



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, ATUÁRIA
E CONTABILIDADE - FEAAC
PROGRAMA DE ECONOMIA PROFISSIONAL - PEP

JOSÉ HENRIQUE CALENZO COSTA

ANÁLISE DE EVIDÊNCIAS DE DINÂMICA CAÓTICA E NÃO LINEAR APLICADA
AO MERCADO FINANCEIRO

FORTALEZA

2017

JOSÉ HENRIQUE CALENZO COSTA

**ANÁLISE DE EVIDÊNCIAS DE DINÂMICA CAÓTICA E NÃO LINEAR APLICADA
AO MERCADO FINANCEIRO**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Economia Profissional – PEP, da Universidade Federal do Ceará - UFC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia. Área de Concentração: Economia do Setor Público.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogério Faustino de Matos

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Costa, José Henrique Calenzo.

Análise de evidências de dinâmica caótica e não linear aplicada ao mercado financeiro / José Henrique Calenzo Costa. – 2017.

41 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, Mestrado Profissional em Economia do Setor Público, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Paulo Rogério Faustino Matos.

1. Finanças. 2. Caos. 3. Não-Linearidade. 4. Estocástico. I. Título.

CDD 330

JOSÉ HENRIQUE CALENZO COSTA

**ANÁLISE DE EVIDÊNCIAS DE DINÂMICA CAÓTICA E NÃO LINEAR APLICADA
AO MERCADO FINANCEIRO**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Economia Profissional – PEP, da Universidade Federal do Ceará - UFC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia. Área de Concentração: Economia do Setor Público.

Aprovada em: **06 de dezembro de 2017.**

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Rogério Faustino de Matos (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Mauricio Benegas.
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Célia Maria Braga Carneiro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

A Controladoria e Ouvidoria Geral Estado do Ceará pelos incentivos concedidos.

A minha família pela paciência e compreensão.

Aos colegas de turma pelo companheirismo.

Aos professores do CAEN pelo conhecimento transmitido nas disciplinas para construção deste trabalho.

RESUMO

O presente estudo contribui com a teoria de apreçamento de ativos, ao analisar a evidência de não linearidade e caos nas séries temporais de retornos diários de 30 de março de 2009 a 31 de dezembro de 2013 disponibilizada pela Bloomberg, dos seguintes países e índices: Índia - CNX Finance, Alemanha - Dax All banks, Estados Unidos - kbw bank, Brasil - IFNC, Austrália - asx 200 financials, França - cac financials, México - BMV, Reino Unido - nmx8350, Canadá - TSX financials e Rússia - Moscow Exchange Financials. Quanto aos objetivos específicos do estudo temos: 1) analisar se a base de dados em questão pode ser classificada à luz de teorias que inferem que os retornos dos ativos seguem um processo estocástico, 2) utilizar a estatística BDS para verificar se as séries em questão são ou não lineares e 3) verificar a existência de Caos na base de dados através dos Expoentes Máximos de Liapunov. Para cálculo dos expoentes máximos de Lyapunov foi calculado a defasagem das séries pelo método de informação mútua a média, sendo encontrado $t=1$ para todas as séries e a estimação da dimensão de imersão foi calculado pelo método proposto em Cao (1997). Pelos resultados obtidos, foi constatado que as séries em questão são não-lineares e também não podem ser consideradas caóticas, devendo estas serem tratadas como processos estocásticos e não lineares.

Palavras-chave: Finanças. Caos. Não-Linearidade. Estocástico.

ABSTRACT

The present study contributes to the theory of asset pricing by analyzing evidence of non-linearity and chaos in the time series of daily returns from March 30, 2009 to December 31, 2013 provided by Bloomberg of the following countries and indices: India - CNX Finance, Germany - Dax All banks, United States - kbw bank, Brazil - IFNC, Australia - asx 200 financials, France - cac financials, Mexico - BMV, UK - nmx8350, Canada - TSX financials and Russia - Moscow Exchange Financials. As to the specific objectives of the study we have: 1) to analyze if the database in question can be classified in the light of efficient market theory, that is, if the returns of the assets follow a stochastic process, 2) use the BDS statistic to verify whether the series in question are linear or not, and 3) to verify the existence of Chaos in the database through the Liapunov Peak Expo. The Lyapunov maximum exponents were calculated by the mutual information method at the mean, and $t = 1$ was found for all series and the estimation of the immersion dimension was calculated by the method proposed in Cao (1997). From the obtained results, it was verified that the series in question are non-linear and also can not be considered chaotic, and these should be treated as stochastic and non-linear processes.

Keywords: Finance. Chaos. Non-linearity. Stochastic.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Dimensão de Imersão Mínima – Mapa de Henon.....	22
Gráfico 2 - Dimensão de Imersão Mínima – Equação de Lorenz.....	22
Gráfico 3 - Dimensão de Imersão Mínima – Série Randômica.....	23
Gráfico 4 - Dimensão de Imersão Mínima – Índia.....	24
Gráfico 5 - Dimensão de Imersão Mínima – Alemanha.....	24
Gráfico 6 - Dimensão de Imersão Mínima – Estados Unidos.....	25
Gráfico 7 - Dimensão de Imersão Mínima – Brasil.....	25
Gráfico 8 - Dimensão de Imersão Mínima – Austrália.....	26
Gráfico 9 - Dimensão de Imersão Mínima – França.....	26
Gráfico 10 - Dimensão de Imersão Mínima - México.....	27
Gráfico 11 - Dimensão de Imersão Mínima – Reino Unido.....	27
Gráfico 12 - Dimensão de Imersão Mínima – Canadá.....	28
Gráfico 13 - Dimensão de Imersão Mínima – Rússia.....	28

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Expoentes Máximos de Lyapunov.....	29
-----------------------------------------------	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	9
2	LITERATURA RELACIONADA.....	12
2.1	Hipótese dos Mercados Eficientes – HME e apreçamento de ativos.....	12
2.2	Teoria do caos.....	14
2.3	Não linearidade, previsibilidade e caos em séries financeiras.....	16
3	METODOLOGIA.....	20
4	RESULTADOS.....	22
5	CONCLUSÃO.....	30
	REFERÊNCIAS.....	31
	ANEXOS.....	34

1 INTRODUÇÃO

Um tópico muito estudado em economia é a modelagem de preços dos ativos financeiros. Matos (2006) relata que o primeiro modelo de apreçamento de ativos financeiros possivelmente data do século XVI com a estrutura de um processo estocástico segundo um passeio aleatório proposto por Cardano (1565) e depois por Markowitz (1952) com seu estudo sobre diversificação do risco e especificação das preferências de um investidor em função dos momentos da distribuição de probabilidade do retorno dos ativos financeiros.

Entender a dinâmica dos mercados financeiros é importante para justificar a adequação dos modelos utilizados. Um modelo linear muito utilizado para modelagem de apreçamento de ativos financeiros é o CAPM desenvolvido por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966), como exemplo de modelos não lineares temos ARCH proposto por Engle (1982) e o GARCH de Bollerslev (1986).

Entre as teorias que embasam o tratamento das dinâmicas do mercado financeiro com modelos lineares ou não lineares sendo estes estocásticos ou caóticos temos a Hipótese dos Mercados Eficientes – HME, a Teoria do Caos, a Ciência dos Fractais e a Teoria das Finanças Comportamentais. A modelagem e a previsão dos mercados financeiros possuem uma complexidade tão alta que o estudo do modelo que mais se adequa a sua dinâmica, pode reduzir o efeito de riscos e de crises, além de permitir que políticas públicas mais adequadas aos objetivos de cada país sejam empregadas.

Caso seja detectado que os ciclos econômicos de um país são não lineares, isto faz com que a evolução da economia seja muito sensível aos seus parâmetros de controle e caso haja evidências de períodos de caos, trajetórias futuras das variáveis relevantes podem ser imprevisíveis, sendo mais interessante políticas de caráter estrutural que medidas meramente conjunturais (LOPES, 2016).

Lopes (2016) relata que existem duas escolas de pensamento opostas que tentam explicar as flutuações econômicas nos países. Uma conhecida como *Real Business Cycles* (RBC) que consideram as flutuações de mercado como choques exógenos aleatórios ocorridas em modelos lineares e a segunda que considera que ciclos econômicos podem ser gerados na completa ausência de choques externos, sendo as flutuações provenientes de elementos endógenos fruto da não linearidade do sistema, mesmo que se considerem agentes racionais.

Considerando a teoria RBC, os desvios dos produtos acontecem como resposta dos agentes aos elementos externos que impactam no equilíbrio do modelo, podendo políticas públicas distanciar a economia de seu ponto ótimo, sendo assim indesejáveis. Já pela segunda teoria, dos ciclos econômicos endógenos, oscilações erráticas surgem pela incapacidade de previsão futura, possibilitando que políticas econômicas estabilizantes forneçam sinais adequados aos agentes e ajudam na estabilização da economia (LOPES, 2016).

O presente estudo se justifica por analisar índices do setor financeiro de 10 países do G20 e determinar se estas séries apresentam comportamento: 1) lineares ou não lineares e 2) caóticos ou estocásticos e com isto contribuir para que sejam utilizados modelos representativos mais adequados, possibilitando uma melhor interpretação dos dados das séries financeiras.

Esta dissertação tem como objetivo principal investigar a evidência de não linearidade e caos no mercado financeiro, tendo como objeto de análise a taxa de retorno nominal diário de 30 de março de 2009 a 31 de dezembro de 2013 fornecida pela Bloomberg, sendo os seguintes países e índices: Índia - CNX Finance, Alemanha - Dax All banks, Estados Unidos - Kbw Bank, Brasil - IFNC, Austrália - asx 200 financials, França - cac financials, México - BMV, Reino Unido - nmx8350, Canadá - TSX financials e Rússia - Moscow Exchange Financials. Todas apresentadas com mais detalhes em Fonseca (2015).

Quanto aos objetivos específicos do estudo temos a) utilizar a estatística BDS para verificar se as séries em questão são lineares ou não lineares e b) verificar a existência de caos ou aleatoriedade na base de dados através dos Expoentes Máximos de Lyapunov.

Neves (2003) relata que nos últimos vinte anos, pesquisadores sentem-se estimulados a aperfeiçoar ou desenvolver novos modelos de apreçamento de ativos que sejam mais bem sucedidos na explicação dos retornos dos ativos ou que, no mínimo, indiquem porque, na prática, o CAPM parece não ser o mais adequado. Esta pesquisa pode contribuir com a teoria do apreçamento de ativos, na medida que ajuda na escolha de modelos mais adequados com as características de aleatoriedade e não linearidade encontrada nas séries dos países investigados.

Este trabalho apresenta na seção 2 a literatura relacionada sobre apreçamento de ativos, caos, não linearidade e aleatoriedade nos mercados

financeiros, na seção 3 tem-se a descrição da metodologia, e os resultados apresentados na seção 4. Na quinta seção são feitas as considerações finais.

2 LITERATURA RELACIONADA

Nesta seção trataremos de aspectos relevantes dos estudos que tratam o mercado financeiro como estocástico ou caótico, além de uma breve descrição dos métodos para detectar se uma série temporal é linear ou não linear e caótica ou estocástica.

2.1 Hipótese dos Mercados Eficientes – HME e apreçamento de ativos

Segundo Gomes (2010), as duas correntes de pensamento para modelagem dos mercados financeiros são:

- Os que defendem que os mercados são eficientes com processos estocásticos;
- Os que defendem que os mercados são ineficientes com dependência não linear com o comportamento modelado por um sistema determinístico caótico previsível em curto, mas não em longo prazo.

Na Hipótese dos Mercados Eficientes as estimativas de preço são não tendenciosas e qualquer desvios da estimativa são apenas desvios aleatórios (*random walk*) que nesta teoria são perturbações causadas por informações que surpreendem os agentes. Quando o modelo do passeio aleatório é confirmado, isto impossibilita técnicas de análise gráfica e outros modelos econométricos de fazerem previsões dos preços dos ativos, já que estas previsões são baseadas na análise dos preços no passado (GOMES, 2010).

Gomes (2010) relata que a possibilidade de obtenção de lucros pela Teoria dos Mercados Eficientes dá-se quando ocorre um choque exógeno que posteriormente é incorporado pelos agentes, além disto as abordagens convencionais tratam a dinâmica do mercado acionário como um passeio aleatório.

Segundo Fama, HME tem como características que movimentos sucessivos nos preços de um ativo são variáveis randômicas estaticamente independentes e uniformemente distribuídas, ou seja, o preço de uma ação hoje não influenciará o seu preço amanhã ou que a mudança de preços não tem memória.

Se existe um sistema determinístico que o preço de uma ação hoje influencia o preço desta ação amanhã, mesmo que esta influência esteja mascarada por sinais estocásticos, é uma clara violação da Hipótese dos Mercados Eficientes

(ERBANO, 2004). Ainda conforme Erbano (2004), o HME apresenta uma distribuição normal nos retornos dos ativos, caracterizando eventos independentes, com a ocorrência de um não influenciando a ocorrência de outro, no entanto o autor mostra a aplicabilidade de outras técnicas que levam em consideração que as séries financeiras não atendem ao requisito da normalidade e que seus retornos não são independentes entre si.

Neves (2003) coloca o CAPM como um dos modelos mais utilizados nos mercados de capitais ou em finanças corporativas na definição do custo do capital, sendo muito controversos os resultados das pesquisas, indicando que as hipóteses para retornos anômalos ao modelo passam não só pelo relaxamento das premissas racionais como também pela possibilidade de comportamento irracional dos agentes, sendo este comportamento dos agentes objeto de estudo das finanças comportamentais.

Neves (2003) explica que Fama lançou o CAPM junto com a HME, que reflete mercados onde os agentes comportam-se de forma racional, todas as informações disponíveis estão refletidas nos preços dos ativos e não existe imperfeições de mercado. Se os mercados são eficientes, os preços são justos.

O CAPM preconizava que retorno esperado para qualquer ativo seria função linear de apenas três variáveis: o beta (coeficiente de sensibilidade do ativo em relação à carteira de mercado), a taxa de retorno do ativo livre de risco e o retorno esperado para a carteira de mercado. (NEVES, 2003).

CAPM sofreu várias críticas, como a de que a carteira de mercado definida pelo CAPM teórico seria composta por todos os ativos de risco da economia, e, portando, não poderia ser representada por um índice de mercado, ocasionando que o CAPM jamais poderia ser testado se a verdadeira carteira de mercado não fosse conhecida, além disto, o CAPM sofria a deficiência estatística conhecida como erro de estimativa em variáveis. Como alternativa surgiu o *Arbitrage Pricing Model* (APT) que sustenta a formação dos preços de equilíbrio dos ativos como resultado das influências sistemáticas de fatores de natureza econômica, ainda que não sejam diretamente observáveis, ainda estabelecendo uma relação linear entre os retornos esperados dos ativos sendo este também alvo de críticas como a de que para ações individuais, a aproximação APT é tão imprecisa que se torna impossível garantir se o modelo é falso ou verdadeiro (NEVES, 2003).

Neves (2003) também apresenta o modelo Haugen e Baker (1996), totalmente empírico, que utiliza 45 fatores divididos em 5 categorias (risco, liquidez, nível de preço, potencial de crescimento e preços históricos), mostrando resultados robustos na previsão dos retornos futuros dos ativos nas 5 maiores economias do mundo. Em alguns casos essas anomalias podem ser explicadas por um modelo que prevê uma parcela de comportamento não racional por parte dos investidores. Tão logo a anomalia é publicada, o efeito logo desaparece ou caminha na direção oposta. Este fenômeno é classificado como Lei de Murphy.

Se antes havia o pensamento de que a influência de agentes irracionais nos preços poderia ser identificada por padrões de previsibilidade, Summers (1986) mostrou que não há possibilidade de previsão nos retornos dos preços gerados por investidores irracionais, o que dificulta e onera o trabalho de detecção de janelas de oportunidades (NEVES, 2003).

De acordo com Neves (2003) anomalia no apreçamento de um ativo é a diferença estatisticamente significativa entre o retorno médio observado de um ativo e o retorno previsto através de um modelo de apreçamento para este mesmo ativo. Algumas anomalias como ajuste aparentemente lento dos preços das ações aos anúncios de lucro são inconsistentes com qualquer modelo de apreçamento de ativos racional, mas pesquisadores que acreditam nas finanças tradicionais continuam defendendo arduamente a hipótese dos mercados eficientes e acreditam que as anomalias de mercado podem surgir não devido a questões comportamentais, mas porque o risco sistemático está especificado de forma incorreta ou devido a *data snooping*.

2.2 Teoria do caos

A teoria do caos tem se mostrado uma aliada na compreensão da complexidade existente em vários ramos da ciência, Stewart (1991) cita como alguns exemplos, fluxo turbulento de fluidos, inversões do campo magnético da Terra, irregularidades do batimento cardíaco, os padrões de convecção do hélio líquido, o crescimento de populações de insetos, o pingar de uma torneira, o curso de uma reação química, o metabolismo de células, as mudanças atmosféricas, a propagação de impulsos nervosos, oscilações de circuitos eletrônicos, o movimento de um barco preso a uma boia, o ricochetear de uma bola de bilhar, as colisões de átomos num gás, a incerteza subjacente à mecânica quântica.

O avanço das pesquisas na área da Teoria do Caos permitiu que a modelagem de sistemas caóticos também fosse aplicada a economia para modelagem de séries temporais. No geral os resultados não são muito conclusivos. França (2015) apesar de não encontrar evidência de caos no seu estudo de séries financeiras apresenta os trabalhos de Clyde e Osler (1997) Rodriguez *et al.* (2005) e Kyrtsov *et al.* (2004) que encontram evidência de caos nas séries financeiras estudadas.

Como definir Caos?

Conforme afirma Stewart (1991) é muito difícil definir algo que não compreendemos completamente, mas o autor apresenta a definição de um dicionário: “Comportamento estocástico que ocorre num sistema determinístico” para explicar os conceitos de determinístico e estocástico e deixar mais claro o paradoxo dessa definição e do estudo do caos em sistemas determinísticos, já que o comportamento determinístico é governado por uma lei exata e estocástico é o oposto, governado pelo acaso.

Podemos perceber a preocupação do autor em destacar o paradoxo de definir um sistema com comportamento estocástico e determinístico ao mesmo tempo. Então como sistemas podem ter comportamento aleatórios e serem determinísticos? Stewart (1991) coloca o estudo dos gases como exemplo onde aleatoriedade e determinismo estão presente em um sistema, onde há o gás como um agregado determinístico de moléculas em movimento obedecendo a leis precisas da termodinâmica, mas o padrão de movimento das moléculas individuais de gás parecem aleatórios. Stewart (1991) cita que os cientistas de cem anos atrás tinham consciência de uma falsa aleatoriedade que ocorria em sistemas muito complexos, cujo comportamento detalhado permaneceria para sempre além da capacidade da mente humana.

Esta pesquisa irá adotar a seguinte definição quando há referência a caos: “a capacidade das equações, mesmo simples, de gerar movimento tão complexo, tão sensível à mensuração que parece aleatório. Isto é chamado, com muita propriedade, de caos” (STEWART, 1991).

Velásquez (2010), apresenta duas importantes características de sistemas caóticos: 1) a alta sensibilidade a condições iniciais e 2) envolve retroalimentação não linear que pode produzir resultados inesperados.

De acordo com Velásquez (2010), Teoria do Caos estuda sistemas que parecem seguir comportamento aleatório, mas que são partes de processos determinísticos. Aleatoriedade na natureza é sensível as condições iniciais e levam a sistemas de dinâmica imprevisível. No entanto sistemas caóticos possuem comportamento não-linear e são limitados por uma estrutura de alto determinismo, por este motivo há sempre uma ordem em sistemas aparentemente randômicos. Assim, Velásquez (2010) descreve que sistemas caóticos são determinísticos pois se as condições iniciais são todas conhecidas, poderia ser possível derivar a trajetória final, no entanto sistemas caóticos são altamente sensíveis a mudanças das condições iniciais e envolvem forças de retroalimentação não lineares que podem produzir resultados inesperados.

Para um sistema ser considerado caótico são necessárias duas condições: 1) o sistema ser não linear e 2) extremamente sensível a pequenas mudanças nos parâmetros de entrada com a ocorrência de retroalimentação. Para medir caos a partir de séries temporais é necessário antes determinar de esta série se adequa a modelos lineares ou não, caso a série apresente comportamento não linear é necessário averiguar se esta apresenta comportamento estocástico ou caótico. O teste BDS, apresentado em Brock (1987) é utilizado neste trabalho para determinar a adequação da série a modelos lineares e para detectar comportamento caótico no sistema é calculada a dimensão de imersão das séries e após isto o expoente máximo de Lyapunov, conforme descrito em Kantz (2004) capítulo 5, sendo o sistema caótico quando o expoente máximo de Lyapunov é maior que 0 (zero).

2.3 Não linearidade, previsibilidade e caos em séries financeiras

Gomes (2010), confronta as teorias da Hipótese dos Mercados Eficientes (HME) – representados pelos modelos CAPM e GARCH – com a teoria da existência de Caos Determinístico no comportamento do preço de ativos no mercado financeiro. Sendo a HME com processos estocásticos e a teoria do caos que os mercados são não eficientes, não lineares e previsíveis a curto prazo, caracterizados por um sistema determinístico caótico.

Para confrontar a hipótese dos mercados eficientes, Gomes (2010) apresenta o estudo de Day e Huang (1990)* que considera que apesar de determinístico o comportamento do mercado gera flutuações “estocásticas” e

mudanças aleatórias entre *bull* (aumento do preço das ações) e *bear* (queda no preço das ações), chegando à conclusão que a negação da HME parece ser mais forte em países emergentes e que há vários estudos demonstrando padrões caóticos e outros demonstram processos estocásticos no mercado financeiro, não sendo possível afirmar quais das duas categorias apresentadas estão corretas.

Velásquez (2010) se propõe a tratar o estudo dos mercados financeiros sob a perspectiva da Teoria do Caos e da Ciência dos Fractais para melhor entender seu comportamento e para isso é necessário utilizar estatística dos fractais no lugar da estatística gaussiana, concluindo em seu trabalho que a teoria do caos pode modelar melhor o mercado financeiro (não sendo necessário justificar equilíbrio, racionalidade e linearidade) do que a teoria neoclássica, principalmente no que diz respeito ao gerenciamento de risco.

Dentro do estudo da ciência dos fractais, Mandelbrot (1997) propôs o modelo *Fractional Brownian Motion* (FBM), com a investigação de Mandelbrot sobre os mercados de capitais foi possível saber que os preços neste mercado podem mudar de uma maneira diferente da proposta no modelo *random walk*, além disto para substituir a suposição de distribuição normal ou gaussiana em análise de finanças, Mandelbrot em trabalhos anteriores propôs a hipótese do Pareto Estável que conseguiu produzir valores de medidas de risco mais acuradas que suposições de distribuições normais (VELÁSQUEZ, 2010).

França (2015), através da análise das séries históricas das taxas de câmbio (Euro-Dolar, Libra-Dolar, Dolar-Yuan e Dolar-Real) obtidas da base de dados do Federal Reserve e com o uso do software MatLab, calculou os retornos diários das séries, com estes dados utilizou-se a Informação da Média Mútua e dos Falsos Vizinhos Globais para estimar a defasagem (t) e a dimensão (d), com estes valores os expoentes máximos de Lyapunov foram calculados pelos algoritmos do software MatLab. Em nenhuma série foi encontrado valores positivos dos expoentes máximos de Lyapunov, não sendo possível inferir a presença de caos.

Lopes (2016) investiga se existe a presença de não-linearidade ou caos nos ciclos econômicos no Brasil entre 1947 e 2012. Para o teste de não linearidade versus linearidade, Lopes (2016) verifica a independência dos resíduos de modelos autorregressivos adequados e para testar as hipóteses de não linearidade e caos nas séries, Lopes (2016) utilizou estatística BDS para analisar a hipótese de erros iid advindos de modelos lineares e não lineares do tipo markoviano com dois regimes,

concluindo que há fortes evidências para a rejeição das especificações lineares e não encontra evidências que suportem à possibilidade de caos no principal agregado macroeconômico brasileiro.

Chu (2003) utiliza o teste BDS para avaliar se as séries compostas dos log-retornos do mercado de câmbio Shanghai e Shenzhen são gerados por sistemas de dinâmica não linear, encontrando comportamento caótico nas séries. Para o autor, a existência de comportamento caótico pode ser detectado pelas seguintes indicações: 1) com o comportamento caótico, haverá existência de estranhos atratores caracterizado pela forma fractal, 2) o processo caótico não é aleatório, mas independente e identicamente distribuído (i.i.d.), 3) o processo caótico é um processo não-linear, 4) o processo caótico é um processo determinista que manterá sua dimensão quando é colocado em uma maior dimensão de imersão e 5) o processo caótico é sensível às condições iniciais.

Bosque (2014) investiga se o modelo TAR, utilizado para aproximar funções não lineares gerais para uma função linear por partes, se adequa aos dados financeiros referentes às cotações diárias do dólar comercial em relação ao real entre 02/01/1995 e 01/07/2014. Para deixar a série com caráter estacionário, Bosque (2014) utiliza os log-retornos da série original e aplica o teste Keenan, chegando à conclusão que os log-retornos da série original seguem um processo não linear, os dados mostraram que os log-retornos da série analisada não se ajustam ao modelo TAR, não sendo possível tratar a série em questão que se mostrou não linear, como uma função linear por partes.

Carvalho (2011), busca a resposta de algumas perguntas em relação as séries financeiras (DJIA, SP500, IBOV, PETO, PETH, PTEL, PETC), entre elas se o preço e o retorno das séries são completamente imprevisíveis como em um passeio aleatório ou se existe alguma estrutura determinística que possa ser identificada, além disto se é possível classificar as séries lineares ou não lineares. De acordo com o resultado obtido no teste BDS, Carvalho (2011) rejeita a hipótese de independência das séries, pois o teste mostra que há algum determinismo nos dados em todas as séries estudadas e que a dinâmica dos dados não foi capturada pelo modelo linear AR, mas que há pequena dependência linear nos dados.

Bueno (2002) pesquisa se há indícios de caos determinístico na evolução do IBOVESPA entre os anos de 1978 e 2000, obtendo evidências de caos determinístico no mercado de ações brasileiro na década de 1990. Erban (2004)

busca a existência de componente determinístico no comportamento dos preços das ações da Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) e em outros índices amplos como Ibovespa e IBX, com isto podendo verificar se a HME é válida para o mercado de ações brasileiro, chegando à conclusão que para as séries estudadas satisfaz a hipótese dos mercados eficientes na sua versão "fraca", ou seja, não é possível com base na observação dos dados passados prever o comportamento no futuro.

3 METODOLOGIA

Para investigar a evidência de não linearidade e caos no mercado financeiro nas taxas de retorno nominal diário de 30 de março de 2009 a 31 de dezembro de 2013 das séries dos países: Índia, Alemanha, Estados Unidos, Brasil, Austrália, França, México, Reino Unido, Canadá e Rússia fornecida pela *Bloomberg* é utilizado o software *RStudio* para 1) através do algoritmo proposto por Cao (1997) calcular a dimensão mínima da série, 2) realizar o teste BDS de Brock, Dechert e Scheinkman (BROCK, 1987) para detectar se as séries são não-lineares e 3) calcular os expoentes máximos de Lyapunov para detectar a presença de caos nas séries através do algoritmo proposto por Rosenstein (1993).

O teste BDS foi desenvolvido por Brock, Dechert e Scheinkman (1987). De acordo com Chu (2003), o teste BDS é uma poderosa ferramenta para detectar dependência serial em séries de tempo, sendo a hipótese nula de que os dados são independentes e identicamente distribuídos. Caso a hipótese nula seja negada, isto implica que os dados não são iid e deve existir alguma dependência serial, se a dependência linear foi removida (uso do método tradicional ARIMA ou através da primeira diferença do logaritmo natural), então a dependência serial é não linear. Lopes (2016) também relata que para o teste de não linearidade versus linearidade, verifica-se a independência dos resíduos dos modelos autoregressivos adequados.

Temos uma breve descrição do teste BDS dado por Costa (2001): seja $\{Y_t, t = 1, 2, 3, \dots, T\}$ uma série temporal e $Y^m_t = Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-m+1}$ um ponto no espaço euclidiano a m dimensões. A integral de correlação que mede o quociente entre os pares de pontos $(\{(Y^m)_t, (Y^m)_s\})$ cuja distância, é formada entre os pontos é menor que δ , e o número total T^2 de pares $(\{(Y^m)_t, (Y^m)_s\})$ é definida como:

$$C_m(\delta) = \underset{T \rightarrow \infty}{plim} [\#\{(t, s), 0 < t < T, 0 < s < T: \max_{i=0, \dots, m-1} |y_{t-i} - y_{s-i}| < \delta\} / T^2]$$

O conceito de distância utilizado é o de máxima norma e não a distância euclidiana. Se $\{Y_t\}$ é iid então $C_m(\delta) = [C_1(\delta)]^m$. Sob hipótese nula desta validade (iid) o teste BDS tem uma distribuição assintótica normal.

Kantz (2004) restringe a explicação ao mais importante expoente de Lyapunov, o máximo de Lyapunov. Seja s_{n1} e s_{n2} no espaço de fase com distância $\|s_{n1} - s_{n2}\| = X_0 \ll 1$. Denotando $X_{\Delta n}$ a distância em algum tempo Δn a frente entre

estas duas trajetórias emergindo desses pontos $X_{\Delta n} = ||s_{n1} - s_{n2+\Delta n}||$. Então γ é determinado por:

$$X_{\Delta n} \cong X_0 e^{\gamma \Delta n}, X_{\Delta n} \ll 1, \Delta n m \gg 1$$

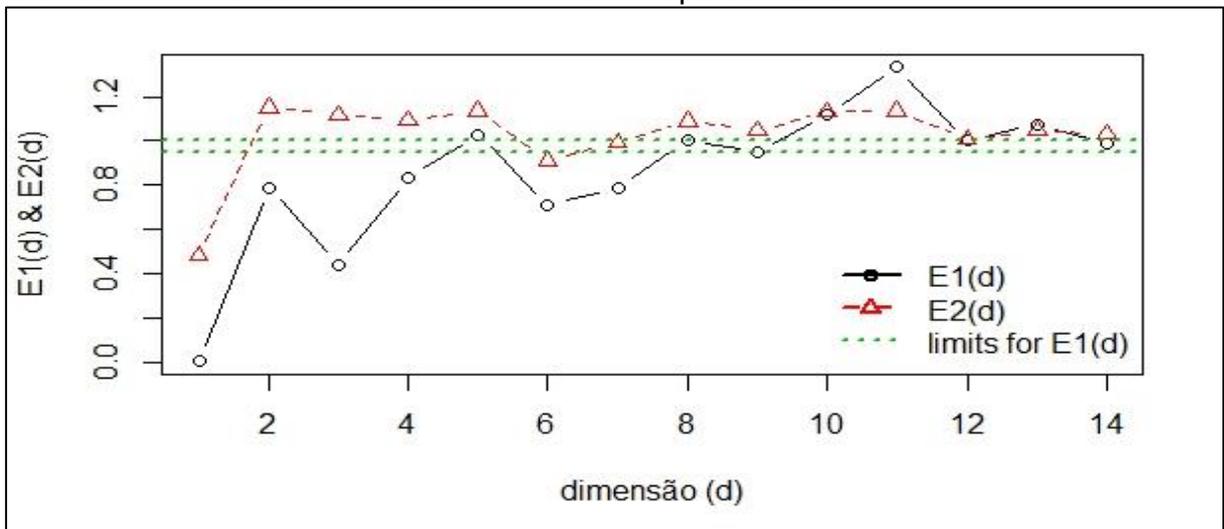
Se γ é positivo, isto significa uma divergência exponencial de trajetórias muito próximas e caos. Para interpretar os gráficos devemos entender que a estimação da dimensão de imersão mínima, como proposto em Cao (1997) é calculada em termos das funções $E1(d)$ e $E2(d)$ que são duas funções onde d é a dimensão utilizada. $E1(d)$ para de mudar quando d é maior ou igual a dimensão de imersão, ficando próximo de 1. Para sinais determinísticos $E2(d)$ é diferente de 1 e para sinais estocásticos $E2(d)$ é aproximadamente 1 para todos os valores.

4 RESULTADOS

Conforme demonstrado no Anexo C, a hipótese de série linear foi descartada para todas as séries analisadas, contudo, conforme Chu (2003), pode indicar se uma série é linear ou não, mas não pode determinar se esta é uma série caótica não linear determinística ou não linear estocástica.

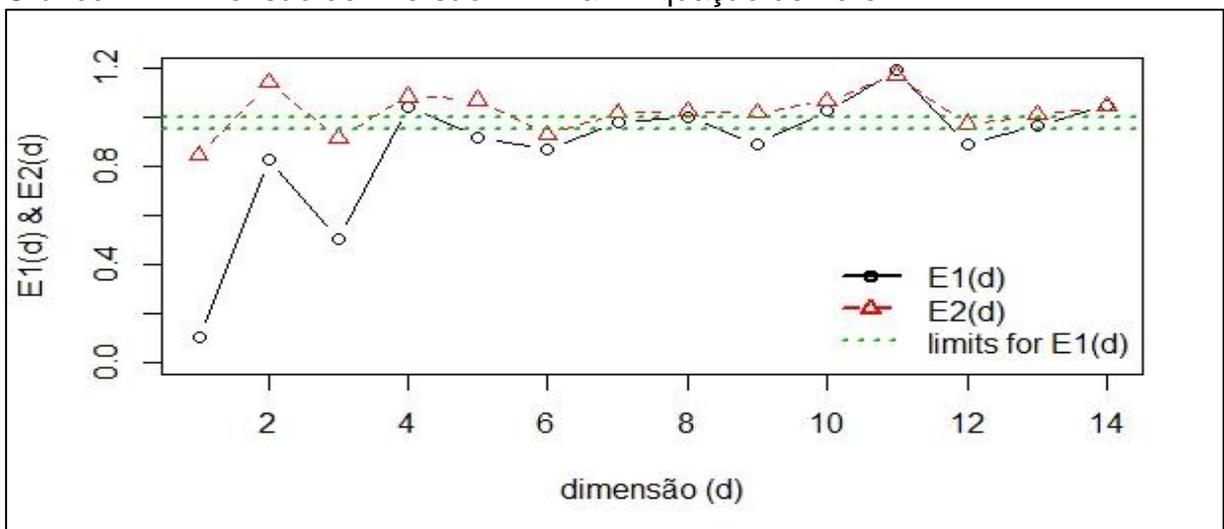
Diante do resultado que todas as séries são não lineares, é necessário determinar se estas são caóticas ou estocásticas. As dimensões encontradas utilizando a metodologia descrita e os gráficos gerados mostram que todas as séries se comportam estocasticamente, conforme podemos perceber a seguir:

Gráfico 1 – Dimensão de Imersão Mínima – Mapa de Henon



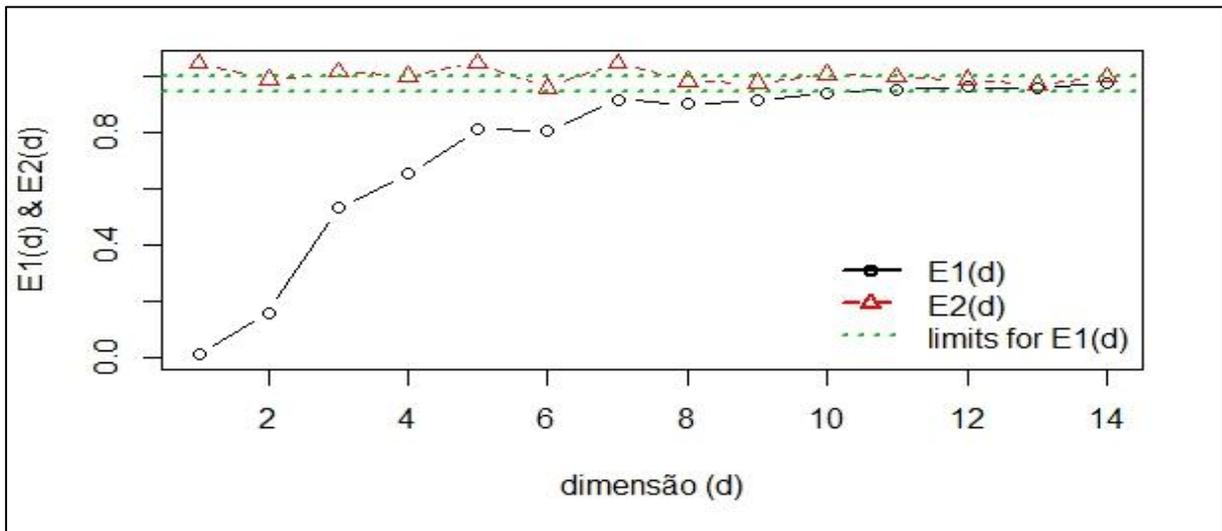
Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 2 – Dimensão de Imersão Mínima – Equação de Lorenz



Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 3 – Dimensão de Imersão Mínima – Série Randômica



Fonte: Elaboração do autor

Com o uso do software R, foram geradas 3 séries, sendo 2 caóticas representadas pelo mapa de henon (Anexo A) e o atrator de lorenz (Anexo B) e 1 série aleatória com uma sequência de 1000 números reais de 6 casas decimais entre 1 e 5. Para mais detalhes sobre mapa de henon ou atrator de lorenz consultar Thielo (2000).

Os gráficos 1 e 2 foram gerados a partir das séries geradoras do mapa de henon e do atrator de lorenz respectivamente e o gráfico 3 a partir da série aleatória apresentada. O intuito é servir de comparação e entendimento com os gráficos gerados pelas séries objeto de estudo deste trabalho.

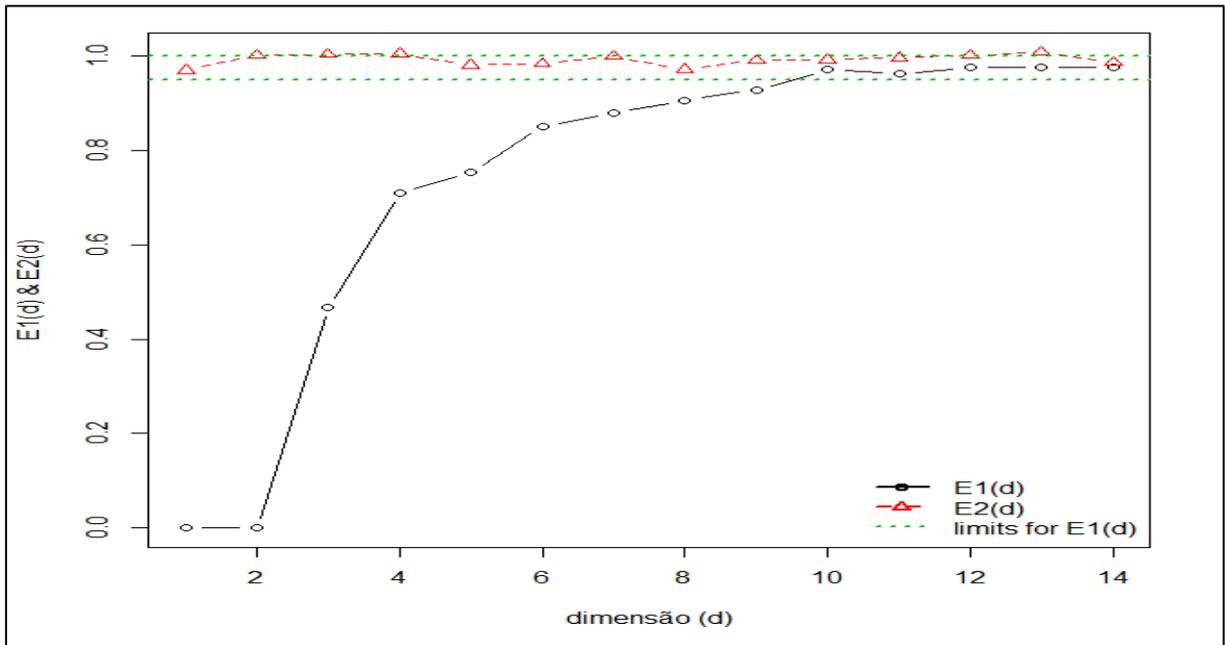
Como já sabemos pela estatística BDS (Anexo C) que todas as séries são não lineares nos resta saber se estas são melhor representadas por modelos caóticos determinísticos ou estocásticos.

Com o uso do software R, podemos calcular a dimensão de imersão mínima das séries pelo método proposto por Cao (1997) e além de ter o retorno da função com a dimensão de imersão calculada é possível apresentar na tela os gráficos da evolução dos valores de $E1(d)$ e $E2(d)$ ao longo das dimensões testadas para se encontrar a dimensão de imersão mínima. Para determinar comportamento caótico, utilizaremos o cálculo do expoente máximo de Lyapunov, mas a partir dos gráficos gerados pela função que calcula a imersão mínima já podemos chegar a conclusões muito importantes no estudo de séries temporais.

Como podemos perceber nos gráficos 1 e 2 das séries caóticas, $E2(d)$ está bem distante dos limites de 1, representado pelas linhas verdes, representando sinais

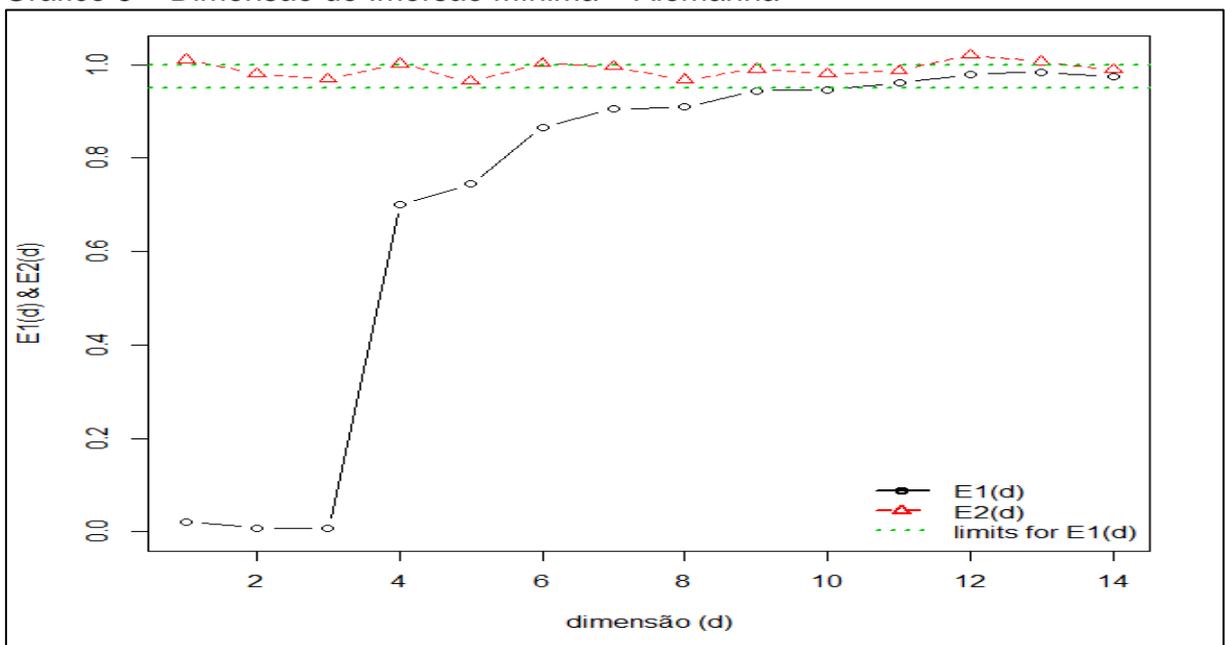
determinísticos e na série sabidamente estocástica os valores de $E2(d)$ ficam bem próximos dos limites de 1, com pequenas flutuações além disto nas séries estocásticas $E1(d)$ se aproxima de 1 quando d se aproxima da dimensão de imersão mínima da série conforme podemos verificar no gráfico 3.

Gráfico 4 – Dimensão de Imersão Mínima – Índia



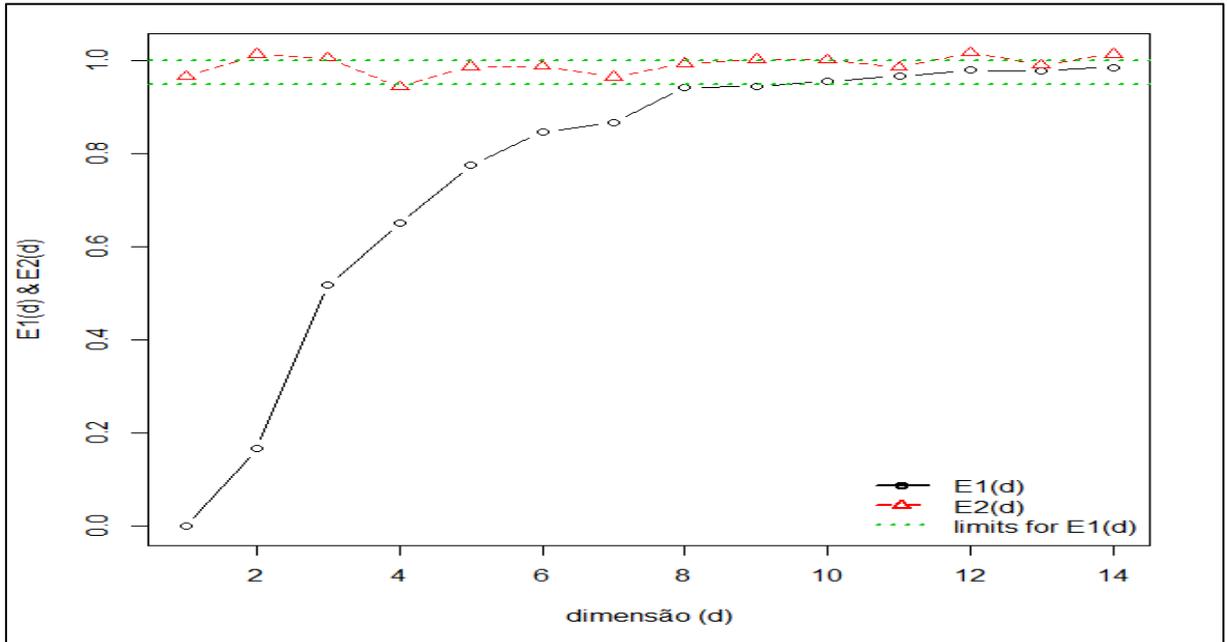
Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 5 – Dimensão de Imersão Mínima – Alemanha



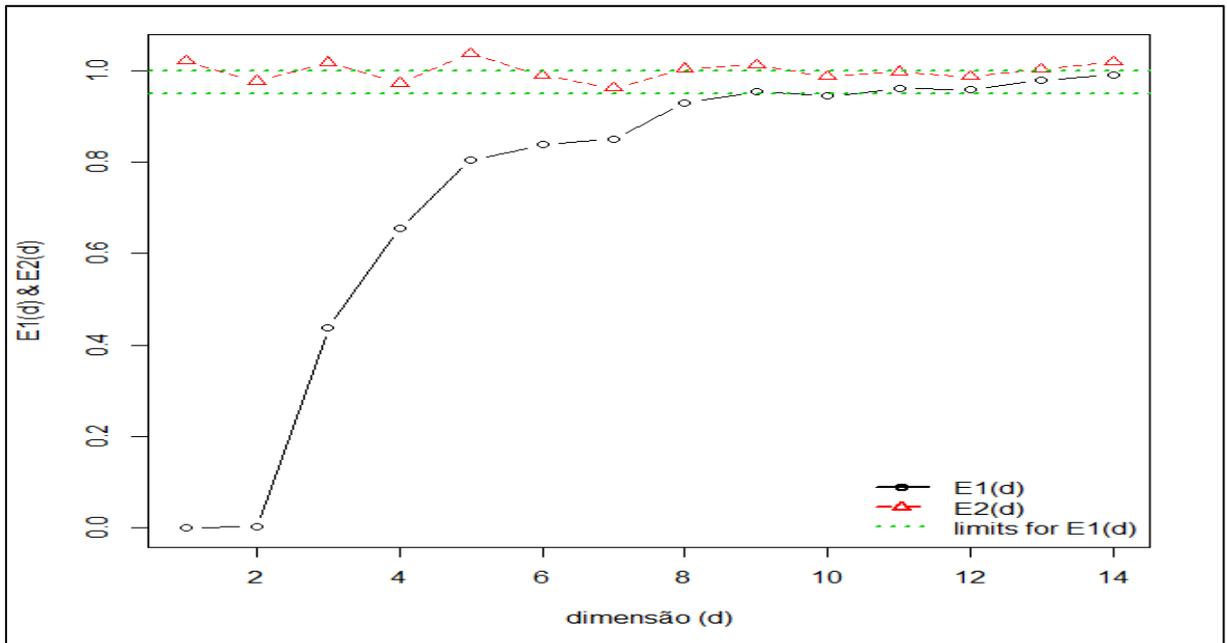
Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 6 – Dimensão de Imersão Mínima – Estados Unidos



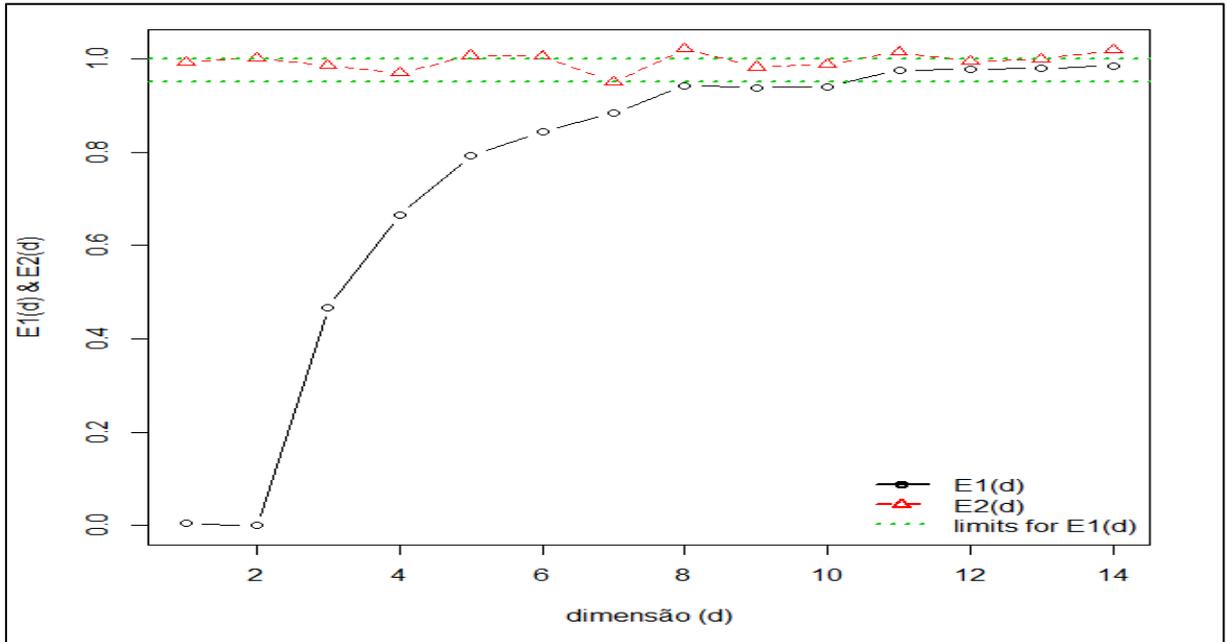
Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 7 – Dimensão de Imersão Mínima – Brasil



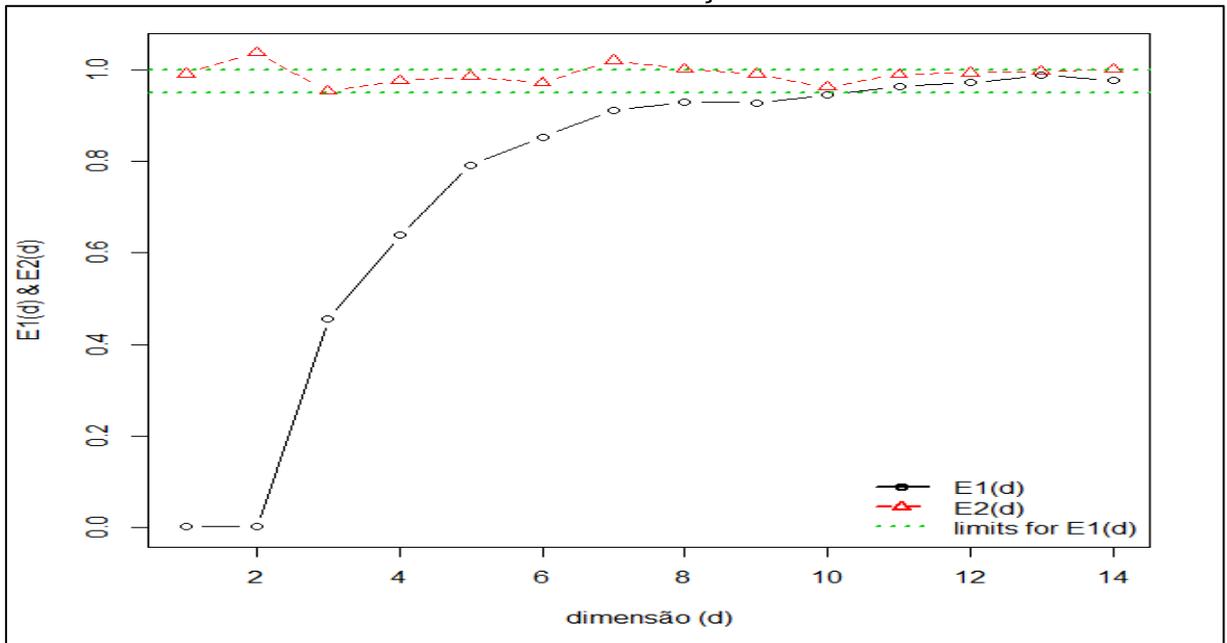
Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 8 – Dimensão de Imersão Mínima – Austrália



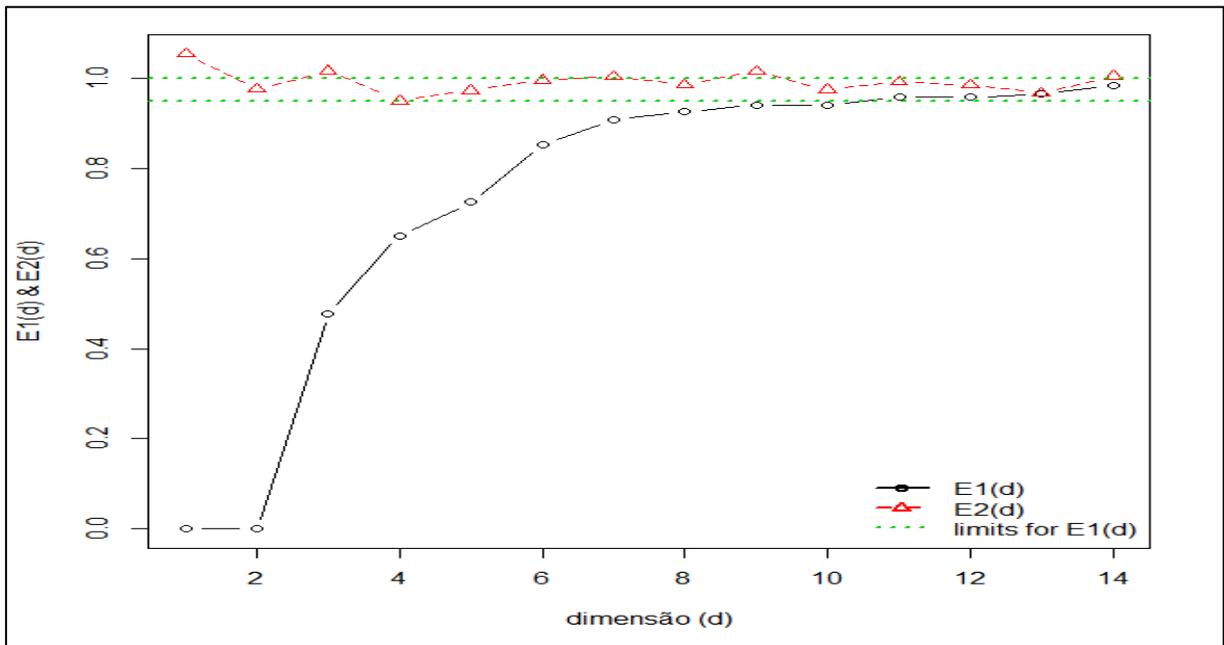
Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 9 – Dimensão de Imersão Mínima – França



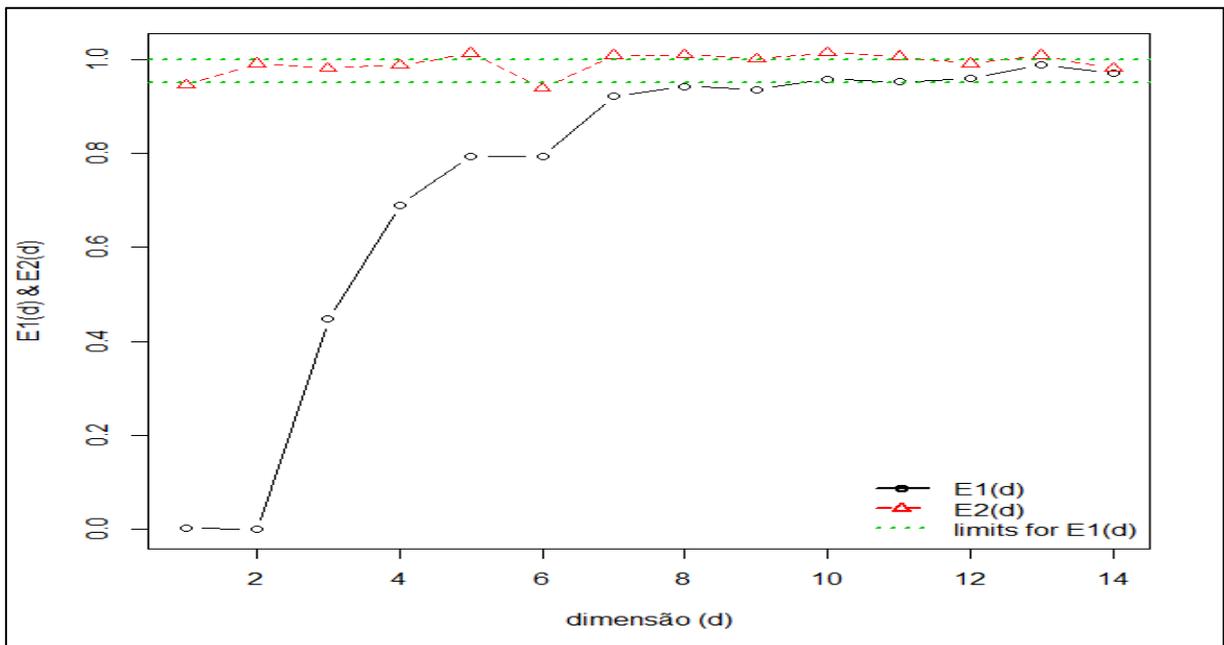
Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 10 – Dimensão de Imersão Mínima – México



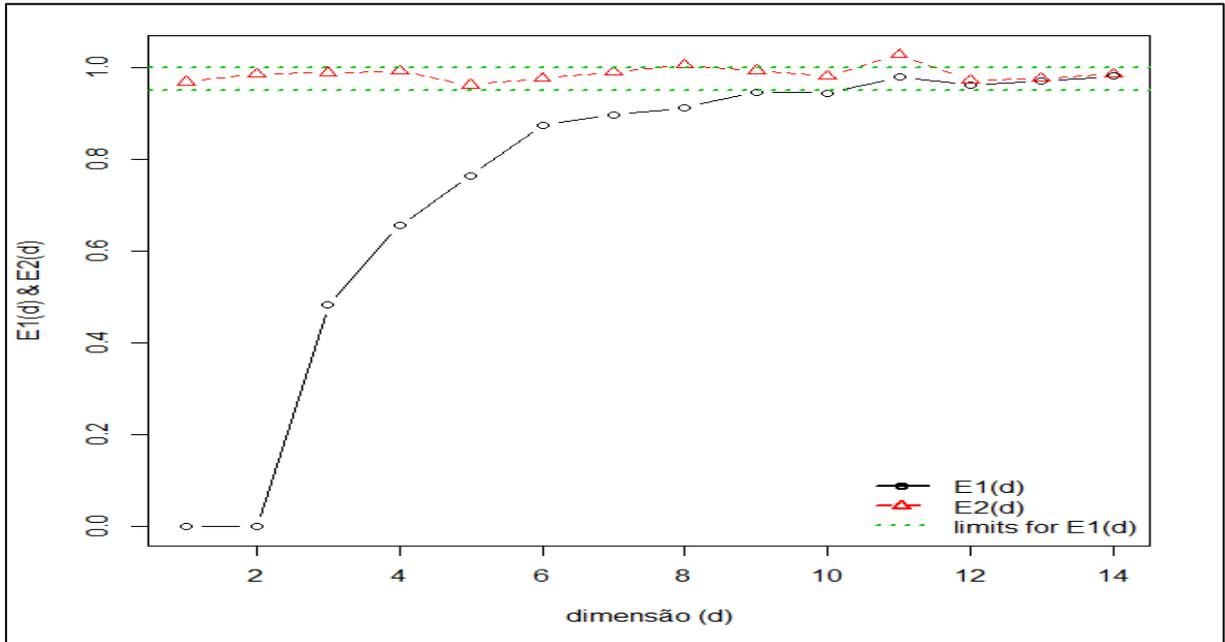
Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 11 – Dimensão de Imersão Mínima – Reino Unido



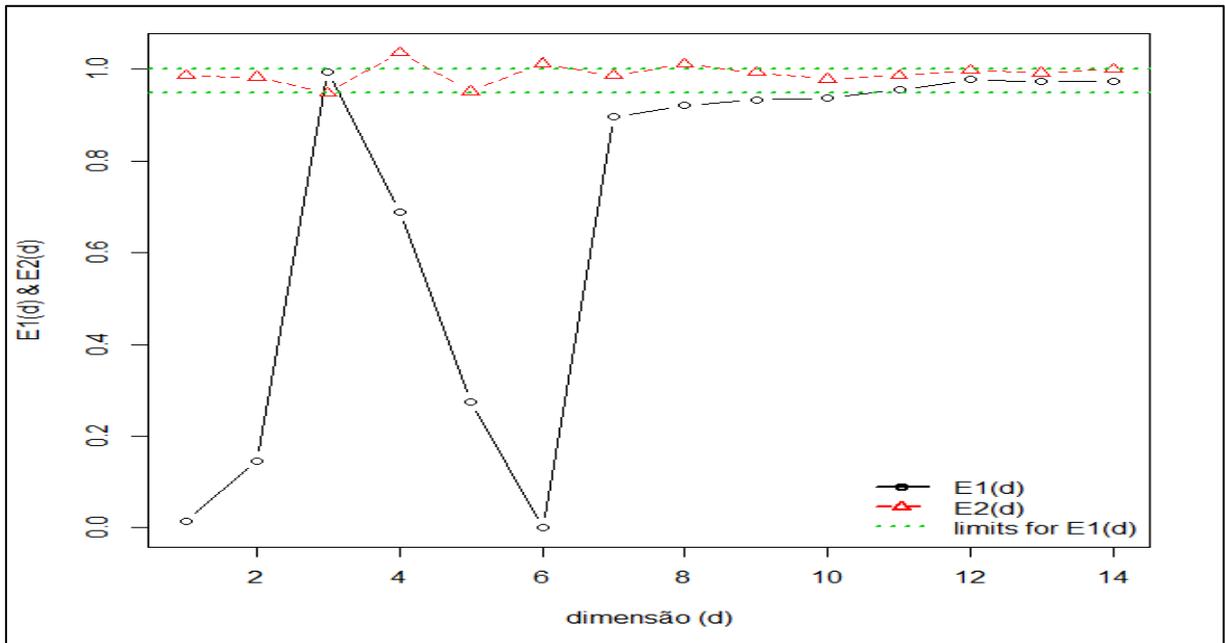
Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 12 – Dimensão de Imersão Mínima – Canadá



Fonte: Elaboração do autor

Gráfico 13 – Dimensão de Imersão Mínima – Rússia



Fonte: Elaboração do autor

Como podemos perceber todos os gráficos apresentam comportamento de série estocástica, permanecendo $E2(d)$ próximo de 1 (dos limites das linhas verde) relativamente uniforme em todas as dimensões em todas as séries e $E1(d)$ se estabilizando próximo de 1 quando valor de d é o valor do cálculo da imersão mínima encontrada com o uso do Software R, sendo $d = 10$ (Índia), $d = 11$ (Alemanha), $d = 10$

(EUA), $d = 9$ (Brasil), $d = 11$ (Austrália), $d = 11$ (França), $d = 11$ (México), $d = 10$ (Reino Unido), $d = 11$ (Rússia).

Tabela 1 – Expoentes Máximos de Lyapunov

País	Dimensão	Expoente de Lyapunov
Índia	10	0
Alemanha	11	0
Estados unidos	10	0
Brasil	09	0
Austrália	11	0
França	11	0
México	11	0
Reino Unido	10	0
Canadá	11	0
Rússia	11	0

Fonte: Elaboração do autor

Os máximos expoentes de Lyapunov encontrados pelo software R que utiliza o algoritmo proposto por Rosenstein (1993) foram zero para todas as séries, indicando que não há comportamento caótico, que seria observado caso a série apresentasse valor maior que zero. Após a realização do teste BDS que retornou $p\text{-valor} = 0$ para todas as séries a partir da dimensão de imersão mínima (Anexo A), após a análise dos gráficos apresentados na seção 4 e do cálculo dos expoentes de Lyapunov, não foi verificado comportamento caótico nas séries apresentadas e que estas são não-lineares e estocásticas.

5 CONCLUSÃO

Como dito anteriormente o objetivo principal deste trabalho é investigar a evidência de não linearidade e caos no mercado financeiro, tendo como objeto de análise a taxa de retorno nominal diário de 30 de março de 2009 a 31 de dezembro de 2013 da Bloomberg dos seguintes países e índices: Índia - CNX Finance, Alemanha - Dax All banks, Estados Unidos - kbw bank, Brasil - IFNC, Austrália - asx 200 financials, França - cac financials, México - BMV, Reino Unido - nmx8350, Canadá - TSX financials e Rússia - Moscow Exchange Financials, para isto foi: 1) utilizado o teste BDS e verificado que para todas as séries são não lineares; 2) calculado a dimensão de imersão mínima de cada série e por fim calculado o expoente máximo de Lyapunov.

Conforme apresentado, o expoente máximo de Lyapunov resultou em 0 (zero) para todas as séries, concluindo-se que estas séries analisadas possuem comportamento não linear e aleatório, não sendo possível detectar caos no período analisado. Com isto, espera-se que estes resultados sirvam de material teórico para futuras pesquisas sobre apreçamento de ativos que envolvam o mercado financeiros dos países tratados na base de dados deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ALDRIGHI, Dante Mendes; MILANEZ, Daniel Yabe. Finança comportamental e a hipótese dos mercados eficientes. **Revista de Economia Contemporânea**, v. 9, n. 1, p. 41-72, 2005.
- BOLLERSLEV, Tim. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of econometrics**, v. 31, n. 3, p. 307-327, 1986.
- BOSQUE, Leonardo Melo. **Análise de séries temporais não-lineares com modelos auto-regressivos Threshold**. 2014. 57f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Estatística) – Departamento de Estatística, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- BROCK, W. A., DECHERT, W.; SCHEINKMAN, J. A **Test for Independence Based on the Correlation Dimension**. Working paper, University of Wisconsin at Madison, University of Houston, and University of Chicago, 1987.
- BUENO, Newton. Some Evidence of the Presence of Non-Linearities Compatible with Deterministic Chaos in the BOVESPA Index in the 90s (in Portuguese). **Economia Aplicada**, v. 6, n. 3, p. 555-575, jan. 2002.
- CAO, L. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 110, n. 1, p. 43-50, 1997.
- CARDANO, G. **Liber de Ludo Alae**. 1565.
- CARVALHO, L. T. **Previsibilidade de Séries Financeiras**. 2011. 196f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.
- CHU, Patrick K. K. Study on the non-random and chaotic behavior of Chinese equities market. **Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies**, v. 6, n. 02, p. 199-222, 2003.
- CLYDE, W. C.; OSLER, C. L. Charting: Chaos Theory in Disguise? **The Journal of Futures Markets**, v. 17, n. 5, p. 489–514, 1997.
- COSTA, Paulo Henrique Soto; BAIDYA, Tara Keshar Nanda. Propriedades estatísticas das séries de retornos das principais ações brasileiras. **Pesquisa Operacional**, v. 21, n. 1, p. 61-87, 2001.
- DAY, R. H.; HUANG, W. Bulls, Bears and Market Sheep. **Journal of Economic Behavior and Organization**, North-Holland, v. 14, n. 3, p. 299-329, Dec. 1990.
- DE OLIVEIRA, Mauri Aparecido *et al.* Estabilidade de preços de ações no mercado de capitais brasileiro: um estudo aplicando redes neurais e expoentes de Lyapunov. **Revista de Administração**, v. 46, n. 2, p. 161-177, 2011.

ENGLE, Robert F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 987-1007, 1982.

ERBANO, Gabriel Hidequi. **Análise de séries de tempo financeiras: uma aplicação da teoria do caos em finanças empíricas**. 2004. 73f. Dissertação (Mestrado em Administração de Empresas) – Escola de Administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2004.

FONSECA, Ronald Bernardes. **Modelling main worldwide financial indices risk management: so far, but so close!** 2015. 43f. Dissertação (Mestrado Profissional em Economia) – Programa de Economia Profissional, Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

FRANÇA, Tales Renato Cugler. **Instabilidades e Não-Linearidades no Mercado Financeiro: Um estudo da Teoria do Caos aplicada ao Mercado de Câmbio**. 2015. 45f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Economia) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.

GOMES, Emílio Flávio Guerra; MARQUES JUNIOR, Karlo. Mercados financeiros: sistema caótico ou aleatório?. **Revista de Economia Mackenzie**, v. 8, n. 1, 2010.

KANTZ, Holger; SCHREIBER, Thomas. **Nonlinear time series analysis**. Cambridge university press, 2004.

KYRTSOU, Catherine; LABYS, Walter C.; TERRAZA, Michel. Noisy chaotic dynamics in commodity markets. **Empirical Economics**, v. 29, n. 3, p. 489-502, 2004.

LINTNER, John. Security prices, risk, and maximal gains from diversification. **The Journal of Finance**, v. 20, n. 4, p. 587-615, 1965.

LOPES, Luckas Sabioni; TOYOSHIMA, Silvia Harumi. Não Linearidades na Dinâmica do Produto Interno Bruto Brasileiro entre 1947 e 2012. **Análise Econômica**, v. 34, p. 57-82, 2016.

MANDELBROT, Benoit. **Fractals and scaling in Finance: Discontinuity, concentration, Risk**. New York: Springer, 1997.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. **The journal of finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MATOS, Paulo; SAMPAIO, Glaylson; DE CASTRO, Lucas. How Important is Forward-Looking Behavior in Brazilian Sectorial Indices Risk Premium?. **International Journal of Applied Economics**, v. 14, n. 1, p. 19-36, 2017.

MOSSIN, J. Equilibrium in a Capital Asset Market. **Econometrica**, v. 34, n. 4, p. 768–783, 1966.

NEVES, Myrian B. **Três ensaios em modelos de apreçamento de ativos**. 2003. 143f. Tese (Doutorado em Administração) – Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

RODRIGUEZ, F. F.; RIVERO, S. S.; FÉLIX, J. A. Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents. **Journal of Applied Econometrics**, v. 20, n. 7, p. 911–930, dez. 2005.

ROSENSTEIN, Michael T.; COLLINS, James J.; DE LUCA, Carlo J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 65, n. 1-2, p. 117-134, 1993.

SHARPE, William F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The Journal of Finance**, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

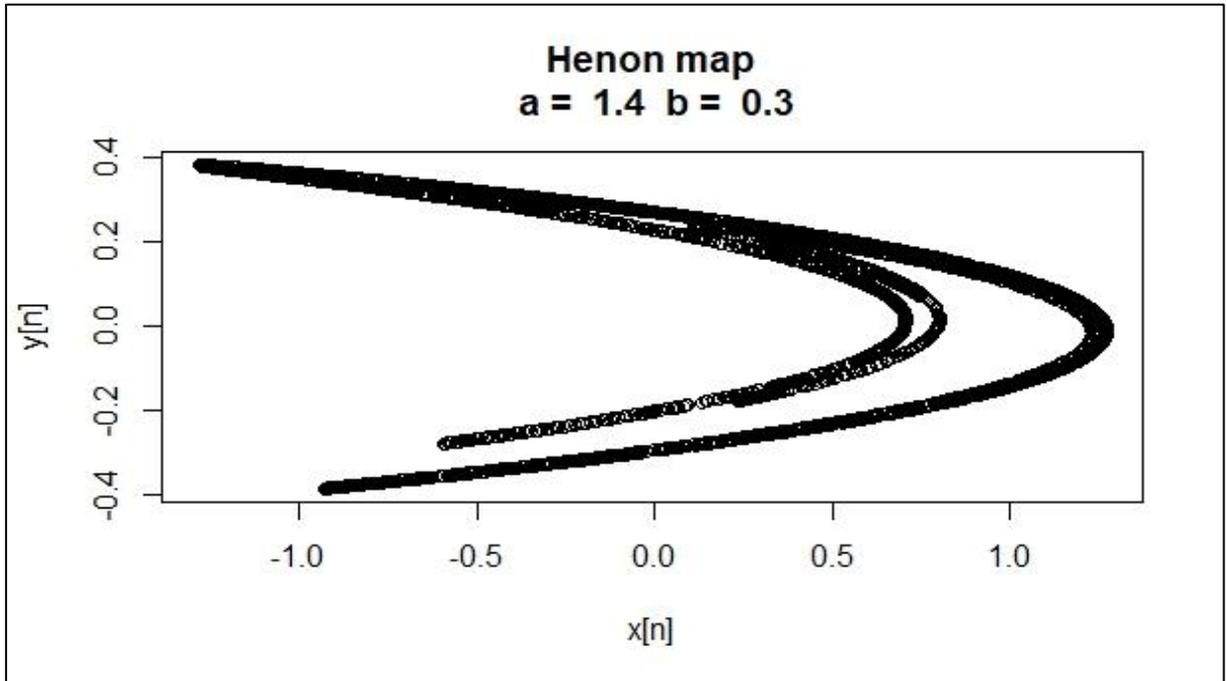
STEWART, Ian. **Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos**. Rio de Janeiro: Zahar, 1991.

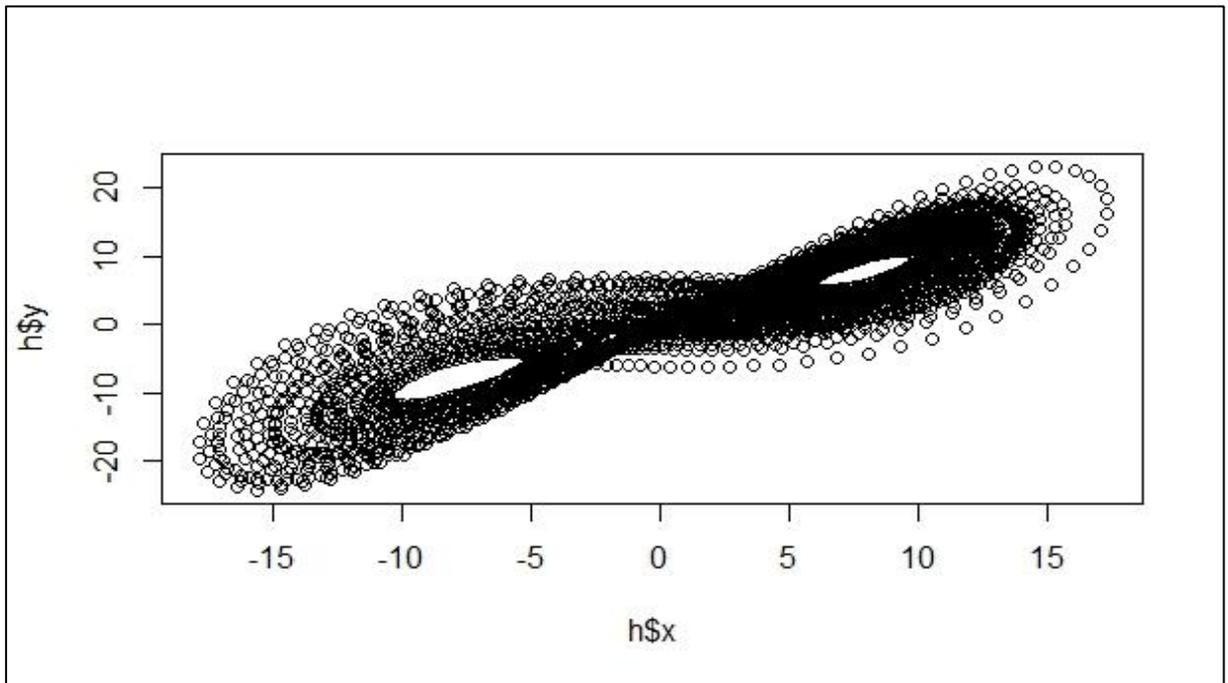
THIELO, Marcelo Resende. **Análise e classificação de séries temporais não estacionárias utilizando métodos não-lineares**. 2000. 103f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.

VELASQUEZ, Tania. Chaos Theory and the Science of Fractals in Finance. **Odeon**, n. 5, 2010.

ANEXOS

ANEXO A – MAPA HENON



ANEXO B – ATRATOR DE LORENZ

ANEXO C - RESULTADOS ESTATÍSTICA BDS

ÍNDIA				
Dimensão de Imersão (max=9)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.005973	0.002420	2.468.094	0.0136
3	0.015922	0.003837	4.149.837	0.0000
4	0.024770	0.004558	5.434.340	0.0000
5	0.029731	0.004740	6.272.739	0.0000
6	0.031829	0.004560	6.979.545	0.0000
7	0.032676	0.004169	7.837.586	0.0000
8	0.032551	0.003676	8.854.698	0.0000
9	0.030951	0.003155	9.809.851	0.0000
10	0.029002	0.002652	1.093.589	0.0000

ALEMANHA				
Dimensão de Imersão (max=9)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.010720	0.002396	4.473.604	0.0000
3	0.026530	0.003809	6.964.252	0.0000
4	0.037756	0.004538	8.320.603	0.0000
5	0.044556	0.004731	9.417.960	0.0000
6	0.047836	0.004564	1.048.180	0.0000
7	0.048453	0.004183	1.158.264	0.0000
8	0.046622	0.003698	1.260.671	0.0000
9	0.043303	0.003182	1.360.714	0.0000
10	0.039307	0.002682	1.465.626	0.0000
11	0.035218	0.002223	1.584.382	0.0000

ESTADOS UNIDOS				
Dimensão de Imersão (max=8)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.025187	0.002783	9.050.855	0.0000
3	0.058465	0.004419	1.323.080	0.0000
4	0.081847	0.005259	1.556.419	0.0000
5	0.094946	0.005478	1.733.163	0.0000
6	0.099171	0.005281	1.877.990	0.0000
7	0.099174	0.004837	2.050.247	0.0000
8	0.096033	0.004274	2.247.065	0.0000
9	0.091378	0.003676	2.486.081	0.0000
10	0.085160	0.003096	2.750.634	0.0000

BRASIL				
Dimensão de Imersão (max=8)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.005007	0.002335	2.144.211	0.0320
3	0.010335	0.003707	2.787.852	0.0053
4	0.015775	0.004410	3.577.178	0.0003
5	0.018744	0.004592	4.082.268	0.0000
6	0.018609	0.004423	4.207.146	0.0000
7	0.017686	0.004049	4.368.159	0.0000
8	0.016484	0.003575	4.611.517	0.0000
9	0.014872	0.003072	4.841.739	0.0000

AUSTRÁLIA				
Dimensão de Imersão (max=8)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.015646	0.002485	6.295.289	0.0000
3	0.031342	0.003941	7.953.542	0.0000
4	0.045213	0.004682	9.657.059	0.0000
5	0.056416	0.004869	1.158.717	0.0000
6	0.062062	0.004685	1.324.725	0.0000
7	0.063196	0.004284	1.475.334	0.0000
8	0.062256	0.003777	1.648.101	0.0000
9	0.060174	0.003243	1.855.771	0.0000
10	0.057009	0.002726	2.091.410	0.0000
11	0.053630	0.002254	2.379.592	0.0000

FRANÇA				
Dimensão de Imersão (max=10)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.020116	0.002527	7.960.238	0.0000
3	0.043342	0.004006	1.082.015	0.0000
4	0.057884	0.004758	1.216.540	0.0000
5	0.069804	0.004947	1.411.021	0.0000
6	0.075735	0.004759	1.591.316	0.0000
7	0.076306	0.004351	1.753.901	0.0000
8	0.073880	0.003836	1.925.994	0.0000
9	0.069585	0.003292	2.113.655	0.0000
10	0.063977	0.002767	2.312.064	0.0000
11	0.058233	0.002287	2.545.762	0.0000

MÉXICO				
Dimensão de Imersão (max=9)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.011091	0.002451	4.525.299	0.0000
3	0.026208	0.003884	6.748.174	0.0000
4	0.036858	0.004611	7.992.737	0.0000
5	0.044643	0.004793	9.314.779	0.0000
6	0.046900	0.004609	1.017.632	0.0000
7	0.046128	0.004211	1.095.346	0.0000
8	0.043449	0.003711	1.170.702	0.0000
9	0.039708	0.003184	1.247.195	0.0000
10	0.035389	0.002675	1.323.057	0.0000
11	0.031142	0.002210	1.409.108	0.0000

REINO UNIDO				
Dimensão de Imersão (max=8)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.010909	0.002579	4.230.007	0.0000
3	0.026785	0.004088	6.551.787	0.0000
4	0.038799	0.004856	7.989.087	0.0000
5	0.043986	0.005050	8.710.511	0.0000
6	0.044920	0.004858	9.245.717	0.0000
7	0.043286	0.004442	9.745.272	0.0000
8	0.040327	0.003917	1.029.611	0.0000
9	0.036822	0.003362	1.095.291	0.0000
10	0.032710	0.002826	1.157.482	0.0000

CANADÁ				
Dimensão de Imersão (max=9)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.025085	0.002723	9.211.558	0.0000
3	0.052535	0.004330	1.213.350	0.0000
4	0.073745	0.005159	1.429.415	0.0000
5	0.085412	0.005381	1.587.252	0.0000
6	0.091569	0.005193	1.763.174	0.0000
7	0.094069	0.004763	1.975.022	0.0000
8	0.092777	0.004213	2.202.072	0.0000
9	0.088956	0.003628	2.452.045	0.0000
10	0.083703	0.003059	2.735.980	0.0000
11	0.077559	0.002537	3.056.518	0.0000

RÚSSIA				
Dimensão de Imersão (max=9)	Estatística BDS	Desvio Padrão	Estatística z	Valor p
2	0.018154	0.002704	6.714.690	0.0000
3	0.041779	0.004302	9.711.642	0.0000
4	0.059482	0.005130	1.159.512	0.0000
5	0.070517	0.005355	1.316.915	0.0000
6	0.074781	0.005172	1.445.947	0.0000
7	0.074412	0.004747	1.567.680	0.0000
8	0.070800	0.004202	1.684.975	0.0000
9	0.066211	0.003621	1.828.661	0.0000
10	0.060139	0.003056	1.968.134	0.0000
11	0.053396	0.002536	2.105.317	0.0000