosmology pointing us to ever earlier times, the study of the elementary particle meets the study of the universe—cosmology and particle physics are one.”

(Jason Preskill)

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos os kinks, analisando suas características e mostrando que eles podem representar defeitos topológicos em teorias quântico-relativísticas. Abordaremos os princípios básicos da Relatividade Geral para podermos construir um cenário aonde exista uma parede de domínio que tenha sua espessura controlada pelo parâmetro que regula o campo escalar gerador. Localizaremos esse campo neste cenário e analisaremos suas características e interações com a gravidade.

ABSTRACT

In this work we will present kinks, analyzing their characteristics and showing that they could represent topological defects in quantum-relativistic theories. We will approach the basic principles of General Relativity to construct a model in which exist domain walls that has its thickness controlled by the parameter that regulates the generating scalar field. We will then localize this field in this model and analyze its characteristics and interactions with gravity.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	p. 09
1 KINKS E PAREDES DE DOMÍNIO	p. 14
1.1 Teoria Quântica de Campos	p. 14
1.2 A Equação de Klein-Gordon	p. 15
1.3 Kinks	p. 17
1.4 O Teorema de Derrick	p. 20
1.5 O Método de Bogomoln'y	p. 21
1.6 Flutuações e perturbações na solução	p. 22
1.7 Paredes de Domínio	p. 23
2 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	p. 26
2.1 A Teoria da Relatividade Especial	p. 26
2.2 O Princípio da Equivalência	p. 28
2.3 A Aceleração de a curvatura do espaço-tempo.	p. 29
2.4 Forças Gravitacionais	p. 30
2.5 O Princípio da Covariância Geral	p. 31
2.6 O tensor de curvatura	p. 32
2.7 A equação do campo gravitacional	p. 33
2.7.1 A Identidade de Bianchi	p. 34
2.7.2 O limite newtoniano	p. 34
2.7.3 A equação do campo gravitacional.	p. 35
3 GRAVIDADE ACOPLADA A UM CAMPO ESCALAR CONTINUAMENTE DEFORMAVEL	p. 39
3.1 Construindo a equação de movimento.	p. 39
3.2 Soluções do tipo Kink	p. 43
3.3 Gravidade acoplada ao campo escalar	p. 47
CONCLUSÃO	p. 50
APÊNDICE	p. 51
1 Superando o Teorema de Derrick	p. 51
2 O método de Bogomoln'y para o potencial $U(x^2; \phi) = \frac{W\phi^2}{2r^N}$	p. 52
3 Perturbações na solução do tipo kink	p. 54
REFERÊNCIAS	p. 56

INTRODUÇÃO

A ciência natural tem, desde a sua gênese, tentado juntar elementos para descrever o Universo como um todo. A partir da análise de situações de nosso dia-a-dia nos interessamos pelo comportamento dos corpos, dos fluidos, da luz, etc. O desenvolvimento das ciências naturais e de suas ferramentas (experimentais e matemáticas) nos permitiu adquirir uma compreensão profunda de muitos dos fenômenos físicos que regem o mundo a nossa volta. Porém, todo esse conhecimento foi produzido a partir de pequenas experiências, explicando muitos fenômenos separadamente mas sem nos proporcionar uma visão que permita entender a natureza como um todo, um único.

Isaac Newton foi um físico que dedicou sua vida a estudar diferentes, e aparentemente desconexos, aspectos da física natural. No entanto, apesar de ser capaz de descrever perfeitamente as forças que movem polias, como os planetas orbitam em torno do Sol ou com que ângulo determinado feixe de luz sairá de um meio ele teve pouco sucesso em descrever a natureza desses fenômenos. Ou seja, com sua teoria da gravitação ele seria capaz de descrever um determinado acontecimento físico mas não seria capaz de explicar o que o originou à exaustão. Isso porque a origem de todo acontecimento físico está na própria base estrutural da matéria, até então desconhecida.

Outra área da ciência natural que se desenvolveu separadamente foi a do Eletromagnetismo. O físico James Clerk Mawell, a partir dos experimentos de Michael Faraday, desenvolveu uma série de equações que explicavam perfeitamente o comportamento elétrico e magnético da matéria, incluindo suas influências mutuas. Porém, segundo essas equações, a velocidade da luz seria uma constante do Universo, invariável sob qualquer referencial. Para a física clássica isso apresentou um claro problema pois, se assumimos que a luz é um pulso eletromagnético, ela não poderia ser invariável sob transformações Galileanas de referencial, ou seja, se mudarmos de um referencial para outro classicamente obteríamos velocidades diferentes da luz.

Analisando este problema o físico alemão Albert Einstein chegou a conclusão que a teoria clássica de Newton e as transformações de Galileu não seriam suficientes para descrever o Universo com as novas conclusões do Eletromagnetismo. Assim, ele propôs uma nova forma de analisar a mecânica do espaço, assumindo a velocidade da luz como constante absoluta e maior velocidade possível para todo e qualquer corpo. Desenvolvendo a Teoria da Relatividade Especial Einstein desenvolveu uma nova mecânica que no limite apropriado se iguala a mecânica clássica mas explica também o movimento de corpos com velocidade próxima a da luz. Para além disso, o próprio conceito de tempo e espaço foi modificado, passando o tempo a ser considerado como a quarta dimensão espacial do continuum quadridimensional. Apesar desta teoria dar conta de uma variedade de fenômenos físicos, o comportamento gravitacional, como apresentado pela mecânica clássica, ainda violava a condição de limitação pela velocidade da luz. De acordo com a teoria de Newton, se um corpo mudasse a sua massa, imediatamente os corpos a sua volta sentiriam essa alteração, mas se imaginarmos a gravidade como um campo este teria que ter seus “pulsos” com velocidade máxima igual a da luz.

Ao buscar o entendimento da natureza da força gravitacional, Einstein foi capaz de demonstrar que o espaço-tempo é curvo e que a gravidade é a própria curvatura deste, e não um campo dentro dele. A Teoria da Relatividade Geral apresentou um modelo que era capaz de descrever a mecânica clássica, a mecânica relativística, o eletromagnetismo e a gravitação através da descrição física e geométrica do Universo. Essa teoria até hoje é amplamente aceita, mas atualmente é utilizada como base para novos desenvolvimentos na direção de uma Grande Teoria Unificada.

Simultaneamente ao desenvolvimento da Relatividade Geral, e até com a contribuição de Einstein, aconteceram grandes avanços em outra área da ciência natural, a física atômica. Os debates levantados pela descoberta do núcleo atômico, do comportamento dual do elétron e do comportamento quântico da luz foram o motor que desenvolveu o conhecimento sobre física de partículas, ou física de altas energias. As grandes dificuldades experimentais e até mesmo filosóficas dos problemas quânticos, mas ao mesmo tempo o grande êxito em descrever o comportamento atômico das teorias quânticas, fizeram com que a comunidade de físicos ficasse voltada para essa área durante toda a primeira metade do século XX. Como não poderia deixar de ser,

como a física de partículas trabalha com altas energias e velocidades, logo foi preciso desenvolver uma teoria que desse conta de uma *quântica relativística*.

Essa teoria surgiu para dar conta de alguns problemas de escala quântica que não apresentavam soluções de acordo com a equação de Schrodinger. Apesar desta equação ser dependente do tempo não era eficaz, por exemplo, em descrever o átomo de hidrogênio. A equação de Dirac, apresentada em 1928, descrevia sistemas de muitas partículas e tinha covariância relativística. Esta é a grande motivação do desenvolvimento da *Teoria Quântica de Campos*, tentar estudar sistemas com muitas partículas com altas energias unificando a mecânica quântica, a relatividade e o eletromagnetismo. Apesar da equação de Dirac apresentar solução para uma nova variedade de problemas com partículas de diferentes spins, ela foi apenas o primeiro passo de um desenvolvimento que até o momento continua acontecendo.

No início dos anos sessenta a física de partículas começou a se aproximar do estudo de *defeitos topológicos* já amplamente conhecidos no estudo da matéria condensada. Tais defeitos estão associados sempre a uma determinada quebra de simetria que gera estados degenerados. Um bom exemplo é o comportamento de materiais ferromagnéticos, aonde a energia magnética é minimizada se dividindo em dois domínios com diferentes magnetizações. A região de fronteira entre esses domínios é chamada de *parede de domínio* e é caracterizada como defeito topológico. No equilíbrio térmico temos apenas uma parede, mas se o material mudar de temperatura drástica e rapidamente teremos várias quebras de simetria sem direção privilegiada formando vários defeitos localmente. A quebra de simetria na física de partículas gera efeitos parecidos, mas tem consequências absolutamente revolucionárias para a física como um todo.

O Nobel de Física japonês Yoichiro Nambu foi um dos primeiros a especular sobre a possibilidade de que os defeitos pudessem ter uma significância não só para a física de partículas mas também para o próprio entendimento da estrutura do Universo

Se a minha visão estiver correta, o Universo pode ter uma espécie de estrutura de domínios. Em uma parte do Universo você pode ter uma direção preferencial para o eixo; na outra parte, a direção pode ser diferente.

A partir daí começou a busca por soluções do tipo defeito topológico, ou seja, a sua possível existência em diversos cenários físicos. O cenário de início do Universo, com

temperaturas extremamente altas em rápida mudança, foi um dos primeiros a ser investigado. O físico americano Steven Weinberg notou, em 1974, a possibilidade de existência de paredes de domínio no início do Universo. Durante toda a década de setenta o estudo sobre os defeitos topológicos – paredes de domínio, cordas e monopolos - e suas interações com os diferentes campos presentes no espaço proporcionou o desenvolvimento de diversos modelos e o papel destes objetos se tornou central no entendimento da cosmologia. A introdução de defeitos topológicos na tentativa de descrever o Universo foi um grande passo na construção de uma Grande Teoria Unificada.

Esta monografia tem como objetivo estudar um determinado tipo de Parede de Domínio e localizá-la em um modelo com 5-dimensões em que um campo escalar interage com a gravidade. Para isso, precisamos estudar que tipos de campos são capazes de gerar soluções deste tipo e quais as propriedades de tais campos. A monografia será dividida em três partes;

No capítulo 1 estudaremos os campos escalares separadamente. A partir da equação de Klein-Gordon, que é a equação de um campo dependente do tempo e do espaço, veremos que existem uma variedade de campos que são solução para essa equação e tem formas parecidas, são as chamadas *ondas solitárias*. Exploraremos as propriedades dessas ondas e estudaremos um caso específico delas, os kinks. Essas ondas tem como característica principal a conservação de sua energia através do tempo, mesmo interagindo com outros kinks eles voltam a sua forma original e conservam a energia. Analisaremos estas soluções para teorias clássicas de campos e ao fim apresentaremos como elas podem descrever defeitos topológicos em sistemas de muitas dimensões.

No capítulo 2 apresentaremos os conceitos básicos da Teoria da Relatividade Geral. Faremos uma discussão teórica acerca do desenvolvimento da Relatividade Especial e dos paradoxos deixados por ela. Em seguida, apresentaremos os princípios básicos com os quais Einstein foi capaz de superar esses paradoxos e as ferramentas matemáticas que foram desenvolvidas para tal. Por fim, construiremos a equação para o campo gravitacional, conhecida como Equação de Einstein. Com ela seremos capazes de descrever um cenário relativístico com muitas dimensões, podendo finalmente apresentar nossa parede de domínio. Como já foi apresentado nesta introdução, o desenvolvimento da Relatividade Geral foi responsável por dar as bases para um

entendimento geométrico e físico unificado do Universo. Os desenvolvimentos da Teoria Quântica de Campos se basearam nos conceitos desta teoria e por isso é vital que possamos entendê-la para prosseguir na compreensão de um campo escalar que interaja com o Universo a sua volta de forma mais geral.

No capítulo 3 construiremos o cenário aonde o campo escalar escolhido irá atuar. Apresentaremos a métrica com cinco dimensões e a partir dela construiremos as equações de campo. Apresentaremos o campo escalar específico que iremos estudar e encontraremos suas soluções do tipo kink em várias dimensões. Em seguida, localizaremos esse campo em nosso cenário e na equação de campo, analisando em seguida seu comportamento e sua interação com a gravidade através do fator de warp. O objetivo final desta monografia é oferecer o máximo de informações possíveis sobre esse campo que apresenta soluções do tipo kink que são continuamente deformáveis e abre novas possibilidades para o estudo de Paredes de Domínio.

Capítulo 1

Kinks e Paredes de Domínio

Neste capítulo iniciaremos fazendo uma apresentação do assunto que nos motivou ao estudo de kinks, a Teoria Quântica de Campos. A partir daí, construiremos a equação quântico-relativística para um campo escalar, a equação de Klein-Gordon e, em seguida, apresentaremos as características gerais de um determinado tipo de solução para equações não-lineares de movimento para campos escalares, os kinks. Esse tipo de solução tem como característica fundamental a sua “forma” constante. Demonstraremos alguns exemplos desse tipo de solução para analisar suas propriedades físicas quando representam campos em uma ou mais dimensões espaciais. Quando aparecem em dimensões espaciais maiores que um, kinks podem ser tratados como paredes de domínio esféricas. Apresentaremos as características das soluções em mais de uma dimensão espacial e introduziremos seu papel na descrição de modelos de Universo.

1.1 Teoria Quântica de Campos

Quando Plank apresentou ao mundo a quântica iniciou o estudo sobre uma nova compreensão da matéria e da forma como ela interage. Isso porque a quantização da luz (a descoberta dos fótons) implicava que um pulso eletromagnético, a luz, era um grupo de pacotes de energia. As descobertas posteriores a respeito do comportamento dual do elétron também exigiram dos físicos da época uma análise renovada sobre as próprias características fundamentais da matéria. Portanto, uma teoria que fosse capaz de unificar a teoria quântica, que teve imenso sucesso em descrever o átomo, e a teoria que descreve os campos eletromagnéticos e gravitacionais era, e ainda é, extremamente necessária para o entendimento da física do Universo como um todo.

A nova compreensão das partículas e dos campos, iniciada por Plank, e o formalismo matemático da mecânica quântica, que culminou na equação de onda de Schrodinger, proporcionou o entendimento de fato da quantização do campo eletromagnético. Porém, a diferença entre uma partícula pontual e um campo contínuo ficou confusa. Se temos dois elétrons, com massa e carga, interagindo através de um campo eletromagnético, qual é a diferença fundamental entre o campo e as partículas? Para responder a essa pergunta basta analisar a natureza dessa interação. Se tirarmos um dos elétrons, por exemplo, o campo eletromagnético continuará a existir? Sim, o campo gerado pelo elétron, obviamente, continua a existir mas não seremos capazes de retirar nenhuma informação sobre ele (ou sobre o próprio elétron). Então os elétrons são o quanta do *campo que descreve a interação* entre as partículas da matéria. Isso não vale apenas para o elétron, mas para todas as partículas. Fótons, muons, prótons, todos tem sua interação descrita por um determinado campo. Uma equação de campo para essas partículas deve ser capaz de descrever seu movimento como um todo. A Teoria Quântica de Campos tenta descrever o comportamento de toda a matéria e todas as suas possibilidades de interação (campos), portanto a partir da quantização de campos podemos analisar sistemas diversos, desde a física da matéria condensada, passando pela física de partículas até a cosmologia.

1.2 Equação de Klein-Gordon

Uma teoria que estude os fundamentos da própria matéria deve estar de acordo com a relatividade. Para prosseguir no desenvolvimento da equação de Klein-Gordon então, precisamos introduzir a notação relativística.

Se considerarmos um ponto no espaço-tempo (x, y, z, t) , podemos dizer que um elemento de linha ds , que determine a distância entre esse ponto e outro qualquer, tem a forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

se exigirmos que ele seja invariante sob transformações de Lorentz. Podemos também reescrever os pontos no espaço-tempo como quadrivetores

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$$

o primeiro chamamos de vetor contravariante e o segundo covariante. O elemento ds pode ser escrito então como

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

que é um invariante. A partir de agora assumiremos a convenção de somatório para índices repetidos, então podemos dizer que $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$. A relação entre vetores covariantes e contravariantes é definida pela introdução de uma *métrica*:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3$$

que representa uma matriz diagonal com elementos $g_{\mu\mu} = (1, -1, -1, -1)$. A métrica contravariante, então, terá diagonal $(1, 1, 1, 1)$.

Podemos definir também operadores diferenciais como

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right).$$

O operador diferencial invariante, conhecido como operador de D'Allembert, é

$$\partial^\mu \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \nabla^2,$$

e o quadri-vetor de momento-energia de uma partícula é dado por

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right)$$

com invariante

$$p^\mu p_\mu = p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = c^2 m^2.$$

Se considerarmos uma partícula sem spin, podemos afirmar que seu campo terá apenas uma componente ϕ . Podemos então quantizar a equação acima, substituindo E e \mathbf{p} por seus operadores quânticos $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $i\hbar \nabla$, respectivamente, para obter a equação de onda do campo

$$\left(\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \nabla^2 \right) \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0.$$

Essa é a equação de Klein-Gordon. É fácil ver que se fizermos a aproximação não relativística da equação para p^2 obtemos $E = p^2/2m$. Substituindo pelos operadores quânticos obtemos a equação de Schrodinger que é uma aproximação não-relativística da equação de Klein-Gordon.

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi = -i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Partiremos agora para o estudo das possíveis soluções para a equação de Klein-Gordon e suas propriedades.

1.3 Kinks

Kinks são funções de onda que mantêm sua forma ao longo do tempo, ou seja, que não dissipam energia. A densidade de energia do kink é sempre (ou quase) a mesma em todos os momentos, quase porque em alguns casos há uma dissipação mas ela ocorre tão lentamente que pode ser considerada como perturbação de uma solução não-dissipativa.

O modelo mais simples de kink é o conhecido por $\lambda\phi^4$. Ele tem apenas um campo escalar em 1 + 1 dimensões e tem como ação

$$\begin{aligned}
S &= \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \\
&= \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2 \right]
\end{aligned}$$

aonde $\mu = 0, 1$ e λ e η são parâmetros. O potencial para o campo é

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2 = -\frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\lambda\eta^4}{4}$$

e $m^2 = \lambda\eta^2$. Podemos ver que se fizermos $V(\phi) = 0$ encontramos dois mínimos para o potencial, $\phi = \pm\eta$. Estes são os estados de energia mínima, e tem degenerescência dupla já que $V(\phi) = V(-\phi)$. Os mínimos do potencial também são as soluções triviais da equação de movimento, ou seja, o campo tem duas soluções para equação com valores fixos e simetricamente opostos. Imaginemos agora que diferentes partes do espaço estejam em diferentes “vácuos”, $\phi(t, -\infty) = -\eta$ e $\phi(t, \infty) = \eta$. Apesar dos mínimos serem soluções aceitáveis para o campo, ele deve ter uma solução que passe de um mínimo ao outro. Como $V(0) \neq 0$, devem existir estados entre os dois mínimos que tenham energia diferente de zero. A solução da equação de movimento que atravessa a região entre os mínimos é chamada de kink.

Assumindo como condição de contorno $\phi(\pm\infty) = \pm\eta$ para a equação de movimento

$$\partial_x^2 \phi + \lambda(\phi^2 - \eta^2)\phi = 0$$

aonde excluimos a derivada temporal pois estamos procurando soluções estáticas (não-dissipativas). A solução do tipo kink é dada por

$$\phi_k(x) = \eta \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\eta x\right)$$

se fizermos uma transformação de Lorentz na coordenada x , $x' = x - vt/\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$, e substituirmos na equação acima, $\phi(x')$ é a função de

uma onda se movendo com velocidade v . É fácil ver que se fizermos uma translação, fazendo $x' = x - a$, e expandirmos a solução em Taylor para pequenos valores de a

$$\phi_k(x; a) = \phi_k(x; a = 0) + a \left. \frac{d\phi_k}{dx} \right|_{a=0}$$

a densidade de energia do kink se conservará. Isso quer dizer que o kink tem um modo zero de flutuação de energia, ou apenas, um modo zero. Podemos também fazer uma flutuação na solução ϕ de modo que

$$\phi = \phi_k(x) + \psi(t, x)$$

e o campo de flutuação obedeça a equação de movimento

$$\partial_t^2 \psi - \partial_x^2 \psi + \lambda(3\phi_k^2 - \eta^2)\psi = 0$$

e para acharmos os autovalores de ψ assumimos que ele tenha a forma

$$\psi = e^{-i\omega t} f(x)$$

Como a translação deve conservar a energia, deve haver uma solução com $\omega = 0$.

Assim, podemos assumir uma translação da forma

$$\Phi = \phi_k(x) + f_0(x).$$

Comparando com a expansão de Taylor para $\phi_k(x; a)$, vemos que a solução para o modo zero, ou seja, a flutuação que corresponde a conservação da energia, é

$$f_0(x) = \left. \frac{d\phi_k}{dx} \right|_{a=0} = \eta^2 \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \eta x \right)$$

A densidade de energia do kink $\phi_k(x)$ é dada por

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_k)^2 + V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_x \phi_k)^2 + V(\phi) = V(\phi) + V(\phi) = \frac{\lambda \eta^4}{2} \operatorname{sech}^4 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \eta x \right).$$

Podemos ver que $(\partial_x \phi_k)^2 = 2V(\phi)$, que está de acordo com o princípio de Hamilton para a ação S.

Na figura abaixo apresentamos o gráfico para o kink e para sua densidade de energia. Podemos ver que, como esperado, a região de máxima energia é exatamente no ponto aonde $\phi(x) = 0$. Isso acontece pois é exatamente nessa região que o campo atravessa uma “fronteira”, a barreira de potencial.

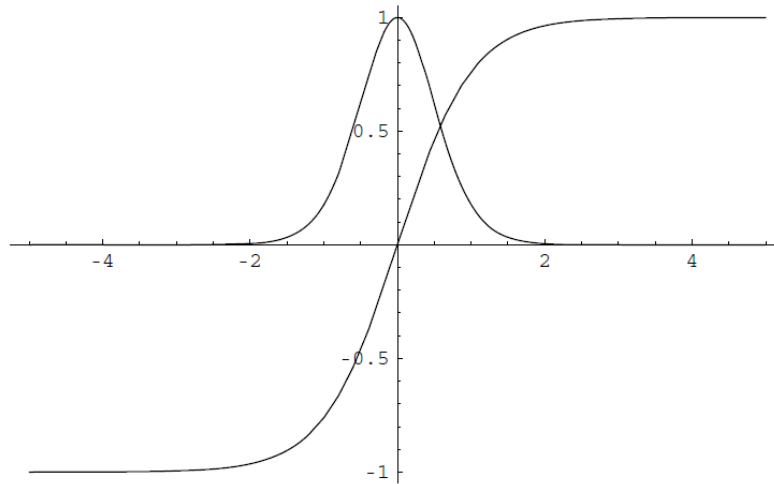


Fig 1 – A curva variando de -1 a 1 representa o kink com $\lambda = 2$ e $\eta = 1$. A densidade de energia também foi representada no gráfico.

É claro a partir da solução e de sua densidade de energia que a espessura de metade do kink, a região de $x = 0$ até um dos mínimos é

$$w = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \frac{1}{\eta}} = \frac{\sqrt{2}}{m} = \frac{2}{m_\psi}$$

não iremos nos aprofundar nesta propriedade agora, mas será importante no Capítulo 3 notarmos que a espessura do kink pode ser regulada pelos parâmetros de seu potencial. Isso ocorre de diferentes formas para diferentes campos.

1.4 Teorema de Derrick

O kink é definido por sua forma estática, sua conservação de densidade de energia conforme a onda (ou o pacote de energia) se move. Apresentamos na seção anterior o exemplo básico de um kink em uma dimensão espacial, agora partiremos para a análise da possibilidade de kinks em mais de uma dimensão.

Considere que generalizemos a ação para um campo escalar em n dimensões

$$S = \int d^{n+1}x \left[\frac{1}{2} \sum_a (\partial_\mu \phi^a)^2 - V(\phi^a) \right]$$

aonde o potencial deve ser maior que zero, e o índice a representa a possibilidade de vários campos escalares no modelo. Façamos agora a mudança de variável

$$\Phi_0^a(x^\mu) = \phi_0^a(\alpha x^\mu)$$

Se a densidade de energia é de fato estática, ela deve ser invariante sob transformações deste tipo. A energia do campo transformado é

$$E[\Phi_0^a] = \int d^n x \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi_0^a)^2 + V(\Phi_0^a) \right]$$

aonde a soma sobre a é implícita. Se fizermos uma mudança de variável nas coordenadas $y^\mu = \alpha x^\mu$ obtemos

$$E[\Phi_0^a] = \int d^n y \left[\frac{\alpha^{-n+2}}{2} (\nabla \phi_0^a(y))^2 + \alpha^{-n} V(\phi_0^a(y)) \right]$$

E observamos que, se tivermos $n \geq 2$ com $\alpha > 1$, a densidade de energia do campo original não se conserva para o campo transformado; $E[\Phi_0^a] < E[\phi_0^a]$. Dessa forma, o Teorema de Derrick afirma que *não pode haver configuração de energia estática finita para um campo escalar em mais de uma dimensão espacial.*

1.5 Método de Bogomoln'y

Na seção 1.2 encontramos uma determinada solução do tipo kink a partir de uma equação de movimento de segunda ordem. Em muitos casos encontraremos equações de segunda ordem muito difíceis de se resolver e por isso nos seria útil reduzi-las a equações de primeira ordem. Adicionando um termo no funcional de energia, obtemos

$$\begin{aligned}
E &= \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right] \\
&= \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi \mp \sqrt{2V(\phi)})^2 \pm \sqrt{2V(\phi)} \partial_x \phi \right] \\
&= \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi \mp \sqrt{2V(\phi)})^2 \right] \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi' \sqrt{2V(\phi')}
\end{aligned}$$

então para que a energia seja mínima, basta que

$$\partial_t \phi = 0 \text{ e } \partial_x \phi \mp \sqrt{2V(\phi)} = 0$$

fazendo a energia mínima

$$E_{\min} = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi' \sqrt{2V(\phi')}.$$

Então, se pudermos minimizar a energia, podemos também escrever a equação de movimento como a equação de primeira ordem

$$\partial_x \phi = \pm \sqrt{2V(\phi)}.$$

Esse resultado nos será muito útil no Capítulo 3.

1.6 Flutuações e perturbações na solução

Como analisamos na seção 1.1, o campo nada mais é do que a descrição da interação entre as partículas. Excitações e perturbações no contínuo do campo significam interações de algum tipo. É sempre importante no estudo de campos quantizados demonstrar como a sua solução pode ser excitada e qual é o estado fundamental de sua excitação, o estado de mais baixa excitação que permita a conservação da energia. Vimos na seção 1.3 que para calcular a perturbação no kink, introduzimos um campo da seguinte forma

$$\phi = \phi_k(x) + \psi(t, x)$$

$$\psi = e^{-i\omega t} f(x)$$

e podemos mostrar, a partir da equação de movimento para ψ que f obedece à

$$\partial_x^2 f - \lambda(3\phi_k^2 - \eta^2)f = \omega^2 f$$

no caso do potencial $\lambda\phi^4$. Porém, se inserirmos a perturbação diretamente na Lagrangeana (retirada da ação apresentada no início da seção 1.3)

$$L = \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - V(\phi)$$

Obtemos a Hamiltoniana para a função f

$$Hf = f'' - U(x)f = \omega^2 f$$

aonde

$$U(x) \equiv V''(\phi_k(x)) \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_k}$$

que no caso dos kinks tem uma forma especial que nos permite simplificar essa Hamiltoniana. Já vimos que esta equação tem, para os kinks, um estado de translação que necessariamente tem a energia conservada com $\omega = 0$. Assumamos então que $f_0 = \psi_t$ e tem a equação de movimento

$$H\psi_t = (-\partial^2 + U(x))\psi_t = 0$$

então $U(x)$ deve ter a forma

$$U(x) = \frac{\psi_t''}{\psi_t} = f' + f^2, \quad f = (\ln(\psi_t))'$$

aonde todas as derivadas são com respeito a x . Esse potencial nos permite escrever a Hamiltoniana de outra forma

$$H = A^+ A \equiv (+\partial + f)(-\partial + f)$$

assim a equação para os demais estados e autovalores ω fica

$$Hf = A^+ Af = \omega^2 f$$

que determina os possíveis estados de excitação ao redor do kink. Assim o potencial $U(x)$ determina todas as perturbações possíveis.

1.7 Paredes de Domínio

As Paredes de Domínios são defeitos topológicos que existem em regiões aonde há uma quebra de simetria de um determinado campo e ele assume dois valores diferentes em espaços vizinhos. A Parede de Domínio é a região de transição entre um valor e outro. Esse tipo de defeito pode aparecer tanto na matéria condensada, em materiais ferromagnéticos, como na física de partículas, no estudos dos campos e em modelos cosmológicos. Neste trabalho estamos interessados principalmente em suas características em modelos cosmológicos, portanto nesta seção observaremos suas principais características deste ponto de vista usando como exemplo o kink da seção 1.3.

É fácil perceber que esse campo poderia ser descrito como um kink, como o descrito na seção 1.3. Porém, devido ao Teorema de Derrick teremos problemas em encontrar soluções do tipo kink em mais de uma dimensão espacial.

A Parede de Domínio mais simples é descrita pelo kink apresentado na seção 1.3, aonde vimos que a espessura da parede é

$$w = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{m} = \frac{2}{m_\psi}$$

e se usarmos a equação de energia do kink para $x = 0$ encontramos a densidade de energia no centro da parede

$$\varepsilon = \frac{\lambda \eta^4}{2}$$

o que nos dá uma densidade superficial da ordem de $\varepsilon w \sim \sqrt{\lambda} \eta^3$. Se imaginarmos uma parede de domínio no vácuo o parâmetro η definirá a densidade de energia da parede e é chamado de parâmetro de quebra de simetria. Porém, em paredes de domínio em cenários cosmológicos se ele não for muito pequeno pode afetar a homogeneidade do Universo.

No Capítulo 2 mostraremos como esse objeto é importante para a análise de qualquer campo em cenários com gravidade, mas já podemos afirmar que o *tensor de momento-energia* é representado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} L$$

que nos dá

$$T^\mu_\nu = f(x) \text{diag}(1,0,1,1)$$

aonde $f(x)$ é uma função com a mesma espessura ω de forma

$$f(x) = \frac{\lambda \eta^4}{2} \left(\cosh \left(\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right) \eta x \right) \right)^{-4}.$$

O tensor de momento-energia também é invariante sob transformações de Lorentz no plano yz , o que implica que a parede terá apenas movimento transversal mas que pode atingir velocidades relativísticas. E é pela importância dos efeitos relativísticos e gravitacionais na dinâmica desses (e, na verdade, de todos os defeitos topológicos em cenários cosmológicos) que partimos agora para o estudo da Teoria da Relatividade Geral.

Capítulo 2

Conceitos Básicos da Teoria da Relatividade Geral

Neste capítulo apresentamos tópicos básicos do desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral, partindo dos questionamentos levantados por Albert Einstein após a formulação da Teoria da Relatividade Especial. Apesar de encontrar a unificação da mecânica clássica de Newton e do Eletromagnetismo recém-desenvolvido por Maxwell a Relatividade Especial encontrou problemas na sua relação com outra importante área do conhecimento físico, a gravitação. Veremos aqui os princípios básicos que levaram a construção da Relatividade Geral, que propõe uma nova visão de universo que altera a visão da geometria do Universo e abre as portas para a construção de novos modelos que comportam não apenas a Mecânica Clássica, o Eletromagnetismo e a Gravitação, mas também a Mecânica Quântica.

2.1 A Teoria da Relatividade Especial

O pontapé inicial para a construção da Teoria da Relatividade Especial, apresentada por Einstein em 1905 aos Anais da Física, foi dado ainda no século XIX pelo físico inglês James Clerk Maxwell que formulou a teoria do Eletromagnetismo. Ao formular sua teoria, a partir de resultados experimentais obtidos por Faraday, Maxwell demonstrou que a luz é um tipo específico de onda eletromagnética que se move a uma velocidade constante e imutável.

Essa afirmação por si só já é o paradoxo que tornou necessária a reavaliação de todos os conceitos da Mecânica Clássica de Newton. Isso porque, para Newton, a natureza não privilegia nenhum sistema inercial, ou seja, o movimento da matéria deve

obedecer às mesmas leis para todos os sistemas inerciais, sendo as relações de um sistema com outro dado pelas transformações de Galileu.

$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{d},$$

$$t' = t + \tau,$$

onde v , d e τ são constantes reais e R é qualquer matriz ortogonal. Essa invariância sob transformações no sistema é o que garante a unidade do conhecimento adquirido por diferentes experimentos em diferentes referenciais. As Leis de Maxwell não são invariantes sob as transformações de Galileu, justamente porque a luz não tem a sua velocidade modificada com a mudança de sistema.

Para solucionar essas questões Einstein propôs que as transformações de Galileu fossem substituídas por outras, desenvolvidas por Lorentz a partir dos resultados do famoso experimento de Michelson-Morley:

$$\vec{x}' = \frac{\vec{x} - \vec{v}t}{(1 - v^2)^{1/2}},$$

$$t' = \frac{t - \vec{v} \cdot \vec{x}}{(1 - v^2)^{1/2}}.$$

que fazem com que tanto as equações de Maxwell quanto a velocidade da luz permaneçam invariantes. A segunda Lei de Newton teve de ser modificada para se adequar a nova concepção de espaço e tempo, unificada em 1908 por Minkowski no espaço-tempo quadridimensional.

A Teoria da Relatividade Especial permitiu que estudássemos todas as leis da natureza em qualquer referencial, mas não especificou nenhum referencial “absoluto”. Os sistemas inerciais aos quais nos referimos estão sempre correlacionados pelas transformações de Lorentz, mas não sabemos em qual estrutura esses referenciais se encontram.

Além disso, com a relatividade especial estabeleceu-se que nenhum sinal poderia se propagar com velocidade superior a da luz. Portanto, toda a transmissão de informação deve ter velocidade igual ou menor que a da luz. A interação

eletromagnética satisfaz essa condição, mas a gravitação de Newton não. Nesta teoria a interação entre dois corpos depende apenas de sua massa e da distância entre eles, assim, se um corpo muda de posição ou aumenta sua massa o outro sentirá o efeito imediatamente. Isso, de acordo com a Relatividade Especial, não seria possível se a gravidade fosse transmitida por um sinal que deveria viajar com velocidade menor do que a da luz.

A partir dessas duas questões, Einstein se debruçou sobre o estudo da origem da interação gravitacional e construiu os princípios da Relatividade Geral.

2.2 O Princípio da Equivalência

O princípio da equivalência se baseia na igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, observada experimentalmente com enorme precisão bem antes de Einstein começar a estudar a gravidade. A massa gravitacional é a carga de força gravitacional que o corpo carrega, a inercial é a que mede a capacidade de resistência de um corpo a uma determinada força.

Einstein percebeu que um sistema acelerado de partículas pode ser estudado como um sistema inercial se considerarmos um referencial em queda livre. Isso pode ser demonstrado facilmente se considerarmos um sistema de partículas sob o efeito de uma força interna $F(x_n - x_m)$ e um campo gravitacional g . A equação de movimento para a partícula n é:

$$m_n \frac{d^2 \vec{x}_n}{dt^2} = m_n \vec{g} + \sum_m \vec{F}(\vec{x}_n - \vec{x}_m)$$

se fizermos a transformação

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad t' = t,$$

a gravidade g será cancelada por uma força inercial e a equação de movimento fica:

$$m_n \frac{d^2 \vec{x}'_n}{dt^2} = \sum_m \vec{F}(\vec{x}'_n - \vec{x}'_m).$$

Os dois observadores perceberão as leis da mecânica da mesma forma, com a diferença de que o observador O sentirá o campo gravitacional e o O' não. O princípio da equivalência diz que a força gravitacional pode sempre ser cancelada por uma força inercial para um referencial em queda livre. Com esse princípio afirmamos que não há diferença entre um ponto de vista acelerado sem campo gravitacional e um ponto de vista não acelerado com campo gravitacional. Essa é a primeira descoberta sobre uma relação profunda entre a gravidade e a própria natureza do movimento.

2.3 A aceleração e a curvatura do espaço-tempo

Analisaremos a curvatura do espaço-tempo a partir de um exemplo bem simples, considerando a aceleração centrípeta do movimento circular. Digamos que um observador B percorre uma circunferência com velocidade ω munido de uma régua para medir seu comprimento. No centro da circunferência um observador A mede o comprimento do raio. De acordo com a Relatividade Especial a régua de B sofrerá uma contração, de modo que ele obterá um resultado maior do que o observador A pois o instrumento de medida deste está perpendicular ao movimento do círculo. Assim, a razão do tamanho da circunferência sobre o raio será maior que 2π para os observadores sobre o disco. Concluímos que para um referencial acelerado a geometria euclidiana não é válida, pelo princípio da equivalência então, para um referencial sob efeito de um campo gravitacional ela também não o é. Einstein concluiu então, que a gravidade curva o espaço. Posteriormente veremos que na verdade a gravidade *é* a curvatura do espaço-tempo.

Como já foi dito antes, a partir da Relatividade Especial foi construído o espaço de Minkowski, aonde espaço e tempo se tornam apenas dimensões do sistema de coordenadas. Portanto, se a gravidade “curva” o espaço, deve curvar o tempo da mesma maneira.

Retomemos o nosso exemplo anterior, assumindo agora que A e B estão munidos de relógio. O observador A se desloca no sentido radial em direção a B, que se move sobre o disco. De acordo com a relatividade especial, quanto mais rápido um observador mais devagar o tempo passa para ele. Assim, o relógio de B andarás mais devagar que o de A. Porém, a medida que A se afasta do centro do círculo, o ritmo com que o tempo de seu relógio anda se aproxima do de B. O tempo se curva para A, ou

seja, o tempo é curvo a medida que seu ritmo de passagem difere de um lugar para o outro. Quanto maior a aceleração, mais devagar a passagem do tempo e mais acentuada a curvatura do tempo. Portanto, pelo princípio da equivalência, quanto maior o campo gravitacional maior a curvatura do *espaço-tempo*.

Essa conexão entre gravidade e movimento e a curvatura do espaço é o passo fundamental para entender o papel dessa força em nosso Universo. Portanto, é também o passo fundamental para a construção da Teoria da Relatividade Geral.

2.4 Forças Gravitacionais

A partir do princípio da equivalência e da curvatura do espaço-tempo podemos agora construir a estrutura matemática que define o nosso espaço. Construiremos essa estrutura a partir das bases matemáticas oferecidas pela Relatividade Especial. Neste capítulo não nos deteremos às definições que podem ser encontradas na seção 1.2.

Assumimos agora a existência de um sistema em queda livre ξ^a cuja equação de movimento é dada pela Relatividade Especial:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0,$$

onde $d\tau = ds/c$ é o tempo próprio

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta.$$

Agora escolhamos outro sistema de coordenadas quaisquer x^μ , de modo que ξ^a são funções de x^μ . Reescrevendo a equação de movimento obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \end{aligned}$$

Multiplicamos essa expressão por $\partial x^\lambda / \partial \xi^a$, obtemos a equação de movimento:

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau},$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é a conexão afim definida por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

Podemos agora reescrever o tempo próprio de acordo com o novo sistema:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico definido por

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}.$$

É fácil ver a partir dessas últimas equações que a conexão afim é responsável por representar a gravidade no novo sistema de coordenadas. Podemos mostrar que a métrica $g_{\mu\nu}$ é o potencial gravitacional, ou seja, suas derivadas determinam o campo $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right]$$

2.5 O princípio da Covariância Geral

Nas últimas seções apresentamos o princípio da equivalência, que nos permitiu generalizar os resultados da relatividade especial para sistemas com a presença de gravidade. Porém o método de transformação de coordenadas pode se mostrar muito trabalhoso quando estudamos sistemas mais complexos com campos eletromagnéticos e gravitacionais. Uma visão alternativa do princípio de equivalência foi construída e chamada de Princípio da Covariância Geral. Segundo ele, as equações físicas serão válidas em um campo gravitacional se duas condições forem atendidas:

1. As equações devem ser satisfeitas na ausência de gravidade;
2. As equações devem possuir covariância geral, ou seja, elas devem preservar sua forma sob quaisquer transformações $x \rightarrow x'$.

De acordo com a segunda condição as equações devem ser escalares perante as transformações, condição obedecida pela contração de tensores. Porém, a derivada de tensor em geral não é um tensor. Portanto para satisfazer a condição 2 foi preciso construir uma nova derivada, a covariante.

A derivada covariante de um vetor contravariante é definida por:

$$V^\mu{}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa$$

e a do vetor covariante:

$$V_{\mu;\lambda} \equiv \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} V_{\kappa}.$$

Ainda podemos generalizar essa definição para tensores mais gerais. A derivada covariante com respeito a x^{ρ} é igual a sua derivada ordinária com respeito a x^{ρ} , adicionando para cada índice contravariante μ um termo com $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ vezes o tensor com μ renomeado por ν e subtraindo para cada índice covariante λ um termo com $\Gamma_{\lambda\rho}^{\kappa}$ vezes o tensor com λ trocado por κ .

$$T_{\lambda}^{\mu\sigma}{}_{;\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} T_{\lambda}^{\mu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} T_{\lambda}^{\nu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} T_{\lambda}^{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\kappa} T_{\kappa}^{\mu\sigma}.$$

É importante destacarmos algumas propriedades da derivada covariante. É fácil ver que na ausência de gravidade, quando $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = 0$, ela se converte na derivada ordinária. Além disso, ela é uma transformação linear que converte tensores em outros tensores. Então, para incluirmos os efeitos da gravidade em nossas equações precisamos modificar a métrica e as derivadas para que o princípio da covariância geral seja respeitado.

2.6 O tensor de curvatura

Já vimos anteriormente que a gravidade tem íntima conexão com a curvatura do espaço-tempo e vimos também que a métrica $g_{\mu\nu}$ é o potencial gravitacional. Começamos agora a investigar o que podemos construir a partir desta métrica e de suas derivadas. Porém, a derivada covariante de $g_{\mu\nu}$ é zero e portanto não podemos obter nenhum tensor dela. Como não podemos aplicar a derivada covariante diretamente na métrica, aplicaremos em um vetor genérico V^{λ} :

$$\begin{aligned} V^{\lambda}{}_{;\nu\mu} &= \frac{\partial^2 V^{\lambda}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \frac{\partial V^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \frac{\partial V^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \frac{\partial V^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} + \\ &+ \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} V^{\sigma} + \frac{\partial \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} V^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} V^{\sigma}. \end{aligned}$$

Os termos com derivadas de V^{λ} não nos permitem encontrar um tensor composto apenas por $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas, porém, eles são simétricos na troca de μ por ν . Podemos escrever então:

$$V^\lambda{}_{;\nu\mu} - V^\lambda{}_{;\mu\nu} = \left[\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \right] V^\sigma$$

como o termo a esquerda da equação é um tensor e V^σ é um vetor, o termo entre colchetes é um tensor. Este termo constitui o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel

$$R^\lambda{}_{\sigma\nu\mu} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\sigma}$$

formado somente pela métrica e suas derivadas até segunda ordem, sendo ainda linear em suas derivadas segundas. Este é o único tensor com essas propriedades, podem ser úteis a nós também suas combinações lineares como o tensor de Ricci

$$R_{\mu\sigma} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\sigma},$$

e a curvatura escalar

$$R \equiv g^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma}.$$

Veremos a seguir que o tensor de curvatura tem grande importância por nos dar informações sobre o tensor métrico. Se o tensor métrico for constante, o tensor de curvatura se anula. Mas pelo seu caráter tensorial, $R^\nu{}_{\mu\lambda\sigma}$ em um sistema arbitrário, onde a métrica não é constante, também se anulará. Assim, a nulidade do tensor de curvatura é condição necessária e suficiente para que exista um determinado sistema de coordenadas aonde a métrica seja constante.

2.7 A equação do campo gravitacional

Apresentamos até aqui alguns dos princípios que foram construídos durante o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral. Einstein observou inicialmente os paradoxos existentes em sua Teoria da Relatividade Restrita e como ela não abarcava a explicação do comportamento dos campos gravitacionais. A partir daí, ele investigou as relações existentes entre a gravidade e o movimento, e mais ainda, com o próprio sistema referencial encontrando a relação do campo gravitacional com a curvatura do espaço-tempo, representada pela métrica $g_{\mu\nu}$. Se mostrou imperativo então estudar o comportamento deste tensor e construir uma equação para o campo gravitacional que respeitasse o princípio da covariância geral.

2.7.1 A Identidade de Bianchi

Inicialmente vamos introduzir aqui uma igualdade que nos será útil na construção da equação do campo gravitacional, a Identidade de Bianchi. Lembrando que

$$V^\lambda{}_{;\mu\nu} - V^\lambda{}_{;\nu\mu} = R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma$$

aplicando novamente a derivada covariante e fazendo permutações cíclicas entre os índices covariantes obtemos

$$V^\lambda{}_{;\mu\nu\rho} - V^\lambda{}_{;\nu\mu\rho} = R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu;\rho} V^\sigma + R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma{}_{;\rho}$$

$$V^\lambda{}_{;\rho\mu\nu} - V^\lambda{}_{;\mu\rho\nu} = R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu;\nu} V^\sigma + R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu} V^\sigma{}_{;\nu}$$

$$V^\lambda{}_{;\nu\rho\mu} - V^\lambda{}_{;\rho\nu\mu} = R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho;\mu} V^\sigma + R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} V^\sigma{}_{;\mu}$$

Considerando que $R^\nu{}_{\mu\lambda\sigma}$ é anti-simétrico, se somarmos as três equações obtemos

$$[R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu;\rho} + R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu;\nu} + R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho;\mu}] V^\sigma = 0$$

que deve ser válida para todo V^σ , então

$$R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu;\rho} + R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu;\nu} + R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho;\mu} = 0,$$

que é a Identidade de Bianchi. Usando a métrica, podemos contrair os índices para obter

$$R_{\sigma\nu;\rho} - R_{\sigma\rho;\nu} - R^\mu{}_{\sigma\nu\rho;\mu} = 0,$$

contraíndo mais uma vez

$$R_{\sigma\nu}{}^{;\sigma} - R_{;\nu} + R_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0.$$

Como o primeiro e o terceiro termos do lado direito são iguais, podemos escrever:

$$R_{\mu\nu}{}^{;\mu} = \frac{1}{2} R_{;\nu}.$$

2.7.2 O limite newtoniano

Retornamos agora a equação de movimento obtida na seção 2.4 com a introdução da gravidade em um sistema inercial

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau},$$

e consideraremos o caso aonde as partículas se movem lentamente e o campo é fraco, o limite aonde a teoria newtoniana é válida. Neste caso podemos desprezar $dx/d\tau$, e utilizar $dt/d\tau$, e considerando o campo estacionário todas as derivadas temporais da métrica serão nulas então

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}}.$$

Lembrando novamente dos cálculos da seção 2.4, vamos dessa vez assumir uma métrica próxima a minkowskiana

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1.$$

Substituindo na equação de movimento e na equação para a conexão afim levando $h_{\alpha\beta}$ a primeira ordem, obtemos

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00},$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0.$$

Lembrando da equação newtoniana para o campo gravitacional

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\phi.$$

e assumindo $dt/d\tau$ constante devido a equação anterior, podemos concluir que $h_{00} = -2\phi$, e portanto que $g_{00} = -(1 + 2\phi)$.

2.7.3 A Equação do Campo Gravitacional

Dependemos até agora da métrica para introduzir os efeitos gravitacionais nos sistemas, mas ainda não temos como determiná-la. Se admitimos que ela é o potencial gravitacional, como vimos anteriormente, e que a equação para o campo gravitacional deve concordar, no limite apropriado, com a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho,$$

aonde ρ é a densidade da matéria. De acordo com a famosa fórmula de Einstein, massa nada mais é do que energia, e esta tem sua representação matemática no tensor momento-energia $T^{\alpha\beta}$. Admitindo que $\rho \approx T^{00}$ e que $g_{\mu\nu}$ é o potencial gravitacional, podemos acreditar que no limite newtoniano é válido escrever

$$\nabla^2 g_{00} = k T_{00}$$

aonde $k = -8\pi G$, de acordo com o resultado da seção anterior para g_{00} . Essa equação descreveria um campo fraco estacionário gerado por matéria não-relativística, mas da forma que está não é invariante de Lorentz. Porém, a partir dela podemos imaginar que uma equação para uma distribuição geral de massa para um campo gravitacional arbitrário deveria possuir a forma

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu},$$

aonde $G_{\mu\nu}$ é um tensor geral formado por $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas. Vimos na seção anterior que o tensor mais geral com essas características é o tensor de Riemann-Christoffel, e que com ele só podemos formar outros dois tensores, o tensor de Ricci e a curvatura escalar. Portanto, podemos assumir que a forma mais geral de $G_{\mu\nu}$ será

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R.$$

Assim como na física clássica, a energia deve se conservar, por isso

$$T_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0,$$

então, derivando a equação para o campo gravitacional e utilizando a Identidade de Bianchi contraída podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 = G_{\mu\nu}{}^{;\mu} &= (C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R)^{;\mu} \\
&= C_1 R_{\mu\nu}{}^{;\mu} + C_2 g_{\mu\nu} R^{;\mu} \\
&= \left(\frac{1}{2} C_1 + C_2 \right) R_{;\nu}.
\end{aligned}$$

Então, ou $C_2 = -C_1/2$ ou $R_{;\nu}$ é zero. Porém, dispensaremos a segunda possibilidade pois R não é constante em todos os casos. Obtemos assim

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right)$$

Agora retornaremos ao limite newtoniano, aonde a métrica é $g_{00} = -(1 + 2\phi)$ e podemos escrever a conexão afim como

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}}.$$

Calculando o tensor de curvatura obtemos

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}.$$

como no limite newtoniano o tensor de momento-energia se resume a densidade de matéria ρ . Nesse limite, consideramos $\mu = i$, e $\nu = j$

$$G_{ij} = C_1 \left(R_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} R \right) = 0.$$

De modo que, se retornarmos a contração inicial do escalar de curvatura

$$R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \delta^{ij} R_{ij} - R_{00} = \frac{3}{2} R - R_{00},$$

$$\therefore R = 2R_{00}.$$

Analisando agora a componente aonde $\mu = \nu = 0$, vemos que

$$\begin{aligned}
G_{00} &= C_1 \left(R_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} R \right) = -8\pi G \rho \\
&= C_1 (R_{00} + R_{00}) = -8\pi G \rho \\
&= C_1 \nabla^2 g_{00} = -8\pi G \rho.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $C_1 = 1$. Assim encontramos o tensor de curvatura de Einstein $G_{\mu\nu}$, e consequentemente, a equação de Einstein que buscávamos

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= -8\pi G T_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Esse resultado concorda perfeitamente com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade como um todo. Vejamos, do lado esquerdo da equação temos termos “puramente” geométricos, o tensor de curvatura, a métrica e o escalar. Do lado direito, temos apenas o tensor de momento-energia do sistema. Assim, como já havíamos percebido antes a gravidade tem uma relação intrínseca com a geometria do universo. A própria energia, então, é a fonte da curvatura do espaço-tempo e é exatamente essa curvatura a responsável pela interação gravitacional.

Essa conclusão é fundamental para entender a importância do campo escalar que apresentaremos a seguir como defeito topológico na estrutura do universo. Como apresentado no capítulo anterior, defeitos topológicos do tipo kink são gerados por campos escalares, mas se quisermos localizá-los em uma determinada geometria do universo precisamos analisar como ele interage com a gravidade através da equação de Einstein. A apresentação deste campo e sua localização são o assunto do próximo capítulo.

Capítulo 3

Gravidade acoplada a um campo escalar continuamente deformável

O desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral mostrou a infinita importância do estudo da geometria do Universo. Os estudos acerca desse tema se desenvolveram em conjunto com a teoria quântica e nas últimas décadas a Teoria Quântica de Campos se tornou a principal ferramenta na tentativa de explicar o início do Universo e toda a sua constituição geométrica e física. Não é a intenção deste trabalho apresentar aprofundadamente nenhum dos modelos propostos pela TQC, mas sim tentar estudar determinadas características de um modelo que admita cinco dimensões aonde possam existir campos escalares e gravitacionais.

Em geral, modelos deste tipo – com campos escalares na quinta dimensão – podem apresentar estruturas de membranas. Essas membranas se assemelham às paredes de domínio ferromagnéticas, se caracterizando pela transição entre duas regiões pelas quais um determinado parâmetro passa variando de valor. Um campo escalar com diferentes mínimos de potencial em regiões próximas pode gerar um estrutura deste tipo, como vimos no primeiro capítulo. Agora, construiremos o cenário aonde um determinado campo escalar, que apresentaremos nas seções seguintes, pode interagir com a gravidade gerando paredes de domínio com espessura continuamente deformável.

3.1 Construindo as equações de movimento

Usaremos uma determinada métrica que nos permita analisar a interação da quinta dimensão com as demais

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 = G_{MN} dx^M dx^N$$

aonde os índices μ e ν vão de 0 a 3 e os índices M e N variam de 1 a 5. Podemos então escrever

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} -e^{2A(y)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2A(y)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2A(y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2A(y)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde

$$\sqrt{-G} = \sqrt{-(-e^{8A(y)})} = e^{4A(y)}$$

Para construirmos a equação de movimento a partir da equação de Einstein precisamos calcular o tensor de Ricci e a curvatura escalar para essa métrica. O tensor de Ricci é obtido através da contração do tensor de curvatura, como visto no capítulo anterior, e este pode ser escrito como

$$R^P{}_{MQN} = \partial_Q \Gamma^P{}_{MN} - \partial_N \Gamma^P{}_{MQ} + \Gamma^R{}_{MN} \Gamma^P{}_{RQ} - \Gamma^R{}_{MQ} \Gamma^P{}_{RN}.$$

Sabemos que $\Gamma^P{}_{MN}$ é a conexão afim e podemos escrevê-la

$$\Gamma^P{}_{MN} = \frac{1}{2} G^{PQ} (\partial_M G_{QN} + \partial_N G_{QM} - \partial_Q G_{MN})$$

calculando-a encontramos o tensor de curvatura e o escalar

$$\Gamma_{51}^1 = \Gamma_{52}^2 = \Gamma_{53}^3 = \Gamma_{54}^4 = A'(y) \quad , \quad A'(y) = \frac{dA(y)}{dy},$$

$$\Gamma_{22}^5 = \Gamma_{33}^5 = \Gamma_{44}^5 = -\Gamma_{11}^5 = -e^{2A} A'(y),$$

$$R_{22} = R_{33} = R_{44} = -R_{11} = -e^{2A}[4A'(y)^2 + A''(y)]$$

$$R_{55} = -4[A'(y)^2 + A''(y)],$$

$$R = -4[5A'(y)^2 + 2A''(y)].$$

Essas informações nos permitem agora calcular as equações de movimento para um campo escalar ϕ nesse cenário. Começaremos analisando a equação de Einstein

$$R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R = 8\pi G T_{MN}.$$

Para obter o tensor de momento energia precisamos primeiro analisar a ação deste cenário. A ação de Einstein-Hilbert geral é dada por

$$S = \int \left[\frac{1}{2k} R + L_{mat} \right] \sqrt{-G} d^4 x,$$

aplicando o princípio de Hamilton obtemos

$$0 = \delta S = \int \left[\frac{1}{2k} \frac{\delta(\sqrt{-G}R)}{\delta G^{MN}} + \frac{\delta(\sqrt{-G}L_{mat})}{\delta G^{MN}} \right] \delta G^{MN} d^4 x$$

$$= \int \left[\frac{1}{2k} \left(\frac{\delta R}{\delta G^{MN}} + \frac{R}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(\sqrt{-G})}{\delta G^{MN}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(\sqrt{-G}L_{mat})}{\delta G^{MN}} \right] \sqrt{-G} \delta G^{MN} d^4 x.$$

Como a equação deve ser válida para qualquer variação de G^{MN} , temos que

$$\frac{\delta R}{\delta G^{MN}} + \frac{R}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(\sqrt{-G})}{\delta G^{MN}} = - \frac{2k}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(\sqrt{-G}L_{mat})}{\delta G^{MN}}$$

Não iremos nos aprofundar nas variações do escalar de curvatura, pois já chegamos a equação de Einstein no capítulo anterior, mas é fácil ver que o tensor de momento e energia deve ter a forma

$$T_{MN} = \frac{-2}{\sqrt{-G}} \frac{\delta(\sqrt{-G}L_{mat})}{\delta G^{MN}} = 2 \frac{\delta L_{mat}}{\delta G^{MN}} + G_{MN}L_{mat} .$$

Escolhemos agora a nossa lagrangeana a ser introduzida na ação e na equação acima para o tensor de momento-energia

$$\mathcal{S} = \int d^4x dy \sqrt{-G} \left(-\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right)$$

substituindo a lagrangeana e o tensor na equação de movimento de Einstein obtemos

$$R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R = 2 \left[\partial_M\phi\partial_N\phi - G_{MN} \left(\frac{1}{2}\partial_P\phi\partial^P\phi + V(\phi) \right) \right],$$

agora substituímos nessa equação os valores encontrados para o tensor e o escalar de curvatura. Para $M = N = 5$,

$$6A'^2 = \phi'^2 - 2V(\phi); A'^2 = \frac{\phi'^2}{6} - \frac{V(\phi)}{3},$$

para $M = N = 1, 2, 3, 4$

$$-3A'' - 6A'^2 = 2V(\phi) + \phi'^2.$$

Somando as duas equações obtemos

$$A'' = -\frac{2}{3}\phi'^2,$$

que é uma equação de segunda ordem linear. Para simplificar ainda mais a obtenção da solução utilizaremos o método do superpotencial, escolhendo um potencial com a forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{4}{3}W(\phi)^2.$$

Comparando com a primeira equação obtida para A e $V(\phi)$, podemos assumir que uma solução para aquela equação também seria solução para as seguintes:

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi}, \quad \frac{dA}{dy} = -\frac{2}{3}W(\phi),$$

onde $W(\phi)$ é uma função suave e lisa de ϕ .

3.2 Soluções do tipo kink

Existem alguns tipos de campo que são solução para essas equações dependendo da escolha do superpotencial. Nos interessamos aqui por soluções do tipo kink pois estas descrevem paredes de domínio com espessura na quinta dimensão. Para isso precisaremos de um determinado tipo de campo que produza um campo topológico em qualquer dimensão, contrariando assim uma regra conhecida como teorema de Derrick, apresentado na seção 1.4 deste trabalho.

A escolha do potencial determinará a superação deste teorema. Escolhendo

$$U(x^2; \phi) = f(x^2)V(\phi) \rightarrow V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2}$$

que é da classe de potenciais utilizados para chegar às equações de movimento na seção anterior. $W_\phi = \partial W / \partial \phi$, $x^2 = x_\mu x^\mu$ com $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_D)$. A escolha da função de x define então o potencial

$$U(x^2; \phi) = \frac{1}{r^N} \frac{W_\phi^2}{2}$$

onde $r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2)}$.

Com esse potencial utilizaremos a condição de finitude da energia para encontrar a relação entre N e D . Considerando a densidade de energia $\varepsilon = \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2r^N}$ e supondo a energia total $E^D = E_g^D + E_p^D$ obtemos

$$\int d\vec{r} \left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2r^N} \right] = E^D,$$

utilizamos agora uma mudança de variável $\vec{r} \rightarrow \lambda r$ para superar o supracitado teorema de Derrick (APÊNDICE). Se chamarmos o primeiro termo da integral de energia gradiente E_g^D e o segundo de energia potencial E_p^D e fizermos a integração sob a nova variável encontramos

$$E_\lambda^D = \lambda^{2-D} E_g^D + \lambda^{N-D} E_p^D.$$

Se derivarmos essa equação fazendo $\lambda = 1$, ou seja, retornando à variável \vec{r} , encontramos

$$\frac{\partial E_\lambda^D}{\partial \lambda} = (2-D)E_g^D + (N-D)E_p^D = 0, \quad E_g^D \geq 0 \text{ e } E_p^D \geq 0$$

$$\frac{\partial^2 E_\lambda^D}{\partial \lambda^2} = (2-D)(1-D)E_g^D + (N-D)(N-D-1)E_p^D \geq 0.$$

Essas condições impõe restrições sobre D e N. Para N = 0, só existem soluções estáveis fazendo D = 1, fazendo $E_p^D = E_g^D$. Para D = 2, N = D necessariamente mas não retiramos nenhuma informação sobre as energias. Para D ≥ 3, temos N = 2(D - 1) para divisão igual de energia entre gradiente e potencial.

É importante lembrar que ainda estamos trabalhando no espaço plano, ou seja, sem gravidade. Por isso usaremos a lagrangeana para chegar à equação de movimento:

$$\frac{1}{r^{D-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{D-1} \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{1}{r^{2D-2}} W_\phi W_{\phi\phi}$$

que é de segunda ordem e de difícil solução. Para chegarmos a uma equação de primeira ordem utilizaremos o método de Bogomoln'y, apresentado na seção 1.5 (APÊNDICE)

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \equiv \pm \frac{1}{r^{D-1}} W_\phi(\phi)$$

que é válida apenas se a energia for minimizada para

$$E^D = \alpha_D |\Delta W| = \alpha_D |\pm W\{\phi(\vec{r} \rightarrow \infty)\} \mp W\{\phi(\vec{r} = 0)\}|$$

e $N = 2D - 2$ para campos radiais. Essa equação de movimento nos permitirá analisar diferentes campos em várias dimensões de acordo com a escolha de D . Para encontrar algumas dessas soluções será útil utilizar a mudança de variável $dx = \pm r^{1-D} dr$. Então, se fizermos $D = 1$ teremos

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \pm W_\phi(\phi),$$

o que nos permitirá encontrar uma versão para D dimensões de ondas solitárias unidimensionais. O superpotencial que iremos estudar neste capítulo é definido a seguir

$$W_\phi(\phi) = - \frac{(b_0^2 - 1)\phi^2 + a^2 + ab_0\sqrt{(b_0^2 - 1)\phi^2 + a^2}}{(b_0^2 - 1)},$$

aonde $b_0 > 1$ é um parâmetro contínuo. Para $D = 1$, a solução será um kink tal que

$$\phi(x) = \frac{a \sinh(ax)}{\cosh(ax) + b_0}$$

é uma função suave que varia sua forma de acordo com a variação do parâmetro b_0 . Se o parâmetro for pequeno o potencial terá dois mínimos e conseqüentemente gerará apenas uma parede de domínio. Podemos ver nos gráficos, no entanto, que conforme b_0 aumenta o potencial passa a ter três mínimos gerando assim duas paredes, como vemos nas figuras abaixo.

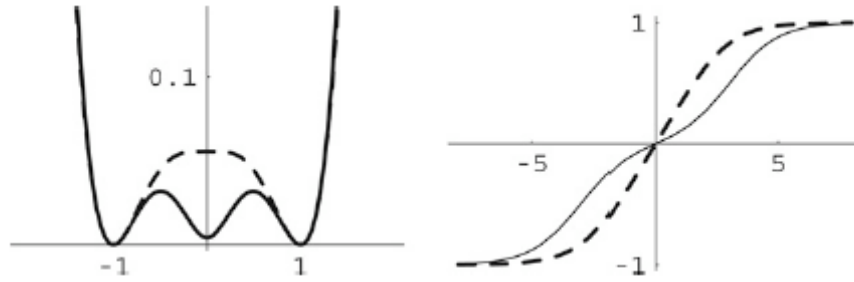


Fig 2 – Potencial V como função do campo ϕ para $b_0 = 2$ (linha pontilhada) e $b_0 = 10$ (gráfico a esquerda) e o campo em função da coordenada espacial x .

Se fizermos agora $D = 2$ e utilizarmos a mesma mudança de variável teremos $dx = \pm r^{-1} dr$ e a equação de movimento fica

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{W_\phi}{r} = e^{-x} \frac{d\phi}{dx}$$

que tem como solução o campo

$$\phi(\vec{r}) = a \frac{r^a - 1}{r^{2a} + 2b_0 r^a + b_0^2}.$$

Para $D \geq 3$, obtemos

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{W_\phi}{r^2}$$

que tem como solução

$$\phi(\vec{r}) = a \frac{\text{senh}\left(\frac{ar^{2-D}}{2-D}\right)}{\cosh\left(\frac{ar^{2-D}}{2-D}\right) + b_0}.$$

Se substituirmos a derivada segunda do potencial usado aqui $U(x^2; \phi) = \frac{1}{r^{2D-2}} \frac{W_\phi^2}{2}$ na

Hamiltoniana encontrada na seção 1.6 (APÊNDICE) obtemos as seguintes equações para perturbações no campo do tipo $\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) + \sum \eta_k(\vec{r}) \cos(\omega_k t)$

$$\frac{1}{r^{2(D-1)}} a^+ a^- \eta_k(r) = \omega_k^2 \eta_k(r),$$

$$a^\pm \equiv \mp r^{D-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi},$$

o que nos dá autovalores reais em todos os níveis, fazendo as excitações estáveis. Além disso, podemos obter o modo zero da solução a partir do operador de aniquilação a^-

$$\eta_0(r) = N_0 \exp\left(\pm \int dr r^{(1-D)} W_{\phi\phi}(r)\right)$$

aonde N_0 é a constante de normalização. Podemos observar nas figuras abaixo que o modo zero é maior para os pontos de mudança de fase, ou seja, nas superfícies das paredes de domínio.

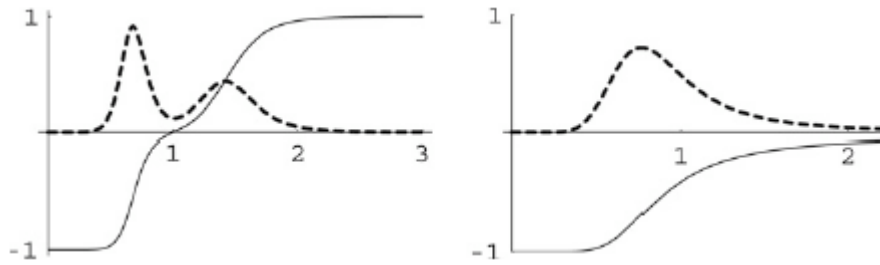


Fig 3 – A linha sólida representa o campo em função da coordenada espacial e a pontilhada o modo-zero para a) ($a = 10$, $b_0 = 20$) para $D = 2$ e b) ($a = 4$, $b_0 = 40$) para $D = 3$

Podemos ver que, para $D = 2$ e b_0 suficientemente grande observamos também a formação de dupla parede de domínio. Para $D \geq 3$ podemos tirar a conclusão de que a forma do campo se mantém a mesma para dimensões iguais ou maiores que 3.

3.3 Gravidade acoplada ao campo escalar

Apresentamos na seção 3.1 o cenário com 5 dimensões aonde um campo escalar interage com a gravidade na dimensão extra e obedece às seguintes equações de movimento

$$\frac{d\phi}{dy} = W_\phi$$

$$\frac{dA}{dy} = \frac{2}{3}W(\phi)$$

aonde $A(y)$ é o fator de warp. Na primeira seção apenas apresentamos esse fator matematicamente e como podemos perceber de nossa métrica, ele é o responsável pela “conexão” ou “interação” da quinta dimensão com as demais. A partir dos cálculos da seção 3.2 sabemos que a equação para o campo tem solução do tipo kink dependendo da escolha de W . Portanto, o superpotencial utilizado na seção anterior pode gerar paredes de domínio na quinta dimensão e interagir com a gravidade. Como a primeira equação tem solução idêntica a solução da seção anterior, basta calcular agora o fator de warp para terminarmos a construção de nossa métrica

$$ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2.$$

Como queremos analisar o comportamento de $A(y)$ com relação ao campo escolhido ϕ , é preferencial que encontremos o fator de warp em função do próprio campo. Assim manipulamos a equação de movimento para encontrarmos $A(\phi)$

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dA}{d\phi} \frac{d\phi}{dy} = \frac{dA}{d\phi} W_\phi = \frac{2}{3}W(\phi)$$

$$A(\phi) = \frac{2}{3} \int \frac{W}{W_\phi} d\phi$$

Se substituirmos nosso superpotencial nessa equação obtemos

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \frac{2}{3} \int d\phi \left[\frac{\int -\frac{(b_0^2 - 1)\phi^2 + a^2 + ab_0\sqrt{(b_0^2 - 1)\phi^2 + a^2}}{(b_0^2 - 1)}}{-\frac{(b_0^2 - 1)\phi^2 + a^2 + ab_0\sqrt{(b_0^2 - 1)\phi^2 + a^2}}{(b_0^2 - 1)}} \right] \\ &= \frac{2}{3} \int -d\phi \left[\frac{\frac{(b_0^2 - 1)\phi^3}{3} + a^2\phi + ab_0 \int \sqrt{(b_0^2 - 1)\phi^2 + a^2}}{(b_0^2 - 1)\phi^2 + a^2 + ab_0\sqrt{(b_0^2 - 1)\phi^2 + a^2}} \right] \end{aligned}$$

que é uma equação de difícil solução analítica. Porém, a partir dela já somos capazes de esboçar a forma de $A(\phi)$ como apresentado nas figuras abaixo. Na figura X observamos que o fator de warp também responde a variações do parâmetro b_0 . Nas figuras

seguintes, observamos que além disso, a variação de b_0 proporciona também três diferentes tipos de paredes de domínio.

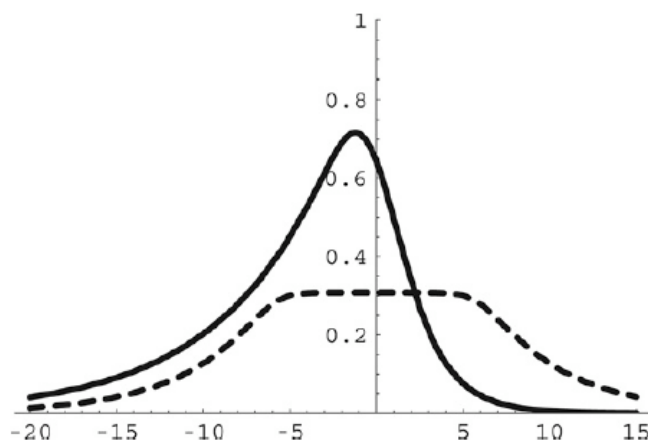


Fig 4 – O fator de warp para $b_0 = 2$ (linha lisa) e $b_0 = 200$ (pontilhada).

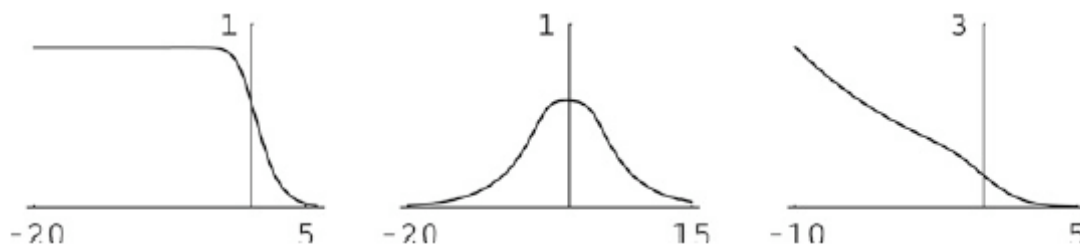


Fig 5 - Da esquerda para direita fatores de warp apresentando paredes de domínio de três classes diferentes ($b_0 = 1,6141$), do tipo II ($b_0 = 10$) e do tipo III ($b_0 = 1,5$)

Podemos ver então que o fator de warp, um elemento da geometria do modelo 5-dimensional que escolhemos, tem seu comportamento diretamente modificado pelo campo e, inclusive, é modificado de acordo com a espessura da parede. Dessa forma, terminamos a análise da interação dos kinks com a gravidade. Essa interação nos mostra que o comportamento de paredes de domínio com altas energias pode ter alta influência em cenários cosmológicos o que nos leva de volta a motivação inicial desse trabalho; o entendimento de características particulares de um objeto fundamental no entendimento de um modelo completo de universo descrito por defeitos topológicos.

Conclusão

Neste trabalho apresentamos um conjunto de conceitos físicos e de ferramentas matemáticas fundamentais para duas grandes áreas do conhecimento, a Física de Partículas e a Teoria da Relatividade. Assim, a primeira conclusão que tiramos de um trabalho como este é aquela que os primeiros físicos de partículas que imaginaram a possibilidade de defeitos topológicos em cenários cosmológicos, a de que eles são fundamentais no entendimento do Universo como um todo, principalmente quando imaginamos a quantidade de energia e de quebras de simetria existentes em cenários de início do Universo.

Para além disso, apresentamos um modelo que nos traz muitas novas possibilidades no estudo das Paredes de Domínio. Concluímos, primeiramente, que era possível desenvolvermos um determinado potencial que descrevesse um kink em um número arbitrário de dimensões, nos permitindo assim assumir a existência de defeitos topológicos em cenários cosmológicos. A escolha do superpotencial W nos deu a possibilidade de estudar um tipo de kink ainda pouco conhecido, que pode ser continuamente deformado através de um parâmetro. Essa característica que gera as conclusões mais interessantes sobre a Parede de Domínio. A variação deste parâmetro leva a variação da espessura da parede, causa o aumento de sua energia e modifica o formato do fator de warp em cenários com cinco dimensões. A interação deste campo com outros campos além do gravitacional poderá mostrar se esse parâmetro determina outras informações, por exemplo, ele poderia nos dar informações sobre um segundo kink que viesse a interagir com nosso campo. Como vimos, a variação da energia de paredes de domínio pode influenciar profundamente a dinâmica e a geometria do Universo e, em nosso modelo principal, o parâmetro define a influência.

APÊNDICE

Este apêndice é destinado ao desenvolvimento de alguns cálculos matemáticos que avaliamos necessários para o entendimento completo do capítulo 3 deste trabalho, principalmente no que diz respeito a obtenção das soluções do tipo kink. A solução das equações diferenciais para obtenção do campo não foram obtidas analiticamente e por isso não apresentamos estes cálculos aqui.

1 Superando o Teorema de Derrick

Iremos fazer aqui a transformação necessária para provar que é possível existir um campo escalar com configuração estática de energia, ou seja, com densidade de energia fixa em várias dimensões. Para isso, utilizamos a equação para a energia

$$E^D = E_g^D + E_p^D = \int d\vec{r} \left[\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2r^N} \right]$$

e fazemos a transformação

$$\vec{r} \rightarrow \lambda\vec{r} = \lambda \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2)}$$

$$x \rightarrow x' = \lambda x$$

portanto precisamos transformar os seguintes termos da integral

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d^D x^i = dx^1 dx^2 dx^3 (\dots) dx^D \rightarrow d(\lambda x^1) d(\lambda x^2) d(\lambda x^3) (\dots) d(\lambda x^D) \\ &= \lambda^D d^D x^i = d^D x^{i'} \end{aligned}$$

$$\nabla = \sum_{i=1}^D \hat{e}_i \frac{d}{dx^i} \rightarrow \sum_{i=1}^D \hat{e}_i \frac{d}{d\lambda x^i} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^D \hat{e}_i \frac{d}{dx^i} = \frac{1}{\lambda} \nabla = \nabla'$$

$$\frac{1}{(r)^N} \rightarrow \frac{1}{(\lambda r)^N} = \frac{1}{\lambda^N r^N}$$

E assim podemos construir a integral da energia, que deve se conservar sob a transformação

$$\begin{aligned}
 E^{D'} &= E_g^{D'} + E_p^{D'} = \int d\vec{r}' \left[\frac{(\nabla' \phi)^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2r'^N} \right] \\
 &= \int \lambda^D d^D x^i \left[\frac{\left(\frac{1}{\lambda} \nabla \phi\right)^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2\lambda^N r^N} \right] \\
 &= \int \lambda^D d^D x^i \left[\frac{(\nabla \phi)^2}{\lambda^2 2} + \frac{W_\phi^2}{\lambda^N 2r^N} \right] \\
 &= \int d\vec{r} \left[\lambda^{D-2} \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \lambda^{D-N} \frac{W_\phi^2}{2r^N} \right]
 \end{aligned}$$

Se $E^{D'} = E^D$, as energias gradiente e potencial se transformam da seguinte forma

$$E_g^D \rightarrow \lambda^{2-D} E_g^D$$

$$E_p^D \rightarrow \lambda^{N-D} E_p^D$$

e podemos dizer que a energia total é dada por

$$E^D = \lambda^{2-D} E_g^D + \lambda^{N-D} E_p^D$$

Como apresentado no capítulo 3.

2 O método de Bogomoln'y para o potencial $U(\mathbf{x}^2; \phi) = \frac{W_\phi^2}{2r^N}$

Mostraremos aqui que a energia acima pode ser utilizada para construir uma equação de movimento de primeira ordem para este potencial com o método de Bogomoln'y, utilizando apenas uma condição para a energia mínima. Retomando a equação inicial que estudamos acima

$$E = \int d\vec{r} \left[\frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2r^N} \right]$$

completamos os quadrados como demonstrado abaixo

$$\begin{aligned}
 E &= \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right] \\
 &= \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi \mp \sqrt{2V(\phi)})^2 \pm \sqrt{2V(\phi)} \partial_x \phi \right] \\
 &= \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi \mp \sqrt{2V(\phi)})^2 \right] \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi' \sqrt{2V(\phi')} \\
 \\
 E &= \int d\vec{r} \left[\frac{(\nabla \phi \mp W_\phi / r^{N/2})^2}{2} \pm \frac{W_\phi}{r^{N/2}} \nabla \phi \right]
 \end{aligned}$$

se reescrevermos $\nabla \phi = d\phi/dr$, podemos separar as integrais

$$E = \int d\vec{r} \frac{(\nabla \phi \mp W_\phi / r^{N/2})^2}{2} \pm \int_{\phi=-\infty}^{\phi=\infty} \frac{W_\phi}{r^{N/2}} d\phi'$$

como $W_\phi = dW/d\phi$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 E &= \int d\vec{r} \frac{(\nabla \phi \mp W_\phi / r^{N/2})^2}{2} \pm \int_{\phi=-\infty}^{\phi=\infty} \frac{dW/d\phi'}{r^{N/2}} d\phi' \\
 &= \int d\vec{r} \frac{(\nabla \phi \mp W_\phi / r^{N/2})^2}{2} \pm \int_{\phi=-\infty}^{\phi=\infty} \frac{dW(\phi)}{r^{N/2}} \\
 &= \int d\vec{r} \frac{(\nabla \phi \mp W_\phi / r^{N/2})^2}{2} \pm \frac{1}{r^{N/2}} [W(\phi = \infty) \\
 &\quad - W(\phi = -\infty)]
 \end{aligned}$$

então podemos dizer que, se a energia mínima for da ordem de

$$E^D = \alpha_D |\Delta W| = \alpha_D |\pm W\{\phi(\vec{r} \rightarrow \infty)\} \mp W\{\phi(\vec{r} = 0)\}|$$

obtemos a equação de movimento

$$0 = \frac{\left(\nabla \phi \mp W_{\phi} / r^{\frac{N}{2}} \right)^2}{2}$$

$$\nabla \phi = \mp W_{\phi} / r^{\frac{N}{2}}$$

3 Perturbações na solução kink

Nesta seção apresentaremos os cálculos para obtenção da Hamiltoniana que atua sobre as perturbações $\eta_k(\vec{r})$ do potencial. Para isso utilizaremos os resultados da seção 1.6 assumindo que a hamiltoniana tenha a forma

$$Hf = f'' - U(x)f = \omega^2 f$$

aonde

$$U(x) \equiv V''(\phi_k(x)) \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_k}$$

e $\eta_k(\vec{r}) = f$ e $\phi_k = \phi(\vec{r})$. Fazendo a derivada em nosso potencial obtemos

$$U(x; \phi) = \frac{d^2}{d^2 \phi} \left(\frac{W_{\phi}^2}{r^{2D-2}} \right) = \left(\frac{W_{\phi\phi}^2}{r^{2D-2}} \right)$$

aonde assumimos que $W_{\phi\phi\phi}(\phi(r)) = 0$. Assim obtemos a equação para a perturbação

$$H\eta_k = \left(\partial_r^2 - \left(\frac{W_{\phi\phi}^2}{r^{2D-2}} \right) \right) \eta_k = \omega^2 \eta_k$$

que pode ser fatorada e reescrita como

$$\frac{1}{r^{2(D-1)}} a^+ a^- \eta_k(r) = \omega_k^2 \eta_k(r),$$

$$a^{\pm} \equiv \mp r^{D-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi},$$

obtendo para η_0 ,

$$\eta_0(r) = N_0 \exp\left(\pm \int dr r^{(1-D)} W_{\phi\phi}(r)\right)$$

de acordo com os resultados do capítulo 3.

Referências

- 1 D. Bazeia, J. Menezes, R. Menezes. *New Global Defects Structures* Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 241601.
- 2 R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- 3 D. Bazeia, J. Furtado, A.R. Gomes. *Bloch Brane* JCAP 02 (2004) 002.
- 4 O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, A. Karch. *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity* Phys. Rev. D 62 (2000) 046008.
- 5 A. de Souza Dutra. *Continuously deformable topological structure*. Physica D 238 (2009) 798-802.
- 6 D. Bazeia, C. Furtado, A. R. Gomes. *Brane Structure from a Scalar Field in Warped Spacetime*. JCAP 0402 (2004) 002
- 7 L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- 8 T. Vachaspati. *Kinks And Domain Walls*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- 9 D. Bazeia, J. Menezes, M. M. Santos. *Complete Factorization of Equations of Motion in Wess-Zumino Theory*. Phys. Lett. B 521, 418 (2001).
- 10 I. C. Jardim. Dissertação de Mestrado - *Promediação dos campos gravito-eletromagnéticos na aproximação pós-newtoniana*. Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física, 2007.
- 11 W. T. da Cruz. Dissertação de Doutorado - *Localização de campos em membranas deformadas*. Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física, 2009.
- 12 A. Vilenkin, E. P. S. Shellard. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
- 13 R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992