

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TEDE FERNANDES MELO

**ESTRUTURAS NÃO TOPOLÓGICAS NO MODELO DO CAMPO ESCALAR**

FORTALEZA

2011

TEDE FERNANDES MELO

**ESTRUTURAS NÃO TOPOLÓGICAS NO MODELO DO CAMPO ESCALAR**

Trabalho de final de curso submetida à  
Coordenação do Curso de Graduação em  
Física da Universidade Federal do Ceará,  
como requisito para obtenção do grau de  
Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto  
Santos de Almeida

FORTALEZA

DEZEMBRO, 2011

TEDE FERNANDES MELO

## **ESTRUTURAS NÃO TOPOLÓGICAS NO MODELO DO CAMPO ESCALAR**

Esta monografia foi julgada para a obtenção do grau de Bacharel em Física, e aprovada em sua forma final pela Coordenação do Curso de Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará.

Aprovada em \_\_\_\_/\_\_\_\_/2011

### **BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará - UFC

---

Prof. Dr. Marcos Antônio Araújo Silva  
Universidade Federal do Ceará - UFC

---

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves  
Universidade Federal do Ceará - UFC

*Aos meus pais, José e Edileuza por ter me  
apoiado por todos esses anos de jornada.*

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, por todo o apoio, em especial, aos meus pais José Martins Fernandes e Edileuza Maria de Melo, que tão bem souberam me educar e ensinar os verdadeiros valores da vida.

Ao Prof. Dr Carlos Alberto Santos de Almeida, por ter me orientado nessa monografia, obrigado pela paciência e pela disponibilidade de ajudar.

Ao projeto de iniciação à docência (PID) por ter me acolhido como monitor de física durante dois anos e aos professores Marcos Antônio Araújo Silva e Nildo Loiola Dias por ter me orientado nos projetos de docência durante esse tempo.

Ao chefe do Departamento de Física, Prof. Dr. Josué Mendes Filho, pela sua completa dedicação à Universidade, seu desejo de fazer o Departamento de Física ser de primeiro mundo e dar toda uma estrutura de qualidade para o desenvolvimento dos projetos de pesquisa.

*“A firma aqui é fornecida  
fortemente.”*

*(Autor desconhecido)*

## RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo estudar soluções não topológicas descritas por um campo escalar real. No início dá uma base geral para tratar o formalismo geral de primeira ordem para descobrir as equações diferenciais responsáveis para determinar a função dos campos escalares, mostra as diferenças entre estruturas topológicas e não topológicas e suas peculiaridades para depois analisar os potenciais canônicos das estruturas não topológicas e ilustrar os gráficos do potencial, do campo e da densidade de energia para enriquecer mais a análise dessas estruturas. Após investigar os potenciais canônicos, dá-se início ao estudo dos potenciais modificados, que são pequenas modificações do modelo canônico na qual irão contribuir para diversificar mais as soluções não topológicas, ou tipo *lump*. Apesar das modificações serem feitas com um número restrito de parâmetros, a resolução dos problemas não terão a mesma simplicidade do caso canônico, tornando um verdadeiro desafio para a realização dos cálculos, por fim termina o trabalho nas considerações finais, onde será feito uma análise geral sobre a investigação.

## ABSTRACT

*This work aims to study non-topological solutions described by a real scalar field. At the beginning of a general basis for treating the general formalism to find the first order differential equations responsible for determining the function of the scalar fields, shows the differences between non-topological and topological structures and their peculiarities and then analyze the potential non-canonical structures of topological and charts illustrate the potential of the field energy density and more to enhance the analysis of these structures. After investigating the canonical potential, is initiated to study the modified potential, which are minor modifications of the canonical model in which will help to further diversify the solutions non-topological or lump type. Despite the changes being made with a limited number of parameters, the resolution of problems will not have the same simplicity of the canonical case, making a real challenge for the calculations; finally finish the job in the final considerations, which will be an overview on the investigation.*



## LISTA DE GRÁFICOS

|  |    |
|--|----|
| Gráfico 2.1 – Gráfico típico de um kink.....   | 20 |
| Gráfico 2.2 – Gráfico típico de um <i>lump</i> .....   | 21 |
| Gráfico 2.3: Gráfico do potencial no modelo $\phi^3$ .....   | 30 |
| Gráfico 2.4: Gráfico do campo $\phi$ no modelo $\phi^3$ canônico.....                                  | 33 |
| Gráfico 2.5: Gráfico da densidade de energia $\mathcal{E}(x)$ no modelo $\phi^3$ canônico.....         | 34 |
| Gráfico 2.6: Gráfico do potencial $V(\phi)$ no modelo $\phi^4$ inverso canônico.....                   | 38 |
| Gráfico 2.7: Gráfico do campo $\phi$ no modelo $\phi^4$ inverso canônico.....                          | 41 |
| Gráfico 2.8: Gráfico da densidade de energia $\mathcal{E}(x)$ no modelo $\phi^4$ inverso canônico..... | 42 |
| Gráfico 2.9: Gráfico do potencial $V(\phi)$ no modelo $\phi^4$ inverso modificado.....                 | 46 |
| Gráfico 2.10: Gráfico do campo $\phi$ no modelo $\phi^4$ inverso modificado.....                       | 51 |
| Gráfico 2.11: Gráfico de $\mathcal{E}_1(x)$ no modelo $\phi^4$ inverso modificado.....                 | 55 |
| Gráfico 2.12: Gráfico de $\mathcal{E}_2(x)$ no modelo $\phi^4$ inverso modificado.....                 | 55 |
| Gráfico 2.13: Gráfico de $\mathcal{E}_1(x)$ mostrando o parâmetro $a = 0.5$ (em verde).....            | 56 |
| Gráfico 2.14: Gráfico da energia total $E_1$ em função do parâmetro $a$ .....                          | 59 |
| Gráfico 2.15: Gráfico do potencial $V(\phi)$ no modelo $\phi^4$ modificado.....                        | 60 |
| Gráfico 2.16: Gráfico do campo $\phi_1(x)$ no modelo $\phi^4$ modificado.....                          | 64 |
| Gráfico 2.17: Gráfico do campo $\phi_2(x)$ no modelo $\phi^4$ modificado.....                          | 65 |
| Gráfico 2.18: Gráfico do campo $\phi_2(x)$ quando $c \rightarrow 1$ pela esquerda.....                 | 66 |
| Gráfico 2.19: Gráfico do campo $\phi_1(x)$ quando $c \rightarrow 1$ pela direita.....                  | 67 |
| Gráfico 2.20: Gráfico da densidade de energia $\mathcal{E}_1(x)$ no modelo $\phi^4$ modificado.....    | 70 |

|   |    |
|---|----|
| Gráfico 2.21: Gráfico da densidade de energia $\mathcal{E}_2(x)$ no modelo $\phi^4$ modificado..... | 71 |
| Gráfico 2.22: Gráfico do potencial $V(\phi)$ no modelo $\phi^3$ modificado.....                     | 72 |
| Gráfico 2.23: Gráfico do campo $\phi(x)$ no modelo $\phi^3$ modificado.....                         | 74 |
| Gráfico 2.24: Gráfico da densidade de energia $\mathcal{E}(x)$ no modelo $\phi^3$ modificado.....   | 76 |

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

KdV- Iniciais dos nomes dos cientistas Diederik Korteweg e Gustav de Vries, que desenvolveram modelos matemáticos de ondas na superfície da água em 1895.

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO.....</b>   | <b>13</b> |
| <b>2. FORMALISMO MATEMÁTICO.....</b>                                    | <b>14</b> |
| <b>2.1 Formalismo Geral de Primeira ordem para o campo escalar.....</b> | <b>14</b> |
| <b>2.2 Potenciais Canônicos.....</b>                                    | <b>29</b> |
| <b>2.2.1 Modelo <math>\phi^3</math> canônico.....</b>                   | <b>30</b> |
| <b>2.2.2 Modelo <math>\phi^4</math> inverso canônico.....</b>           | <b>38</b> |
| <b>2.3 Potenciais modificados.....</b>                                  | <b>45</b> |
| <b>2.3.1 Modelo <math>\phi^4</math> inverso modificado.....</b>         | <b>45</b> |
| <b>2.3.2 Modelo <math>\phi^4</math> modificado.....</b>                 | <b>60</b> |
| <b>2.3.3 Modelo <math>\phi^3</math> modificado.....</b>                 | <b>72</b> |
| <b>3. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>                                     | <b>77</b> |
| <b>4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>                               | <b>78</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

Soluções de natureza não topológica são de grande importância em várias áreas da física, pois a mesma tem gráficos de forma bem peculiar, lembrando um contorno de sino. Esse perfil não topológico é visto, por exemplo, na solução da equação KdV, que é uma equação diferencial não linear que modela matematicamente ondas rasas na água, são também de grande interesse na física da matéria condensada, pois são estudados nos modelos do fenômeno de transporte de cargas em cadeias diatômicas, na comunicação ótica, descrevendo sólitons em fibras e em vários contextos na física de altas energias, como branas taquiônicas, *q-balls* e propriedades da matéria escura das galáxias.

Esse trabalho foi feito para modelar matematicamente essas soluções não topológicas, começando com o desenvolvimento do formalismo de primeira ordem, onde começa o estudo explicitando a equação de campo para o caso do campo escalar para depois analisar os potenciais canônicos, que são relatados em muitas literaturas sobre a teoria de campos relativística e áreas correlatas. Após isso, discute-se a forma gráfica do potencial e investiga-se o comportamento dos campos, assim como é examinado também o comportamento da função densidade de energia. Com a ilustração dos potenciais canônicos, analisam-se novos modelos, que nada mais são do que modificações na forma dos potenciais vistos, dando uma nova gama de soluções não topológicas, com leves mudanças no seu perfil gráfico.

## 2. FORMALISMO MATEMÁTICO

Para melhor compreensão do assunto abordado nesse trabalho, terá que ter um breve conhecimento sobre áreas distintas da física para o melhor aproveitamento do conhecimento empregado nas seções abaixo, como relatividade restrita, ou especial, mecânica analítica e teoria clássica de campos, assim como ter um prévio conhecimento sobre álgebra tensorial.

### 2.1 Formalismo Geral de Primeira ordem para o campo escalar

A densidade lagrangiana do campo escalar é dada pela equação:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (1)$$

Onde  $V(\phi)$  é o potencial,  $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$  é o que se denomina na teoria de campos relativística de termo cinético, pois na mecânica analítica, a lagrangiana do sistema é definida como sendo  $L = T - V$ , onde  $T$  é a energia cinética do sistema, os símbolos  $\partial_\mu$  e  $\partial^\mu$  são definidos como:  $\partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  e  $\partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right)$  e  $\phi$  é o que se denomina de campo. O nosso objeto de estudo em questão é a equação de campo que é dado por essa lagrangiana, por isso usaremos a equação (1) na equação (2) que nada mais é do que o princípio de Hamilton para campos.

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L} d^4x = 0 \quad (2)$$

Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) d^4x \Rightarrow \\ \delta S &= \int \left[ \frac{1}{2} \delta(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - \delta V(\phi) \right] d^4x \end{aligned} \quad (3)$$

Onde os índices repetidos indicam soma, o símbolo  $\delta$  se comporta como uma derivada e tem propriedades análogas a mesma, portanto resolvendo os termos da equação (3), obtêm-se:

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) &= \partial^\mu\phi\delta(\partial_\mu\phi) + \partial_\mu\phi\delta(\partial^\mu\phi) \Rightarrow \\ \delta(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) &= \partial^\mu\phi\delta(\eta_{\mu\beta}\partial^\beta\phi) + \partial_\mu\phi\delta(\partial^\mu\phi) \Rightarrow \\ \delta(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) &= \eta_{\mu\beta}\partial^\mu\phi\delta(\partial^\beta\phi) + \partial_\mu\phi\delta(\partial^\mu\phi) \Rightarrow \\ \delta(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) &= \partial_\beta\phi\delta(\partial^\beta\phi) + \partial_\mu\phi\delta(\partial^\mu\phi)\end{aligned}\quad (4)$$

Onde  $\eta_{\mu\beta}$  é o que se chama de tensor métrico do espaço minkowskiano e as derivadas  $\partial_\mu$  podem ter os seus índices “levantados” segundo a relação  $\partial_\mu = \eta_{\mu\beta}\partial^\beta$ , ou abaixados, segundo a relação  $\partial^\beta = \eta_{\mu\beta}\partial_\mu$ .

Como na notação de Einstein o índice  $\beta$  é mudo (pois representa uma soma sobre  $\beta$ ), podemos mudar a letra para qualquer outra que quiser, logo, faz-se a mudança  $\beta \rightarrow \mu$  para ficar da mesma forma que o segundo termo da equação (4), por fim, a equação (4) assume a forma:

$$\delta(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) = 2\partial_\mu\phi\delta(\partial^\mu\phi)\quad (5)$$

Por fim, o símbolo  $\delta$  pode comutar com a derivada parcial  $\partial^\mu$ , resultando na equação:

$$\delta(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) = 2\partial_\mu\phi\partial^\mu(\delta\phi)\quad (6)$$

O termo  $\delta V(\phi)$  da equação (3) terá que usar a noção da regra da cadeia da derivação, portanto:

$$\delta V(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}\delta\phi\quad (7)$$

Usando as equações (6) e (7) na equação (3), temos o seguinte:

$$\delta S = \int \left[ \partial_\mu\phi\partial^\mu(\delta\phi) - \frac{dV(\phi)}{d\phi}\delta\phi \right] d^4x\quad (8)$$

Agora, fazendo uma integração por partes em (8), isola-se o termo  $\delta\phi$  restando:

$$\delta S = \int \left[ \partial^\mu (\partial_\mu \phi \delta\phi) - \partial_\mu \partial^\mu \phi \delta\phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} \delta\phi \right] d^4x \Rightarrow$$

$$\delta S = \int \partial^\mu (\partial_\mu \phi \delta\phi) d^4x - \int \left( \partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right) \delta\phi d^4x \quad (9)$$

A integral  $\int \partial^\mu (\partial_\mu \phi \delta\phi) d^4x$  tem valor zero na fronteira da superfície quadridimensional, pelo mesmo raciocínio empregado no princípio de Hamilton da mecânica analítica, quando tinha a condição necessária que nos valores extremos, o valor de  $\delta\phi$  fosse igual a zero, logo resta apenas o segundo termo da equação (9). Como o princípio de Hamilton diz que  $\delta S = 0$ , usa-se na ação descrita em (9), obtendo finalmente a equação de campo, que será de fundamental importância para começar a investigação:

$$\int \left( \partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right) \delta\phi d^4x = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (10)$$

Como  $\delta\phi$  tem um valor arbitrário, a condição para a integral ser zero é que a condição explicitada em (10) seja verdadeira. A equação (10) é a equação de campo desejada. Para fins de facilitar o cálculo, consideramos o campo  $\phi$  como função apenas de uma coordenada espacial,  $x$ , e da coordenada temporal,  $t$ , com isso as derivadas  $\partial_\mu$  e  $\partial^\mu$  serão escritas de forma mais simples, pois terão apenas duas coordenadas – uma espacial e uma temporal – que é denominado de campo escalar de (1,1) dimensões.

Usando  $\partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$  e  $\partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x} \right)$  na equação (10), tem-se a equação de campo em uma forma mais clara:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x} \right) \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \Rightarrow$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}, -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (11)$$



Essa equação tem a mesma forma matemática de uma equação de onda, por isso que as soluções estudadas aqui serão de grande importância, pois no eletromagnetismo, em mecânica dos fluidos, no estudo de vibrações mecânicas são vistas equações dessa forma, portanto, descrever um modelo para a obtenção de uma solução para esse tipo de equação é de suma importância, não apenas para a teoria de campos relativística, mas também para outras áreas da física.

Suponha que  $\phi$  é um campo estático, ou seja, não depende explicitamente do tempo, assim o primeiro termo da equação (10) será:

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

Assim, a equação (11) assume uma forma mais simples de se resolver analiticamente:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 \phi}{dx^2} &= \frac{dV(\phi)}{d\phi} \end{aligned} \quad (13)$$

A equação (13) uma equação diferencial não linear, pois o potencial  $V(\phi)$  pode ser qualquer função, esse trabalho trata um número reduzido de potenciais  $V(\phi)$  que tem interesse físico principal na área da teoria quântica de campos, potenciais esses que serão estudados mais tarde, em uma seção separada.

Para facilitar o cálculo da expressão, pode-se multiplicar em ambos os lados da equação (13) por um fator que servirá de bom grado ambas as funções, com isso obtemos de (13):

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} \frac{d^2 \phi}{dx^2} &= \frac{dV(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\phi}{dx} \frac{d\phi}{dx} \right) &= \frac{dV(\phi)}{dx} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \int \frac{d}{dx} \left( \frac{d\phi}{dx} \frac{d\phi}{dx} \right) dx &= \int \frac{dV(\phi)}{dx} dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V(\phi) + C' \Rightarrow$$

$$\left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = 2V(\phi) + C \Rightarrow$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi) + C} \quad (14)$$

Onde  $C$  é uma constante real de integração.

Para descobrirmos o valor da constante de integração, tem que se ter conhecimento de outra grandeza, a energia do campo, que é determinado usando-se o teorema de Noether, mas, como a densidade lagrangiana do campo escalar é simples, dá para usar um argumento convincente sobre a determinação da energia desse campo, sem precisar do teorema citado.

No formalismo hamiltoniano da mecânica clássica, determina-se o conceito de energia simplesmente fazendo a soma das energias cinética e potencial, ou seja,  $H = K + V$  em boa parte dos casos, no formalismo da teoria de campos relativística não será diferente, então teremos uma densidade de energia (assim como tem-se uma densidade lagrangiana descrito anteriormente, terá agora uma densidade de energia, que nada mais é do que a *densidade hamiltoniana* para o campo escalar) que é definida como sendo:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi) \quad (15)$$

No caso aqui abordado, a densidade de energia é definida como sendo:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \quad (16)$$

De forma análoga à densidade lagrangiana, a densidade de energia tem as contribuições da parte cinética e da parte potencial e a equação (16) é praticamente idêntica à equação (1), exceto pelo sinal de positivo no potencial.

A energia total do campo é dada integrando a densidade de energia em todo o espaço, como no caso abordado é unidimensional, a energia é dada pela expressão:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} dx \Rightarrow$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right) dx \quad (17)$$

Olhando para a equação (17), se nota que a parte cinética não poderá divergir no infinito, pois não teria nenhum sentido físico em falar de campos com energia infinita, para contornar esse problema de cunho físico, tem-se uma condição de contorno importante que se segue:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{d\phi}{dx} \right) \rightarrow 0 \quad (18)$$

As outras condições de contorno tem-se que ver o comportamento do potencial  $V(\phi)$  para termos outras informações relevantes.

Suponha que o potencial tenha um conjunto de “ $n$ ” pontos críticos,  $\{\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_n\}$ , tais que:

$$\frac{dV(\bar{\phi}_i)}{dx} = 0 \quad (19)$$

e

$$V(\bar{\phi}_i) = 0 \quad (20)$$

Para  $i = 1, 2 \dots, n$ .

A presença desse conjunto de pontos críticos permite distinguir dois tipos de estruturas diferentes: um tipo é chamado de estruturas topológicas, ou estruturas tipo *kink*, que geralmente conecta dois pontos críticos distintos, mas adjacentes,  $\bar{\phi}_i$  e  $\bar{\phi}_{i+1}$ , com as condições de contorno obedecendo a seguinte situação:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) \rightarrow \bar{\phi}_i \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) \rightarrow \bar{\phi}_{i+1} \quad (22)$$

O outro tipo é chamado de estruturas não topológicas, ou estruturas tipo *lump*, que geralmente requer apenas um único ponto crítico, com as condições de contorno sendo da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \rightarrow \bar{\phi}_i \quad (23)$$

Para melhor visualização desses pontos críticos, têm-se dois gráficos para melhor ilustração de como são esses pontos: no gráfico 2.1 relata o comportamento do campo na estrutura topológica, ou *kink*, e no gráfico 2.2 mostra o comportamento do campo na estrutura não topológica, ou *lump*.

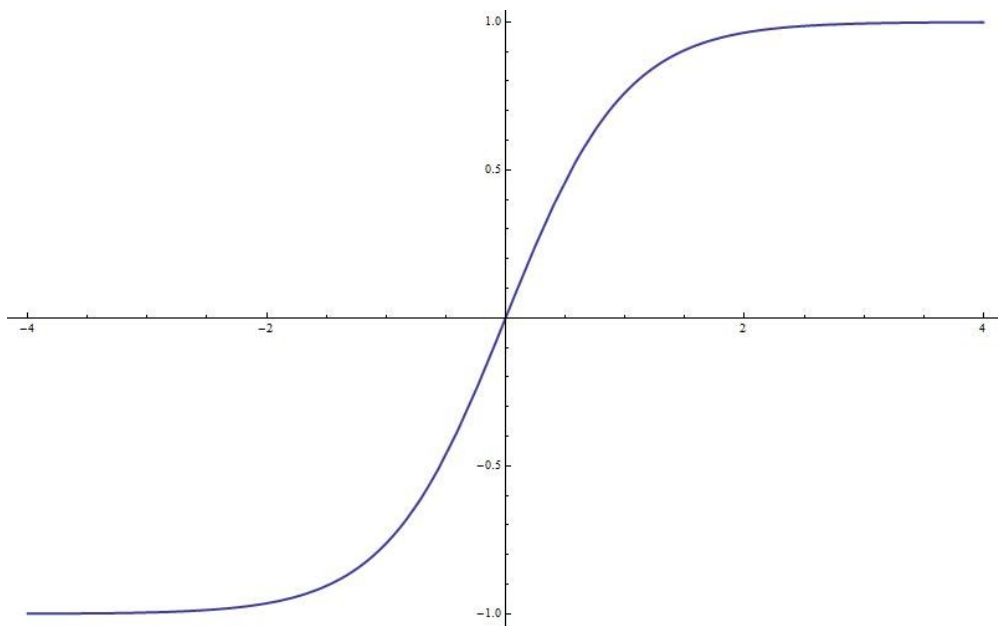


Gráfico 2.1 – Gráfico típico de um *kink*.

No gráfico 2.1, é ilustrado o comportamento do gráfico do campo (eixo vertical) em relação à coordenada espacial (eixo horizontal) em uma estrutura do tipo *kink*. Aqui se vê claramente que, quando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\bar{\phi}_1 = 1$ , já quando  $x \rightarrow -\infty$ , o valor do campo é  $\bar{\phi}_2 = -1$ .

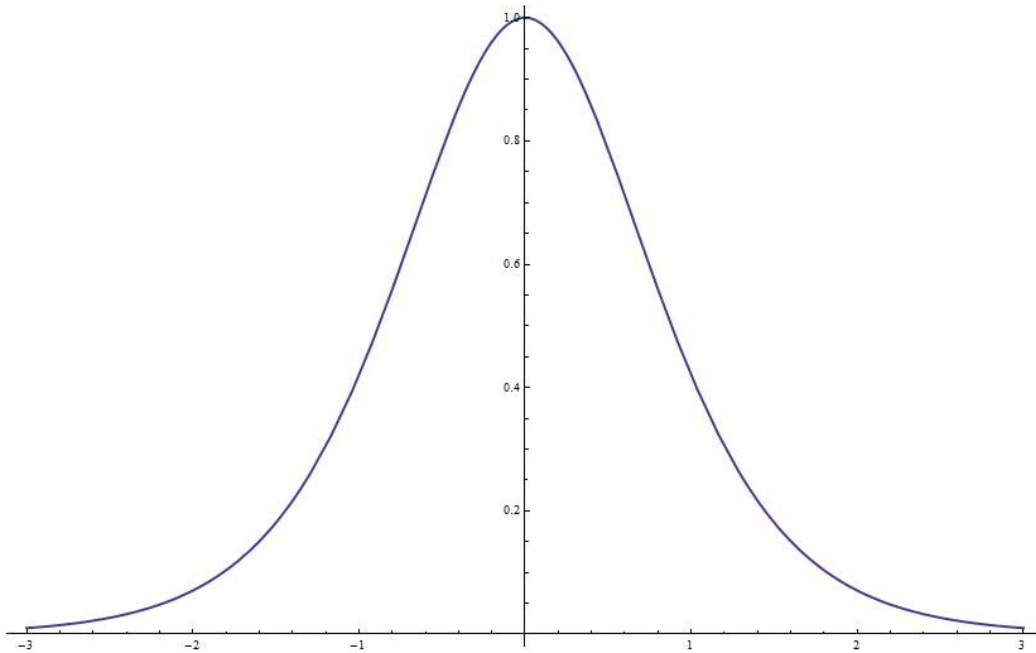


Gráfico 2.2 – Gráfico típico de um *lump*.

Agora no gráfico 2.2, exibe o comportamento do gráfico do campo (eixo vertical) em relação à coordenada espacial (eixo horizontal) em uma estrutura do tipo *lump*. Aqui se vê que, quando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\bar{\phi}_1 = 0$ , mas diferentemente do *kink*, quando  $x \rightarrow -\infty$ , o valor do campo nessa condição também é zero.

Com base nessas informações, usamos a equação (14) na condição de contorno (18), para determinação da constante de integração.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{d\phi}{dx} \right) &= \pm \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2V(\phi) + C} \Rightarrow \\ 0 &= \pm \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2V(\phi) + C} \Rightarrow \\ 0 &= \pm \sqrt{2 \lim_{x \rightarrow \infty} V(\phi) + C} \Rightarrow \\ 0 &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} V(\phi) + C \end{aligned} \quad (24)$$

Quando  $x$  tende ao infinito, o valor do campo tanto as estruturas tipo *kink* ou do tipo *lump* vão para os pontos críticos, por isso, usando a equação (20) na equação (24), obtemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} V(\phi) = V(\bar{\phi}_i) = 0 &\Rightarrow \\ 2V(\bar{\phi}_i) + C = 0 &\Rightarrow \\ C = 0 &\end{aligned} \quad (25)$$

Portanto, a equação (14) é definida como sendo:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)} \quad (26)$$

Têm-se agora duas equações diferenciais de primeira ordem em (26), uma com o sinal positivo, e a outra com o sinal negativo. Como temos duas estruturas distintas para tratar, tem-se que fazer considerações com certa cautela, pois há uma sensível diferença entre as duas estruturas, que será tratado de forma concisa cada uma delas aqui.

As soluções topológicas, ou soluções dos *kinks* são funções monotônicas da variável espacial  $x$ , por isso a sua derivada não muda de sinal em nenhum ponto de  $x$ , e por isso, cada equação diferencial de (26) (a primeira com o sinal positivo, e a segunda com o sinal negativo) dá duas soluções distintas, que se denomina *kink* (para a equação diferencial com o sinal positivo) e *anti-kink* (para a equação diferencial com o sinal negativo).

Entretanto, as soluções não topológicas, ou soluções tipo *lump* não são tão simples de se tratar, pois essas soluções não são monotônicas (como foi visto no gráfico 2.1, que a forma gráfica do *lump* tem semelhança com uma função gaussiana) de modo que as suas derivadas mudam de sinal em um ponto  $x_0$  arbitrário, como o campo escalar tem a propriedade de ser um campo que é invariante sob uma transformação de Lorentz e invariante sob translações, podemos transladar o ponto arbitrário  $x_0$  para o ponto zero, ou seja,  $x_0 = 0$  para obter maior simplicidade, assim, a derivada das soluções tipo *lump* muda de sinal no ponto  $x = 0$ , e por isso a equação (26) será compreendida como sendo:

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V(\phi)} \quad (27)$$

Se  $x > 0$ ,

$$\frac{d\phi}{dx} = -\sqrt{2V(\phi)} \quad (28)$$

Se  $x < 0$ , porém podemos ter o caso inverso, ou seja:

$$\frac{d\phi}{dx} = -\sqrt{2V(\phi)} \quad (29)$$

Se  $x > 0$ ,

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V(\phi)} \quad (30)$$

Se  $x < 0$ .

A relação entre os pares de equações descritos acima pode ser compreendida usando o conceito de simetria de reflexão: os dois pares de equações serão requeridos para a resolução do problema quando o modelo tiver simetria de reflexão, caso contrário, precisará apenas de um único par de equações para se determinar as soluções.

O fato das soluções dos *kinks* serem funções monotônicas induz uma característica muito importante quando leva para o contexto da mecânica quântica: por causa dessa propriedade, a hamiltoniana quântica do sistema não terá autovalores negativos, fazendo assim estruturas quânticas estáveis, já no caso não topológico é diferente: por causa das soluções dos *lumps* não serem funções monotônicas, o problema quântico irá produzir um modo zero com um nó no centro da estrutura, mostrando que no sistema tem, no mínimo, um estado ligado com energia negativa, na qual induz a instabilidade no sistema.

Por causa dessa monotonicidade das funções dos *kinks*, pode-se fazer uma seguinte suposição: imagina a função  $V(\phi)$  escrita em termos de outra função  $W(\phi)$ , de modo que teremos a seguinte situação:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{2} W_\phi^2 \quad (31)$$

Supondo essa seguinte situação, a equação (26) fica:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2 \frac{1}{2} W_\phi^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi \quad (32)$$

Com o sinal positivo para o *kink* e o sinal de negativo para o *anti-kink*. Com a equação (32) dá para se fazer uma importante consideração na equação que calcula a energia de um campo escalar, substituindo as equações (31) e (32) na equação da energia (17), temos:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} (\pm W_\phi)^2 + \frac{1}{2} W_\phi^2 \right) dx \Rightarrow$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} W_\phi^2 dx \Rightarrow$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} W_\phi W_\phi dx \quad (33)$$

Em (32) podemos fazer a seguinte consideração:

$$d\phi = \pm W_\phi dx \quad (34)$$

Usando a equação (34) na equação (33), temos a seguinte situação:

$$E = \pm \int_{-\infty}^{\infty} W_\phi d\phi \quad (35)$$

Como,

$$W_\phi = \frac{dW}{d\phi} \quad (36)$$

Substitui-se (36) em (35), resultando:

$$E = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{d\phi} d\phi \Rightarrow$$

$$E = \pm \int_{-\infty}^{\infty} dW \Rightarrow$$



$$E = |W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))| \quad (37)$$

O módulo que aparece na equação (37) é para garantir que a energia do *kink* seja positiva e que independa da escolha da equação (34).

A forma do potencial (12) foi importante para se determinar a energia de um *kink* de um modo simples e direto, não dependendo das soluções explícitas dos campos, como é requisitado geralmente em outros campos mais complexos, e também para levar a um resultado importante no contexto da mecânica quântica: no estudo de estabilidade clássica ou linear, geralmente se obtêm uma hamiltoniana do tipo da hamiltoniana de Schrodinger, onde:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \quad (38)$$

Em setores topológicos, a função  $U(x)$  é definida como sendo:

$$U(x) = \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \quad (39)$$

Onde  $V(\phi)$  é o potencial de uma estrutura topológica. Como  $V(\phi)$  foi definido lá na equação (31) em função de uma outra função,  $W(\phi)$ , portanto, a equação (39) fica:

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{d^2}{d\phi^2} \left( \frac{1}{2} W_\phi^2 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow U(x) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\phi^2} (W_\phi \cdot W_\phi) \Rightarrow \\ \Rightarrow U(x) &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\phi} \left[ \frac{d}{d\phi} (W_\phi \cdot W_\phi) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow U(x) &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\phi} \left[ W_\phi \frac{d}{d\phi} (W_\phi) + W_\phi \frac{d}{d\phi} (W_\phi) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow U(x) &= \frac{d}{d\phi} \left[ W_\phi \frac{d}{d\phi} (W_\phi) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U(x) = \frac{d}{d\phi}(W_\phi) \frac{d}{d\phi}(W_\phi) + W_\phi \frac{d^2}{d\phi^2}(W_\phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(x) = \left( \frac{d}{d\phi}(W_\phi) \right)^2 + W_\phi \frac{d^2}{d\phi^2}(W_\phi) \quad (40)$$

Definindo:

$$\frac{d}{d\phi}(W_\phi) = W_{\phi\phi} \quad (41)$$

Para a derivada primeira em  $\phi$ , e:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}(W_\phi) = W_{\phi\phi\phi} \quad (42)$$

Para melhor compactação, e substituindo as equações (41) e (42) na equação (40), temos que o potencial  $U(x)$  será:

$$U(x) = (W_{\phi\phi})^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} \quad (43)$$

Então, a estabilidade linear de uma solução topológica está conectada com o comportamento de  $W_{\phi\phi}$  no setor topológico onde  $\phi = \phi(x)$ , isso é mais visualizável da seguinte forma: para soluções que resolvem as equações diferenciais de primeira ordem, explicitado em (32), usa-se a hamiltoniana (38) para escrever a expressão:

$$H = SS^\dagger \quad (44)$$

Onde os operadores de primeira ordem  $S^\dagger$  e  $S$  são definidos como segue para o *kink*:

$$S^\dagger = \frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \quad (45)$$

$$S = -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \quad (46)$$

E para o *anti-kink*, tem-se que:

$$S^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \quad (47)$$

$$S = \frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \quad (48)$$

De acordo com convenções adotadas por várias literaturas, assim a hamiltoniana  $H$  é positiva, e isso prova que o sistema não suporta estados ligados, com autovalores negativos, fato que já tinha sido comentado anteriormente, mas de forma superficial.

Essa análise, porém, não é possível para soluções não topológicas, ou soluções dos *lumps* em geral, entretanto, pode-se mudar esse fato, mudando a forma de investigação dessas soluções, para isso, têm que investigar essas mesmas separadamente, estudar as soluções no domínio de  $x$  positivo separadamente do domínio de  $x$  negativo, se vê claramente que as soluções se comportam como uma função monotônica nessas regiões, assim, para  $x$  positivo ou para  $x$  negativo, o perfil não topológico é similar ao perfil topológico, e, portanto pode-se introduzir a função  $W(\phi)$  para o caso não topológico, usando a definição (31) nas equações diferenciais (27), (28), (29) e (30), as equações serão modificadas para  $x > 0$  tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{d\phi}{dx} = W_{\phi} \quad (49)$$

Para  $x < 0$ , obtêm-se a outra expressão:

$$\frac{d\phi}{dx} = -W_{\phi} \quad (50)$$

Porém, podemos ter o caso inverso já discutido anteriormente, ou seja, para  $x > 0$ :

$$\frac{d\phi}{dx} = -W_{\phi} \quad (51)$$

E para  $x < 0$ :

$$\frac{d\phi}{dx} = W_{\phi} \quad (52)$$

O cálculo da energia será feito de maneira análoga à que foi feita para o caso dos *kinks*, ou seja, usando a equação da energia (17) para calcular a energia das estruturas não topológicas, temos:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right) dx \Rightarrow \\
\Rightarrow E &= \int_{-\infty}^0 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right) dx + \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right) dx \quad (53)
\end{aligned}$$

Usando a equação (50) para a primeira integral da esquerda para a direita de (53), a equação (49) para a segunda integral de (53) e usando a equação (31), que mostra a relação de  $V(\phi)$  em termos de  $W(\phi)$ , tem-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^0 \left( \frac{1}{2} (W_\phi)^2 + \frac{1}{2} W_\phi^2 \right) dx + \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} (-W_\phi)^2 + \frac{1}{2} W_\phi^2 \right) dx \Rightarrow \\
\Rightarrow E &= \int_{-\infty}^0 W_\phi^2 dx + \int_0^{\infty} W_\phi^2 dx \Rightarrow \\
\Rightarrow E &= \int_{-\infty}^0 W_\phi W_\phi dx + \int_0^{\infty} W_\phi W_\phi dx \quad (54)
\end{aligned}$$

De maneira análoga, usam-se as equações (49) e (50) para descobrir uma forma importante para resolver essa integral, portanto, para  $x > 0$ :

$$d\phi = W_\phi dx \quad (55)$$

Se  $x < 0$ , tem-se outra expressão:

$$d\phi = -W_\phi dx \quad (56)$$

Usando as equações (55) e (56) na integral (54), tem-se que:

$$\begin{aligned}
E &= - \int_{-\infty}^0 W_\phi d\phi + \int_0^{\infty} W_\phi d\phi \Rightarrow \\
\Rightarrow E &= - \int_{-\infty}^0 \frac{dW}{d\phi} d\phi + \int_0^{\infty} \frac{dW}{d\phi} d\phi \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow E = - \int_{-\infty}^0 dW + \int_0^{\infty} dW \Rightarrow \\
&\Rightarrow E = -[W(\phi(0)) - W(\phi(-\infty))] + [W(\phi(\infty)) - W(\phi(0))] \Rightarrow \\
&\Rightarrow E = [W(\phi(-\infty)) - W(\phi(0))] + [W(\phi(\infty)) - W(\phi(0))] \Rightarrow \\
&\Rightarrow E = |W(\phi(-\infty)) - W(\phi(0))| + |W(\phi(\infty)) - W(\phi(0))| \quad (57)
\end{aligned}$$

Onde se coloca o módulo para não depender do par de equações que serve para deduzir a energia, pois se tivesse usado o par de equações (51) e (52), a expressão da energia teria ficado com os sinais trocados.

Essa dedução feita aqui é que se chama de formalismo de primeira ordem para estruturas não topológicas, ou estruturas tipo *lump*, há duas vantagens importantes nessa dedução sobre o procedimento usual: o primeiro é que dá para se calcular a energia de uma maneira simples e direta, pois não depende da forma explícita das soluções dos campos, a segunda vantagem é que se trata de equações diferenciais de primeira ordem, que são mais simples de se calcular do que as equações diferenciais de segunda ordem, que é requerida nos procedimentos usuais quando se quer obter resultados.

Com esse formalismo de primeira ordem estabelecido, mostra-se como ele funciona investigando primeiramente alguns potenciais já descritos pela literatura, que se denomina aqui de potenciais canônicos, após isso, darão início ao estudo dos potenciais modificados, que nada mais são do que alterações na forma do potencial canônico.

## 2.2 Potenciais canônicos

Denominam-se nesse trabalho de potenciais canônicos os potenciais que são estudados nas literaturas sobre a área de teoria de campos, ou seja, são funções conhecidas e servirá como base para mostrar o formalismo de primeira ordem e para analisar as soluções aqui calculadas, através de gráficos e mostrar como se comportam

as estruturas não topológicas, para isso, considera-se primeiramente o modelo  $\phi^3$ , depois se usa o modelo  $\phi^4$  inverso para analisar.

### 2.2.1 Modelo $\phi^3$ canônico

O modelo  $\phi^3$  é descrito pelo potencial:

$$V(\phi) = 2\phi^2(1 - \phi) \quad (58)$$

Onde o gráfico desse potencial está descrito no gráfico 2.3 abaixo.

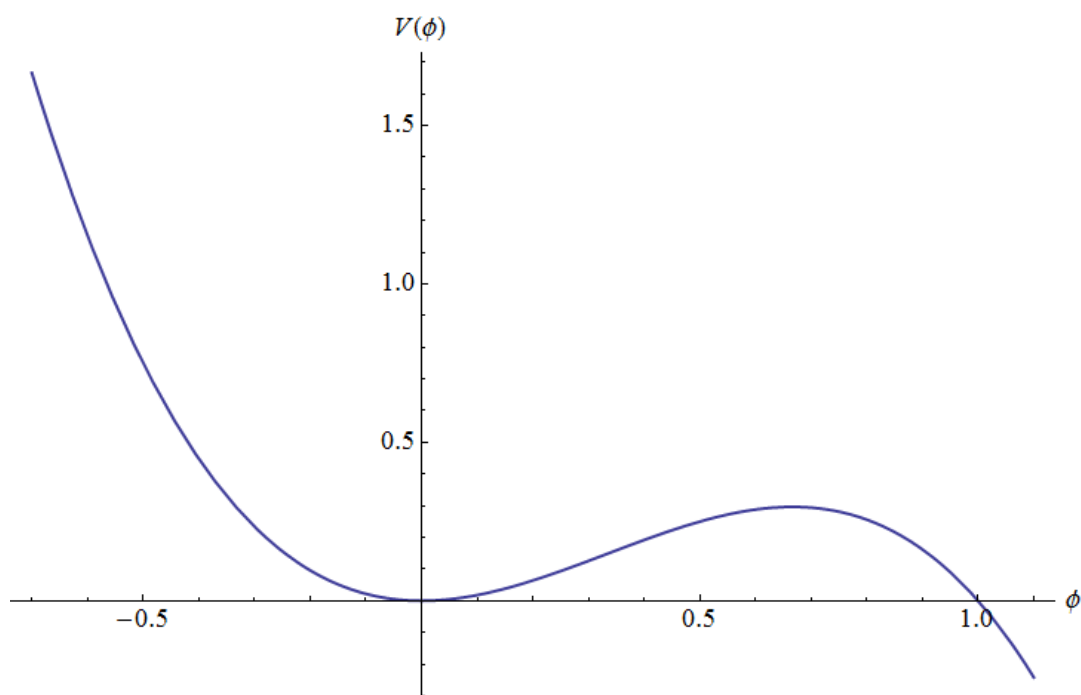


Gráfico 2.3: Gráfico do potencial no modelo  $\phi^3$ .

Esse potencial não tem simetria de reflexão, portanto precisa-se apenas de um dos dois pares de equações para se obter o valor do campo.

O valor da coordenada  $x$  (eixo horizontal) tem dois zeros, um no ponto  $x = 0$  e em  $x = 1$ . Usando a equação (31) para saber o valor de  $W_\phi$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}
V(\phi) = 2\phi^2(1 - \phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 &\Rightarrow \\
\Rightarrow 4\phi^2(1 - \phi) = W_\phi^2 &\Rightarrow \\
\Rightarrow W_\phi = 2\phi\sqrt{(1 - \phi)} &\quad (59)
\end{aligned}$$

Com o valor de  $W_\phi$  calculado na equação (59), substituí no par de equações (51) e (52), para achar o valor do campo, por isso tem-se a seguinte situação, para  $x > 0$ :

$$\frac{d\phi}{dx} = -2\phi\sqrt{(1 - \phi)} \quad (60)$$

E para  $x < 0$ ,

$$\frac{d\phi}{dx} = 2\phi\sqrt{(1 - \phi)} \quad (61)$$

Para calcular a equação diferencial, escolhe a equação (60), como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dx} = -2\phi\sqrt{(1 - \phi)} &\Rightarrow \\
\Rightarrow -\frac{d\phi}{2\phi\sqrt{(1 - \phi)}} = dx &\Rightarrow \\
\Rightarrow -\int \frac{d\phi}{2\phi\sqrt{(1 - \phi)}} = \int dx &\quad (62)
\end{aligned}$$

Fazendo  $\phi = \operatorname{sech}^2(u)$ , o diferencial  $d\phi$  será:

$$\phi = \operatorname{sech}^2(u) \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{du} = \frac{d}{du}[\operatorname{sech}^2(u)] &\Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d\phi}{du} = 2\operatorname{sech}(u) \frac{d}{du}[\operatorname{sech}(u)] &\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\phi}{du} &= -2\operatorname{sech}^2(u) \tanh(u) \Rightarrow \\ \Rightarrow d\phi &= -2\operatorname{sech}^2(u) \tanh(u) du \end{aligned} \quad (64)$$

Substituindo as equações (63) e (64) na integral (62), fica:

$$\int \frac{2\operatorname{sech}^2(u) \tanh(u)}{2\operatorname{sech}^2(u) \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(u)}} du = x + x_0 \quad (65)$$

Da relação fundamental das funções hiperbólicas, descobre-se que:

$$1 - \operatorname{sech}^2(u) = \tanh^2(u) \quad (66)$$

Sabendo disso, substitui a equação (66) em (65), como segue:

$$\begin{aligned} \int \frac{\tanh(u)}{\sqrt{\tanh^2(u)}} du &= x + x_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int du &= x + x_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= x + x_0 \end{aligned} \quad (67)$$

Como já foi discutido na página 22, pela invariância translacional da teoria pode-se considerar que  $x_0 = 0$ , portanto, substituindo a equação (67) na equação (63), temos o valor do campo  $\phi$ :

$$\phi = \operatorname{sech}^2(x) \quad (68)$$

Se usasse a equação (60), o procedimento de cálculo seria o mesmo, a única coisa que mudaria na equação (67) era um sinal negativo, ou seja:

$$-u = x + x_0 \quad (69)$$

Fazendo novamente a constante  $x_0 = 0$ , e substituindo a equação (69) na equação (63), o valor do campo será:

$$\phi = \operatorname{sech}^2(-x) \quad (70)$$



Porém, a função secante hiperbólica é uma função par, portanto a equação (70) é idêntica à equação (68), facilitando muito o estudo analítico do campo. O gráfico do campo é explicitado no gráfico 2.4.

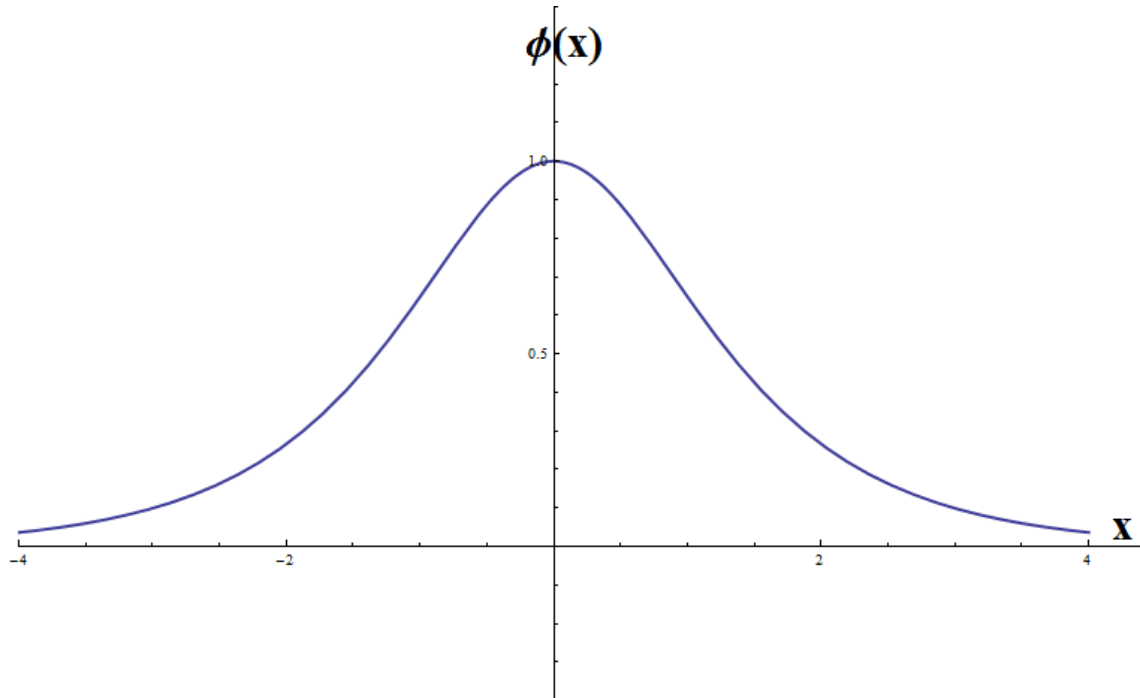


Gráfico 2.4: Gráfico do campo  $\phi$  no modelo  $\phi^3$  canônico

Esse gráfico mostra bem as soluções das estruturas não topológicas, pois mostra que o valor do campo  $\phi$  vai para zero tanto para  $x \rightarrow \infty$ , quanto para  $x \rightarrow -\infty$ , provando a condição de contorno definida em (23).

Agora com o valor do campo, calcula-se agora a densidade de energia  $\mathcal{E}$  definido na equação (16), porém, usando a equação (26) na equação da densidade de energia, temos uma forma bem mais simples de se calcular  $\mathcal{E}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \left( \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 + V(\phi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= \frac{1}{2} 2V(\phi) + V(\phi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{E}(x) &= 2V(\phi(x)) \end{aligned} \tag{71}$$

Portanto, basta substituir o valor do campo encontrado  $\phi$  no potencial (58) para obter a densidade de energia  $\mathcal{E}(x)$ , como segue:

$$\begin{aligned} V(x) &= 2(\operatorname{sech}^2(x))^2(1 - \operatorname{sech}^2(x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow V(x) &= 2 \operatorname{sech}^4(x) (1 - \operatorname{sech}^2(x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow V(x) &= 2 \operatorname{sech}^4(x) - 2 \operatorname{sech}^6(x) \end{aligned} \quad (72)$$

Descoberto o valor do potencial  $V(x)$ , substitui na equação da densidade de energia para obter:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= 2[2 \operatorname{sech}^4(x) - 2 \operatorname{sech}^6(x)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{E}(x) &= 4 \operatorname{sech}^4(x) - 4 \operatorname{sech}^6(x) \end{aligned} \quad (73)$$

Abaixo está o gráfico da densidade de energia descrita no modelo  $\phi^3$  canônico:

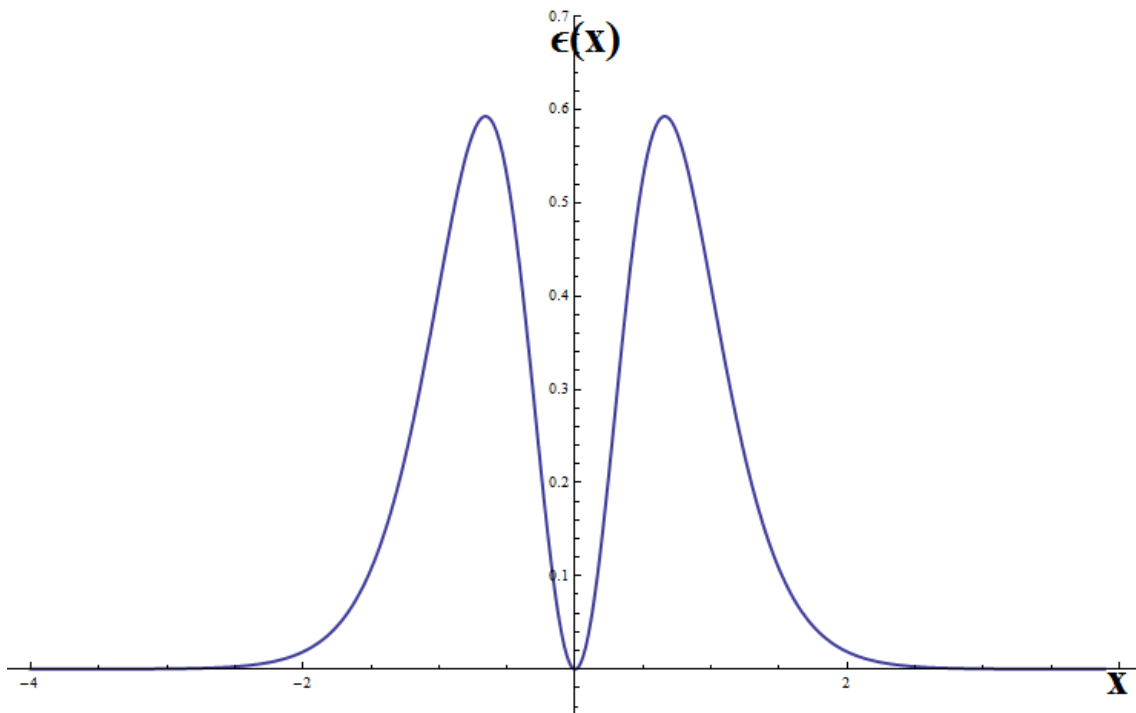


Gráfico 2.5: Gráfico da densidade de energia  $\mathcal{E}(x)$  no modelo  $\phi^3$  canônico.

Esse gráfico da densidade de energia é típico de estruturas não topológicas, aparecendo dois picos estilo gaussiana, aqui se vê um fato interessante: se o valor de  $x$  for para mais ou menos infinito, o valor da densidade de energia será igual a zero,

mostrando que a integral que determina a energia do campo não diverge. Para calcular a energia de uma estrutura tipo lump, temos primeiramente que calcular o valor de  $W(\phi)$  e usar a equação (57) para calcular a energia total, portanto:

$$\begin{aligned} W_\phi &= \frac{dW}{d\phi} = 2\phi\sqrt{1-\phi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dW &= 2 \int \phi\sqrt{1-\phi} d\phi \Rightarrow \\ \Rightarrow W(\phi) &= 2 \int \phi\sqrt{1-\phi} d\phi \end{aligned} \quad (74)$$

O trabalho aqui é calcular essa integral da equação (74), para facilitar o processo, faz-se a substituição  $\sqrt{1-\phi} = u$ , logo:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\phi} &= u \quad (75) \\ \frac{du}{d\phi} &= \frac{d}{d\phi} [\sqrt{1-\phi}] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{du}{d\phi} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\phi}} \frac{d}{d\phi} [1-\phi] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{du}{d\phi} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\phi}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{du}{d\phi} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{u} \Rightarrow \\ \Rightarrow -2 u du &= d\phi \end{aligned} \quad (76)$$

Usando as equações (75) e (76) na equação (74), tem-se que:

$$\begin{aligned} W &= 2 \int (1-u^2) u (-2 u du) \Rightarrow \\ \Rightarrow W &= -4 \int (u^2 - u^4) du \Rightarrow \\ \Rightarrow W &= -4 \int u^2 du + 4 \int u^4 du \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W &= -4 \frac{u^3}{3} + 4 \frac{u^5}{5} \Rightarrow \\ \Rightarrow W &= \frac{4}{15} (3u^5 - 5u^3) \end{aligned} \quad (77)$$

Por fim, substituindo a equação (75) na equação (77), tem-se o valor de  $W(\phi)$ .

$$\begin{aligned} W(\phi) &= \frac{4}{15} \left( 3(\sqrt{1-\phi})^5 - 5(\sqrt{1-\phi})^3 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow W(\phi) &= \frac{4}{15} \left( 3(1-\phi)^{5/2} - 5(1-\phi)^{3/2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow W(\phi) &= \frac{4}{15} (1-\phi)^{3/2} \left[ 3(1-\phi)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} - 5 \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow W(\phi) &= \frac{4}{15} (1-\phi)^{3/2} [3(1-\phi) - 5] \Rightarrow \\ \Rightarrow W(\phi) &= \frac{4}{15} (1-\phi)^{3/2} [3 - 3\phi - 5] \Rightarrow \\ \Rightarrow W(\phi) &= -\frac{4}{15} (1-\phi)^{3/2} (2 + 3\phi) \end{aligned} \quad (78)$$

Com o valor de  $W(\phi)$ , dá para calcular o valor da energia  $E$  dado na equação (57), para isso, temos que calcular o valor do campo  $\phi$  quando  $x \rightarrow \infty$ , quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x = 0$ , portanto, para  $x = 0$ , obtêm-se que:

$$\phi(0) = \operatorname{sech}^2(0) = 1 \quad (79)$$

Para  $x \rightarrow \infty$ , o valor do campo será:

$$\phi(\infty) = \operatorname{sech}^2(\infty) = 0 \quad (80)$$

Para  $x \rightarrow -\infty$ , o valor do campo será o mesmo dado na equação (80), pois a função secante hiperbólica é uma função par, sabendo disso, calcula-se o valor da energia de uma forma simples e direta.

$$\begin{aligned} E &= |W(0) - W(1)| + |W(0) - W(1)| \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= \left| -\frac{8}{15} - 0 \right| + \left| -\frac{8}{15} - 0 \right| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E = \frac{16}{15} \quad (81)$$

Esse valor da energia seria o mesmo se tivesse integrado a função densidade de energia  $\mathcal{E}(x)$ , descrito pela equação (73); em alguns casos, calcular o valor de  $W(\phi)$  será uma tarefa relativamente simples, mas quando se analisa os modelos de potencial modificados, ficará notório que a integral para descobrir o valor de  $W(\phi)$  é muito laboriosa para se determinar, de modo que utiliza aqui nesse trabalho de softwares de computação simbólica para se calcular essas funções  $W(\phi)$ .

Para estudar a estabilidade de um sistema no contexto da mecânica quântica, calcula-se o valor de  $W_{\phi\phi}$ , para isso, tem que fazer a derivação da função  $W_{\phi}$  dada pela equação (59) segundo a definição dada na equação (41), por isso:

$$\begin{aligned} W_{\phi\phi} &= \frac{d}{d\phi}(W_{\phi}) = 2 \frac{d}{d\phi} [\phi\sqrt{1-\phi}] \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= 2 \left[ \sqrt{1-\phi} \frac{d}{d\phi}(\phi) + \phi \frac{d}{d\phi}(\sqrt{1-\phi}) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= 2 \left[ \sqrt{1-\phi} + \phi \frac{1}{2} \frac{(-1)}{\sqrt{1-\phi}} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= 2\sqrt{1-\phi} - \frac{\phi}{\sqrt{1-\phi}} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= \frac{2\sqrt{1-\phi}\sqrt{1-\phi} - \phi}{\sqrt{1-\phi}} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= \frac{2-3\phi}{\sqrt{1-\phi}} \quad (82) \end{aligned}$$

Essa equação (82) apresenta divergência quando  $x = 0$ , portanto, o potencial definido em (43) da hamiltoniana tipo Schroedinger diverge, fazendo a fatoração em termos dos operadores  $S$  e  $S^{\dagger}$  mal definida no ponto de divergência da estrutura.

### 2.2.2 Modelo $\phi^4$ inverso canônico

O modelo  $\phi^4$  inverso canônico é descrito pelo potencial:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2(1 - \phi^2) \quad (83)$$

Cujo gráfico está exposto no gráfico 2.6 abaixo.

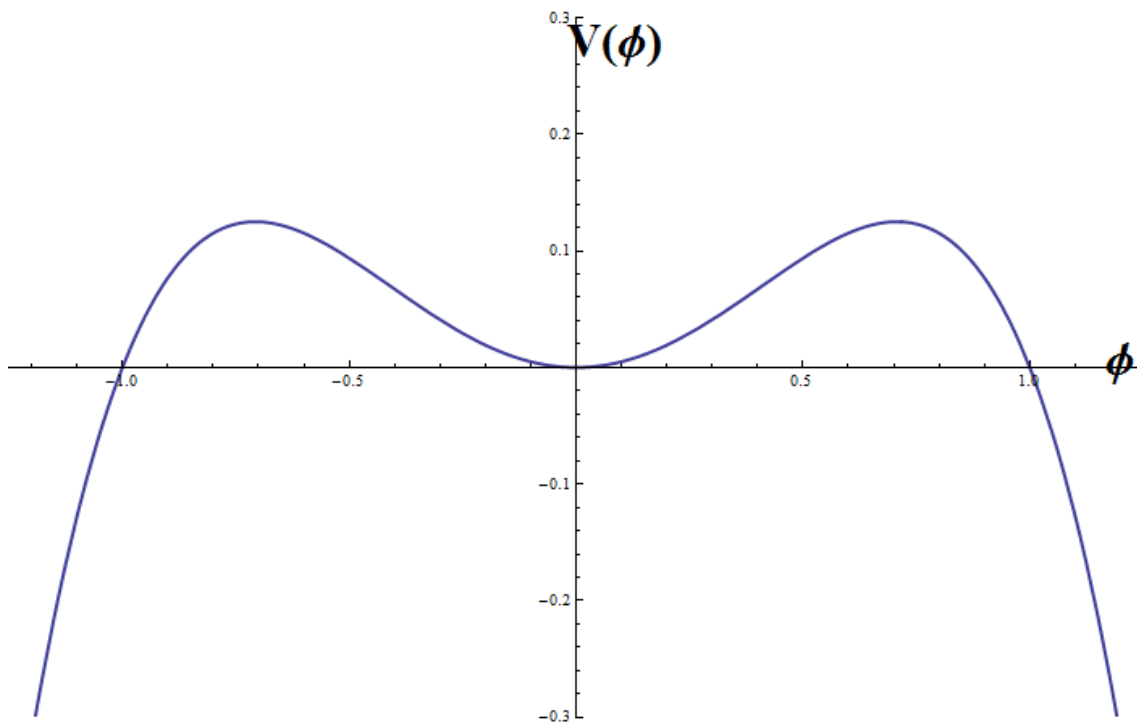


Gráfico 2.6: Gráfico do potencial  $V(\phi)$  no modelo  $\phi^4$  inverso canônico.

Esse potencial apresenta simetria de reflexão, pois se fizer  $\phi \rightarrow -\phi$ , o potencial (83) permanece inalterado, logo, pelo o que já foi discutido anteriormente, para descobrir os campos, têm que usar os dois pares de equações diferenciais (49), (50), (51) e (52) para determinar o valor de  $\phi(x)$ , para isso, temos que calcular o valor de  $W_\phi$  que é determinado pela equação (31), logo:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2} \phi^2(1 - \phi^2) = \frac{1}{2} W_\phi^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow W_\phi &= \phi \sqrt{1 - \phi^2} \end{aligned} \quad (84)$$

Com o valor de  $W_\phi$ , substitui a equação (84) nas equações diferenciais (49), (50), (51) e (52) para determinação do valor do campo, para  $x > 0$ :

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi \sqrt{1 - \phi^2} \quad (85)$$

Para  $x < 0$ , tem-se que:

$$\frac{d\phi}{dx} = -\phi \sqrt{1 - \phi^2} \quad (86)$$

Porém, tem-se que considerar o outro par de equações, como segue, para  $x > 0$ :

$$\frac{d\phi}{dx} = -\phi \sqrt{1 - \phi^2} \quad (87)$$

Para  $x < 0$ , tem-se o seguinte:

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi \sqrt{1 - \phi^2} \quad (88)$$

Para iniciar o cálculo, pode-se escolher qualquer uma das equações, logo, escolhe-se a equação (86) para descobrir o valor do campo  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= -\phi \sqrt{1 - \phi^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow - \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - \phi^2}} &= \int dx \Rightarrow \\ \Rightarrow - \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - \phi^2}} &= x + x_0 \end{aligned} \quad (89)$$

Agora, para facilitar o cálculo da integral expressa na equação (89), faz a seguinte substituição:

$$\phi = \operatorname{sech}(u) \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{du} &= \frac{d}{du} [\operatorname{sech}(u)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\phi}{du} &= -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\phi = -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) du \quad (91)$$

Por fim, substitui as equações (90) e (91) na integral (89) para obter:

$$\int \frac{\operatorname{sech}(u) \tanh(u)}{\operatorname{sech}(u) \sqrt{1 - (\operatorname{sech}(u))^2}} du = x + x_0 \quad (92)$$

Da relação fundamental (66), tem-se a seguinte consideração:  $1 - \operatorname{sech}^2(u) = \tanh^2(u)$ , usando no denominador da integral (92), tem-se que:

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sech}(u) \tanh(u)}{\operatorname{sech}(u) \sqrt{\tanh^2(u)}} du &= x + x_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int du &= x + x_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= x + x_0 \end{aligned} \quad (93)$$

Fazendo  $x_0 = 0$ , temos o valor do campo como sendo:

$$\phi = \operatorname{sech}(x) \quad (94)$$

Como o potencial tem simetria de reflexão, então:

$$\phi = -\operatorname{sech}(x) \quad (95)$$

Também será solução do problema proposto, as outras equações darão as mesmas soluções que as equações (94) e (95), logo não será preciso analisar todas as equações diferenciais dadas.

O gráfico desse campo é ilustrado no gráfico a seguir.



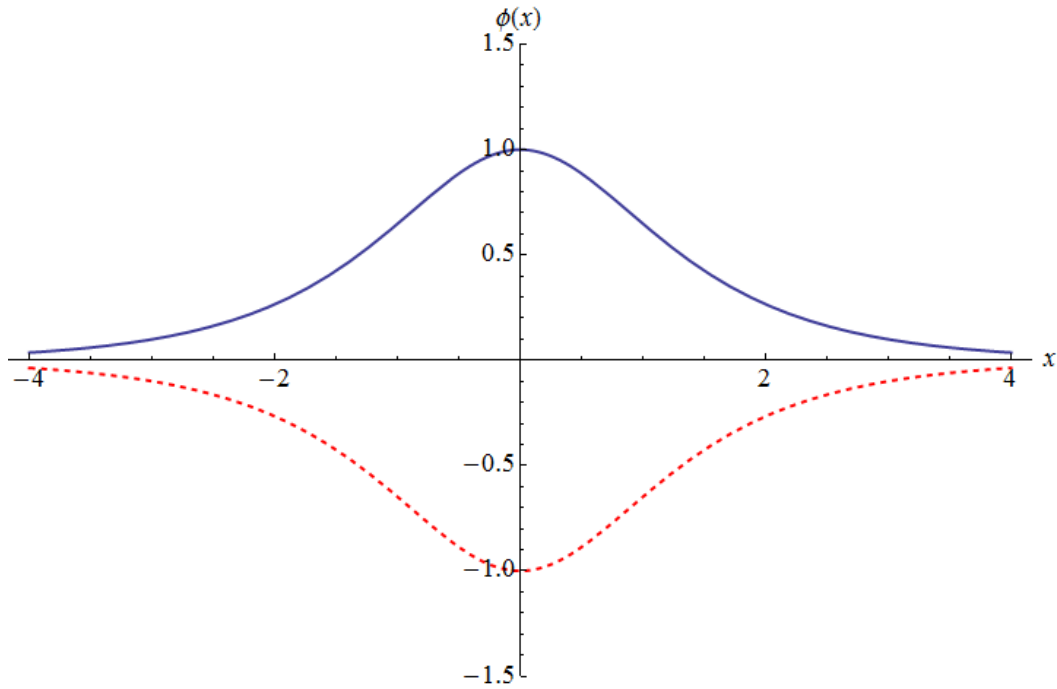


Gráfico 2.7: Gráfico do campo  $\phi$  no modelo  $\phi^4$  inverso canônico

A parte vermelha pontilhada é quando  $\phi = -\text{sech}(x)$  e a parte azul com a linha contínua é quando o campo  $\phi = \text{sech}(x)$ , como era de se esperar, o *lump* tem a forma típica de uma gaussiana e obedece a condição de contorno que define as estruturas não topológicas.

Para encontrar a densidade de energia desse modelo, substituímos o valor do campo (94) no potencial (83), portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} \text{sech}^2(x) (1 - \text{sech}^2(x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow V(x) &= \frac{1}{2} \text{sech}^2(x) - \frac{1}{2} \text{sech}^4(x) \end{aligned} \quad (96)$$

Agora, usando a equação (71), descubra o valor da densidade de energia  $\mathcal{E}(x)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= 2 \left[ \frac{1}{2} \text{sech}^2(x) - \frac{1}{2} \text{sech}^4(x) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{E}(x) &= \text{sech}^2(x) - \text{sech}^4(x) \end{aligned} \quad (97)$$

Abaixo está o gráfico da densidade de energia descrita no modelo  $\phi^4$  inverso canônico:

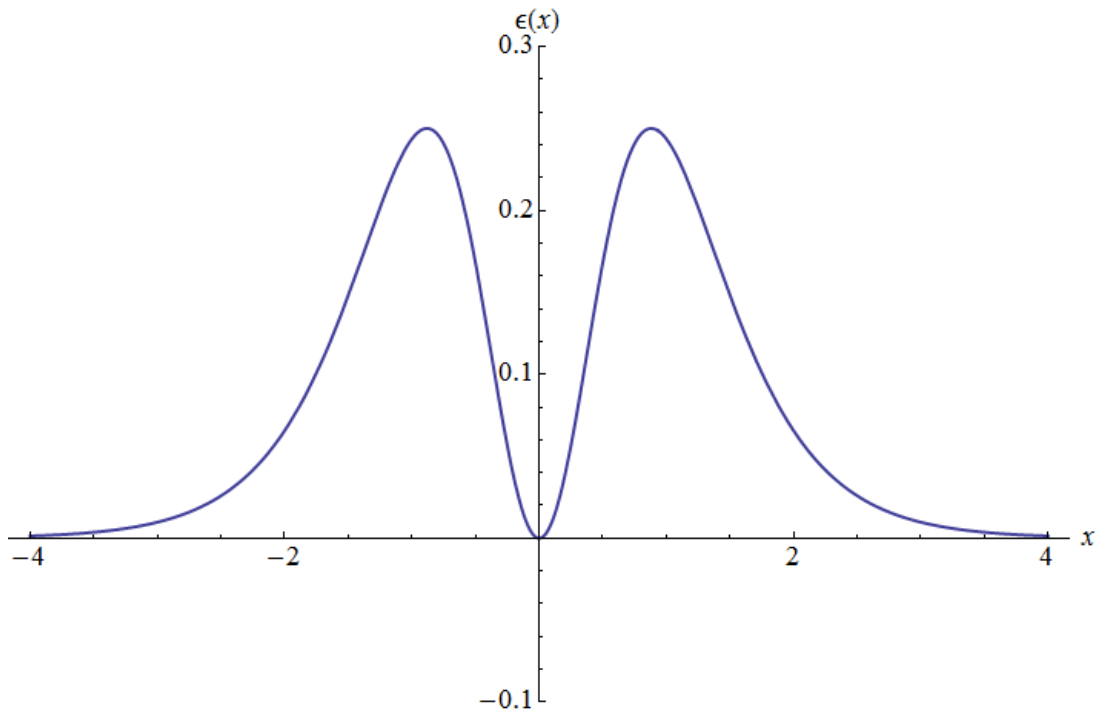


Gráfico 2.8: Gráfico da densidade de energia  $\mathcal{E}(x)$  no modelo  $\phi^4$  inverso canônico

Novamente se vê que o gráfico da densidade de energia formando dois picos e com a densidade tendendo a zero quando a coordenada  $x$  tende a mais, ou a menos infinito. Para calcular a energia dessa estrutura, descobre o valor da função  $W(\phi)$ , para depois analisar a equação (57), logo, usando a equação (84) para determinar o valor de  $W(\phi)$ , tem:

$$\begin{aligned}
 W_\phi &= \frac{dW}{d\phi} = \phi \sqrt{1 - \phi^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \int dW &= \int \phi \sqrt{1 - \phi^2} d\phi \quad (98)
 \end{aligned}$$

Fazendo uma substituição adequada na integral de (98), calcula-se a integral de forma elementar, como segue:

$$1 - \phi^2 = v \quad (99)$$

$$\frac{dv}{d\phi} = \frac{d}{d\phi}(1 - \phi^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{d\phi} = -2\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi d\phi = -\frac{dv}{2} \quad (100)$$

Fazendo a substituição definida pelas equações (99) e (100) na integral (98), obtêm-se que:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{v} dv \Rightarrow \\ \Rightarrow W &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{v^{3/2}}{3/2} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow W &= -\frac{1}{3} v^{3/2} \end{aligned} \quad (101)$$

Agora, fazendo a substituição (99) na equação (101), descobre-se o valor da função  $W(\phi)$ , cujo valor é:

$$W(\phi) = -\frac{1}{3} (1 - \phi^2)^{3/2} \quad (102)$$

Agora, para determinar o valor da energia, tem-se que descobrir o valor do campo  $\phi(x)$  quando  $x = 0$  e quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , para depois substituir na equação (57), logo, para  $x = 0$ :

$$\phi(0) = \operatorname{sech}(0) = 1 \quad (103)$$

Como o campo  $\phi$  é uma função par, o valor do campo para  $x \rightarrow \infty$  é o mesmo para quando  $x \rightarrow -\infty$ , portanto:

$$\phi(\pm\infty) = \operatorname{sech}(\pm\infty) = 0 \quad (104)$$

Com os valores (103) e (104), dá para se determinar a energia do *lump* (equação (57)), como segue:

$$\begin{aligned} E &= |W(0) - W(1)| + |W(0) - W(1)| \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= \left| -\frac{1}{3} - 0 \right| + \left| -\frac{1}{3} - 0 \right| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2}{3} \quad (105)$$

Para ver a estabilidade do modelo  $\phi^4$  inverso canônico, tem que fazer a análise da função  $W_{\phi\phi}$  e ver se há algum ponto de divergência, como foi visto no caso anterior, para isso, tem-se que:

$$\begin{aligned} W_{\phi\phi} &= \frac{d}{d\phi}(W_\phi) = \frac{d}{d\phi}[\phi \sqrt{1-\phi^2}] \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= \sqrt{1-\phi^2} \frac{d\phi}{d\phi} + \phi \frac{d}{d\phi}[\sqrt{1-\phi^2}] \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= \sqrt{1-\phi^2} + \phi \frac{1}{2} \frac{-2\phi}{\sqrt{1-\phi^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= \sqrt{1-\phi^2} - \frac{\phi^2}{\sqrt{1-\phi^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= \frac{(1-\phi^2) - \phi^2}{\sqrt{1-\phi^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{\phi\phi} &= \frac{1-2\phi^2}{\sqrt{1-\phi^2}} \end{aligned} \quad (106)$$

Como foi visto na equação (103), quando  $x = 0$ , o valor do campo  $\phi = 1$ , mostrando assim que no ponto  $x = 0$  o valor de  $W_{\phi\phi}$  é divergente, por isso o valor do potencial  $U(x)$  da equação (43) diverge e mostrando assim que as estruturas tipo *lump* são instáveis.

Agora com a ilustração dos modelos canônicos aqui apresentados, podem-se investigar modelos um pouco mais gerais, que serão chamados de modelos modificados, pois são feitas algumas modificações no potencial  $V(\phi)$ , dando uma nova gama de soluções tipo *lump*.

## 2.3 Potenciais modificados

Agora se focam as atenções para novos modelos, que contêm uma gama de soluções tipo *lump*, os modelos aqui apresentados são modificações dos modelos canônicos vistos na subseção anterior, e terá a exposição de três modelos modificados que serão os modelos  $\phi^4$  inverso modificado, o modelo  $\phi^4$  modificado e o modelo  $\phi^3$  modificado, ficará claro de antemão que os novos modelos aqui serão descritos por um conjunto pequeno de parâmetros.

### 2.3.1 Modelo $\phi^4$ inverso modificado

O modelo  $\phi^4$  inverso modificado é descrito pelo potencial:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 + \phi)(a - \phi) \quad (107)$$

Onde  $a$  é um parâmetro positivo, esse modelo é descrito por um único parâmetro, que controla bem o perfil das soluções não topológicas.

Para  $a = 1$  reduz-se ao modelo  $\phi^4$  inverso canônico já discutido nas subseções anteriores, e esse potencial não tem simetria de reflexão, pois se fizer  $\phi \rightarrow -\phi$  no potencial  $V(\phi)$ , a expressão não será a mesma, então precisará apenas de um par de equações diferenciais para se obter o valor do campo.

O gráfico desse potencial está expresso na ilustração abaixo.

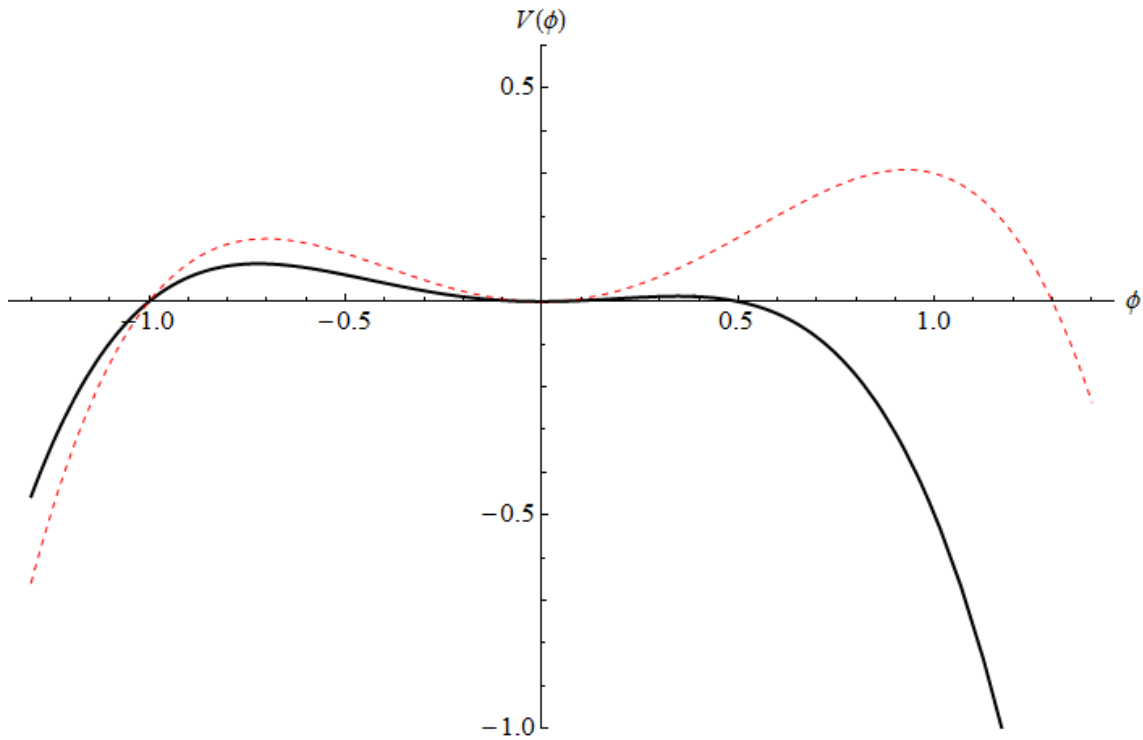


Gráfico 2.9: Gráfico do potencial  $V(\phi)$  no modelo  $\phi^4$  inverso modificado

No gráfico 2.9, colocam-se valores diferentes para o parâmetro  $a$ : para a linha negra sólida,  $a = 0,5$  e para a linha vermelha tracejada,  $a = 1,5$ , com isso é notório que a forma gráfica não sofre uma brusca modificação em relação ao potencial do modelo  $\phi^4$  inverso canônico analisado anteriormente. Para calcular o valor do campo  $\phi(x)$ , tem que descobrir o valor de  $W_\phi$  para depois utilizar as equações diferenciais (49) e (50), já que não precisará dos dois pares de equações por causa da não simetria de reflexão do potencial.

Assim, a função  $W_\phi$  será:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 + \phi)(a - \phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_\phi = \phi \sqrt{(1 + \phi)(a - \phi)} \quad (108)$$

Usando o valor da função  $W_\phi$  descrito pela equação (108) nas equações (49) e (50), obtemos o valor do campo, para  $x > 0$ :

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi \sqrt{(1 + \phi)(a - \phi)} \quad (109)$$

Para  $x < 0$ ,

$$\frac{d\phi}{dx} = -\phi \sqrt{(1 + \phi)(a - \phi)} \quad (110)$$

Como se pode usar qualquer uma das equações, escolhe-se a equação (109) para começar o processo de cálculo.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= \phi \sqrt{(1 + \phi)(a - \phi)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dx &= \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{(1 + \phi)(a - \phi)}} \end{aligned} \quad (111)$$

A integral em (111) é bem complicada, pois não se vê uma forma elementar de obter uma simplificação como nas integrais calculadas nos casos canônicos, porém para contornar esse problema, fazem-se tentativas para descobrir se há uma integral de forma semelhante à equação (111). Em casos anteriores, as integrais dariam funções inversas hiperbólicas, por isso foi por aí que se iniciam as tentativas: tentar ver casos de como modificar o argumento para aparecer a integral desejada.

Depois de muito tentar, aparece uma forma de se calcular a integral de forma elementar, não precisando de um arcabouço matemático imenso, que foi analisar a derivada da função  $\text{arcosh}(v)$ , como já é conhecida, a derivada dessa função é:

$$\frac{d}{dv}(\text{arcosh}(v)) = \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} \quad (112)$$

Fazendo-se uma mudança em  $v$ , do tipo:

$$v = \frac{Au - 1}{Bu} \quad (113)$$

Onde  $A$  e  $B$  são constantes reais e aplicando essa transformação em (112), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{du} \left( \operatorname{arcosh} \left( \frac{Au-1}{Bu} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{Au-1}{Bu}\right)^2 - 1}} \frac{d}{du} \left( \frac{Au-1}{Bu} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \frac{d}{du} \left( \operatorname{arcosh} \left( \frac{Au-1}{Bu} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(Au-1)^2 + (Bu)^2}{(Bu)^2}}} \left( \frac{ABu - (Au-1)B}{(Bu)^2} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \frac{d}{du} \left( \operatorname{arcosh} \left( \frac{Au-1}{Bu} \right) \right) = \frac{Bu}{\sqrt{(Au+1)^2 + (Bu)^2}} \left( \frac{B}{(Bu)^2} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \frac{d}{du} \left( \operatorname{arcosh} \left( \frac{Au-1}{Bu} \right) \right) = \frac{Bu}{\sqrt{(Au-1)^2 + (Bu)^2}} \left( \frac{B}{(Bu)^2} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \frac{d}{du} \left( \operatorname{arcosh} \left( \frac{Au-1}{Bu} \right) \right) = \frac{1}{u \sqrt{1 - 2Au + (A^2 - B^2)u^2}} \Rightarrow \\
\Rightarrow & \int d \left( \operatorname{arcosh} \left( \frac{Au-1}{Bu} \right) \right) = \int \frac{du}{u \sqrt{1 - 2Au + (A^2 - B^2)u^2}} \Rightarrow \\
\Rightarrow & \int \frac{du}{u \sqrt{1 - 2Au + (A^2 - B^2)u^2}} = \operatorname{arcosh} \left( \frac{Au-1}{Bu} \right) \tag{114}
\end{aligned}$$

Portanto, a integral (114) é de forma semelhante à integral complicada da equação (111) assim, para resolver essa equação compara-se as integrais para se obter as constantes  $A$  e  $B$ , portanto, fazendo  $u \rightarrow \phi$  em (114) e comparando com a integral em (111), obtêm-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} = \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{(1+\phi)(a-\phi)}} \Rightarrow \\
\Rightarrow & \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} = \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{a - \phi + a\phi - \phi^2}} \Rightarrow \\
\Rightarrow & \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} = \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{a + (a-1)\phi - \phi^2}} \Rightarrow
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} = \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{a \left[ 1 + \frac{(a-1)}{a}\phi - \frac{1}{a}\phi^2 \right]}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 + \frac{(a-1)}{a}\phi - \frac{1}{a}\phi^2}} \quad (115)
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das duas integrais na equação (115), tem-se que:

$$-2A = \frac{(a-1)}{a}$$

$$A^2 - B^2 = -\frac{1}{a}$$

Resolvendo esse sistema, determina-se o valor de  $A$  e de  $B$  em termos dos parâmetros da integral de (111), portanto, como:

$$A = -\frac{(a-1)}{2a} = \frac{1-a}{2a} \quad (116)$$

O valor da constante  $B$  será:

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-a)^2}{4a^2} - B^2 = -\frac{1}{a} \Rightarrow \\
&\Rightarrow -B^2 = -\frac{1}{a} - \frac{(1-a)^2}{4a^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow B^2 = \frac{4a + (1-a)^2}{4a^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow B^2 = \frac{4a + a^2 - 2a + 1}{4a^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow B^2 = \frac{a^2 + 2a + 1}{4a^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow B^2 = \frac{(a+1)^2}{4a^2} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= \pm \sqrt{\frac{(a+1)^2}{4a^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow B &= \pm \frac{1+a}{2a} \end{aligned} \quad (117)$$

A constante  $B$  possui dois valores possíveis, portanto, a integral (111) terá duas soluções diferentes, da mesma forma que a solução do modelo  $\phi^4$  inverso canônico teve.

Com as constantes  $A$  e  $B$  calculadas e usando a equação (114), tem-se que:

$$\int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{(1+\phi)(a-\phi)}} = \operatorname{arcosh} \left( \frac{\left(\frac{1-a}{2a}\right)\phi - 1}{\left(\pm \frac{1+a}{2a}\right)\phi} \right) \quad (118)$$

Substituindo a equação (118) na equação (111), tem-se que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arcosh} \left( \frac{\left(\frac{1-a}{2a}\right)\phi - 1}{\left(\pm \frac{1+a}{2a}\right)\phi} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{a} x &= \operatorname{arcosh} \left( \frac{\left(\frac{1-a}{2a}\right)\phi - 1}{\left(\pm \frac{1+a}{2a}\right)\phi} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cosh(\sqrt{a} x) &= \frac{\left(\frac{1-a}{2a}\right)\phi - 1}{\left(\pm \frac{1+a}{2a}\right)\phi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\pm \frac{1+a}{2a}\right)\phi \cosh(\sqrt{a} x) &= \left(\frac{1-a}{2a}\right)\phi - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\left(\frac{1-a}{2a}\right)\phi + \left(\pm \frac{1+a}{2a}\right)\phi \cosh(\sqrt{a} x) &= -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\phi \left[ \left(\frac{1-a}{2a}\right) + \left(\pm \frac{1+a}{2a}\right) \cosh(\sqrt{a} x) \right] &= -1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{\left(\frac{1-a}{2a}\right) \pm \left(\frac{1+a}{2a}\right) \cosh(\sqrt{a} x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{2a}{(1-a) \pm (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \quad (119)$$

A equação (119) dá dois valores diferentes do campo  $\phi$ , que será explicito da seguinte forma:

$$\phi_1 = \frac{2a}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \quad (120)$$

$$\phi_2 = \frac{2a}{(1-a) - (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \quad (121)$$

Cujos gráficos desses campos estão ilustrados abaixo.

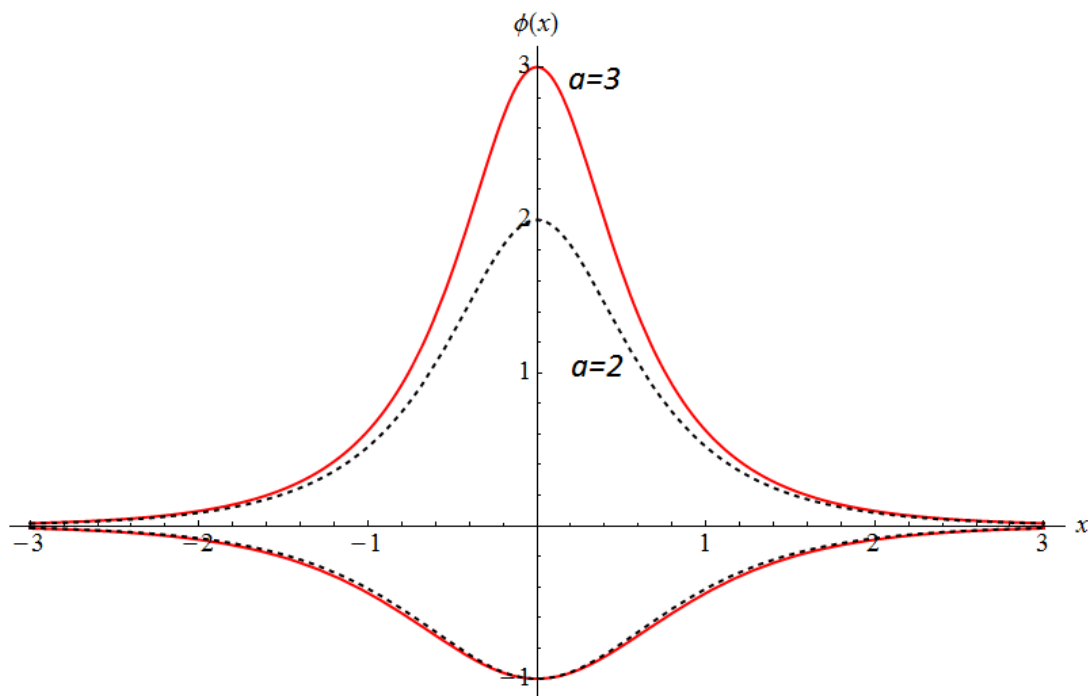


Gráfico 2.10: Gráfico do campo  $\phi$  no modelo  $\phi^4$  inverso modificado

A linha tracejada é o gráfico do campo  $\phi_1$  quando o parâmetro  $a = 2$ , enquanto que a linha cheia vermelha é o valor do campo  $\phi_2$  quando  $a = 3$ ; aqui se nota que o campo  $\phi_1$ , que é o gráfico acima do eixo  $x$ , tem o pico mais alto do que o campo  $\phi_2$ . Outra análise que se conclui é que o valor do campo  $\phi_2$  para  $a = 3$  é quase idêntico ao

valor do campo  $\phi_2$  quando  $a = 2$ , diferentemente do gráfico de  $\phi_1$ , onde o pico da função quando  $a = 3$  é bem mais alto do que o pico quando o parâmetro  $a = 2$ .

Com o valor do campo calculado, calcula-se a densidade de energia  $\mathcal{E}(x)$  definido pela equação (71), como tem dois valores para o campo, faz-se primeiro a substituição do valor do campo encontrado  $\phi_1$  dado pela equação (119) no potencial  $V(\phi)$  dado pela equação (107):

$$\begin{aligned}
 V_1(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{2a}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \right)^2 \left( 1 + \frac{2a}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \right). \\
 &\cdot \left( a - \frac{2a}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow V_1(x) &= \frac{2a^3}{\left( (1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x) \right)^2} \left( \frac{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x) + 2a}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \right). \\
 &\cdot \left( \frac{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x) - 2}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow V_1(x) &= \frac{2a^3}{\left( (1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x) \right)^2} \left( \frac{(1+a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \right). \\
 &\cdot \left( \frac{(-1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow V_1(x) &= - \frac{2a^3}{\left( (1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x) \right)^2} \left( \frac{(1+a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \right). \\
 &\cdot \left( \frac{(1+a) - (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)}{(1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x)} \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow V_1(x) &= - \frac{2a^3(1+a)^2}{\left( (1-a) + (1+a) \cosh(\sqrt{a} x) \right)^4} (1 - \cosh^2(\sqrt{a} x)) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_1(x) &= -\frac{2a^3(1+a)^2}{\left((1-a) + (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^4} (-\sinh^2(\sqrt{a}x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow V_1(x) &= \frac{2a^3(1+a)^2 \sinh^2(\sqrt{a}x)}{\left((1-a) + (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^4} \end{aligned} \quad (122)$$

Onde denomina de  $V_1(x)$  o potencial que é obtido usando o campo  $\phi_1$ ; para calcular o valor da densidade de energia, faz uso da equação (71) como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x) &= 2V_1(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{E}_1(x) &= \frac{4a^3(1+a)^2 \sinh^2(\sqrt{a}x)}{\left((1-a) + (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^4} \end{aligned} \quad (123)$$

De maneira análoga, calcula-se o valor de  $\mathcal{E}_2(x)$  para o campo  $\phi_2$ , mas para isso, calcula o valor do potencial  $V_2(x)$ , de modo que:

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{2a}{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)} \right)^2 \left( 1 + \frac{2a}{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)} \right) \cdot \\ &\cdot \left( a - \frac{2a}{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow V_2(x) &= \frac{2a^3}{\left((1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^2} \left( \frac{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x) + 2a}{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)} \right) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x) - 2}{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow V_2(x) &= \frac{2a^3}{\left((1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^2} \left( \frac{(1+a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)}{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)} \right) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{(-1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)}{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_2(x) &= -\frac{2a^3}{\left((1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^2} \left( \frac{(1+a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)}{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)} \right) \\ &\cdot \left( \frac{(1+a) + (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)}{(1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow V_2(x) &= -\frac{2a^3(1+a)^2}{\left((1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^4} (1 - \cosh^2(\sqrt{a}x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow V_2(x) &= -\frac{2a^3(1+a)^2}{\left((1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^4} (-\sinh^2(\sqrt{a}x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow V_2(x) &= \frac{2a^3(1+a)^2 \sinh^2(\sqrt{a}x)}{\left((1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^4} \end{aligned} \quad (124)$$

Com o potencial  $V_2(x)$ , calcula-se o valor da densidade de energia  $\mathcal{E}_2(x)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(x) &= 2V_2(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{E}_2(x) &= \frac{4a^3(1+a)^2 \sinh^2(\sqrt{a}x)}{\left((1-a) - (1+a)\cosh(\sqrt{a}x)\right)^4} \end{aligned} \quad (125)$$

Com os potenciais  $\mathcal{E}_1(x)$  e  $\mathcal{E}_2(x)$  determinados, ilustra-se os dois gráficos separadamente, para se ter uma melhor análise.

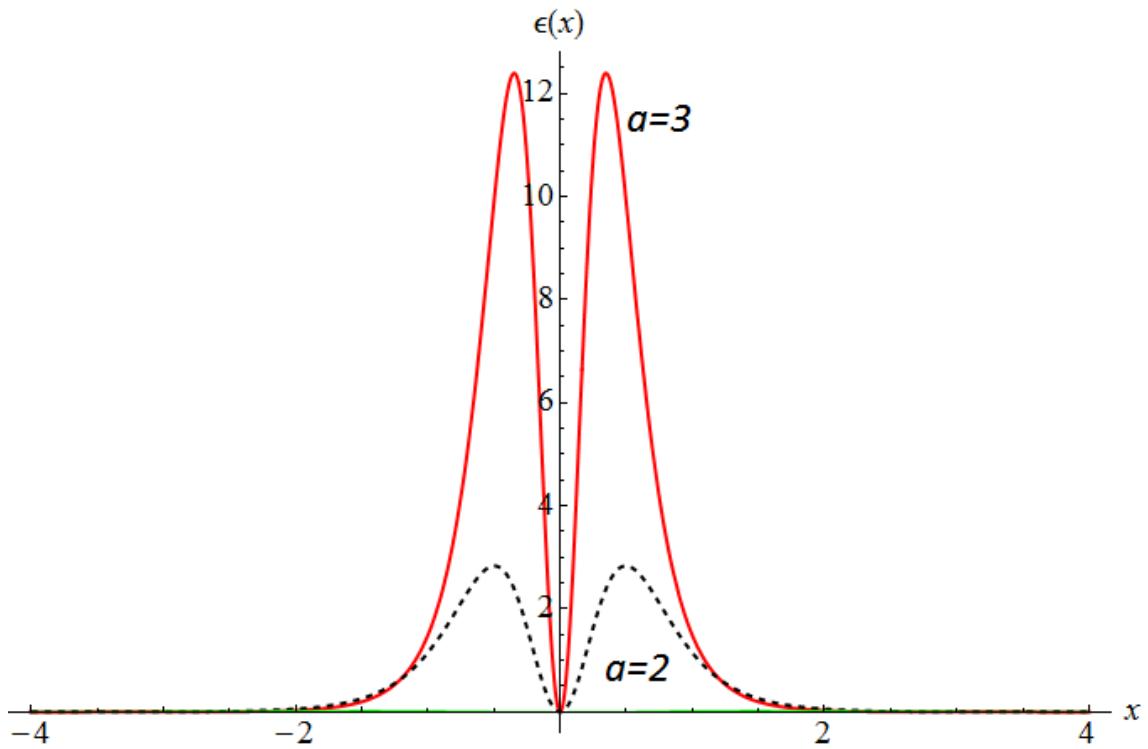


Gráfico 2.11: Gráfico da densidade de energia  $\mathcal{E}_1(x)$  no modelo  $\phi^4$  inverso modificado

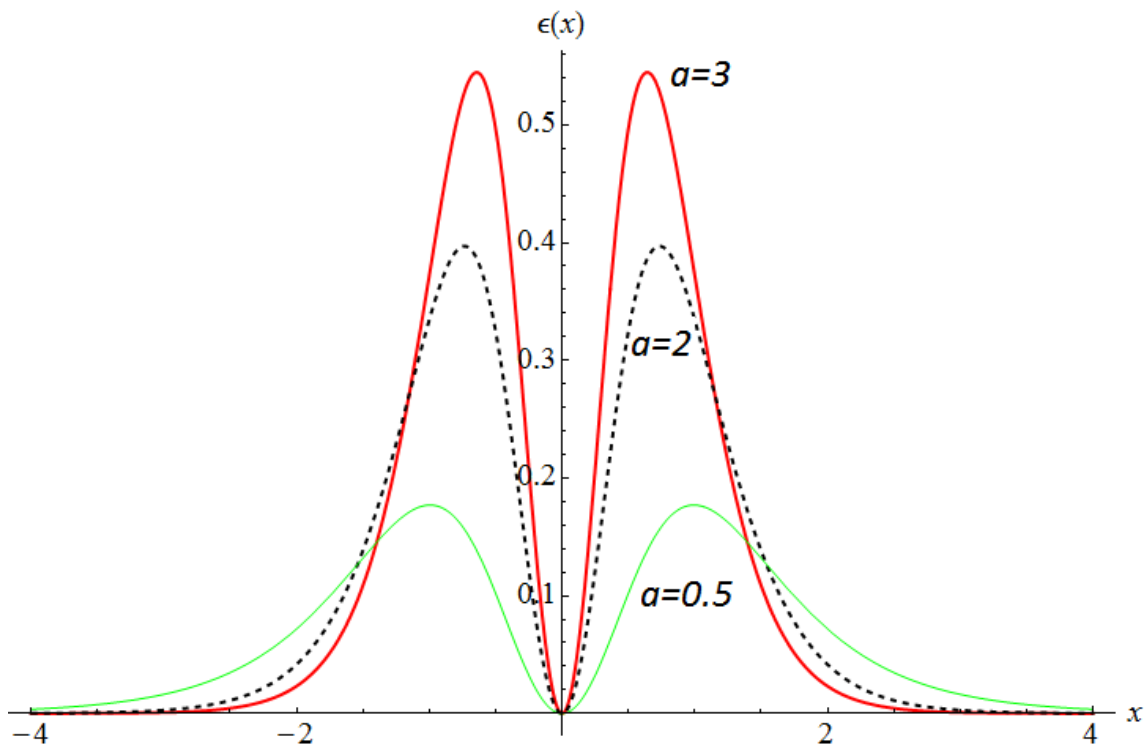


Gráfico 2.12: Gráfico da densidade de energia  $\mathcal{E}_2(x)$  no modelo  $\phi^4$  inverso modificado

Onde a linha vermelha é quando o parâmetro  $a = 3$ , a linha negra tracejada quando  $a = 2$ , e a linha verde é quando o parâmetro  $a = 0.5$ ; no gráfico 2.11 se vê claramente que, quanto maior é o parâmetro  $a$ , maiores são os picos, tanto é que não se dá para enxergar o gráfico de quando  $a = 0.5$ , pois são mínimos se comparados aos picos quando  $a = 3$ , já no outro caso acontece a mesma coisa, porém não tem tanta diferença entre os picos, já que a diferença entre os picos de quando  $a = 3$  e quando  $a = 0.5$  é de menos de 0.4.

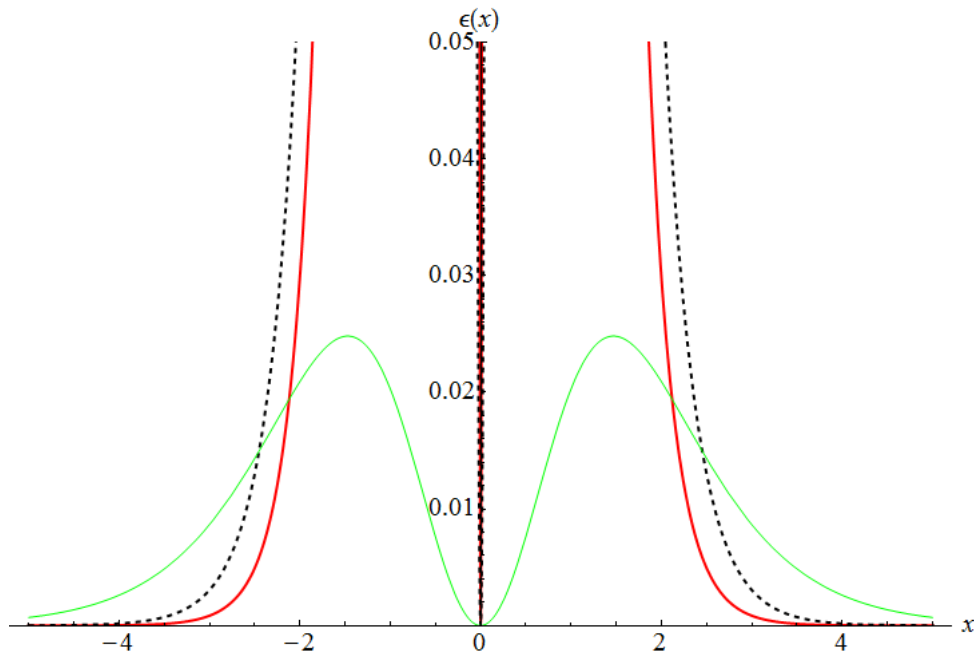


Gráfico 2.13: Gráfico de  $E_1(x)$  mostrando o parâmetro  $a = 0.5$  (em verde)

No gráfico fica claro que, quando o parâmetro  $a = 0.5$ , o pico tem em torno de 0,025, muito menor que o valor do pico quando  $a = 3$ , que chega perto da casa de 13.

Por fim, calcula-se o valor da energia do *lump*, para isso terá que descobrir primeiro o valor de  $W(\phi)$ , cuja forma está definida na equação (31), para isso substitui o potencial (107) na equação (31) para obter:

$$\frac{1}{2}\phi^2(1+\phi)(a-\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{d\phi}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi\sqrt{(1+\phi)(a-\phi)} = \frac{dW}{d\phi} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow W(\phi) = \int \phi \sqrt{(1+\phi)(a-\phi)} d\phi \quad (126)$$

Essa integral tem uma primitiva, porém dá uma expressão bastante grande, por fim de comodidade, faz-se essa integral em um software de computação simbólica, como o *Mathematica*® 8.0, para obter o resultado, portanto, o valor de  $W(\phi)$  calculado através desse software é igual a:

$$W(\phi) = \frac{1}{16} \sqrt{-(1+\phi)(-a+\phi)} \left\{ -\frac{2}{3} [3 + 3a^2 - 2\phi - 8\phi^2 + 2a(1+\phi)] \right. \\ \left. - \frac{(-1+a)(1+a)^2 \operatorname{arcTan}\left(\frac{-1+a-2\phi}{2\sqrt{a-\phi}\sqrt{1+\phi}}\right)}{\sqrt{a-\phi}\sqrt{1+\phi}} \right\} \quad (127)$$

Depois de ter a expressão para  $W(\phi)$ , se calcula o valor do campo quando  $x \rightarrow \infty$ , quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x = 0$ . Como o modelo possui dois valores para o campo, terá dois valores para a energia, que denomina-se de  $E_1$  para o campo  $\phi_1$  e  $E_2$  para o campo  $\phi_2$ , portanto, tem-se que, para o campo  $\phi_1$  quando  $x \rightarrow \infty$ :

$$\phi_1(-\infty) = 0 \quad (128)$$

Para  $x \rightarrow -\infty$ , tem-se que:

$$\phi_1(\infty) = 0 \quad (129)$$

Por fim, quando  $x = 0$ :

$$\phi_1(0) = a \quad (130)$$

Com esses valores calcula-se o valor da energia  $E_1$  usando a equação (57), de forma que:

$$E_1 = |W(0) - W(a)| + |W(0) - W(a)| \quad (131)$$

O valor de  $W(0)$  é:

$$W(0) = \frac{1}{48} \left\{ -2\sqrt{a}[3 + a(2 + 3a)] - 3(-1 + a)(1 + a)^2 \operatorname{arcTan} \left( \frac{-1 + a}{2\sqrt{a}} \right) \right\} \quad (132)$$

O valor de  $W(a)$  dá um valor indeterminado se substituir diretamente o valor, porém, fazendo o limite assintótico quando  $x \rightarrow a$ , obtêm-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} W(x) = \frac{\pi}{32} (1 - a)(1 + a)^2 \quad (133)$$

Com esses valores, dá para calcular o valor da energia  $E_1$ , como segue:

$$E_1 = \left| \frac{1}{24} \left\{ -2\sqrt{a}[3 + a(2 + 3a)] - 3(-1 + a)(1 + a)^2 \operatorname{arcTan} \left( \frac{-1 + a}{2\sqrt{a}} \right) \right\} - \frac{\pi}{16} (1 - a)(1 + a)^2 \right| \quad (134)$$

Analogamente se calcula o valor da energia  $E_2$  dada pelo campo  $\phi_2$ , para isso, calcula-se o campo nas condições desejadas, para  $x \rightarrow \infty$ :

$$\phi_2(-\infty) = 0 \quad (135)$$

Para  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\phi_2(\infty) = 0 \quad (136)$$

Para  $x = 0$ , obtêm-se que:

$$\phi_2(0) = -1 \quad (137)$$

Com esses valores, determina-se o valor da energia  $E_2$ , definida pela equação (57), como segue:

$$\begin{aligned} E_2 &= |W(0) - W(-1)| + |W(0) - W(-1)| \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_2 = 2|W(0) - W(-1)| \end{aligned} \quad (138)$$

A equação (132) define o valor de  $W(0)$ , agora se calcula o valor de  $W(-1)$  usando (127) logo:

$$W(-1) = \frac{\pi}{32} (1 - a)(1 + a)^2 \quad (139)$$

Que é um valor idêntico ao encontrado na equação (133), isso implica que  $E_1 = E_2$ .

Quando  $a = 1$ , o valor da energia  $E_1$  é:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \left| \frac{1}{24} \left\{ -2\sqrt{1} [3 + 1 \cdot (2 + 3 \cdot 1)] - 3(-1 + 1)(1 + 1)^2 \operatorname{arctan} \left( \frac{-1 + 1}{2\sqrt{1}} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\pi}{16} (1 - 1)(1 + 1)^2 \right| \Rightarrow \\
 &\Rightarrow E_1 = \left| \frac{1}{24} \{-16\} \right| \Rightarrow \\
 &\Rightarrow E_1 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}
 \end{aligned} \tag{140}$$

Que é o mesmo valor dado pela equação (105) no modelo  $\phi^4$  inverso canônico, lembrando que quando  $a = 1$  o modelo  $\phi^4$  inverso modificado se reduz ao modelo canônico, provando assim a validade da equação.

Abaixo está ilustrado o gráfico da energia  $E_1$  como uma função do parâmetro  $a$ .

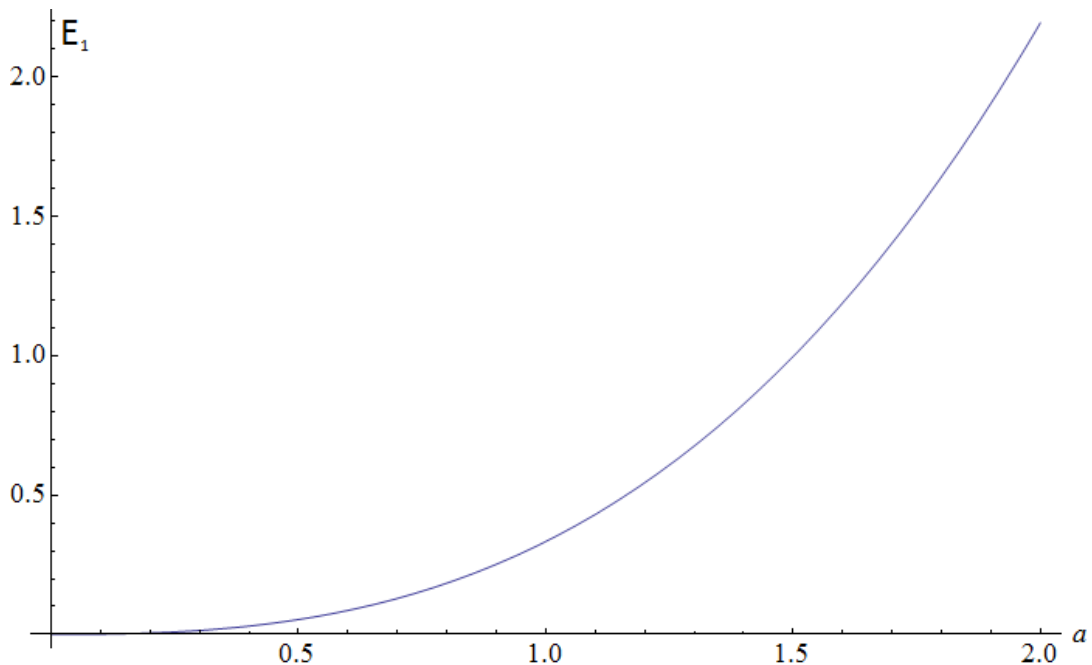


Gráfico 2.14: Gráfico da energia total  $E_1$  em função do parâmetro  $a$

### 2.3.2 Modelo $\phi^4$ modificado

O modelo  $\phi^4$  modificado é descrito pelo potencial:

$$V(\phi) = 2\phi^2(\phi - b)\left(\phi - \frac{b}{c}\right) \quad (141)$$

Onde os parâmetros  $b$  e  $c$  são definidos como sendo:  $b > 0$  e  $c \geq 1$ , quando o parâmetro  $c = 1$ , o problema se reduz ao potencial do modelo  $\phi^4$  canônico. O potencial (141) tem forma gráfica ilustrada abaixo.

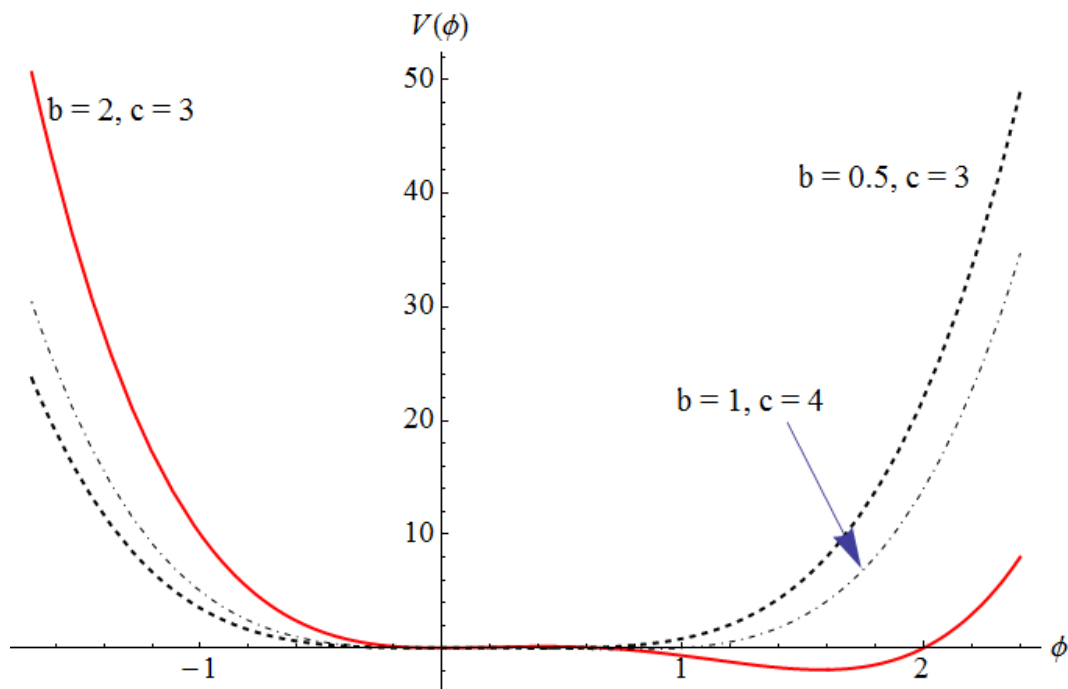


Gráfico 2.15: Gráfico do potencial  $V(\phi)$  no modelo  $\phi^4$  modificado

No gráfico 2.15, a linha vermelha corresponde ao potencial  $V(\phi)$  quando os parâmetros  $b = 2$  e  $c = 3$ , a linha preta tracejada quando os parâmetros  $b = 0.5$  e  $c = 3$  e a linha preta pontilhada e tracejada quando  $b = 1$  e  $c = 4$ . Para obter o valor do campo  $\phi(x)$  nesse caso, faz-se uso das equações (49), (50), (51) ou (52), mas antes disso, tem que determinar o valor de  $W_\phi$  definido pela equação (31) como segue:

$$2\phi^2(\phi - b)\left(\phi - \frac{b}{c}\right) = \frac{1}{2}W_\phi^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_\phi = 2\phi \sqrt{(\phi - b) \left(\phi - \frac{b}{c}\right)} \quad (142)$$

Com a equação (142), substitui na equação (49) de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= 2\phi \sqrt{(\phi - b) \left(\phi - \frac{b}{c}\right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{(\phi - b) \left(\phi - \frac{b}{c}\right)}} &= \int dx \end{aligned} \quad (143)$$

Essa integral é de forma parecida à equação (114) quando a usamos para resolver integrais complicadas do tipo da equação (143), para isso, comparam-se as duas integrais para determinar as constantes  $A$  e  $B$ , fazendo  $u \rightarrow \phi$  em (114) e comparando com (143), temos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} &= \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{(\phi - b) \left(\phi - \frac{b}{c}\right)}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} &= \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{\phi^2 - \frac{b}{c}\phi - b\phi + \frac{b^2}{c}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} &= \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{\frac{b^2}{c} - \left(\frac{b}{c} + \frac{bc}{c}\right)\phi + \phi^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} &= \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{\frac{b^2}{c} \left\{1 - \frac{c}{b^2} \frac{b}{c} (1 + c)\phi + \frac{c}{b^2} \phi^2\right\}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - 2A\phi + (A^2 - B^2)\phi^2}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{c}}} \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - \frac{1}{b}(1 + c)\phi + \frac{c}{b^2} \phi^2}} \end{aligned} \quad (144)$$

Da equação (144) dá para se determinar as constantes  $A$  e  $B$ , como segue:

$$2A = \frac{1}{b}(1 + c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1+c}{2b} \quad (145)$$

Com o valor de  $A$  encontrado, agora é calcular o valor da constante  $B$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+c}{2b}\right)^2 - B^2 &= \frac{c}{b^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -B^2 &= \frac{c}{b^2} - \frac{(1+c)^2}{4b^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow B^2 &= -\frac{4c}{4b^2} + \frac{(1+c)^2}{4b^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow B^2 &= \frac{-4c + 1 + 2c + c^2}{4b^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow B^2 &= \frac{(1-c)^2}{4b^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow B &= \pm \frac{1-c}{2b} \end{aligned} \quad (146)$$

Com as constantes encontradas, pode-se dizer que o valor da integral (143) é:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{c}}} \int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - \frac{1}{b}(1+c)\phi + \frac{c}{b^2}\phi^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{c}}} \operatorname{arcosh} \left( \frac{\left(\frac{1+c}{2b}\right)\phi - 1}{\left(\pm \frac{1-c}{2b}\right)\phi} \right) \quad (147)$$

Sabendo desse valor, substitui-se a equação (147) na equação (143) como segue.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{c}}} \operatorname{arcosh} \left( \frac{\left(\frac{1+c}{2b}\right)\phi - 1}{\left(\pm \frac{1-c}{2b}\right)\phi} \right) &= x \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{arcosh} \left( \frac{\left(\frac{1+c}{2b}\right)\phi - 1}{\left(\pm \frac{1-c}{2b}\right)\phi} \right) &= 2 \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1+c}{2b}\right)\phi - 1}{\left(\pm\frac{1-c}{2b}\right)\phi} = \cosh\left(2\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right) \quad (148)$$

De acordo com a relação  $\cosh(2x) = 2 \sinh^2(x) + 1$ , a equação (148) se torna:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1+c}{2b}\right)\phi - 1}{\left(\pm\frac{1-c}{2b}\right)\phi} &= 2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right) + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{1+c}{2b}\right)\phi - \frac{2b}{2b} &= \left(\pm\frac{1-c}{2b}\right)\phi \left[2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right) + 1\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow (1+c)\phi - 2b &= \pm(1-c)\phi \left[2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right) + 1\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow -2b &= \pm(1-c)\phi \left[2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right) + 1\right] - (1+c)\phi \Rightarrow \\ \Rightarrow 2b &= \phi \left\{ \mp(1-c) \left[2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right) + 1\right] + (1+c) \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi &= \frac{2b}{(1+c) \mp (1-c) \left[2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right) + 1\right]} \quad (149) \end{aligned}$$

O sinal de  $\mp$  na equação (149) leva a duas soluções, que serão descritas como sendo:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{2b}{(1+c) - (1-c) \left[2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right) + 1\right]} \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_1 &= \frac{2b}{(1+c) - (1-c)2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right) - (1-c)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_1 &= \frac{b}{c - (1-c) \sinh^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}}x\right)} \quad (150) \end{aligned}$$

A equação (150) tem o valor de um dos campos, que se denomina de  $\phi_1$ , para encontrar o outro campo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{2b}{(1+c) + (1-c) \left[ 2 \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) + 1 \right]} \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_2 &= \frac{2b}{(1+c) + 2(1-c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) + (1-c)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_2 &= \frac{2b}{2 + 2(1-c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_2 &= \frac{b}{1 + (1-c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} \end{aligned} \quad (151)$$

As equações (150) e (151) são os valores dos campos, cujos gráficos estão ilustrados abaixo:

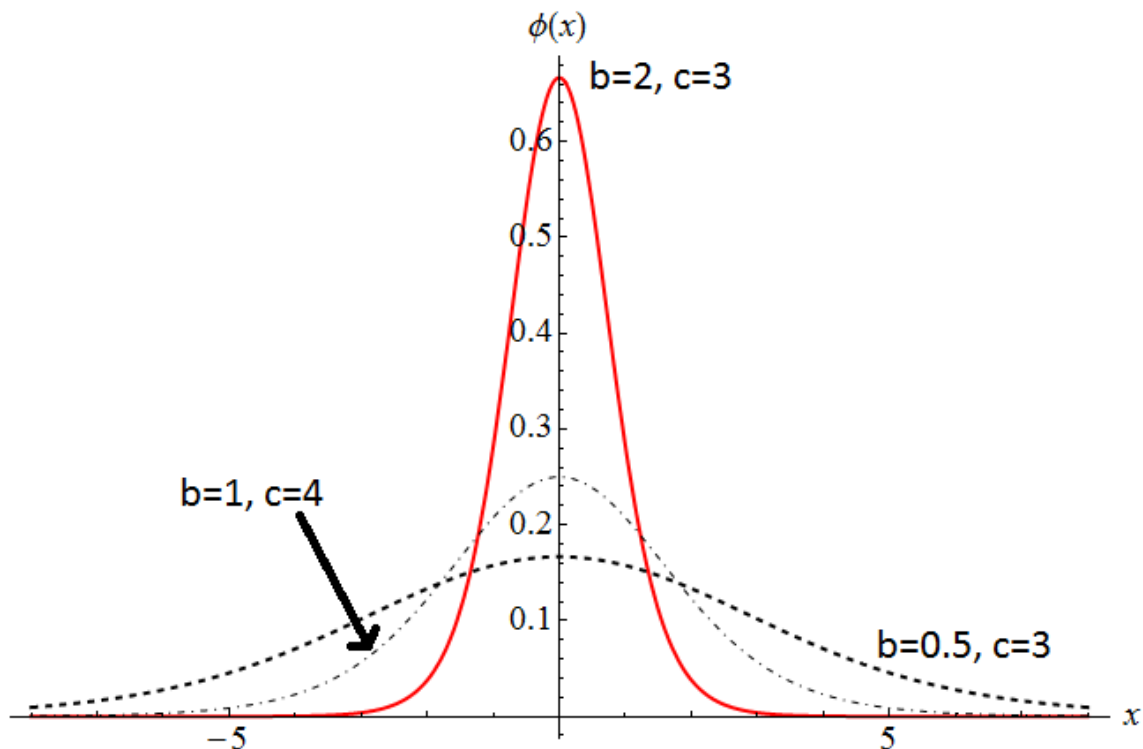


Gráfico 2.16: Gráfico do campo  $\phi_1(x)$  no modelo  $\phi^4$  modificado



O gráfico de  $\phi_2(x)$  mostrado no gráfico 2.16 tem um comportamento excelente, pois descreve um *lump* clássico, a linha vermelha corresponde ao campo  $\phi_1(x)$  quando os parâmetros são  $b = 2$  e  $c = 3$ , a linha preta tracejada quando os parâmetros  $b = 0.5$  e  $c = 3$  e a linha preta pontilhada e tracejada quando  $b = 1$  e  $c = 4$ , os gráficos não apresentam nenhuma “anomalia” na sua forma.

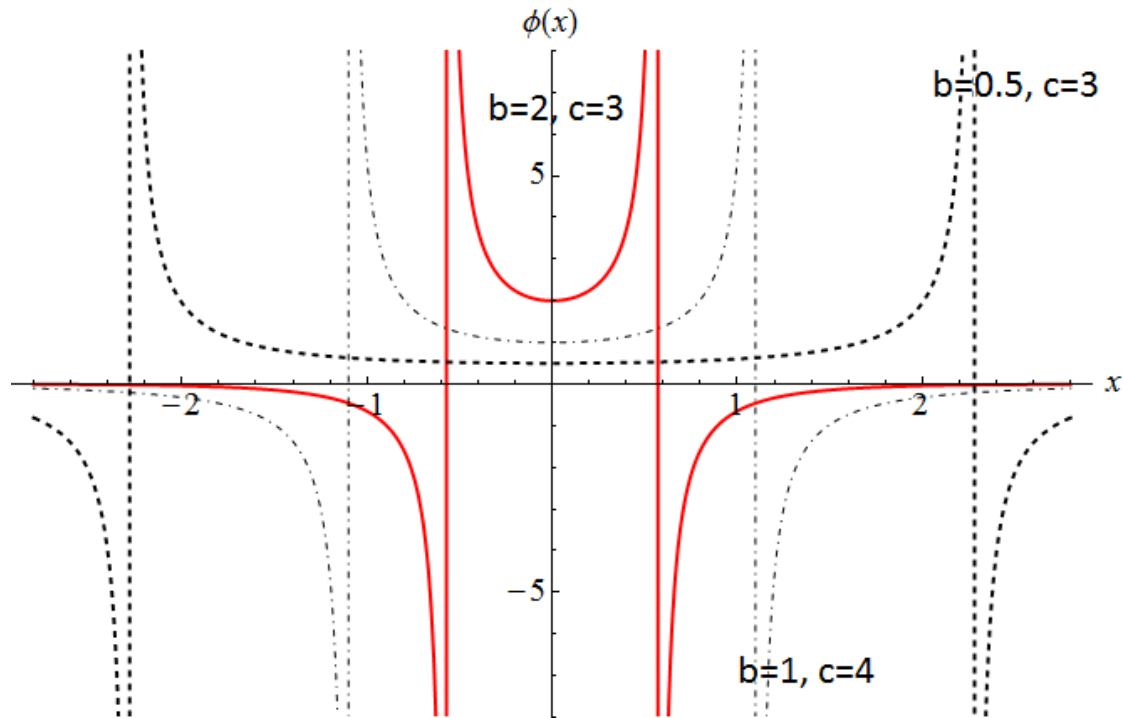


Gráfico 2.17: Gráfico do campo  $\phi_2(x)$  no modelo  $\phi^4$  modificado

O gráfico de  $\phi_2(x)$  tem um comportamento estranho, aqui foi considerado os mesmos parâmetros que no campo  $\phi_1(x)$ , ou seja, a linha vermelha corresponde ao campo  $\phi_2(x)$  quando os parâmetros são  $b = 2$  e  $c = 3$ , a linha preta tracejada quando os parâmetros  $b = 0.5$  e  $c = 3$  e a linha preta pontilhada e tracejada quando  $b = 1$  e  $c = 4$ . Como foi usado sempre os valores de  $c > 1$ , isso pode ser interpretado como sendo que esse campo não comportasse qualquer valor do parâmetro  $c$ , apenas alguns valores.

No campo  $\phi_2(x)$ , quando faz-se o valor de  $c \rightarrow 1$ , obtêm:

$$\phi_2 = b \quad (152)$$

Que seria um valor constante para qualquer que seja o valor da coordenada  $x$ . Quando  $c > 1$  o *lump* cresce indefinidamente, como foi visto no gráfico 2.17 no campo  $\phi_2(x)$ , pois o valor do campo tem a forma:

$$\phi_2 = \frac{b}{1 - w \operatorname{senh}^2\left(\sqrt{\frac{b^2}{c}} x\right)} \quad (153)$$

Onde  $w$  é uma constante positiva. Essa função tem o gráfico da forma do gráfico 2.17, e, portanto, não é interessante acontecer esse tipo de anomalia. Quando o parâmetro  $c$  se aproxima de 1 pela esquerda, então o campo  $\phi_2(x)$  se comporta da seguinte forma:

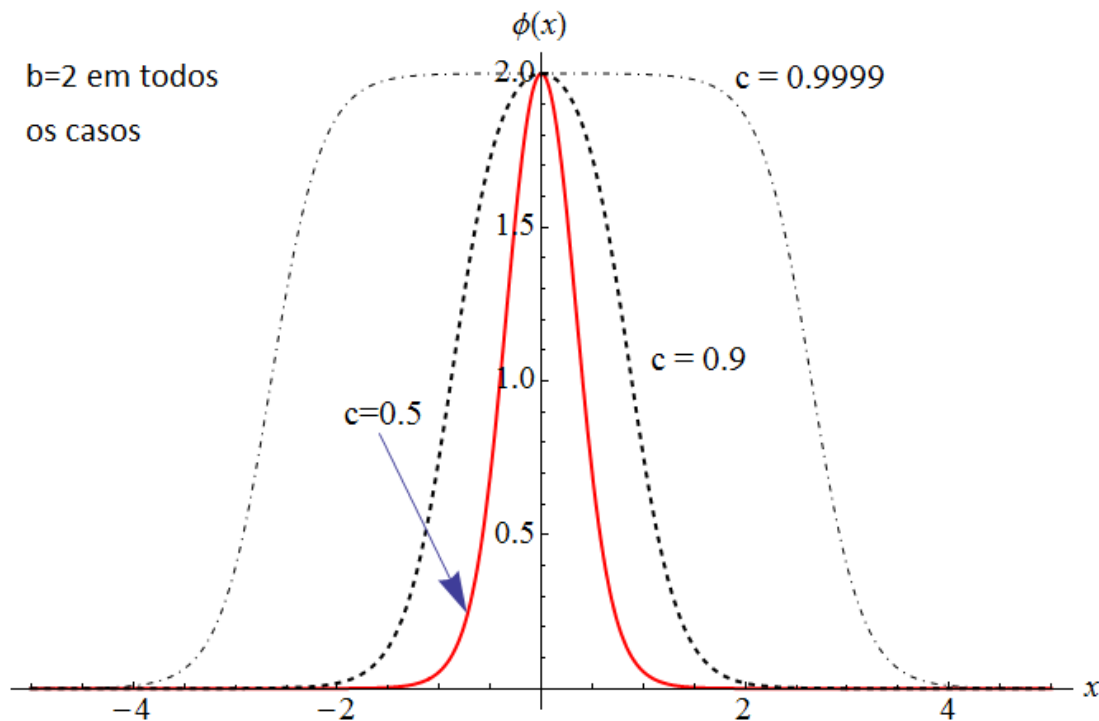


Gráfico 2.18: Gráfico do campo  $\phi_2(x)$  quando  $c \rightarrow 1$  pela esquerda

Nesse gráfico foi considerado que o parâmetro  $b = 2$  para os três casos, mas o parâmetro  $c$  foi alterado, de forma que para a linha vermelha,  $c = 0.5$ , para a linha negra tracejada,  $c = 0.9$  e para a linha negra fina tracejada e pontilhada,  $c = 0.9999$ , provando que, quanto mais o valor de  $c$  se aproxima de 1, mais esse gráfico se tornaria uma linha reta paralela ao eixo  $x$ .

Já no caso do campo  $\phi_1(x)$  é o inverso, quando  $c < 1$ , o gráfico do campo  $\phi_1(x)$  fica semelhante ao campo apresentado pelo gráfico 2.17. Para efeito de prova, faremos o gráfico do campo  $\phi_1(x)$  quando o parâmetro  $c$  se aproxima de 1 pela direita, tem-se que:

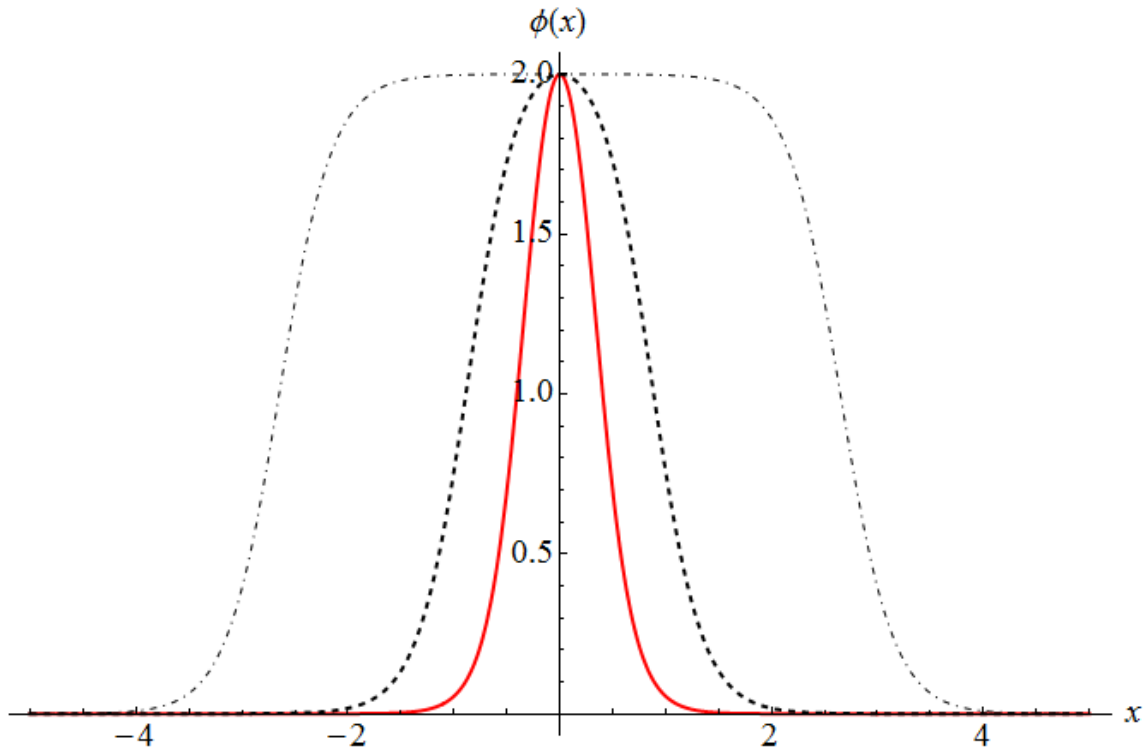


Gráfico 2.19: Gráfico do campo  $\phi_1(x)$  quando  $c \rightarrow 1$  pela direita

De forma análoga, o campo  $\phi_1(x)$  também tende a um valor constante quando  $c \rightarrow 1$  pela direita, quando  $c < 1$ , o *lump* cresce indefinidamente, de forma complementar a do caso  $\phi_2(x)$ .

Após estudar os campos e suas respectivas áreas de singularidades, estuda-se a densidade de energia  $\mathcal{E}(x)$ , como a densidade de energia depende do potencial, e o potencial depende dos campos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , então têm-se duas densidades de energia, que serão denominados de  $\mathcal{E}_1(x)$  e de  $\mathcal{E}_2(x)$  para os campos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , respectivamente.

Como  $\mathcal{E}(x) = 2V(x)$  definido pela equação (71), então tem que descobrir o valor de  $V_1(x)$  e de  $V_2(x)$  para se determinar o valor da energia, ou seja:

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= 2 \left( \frac{b}{c - (1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} \right)^2 \left( \frac{b}{c - (1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} - b \right) \\
&\cdot \left( \frac{b}{c - (1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} - \frac{b}{c} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow V_1(x) = \frac{2b^2}{\left( c - (1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right)^2} \left( \frac{b - bc + b(1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)}{c - (1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} \right) \\
&\cdot \left( \frac{bc - bc + b(1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)}{c \left( c - (1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right)} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow V_1(x) = \frac{2b^4}{c \left( c - (1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right)^4} \left( 1 - c + (1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right) \\
&\cdot \left( (1 - c) \operatorname{senh}^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right) \tag{154}
\end{aligned}$$

O valor de  $V_1(x)$  deu uma expressão bem grande, e espera-se que o valor de  $V_2(x)$  seja de tamanho semelhante, para isso, calcula-se o valor de  $V_2(x)$  como segue:

$$\begin{aligned}
V_2(x) &= 2 \left( \frac{b}{1 + (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} \right)^2 \left( \frac{b}{1 + (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} - b \right) \\
&\cdot \left( \frac{b}{1 + (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} - \frac{b}{c} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow V_2(x) = \frac{2b^4}{\left( 1 + (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right)^2} \left( \frac{1 - 1 - (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)}{1 + (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)} \right) \\
&\cdot \left( \frac{c - 1 - (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right)}{c \left( 1 + (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right)} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow V_2(x) = - \frac{2b^4}{c \left( 1 + (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right)^4} \left( (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right) \\
&\cdot \left( c - 1 - (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right) \tag{155}
\end{aligned}$$

Com as equações (154) e (155), dá para determinar o valor das densidades de energia  $\mathcal{E}_1(x)$  e de  $\mathcal{E}_2(x)$ , logo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(x) &= \frac{4b^4}{c \left( c - (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right)^4} \left( 1 - c + (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right) \\
&\cdot \left( (1-c) \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{b^2}{c}} x \right) \right) \tag{156}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(x) = & -\frac{4b^4}{c \left(1 + (1-c) \operatorname{senh}^2 \left(\sqrt{\frac{b^2}{c}} x\right)\right)^4} \left( (1-c) \operatorname{senh}^2 \left(\sqrt{\frac{b^2}{c}} x\right) \right) \\ & \cdot \left( c - 1 - (1-c) \operatorname{senh}^2 \left(\sqrt{\frac{b^2}{c}} x\right) \right) \end{aligned} \quad (157)$$

Depois de determinados os valores das densidades de potencial  $\mathcal{E}_1(x)$  e de  $\mathcal{E}_2(x)$ , ilustra-se o gráfico dessas densidades, como mostra o gráfico abaixo.

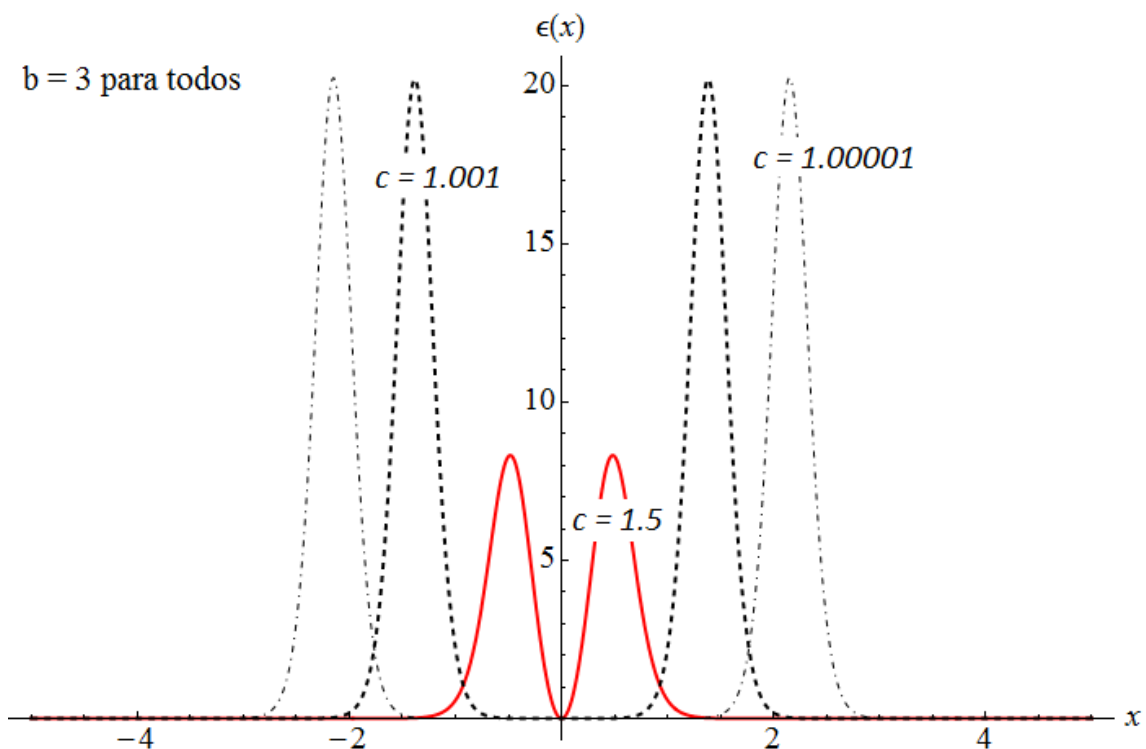


Gráfico 2.20: Gráfico da densidade de energia  $\mathcal{E}_1(x)$  no modelo  $\phi^4$  modificado

Neste gráfico, os parâmetros são definidos como:  $b = 3$  para todos,  $c = 1.5$  para a linha vermelha,  $c = 1.001$  para a linha negra tracejada e  $c = 1.00001$  para a linha negra pontilhada e tracejada, nota-se que os picos da densidade de energia convergem para um limite máximo, já que quando o parâmetro  $c$  saiu de 1.001 para 1.00001 não teve muita diferença, já a distância entre os picos aumenta quando o valor de  $c$  diminui.

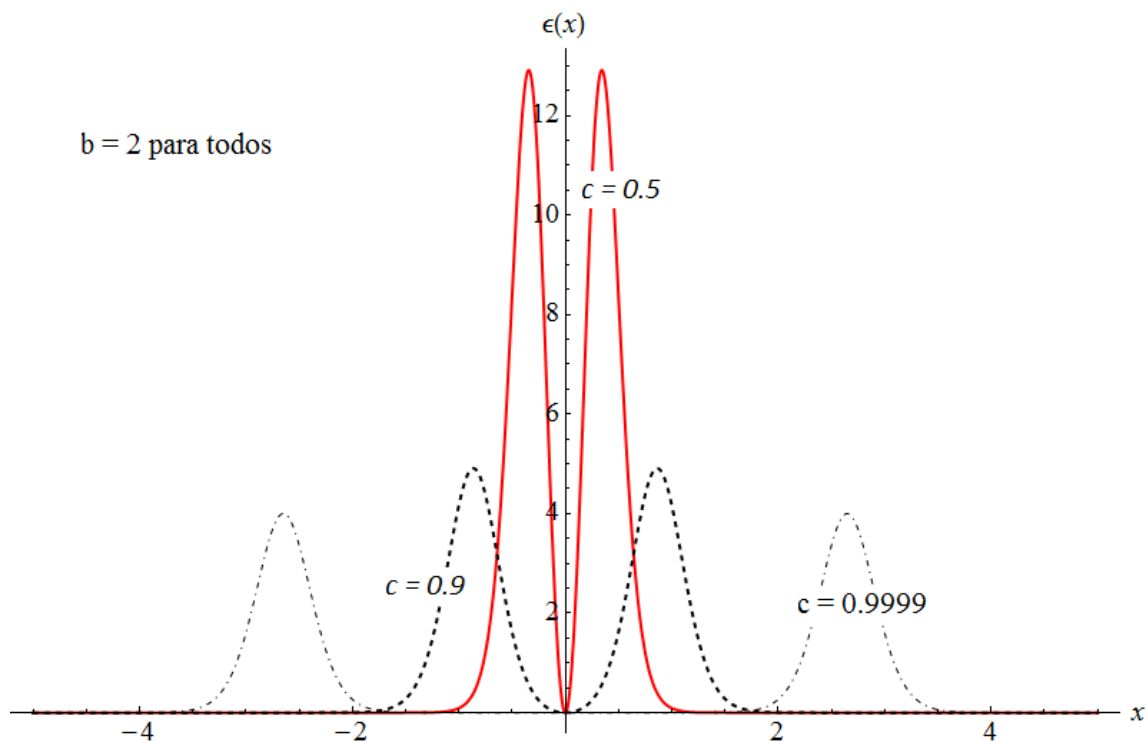


Gráfico 2.21: Gráfico da densidade de energia  $\mathcal{E}_2(x)$  no modelo  $\phi^4$  modificado

De forma análoga, o gráfico da densidade de energia apresenta dois picos, e os parâmetros nesse caso foram:  $b = 2$  para todos,  $c = 0.5$  para a linha vermelha,  $c = 0.9$  para a linha negra tracejada, e  $c = 0.9999$  para a linha negra pontilhada e tracejada. Aqui também se nota que a altura dos picos converge para um valor quando o parâmetro  $c$  vai para 1, e a distância entre os dois picos aumenta quando o valor de  $c$  aumenta.

O cálculo da energia total pode ser feita daquela forma que já foi explicitada em seções anteriores, explicitando a função  $W(\phi)$  por meio do potencial dado em (141), porém a expressão fica cada vez mais incômoda para se obter o cálculo explícito, além de ser praticamente antieconômico de se calcular essa função neste caso, portanto, como já foi abordado essa linha de raciocínio antes, não o explicitaremos agora nem na próxima subseção, cuja expressão será muito pior de ser escrita, privando apenas no estudo dos gráficos do campo e da densidade de energia.

### 2.3.3 Modelo $\phi^3$ modificado

O modelo  $\phi^3$  modificado é descrito pelo potencial:

$$V(\phi) = 2p^2\phi^{2-2/p}(1 - a - \phi^{1/p})(a + \phi^{1/p})^2 \quad (158)$$

Onde  $a$  e  $p$  são parâmetros positivos, com  $a \in [0,1]$  e  $p = 1, 3, 5 \dots$  é um número ímpar inteiro. Esse modelo é determinado pelos dois parâmetros, que controlam novas propriedades interessantes para as soluções não topológicas, para  $a = 0$  e  $p = 1$ , o modelo reduz ao modelo  $\phi^3$  canônico descrito na subseção 2.2.1.

O potencial modificado tem a forma gráfica como mostrada abaixo.

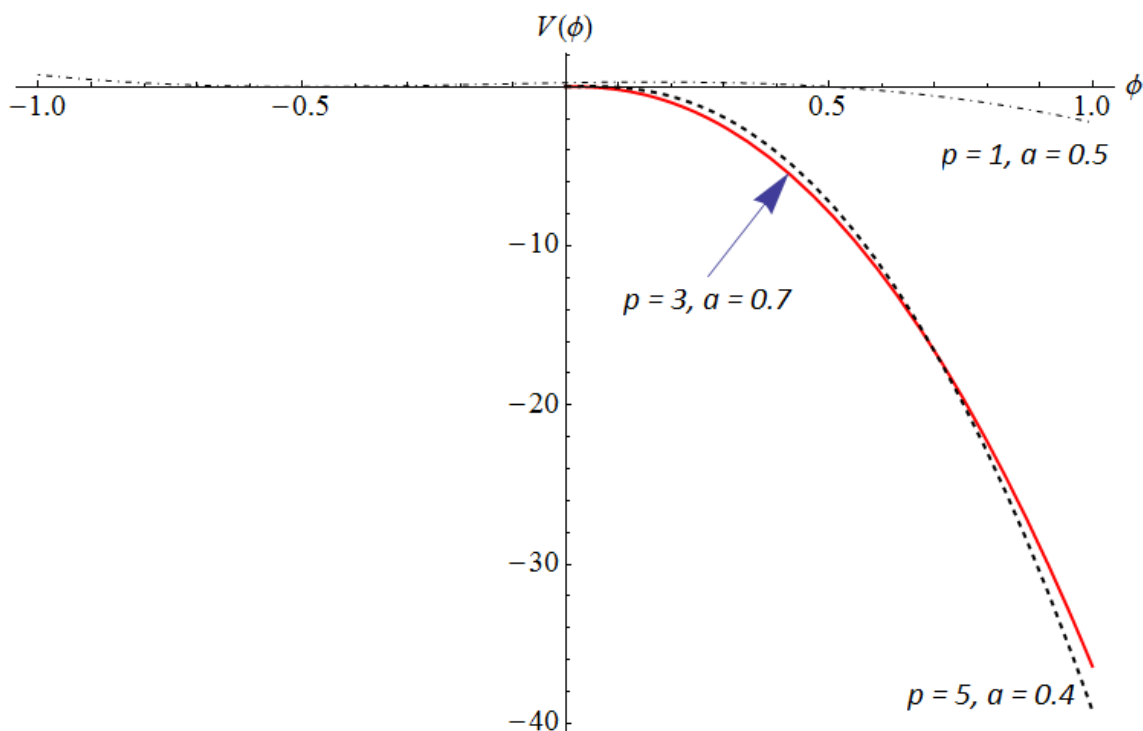


Gráfico 2.22: Gráfico do potencial  $V(\phi)$  no modelo  $\phi^3$  modificado

O gráfico acima foi criado com os seguintes parâmetros: A linha vermelha quando  $a = 0.7$  e  $p = 3$ , a linha negra tracejada quando  $a = 0.4$  e  $p = 5$  e a linha negra tracejada e pontilhada quando  $p = 1$  e  $a = 0.5$ . Quando o valor de  $a \neq 1$ , o gráfico só exibe o lado quando  $x > 0$ , pois, quando  $x < 0$  aparecerão raízes complexas, portanto,



não aparecem no gráfico os valores. Para se calcular o campo  $\phi$  devido a esse potencial, tem que se determinar a função  $W_\phi$  definida em (31), portanto:

$$\begin{aligned}
 V(\phi) &= 2p^2 \phi^{2-2/p} (1-a-\phi^{1/p})(a+\phi^{1/p})^2 = \frac{1}{2} W_\phi^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow W_\phi &= 2p \sqrt{\phi^{2-\frac{2}{p}} \left(1-a-\phi^{\frac{1}{p}}\right) \left(a+\phi^{\frac{1}{p}}\right)^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow W_\phi &= 2p \left(a+\phi^{\frac{1}{p}}\right) \sqrt{\phi^{2-\frac{2}{p}} \left(1-a-\phi^{\frac{1}{p}}\right)} \quad (159)
 \end{aligned}$$

Com a equação (159) em mãos, substitui-la em qualquer uma das equações diferenciais (49), (50), (51) e (52) para se determinar o campo  $\phi$ , logo:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi}{dx} &= -2p \left(a+\phi^{\frac{1}{p}}\right) \sqrt{\phi^{2-\frac{2}{p}} \left(1-a-\phi^{\frac{1}{p}}\right)} \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\frac{d\phi}{2p \left(a+\phi^{\frac{1}{p}}\right) \sqrt{\phi^{2-\frac{2}{p}} \left(1-a-\phi^{\frac{1}{p}}\right)}} &= dx \Rightarrow \\
 \Rightarrow \int dx &= -\int \frac{d\phi}{2p \left(a+\phi^{\frac{1}{p}}\right) \sqrt{\phi^{2-\frac{2}{p}} \left(1-a-\phi^{\frac{1}{p}}\right)}} \quad (160)
 \end{aligned}$$

Apesar da equação (160) parecer insolúvel, na verdade essa integral é muito mais simples de se calcular, pois, fazendo a seguinte substituição:

$$\phi = (\operatorname{sech}^2(u) - a)^p \quad (161)$$

$$\frac{d\phi}{du} = \frac{d}{du} [(\operatorname{sech}^2(u) - a)^p] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{du} = p(\operatorname{sech}^2(u) - a)^{p-1} \frac{d}{du} [\operatorname{sech}^2(u)] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\phi}{du} &= -2p(\operatorname{sech}^2(u) - a)^{p-1} \operatorname{sech}^2(u) \tanh(u) \Rightarrow \\ \Rightarrow d\phi &= -p(\operatorname{sech}^2(u) - a)^{p-1} \operatorname{sech}(u) \tanh(u) du \end{aligned} \quad (162)$$

Na equação (160), obtêm-se que:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{2p(\operatorname{sech}^2(u) - a)^{p-1} \operatorname{sech}^2(u) \tanh(u)}{2p(a + \operatorname{sech}^2(u) - a) \sqrt{((\operatorname{sech}^2(u) - a)^p)^{2-\frac{2}{p}}(1 - a - \operatorname{sech}^2(u) + a)}} du \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \int \frac{(\operatorname{sech}^2(u) - a)^{p-1} \operatorname{sech}^2(u) \tanh(u)}{\operatorname{sech}^2(u) \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(u)} \sqrt{(\operatorname{sech}^2(u) - a)^{2p-2}}} du \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \int du \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= u \end{aligned} \quad (163)$$

Substituindo a equação (163) em (161), determina-se o valor do campo em relação à coordenada  $x$ .

$$\phi(x) = (\operatorname{sech}^2(x) - a)^p \quad (164)$$

Onde o gráfico desse campo está ilustrado abaixo:

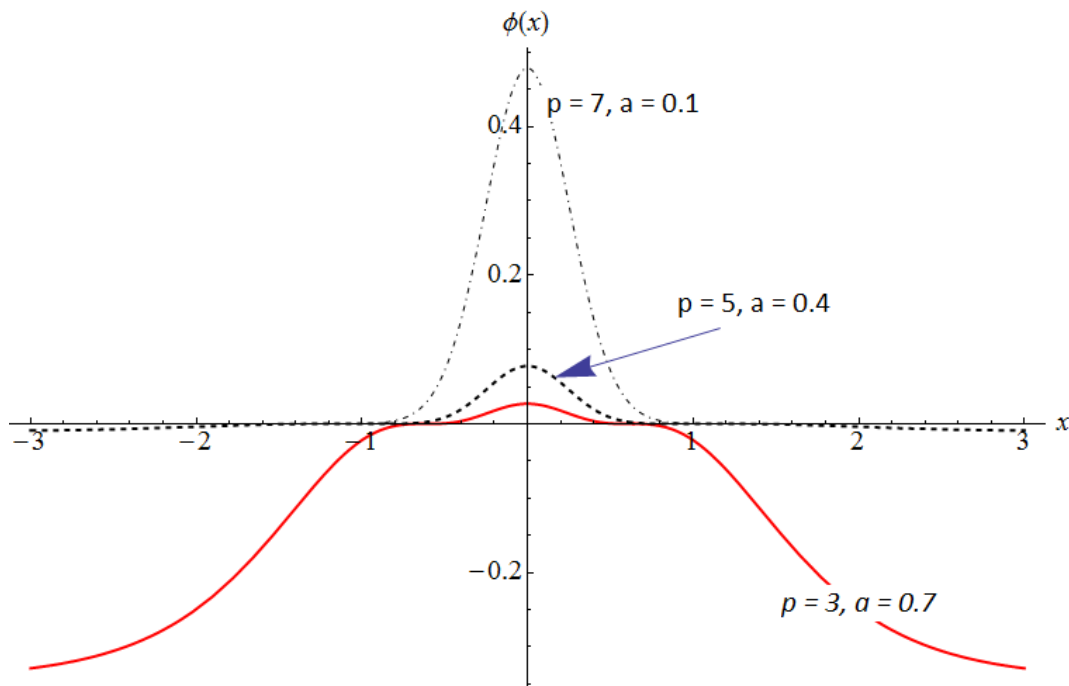


Gráfico 2.23: Gráfico do campo  $\phi(x)$  no modelo  $\phi^3$  modificado

O gráfico acima foi feito com os parâmetros da seguinte forma: para a linha vermelha,  $p = 3$  e  $a = 0.7$ , para a linha negra tracejada,  $p = 5$  e  $a = 0.4$  e para a linha negra pontilhada e tracejada,  $p = 7$  e  $a = 0.1$ ; dá para notar que o gráfico representado pela linha vermelha tem um formato incomum, porém, tem características parecidas de um *lump* clássico.

Com o valor do campo, dá para se determinar a densidade de energia, que é definida como sendo  $\mathcal{E}(x) = 2V(x)$  na equação (71), por isso, tem que descobrir primeiramente o valor de  $V(x)$  como segue:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= 2p^2[(\operatorname{sech}^2(x) - a)^p]^{2-\frac{2}{p}} \left(1 - a - [(\operatorname{sech}^2(x) - a)^p]^{\frac{1}{p}}\right) \\
 &\cdot (a + [(\operatorname{sech}^2(x) - a)^p]^{1/p})^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow V(x) &= 2p^2(\operatorname{sech}^2(x) - a)^{2p-2}(1 - a - \operatorname{sech}^2(x) + a)(a + \operatorname{sech}^2(x) - a)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow V(x) &= 2p^2 \operatorname{sech}^4(x) (\operatorname{sech}^2(x) - a)^{2p-2}(1 - \operatorname{sech}^2(x)) \Rightarrow \\
 \Rightarrow V(x) &= 2p^2 \operatorname{sech}^4(x) (\operatorname{sech}^2(x) - a)^{2p-2} \tanh^2(x) \quad (165)
 \end{aligned}$$

A partir desse valor, faz-se o cálculo da densidade de energia:

$$\mathcal{E}(x) = 4p^2 \operatorname{sech}^4(x) (\operatorname{sech}^2(x) - a)^{2p-2} \tanh^2(x) \quad (166)$$

Cujo gráfico dessa função está ilustrado abaixo.

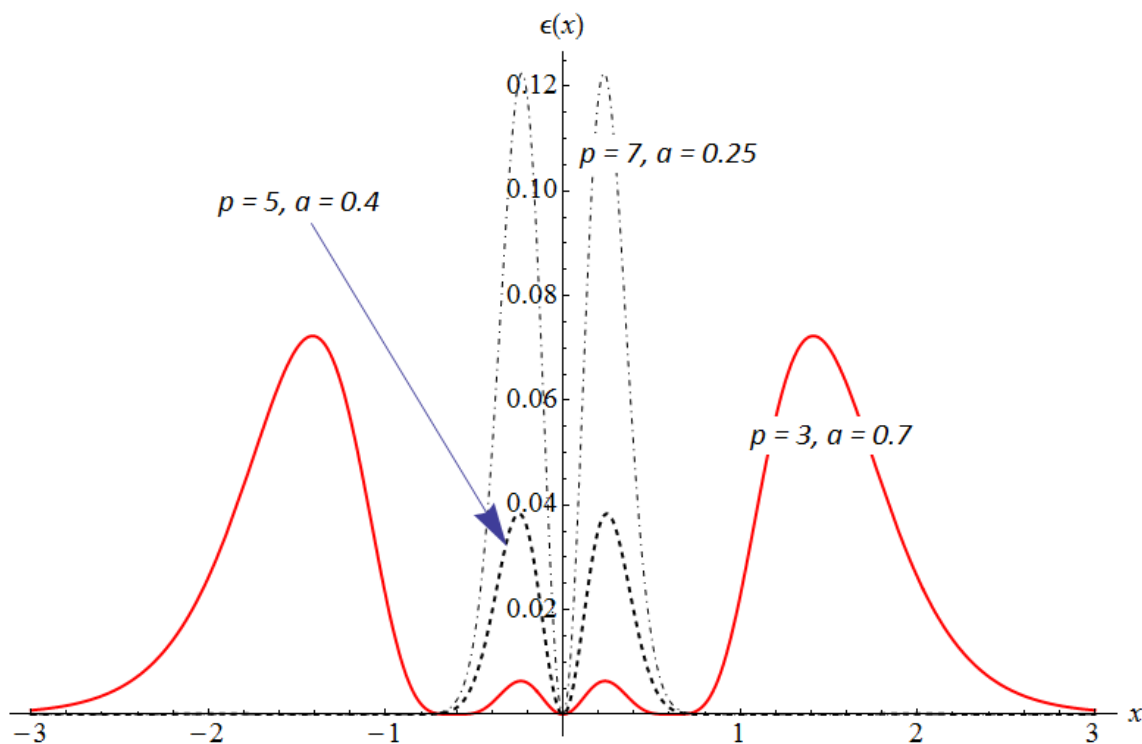


Gráfico 2.24: Gráfico da densidade de energia  $\mathcal{E}(x)$  no modelo  $\phi^3$  modificado

Aqui no gráfico 2.24, os parâmetros para a construção do gráfico são: para a linha vermelha,  $p = 3$  e  $a = 0.7$ , para a linha negra tracejada,  $p = 5$  e  $a = 0.4$  e para a linha fina pontilhada e tracejada,  $p = 7$  e  $a = 0.25$ . A linha vermelha apresenta ao invés de dois picos como é característico do gráfico da densidade de energia de *lumps* até então, este tem quatro picos, com dois picos próximos ao centro pequenos, e dois picos maiores; os outros picos descritos por outros parâmetros são de forma análoga aos picos de outros modelos analisados até aqui.

Como nas outras análises, a energia total desse modelo tem um valor finito, de modo que a integral do gráfico acima tem valor limitado, para calcular essa energia total, tem-se que calcular o valor de  $W(\phi)$  através da equação (159), porém, como na seção anterior, a expressão tem uma forma desagradável de se escrever e por isso não será colocado nesse trabalho, pois esse assunto já foi abordado de forma completa em subseções anteriores.

### 3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho estudaram-se vários modelos que contêm soluções não topológicas em vários contextos, potenciais ditos canônicos cujo potencial é descrito pelas literaturas correntes, e potenciais modificados, não presentes na literatura. Começou-se estudando o formalismo geral de primeira ordem, para situar o leitor de como abordar o problema proposto, daí define-se o que é uma estrutura topológica e não topológica, devido às condições de contorno quando o campo tende a mais e a menos infinito, e depois conduz esse estudo para estudar as estruturas não topológicas, que foi o centro da investigação proposta nesse trabalho; a partir desse estudo, foi-se levado a estudar equações diferenciais não lineares, e determinar o valor do campo através dessas equações, que nem sempre é de elementar solução, mas deu para se determinar soluções analíticas, tanto para os modelos ditos canônicos, quanto para os modelos modificados, também foi visto uma forma direta para se obter a energia de uma estrutura topológica, na qual se torna mais complicada de se escrever quando trata-se de modelos modificados, pois, tamanho é a expressão e a dificuldade de se calcular a integral que leva a essas energias.

No decorrer do trabalho explicitam-se três modelos modificados para se obter várias soluções tipo *lump*, que tiveram a mesma forma gráfica do campo, também foi explicitado para investigar se teria como obter soluções analíticas para esses perfis não topológicos, fato que se mostrou possível, enriquecendo ainda mais o estudo matemático e analítico nesse trabalho.

#### 4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVELAR. A.T., BAZEIA, D., LOSANO. L., MENEZES. R. *The European Physical Journal C*, 2008. p.133-143

DRAZIN, P.G. *Solitons: an introduction*. Cambridge, Cambridge University Press, 1989

RAJARAMAN, R. *Solitons and instantons*. Amsterdam, North-Holland, 1982

WHITHAM, G.B. *Linear and nonlinear waves*. New York, Wiley, 1974

WILETS, L. *Non topological solitons*, Singapura, World Scientific, 1989

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Federal do Ceará

Biblioteca do Curso de Física

---

M486e Melo, Tede Fernandes

Estruturas não topológicas no modelo do campo escalar./ Melo, Tede Fernandes Melo – Fortaleza: [s.n], 2011.

78 f. : Il.,color. , enc. ; 30 cm.

Monografia (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Programa de Graduação, Fortaleza, 2011.

Área de Concentração: Física Teórica

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

1. Teoria Quântica de Campos. 2.Física Teórica. I. Título.

CDD 530.146

---