UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

C-7

A Construção do Espaço de Moduli de Curvas Pontuadas com o Semigrupo de Weierstrass Simétrico através do Método de Stöhr - O Caso Trigonal

FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES

FORTALEZA-CE
Fevereiro de 2003

FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES

A Construção do Espaço de Moduli de Curvas Pontuadas com o Semigrupo de Weierstrass Simétrico através do Método de Stöhr - O Caso Trigonal

Orientador: FRANCISCO LUÍS ROCHA PIMENTEL

FORTALEZA-CE DE 2003

Dedico esta monografia ao meu pai.

"I have seen every curve once. "
David Mumford

Agradecimentos

Este representa o segundo trabalho relativo a uma jornada que durou três anos. O primeiro relacionado à Educação Matemática e o segundo concernente à Matemática Pura. Inicialmente, com satisfação agradeço ao meu orientador, Prof. Fco. Luís Rocha Pimentel, com quem, nas mais diversas ocasiões, tive a oportunidade de aprender assuntos não somente ligados à matemática como também relacionados à vida.

Com respeito aos momentos iniciais e finais de minha jornada agradeço o apoio, a compreensão e, principalmente, a tolerância dos seguintes professores: José Walter Lopes Nunes, Abdênago Alves de Barros, Luquésio Petrola de Melo Jorge, Francisco Plácido de Andrade e João Lucas Marques Barbosa

Ao prof. Luquésio Petrola de Melo Jorge agradeço a chance a mim concedida no início do mestrado em matemática. Agradeço os conselhos valiosos do prof. José Walter, pessoa que aprendi a admirar pela sua integridade e moral. Finalmente ao Prof. João Lucas Marques Barbosa pela oportunidade de retornar ao mestrado da matemática, local ao qual dediquei, sempre, a maior parte das minhas energias.

Ao prof. Abdênago Alves de Barros, pela compreensão enquanto cursava as disciplinas de ambos os mestrados. Ao prof. Francisco Plácido de Andrade pela tolerância diante da minha utilização do bloco 919 como local de estudo. Agradeço também aos colegas de trabalho: Alberto, Valberto , Ênio, Márcio, Flávio.

Enfim, constato que foram 3 anos difíceis de minha vida e, em vista de todas as dificuldades, acredito ter concluido com relativo exito meus planos e não ter decepcionado as pessoas que acreditaram em mim. O que me incentiva profundamente, o mais breve possível, a tentar o doutorado em matemática pura, que é minha maior prentensão.

Sumário

Introdução

Um problema clássico em Geometria Algébrica é a construção do espaço de moduli para determinada classe de variedades algébricas. Um caso importante desse problema é aquele onde temos curvas pontuadas, suaves e irredutíveis com seqüência de lacunas de Weierstrass prescrita $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_g$.

Dada uma curva algébrica C de gênero g, o teorema de Riemman-Roch para curvas algébricas faz corresponder a cada ponto $P \in C$ um semigrupo numérico, chamado o semigrupo de Weierstrass das ordens dos pólos das funções racionais sobre C regulares fora de P.

Stöhr propõe em [11], adaptando as idéias de Mumford e usando o instrumental desenvolvido por Petri, o seguinte problema: descrever os pares (C, P) de curvas pontuadas de gênero de g, cuja sequência de lacunas $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_g$ em P seja tal que $\ell_g = 2g - 1$ (o caso simétrico). Ele obtém que a subvariedade correspondente às curvas não-singulares constitui um aberto no espaço de moduli, tendo sua fronteira formada por classes de isomorfismos de curvas singulares de Gorenstein monomiais irredutíveis.

Resumidamente, seu método consiste em explicitar o ideal de uma curva C de gênero g mergulhada pelo morfismo canônico em $\mathbb{P}_k^{g-1}$ que possua um semigrupo numérico simétrico N e, a posterior construção explícita do espaço moduli para o caso das não trigonais, isto é, com $\ell_g = 2g - 1$ e $\ell_3 = 3$.

O objetivo dessa monografia é tentar adaptar as técnicas algorítmicas criadas por Stöhr, para o caso das curvas irredutíveis projetivas Gorenstein com semigrupo simétrico e trigonal($\ell_3 > 3$), através da verificação de alguns exemplos concretos.

Este trabalho consta dos capítulos descritos a seguir.

No capítulo 1, assumindo C uma curva irredutível, projetiva Gorenstein e não hiperelíptica, identificamos tais curvas com sua imagem pelo mergulho canônico em $\mathbb{P}_k^{g-1}$ e explicitamos bases monomiais para o espaço das diferenciais holomorfas de ordem n.

No capítulo 2, explicitamos o ideal canônico da curva C através da obtenção das bases de Gröbner e, assim, obtemos as equações explícitas para o *espaço moduli* para as curvas canônicas irredutíveis pontuadas com este semigrupo prescrito.

No capítulo 3, analisaremos exemplos, com a utilização do método adotado, de construção do espaço moduli para curvas irredutíveis, não singulares, projetivas Gorenstein, no caso trigonal.

Capítulo 1

" Ah! je ne sais pas, disons que ce qui m'a interessé en mathematiques ce sont surtout des proprietés assez générales, plus que l'étude de structures spécifiques...mais quand même pas avec l'esprit systématique de GROTHENDIECK par exemple"(Thonn,R. 2001)

1.1 Notação

Apresentamos abaixo um resumo da notação que será utilizada neste trabalho.

$D = \sum_{P \in C} n_P P$ divisor sobre a curva C.

$\mathcal{O}_C D$ feixe definido sobre C associado ao divisor D.

$\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ seções globais do feixe $\mathcal{O}_C D$.

$|D|$ conjunto dos divisores positivos linearmente equivalentes a D.

K,W divisores canônicos sobre a curva C.

$|K|$ sistema linear canônico.

ϕ_D aplicação regular associada ao sistema linear completo $|D|$.

ϕ_K morfismo associado ao sistema linear canônico livre de pontos de base.

C_0 curva singular Gorenstein chamada de *"curva monomial canônica"*.

$\vartheta_P(C)$ conjunto das funções racionais em C definidas em P.

$\Omega^n_C(D)$ conjunto das diferenciais de ordem n cujos divisores sobre a curva C são efetivos.

1.2 Mergulho Canônico

Seja C uma curva não-singular, completa, irredutível, de gênero aritmético g, não hiperelíptica definida, sobre um corpo algebricamente fechado k, e seja P um ponto de C.

Inicialmente, para cada divisor D sobre esta curva C , seu feixe $O_C D$ é definido por $\Gamma(U, O_C(D)) := \{f \in k(C) |$ para todo $P \in U$, temos $Ord_p(f) \geq -n_P\}$, para cada aberto U pertencente a C. Observemos que $\Gamma(C, O_C(D)) = \mathcal{H}^0(C, O_C(D)) = \{f \in K(C) | Div(f) + D \geq 0\}$ é o espaço vetorial sobre K das funções $f \in K(C)$ tais que $Div(f) + D > 0$ ou $f = 0$. Denotaremos por $h^0(O_C(D))$ a dimensão deste espaço e seja $\delta(D) = Dim_k(\Omega_C(D))$, o índice de D.

Seja K um divisor canônico sobre C, digamos $K = Div(w)$. Através da aplicação linear $\varphi : \mathcal{H}^0(C, O_C(W - D)) \rightarrow \Omega^1_k(D)$ tal que $\varphi(f) = fw$, que é um isomorfismo, é fácil ver que $\delta(D) = h^0(O_C(W - D))$.

Dado agora um divisor $D = \sum_{P \in C} n_P P$ o suporte de D é o conjunto denotado por $Sup.(D) = \{P \in C | n_P \neq 0\}$.

Definição 1.2.1 *Uma aplicação $\phi : C \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é regular em um ponto $P \in C$ se existem funções regulares $f_0, \ldots, f_n$ definidas sobre uma vizinhança V de P em C, nem todas zero em P, tais que $\phi(x) = [f_0(x) : \cdots : f_n(x)]$ para todo $x \in V$. A aplicação ϕ é regular se ela é regular em todos os pontos de C.*

Definição 1.2.2 *Seja D um divisor sobre C. Dizemos que $P \in C$ é ponto de base do sistema linear completo $|D|$ se $P \in Sup.E$ para todo $E \in |D|$. Se $|D|$ não tem pontos de base, dizemos que $|D|$ é livre de pontos de base. Neste caso, podemos associar a $|D|$ uma aplicação regular $\phi_D : C \rightarrow \mathbb{P}^n$, tomando uma base $\{s_0, \ldots, s_n\}$ para o sistema linear D e escrevendo $\phi_D(x) = [s_0(x) : \cdots : s_n(x)]$, onde $n = Dim|D|$.*

Observamos que diferentes bases produzem aplicações que podem ser transformadas uma na outra por meio de automorfismo do $\mathbb{P}^n$.

Proposição 1.2.1 *Se D é um divisor sobre C, então $|D|$ é livre de pontos de base se e somente se $Dim|D - P| = Dim|D| - 1$, para todo $P \in C$.*

Prova:

Mostraremos inicialmente que $0 \leq Dim|D| - Dim|D - P| \leq 1$. Para isso, sejam t um parâmetro local de $O_{C,P}$ (anel local de C em P) e m_P, o coeficiente de P em D', onde $D = D' + P$. Consideremos a aplicação $\varphi : \mathcal{H}^0(C, O_C(D' + P)) \rightarrow K$ definida por $\varphi(f) = (t^{m_P+1} f)(P)$. Como $Ord_P(f) \geq -m_P - 1$ segue-se que φ está bem definida e claramente é linear. Além disso,

$$\varphi(f) = 0 \Leftrightarrow (t^{m_P+1} f)(P) = 0 \Leftrightarrow Ord_P(t^{m_P+1} f) \geq 1 \Leftrightarrow Ord_P(f) \geq -m_P \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}^0(C, O_C(D')).$$

Portanto, temos $Ker(\varphi) = \mathcal{H}^0(C, O_C(D'))$. Assim, pelo teorema do núcleo e da imagem obtemos $h^0(O_C(D' + P)) = h^0(O_C(D')) + Dim[Im(\varphi)] \leq h^0(O_C(D')) + 1$, donde concluímos que $h^0(O_C(D' + P)) - h^0(O_C(D')) \leq 1$

Dado agora $P \in C$ seja $\psi : |D - P| \longrightarrow |D|$, definida por $\psi(E) = E + P$, para todo $E \in |D - P|$. Claramente φ está bem definida e é injetiva. Portanto $Dim|D| = Dim|D - P|$ se, e só se, temos que φ é sobrejetiva. Mas isso é equivalente a $P \in Sup.D'$ para todo $D' \in |D|$, ou seja, P é um ponto de base de $|D|$. ∎

Lema 1.2.1 *Seja $D = \sum_{P \in C} n_P P$ um divisor sobre C tal que $|D|$ é livre de pontos de base. Dado $P \in C$ existe uma base $\{f_0, \ldots, f_n\}$ para $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ tal que $Ord_P(f_0) = -n_P$ e $Ord_P(f_i) > -n_P$ para todo $i \geq 1$.*

Prova:

Como $|D|$ é livre de pontos de base temos $Dim|D - P| = Dim|D| - 1$, isto é, temos que $h^0(\mathcal{O}_C(D)) - 1 = h^0(\mathcal{O}_C(D - P))$. Tomemos uma base $\{f_1, \ldots, f_n\}$ para $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - P))$ e seja $f_0 \in \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \setminus \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - P))$. Assim $\{f_0, \ldots, f_n\}$ é uma base para $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ tal que $f_i \in \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - P))$ para todo $i \geq 1$. Portanto $Ord_P(f_i) \geq -n_P + 1 > -n_P$ para qualquer $i \geq 1$, e $Ord_P(f_0) = -n_P$. ∎

Lema 1.2.2 *Seja D um divisor tal que $|D|$ é livre de pontos de base. Fixe dois pontos distintos $P, Q \in C$. Então $\phi_D(P) = \phi_D(Q)$ se e só se $Dim|D - P - Q| = Dim|D - P| = Dim|D - Q|$. Portanto, ϕ é injetiva se e somente se $Dim|D - P - Q| = Dim|D| - 2$ para quaisquer $P, Q \in C$, distintos.*

Prova:

Desde que mudar a base de $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ fornece uma mudança linear de coordenadas para a aplicação ϕ_D, podemos certamente verificar se $\phi_D(P) = \phi_D(Q)$ usando qualquer base. Podemos considerar em $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ a base obtida no lema anterior. Com esta base, devido ao fato de $Ord_P(f_0) < Ord_P(f_i)$ para todo $i \geq 1$, temos $\phi_D(P) = (1 : 0 : 0 : \ldots : 0)$. Assim, segue-se que $\phi_D(Q) = \phi_D(P)$ se e somente se $\phi_D(Q) = (1 : 0 : 0 : \ldots : 0)$. Ou, equivalentemente, temos $Ord_Q(f_0) < Ord_Q(f_i)$ para todo $i \geq 1$. Por outro lado, temos que $Ord_Q(f_0) \geq -n_Q$. E se tivéssemos $Ord_Q(f_0) > -n_Q$, então Q seria um ponto de base de $|D|$, o que é absurdo.

Portanto, temos $\phi_D(Q) = \phi_D(P)$ se e somente se $Ord_Q(f_0) = -n_Q$ e $Ord_Q(f_i) > -n_Q$ para todo $i \geq 1$. Isso equivale a dizer que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é base para $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - Q))$. Logo, temos que $\phi_D(Q) = \phi_D(P)$ se e somente se $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - P)) = \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - Q))$.

Em outras palavras, temos $\phi_D(P) = \phi_D(Q)$ se e somente se toda função $f \in \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ satisfazendo $Ord_P(f) > -n_P$ também satisfaz $Ord_Q(f) > -n_Q$. Logo temos a seguinte inclusão $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - P)) \subset \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - P - Q))$, pois $P \neq Q$. Então temos

$$\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - P - Q)) = \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - P)) = \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D - Q)).$$

∎

O fato de ϕ_D ser injetiva ainda não é suficiente para termos C regularmente mergulhada(isto é, ϕ_D é um mergulho regular injetivo) em $\mathbb{P}^n_k$. Para um contra-exemplo veja [4] pág.162. O que é necessário e suficiente é que se escolhermos uma base $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ para $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ usando as coordenadas de ϕ_D, onde $Ord_P(f_0) = -n_P$ e $Ord_P(f_i) > Ord_P(f_0)$, para todo $i \geq 1$, então requeremos que pelo menos uma das f_i's com $i \geq 1$, satisfaça $Ord_P(f_i) = -n_P + 1$. Isto fará com que, após multiplicarmos por t^{n_P} onde t é um parâmetro local em P, a primeira coordenada não se anule e pelo menos uma das outras coordenadas tenha um zero simples em P. Esta condição permitirá concluirmos que $\phi_D(C)$ é uma curva não-singular (essencialmente $\dfrac{f_i}{f_0}$ será um parâmetro local em $\phi_D(P)$ para $\phi_D(C)$).

Pela discussão acima, se ϕ_D é injetiva, então ϕ_D será um mergulho se e somente se existe $f \in \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D-P))$ tal que $f \notin \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(D-2P))$. Ou seja, se e somente se temos $Dim|D-2P| = Dim|D-P| - 1 = Dim|D| - 2$.

Definição 1.2.3 *Dizemos que um divisor D sobre C é muito amplo se $|D|$ é livre de pontos de base e ϕ_D é um mergulho, isto é, ϕ_D é injetiva e $\phi_D(C)$ é não-singular, ou ainda, ϕ_D é um isomorfismo sobre sua imagem.*

Sabemos que C é hiperelíptica se, e somente se, possui um sistema linear de dimensão 1 e *grau* 2. Usando a notação clássica temos g^r_d significando um sistema linear de dimensão r e *grau* d. No caso em que é hiperelíptica denotamos g^1_2. No nosso caso em que C é trigonal, isto é, existe uma função racional em C com grau igual a 3, dito de outro modo, C é um recobrimento ramificado de grau 3 de $\mathbb{P}^1$, denotaremos por g^1_3.

Proposição 1.2.2 *Se D é um divisor sobre C , então temos que D é muito amplo se, e somente se, $Dim|D-P-Q| = Dim|D| - 2$, para quaisquer $P, Q \in C$ (possivelmente $P = Q$).*

Proposição 1.2.3 *O sistema linear canônico $|K|$ é livre de pontos de base.*

Prova:

Pela proposição 1.2.1, basta provarmos que $Dim|K-P| = Dim|K| - 1$, para todo $P \in C$. Ora, temos $Dim|K| = h^0(\mathcal{O}_C(K)) - 1 = g - 1$ e, por outro lado, como C não é racional ($g \neq 0$) temos $Dim|P| = 0$, para todo $P \in C$. Assim, por Riemann-Roch, temos $h^0(\mathcal{O}_C(K-P)) = g - 1$, donde $Dim|K-P| = g - 2 = Dim|K| - 1$ como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1.2.4 *O sistema linear canônico $|K|$ é muito amplo se e somente se C é não-hiperelíptica.*

Prova:

Pela proposição 1.2.2, sabemos que $|K|$ é muito amplo se, e somente se, ocorre a seguinte igualdade $Dim|K-P-Q| = Dim|K|-2$, para quaisquer $P, Q \in C$, é suficiente que verifiquemos esta igualdade. Como $Dim|K| = g-1$ e por Riemann-Roch $Dim|K-P-Q| = g-3+Dim|P+Q|$, devemos analisar a possibilidade de $Dim|P+Q| = 1$. Se C é hiperelíptica, seja $|D|$ o seu g^1_2. Assim se $P + Q \in |D|$, então $Dim|P+Q| = 1$. Reciprocamente, se existem $P, Q \in C$ tais que

$Dim|P+Q| > 0$, então $Dim|P+Q| = 1$, pois $Dim|P| = 0$ (C não é racional). Assim $P+Q$ é um g_2^1 e C é hiperelíptica. ■

No caso em que $|K|$ é muito amplo o morfismo associado é denotado por $\phi_K : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$.

Definição 1.2.4 *Se C é não-hiperelíptica de gênero $g \geq 3$, o mergulho $\phi_K : C \to \mathbb{P}^{g-1}$ determinado pelo sistema linear canônico $|K|$ é dito mergulho canônico de C. E sua imagem, chamada modelo canônico de C, é uma curva de grau $2g-2$ em $\mathbb{P}_k^{g-1}$.*

1.3 Diferenciais de Ordens Superiores

Novamente, até o final do capítulo 1, em sintonia com o método de Stöhr, nosso principal objetivo será explicitar bases monomiais para o espaço das diferenciais holomorfas de ordem n.

Definição 1.3.1 *Uma diferencial de ordem n em C é uma expressão da forma $\mu = w_1 \ldots w_n$, onde $w_1, \ldots, w_n$ são diferenciais sobre C.*

De forma semelhante ao caso das diferenciais sobre C, podemos definir a ordem em P das diferenciais de ordem n. Seja μ uma diferencial de ordem n, não-nula $\mu = w_1 \ldots w_n \neq 0$, e seja $P \in C$. Nós definimos a ordem de μ em P, indicada por $Ord_P(\mu)$, como segue. Escolha um parâmetro local t em $\vartheta_P(C)$, e escreva $\mu = f_1 \ldots f_n(dt)^n$, onde $w_i = f_i dt$. Definimos $Ord_P(\mu)$ como $Ord_P(f_1 \ldots f_n)$. A boa definição desta ordem decorre analogamente da boa definição da ordem definida das diferenciais de ordem 1 sobre C, isto é, do fato de que, se f pertence a $\vartheta_P(C)$ então $df/dt \in \vartheta_P(C)$ (cf. [F], cap.8, parágrafo 4, proposição 7).

O conjunto das diferenciais de ordem n sobre C é um espaço vetorial sobre k e será denotado por $\Omega_k^n(K(C))$ ou por apenas Ω^n. É claro que as diferenciais de ordem 1 sobre C são as diferenciais sobre C, isto é, $\Omega^1 = \Omega_k(K)$. Podemos definir o divisor $Div(\mu)$ de um diferencial μ de ordem n por $Div(\mu) = \sum_{P \in C} Ord_P(\mu)P$. A existência destes divisores decorre da existência dos divisores $Div(w_i)$ (cf. [2], cap.8, parágrafo 5).

As diferenciais de ordem n cujos divisores são efetivos (ou positivos) terão um papel importante e serão particularizadas agora. Seja D um divisor qualquer sobre C, defina $\Omega_k^n(D)$ como sendo $\{\mu \in \Omega^n | Div(\mu) > D\}$. Este é um subespaço de Ω^n sobre k.

Definição 1.3.2 *As diferenciais de $\Omega_C^n(0)$ são chamadas de diferenciais regulares de ordem n sobre C, ou diferenciais holomorfas de ordem n.*

Se W é um divisor canônico sobre C então o $h^0(\mathcal{O}_C(nW-D))$ pode ser interpretado em termos das diferenciais de ordem n.

Proposição 1.3.1 *A dimensão de $\Omega_k^n(D)$ é igual a dimensão de $\mathcal{H}^0(\mathcal{O}_C(nW-D))$.*

Prova:

Seja w uma diferencial sobre C tal que $W = Div(w)$, e seja ζ a aplicação

$$\zeta : \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(nW - D)) \to \Omega^n_C(D)$$

por $\zeta(f) = f(w)^n$.

Naturalmente, $f(w)^n$ é uma diferencial de ordem n. A aplicação ζ está bem definida, é claramente k-linear em f e é injetora. Vejamos: se $f \in \mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(nW - D))$ então $Div(f) + nW - D > 0$ e logo $Div(f(w)^n) = Div(f) + nDiv(w) = Div(f) + nW > D$.

Para ver que ζ é sobrejetora, nós notamos que se $\mu = h(dt)^n \in \Omega^n_k(D)$, e $w = gdt$, então $f = h/g^n$ é uma função racional em $\mathcal{H}^0(C, \mathcal{O}_C(nW - D))$ que está globalmente $\zeta(f) = \mu$.

■

Corolário 1.3.1 *Se $n \geq 2$ então $Dim(\Omega^n_k(0)) = (2n - 1)(g - 1)$*

Prova:

Pelo Teorema de Riemann-Roch temos:

$$\begin{aligned} h^0(C, \mathcal{O}_C(nW - 0)) &= deg(nW) - g + 1 + h^0(C, \mathcal{O}_C(W - nW)) \\ &= n(2g - 2) - g + 1 + h^0(C, \mathcal{O}_C((1 - n)W)) \\ &= 2gn - 2n - g + 1 + 0 \\ &= (2n - 1)(g - 1) \end{aligned}$$

e segue-se de imediato a afirmação. ■

1.4 Semigrupos de Weierstrass

Denotamos por N o semigrupo de Weierstrass de (C,P), isto é, o semigrupo aditivo das ordens de pólos das funções racionais em C que são holomorfas fora de P. Os elementos do conjunto $L = \mathbb{N} - N$ são g números $1 = \ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_g$, chamados lacunas de Weierstrass de (C,P), e os elementos de $N = \{0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots\}$ são chamados não-lacunas de (C,P). Pelo teorema de Riemann-Roch [3] [6] existem diferenciais holomorfas $\omega_{\ell_1}, \omega_{\ell_2}, \ldots, \omega_{\ell_g}$ em C cujas P-ordens são dadas por $\ell_1 - 1, \ell_2 - 1, \ldots, \ell_g - 1$, respectivamente. Elas são a chamada *base P-hermitiana* do espaço $\Omega^1_k(0)$ das diferenciais holomorfas em C.

Nós assumiremos que a última lacuna possui o máximo valor,a saber, $2g - 1$, ou equivalentemente, que o semigrupo N é *simétrico* no sentido de que um inteiro n pertence a N se, e somente se, $\ell_g - n$ não pertence a N, isto é,

$$\ell_i = 2g - 1 - n_{g-i} \quad \textit{para cada} \quad i = 1, \ldots, g. \tag{1.1}$$

Assim, para cada $P \in C$, se $\{\ell_1, \ldots, \ell_g\}$ é a sequência de lacunas de C em P, o complementar N(P) de $\{\ell_1, \ldots, \ell_g\}$ em $\mathbb{N}$ é um semigrupo. Aos pontos de Weierstrass correspondem semigrupos numéricos não triviais, isto é, distintos do complementar de $\{1, \ldots, g\}$. Sendo assim temos a seguinte definição:

Inversamente, seja N um semigrupo numérico de gênero g. Um problema interessante é saber se existe uma curva C com gênero g que possua um ponto P tal que $N(P) = N$. No caso em que n é trivial, isto é, $N = \mathbb{N}\backslash\{1, \ldots, g\}$, temos que qualquer curva de gênero g sobre um corpo de características zero realiza este semigrupo, pois tal curva possui apenas finitos pontos de Weierstrass, e como sabemos para qualquer g inteiro positivo existe C não-singular com gênero g.

Definição 1.4.1 *Um semigrupo numérico N é representável quando existe uma curva C e um ponto P em C tal que $N(P) = N$.*

Vale a pena observar que existem semigrupos que não são representáveis [8]. Neste trabalho, restringiremo-nos aos semigrupos numéricos simétricos N (com $\ell_2 = 2$).

Veremos ainda no capítulo 2 que, dado um semigrupo numérico simétrico, ele pode ser facilmente representado como um semigrupo de Weierstrass de uma curva singular Gorenstein.

Tendo em vista que a soma de duas lacunas de um semigrupo de Weierstrass é muito útil no estudo de bases do tipo monomial para o espaço das formas diferenciais quadráticas regulares, temos os seguintes resultados.

Teorema 1.4.1 *Para cada inteiro positivo n, o conjunto de todas as somas de n lacunas do semigrupo simétrico $N = \mathbb{N}\backslash\{l_1, \ldots, l_g\}$ é $L_n = \{n, n+1, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\} \bigcup \{l_i + (n-1)(2g-1) | i = 1, \ldots, g\}$. Em particular,*

$$\#L_n = (2n-1)(g-1), \ \forall n > 1.$$

Lema 1.4.1 *Se N é um semigrupo simétrico de gênero g tal que $2 \notin N$, então cada inteiro r, $2 \leq r \leq 2g-2$, é a soma de duas lacunas de N.*

Prova:

Sejam L um conjunto de lacunas de N e s um inteiro tal que $2 \leq s \leq 2g-2$. Nós queremos achar uma partição $s = a_s + b_s$ onde $a_s, b_s \in L$, escolhendo b_s o maior possível. Seja l_j a maior lacuna de N menor que s, isto é, $l_j < s \leq l_{j+1}$. Fazendo $i := s - l_j$ nós obtemos

$$1 \leq i \leq l_{j+1} - l_j = n_{g-j} - n_{g-j-1} \leq n_1$$

como segue da simetria de (1.1). Se $i < n_1$ então $a_s = l_i$ e $b_s = l_j$. Portanto nós podemos assumir que $i = n_1$, isto é, $s = l_{j+1} = l_j + n_1$. Desde que $s \leq 2g-2$ nós temos $j \leq g-2(l_{j+1} < 2g-1)$ e desde que $n_{g-j} = n_1 + n_{g-j-1}$ nós temos que $g - j \leq \tau$ onde τ é o maior inteiro tal que $n_r = \tau n_1$(este inteiro existe pois para $s > g+1$ tem-se que $n_s = n_{s-1} + 1$.

Além disso se $n_{j+1} < n_j + n_1$ então $n_{j+2} \leq n_j + n_1 < n_{j+1} + n_1$ e por indução $n_{k+1} < n_k + n_1$ para todo $k \geq j$). E portanto isto só pode ocorrer se $\tau \geq 2$, e como N é simétrico temos $\tau \leq g-1$ e estes dois fatos juntos implicam que $\tau < g-1$. Assim fazendo $b_s = l_{g-\tau-1}$ desde que $s - l_{g-\tau-1} = l_{j+1} - l_{g-\tau-1} = n_{r+1} - (g-j-1)n_1$ é uma lacuna.

Demonstração:
Sejam $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$ uma seqüência não-decrescente de n lacunas satisfazendo $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = l + (n-1)l_g$ para algum inteiro positivo de l. Então temos pela simetria que $l_g - m_i \in N$ para todo $i = 1, \ldots, n$, donde l é lacuna pois caso contrário $m_1 = l + \sum_{i=1}^{n-1} (l_g - m_i)$ pertenceria a N, o que é uma contradição.

Por outro lado, dado um inteiro $m \in \{n, n+1, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\}$, nós podemos escrever $m - n = (s-2) + i(2g-2)$ onde $s \in \{2, \ldots, 2g-2\}$ e $i \in \{0, \ldots, n-2\}$, e assim $m = (n-2-i)l_1 + s + il_g$. Portanto nós temos somente que saber que cada inteiro $s \in \{2, \ldots, 2g-2\}$ é a soma de duas lacunas, isto é satisfeito para qualquer semigrupo numérico simétrico com $l_2 = 2$, pelo lema anterior. ■

Em particular determinando L_2 desta maneira vemos que dado um inteiro $s \in \{2, \ldots, 2g-2\}$ ou, mais geralmente, um s qualquer em L_2, nós temos uma partição $s = a_s + b_s$ onde a_s e b_s são lacunas $a_s \leq b_s$. Em geral para obtermos a unicidade da partição suporemos que b_s é o maior possível.

1.5 Bases Monomiais

A partir do teorema 1.4.1 concluímos que se a curva C é não hiperelíptica com semigrupo de Weierstrass simétrico, então ela é projetivamente normal, no sentido em que, para cada $n \geq 2$ o espaço vetorial $\Omega^n_C(0)$ de dimensão $(2n-1)(g-1)$ das n-ésimas diferenciais holomorfas em C possui uma base consistindo de expressões monomiais em termos de ω_ℓ's.

Teorema 1.5.1 *O espaço $\Omega^n_C(0)$ das diferenciais regulares de ordem n tem uma base P-hermitiana consistindo de expressões monomiais nos ω_ℓ's.*

Seja I(C) o ideal canônico da curva $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$, que é o conjunto de todos os polinômios f nas indeterminadas $W_{\ell_1}, W_{\ell_2}, \ldots, W_{\ell_g}$ satisfazendo $f(\omega_{\ell_1} : \omega_{\ell_2} : \ldots : \omega_{\ell_g}) = 0$. Note que I(C) é o ideal homogêneo $\oplus_{n=2}^{\infty} I_n(C)$ onde $I_n(C)$ é o espaço vetorial de todas as n-formas que são identicamente nulas sobre a curva canônica C. Como uma consequência imediata do teorema anterior o homomorfismo

$$k[W_{\ell_1}, \ldots, W_{\ell_g}]_n \to \Omega^n_C(0),$$

induzido pelas substituições $W_{\ell_i} \mapsto \omega_{\ell_i}$ $(i = 1, \ldots, g)$, é sobrejetor para cada n(o que é conhecido como o Teorema de Noether). Portanto concluímos que $Dim(k[W_{\ell_1}, W_{\ell_2}, \ldots, W_{\ell_g}]_n / I_n(C)) = (2n-1)(g-1)$, ou equivalentemente, $Dim(I_n(C)) = \binom{n+g-1}{n} - (2n-1)(g-1)$ para cada $n \geq 2$ e em particular o espaço vetorial das relações quadráticas tem dimensão $Dim(I_2(C)) = \dfrac{(g-2)(g-3)}{2}$.

Seja $\Lambda_n \subset k[W_{\ell_1}, \ldots, W_{\ell_g}]_n$ o espaço vetorial gerado pelo levantamento da nossa base P-hermitiana de $\Omega^n_C(0)$ (conforme o teorema 1.5.1). Note que $\Lambda_n \bigcap I_n(C) = 0$. Além disso, concluímos que $k[W_{\ell_1}, \ldots, W_{\ell_g}]_n = \Lambda_n \oplus I_n(C)$ pois a soma das dimensões de $\Omega^n_C(0)$ e $I_n(C)$ é igual a $\binom{n+g-1}{n}$, que representa a dimensão do espaço vetorial dos monômios de grau n denotado por $k[W_{\ell_1}, \ldots, W_{\ell_g}]_n$.

Os próximos resultados são relacionados ao fato de se explicitar bases monomiais para o espaço das diferenciais holomorfas de ordem n, no caso em que são tratados semigrupos de Weierstrass simétricos.

Proposição 1.5.1 *Dado τ o maior inteiro tal que $n_\tau = \tau n_1$. Então as diferenciais quadráticas*

$$\begin{array}{rl} \omega_i \omega_{\ell_j} & (i = 1, \ldots, mim\{n_1 - 1, \ell_{j+1} - \ell_j\}, j = 1, \ldots, g-1), \\ \omega_{n_{\tau+1} - kn_1} \omega_{\ell_{g-\tau-1}} & (k = 1, \ldots, \tau - 1) \\ \omega_{\ell_i} \omega_{\ell_g} & (i = 1, \ldots, g) \end{array}$$

formam uma base P-hermitiana no espaço $\Omega^2_C(0)$ das diferenciais holomorfas em C.

Prova:

Dado um inteiro s tal que $2 \leq s \leq 2g-2$. Nós procuramos uma particão dada por $s = a_s + b_s$ onde $a_s, b_s \in L$. Nós escolheremos um b_s tão grande quanto possível. Dado ℓ_j a maior lacuna menor que s, isto é, $\ell_j < s \leq \ell_{j+1}$. Tomando $i := s - \ell_l$ nós obtemos: $1 \leq i \leq \ell_{j+1} - \ell_j = n_{g-j} - n_{g-j-1} \leq n_1$, onde $\ell_j = 2g - 1 - n_{g-j}$ como segue-se da simetria.

Se $i < n_1$ então $a_s = \ell_i = i$ e $b_s = \ell_j$. Todavia nós podemos assumir que $i = n_1$, isto é, $s = \ell_{j+1} = \ell_j + n_1$. Desde que $s \leq 2g-2$ nós teremos que $j \leq g-2$, e desde que $n_{g-j} = n_1 + n_{g-j-1}$ nós teremos $g - j \leq \tau$, ou equivalentemente, $g - \tau \leq j$ e contudo neste caso pode acontecer somente quando $\tau \geq 2$. Note que $b_s \leq \ell_{g-\tau-1}$ pois, de outra forma, pela simetria em (1.1), $s - b_s$ seria um múltiplo de n_1 e desta mameira uma não lacuna. Nós podemos igualmente ter $b_s = \ell_{g-\tau-1}$ desde que $s - \ell_{g-\tau-1} = \ell_{j+1} - \ell_{g-\tau-1} = n_{\tau+1} - (g-j-1)n_1$ é uma lacuna. Isto prova a proposição . ■

Dada uma base $\omega_{\ell_1}, \ldots, \omega_{\ell_g}$ de $\Omega^1_k(0)$ tal que a $Ord_P(\omega_{\ell_i}) = \ell_i - 1$, onde $\{\ell_1, \ldots, \ell_g\}$ é a seqüência de lacunas em P, conseguimos um conjunto linearmente independente de elementos em $\Omega^2_k(0)$, a saber, considerando a partição $s = a_s + b_s (a_s \leq b_s)$ lacunas de N e b_s o maior possível.

A partir desta partição temos que o conjunto $\{\omega_{a_s}\omega_{b_s} \mid s \in L_2\}$ é linearmente independente, pois $Ord_P(\omega_{a_s}\omega_{b_s}) = Ord_P(\omega_{a_s}) + Ord_P(\omega_{b_s}) = a_s - 1 + b_s - 1 = s - 2$, isto é, seus elementos têm ordem em P distintos. Note que nossa base de $\Omega^2_C(0)$ contém as duas $2g-1$ diferenciais quadráticas listadas abaixo: $\omega_{\ell_1}\omega_{\ell_1}, \omega_{\ell_1}\omega_{\ell_2}, \ldots, \omega_{\ell_1}\omega_{\ell_g}, \omega_{\ell_2}\omega_{\ell_g}, \ldots, \omega_{\ell_g}\omega_{\ell_g}$. Os $g-2$ elementos remanescentes desta base serão escritos da seguinte maneira: $\omega_{\ell_{r_j}}\omega_{\ell_{s_j}}$ onde $r_j + s_j = n_j + 1$ para $(j = 1, \ldots, g-2)$.

Proposição 1.5.2 *Para cada $n \geq 3$ uma base P-hermitiana para o espaço $\Omega^n_C(0)$ das n-diferenciais holomorfas de C é dada pelas seguintes expressões monomiais:*

$$\begin{array}{ll}
\omega_1^{n-i}\omega_{\ell_g}^i & (i = 0, \ldots, n), \\
\omega_1^{n-1-i}\omega_{\ell_j}\omega_{\ell_g}^i & (i = 0, \ldots, n-1; j = 2, \ldots, g-1) \\
\omega_1^{n-2-i}\omega_{r_j}\omega_{s_j}\omega_{\ell_g}^i & (i = 0, \ldots, n-2; j = 1, \ldots, g-2) \\
\omega_1^{n-3-i}\omega_2\omega_{n_1-1}\omega_{\ell_g-1}\omega_{\ell_g}^i & (i = 0, \ldots, n-3)
\end{array}$$

Prova: Ver [11].

Capítulo 2

Caracterização de curvas canônicas Gorenstein com semigrupo de Weierstrass simétrico

"Its seems to me that, in the spirit of the biogenetic law, the student who repeat in miniature the evolution of algebraic geometry will grasp the logic of the subject more clearly."(Shafarevich, 1988)

No capítulo anterior, identificamos as curvas com sua imagem pelo mergulho canônico em $\mathbb{P}_k^{g-1}$ e explicitamos bases monomiais para o espaço das diferenciais holomorfas de ordem n. Isto permite, de acordo com o método de Stöhr [11], impor restrições nos coeficientes de certas quádricas que definem uma curva C, obtermos bases de Gröbner para o ideal canônico da curva mergulhada no espaço projetivo. Obtém-se então equações explícitas para a variedade de moduli correspondente. De fato, descreveremos a técnica ali desenvolvida.

Para cada $s \in L_2$ listamos todas as partições de s como soma de duas lacunas, digamos $s = a_{si} + b_{si}$ $(i = 0, \ldots, \nu_s)$ onde $a_{si} \le b_{si}$ para cada i e $a_{s0} < a_{s1} < \ldots$. A respeito desta convenção nós temos $a_s = a_{s0}$ e $b_s = b_{s0}$ para cada $s \in L_2$.

Como as $3g-3$ diferenciais quadráticas $\omega_{a_s}\omega_{b_s}$ $(s \in L_2)$ formam uma base P-hermitiana de $\Omega_C^2(0)$, após multiplicar as ω_{ℓ_i}'s por constantes escolhidas convenientemente obtemos para cada $s \in L_2$ e para cada $i = 1, \ldots, \nu_s$ uma equação

$$\omega_{a_{si}}\omega_{b_{si}} = \omega_{a_s}\omega_{b_s} + \sum_{r>s} c_{sir}\omega_{a_r}\omega_{b_r}$$

($\omega_{\ell_i} = f_i dt$, com $f_i = a_i f^{\ell_i - 1} + h_i^{\ell_i}$ para algum $a_i \in k$ e algum $h_i \in K(C)$ então para $f_i' = a_i^{-1} f_i$ temos ainda uma base P-hermitiana), onde os c_{sir}'s são constantes e r varia sobre os elementos de L_2

maiores do que s. As expressões $w_{a_{si}}, w_{b_{si}}$ em termos da base dão origem às $\frac{(g-2)(g-3)}{2}$ formas quadráticas

$$F_{si} := W_{a_{si}}W_{b_{si}} - W_{a_s}W_{b_s} - \sum_{r>s} c_{sir}W_{a_r}W_{b_r},$$

são identicamente nulas sobre C e são linearmente independentes, pois $W_{a_{si}}W_{b_{si}}$ não é termo de F_{rj} se $r \neq s$ ou $i \neq j$.

Assim os F_{si} formam uma base do espaço vetorial $I_2(C)$ das relações quadráticas. Veja que existem $\begin{pmatrix} g \\ 2 \end{pmatrix}$ termos da forma $\omega_{\ell_i}\omega_{\ell_j}$ dos quais apenas $3g-3$ elementos são tais que $\ell_i + \ell_j$ são distintos e logo temos $\frac{(g-2)(g-3)}{2}$ formas quadráticas F_{si}.

Seja $\Lambda_n \subset k[W_{\ell_1}, \dots, W_{\ell_g}]$ o espaço vetorial gerado pela substituição $\omega_{\ell_i} \longrightarrow W_{\ell_i}\,(i = 1, \dots, g)$ na base dada pelas proposições anteriores. A identidade $\Lambda_n \bigcap I_n(C) = 0$ fornece o seguinte resultado a respeito das primeiras sizígias entre as formas quadráticas.

"Se H_{si} ($s \in L_2$, $i = 1, \dots, \nu_s$) são (n-2)-formas nas variáveis $W_{\ell_1}, \dots, W_{\ell_g}$ satisfazendo $\sum_{si} H_{si}F_{si} = 0$ mod Λ_n então $\sum_{si} H_{si}F_{si} = 0$".

Com esta proposição obtemos equações polinomiais entre os coeficientes c_{sir} das formas quadráticas por comparação dos coeficientes dos monômios em Λ_n.

Por outro lado, adotando coordenadas homogêneas $(x_0 : \dots : x_n)$ em $\mathbb{P}^n_k$, o conjunto de polinômios $I = I(C) := \{f \in k[X_0, \dots, X_n] / f(x_0, \dots, x_n) = 0$ para todo $(x_0 : \dots : x_n) \in C\}$ é um ideal homogêneo em $k[X_0, \dots, X_n]$, chamado ideal da curva C. A homogeneidade nos permite escrever : $I = \oplus_{m \geq 1} I_m(C)$, onde $I_m(C)$ é o espaço dos polinômios homogêneos de grau m em $X_0, \dots, X_n$ que se anulam em C. Claramente, $0 \neq f \in I_m(C)$ se, e somente se, a hipersuperfície

$$V_f = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n / f(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

contém C. Por definição C pode ser descrita como a interseção : $C = \bigcap_{f \in I} V_f$. Pelo teorema da base de Hilbert podemos escrever $C = \bigcap_{i=1}^{n} V_{f_i}$, desde que $f_1, \dots, f_r$ gerem o ideal I. Se admitirmos que C é não-degenerada, então $I_1(C) = \{0\}$, portanto temos grau $f_i \geq 2$ para todo $i = 1, \dots, r$. Pelo resultado da análise de Petri, é possível tomar $f_1, \dots, f_r$ tais que *grau*$(f_i) = 2$ ou 3, para todo $i = 1, \dots, r$.

Com respeito às formas cúbicas geradoras do ideal canônico, em [9], (teorema 3.1 pág.100) para uma curva C não-singular, necessitamos somente de $g-3$ cúbicas.

Prosseguiremos com o intuito de obter as equações para o espaço moduli das curvas canônicas irredutíveis pontuadas com ponto não singular e seqüência de lacunas L. Assumiremos que $N = \{0,1,2,\ldots\}\backslash\{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_g\}$ é um semigrupo numérico satisfazendo $\ell_2 = 2, \ell_3 > 3, \ell_g = 2g-1$.

Salientamos que o ideal canônico da curva mergulhada no espaço projetivo não é gerado somente por relações quadráticas. Portanto necessitamos das formas dadas por:

$$\begin{aligned} F_{si} &= W_{a_{si}}W_{b_{si}} - W_{a_s}W_{b_s} - \sum_{r>s} c_{sir}W_{a_r}W_{b_r} \quad (s \in L+L, i = 1,\ldots,\nu_s) \\ G_{a+b+c,j} &= W_{a_{sj}}W_{b_{sj}}W_{c_{sj}} - W_aW_bW_c - \sum_{r>a+b+c} C_{jr}W_{a_r}W_{b_r}W_{c_r} \end{aligned}$$

com $a_j + b_j + c_j = a+b+c, j \in \{1,\ldots,g-3\}$, cujos coeficientes c_{sir} e C_{jr} pertencem ao corpo algebricamente fechado k, onde s_s, b_s, a_{si}, b_{si}, e ν_s são definidos como no capítulo anterior.

Procuramos agora as condições nas quais os coeficientes c_{sir} e C_{jr} de forma que a interseção das $\frac{(g-2)(g-3)}{2}$ hipersuperfícies quadráticas $F_{si} = 0$ e das $g-3$ cúbicas $G_{a+b+c,j} = 0$ em $\mathbb{P}_k^{g-1}$ seja uma curva irredutível canônica Gorenstein de gênero g e grau $2g-2$ possuindo no ponto $P = (1 : \ldots : 0)$ as seqüência de lacunas de Weierstrass $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_g$, isto é, as multiplicidades de interseção com os espaços osculadores (que podem ser vistos como uma generalização da reta tangente para dimensões superiores) respectivamente iguais a $\ell_1 - 1.\ldots,\ell_g - 1$.

O próximo lema é fundamental para a posterior construção do espaço moduli das curvas pontuadas em (C,P).

Lema 2.0.1 *Dado $I = \oplus I_n$ o ideal homogêneo de $k[W_{\ell_1},\ldots,W_{\ell_g}]$ gerado pelas formas quadráticas $F_{si}(s \in L+L, i = 1,\ldots,\nu_s)$ e cúbicas $G_{a+b+c,j}$ com $j \in \{1,\ldots,g-3\}$. Para cada inteiro $n \geq 2$ nós teremos $k[W_{\ell_1},\ldots,W_{\ell_g}] = I_n + \Lambda_n$, onde Λ_n denota o espaço vetorial de dimensão $(2n-1)(g-1)$ expandido das n-formas*

$$\begin{array}{ll} W_1^iW_{a_s}W_{b_s}W_{\ell_g}^{n-2-i} & (0 \leq i \leq n-2, 2 \leq s \leq 2g-2), \\ W_1^iW_2W_{n_1-1}W_{\ell_g-1}W_{\ell_g}^{n-3-i} & (0 \leq i \leq n-3) \quad e \\ W_{\ell_j}W_{\ell_g}^{n-1} & (1 \leq j \leq g) \end{array}$$

cujos pesos são dois a dois distintos e considerando para cada W_ℓ o peso ℓ. Nós, igualmente, forneceremos um algoritmo para escrever cada uma das n-formas em W_{ℓ_i}'s como somas de elementos de I_n e Λ_n. Nós também deduzimos do lema 2.0.1. que $k[W_{\ell_1},\ldots,W_{\ell_g}]_n = I_n \oplus \Lambda_n$

Cada semigrupo numérico simétrico N (com $\ell_2 = 2$) pode ser representável com um semigrupo de Weierstrass de uma curva Gorenstein singular chamada curva monomial canônica descrita por:

$$C_0 := \{(a^{\ell_1-1}b^{n_{g-1}} : a^{\ell_2-1}b^{n_{g-2}} : \cdots : a^{\ell_g-1}b^{n_0})|(a:b) \in \mathbb{P}^1\}$$

2.1 O espaço moduli

Nesta seção construiremos o espaço moduli das curvas pontuadas (C,P) com semigrupo de Weierstrass simétrico. Nós buscamos um isomorfismo de classes dos pares (C,P) onde C é uma curva projetiva irredutível Gorenstein, de gênero aritmético g, definido sobre um corpo algebricamente fechado K e onde P é um ponto não-singular de C com a sequência de lacunas $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_g$. Como descrito no capítulo 1, consideramos o mergulho canônico de C no espaço projetivo de dimensão $g-1$ através da escolha de uma base P-hermitiana $\omega_{\ell_1}, \omega_{\ell_2}, \ldots, \omega_{\ell_g}$ do espaço das diferenciais holomorfas. Pela seção anterior os coeficientes c_{sir} dos geradores F_{si} deste ideal são caracterizados em termos das equações de polinômios onde nós atribuímos para cada c_{sir} o peso $r-s$.

Note que a base P-hermitiana é unicamente determinada a menos de transformação linear $\omega_\ell \mapsto \sum_{j=i}^{g} z_{ij}\omega_{\ell_j}$ onde $(z_{ij}) \in GL_g(K)$ é uma matriz triangular superior cujos elementos da diagonal, em vista da normalização $c_{sis} = 1$, são da forma $z_{ii} = z^{\ell_i}$ $(i = 1, \ldots, g)$ para algum constante diferente de zero.

Para construirmos o espaço moduli das curvas suaves com sequência de lacunas $\ell_1, \ldots, \ell_g$ devemos dividir o conjunto algébrico dos vetores constantes c_{sir} e C_{jr} pela ação deste grupo de matrizes triangulares.

Como mostrou Stöhr em [11], poderemos normalizar $\frac{1}{2}g(g-1)$ coeficientes das formas quadráticas $F_{1+\ell,1}$ $(\ell \in L - \{1,2\})$ e cúbicas $G_{a+b+c,j}$ com $j \in \{1, \ldots, g-3\}$.

Após realizar estas normalizações a única liberdade que temos é realizar as transformações $c_{sir} \to z^{r-s}c_{sir}$ onde z está no grupo multiplicativo $G_m(K)$ do corpo de constantes K. A variedade de moduli das curvas regulares irredutíveis com lacunas $\{\ell_1, \ldots, \ell_g\}$ formam um aberto no conjunto obtido anteriormente tendo sua fronteira formada por classes de isomorfismos de curvas C_0 singulares Gorenstein monomiais irredutíveis. Este aberto corresponde às curvas não singulares, representando o semigrupo numérico como semigrupo de Weierstrass da curva.

Teorema 2.1.1 *As classes de isomorfismos das curvas projetivas regulares irredutíveis pontuadas com seqüências de lacunas de Weierstrass $\ell_1, \ldots, \ell_g$ correspondem bijetivamente às órbitas da ação $(z, c_{sir}) \to z^{r-s}c_{sir}$ no conjunto algébrico dos vetores de constantes c_{sir} normalizados por [11], proposição 3.1, satisfazendo o critério jacobiano.*

Corolário 2.1.1 *Os automorfismos das curvas regulares irredutíveis e normalizadas (C,P) são exatamente da forma*

$$(z_{\ell_1} : \cdots : z_{\ell_g}) \to (z^{\ell_1} z_{\ell_1} : \cdots : z^{\ell_g} z_{\ell_g}),$$

onde $z \in G_m(K)$ com $z^{r-s} = 1$ sempre que $c_{sir} \neq 0$ para algum i.

Os exemplos analisados no capítulo 3 são os conjuntos de lacunas e $L = \{1,2,4,7\}, L = \{1,2,4,5,8,11\}$.

De imediato N é simétrico gerado por dois elementos. Portanto, a classe de isomorfismos procurada forma uma variedade algébrica projetiva de dimensão $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)-\left[\frac{n}{m}\right]-4$*, onde m e n são geradores do semi-grupo (Stöhr em[11], pág.208).*

Capítulo 3

Exemplos de construção do espaço moduli, pelo método de Stöhr, para curvas trigonais

"As ir turned out, the field seems to have acquired the reputation of being esoteric, exclusive and very abstract with adherents who are secretly plotting to take over all the rest of mathematics! In one respect this last point is accurate: algebraic geometry is a subject which relates frequently with a very large number of other fields-analytic and differential geometry, topology, k-theory, commutative algebra, algebraic groups and number theory..." (David Mumford,1978)

Nesta seção veremos exemplos de conjuntos de lacunas de Weierstrass L que correspondem a curvas suaves trigonais, não hiperelípticas. Resaltamos que quando o gênero g cresce, os cálculos se tornam difíceis de serem realizados manualmente. Para os casos de maior gênero o algoritmo pode ser efetuado com mais eficiência por programas computacionais como: *Singular, Macaulay II.*

Exemplo 3.0.1 *Exemplificaremos a adaptação do método para o seguinte conjunto de lacunas de Weierstrass* $L = \{1, 2, 4, 7\}$. *Nesse caso,* $g = 4$ *e* $N = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, \ldots\}$ *é representável. A curva C é mergulhada canonicamente em* $\mathbb{P}^3$ *como uma curva de grau* $2g - 2 = 6$.

O conjunto $L+L$ de todas as somas de duas lacunas, neste caso é $L+L = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 14\}$ e o conjunto $L + L + L$ de todas as somas de três lacunas é

$$L + L + L = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 21\}.$$

Temos então as seguintes possibilidades de partições:

$$8 = 4 + 4 = 1 + 7$$

$$\begin{gathered} 9 = 1 + 1 + 7 = 1 + 4 + 4 \\ 10 = 4 + 4 + 2 = 1 + 2 + 7 \\ 6 = 1 + 1 + 4 = 2 + 2 + 2 \\ 12 = 4 + 4 + 4 = 1 + 4 + 7 \\ 15 = 1 + 7 + 7 = 4 + 4 + 7. \end{gathered}$$

Portanto, obtemos as formas

$$\begin{gathered} W_4^2 - W_1 W_7 \\ W_1^2 W_7 - W_1 W_4^2 \\ W_4^2 W_2 - W_1 W_2 W_7 \\ W_1^2 W_4 - W_2^3 \\ W_4^3 - W_1 W_4 W_7 \\ W_7 W_4^2 - W_1 W_7^2. \end{gathered}$$

De acordo com a proposição 1.3.1 temos as seguintes bases para os espaços das diferenciais holomorfas $\Omega^2(0)$ e $\Omega^3(0)$:

$$\{\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_1\omega_4, \omega_1\omega_7, \omega_2\omega_7, \omega_4\omega_7, \omega_7^2, \omega_2\omega_4, \omega_2^2\},$$
$$\{\omega_1^3, \omega_1^2\omega_7, \omega_7^3, \omega_1^2\omega_2, \omega_1\omega_2\omega_7, \omega_2\omega_7^2, \omega_1^2\omega_4, \omega_1\omega_4\omega_7, \omega_7^3, \omega_1\omega_2^2, \omega_1\omega_2\omega_4, \omega_2^2\omega_7, \omega_2\omega_4\omega_7, \omega_2^2\omega_4\}$$

Segundo o método de Stöhr, podemos normalizar $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ coeficientes, respeitando a tabela abaixo:

peso	1	2	3	5	6	*total*
nº coeficientes	1	1	2	1	1	6

$$\begin{aligned} F_{8,1} &= W_4^2 - W_1 W_7 - a_8^9 W_2 W_7 - a_8^{11} W_4 W_7 - a_8^{14} W_7^2 \\ G_{6,1} &= W_1^2 W_4 - W_2^3 - b_6^7 W_1 W_2 W_4 - b_6^8 W_2^2 W_4 - b_6^9 W_1^2 W_7 - b_6^{10} W_1 W_2 W_7 \\ &\quad - b_6^{11} W_2^2 W_7 - b_6^{12} W_1 W_4 W_7 - b_6^{13} W_2^2 W_7 - b_6^{15} W_1 W_7^2 - b_6^{16} W_2 W_7^2 - b_6^{18} W_4 W_7^2 - b_6^{21} W_7^3 \end{aligned}$$

Escolhemos então os seguintes coeficientes $a_8^9 = a_8^{11} = a_8^{14} = 0$ na forma quádrica e $b_6^8 = b_6^9 = b_6^{11} = 0$ na forma cúbica. Percebemos então que as formas acima dependem somente de 8 coeficientes livres e distintos $b_6^7, b_6^{10}, b_6^{12}, b_6^{13}, b_6^{15}, b_6^{16}, b_6^{18}, b_6^{21}$. Poderemos, finalmente, escrever as equações que seguem:

$$\begin{aligned} F_{8,1} &= W_4^2 - W_1 W_7 \\ G_{6,1} &= W_1^2 W_4 - W_2^3 - b_6^7 W_1 W_2 W_4 - b_6^{10} W_1 W_2 W_7 \\ &\quad - b_6^{12} W_1 W_4 W_7 - b_6^{13} W_2^2 W_7 - b_6^{15} W_1 W_7^2 - b_6^{16} W_2 W_7^2 - b_6^{18} W_4 W_7^2 - b_6^{21} W_7^3 \end{aligned}$$

Concluímos que nossa variedade de moduli é o espaço $\mathbb{P}_K^7$.

Neste caso o semigrupo de Weierstrass $N = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$ é gerado pelos elementos 3 e $5 = 4 + 1 = g + 1, g = 4 \neq 2(mod\,3)$. Além disso, a dimensão da variedade projetiva, [11] pág.208, é $\frac{(3+1)(5+1)}{2} - \left[\frac{5}{3}\right] - 4 = 7$. Com respeito ao ideal canônico da curva, o espaço vetorial das relações quadráticas tem $Dim(I_2(C)) = \frac{(4-2)(4-3)}{2} = 1$. Assim, $F_{8,1}$ forma uma base para $I_2(C)$.

Analogamente, para o espaço das relações cúbicas $Dim(I_3(C)) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - 15 = 5$, contudo, a partir do resultado de *Schreyer* necessitaremos somente de $g - 3 = 1$ cúbica. Para esta variedade de moduli, vemos que existe apenas uma cúbica que não contém a quádrica, logo o modelo canônico de C é interseção completa de uma quádrica e uma cúbica em $\mathbb{P}^3_K$.

Exemplo 3.0.2 *Seja $L = \{1, 2, 4, 5, 8, 11\}$ o conjunto de lacunas de uma curva trigonal, não hiperelíptica $C \subseteq \mathbb{P}^5_k$, de gênero $g = 6$.*

Como $g = 6$ nosso semigrupo é representado como semigrupo de Weierstrass de uma curva suave [7]. Neste caso, $L + L = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 19, 22\}$. Notando que :

$$\begin{gathered} 6 = 2 + 4 = 1 + 5 \\ 9 = 4 + 5 = 1 + 8 \\ 10 = 5 + 5 = 2 + 8 \\ 12 = 1 + 11 = 4 + 8 \\ 13 = 5 + 8 = 2 + 11 \\ 16 = 8 + 8 = 5 + 11. \end{gathered}$$

Portanto, obtemos as quádricas

$$\begin{gathered} W_2W_4 - W_1W_5 \\ W_1W_8 - W_4W_5 \\ W_5^2 - W_2W_8 \\ W_1W_{11} - W_4W_8 \\ W_5W_8 - W_2W_{11} \\ W_8^2 - W_5W_{11}. \end{gathered}$$

Usando a notação c_s^r onde $n = r - s$, (n =peso), escrevemos as $\frac{(6-2)(6-3)}{2} = 6$ equações da base para o espaço vetorial das formas quadráticas $I_2(C)$.

$$
\begin{aligned}
F_{6,1} &= W_2W_4 - W_1W_5 - \sum_{r>6}(a_6^7, a_6^8, a_6^9, a_6^{10}, a_6^{12}, a_6^{13}, a_6^{15}, a_6^{16}, a_6^{19}, a_6^{22}) \\
F_{9,1} &= W_1W_8 - W_4W_5 - \sum_{r>9}(b_9^{10}, b_9^{12}, b_9^{13}, b_9^{15}, b_9^{16}, b_9^{19}, b_9^{22}) \\
F_{10,1} &= W_5^2 - W_2W_8 - \sum_{r>10}(c_{10}^{12}, c_{10}^{13}, c_{10}^{15}, c_{10}^{16}, c_{10}^{19}, c_{10}^{22}) \\
F_{12,1} &= W_1W_{11} - W_4W_8 - \sum_{r>12}(d_{12}^{13}, d_{12}^{15}, d_{12}^{16}, d_{12}^{19}, d_{12}^{22}) \\
F_{13,1} &= W_5W_8 - W_2W_{11} - \sum_{r>13}(e_{13}^{15}, e_{13}^{16}, e_{13}^{19}, e_{13}^{22}) \\
F_{16,1} &= W_8^2 - W_5W_{11} - \sum_{r>16}(g_{16}^{19}, g_{16}^{22})
\end{aligned}
$$

Podemos normalizar $\frac{6(6-1)}{2} = 15$ coeficientes nas quádricas acima, respeitando a tabela abaixo:

peso	1	2	3	4	6	7	9	10	*total*
quantidade de coeficientes	2	1	4	2	2	2	1	1	15

Tendo em vista anular a maior quantidade de formas quadráticas com uma menor quantidade de normalizações , escolhemos os coeficientes $g_{16}^{19} = g_{16}^{22} = e_{13}^{15} = e_{13}^{16} = e_{13}^{19} = e_{13}^{22} = d_{12}^{13} = d_{12}^{15} = D_{12}^{16} = d_{12}^{19} = d_{12}^{22} = 0$ num total de 11 coeficientes. O próximo passo é encontrar as relações lineares entre as formas cúbicas $W_{\ell_i}F_{si}$, ou equivalentemente, os geradores das sizígeas lineares de $I(C)$:

$$
\begin{aligned}
H_1 &= W_5F_6^{(0)} + W_1F_{10}^{(0)} + W_2F_9^{(0)} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_3 \\
H_2 &= W_2F_{12}^{(0)} + W_1F_{13}^{(0)} + W_8F_6^{(0)} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_3 \\
H_3 &= W_5F_{12}^{(0)} + W_4F_{13}^{(0)} + W_{11}F_6^{(0)} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_3 \\
H_4 &= W_8F_{10}^{(0)} - W_5F_{13}^{(0)} + W_2F_{16}^{(0)} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_3 \\
H_5 &= W_8F_{12}^{(0)} + W_4F_{16}^{(0)} - W_{11}F_9^{(0)} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_3 \\
H_6 &= W_5F_{16}^{(0)} + W_{11}F_{10}^{(0)} - W_8F_{13}^{(0)} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_3 \\
H_7 &= W_4F_{10}^{(0)} - W_5F_9^{(0)} + W_8F_6^{(0)} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_3 \\
H_8 &= W_8F_9^{(0)} + W_1F_{16}^{(0)} - W_{11}F_6^{(0)} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_3
\end{aligned}
$$

Impondo a condição a todas identidades acima, encontraremos que os coeficientes das formas quadráticas se anularão por completo. Resta-nos considerar em seguida as formas cúbicas.

Consideraremos então

$L + L + L = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 30, 33\}.$

Notando que:

$$\begin{gathered}
6 = 2 + 2 + 2 = 1 + 1 + 4 \\
9 = 2 + 2 + 5 = 1 + 4 + 4 \\
12 = 2 + 2 + 8 = 2 + 5 + 5 = 4 + 4 + 4
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
11 = 2 + 4 + 5 = 1 + 5 + 5 = 1 + 2 + 8 \\
13 = 1 + 4 + 8 = 1 + 1 + 11 \\
14 = 1 + 2 + 11 = 2 + 4 + 8 = 4 + 5 + 5 = 1 + 5 + 8 \\
17 = 2 + 4 + 11 = 1 + 8 + 8 = 4 + 5 + 8 \\
18 = 5 + 5 + 8 = 2 + 5 + 11 = 2 + 8 + 8 \\
20 = 1 + 8 + 11 = 4 + 5 + 11 = 4 + 8 + 8 \\
21 = 5 + 8 + 8 = 5 + 5 + 11 = 2 + 8 + 11 \\
23 = 1 + 11 + 11 = 1 + 4 + 11 \\
24 = 8 + 8 + 8 = 2 + 11 + 11.
\end{gathered}$$

E sabendo que o espaço vetorial gerado pelas substituições $\omega_{\ell_i} \longrightarrow W_{\ell_i}$ $(i = 1, \ldots, 6)$ nas bases dadas pelas proposições 1.41 e 1.4.2 teremos

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \{\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_1\omega_4, \omega_1\omega_5, \omega_1\omega_8, \omega_1\omega_{11}, \omega_2\omega_{11}, \omega_4\omega_{11}, \omega_5\omega_{11}, \omega_2\omega_{11}, \omega_{11}^2, \omega_2^2, \omega_2\omega_5, \omega_4^2, \omega_5^2\} \\
\Lambda_3 &= \{\omega_1^3, \omega_2^2\omega_{11}, \omega_1\omega_{11}^2, \omega_{11}^3, \omega_1^2\omega_2, \omega_1\omega_4\omega_{11}, \omega_5\omega_{11}^2, \omega_1^2\omega_8, \omega_1^2\omega_4, \omega_1^2\omega_5, \omega_1\omega_2\omega_{11}, \omega_1\omega_5\omega_{11}, \omega_1\omega_8\omega_{11}, \\
&\quad \omega_2\omega_{11}^2, \omega_4\omega_{11}^2, \omega_8\omega_{11}^2, \omega_1\omega_2^2, \omega_1\omega_2\omega_5, \omega_1\omega_4^2, \omega_1\omega_5^2, \omega_2^2\omega_{11}, \omega_2\omega_5\omega_{11}, \omega_4^2\omega_{11}, \omega_5^2\omega_{11}, \omega_2^2\omega_8\}
\end{aligned}$$

Obtemos as formas cúbicas:

$$\begin{aligned}
G_{6,1} &= W_2^3 - W_1^2W_4 - \sum_{r>6}(A_6^7, A_6^8, A_6^9, A_6^{10}, A_6^{11}, A_6^{12}, A_6^{13}, A_6^{14}, A_6^{15}, A_6^{16}, A_6^{17}, A_6^{18}, A_6^{19}, a_6^{20}, A_6^{21}, \\
&\quad A_6^{23}, A_6^{24}, A_6^{26}, A_6^{27}, A_6^{30}, A_6^{33}) \\
G_{9,1} &= W_2^2W_5 - W_1W_4^2 - \sum_{r>9}(B_9^{10}, B_9^{11}, B_9^{12}, B_9^{13}, B_9^{14}, B_9^{15}, B_9^{16}, B_9^{17}, B_9^{18}, B_9^{19}, B_9^{20}, B_9^{21}, B_9^{23}, \\
&\quad B_9^{24}, B_9^{26}, B_9^{27}, B_9^{30}, B_9^{33}) \\
G_{12,1} &= W_4^3 - W_2^2W_8 - \sum_{r>12}(C_{12}^{13}, C_{12}^{14}, C_{12}^{15}, C_{12}^{16}, C_{12}^{17}, C_{12}^{18}, C_{12}^{19}, C_{12}^{20}, C_{12}^{21}, C_{12}^{23}, C_{12}^{24}, C_{12}^{26}, C_{12}^{27}, C_{12}^{30}, \\
&\quad C_{12}^{33})
\end{aligned}$$

Portanto teremos as seguintes sizígeas:

$$
\begin{aligned}
H_9 &= W_5G_{12} + W_8G_9 - W_4^2F_{9,1} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_4 \\
H_{10} &= W_4G_6 - W_1G_{9,1} - W_2^2F_{6,1} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_4 \\
H_{11} &= W_8G_{6,1} + W_2G_{12} - W_4^2F_{6,1} - W_1W_4F_{9,1} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_4 \\
H_{12} &= W_2G_9 - W_5G_{6,1} + W_1W_4F_{6,1} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_4 \\
H_{13} &= W_1G_{12,1} + W_4G_9 + W_2^2F_{9,1} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_4 \\
H_{14} &= W_2G_{12,1} + W_5G_{9,1} - W_4^2F_{6,1} - W_2^2F_{10,1} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_4 \\
H_{15} &= W_5G_{12,1} + W_{11}G_{6,1} - W_4^2F_9 + W_2^2F_{13,1} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_4 \\
H_{16} &= W_8G_{12} + W_{11}G_9 + W_2^2F_{16} + W_4^2F_{12} \equiv 0 \, mod \, \Lambda_4
\end{aligned}
$$

Após alguns cálculos isto pode ser explicitado dizendo-se que estas últimas formas cúbicas $G_{s,1}$ dependem cada uma de 15 constantes. Todavia, ainda podemos normalizar 4 coeficientes de pesos 1,3,4 e 7, respectivamente. Escolhemos então $C_{12}^{13} = C_{12}^{15} = C_{12}^{16} = C_{12}^{19} = 0$. Como consequência das relações obtidas, obtemos também que $B_9^{10} = B_9^{12} = B_9^{13} = B_9^{16} = 0$ assim como $A_6^7 = A_6^9 = A_6^{10} = A_6^{13} = 0$.

$$
\begin{aligned}
G_{6,1} &= W_2^3 - W_1^2W_4 - \sum_{r>6}(A_6^8, A_6^{11}, A_6^{12}, A_6^{14}, A_6^{15}, A_6^{17}, A_6^{18}, A_6^{20}, A_6^{21}, A_6^{24}, A_6^{27}) \\
G_{9,1} &= W_2^2W_5 - W_1W_4^2 - \sum_{r>9}(B_9^{11}, B_9^{14}, B_9^{15}, B_9^{17}, B_9^{18}, B_9^{20}, B_9^{21}, B_9^{23}, B_9^{24}, B_9^{27}, B_9^{30}) \\
G_{12,1} &= W_4^3 - W_2^2W_8 - \sum_{r>12}(C_{12}^{14}, C_{12}^{17}, C_{12}^{18}, C_{12}^{20}, C_{12}^{21}, C_{12}^{23}, C_{12}^{24}, C_{12}^{26}, C_{12}^{27}, C_{12}^{30}, C_{12}^{33})
\end{aligned}
$$

Restando somente 11 coeficientes distintos nas cúbicas relacionados entre si da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&A_6^8 = B_9^{11} = -C_{12}^{14}, A_6^{11} = B_9^{14} = -C_{12}^{17}, \\
&A_6^{12} = B_9^{15} = -C_{12}^{18}, A_6^{14} = B_9^{17} = -C_{12}^{20}, \\
&A_6^{15} = B_9^{18} = -C_{12}^{21}, A_6^{17} = B_9^{20} = -C_{12}^{23}, \\
&A_6^{18} = B_9^{21} = -C_{12}^{24}, A_6^{20} = B_9^{23} = -C_{12}^{26}, \\
&A_6^{21} = B_9^{24} = -C_{12}^{27}, A_6^{24} = B_9^{27} = -C_{12}^{30}, \\
&A_6^{27} = B_9^{30} = -C_{12}^{33}.
\end{aligned}
$$

Poderemos, finalmente, escrever as equações que seguem:

$$
\begin{aligned}
F_{6,1} &= W_2W_4 - W_1W_5\\
F_{9,1} &= W_1W_8 - W_4W_5\\
F_{10,1} &= W_5^2 - W_2W_8\\
F_{12,1} &= W_1W_{11} - W_4W_8\\
F_{13,1} &= W_5W_8 - W_2W_{11}\\
F_{16,1} &= W_8^2 - W_5W_{11}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{6,1} = \; & W_2^3 - W_1^2W_4 - A_6^8W_1W_2W_5 - A_6^{11}W_1W_5^2 - A_6^{12}W_2^2W_8 - A_6^{14}W_1W_2W_{11} - \\
& A_6^{15}W_2^2W_{11} - A_6^{17}W_1W_5W_{11} - A_6^{18}W_2W_5W_{11} - A_6^{20}W_1W_8W_{11} - A_6^{21}W_5^2W_{11} - \\
& A_6^{24}W_2W_{11}^2 - A_6^{27}W_5W_{11}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{9,1} = \; & W_2^2W_5 - W_1W_4^2 - A_6^8W_1W_2W_5 - A_6^{11}W_1W_5^2 - A_6^{12}W_2^2W_8 - A_6^{14}W_1W_2W_{11} - \\
& A_6^{15}W_2^2W_{11} - A_6^{17}W_1W_5W_{11} - A_6^{18}W_2W_5W_{11} - A_6^{20}W_1W_8W_{11} - A_6^{21}W_5^2W_{11} - \\
& A_6^{24}W_2W_{11}^2 - A_6^{27}W_5W_{11}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{12,1} = \; & W_4^3 - W_2^2W_8 + A_6^8W_1W_2W_5 + A_6^{11}W_1W_5^2 + A_6^{12}W_2^2W_8 + A_6^{14}W_1W_2W_{11} + \\
& A_6^{15}W_2^2W_{11} + A_6^{17}W_1W_5W_{11} + A_6^{18}W_2W_5W_{11} + A_6^{20}W_1W_8W_{11} + A_6^{21}W_5^2W_{11} + \\
& A_6^{24}W_2W_{11}^2 + A_6^{27}W_5W_{11}^2
\end{aligned}
$$

Concluímos que a variedade de moduli correspondente é o espaço $\mathbb{P}_K^{10}$.

Segundo [11], como era de se esperar, o ideal canônico não é gerado somente por formas quadráticas. Além disso, N é gerado por 3 e 7 = 6 + 1 onde $6 \not\equiv 2(mod\, 3)$, e a dimensão da variedade é $\frac{1}{2}(3+1)(7+1) - \left[\frac{7}{3}\right] - 4 = 10$. Novamente, vimos serem necessárias para a obtenção do ideal canônico $g - 3 = 3$ cúbicas.

Referências Bibliográficas

[1] Duarte, J.A. : *Teorema de Henriques-Petri*, Fortaleza, UFC, dissertação de mestrado, 2002.

[2] Fulton, W.: *Algebraic Curves, W. A. Benjamin*, New York, 1969.

[3] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag,1977.

[4] Miranda, R. : *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol.5, A.M.S., 1995.

[5] Mumford, D.: *Curves and Their Jacobians*, The University of Michigan Press, USA, 1978.

[6] Perrin, D. : *Géométrie Algébrique*, Savoirs Actuels, Paris, 1995.

[7] Rocha, F. L. : *Sobre o problema do moduli de curvas*, Rio de Janeiro, IMPA, tese de doutorado, série F-119/2.000.

[8] Santos, J. : *Um método para representar semigrupos numéricos simétricos*, dissertação de mestrado, Fortaleza, UFC,1999.

[9] Schreyer, F.O.: *A standard basis approach to syzygies of canonical curves*, Journal fiir die reine und angewandle mathematik, Walter de Gruyter Berlin, 421(1991), 83-123.

[10] Shafarevich, I. : *Basic Algebraic Geometry-Variets in projective space*, Springer-Verlage, volume 1, New York, 1997.

[11] Stöhr, K.O. : *On the module spaces of Gorenstein curves with symmetric Weierstrass semigroups*. Journal fiir die reine und angewandle mathematik,441(1993), 189-213.