UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA

FRANCISCO ANCELMO PINHEIRO FERREIRA

UMA SOLUÇÃO ALGÉBRICA PARA A PARTE RADIAL DO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

FORTALEZA
2011

FRANCISCO ANCELMO PINHEIRO FERREIRA

UMA SOLUÇÃO ALGÉBRICA PARA A PARTE RADIAL DO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

Monografia submetida à Coordenação do Curso de Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Área de concentração: Física Teórica.

Orientador: Prof. Dr.

Raimundo Nogueira da Costa Filho

FORTALEZA

2011

FRANCISCO ANCELMO PINHEIRO FERREIRA

UMA SOLUÇÃO ALGÉBRICA PARA A PARTE RADIAL DO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

Monografia submetida à Coordenação do Curso de Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física. Área de concentração: Física Teórica.

Aprovado em 02/12/2011.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho (Orientador)

Universidade Federal do Ceará-UFC

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves

Universidade Federal do Ceará-UFC

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim

Universidade Federal do Ceará-UFC

Em memória do meu querido avô Manoel Afonso Peixoto

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar à minha mãe, **Maria Luiza Pinheiro Peixoto**, por toda a dedicação e apoio para com a minha pessoa. Agradeço à minha avó, **Maria Nila Pinheiro Peixoto**, que ajudou na minha criação e na minha formação moral. Agradeço ao meu avô, **Manoel Afonso Peixoto**, pelo papel fundamental que ele representou na minha vida. Enfim, essas três pessoas juntas são as principais responsáveis pela pessoa que eu me tornei e sem elas eu não teria terminado este trabalho.

Agradeço à minha namorada **Luana Silva**, pelo apoio e pelos momentos de felicidade que ela me proporciona.

Agradeço aos meus amigos de longa data, **Valério Silva**, **Rômulo Silva** e **Hélio Lemos**, por terem me ajudado das mais diversas formas.

Agradeço à **Universidade Federal do Ceará**, por ter me proporcionado uma educação de qualidade e pelo auxílio financeiro através da bolsa de monitoria de iniciação à docência.

Agradeço ao **Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho** pela orientação nos mais diversos assuntos e em particular neste trabalho. Agradeço ao **Prof. Dr. José Ramos Gonçalves** e ao **Prof. Dr. Ricardo Renan Landim**, por terem comparecido a banca dessa monografia.

Por último queria agradecer a todas as pessoas que de uma forma ou de outra me ajudaram a conseguir essa formação básica em Física.

"Nothing as it seems"

(Eddie Vedder)

ABSTRACT

Here we find the bound states of the non-relativistic hydrogen atom using an operator method. The method adds the phase of a state and its associated operator to the set of variables of the system. The set of operators is found to form a closed set of commutation relations thus comprising an operator Lie algebra. From these relations, the energy spectrum and bounded radial eigenfunctions are calculated. The approach used is analogous to the one employed to compute the angular momentum spectrum and eigenfunctions but with operators satisfying an $\mathfrak{su}(1,1)$ Lie algebra instead of $\mathfrak{su}(2)$. The same operator algebra and minor modifications can be applied to solve the Dirac relativistic hydrogen atom.

Keywords: Operator solution. Phase. Lie algebra.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O átomo de hidrogênio é de grande importância para a Física Teórica, servindo de base para o estudo de sistemas mais complexos. A abordagem tradicional do problema consiste em dividi-lo em duas partes, uma parte angular e uma parte radial. Para a parte angular identificamos uma simetria que permite a resolução do problema através de um método de operadores de levantamento e abaixamento. Já para a parte radial tal simetria aparentemente não existe, e o método aplicado para essa parte é um método de resolução por séries de potências, cuja forma final é obtida em função dos polinômios de Laguerre.

No presente estudo, nós mostramos não tão somente que é possível identificar uma simetria para a parte radial do átomo de hidrogênio, como também construímos uma álgebra de Lie para esta parte e conseqüentemente desenvolvemos um método de operadores de levantamento e abaixamento para ela. Tal método é importante, pois introduz uma maneira de resolução algébrica que fornece resultados diretos e mais compactos em comparação com a resolução por séries.

Para tomar vantagem da invariância sob uma mudança global de fase dos estados quânticos, nós introduzimos a fase como uma variável dinâmica adicional e um correspondente operador de fase Ω_3 no problema. Nós ainda definimos mais dois operadores, Ω_+ e Ω_-, os quais desempenham o papel de operadores escada. Guiados por uma analogia com o momento angular, nós definimos dois operadores adicionais, Ω_1 e Ω_2,e moldamos a Hamiltoniana radial do átomo de hidrogênio na forma de um problema de autovalor para um operador Ω_c cujo os autovalores são os mesmos do momento angular orbital adimensional $L^2/\hbar^2$, ou seja, $l(l+1)$. O operador Ω_c comuta com todos os operadores Ω_i $(i = 1, 2,3)$ da mesma forma como L^2comuta com todos os operadores de momento angular L_1, L_2, L_3. As relações de comutação para estes operadores definem uma álgebra operacional denominada de álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$. Se nós fixamos o número quântico l e aplicamos os operadores escada no estado fundamental da álgebra (existe um estado fundamental para cada l escolhido), nós obtemos tanto autofunções radiais como seu espectro de energia. Nossos operadores envolvem somente derivadas de primeira ordem e a solução é direta – precisamos resolver apenas uma equação diferencial [Eq.(48)]. Então, a abordagem discutida aqui pode ser uma ferramenta adicional valiosa aos métodos de solução do átomo de hidrogênio.

2. A HAMILTONIANA RADIAL

A Hamiltoniana radial para o átomo de hidrogênio é

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)-\frac{e^2}{r}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=ER(r), \tag{1}$$

onde l(=0,1,2,3,...) é o número quântico associado com o momento angular orbital, e é a carga do elétron, m é a massa reduzida do sistema, $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π, e $R(r)$ é aparte radial da autofunção com energia $E<0$. Definamos agora

$$k^2\equiv-\frac{8mE}{\hbar^2}\,, \tag{2}$$

a quantidade adimensional

$$\rho\equiv\frac{k}{2}r\ \ ,[1] \tag{3}$$

bem como

$$\lambda\equiv\frac{2me^2}{\hbar^2 k}\,. \tag{4}$$

A partir das definições acima,vamos transformar a equação (1) como segue:

$$\rho=\frac{k}{2}r\ \Rightarrow\ \frac{d}{dr}=\frac{k}{2},$$

$$\frac{d}{d\rho}\,\rho=1\Rightarrow\frac{2}{k}\frac{d}{dr}\rho=\frac{d}{d\rho}\,\rho\Rightarrow\frac{d}{dr}=\frac{k}{2}\frac{d}{d\rho},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}=-\frac{\hbar^2k^2}{8m}\frac{1}{\rho^2},$$

$$r^2=\frac{4\rho^2}{k^2},$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)=\frac{k}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{4\rho^2}{k^2}\frac{k}{2}\frac{d}{d\rho}\right)=\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right),$$

[1]Observe que nossa definição de ρ envolve um fator ½ que difere da maioria das convenções da literatura.

$$-\frac{e^2}{r} = -\frac{\hbar^2 k\lambda}{2m}\frac{k}{2\rho} = -\frac{\hbar^2 k^2 \lambda}{4m}\frac{1}{\rho}\ ,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{\frac{4\rho^2}{k^2}} = \frac{\hbar^2 k^2}{8m}\frac{l(l+1)}{\rho^2},$$

$$E = -\frac{\hbar^2 k^2}{8m},$$

então a equação (1) fica:

$$\left[-\frac{\hbar^2 k^2}{8m}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{\hbar^2 k^2 \lambda}{4m}\frac{1}{\rho} + \frac{\hbar^2 k^2}{8m}\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R(\rho) = -\frac{\hbar^2 k^2}{8m}R(\rho) \Longrightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2 k^2}{8m}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right) + 2\frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R(\rho) = -\frac{\hbar^2 k^2}{8m}R(\rho) \Longleftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right) + 2\frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - 1\right]R(\rho) = 0. \qquad (5)$$

Agora transformamos a autofunção radial por meio de:

$$R(\rho) = F(\rho)/\rho^{1/2}. \qquad (6)$$

Então, como:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{d}{d\rho} + \rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left(2\rho\frac{d}{d\rho} + \rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right),$$

a equação (5) torna-se:

$$\left[\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right) + 2\frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - 1\right]{F(\rho)}\Big/{\rho^{1/2}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\left[\frac{F(\rho)}{\rho^{1/2}}\right] + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{F(\rho)}{\rho^{1/2}}\right] + 2\frac{\lambda}{\rho}\left[\frac{F(\rho)}{\rho^{1/2}}\right] - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\left[\frac{F(\rho)}{\rho^{1/2}}\right] - \frac{F(\rho)}{\rho^{1/2}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{F}{\rho^{1/2}}\right)\right]+\frac{2}{\rho}\left[\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{d}{d\rho}F+F\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\right)\right]+2\frac{\lambda}{\rho^{3/2}}F-\frac{F}{\rho^{1/2}}=\frac{l(l+1)}{\rho^{5/2}}F\Longrightarrow$$

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{d}{d\rho}F+F\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\right)\right]+\frac{2}{\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F-\frac{F}{\rho^{5/2}}+2\frac{\lambda}{\rho^{3/2}}F-\frac{F}{\rho^{1/2}}=\frac{l(l+1)}{\rho^{5/2}}F\Longrightarrow$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{d}{d\rho}F-\frac{F}{2\rho^{3/2}}\right)+\frac{2}{\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F-\frac{F}{\rho^{5/2}}+2\frac{\lambda}{\rho^{3/2}}F-\frac{F}{\rho^{1/2}}=\frac{l(l+1)}{\rho^{5/2}}F\Longrightarrow$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\right)\frac{d}{d\rho}F+\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{d^2}{d\rho^2}F-\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{F}{\rho^{3/2}}\right)+$$

$$\frac{2}{\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F-\frac{F}{\rho^{5/2}}+\frac{2\lambda}{\rho^{3/2}}F-\frac{F}{\rho^{1/2}}=\frac{l(l+1)}{\rho^{5/2}}F$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F+\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{d^2}{d\rho^2}F-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F+F\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho^{3/2}}\right)\right]+$$

$$\frac{2}{\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F-\frac{F}{\rho^{5/2}}+\frac{2\lambda}{\rho^{3/2}}F-\frac{F}{\rho^{1/2}}=\frac{l(l+1)}{\rho^{5/2}}F$$

$$\Longrightarrow-\frac{1}{2\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F+\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{d^2}{d\rho^2}F-\frac{1}{2\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F+\frac{3F}{4\rho^{5/2}}+$$

$$\frac{2}{\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F-\frac{F}{\rho^{5/2}}+\frac{2\lambda}{\rho^{3/2}}F-\frac{F}{\rho^{1/2}}=\frac{l(l+1)}{\rho^{5/2}}F$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{d^2}{d\rho^2}F+\frac{1}{\rho^{3/2}}\frac{d}{d\rho}F+\frac{2\lambda}{\rho^{3/2}}F-\frac{F}{\rho^{1/2}}-\frac{1}{4}\frac{F}{\rho^{5/2}}=\frac{l(l+1)}{\rho^{5/2}}F$$

$$\Longrightarrow\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}F+\rho\frac{d}{d\rho}F+2\lambda\rho F-\rho^2F-\frac{1}{4}F=l(l+1)F$$

$$\Longrightarrow\left[\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}+\rho\frac{d}{d\rho}+2\lambda\rho-\rho^2-\frac{1}{4}\right]F(\rho)=l(l+1)F(\rho).\qquad(7)$$

A equação (7) é uma equação de autovalor com autovalores $l(l+1), l=0,1,2\ldots$, os quais são fixados pela invariância angular do problema. Finalmente introduzimos x como

$$x\equiv\ln\rho,\qquad(8)$$

dessa forma :

$$\rho = e^x \Longrightarrow \frac{d}{dx}\rho = e^x, \frac{d}{d\rho}\rho = 1 \Longrightarrow \frac{d}{d\rho} = e^{-x}\frac{d}{dx} \ ,$$

$$\rho^2 = e^{2x},$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{d}{d\rho}\right) = e^{-x}\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\frac{d}{dx}\right) = e^{-x}\left(-e^{-x}\frac{d}{dx} + e^{-x}\frac{d^2}{dx^2}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} = e^{-2x}\left(-\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\right),$$

$$\rho\frac{d}{d\rho} = e^x\left(e^{-x}\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx},$$

e podemos reescrever a equação (7) da seguinte maneira:

$$\left\{e^{2x}\left[e^{-2x}\left(-\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\right)\right] + \frac{d}{dx} + 2\lambda e^x - e^{2x} - \frac{1}{4}\right\}F(x) = l(l+1)F(x) \Longrightarrow$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + 2\lambda e^x - e^{2x} - \frac{1}{4}\right]F(x) = l(l+1)F(x). \tag{9}$$

Na equação (9) bem como na equação (1), podemos trocar a fase de F sem afetar a descrição física feita por esta. Essa invariância sob uma mudança global de fase é uma importante característica de qualquer estado quântico.

3. DEFININDO UMA ÁLGEBRA DE LIE $\mathfrak{su}(1,1)$

Seja $\phi \in [0,2\pi]$ a fase de F. Podemos associar a ϕ o operador:

$$\Omega_3 \equiv -i\frac{\partial}{\partial \xi}, \tag{10}$$

o qual possui autofunção $e^{i\phi\xi}$ associada ao autovalor ϕ:

$$\Omega_3 e^{i\phi\xi} = -i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi} = \phi e^{i\phi\xi}.$$

Considerar a fase como uma variável é possível porque uma mudança global de fase não tem significado físico, no entanto tal abordagem modifica algumas características matemáticas do problema, por exemplo, agora nós teremos que acrescentar mais um operador ao nosso conjunto completo de observáveis compatíveis (C.S.C. O), tal operador deve ser obviamente o Ω_3. Agora, os autoestados do átomo de hidrogênio devem também ser autoestados do operador Ω_3, o autovalor sendo a fase do estado:

$$\Omega_3 e^{i\phi\xi}F(x) = \phi e^{i\phi\xi}F(x).$$

O operador Ω_3 é Hermitiano, como será mostrado mais a frente. Introduzamos agora mais dois operadores:

$$\Omega_+ \equiv ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right) \tag{11}$$

e

$$\Omega_- \equiv ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^x + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right), \tag{12}$$

ambos dependendo de ξ e da variável transformada x.

Agora vamos checar a partir das equações (10)-(12), que os operadores Ω definidos acima satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[\Omega_3, \Omega_\pm] = \pm\Omega_\pm \tag{13}$$

e

$$[\Omega_+, \Omega_-] = -2\Omega_3. \tag{14}$$

Demonstração:

$$[\Omega_3, \Omega_+]e^{i\phi\xi}F = (\Omega_3\Omega_+ - \Omega_+\Omega_3)e^{i\phi\xi}F$$

$$= \Omega_3\Omega_+e^{i\phi\xi}F - \Omega_+\Omega_3e^{i\phi\xi}F$$

$$= \left(-i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[e^{i\phi\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)\right]e^{i\phi\xi}F -$$

$$\left[ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)\right]\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)e^{i\phi\xi}F \Longrightarrow$$

$$[\Omega_3, \Omega_+]e^{i\phi\xi}F = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[e^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{i\phi\xi}F\right] -$$

$$e^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)e^{i\phi\xi}F$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[e^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - e^xe^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right)\right] -$$

$$e^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)i\phi e^{i\phi\xi}F$$

$$= ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - e^xe^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right) +$$

$$e^{i\xi}\left(i\phi\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - i\phi e^xe^{i\phi\xi}F - i\phi i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + i\phi\frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right) -$$

$$e^{i\xi}\left(i\phi\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - i\phi e^xe^{i\phi\xi}F - i\phi i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + i\phi\frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right)$$

$$= ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{i\phi\xi} = \Omega_+e^{i\phi\xi}F \Longrightarrow$$

$$[\Omega_3, \Omega_+] = \Omega_+.$$

Onde,

$$[\Omega_3, \Omega_-]e^{i\phi\xi}F = (\Omega_3\Omega_- - \Omega_-\Omega_3)e^{i\phi\xi}F = \Omega_3\Omega_-e^{i\phi\xi}F - \Omega_-\Omega_3e^{i\phi\xi}F$$

$$= \left(-i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^x + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)\right]e^{i\phi\xi}F -$$

$$\left[ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^x + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)\right]\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)e^{i\phi\xi}F$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\left[e^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right)\right] -$$

$$e^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^{x} + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)i\phi e^{i\phi\xi}F$$

$$\Longrightarrow [\Omega_3, \Omega_-]e^{i\phi\xi}F = -ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right) +$$

$$e^{-i\xi}\left(i\phi\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + i\phi e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\phi i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + i\phi\frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right) -$$

$$e^{-i\xi}\left(i\phi\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + i\phi e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\phi i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + i\phi\frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right)$$

$$= -e^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^{x} + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{i\phi\xi}F = -\Omega_- e^{i\phi\xi}F \Longrightarrow [\Omega_3, \Omega_-] = -\Omega_- \,,$$

agora vamos a identidade (14):

$$[\Omega_+, \Omega_-]e^{i\phi\xi}F(x) = \Omega_+\Omega_- e^{i\phi\xi}F(x) - \Omega_-\Omega_+ e^{i\phi\xi}F(x)$$

$$= \Omega_+\left(\Omega_- e^{i\phi\xi}F(x)\right) - \Omega_-\left(\Omega_+ e^{i\phi\xi}F(x)\right) \,,$$

$$\Omega_- e^{i\phi\xi}F(x) = ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^{x} + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{i\phi\xi}F(x)$$

$$= ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right),$$

$$\Omega_+ e^{i\phi\xi}F(x) = ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^{x} - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{i\phi\xi}F(x)$$

$$= ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - e^{x}e^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right) \,,$$

$$\Omega_+\left(\Omega_- e^{i\phi\xi}F(x)\right) = ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^{x} - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\left[ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right)\right]$$

$$= ie^{i\xi}\left[ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i\phi\xi}F + \frac{\partial}{\partial x}e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial^2}{\partial x\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F -\right.\right.$$

$$e^{x}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - e^{2x}e^{i\phi\xi}F - ie^{x}\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F - e^{x}\frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\Big) - ie^{-i\xi}\Big(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{x}e^{i\phi\xi}F +$$

$$i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\Big) + e^{-i\xi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}e^{i\phi\xi}F + \frac{\partial}{\partial \xi}e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F\right) +$$

$$+\frac{1}{2}ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right)\Big]$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i\phi\xi}F - \frac{\partial}{\partial x}e^{x}e^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}e^{i\phi\xi}F - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{x}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{2x}e^{i\phi\xi}F +$$

$$ie^{x}\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + e^{x}\frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F + \frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F +$$

$$i\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{x}e^{i\phi\xi}F - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}e^{i\phi\xi}F + i\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - \frac{1}{2}e^{x}e^{i\phi\xi}F -$$

$$\frac{1}{2}i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F - \frac{1}{4}e^{i\phi\xi}F = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i\phi\xi}F + e^{2x}e^{i\phi\xi}F + 2\,ie^{x}\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F -$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{4}e^{i\phi\xi}F\,,$$

$$\Omega_-\left(\Omega_+e^{i\phi\xi}F(x)\right) = ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^{x} + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)\times$$

$$\left[ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - e^{x}e^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right)\right]$$

$$= ie^{-i\xi}\Big[ie^{i\xi}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i\phi\xi}F - \frac{\partial}{\partial x}e^{x}e^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{x}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F -$$

$$e^{2x}e^{i\phi\xi}F - ie^{x}\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + e^{x}\frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\Big) - ie^{i\xi}\Big(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - e^{x}e^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F +$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F\Big) + \frac{1}{2}ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - e^{x}e^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F\right)\Big]$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i\phi\xi}F + \frac{\partial}{\partial x}e^{x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}e^{i\phi\xi}F - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - e^{x}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F + e^{2x}e^{i\phi\xi}F +$$

$$ie^{x}\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F - e^{x}\frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F + \frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F - e^{x}e^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial}{\partial \xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}e^{i\phi\xi}F -$$

$$i\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial\xi}e^{x}e^{i\phi\xi}F - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}e^{i\phi\xi}F - i\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}e^{i\phi\xi}F - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}e^{i\phi\xi}F +$$

$$\frac{1}{2}e^{x}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{2}i\frac{\partial}{\partial\xi}e^{i\phi\xi}F - \frac{1}{4}e^{i\phi\xi}F = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i\phi\xi}F +$$

$$e^{2x}e^{i\phi\xi}F + 2\,ie^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}e^{i\phi\xi}F - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}e^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial}{\partial\xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{4}e^{i\phi\xi}F$$

$$\Longrightarrow \Omega_+\Omega_- e^{i\phi\xi}F(x) - \Omega_-\Omega_+ e^{i\phi\xi}F(x)$$

$$= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i\phi\xi}F + e^{2x}e^{i\phi\xi}F + 2\,ie^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}e^{i\phi\xi}F - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}e^{i\phi\xi}F + i\frac{\partial}{\partial\xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{4}e^{i\phi\xi}F\right) -$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i\phi\xi}F + e^{2x}e^{i\phi\xi}F + 2\,ie^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}e^{i\phi\xi}F - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}e^{i\phi\xi}F - i\frac{\partial}{\partial\xi}e^{i\phi\xi}F + \frac{1}{4}e^{i\phi\xi}F\right)$$

$$= 2i\frac{\partial}{\partial\xi}e^{i\phi\xi}F = -2\left[-i\frac{\partial}{\partial\xi}\right]e^{i\phi\xi}F(x) \Longrightarrow [\Omega_+,\Omega_-] = -2\Omega_3.$$

Agora vamos definir um conceito fundamental no nosso estudo, o conceito de álgebra de Lie.

Definição 1. Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial (real ou complexo) $\mathcal{V}$ munido de um produto bi-linear $[,]: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, satisfazendo:

a) A aplicação $[,]$ é anti-simétrica, ou seja, $[v,w] = -[w,v]$.

b) A aplicação satisfaz a identidade de Jacobi:

$$\big[u,[v,w]\big] + \big[w,[u,v]\big] + \big[v,[w,u]\big] = 0.$$

A partir da definição 1, vemos que qualquer espaço vetorial de operadores munido da operação de comutação é uma álgebra de Lie.

Considere agora o conjunto das funções $\psi(\xi,x)$ complexas dependentes da variável transformada x e da variável ξ que aparece na equação (10), lembremos que nossos operadores Ω em geral dependem de x e ξ, portanto devem atuar em tal espaço, assumindo que tal conjunto de funções está no espaço de Hilbert fica evidente que a estrutura algébrica do espaço vetorial dos operadores Ω é uma álgebra de Lie.

As equações (13) e (14) são praticamente iguais as relações de comutação para o momento angular, a única diferença é o sinal negativo na equação (14). No caso dos operadores de momento angular, as relações de comutação entre eles definem uma álgebra de Lie do tipo $\mathfrak{su}(2)$. Em nosso caso as relações de comutação (13) e (14) definem uma álgebra de Lie do tipo $\mathfrak{su}(1,1)$.

Por analogia ao momento angular, vamos definir mais dois operadores Hermitianos, Ω_1 e Ω_2, como

$$\Omega_1 \equiv \frac{1}{2}(\Omega_+ + \Omega_-), \quad \Omega_2 \equiv \frac{1}{2i}(\Omega_+ - \Omega_-)\,, \tag{15}$$

os quais junto com Ω_3, satisfazem

$$[\Omega_1, \Omega_2] = -i\Omega_3, \;\; [\Omega_2, \Omega_3] = i\Omega_1, \;\; [\Omega_3, \Omega_1] = i\Omega_2. \tag{16}$$

Novamente aqui a semelhança para com as relações do momento angular é evidente, somente o primeiro comutador das relações (16) é que difere das respectivas relações para o momento angular. As relações (16) são uma forma alternativa de definir uma álgebra de Lie do tipo $\mathfrak{su}(1,1)$. Os operadores $\Omega_i (i = 1, 2{,}3.)$ são ditos geradores do grupo de Lie SU(1,1).

Agora vamos mostrar que as relações (16) estão corretas:

$$[\Omega_1, \Omega_2] = \left[\frac{1}{2}(\Omega_+ + \Omega_-), \frac{1}{2i}(\Omega_+ - \Omega_-)\right]$$

$$= \left(-\frac{i}{4}\right)([\Omega_+, -\Omega_-] + [\Omega_-, \Omega_+])$$

$$= \left(-\frac{i}{4}\right)(2\Omega_3 + 2\Omega_3)$$

$$= -i\Omega_3,$$

$$[\Omega_2, \Omega_3] = \left[\frac{1}{2i}(\Omega_+ - \Omega_-), \Omega_3\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)([\Omega_+, \Omega_3] - [\Omega_-, \Omega_3])$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)(-\Omega_+ - \Omega_-)$$

$$= i\frac{1}{2}(\Omega_+ + \Omega_-) = i\Omega_1\,,$$

$$[\Omega_3, \Omega_1] = \left[\Omega_3, \frac{1}{2}(\Omega_+ + \Omega_-)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)([\Omega_3, \Omega_+] + [\Omega_3, \Omega_-])$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(\Omega_+ - \Omega_-)$$

$$= i\left(\frac{1}{2i}\right)(\Omega_+ - \Omega_-)$$

$$= i\Omega_2.$$

Segue agora mais uma definição importante:

Definição 2. Um operador que comuta com todos os geradores de um grupo é denominado de operador de Casimir.

L^2 comuta com todos os geradores do momento angular orbital e é o operador de Casimir para aquela álgebra. Para o grupo SU (1,1) o operador de Casimir é:

$$\Omega_c \equiv -\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - e^{2x} - 2ie^x\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{4}\,, \tag{17}$$

o qual de acordo com a definição 2, deve satisfazer

$$[\Omega_c, \Omega_i] = 0 \text{ para } i = 1{,}2{,}3. \tag{18}$$

Agora vamos mostrar que o operador definido por (17) realmente verifica (18);

$$[\Omega_c, \Omega_1] = [-\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2, \Omega_1]$$

$$= -[\Omega_1^2, \Omega_1] - [\Omega_2^2, \Omega_1] + [\Omega_3^2, \Omega_1]$$

$$= -(\Omega_2[\Omega_2, \Omega_1] + [\Omega_2, \Omega_1]\Omega_2) + (\Omega_3[\Omega_3, \Omega_1] + [\Omega_3, \Omega_1]\Omega_3)$$

$$= -(\Omega_2 i\Omega_3 + i\Omega_3\Omega_2) + (\Omega_3 i\Omega_2 + i\Omega_2\Omega_3)$$

$$= 0,$$

$$[\Omega_c, \Omega_2] = [-\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2, \Omega_2]$$

$$= -[\Omega_1^2, \Omega_2] - [\Omega_2^2, \Omega_2] + [\Omega_3^2, \Omega_2]$$

$$= -(\Omega_1[\Omega_1, \Omega_2] + [\Omega_1, \Omega_2]\Omega_1) + (\Omega_3[\Omega_3, \Omega_2] + [\Omega_3, \Omega_2]\Omega_3)$$

$$= -(-\Omega_1 i\Omega_3 - i\Omega_3\Omega_1) + (-\Omega_3 i\Omega_1 - i\Omega_1\Omega_3)$$

$$= 0,$$

$$[\Omega_c, \Omega_3] = [-\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2, \Omega_3]$$

$$= -[\Omega_1^2, \Omega_3] - [\Omega_2^2, \Omega_3] + [\Omega_3^2, \Omega_3]$$

$$= -(\Omega_1[\Omega_1, \Omega_3] + [\Omega_1, \Omega_3]\Omega_1) - (\Omega_2[\Omega_2, \Omega_3] + [\Omega_2, \Omega_3]\Omega_2)$$

$$= -(-\Omega_1 i\Omega_2 - i\Omega_2\Omega_1) - (\Omega_2 i\Omega_1 + i\Omega_1\Omega_2)$$

$$= 0.$$

Fica provado assim que o operador de Casimir definido por (17) realmente comuta com todos os geradores do grupo de Lie SU (1,1). Agora mostraremos que a última relação na igualdade (17) está correta, para isso primeiro mostraremos que o operador de Casimir pode ser reescrito como:

$$\Omega_c = -\Omega_-\Omega_+ + \Omega_3(\Omega_3 + 1),$$

$$[\Omega_+, \Omega_-] = \Omega_+\Omega_- - \Omega_-\Omega_+ = -2\Omega_3 \Rightarrow -\Omega_-\Omega_+ = -2\Omega_3 - \Omega_+\Omega_-$$

$$\Rightarrow -\Omega_-\Omega_+ + \Omega_3(\Omega_3 + 1) = -2\Omega_3 - \Omega_+\Omega_- + \Omega_3^2 + \Omega_3 = -\Omega_+\Omega_- - \Omega_3 + \Omega_3^2,$$

agora a partir das relações (15), temos:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_+ + \Omega_- &= 2\Omega_1 \\ \Omega_+ - \Omega_- &= 2i\Omega_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\Omega_+ = 2(\Omega_1 + i\Omega_2) \Rightarrow \Omega_+ = \Omega_1 + i\Omega_2$$

e

$$2\Omega_- = 2(\Omega_1 - i\Omega_2) \Rightarrow \Omega_- = \Omega_1 - i\Omega_2,$$

logo,

$$-\Omega_+\Omega_- = -(\Omega_1 + i\Omega_2)(\Omega_1 - i\Omega_2)$$

$$\Longrightarrow -\Omega_+\Omega_- = -(\Omega_1^2 - i\Omega_1\Omega_2 + i\Omega_2\Omega_1 + \Omega_2^2)$$

$$= -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + i[\Omega_2, \Omega_1])$$

$$= -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3) \Longrightarrow$$

$$-\Omega_+\Omega_- - \Omega_3 + \Omega_3^2 = -\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 = \Omega_c.$$

A Expressão algébrica para o operador $\Omega_-\Omega_+$ já foi encontrada quando demonstramos a relação de comutação (14),

$$\Omega_-\Omega_+ = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + e^{2x} + 2ie^x\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - i\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{4},$$

resta-nos agora somente encontrar a expressão algébrica para $\Omega_3(\Omega_3 + 1)$, vamos a ela:

$$\Omega_3(\Omega_3 + 1) = \left(-i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi} + 1\right)$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - i\frac{\partial}{\partial\xi},$$

logo,

$$\Omega_c = -\Omega_-\Omega_+ + \Omega_3(\Omega_3 + 1) = -\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + e^{2x} + 2ie^x\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - i\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{4}\right) +$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - i\frac{\partial}{\partial\xi}\right) \Longrightarrow \Omega_c = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - e^{2x} - 2ie^x\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{4},$$

que é a expressão procurada.

Assim como é feito com os operadores $\vec{L}$ e L^2 no caso do momento angular, podemos interpretar nosso operador de Casimir Ω_c como sendo o quadrado do operador vetorial $i\Omega_1\hat{\imath} + i\Omega_2\hat{\jmath} + \Omega_3\hat{k}$ onde $\hat{\imath}, \hat{\jmath},$ e $\hat{k}$ representam vetores unitários nas direções *x, y e z* respectivamente.

4. AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES DE Ω_C E Ω_3

O próximo passo é calcular o conjunto completo de autovalores e as autofunções simultâneas dos operadores Ω_c e Ω_3. Com esse objetivo vamos escrever as autofunções como $V_\omega^{\lambda'}(x,\xi)$, onde x representa a variável radial transformada, $\rho = e^x$, e ξ é a variável que aparece na definição (10). Os autovalores de Ω_3 e Ω_c são respectivamente λ'e ω; isto é,

$$\Omega_3 V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) = \lambda' V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) \tag{19}$$

e

$$\Omega_c V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) = \omega V_\omega^{\lambda'}(x,\xi). \tag{20}$$

Vamos agora resolver a equação (19),

$$\Omega_3 V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) = -i\frac{\partial}{\partial\xi} V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) = \lambda' V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial V_\omega^{\lambda'}(x,\xi)}{V_\omega^{\lambda'}(x,\xi)} = i\lambda'\partial\xi \Longrightarrow$$

$$\ln V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) = i\lambda'\xi + f_\omega^{\lambda'}(x) \Longrightarrow$$

$$V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) = e^{i\lambda'\xi + f_\omega^{\lambda'}(x)} = e^{f_\omega^{\lambda'}(x)} e^{i\lambda'\xi} = e^{i\lambda'\xi} F_\omega^{\lambda'}(x). \tag{21}$$

Vamos agora olhar para a equação (20),

$$\Omega_c V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - e^{2x} - 2ie^x\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{4}\right) V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) = \omega V_\omega^{\lambda'}(x,\xi) \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - e^{2x} - 2ie^x\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{4}\right) e^{i\lambda'\xi} F_\omega^{\lambda'}(x) = \omega e^{i\lambda'\xi} F_\omega^{\lambda'}(x) \Longrightarrow$$

$$\left(e^{i\lambda'\xi}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - e^{i\lambda'\xi}e^{2x} + e^{i\lambda'\xi}2\lambda' e^x - e^{i\lambda'\xi}\frac{1}{4}\right) F_\omega^{\lambda'}(x) = \omega e^{i\lambda'\xi} F_\omega^{\lambda'}(x) \Longrightarrow$$

$$e^{i\lambda'\xi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - e^{2x} + 2\lambda' e^x - \frac{1}{4}\right) F_\omega^{\lambda'}(x) = \omega e^{i\lambda'\xi} F_\omega^{\lambda'}(x) \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - e^{2x} + 2\lambda' e^x - \frac{1}{4}\right) F_\omega^{\lambda'}(x) = \omega F_\omega^{\lambda'}(x).$$

Comparando a expressão obtida acima com a equação (9) vemos que é possível tratar a equação (20) como a equação radial para o átomo de hidrogênio se escolhermos $\lambda' = \lambda$ e identificarmos as autofunções da álgebra como

$$F(x) \equiv F_\omega^\lambda(x) \text{ com } R(x) = e^{-x/2} F_\omega^\lambda(x) \text{ ou } R(\rho) = \frac{1}{\rho^{1/2}} F_\omega^\lambda(\rho). \tag{22}$$

Dessa forma os autovalores ω devem ser:

$$\omega = l(l+1). \tag{23}$$

Assim reformulamos nosso problema original, que era resolver a equação de Schrödinger para a parte radial do átomo de hidrogênio não-relativístico, passando a tratá-la como uma equação de autovalor para o operador de Casimir de uma álgebra de Lie do tipo $\mathfrak{su}(1,1)$, com autovalores dados por $\omega = l(l+1)$.

As nossas equações possuem grande semelhança com as do momento angular orbital. Dessa forma é de se esperar que esta semelhança se mantenha no que diz respeito às soluções. Em particular, assim como no caso dos harmônicos esféricos $Y_l^m(\theta, \varphi)$ os quais dependem dos números quânticos l e m, esperamos que $F_\omega^\lambda(x)$ dependam dos autovalores ω e l. No entanto existem algumas diferenças. Note que em nosso caso x não é uma variável definida num intervalo fechado e limitado, isto é, ela não é uma variável compacta, como no caso das variáveis angulares usadas nos harmônicos esféricos, as quais podem ser restritas a tomar valores no intervalo compacto entre 0 e 2π.[2] Essa propriedade é somente compartilhada pela variável de fase ξ a qual é também uma variável compacta.

[2] Um intervalo compacto é um intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$

5. A SOLUÇÃO ALGÉBRICA

Apesar da diferença de sinal existente entre nossa álgebra e a álgebra do momento angular, $\Omega_\pm$ ainda desempenha o papel de um operador escada. Para verificar tal característica, mostraremos a partir da Eq. (13), que $\Omega_3\Omega_\pm V_\omega^\lambda(x,\xi) = (\Omega_\pm\Omega_3 \pm \Omega_\pm)V_\omega^\lambda(x,\xi)$

$= (\lambda \pm 1)\Omega_\pm V_\omega^\lambda(x,\xi)$. Ou seja, como no caso do momento angular, concluímos que $\Omega_\pm$ muda o autovalor λ para $\lambda \pm 1$,

$$\Omega_\pm V_\omega^\lambda(x,\xi) \propto V_\omega^{\lambda\pm 1}(x,\xi). \tag{24}$$

Passemos a demonstração:

$$[\Omega_3,\Omega_\pm]V_\omega^\lambda(x,\xi) = \pm\Omega_\pm V_\omega^\lambda(x,\xi) \Longrightarrow (\Omega_3\Omega_\pm)V_\omega^\lambda(x,\xi) = (\Omega_\pm\Omega_3 \pm \Omega_\pm)V_\omega^\lambda(x,\xi)$$

$$= \Omega_\pm(\Omega_3 \pm 1)V_\omega^\lambda(x,\xi) = \Omega_\pm(\lambda \pm 1)V_\omega^\lambda(x,\xi) = (\lambda \pm 1)\Omega_\pm V_\omega^\lambda(x,\xi).$$

Vamos agora definir o produto interno sobre o nosso espaço das funções dependentes de x e ξ, como:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*(\xi,x)\psi(\xi,x)dx\,, \tag{25}$$

onde assumimos que $\phi(\xi,x)$ e $\psi(\xi,x)$ são funções periódicas sobre o intervalo $\xi \in [0,2\pi]$ as quais também se anulam quando $x \to \pm\infty$. Como prometido vamos agora mostrar que Ω_3 é Hermitiano, ou seja,

$$\Omega_3^\dagger = \Omega_3. \tag{26}$$

$$\langle\phi|\Omega_3|\psi\rangle = -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*(\xi,x)\frac{\partial}{\partial\xi}\psi(\xi,x)dx$$

$$= -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi^*\psi) - \psi\frac{\partial}{\partial\xi}\phi^*\right]dx$$

$$= -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi^*\psi)dx + i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\frac{\partial}{\partial\xi}\phi^* dx$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\psi]_0^{2\pi}\,dx\right) + i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\frac{\partial}{\partial\xi}\phi^* dx$$

$$= \left(-i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\frac{\partial}{\partial\xi}\phi dx\right)^*$$

$$= \langle\psi|\Omega_3|\phi\rangle^* = \langle\phi|\Omega_3^\dagger|\psi\rangle \Rightarrow \Omega_3^\dagger = \Omega_3.$$

Os outros dois operadores Ω_1 e Ω_2 são um pouco diferente, por que eles não são definidos sobre um conjunto compacto de variáveis, mas também dependem de *x*. Explicitemos agora a forma algébrica de Ω_1:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(\Omega_+ + \Omega_-) = \frac{1}{2}\left[ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\right) + ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^x + i\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= i\left[\frac{1}{2}\left(e^{i\xi} + e^{-i\xi}\right)\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{1}{2i}\left(e^{i\xi} - e^{-i\xi}\right)e^x + \frac{1}{2i}\left(e^{i\xi} - e^{-i\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2}\right)\right]$$

$$= i\left(\cos\xi\frac{\partial}{\partial x} - i\sin\xi\, e^x + \sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\cos\xi\right). \qquad (27)$$

Mostramos abaixo que o operador Ω_1 é Hermitiano,

$$\langle\phi|\Omega_1|\psi\rangle = i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\cos\xi\frac{\partial}{\partial x} - i\sin\xi\, e^x + \sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\cos\xi\right)\psi dx$$

$$= i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\cos\xi\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx + i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*(-i\sin\xi e^x)\,\psi dx +$$

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\,\psi dx + \ i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\frac{1}{2}\cos\xi\right)\psi dx,$$

Vamos reescrever os quatro termos acima um a um,

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\cos\xi\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx = i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\cos\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi dx$$

$$= i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\cos\xi\left(\phi^*\psi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi\frac{\partial}{\partial x}\phi^* dx\right)$$

$$= -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\cos\xi\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi^* dx,$$

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*(-i\sin\xi e^x)\,\psi dx = -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(i\sin\xi e^x)\,\phi^* dx\,,$$

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\psi dx = i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi^*\sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\psi d\xi$$

$$= i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\left[\left[\phi^*\sin\xi\,\psi\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\psi\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi^*\sin\xi)d\xi\right]$$

$$= -i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\phi^* + \phi^*\cos\xi\right)d\xi$$

$$= -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\phi^* dx - i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\cos\xi)\phi^* dx,$$

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\frac{1}{2}\cos\xi\right)\psi dx = i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{1}{2}\cos\xi\right)\phi^* dx\,,$$

$$\Rightarrow \langle\phi|\Omega_1|\psi\rangle = -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\cos\xi\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi^* dx - i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(i\sin\xi e^x)\,\phi^* dx -$$

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\phi^* dx - \ i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{1}{2}\cos\xi\right)\phi^* dx$$

$$= -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\cos\xi\frac{\partial}{\partial x} - i\sin\xi\, e^x + \sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\cos\xi\right)\phi^*\, dx$$

$$= \left[i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\left(\cos\xi\frac{\partial}{\partial x} - i\sin\xi\, e^x + \sin\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\cos\xi\right)\phi\, dx\right]^*$$

$$= \langle\psi|\Omega_1|\phi\rangle^* = \left\langle\phi\middle|\Omega_1^\dagger\middle|\psi\right\rangle \Longrightarrow \Omega_1 = \Omega_1^\dagger. \tag{28}$$

Agora usamos um raciocínio análogo para mostrar que Ω_2 é também Hermitiano.

Recordando a definição de $\Omega_2$temos:

$$\Omega_2 = \left(\frac{1}{2i}\right)(\Omega_+ - \Omega_-) = \left[ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\right) - ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^x + i\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= i\left(\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2}\right)e^x - i\left(\frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{i}{2}\left(\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i}\right)$$

$$= \left(i\sin\xi\frac{\partial}{\partial x} - \cos\xi e^x - i\cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{i}{2}\sin\xi\right)$$

$$= i\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial x} + i\cos\xi e^{x} - \cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\sin\xi\right)$$

$$\Rightarrow \langle\phi|\Omega_2|\psi\rangle = i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial x} + i\cos\xi e^{x} - \cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\sin\xi\right)\psi dx$$

$$= i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx + i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\,(i\cos\xi\, e^{x})\psi dx +$$

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(-\cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\psi dx + i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\frac{1}{2}\sin\xi\right)\psi dx,$$

novamente aqui olhamos separadamente para cada uma das quatro integrais acima:

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx = i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\sin\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi dx$$

$$= i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\sin\xi\left(\phi^*\psi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\psi\frac{\partial}{\partial x}\phi^* dx\right)$$

$$= -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi^* dx\ ,$$

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\,(i\cos\xi\, e^{x})\psi dx = -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\,(-i\cos\xi\, e^{x})\phi^* dx\ ,$$

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(-\cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\psi dx = -i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi^*\cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\psi d\xi$$

$$= -i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\left[\phi^*\cos\xi\,\psi]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\psi\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi^*\cos\xi)d\xi\right]$$

$$= i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(\cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\phi^* - \phi^*\sin\xi\right)d\xi$$

$$= -i\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(-\cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\phi^* dx -$$

$$i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\,(\sin\xi)\phi^* dx\,,$$

$$i\int_{0}^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\left(\frac{1}{2}\sin\xi\right)\psi dx = -i\int_{0}^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(-\frac{1}{2}\sin\xi\right)\phi^* dx\,,$$

logo,

$$\langle\phi|\Omega_2|\psi\rangle = -i\int_{0}^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi^* dx - i\int_{0}^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\,(-i\cos\xi\, e^x)\phi^* dx -$$

$$i\int_{0}^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(-\cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\phi^* dx - i\int_{0}^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{1}{2}\sin\xi\right)\phi^* dx$$

$$= \left[i\int_{0}^{2\pi}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\left(\sin\xi\frac{\partial}{\partial x} + i\cos\xi e^x - \cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\sin\xi\right)\phi dx\right]^*$$

$$= \langle\psi|\Omega_2|\phi\rangle^* = \langle\phi|\Omega_2^\dagger|\psi\rangle \Longrightarrow \Omega_2 = \Omega_2^\dagger. \tag{29}$$

Mostramos assim que todos os geradores do grupo de Lie SU (1,1) são Hermitianos, ou seja, $\Omega_i = \Omega_i^\dagger, i = 1, 2{,}3$. Uma conseqüênciaimediata é que o nosso operador de Casimir é também Hermitiano, pois:

$$\Omega_c = -\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 \Rightarrow \Omega_c^\dagger = -\left(\Omega_1^\dagger\right)^2 - \left(\Omega_2^\dagger\right)^2 + \left(\Omega_3^\dagger\right)^2$$

$$= -\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 = \Omega_c.$$

Como os operadores Ω_c e Ω_3 comutam e são Hermitianos, podemos usar os autokets simultâneos desses operadores para construir uma base para o espaço dos estados associado com o espaço de Hilbert das funções $\psi(\xi, x)$. Representaremos tais autokets pela familiar notação de Dirac, a qual associa a cada função no espaço de Hilbert um ket correspondente no espaço de estados, ou seja,

$$V_\omega^\lambda(x,\xi) \Leftrightarrow |\omega,\lambda\rangle. \tag{30}$$

Como de costume vamos postular que tais kets são ortonormalizados, ou seja,

$$\langle\omega',\lambda'|\omega,\lambda\rangle = \delta_{\omega'\omega}\delta_{\lambda'\lambda}. \tag{31}$$

Em contraste com L^2 o operador de Casimir Ω_c não é em geral positivo, como pode ser visto diretamente da nossa definição, $\Omega_c = -\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2$. No entanto podemos definir um novo operador como $\Omega^2 = +\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2$ que é sempre positivo. Então, da relação:

$$\Omega^2 = +\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 = (-\Omega_c + \Omega_3^2) + \Omega_3^2 = 2\Omega_3^2 - \Omega_c, \tag{32}$$

temos

$$\Omega^2|\omega,\lambda\rangle = (2\Omega_3^2 - \Omega_c)|\omega,\lambda\rangle = (2\lambda^2 - \omega)|\omega,\lambda\rangle$$

$$\Longrightarrow (2\lambda^2 - \omega) \geq 0 \Longrightarrow 2\lambda^2 \geq \omega. \tag{33}$$

A equação (33) mostra que $|\lambda|$ deve possuir um limite inferior, digamos $|\lambda|_{min}$. Temos então duas possibilidades aqui, $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. Se $\lambda > 0$ então λ deve ter um limite inferior, se $\lambda < 0$ então λ deve ter um limite superior:

Por hipótese $|\lambda| > |\lambda|_{min}$, se $\lambda > 0$ então$|\lambda| = \lambda > |\lambda|_{min}$ (limitado inferiormente),

se$\lambda < 0 \Rightarrow |\lambda| = -\lambda > |\lambda|_{min} \Rightarrow \lambda < -|\lambda|_{min}$ (limitado superiormente).

Nós vamos tomar primeiro $\lambda > 0$ e definir $N = \lambda_{min}$. Como $\Omega_\pm$ age sobre os kets da base $\{|\omega,\lambda\rangle\}$ como um operador escada, temos que cada vez que usamos Ω_- nós descemos um nível. Como N é o valor mínimo de λ, $\Omega_-|\omega,N\rangle = 0$ ou, equivalentemente, $\Omega_+\Omega_-|\omega,N\rangle = 0$. Durante a demonstração da forma algébrica para Ω_c nós demonstramos que:

$$\Omega_+\Omega_- = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3,$$

agora, da definição de Ω_c, temos:

$$\Omega_c = -\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 \Rightarrow \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = -\Omega_c + \Omega_3^2 \Longrightarrow$$

$$\Omega_+\Omega_- = -\Omega_c + \Omega_3^2 - \Omega_3. \tag{34}$$

Então,

$$\Omega_+\Omega_-|\omega,N\rangle = 0 \Leftrightarrow (-\Omega_c + \Omega_3^2 - \Omega_3)|\omega,N\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$-\omega + N^2 - N = 0, \text{ou}$$

$$\omega = N^2 - N = N(N-1) = l(l+1). \tag{35}$$

As soluções da Eq. (35) são $N = -l$ e $N = l + 1$; a primeira não nos serve pelo fato de que por hipótese $\lambda > 0$. Então a única escolha possível é

$$N = l + 1. \tag{36}$$

l varia de 0 até infinito por saltos discretos de tamanho um, portanto devemos ter $N = 1,2, \dots$; em outras palavras, N desempenha o papel de número quântico principal do átomo de hidrogênio.

De posse dos autovalores da nossa álgebra, podemos renomear as nossas autofunções com o objetivo de deixá-las numa forma mais padrão

$$|\omega, \lambda\rangle \to |N, l\rangle. \tag{37}$$

É válido ressaltar aqui que a ordem de nomeação foi invertida visto que N está associado à λ e l está associado a ω. Do ponto de vista da álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$ l está associado ao autovalor do operador de Casimir, $l(l+1)$ e N é o autovalor do operador Ω_3.

O leitor sempre atento ao nosso texto pode perceber que não analisamos o caso $\lambda < 0$, de antemão vamos garantir que tais soluções não são viáveis ao nosso problema, mas aqueles leitores mais céticos não devem se preocupar, analisaremos tais casos no final desta seção.

Mostramos abaixo que os autovalores de energia seguem diretamente das nossas definições (2) e (4) e tomando $\lambda = N$;

$$E = -\frac{e^2}{2a_0 N^2}, \qquad N = 1,2,3 \dots, \tag{38}$$

que é a fórmula de Balmer, onde $a_0 \equiv \hbar^2/me^2$ é o raio de Bohr.

Da definição (2), temos:

$$k^2 = -\frac{8mE}{\hbar^2} \Longrightarrow E = -\frac{\hbar^2 k^2}{8m},$$

agora de (4), temos:

$$\lambda = \frac{2me^2}{\hbar^2 k} \Longleftrightarrow E = \frac{2me^2}{\hbar^2 k} \Longrightarrow N^2 = \frac{4m^2 e^4}{\hbar^4 k^2} \Longrightarrow \hbar^2 k^2 = \frac{4m^2 e^4}{\hbar^2 N^2}$$

então,

$$E = -\frac{1}{8m}\frac{4m^2e^4}{\hbar^2N^2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2N^2} = -\frac{e^2}{2N^2}\frac{1}{\frac{\hbar^2}{me^2}} = -\frac{e^2}{2a_0N^2}.$$

Para encontrar as autofunções nós começamos com o estado fundamental $|N = 1, l = 0\rangle$. Da equação $\Omega_{-}|N = 1, l = 0\rangle = 0$, temos

$$ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^x + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)|N = 1, l = 0\rangle = 0 \Longrightarrow$$

$$= ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^x + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{i\xi}F_1^0(x) = 0\,, \qquad (39)$$

passemos agora a solução da equação (39).[3]

$$ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^x + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{i\xi}F_1^0(x) = ie^{-i\xi}\left(e^{i\xi}\frac{\partial}{\partial x}F_1^0(x) + e^{i\xi}e^xF_1^0(x) - e^{i\xi}F_1^0(x) + \frac{e^{i\xi}F_1^0(x)}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}F_1^0(x) + e^xF_1^0(x) - F_1^0(x) + \frac{F_1^0(x)}{2} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1^0(x) = \left(\frac{1}{2} - e^x\right)F_1^0(x) \Longrightarrow \frac{\partial F_1^0(x)}{F_1^0(x)} = \left(\frac{1}{2} - e^x\right)\partial x \Longrightarrow$$

$$\ln F_1^0(x) = \frac{x}{2} - e^x + C \Longrightarrow F_1^0(x) = e^{\left(\frac{x}{2} - e^x + C\right)} = e^Ce^{(x/2)}\exp(-e^x) \Longrightarrow$$

$$F_1^0(x) = C_1^0e^{(x/2)}\exp(-e^x) \text{ ou, } F_1^0(\rho) = C_1^0\rho^{\frac{1}{2}}e^{-\rho}\,, \qquad (40)$$

onde C_1^0 é uma constante de normalização.

Já estamos agora em condições plenas de expressarmos a solução para o átomo de hidrogênio no estado fundamental, pela definição de *k*, temos

$$k^2 = -\frac{8mE}{\hbar^2} = -\frac{8m}{\hbar^2}\left(-\frac{e^2}{2a_0N^2}\right) \Longrightarrow$$

$$k^2 = \frac{4me^2}{\hbar^2}\frac{1}{a_0N^2} = \frac{4}{a_0^2N^2} \Longrightarrow k = \frac{2}{a_0N}\,,$$

[3]Lembrando que trocamos a ordem dos nossos parâmetros.

$$\rho = \left(\frac{k}{2}\right) r \Rightarrow \rho = \frac{r}{a_0 N},$$

agora pela Eq.(6)

$$R(\rho) = F(\rho)/\rho^{1/2} \Rightarrow R_1^0(\rho) = C_1^0 e^{-\rho} \Rightarrow$$

$$R_1^0(r) = C_1^0 e^{-r/a_0}, \tag{41}$$

que é a solução $N = 1, l = 0$ para o átomo de hidrogênio não-relativístico.

Uma vez de posse do estado fundamental para um dado l, nós podemos obter o conjunto completo de estados associados com este l e o número quântico principal N

$= l + 1, l + 2$,... através da equação $\Omega_+|N,l\rangle \sim |N+1,l\rangle$. Por exemplo, podemos encontrar o estado $|2{,}0\rangle$ a partir do estado fundamental $|1{,}0\rangle$.

O estado $|1{,}0\rangle = e^{i\xi} e^{x/2} \exp(-e^x)$ a menos de uma constante de normalização. Agora apliquemos o operador de levantamento em tal estado

$$\Omega_+|1{,}0\rangle = ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right) e^{i\xi} e^{x/2} \exp(-e^x)$$

$$= \ ie^{i\xi}\left(e^{i\xi}\frac{\partial}{\partial x} - e^{i\xi} e^x + e^{i\xi} + e^{i\xi}\frac{1}{2}\right) e^{x/2} \exp(-e^x)$$

$$= ie^{i2\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x + 1 + \frac{1}{2}\right) e^{x/2} \exp(-e^x) \tag{42}$$

$$= ie^{i2\xi}\left[\frac{1}{2} e^{x/2} \exp(-e^x) + e^{x/2}(-e^x)\exp(-e^x) - \right.$$

$$\left.(e^x) e^{x/2} \exp(-e^x) + e^{x/2} \exp(-e^x) + \left(\frac{1}{2}\right) e^{x/2} \exp(-e^x)\right]$$

$$= ie^{i2\xi}\left[2e^{x/2} \exp(-e^x) - 2(e^x) e^{x/2} \exp(-e^x)\right]$$

$$= 2ie^{i2\xi} e^{x/2} e^{-e^x}(1 - e^x) \sim |2{,}0\rangle \Rightarrow$$

$$|2{,}0\rangle = e^{i2\xi} F_2^0(x) = C_2^0 e^{i2\xi} e^{x/2} e^{-e^x}(1 - e^x). \tag{43}$$

$$\Rightarrow F_2^0(x) = C_2^0 e^{x/2} e^{-e^x}(1 - e^x)$$

$$\Rightarrow F_2^0(\rho) = C_2^0 \rho^{1/2}(1-\rho)e^{-\rho} \ ,$$

$$R(\rho) = F(\rho)/\rho^{1/2} \Longrightarrow$$

$$R_2^0(\rho) = C_2^0(1-\rho)e^{-\rho},$$

e como para $N = 2 \Longrightarrow \rho = (r/2a_0)$ então

$$R_2^0(r) = C_2^0(1 - r/2a_0)e^{-(r/2a_0)} \Longrightarrow$$

$$R_2^0(r) = C_2^0\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-(r/2a_0)}, \tag{44}$$

que é precisamente a solução para a parte radial da autofunção do átomo de hidrogênio não-relativístico tomados $N = 2, l = 0$.[4]

Podemos continuar a proceder dessa maneira e obter $R_3^0(r)$.

$$|3{,}0\rangle \sim \Omega_+|2{,}0\rangle$$

$$\Omega_+|2{,}0\rangle = ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{i2\xi}e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x)$$

$$= ie^{i\xi}\left(e^{i2\xi}\frac{d}{dx} - e^{i2\xi}e^x + e^{i2\xi}2 + e^{i2\xi}\frac{1}{2}\right)e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x)$$

$$= ie^{i3\xi}\left(\frac{d}{dx} - e^x + 2 + \frac{1}{2}\right)e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) \tag{45}$$

$$= ie^{i3\xi}\left\{\frac{d}{dx}\left[e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x)\right] - e^x e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) + 2e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x)\right\} = ie^{i3\xi}\left\{(1-e^x)\frac{d}{dx}\left(e^{x/2}e^{-e^x}\right) + \left(e^{x/2}e^{-e^x}\right)(-e^x) - \right.$$

$$\left. e^x e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) + 2e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) + \frac{1}{2}e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x)\right\}$$

$$= ie^{i3\xi}\left[\frac{1}{2}e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) + e^{x/2}\left(-e^x e^{-e^x}\right)(1-e^x) - e^x e^{x/2}e^{-e^x} - \right.$$

$$\left. e^x e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) + 2e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) + \frac{1}{2}e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x)\right]$$

---

[4] Apesar de estarmos usando as mesmas letras para as constantes de normalização, perceba que as constantes que aparecem nas equações (43) e (44), não são as mesmas!

$$= ie^{i3\xi}\left[3e^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) - 2e^xe^{x/2}e^{-e^x}(1-e^x) - e^xe^{x/2}e^{-e^x}\right]$$

$$= ie^{i3\xi}\big(3e^{x/2}e^{-e^x} - 3e^xe^{x/2}e^{-e^x} - 2e^xe^{x/2}e^{-e^x} + 2e^{2x}e^{x/2}e^{-e^x} -$$

$$e^xe^{x/2}e^{-e^x}\big) = (3 - 6e^x + 2e^{2x})ie^{i3\xi}e^{x/2}e^{-e^x} \Longrightarrow$$

$$|3{,}0\rangle = C_3^0(3 - 6e^x + 2e^{2x})e^{i3\xi}e^{x/2}e^{-e^x}, \tag{46}$$

$$\Longrightarrow F_3^0(x) = C_3^0(3 - 6e^x + 2e^{2x})e^{x/2}e^{-e^x}$$

Como $\rho = e^x \Longrightarrow F_3^0(\rho) = C_3^0(3 - 6\rho + 2\rho^2)\rho^{1/2}e^{-\rho} \Longrightarrow$

$$R_3^0(\rho) = F_3^0(\rho)/\rho^{1/2} = C_3^0(3 - 6\rho + 2\rho^2)e^{-\rho}$$

E como para $N = 3 \Longrightarrow \rho = r/3a_o \;\; \Longrightarrow$

$$R_3^0(r) = C_3^0\left(3 - 6r/3a_o + 2\frac{r^2}{9{a_0}^2}\right)e^{-(r/3a_0)} = \frac{C_3^0}{9}\left(27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{{a_0}^2}\right)e^{-(r/3a_0)} \Rightarrow$$

$$R_3^0(r) = C_3^0\left[27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right]e^{-(r/3a_0)}. \tag{47}$$

Procedendo de maneira semelhante podemos obter todas as funções de onda do estado s.[5]

Para conseguir o restante das autofunções devemos obter o estado base da álgebra para cada l dado. O estado base da álgebra é o estado que satisfaz a condição $\Omega_-|\lambda_{min}, l\rangle = 0$. Tal estado é $|N, N-1\rangle$. Então aplicamos o operador de abaixamento nesse estado,e obtemos a seguinte equação

$$ie^{-i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + e^x + i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{iN\xi}F_N^{l=N-1}(x) = 0, \tag{48}$$

$$\Longrightarrow ie^{-i\xi}\left(e^{iN\xi}\frac{\partial}{\partial x} + e^{iN\xi}e^x - e^{iN\xi}N + e^{iN\xi}\frac{1}{2}\right)e^{iN\xi}F_N^{l=N-1}(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{d}{dx} + e^x - N + \frac{1}{2}\right)F_N^{l=N-1}(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}F_N^{l=N-1}(x) = \left(N - \frac{1}{2} - e^x\right)F_N^{l=N-1}(x)$$

[5] s corresponde a l=0, p corresponde a l=1, d corresponde a l=2, e assim sucessivamente.

$$\Longrightarrow \frac{dF_N^{l=N-1}(x)}{F_N^{l=N-1}(x)} = \left(N - \frac{1}{2} - e^x\right)dx$$

$$\Longrightarrow \ln F_N^{l=N-1}(x) = \left(N - \frac{1}{2}\right)x - e^x + c$$

$$\Longrightarrow F_N^{l=N-1}(x) = C_N^{N-1} e^{\left(N-\frac{1}{2}\right)x} e^{-e^x}$$

$$\Longrightarrow |N, N-1\rangle = C_N^{N-1} e^{iN\xi} e^{\left(N-\frac{1}{2}\right)x} e^{-e^x}. \tag{49}$$

Notamos assim que a Eq. (48) é a única equação diferencial que precisamos resolver. De fato, as autofunções radiais podem ser todas elas encontradas a partir das soluções dessa equação.

Como por definição $\rho = e^x$, temos:

$$|N, N-1\rangle = C_N^{N-1} e^{iN\xi} \rho^{\left(N-\frac{1}{2}\right)} e^{-\rho},$$

agora da relação $\rho = (r/a_0 N)$, segue:

$$|N, N-1\rangle = C_N^{N-1} e^{iN\xi} (r/a_0 N)^{\left(N-\frac{1}{2}\right)} e^{-(r/a_0 N)},$$

recorrendo novamente a definição (6), vem:

$$R(\rho) = F(\rho)/\rho^{1/2} \Rightarrow R_N^{l=N-1}(\rho) = C_N^{N-1} \rho^{\left(N-\frac{1}{2}\right)} e^{-\rho}/\rho^{1/2} = C_N^{N-1} \rho^{(N-1)} e^{-\rho} \Longrightarrow$$

$$R_N^{l=N-1}(r) = C_N^{N-1} (r/a_0 N)^{(N-1)} e^{-(r/a_0 N)} \Longrightarrow$$

$$R_N^{l=N-1}(r) = C_N^{N-1} r^{N-1} \left(\frac{1}{a_0 N}\right)^{N-1} e^{-(r/a_0 N)} \Longrightarrow$$

$$R_N^{l=N-1}(r) = C_N^{N-1} r^{N-1} e^{-(r/a_0 N)}. \tag{50}$$

Onde como de costume incorporamos o fator $\left(\frac{1}{a_0 N}\right)^{N-1}$ à constante de normalização. A partir da Eq. (50) podemos obter todas as funções de onda para qualquer valor de $l = 0, 1, 2, ...$ através da aplicação sucessiva do operador de levantamento Ω_+ no estado base. Por exemplo, o estado com $N = 2, l = 1$ é

$$|2,1\rangle = C_2^1 e^{i2\xi} e^{3x/2} e^{-e^x} \tag{51}$$

ou

$$R_2^1(r) = C_2^1 r e^{-(r/2a_0)} \tag{52}$$

Façamos agora uma breve análise sobre as constantes de normalização. Como todas as funções de onda são obtidas através da aplicação do operador de abaixamento no estado base, então todas as soluções serão sempre da forma $\rho^l e^{-\rho} P(2\rho)$, onde $P(2\rho)$ é um polinômio em ρ.[6] Para calcularmos as constantes de normalização devemos recobrar nossas definições (25), (31) e (37):

$$V_N^l(\xi, x) = |N, l\rangle = e^{iN\xi} F_N^l(\xi, x) \Longrightarrow$$

$$\langle N', l' | N, l\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N'\xi}\, F_{N'}^{l'\,*}(x) e^{iN\xi} F_N^l(x) dx = \delta_{N'N}\delta_{l'l} \Longrightarrow$$

$$\left|V_N^l(\xi, x)\right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F_N^l(x)\right]^2 dx = 1,$$

trocamos agora a variável de integração, $\rho = e^x \Rightarrow d\rho = \rho dx, \rho(-\infty) = 0, \rho(\infty) = \infty$, além disso, $F = R\rho^{1/2} \Longrightarrow F^2 = R^2\rho \Longrightarrow$

$$\left|V_N^l(\xi, x)\right|^2 = \int_0^{\infty} R^2 d\rho, \tag{53}$$

então, teremos que calcular a integral na Eq.(53) se desejarmos encontrar as constantes de normalização. O cálculo dessa integral envolve o cálculo de integrais na forma

$$I = \int_0^{+\infty} \rho^\beta\, e^{-2\rho} d\rho, \tag{54}$$

Usando a mudança de variável $t = 2\rho$, obtemos:

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^\beta e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2^{\beta+1}} \int_0^{+\infty} t^\beta e^{-t} dt = \frac{1}{2^{\beta+1}} \Gamma(\beta + 1). \tag{55}$$

onde $\Gamma(\beta + 1) \equiv \int_0^{+\infty} t^\beta e^{-t} dt$ é a função gama.

A equação (55) permite o cálculo de qualquer constante de normalização.

[6]Sabemos que tais polinômios são os polinômios de Laguerre.

Como prometido, vamos agora analisar o caso $\lambda < 0$ e mostrar que este não serve para modelar fisicamente o nosso problema. Como vimos se $\lambda < 0$ então λ tem um valor máximo, digamos $\lambda_{max} = M < 0$, de tal forma que $\Omega_+|M, l\rangle = 0$ ou $\Omega_-\Omega_+|M, l\rangle = 0$, da relação $\Omega_-\Omega_+ = -\Omega_c + \Omega_3^2 + \Omega_3$, temos:

$$(-\Omega_c + \Omega_3^2 + \Omega_3)|M, l\rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\omega + M^2 + M = 0 \Leftrightarrow M(M+1) = l(l+1)$$

cuja as soluções são $M = l$ ou $M = -(l+1)$ e como por hipótese $M < 0$ escolhemos $M = -(l+1)$, segue que:

$$ie^{i\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e^x - i\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)e^{iM\xi}F_M^{l=-(M+1)}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d}{dx} - e^x + M + \frac{1}{2}\right)F_M^{l=-(M+1)}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dF_M^{l=-(M+1)}(x)}{F_M^{l=-(M+1)}(x)} = \left(e^x - M - \frac{1}{2}\right)dx \Rightarrow$$

$$F_M^{l=-(M+1)}(x) = C_M^{-(M+1)}e^{-\left(M+\frac{1}{2}\right)x}e^{e^x} \Rightarrow$$

$$F_M^{l=-(M+1)}(\rho) = C_M^{-(M+1)}\rho^{-\left(M+\frac{1}{2}\right)}e^{\rho} \Rightarrow$$

$$|M, -(M+1)\rangle = C_M^{-(M+1)}e^{iM\xi}\rho^{-(M+1)}e^{\rho}. \quad (56)$$

Os estados representados pela equação (56) não podem ser normalizados, pois quando $\rho \to \infty$ estes divergem. Então para a descrição física dos nossos estados temos que escolher necessariamente $\lambda > 0$.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nós construímos uma realização da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ para o átomo de hidrogênio pela introdução dos operadores Hermitianos $\Omega_i (i = 1, 2,3.)$. Essa álgebra fornece o espectro de energia e as autofunções radiais para o sistema. Para definir a álgebra nos introduzimos a fase como uma variável extra do problema.

Podemos agora calcular o conjunto das autofunções para um valor fixo de l aplicando um operador que possui somente derivadas de primeira ordem, à saber $\Omega_{\mp}$, numa autofunção definida pelo valor de l fixado. O procedimento é relativamente simples, pelo menos para os primeiros estados. Esse resultado é interessante visto que não precisamos resolver a complicada equação de Laguerre.

Note que em nossa abordagem o número quântico relacionado ao momento angular,l, desempenha um papel um pouco mais importante que o número quântico principal N, no sentido de que somos forçados primeiro a fixarmos o l e então somente depois disso passamos a calcular as funções de onda. Assim, a simetria rotacional desempenha um papel central no comportamento do sistema. Esse ponto não é sempre evidente quando tratamos com a Hamiltoniana radial do átomo de hidrogênio, mas está presente desde o começo, pois é proveniente da contribuição centrífuga do potencial $l(l + 1)/r^2$ para a equação radial. O método apresentado aqui evidencia essa característica do problema.

A solução algébrica que descrevemos pode servir para introduzir diversas técnicas a estudantes de teoria quântica, desde o uso de álgebras de Lie e simetrias até a forma de como tomar vantagem de propriedades escondidas de uma Hamiltoniana, ou para tentar, com o uso de referências apropriadas, estender o método a outros sistemas de interesse.

REFERÊNCIAS

Biedenharn L C and Louck J D, **Angular Momentum in Quantum Physics, Theoryand Applications**, Reading, MA: Addison Wesley, 1981.

B. G. Adams,**Algebraic Approach to Simple Quantum Systems**, Berlin: Springer-Verlag, 1994.

De Lange O L and Raab E R, **Operator Methods in Quantum Mechanics**, Oxford: Clarendon, 1991.

De R, Dutt R and Sukhatme U,**J. Phys. A: Math. Gen**. **25** L843,1992.

Englefield M J, **Group Theory and the Coulomb Problem**, New York: Wiley-Interscience, 1972.

Fock V, **Z.Phys.98**, p.145, 1935.

Fursa D V and Yudin G L, **Phys. Rev.A 44** 7414, 1991.

G. B. Wybourne, **Classical Groups for Physicists**, New York: Wiley-Interscience, 1974.

H. J. Lipkin**, Lie Groups for Pedestrians***,* Mineola: Dover, 2002.

H. J. Lipkin, **Quantum Mechanics: New Approaches to Selected Topics**, Amsterdam: North Holland, 1973.

J. B. Boyling, “Simplified ladder operators for the hydrogen atom,” **Am.J. Phys**. **56**, 943–945, 1988.

J. J. Sakurai, **Modern Quantum Mechanics***,* Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.

J. M. Ziman, **Elements of Advanced Quantum Theory**, Cambridge: University Press, 1969.

John S. Townsend, **A Modern Approach to Quantum Mechanics***,* Sausalito, CA: University Science Books, 2000.

Martínez y Romero R P, Núñez-Yépez H N and Salas-Brito A L, **Phys. Lett. A** 259, 2005.

McIntosh H V, **Group Theory and its Applications vol 2** Ed E M Loebl, New York: Academic, 1971.

O. L. de Lange and R. E. Raab, “An operator solution for the hydrogen atom with application to the momentum representation,” **Am. J. Phys**. **55**, 913–917, 1987.

Pauli W, **Z.Phys. 36**, p.336, 1926.

P. Cordero and J. Daboul, "Analysis of the spectrum generating algebra method for obtaining energy spectra," **J. Math. Phys.46**, 053507-1–4, 2005.

Puri R. R, **Mathematical Methods of Quantum Optics**, Berlin: Springer, 2001.

Ravinder R. Puri**, Mathematical Methods of Quantum Optics**, Berlin: Springer-Verlag, 2001.

R. A. Swainson and G. W. F. Drake, "A unified treatment of the non-relativistic and relativistic hydrogen atom: The wavefunctions," **J. Phys.A24**, 79–94, 1991.

R. P. Martínez-y-Romero, H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas Brito, "An su (1,1) algebraic method for the hydrogen atom," **J. Phys. A 38**, 8579–8588, 2005.

Wybourne G B, **Classical Groups for Physicists**, New York: Wiley-Interscience, 1974.

Xudong Jiang, "The complex operator method for the hydrogen atom," **Am. J. Phys**. **57**, 48–49, 1989.

APÊNDICE A- As autofunções do átomo de hidrogênio

As autofunções são da forma

$$\Psi_{N,l.m}(r,\theta,\varphi) = R_N^l(r)Y_l^m(\theta,\varphi),$$

onde,

$$R_N^l(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{Na_0}\right)^3 \frac{(N-l-1)!}{2N[(N+l)!]^3}}\, e^{-r/Na_0} \left(\frac{2r}{Na_0}\right)^l L_{N-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{Na_0}\right),$$

e

$$L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$

é um polinômio de Laguerre associado, e

$$L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x}x^q)$$

é o q-ésimo polinômio de Laguerre. As funções $Y_l^m(\theta,\varphi)$ são conhecidas como harmônicos esféricos e são definidas abaixo:

$$Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta),$$

onde $\epsilon = (-1)^m$ para $m \geq 0$ e $\epsilon = 1$ para $m \leq 0$, P_l^m é a função de Legendre associada, definida por

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_l(x),$$

e $P_l(x)$ é o l-ésimo polinômio de Legendre, definido no intervalo $x \in (-1,+1)$ pela Fórmula de Rodrigues:

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l.$$

APÊNDICE B- Relações de comutação para o momento angular

O momento angular $\boldsymbol{J}$ que pode representar tanto o momento angular orbital quanto o momento angular intrínseco (ou spin) obedece às seguintes relações de comutação:

$$[J_1, J_2] = i\hbar J_3,$$

$$[J_2, J_3] = i\hbar J_1,$$

$$[J_3, J_1] = i\hbar J_2.$$

Essas relações de comutação podem ser resumidas usando-se o tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita:

$$[J_i, J_j] = \sum_{i,j,k=1}^{3} i\hbar\epsilon_{ijk}J_k.$$

Como enfatizamos no texto, tais relações definem uma álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ para o espaço vetorial formado pelos operadores de momento angular.

O operador definido por:

$$\boldsymbol{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2,$$

é o operador de Casimir para a álgebra do momento angular, e obviamente obedece a relação de comutação canônica:

$$[\boldsymbol{J}^2, \boldsymbol{J}] = 0$$

onde

$$\boldsymbol{J} = J_1\hat{x} + J_2\hat{y} + J_3\hat{z}.$$

Para a álgebra do momento angular, os operadores de levantamento e abaixamento são definidos por:

$$J_+ = J_1 + iJ_2$$

e

$$J_- = J_1 - iJ_2$$

esses operadores obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[J_3, J_+] = \hbar J_+$$

$$[J_3, J_-] = -\hbar J_-$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3$$

$$[\boldsymbol{J}^2, J_+] = [\boldsymbol{J}^2, J_-] = [\boldsymbol{J}^2, J_3] = 0.$$