



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ.
CENTRO DE CIÊNCIAS.
DEPARTAMENTO DE FÍSICA.**

THIAGO ALVES DE MOURA

A FRUSTRAÇÃO DA REFLEXÃO TOTAL REVISITADA

FORTALEZA

2014

THIAGO ALVES DE MOURA

A FRUSTRAÇÃO DA REFLEXÃO TOTAL REVISITADA

Monografia apresentada ao Curso de Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de bacharel em física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Araújo Silva.

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

-
- M889f Moura, Thiago Alves de
A Frustração da reflexão total revisitada./ Thiago Alves de Moura. – Fortaleza: [s.n],
2014.
50 f. : Il.col., enc. ; 30 cm.
Monografia – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Física, Programa de Graduação em Física, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: **Eletromagnetismo clássico.**
- Orientação: **Prof. Dr. Marcos Antônio Araújo Silva**
1. **Ondas eletromagnéticas.** 2.**Eletromagnetismo.** 3.**Ondas (física).** I. Título.
CDD 539.2
-

THIAGO ALVES DE MOURA

A FRUSTRAÇÃO DA REFLEXÃO TOTAL REVISITADA

Monografia apresentada ao Curso de Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de bacharel em física.

Aprovada em 07/07/2014

BANCA EXAMINADORA

Prof . Dr. Marcos Antônio Araújo Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof . Dr. Josué Mendes Filho
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Eduardo Bedê Barros
Universidade Federal do Ceará

A Deus.

Aos meus pais, Alexandre e Elza.

À minha irmã, Camila.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida.

Aos meus pais, Alexandre e Elza, e à minha irmã, Camila, por toda a compreensão, apoio, amor e valores.

Aos professores doutores Marcos Silva e Nildo Dias, por toda a compreensão, paciência e orientações durante meus anos de monitoria.

Ao professor Marcos Paulo Soares, cujos esforços foram fundamentais para a minha formação.

Ao professor doutor Silvano Menezes, *in memoriam*, por toda a contribuição em meus primeiros anos de graduação, por ensinamentos que me foram muito úteis durante todo o meu curso e que, certamente, permanecerão por toda a minha vida.

Aos professores doutores José Ramos Gonçalves, Murilo Almeida, Raimundo Costa Filho, Josué Mendes Filho, Marlúcia Santiago, Carlos Alberto Almeida, Ricardo Renan Carvalho, José de Arimatéa Silva, Alejandro Ayala, Ilde Guedes, Ciro Nogueira Filho, Ismael Oliveira, Abdou Garba, Alberto Duarte e Frederico Girão por todo o conhecimento que me repassaram.

Às minhas professoras de francês, Marilane, Larissa, Liana, Silvânia e Patrícia, que, por meio de um novo idioma, me forneceram uma ferramenta, que complementou em muito a minha formação.

Aos inestimáveis amigos Andre Borba, Thaís Silva, Henrique Mesquita, José Enedilton Medeiros, Jocivânia Oliveira, Mairton Barros Júnior, Jessé Paiva, Angeline Pinheiro, Wendell Dantas, Cristiano Pereira, Caio Theberge, Ítalo Maranhão, Felipe Araújo, Everton Freitas, Nailson Oliveira, Aesley Soares, Sulyanne Almeida e Fellipe dos Santos por todos os anos de companheirismo, apoio, torcida por mim em momentos difíceis e pelos incontáveis momentos memoráveis.

Muito obrigado!

RESUMO

A reflexão total é um fenômeno há muito conhecido da óptica geométrica, mas com uma característica sutil, as ondas evanescentes, cuja total caracterização depende de aprimoramentos da teoria e dos métodos matemáticos utilizados. Este trabalho ocupa-se da modelização e verificação deste fenômeno. Em um primeiro momento, abordam-se os aprimoramentos teóricos necessários, via equações de Maxwell, e em seguida, introduz-se a notação complexa, ferramenta matemática essencial para o estudo de fenômenos oscilatórios. Segue-se a exposição aplicando-se as técnicas e teoria apresentadas ao estudo da reflexão e refração das ondas eletromagnéticas em meios dielétricos, o que culmina com o estudo da reflexão total, onde se deriva a existência das ondas evanescentes, cuja verificação é feita por meio de um experimento com micro-ondas e prismas de parafina. Em seguida, apresentam-se algumas aplicações do fenômeno abordado e sugere-se como trabalhos futuros, o aprimoramento do experimento, bem como o estudo das ondas evanescentes associadas a outras oscilações.

Palavras chave: Ondas evanescentes. Ondas eletromagnéticas. Eletromagnetismo.

ABSTRACT

The total reflection is a phenomenon long known of geometric optics, but with a subtle feature, evanescent waves, whose full characterization depends on enhancements of the theory and the mathematical methods used. This work deals with the modeling and verification of this phenomenon. At first, the improvements in theoretical approach are done, via Maxwell's equations, and then introduce the complex notation, essential mathematical tool for the study of oscillatory phenomena. Follows exposure by applying the techniques and the theory presented to study the reflection and refraction of electromagnetic waves in dielectric media, which culminates with the study of total reflection, which derives the existence of evanescent waves, whose verification is done by in an experiment with a microwave and prisms of paraffin. Then, we present some applications of the phenomenon discussed and it is suggested as future work, the improvement of the experiment, as well as the study of evanescent waves associated with other oscillatory phenomena.

Keywords: Evanescent waves. Electromagnetic waves. Electromagnetism.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1-	Reflexão: O ângulo de incidência, θ_i , é igual ao ângulo de reflexão, θ_r13
Figura 2-	Refração. Quando ocorre refração, é verificada a lei de Snell-Descartes.....14
Figura 3 -	Refração no caso de um raio incidente sob o ângulo limite, θ_c . O raio refratado é tangente à superfície de separação entre os dois meio.....15
Figura 4 -	Reflexão interna total de um raio de luz que se propaga de um meio mais refringente para um meio menos refringente e incide na superfície de separação sob um ângulo maior que o ângulo crítico.....15
Figura 5 -	Reflexão interna total frustrada. em torno do ponto de contato, existe toda uma região para a qual ocorre transmissão dos raios incidentes.....16
Figura 6 -	Gráfico de f em função de x para $\varphi = 0$ e $t = 0$24
Figura 7 -	Evolução temporal de f em um ponto fixo.....25
Figura 8 -	Superfície de onda plana. Todos os pontos do plano perpendicular a \vec{k} estão em fase com A27
Figura 9 -	A distância entre dois planos de onda consecutivos, igual ao comprimento de onda, vale $\frac{2\pi}{k}$27
Figura 10 -	Ondas planas passando de um meio 1 para um meio 2.....32
Figura 11 -	Convenções sob a orientação dos campos para as equações de Fresnel.....35
Figura 12 -	Esquema para a verificação da onda evanescente.....41
Figura 13 -	Arranjo experimental com prismas de parafina para o estudo da onda evanescente.42
Figura 14 –	Gráfico das intensidades transmitida e refletida para a série B, conforme dados da Tabela 1.....45
Figura 15 -	Esquema das telas multi-toque baseadas na reflexão interna total.....46
Figura 16 -	Impressão digital na face espelhada de um prisma.....46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1-	Valores experimentais obtidos para a intensidade da micro-onda. Escala de 10 mA com polarização paralela (//).....	43
Tabela 2-	Valores experimentais obtidos para a intensidade da micro-onda. Escala de 30 mA com polarização paralela (//) e com um único detector.....	43
Tabela 3-	Valores experimentais obtidos para a intensidade da micro-onda. Escala de 30 mA com polarização paralela (//) com dois detectores independentes.....	44
Tabela 4-	Valores experimentais obtidos para a intensidade da micro-onda. Escala de 30 mA com polarização perpendicular (\perp) com dois detectores independentes.....	44

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
2 REFLEXÃO INTERNA TOTAL NA ÓPTICA GEOMÉTRICA.....	12
3 REFLEXÃO INTERNA TOTAL FRUSTRADA, EVIDÊNCIA EXPERIMENTAL... 	16
4 EQUAÇÕES DE MAXWELL.....	18
4.1 Equações de Maxwell em meios dielétricos.....	21
5 ONDAS MONOCROMÁTICAS E ONDAS PLANAS.....	24
6 NOTAÇÃO COMPLEXA.....	29
7 REFLEXÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS EM MEIOS DIELÉTRICOS.....	32
7.1 Relações de Fresnel em meios dielétricos.....	34
8 REFLEXÃO TOTAL.....	38
8.1 Reflexão total frustrada. Verificação experimental dos campos evanescentes.....	41
9 ALGUMAS APLICAÇÕES PRÁTICAS DA REFLEXÃO TOTAL FRUSTRADA... 	46
10 CONCLUSÕES.....	48

REFERÊNCIAS

ANEXOS

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por finalidade o estudo teórico e verificação experimental da reflexão total frustrada e das ondas evanescentes, fenômenos sutil do eletromagnetismo, porém com diversas aplicações tecnológicas, que se baseiam no seu rápido decréscimo com a distância à superfície refletora, como as telas multi-toque, que se popularizaram nos últimos dez anos, e a biometria. Inicia-se a abordagem com uma breve apresentação dos princípios da óptica geométrica (Cap. 2), onde se evidencia a incapacidade desta em fornecer explicações teóricas satisfatórias para a onda evanescente, mostrado no Capítulo 3. Para suprir esta necessidade, dedica-se o Capítulo 4 e o Anexo A às equações de Maxwell e suas implicações para as ondas eletromagnéticas e para a óptica, por meio da derivação teórica da equação de onda para as componentes dos campos eletromagnéticos.

No Capítulo 5, as soluções em ondas planas monocromáticas, importante técnica para a solução da equação de onda, são exploradas e no Capítulo 6, é feito o aperfeiçoamento desta abordagem, por meio da notação complexa. Em seguida, aplica-se, no Capítulo 7, a teoria e ferramentas estabelecidas ao estudo da reflexão e refração das ondas planas monocromáticas em meios dielétricos.

No Capítulo 8, aborda-se a reflexão total e deduz-se a existência das ondas evanescentes, cujo comportamento de decréscimo exponencial em função da distância à superfície de separação entre os meios correlatos é evidenciado por meio de um experimento, utilizando micro-ondas e prismas de parafina.

No Capítulo 9, mencionam-se algumas aplicações tecnológicas contemporâneas, telas multi-toque e biometria, das ondas evanescentes. Em seguida, sugerem-se trabalhos futuros que aprimorarão o experimento de verificação, para que ondas evanescentes de luz visível sejam estudadas, e para que outros fenômenos com características semelhantes ao abordado sejam estudados.

2 REFLEXÃO INTERNA TOTAL NA ÓPTICA GEOMÉTRICA

Embora qualquer onda eletromagnética esteja sujeita aos fenômenos de reflexão e refração, as ondas de luz visíveis foram as primeiras para as quais tais fenômenos foram estudados. Para uma primeira abordagem e exposição do fenômeno tratado neste trabalho, apresenta-se neste capítulo as bases da óptica geométrica e a abordagem da reflexão interna total por meio dela.

A óptica geométrica tem como base alguns princípios fundamentais sobre a propagação dos raios de luz e duas leis simples, que descrevem a reflexão e a refração da luz. Como hipóteses fundamentais, considera-se:

- 1.1. A propagação retilínea da luz diz que em um meio homogêneo, transparente e isotrópico, a luz se propaga em linha reta e cada uma dessas retas recebe o nome de raio de luz;
- 1.2. A independência dos raios de luz que afirma que estes são independentes entre si, ou seja, que o comportamento de um raio de luz não interfere no comportamento do outro;
- 1.3. A reversibilidade dos raios de luz afirma que se o sentido de propagação de um raio de luz for invertido, ele percorrerá a mesma trajetória, mas em sentido contrário.

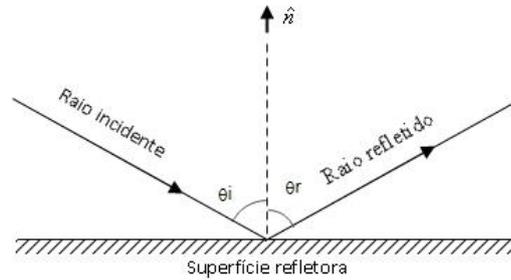
Na prática, é impossível isolar um raio de luz devido ao fenômeno da difração, e trabalha-se com feixes de luz, que são uma reunião de raios de luz paralelos entre si. Embora a propagação retilínea da luz não resista a uma verificação experimental mais aprofundada, ela ainda é suficiente para uma primeira abordagem dos fenômenos de reflexão e refração usando raios luminosos.

A reflexão e a refração são tratadas pela óptica geométrica por meio de dois conjuntos de leis, que são ilustradas nas figuras 1 e 2, a seguir.

Leis de reflexão: Se um raio de luz incide em uma superfície refletora, a reflexão obedece às seguintes regras:

- 1) Os raios incidente, refletido e a reta normal ao plano de incidência no ponto em que o raio incide são coplanares.
- 2) O ângulo formado entre o raio incidente e a reta normal ao plano de incidência no ponto em que o raio incide, chamado ângulo de incidência, é igual ao ângulo formado entre esta e o raio refletido, chamado ângulo de reflexão.

Figura 1 - Reflexão: O ângulo de incidência, θ_i , é igual ao ângulo de reflexão, θ_r .



Fonte: Próprio autor.

Leis de refração (Lei de Snell-Descartes): Quando um raio de luz incide na superfície que separa dois meios com índices de refração diferentes, ao raio que se propaga no segundo meio chamamos de raio refratado. As seguintes condições são satisfeitas:

- 1) Os raios incidente e refratado e a reta normal ao plano de incidência no ponto de incidência são coplanares;
- 2) É verificada a seguinte expressão, conhecida como lei de Snell-Descartes:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t, \quad (2.1)$$

onde, n_1 é o índice de refração do meio onde se propaga o raio incidente, é definido pelo quociente entre a velocidade de propagação da luz neste meio, v_1 , e a velocidade da luz no vácuo, c ;

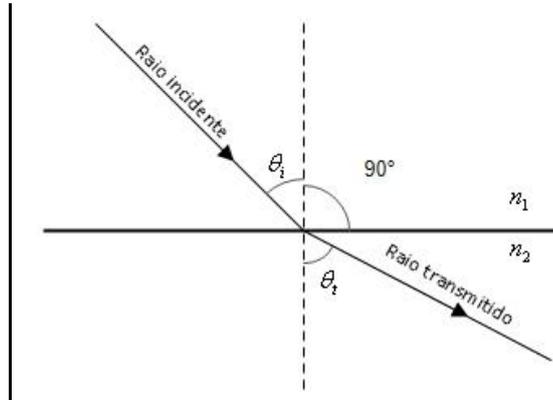
$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad (2.2)$$

n_2 é definido de maneira análoga a n_1 , sendo v_2 a velocidade de propagação da luz no segundo meio;

$$n_2 = \frac{c}{v_2} \quad (2.3)$$

θ_i e θ_t são os ângulos que os raios incidente e refratado fazem com a reta normal ao plano de incidência, no ponto de incidência, respectivamente.

Figura 2 - Refração. Quando ocorre refração, é verificada a lei de Snell-Descartes.



Fonte: Próprio autor.

A reflexão interna total ocorre quando $n_1 > n_2$ e o raio incidente possui determinados ângulos de incidência. Pela lei de Snell-Descartes,

$$\text{sen}\theta_t = \frac{n_1}{n_2} \text{sen}\theta_i \quad (2.4)$$

Se $n_1 > n_2$, então $\frac{n_1}{n_2} > 1$, logo,

$$\text{sen}\theta_t > \text{sen}\theta_i \quad (2.5)$$

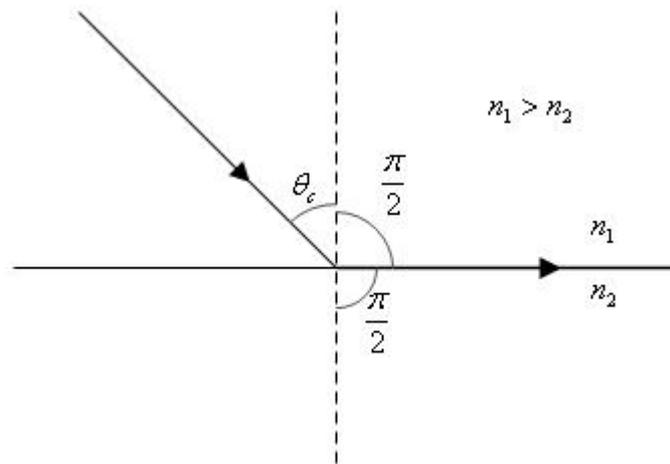
Como a função seno é monotonicamente crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, onde os ângulos θ_i e θ_t estão definidos, a equação 2.5 implica que

$$\theta_t > \theta_i. \quad (2.6)$$

Assim, aumentando θ_i pode-se aumentar θ_t até que este atinja o seu valor máximo, $\frac{\pi}{2}$. Neste caso, θ_i é representado por θ_c e recebe o nome de ângulo máximo de incidência (figura 3). Tem-se, pela equação 2.4, que

$$\text{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.7)$$

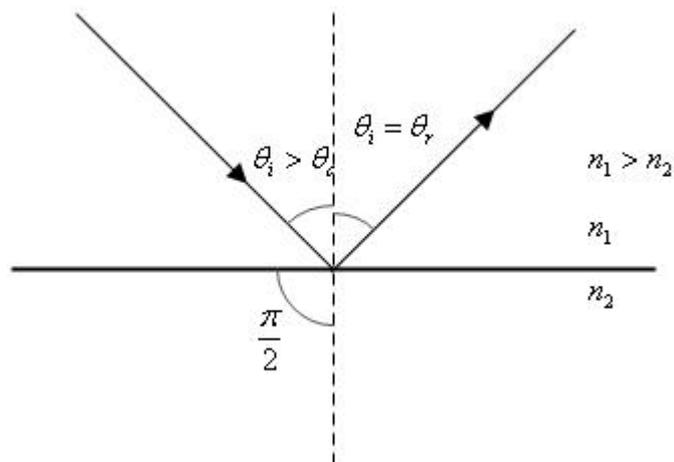
Figura 3 - Refração no caso de um raio incidente sob o ângulo limite, θ_c . O raio refratado é tangente à superfície de separação entre os dois meios.



Fonte: Próprio autor.

Quando o ângulo de incidência é maior do que θ_c , não há raio refratado e o raio incidente é refletido pela superfície de separação (figura 4). Este caso recebe o nome de reflexão interna total.

Figura 4 - Reflexão interna total de um raio de luz que se propaga de um meio mais refringente para um meio menos refringente e incide na superfície de separação sob um ângulo maior que o ângulo crítico.



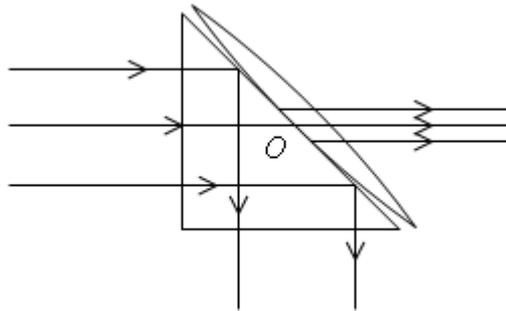
Fonte: Próprio autor.

3 REFLEXÃO INTERTA TOTAL FRUSTRADA, EVIDÊNCIA EXPERIMENTAL.

A abordagem geométrica apresentada anteriormente diz que, no caso da reflexão interna total, não há luz transmitida para o segundo meio, no entanto, observações experimentais refinadas contradizem o estabelecido. Nestes casos, fala-se em reflexão interna total frustrada. Dentre estas evidências experimentais, pode-se mencionar o seguinte experimento:

Faz-se incidir um feixe de luz perpendicular a uma das arestas de um prisma de reflexão total, espera-se que os raios sofram reflexão interna total no interior deste e que os raios refletidos saiam pelo lado ortogonal. Se à face refletora (hipotenusa) do prisma for acoplada uma lente que a tangencie, espera-se que o raio que incide no ponto de contato entre na lente e emane desta, no entanto, experimentalmente observa-se que em toda uma região, ao redor do ponto de contato, ocorre transmissão dos raios incidentes na superfície refletora do prisma (figura 5).

Figura 5 - Reflexão interna total frustrada. Em torno do ponto de contato, existe toda uma região para a qual ocorre transmissão dos raios incidentes.



Fonte: Próprio autor.

Embora a reflexão interna total frustrada fosse conhecida desde os primórdios da óptica geométrica, como na obra *Optics*, de Isaac Newton, esta era incapaz de fornecer explicações plausíveis, pois eram necessários modelos e ferramentas matemáticas mais elaboradas para tal. Com o estabelecimento do modelo ondulatório eletromagnético para a luz, juntamente com o amadurecimento matemático das ferramentas utilizadas em física e com a vital contribuição da unificação entre eletromagnetismo e óptica, a reflexão interna total frustrada foi finalmente explicada. Nos próximos capítulos, este fenômeno será abordado do ponto de vista eletromagnético.

4 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Para uma abordagem mais satisfatória da óptica, que explique a reflexão interna total frustrada, faz-se necessária uma abordagem eletromagnética, pois desta deriva-se o comportamento ondulatório da luz e de todas as outras radiações eletromagnéticas. Neste capítulo, serão apresentadas as equações de Maxwell e delas deduzidas as ondas eletromagnéticas.

As equações de Maxwell são fundamentais em física, constituem, juntamente com a lei de força de Lorentz, os postulados de base do eletromagnetismo clássico, foram resultado de anos de desenvolvimento dos estudos da eletricidade e do magnetismo, incorporando as leis intrínsecas desses (leis de Gauss, Ampère e Faraday) com o devido ajuste, na lei de Ampère, introduzido por Maxwell, que possibilitou a previsão teórica das ondas eletromagnéticas, que foram comprovadas posteriormente por Hertz.

Matematicamente, as equações de Maxwell formam um conjunto de equações diferenciais acopladas, que relacionam derivadas temporais e espaciais dos campos elétrico e magnético, e suas condições de contorno, e que valem para meios não homogêneos, não lineares e anisotrópicos. Em sua forma diferencial, elas se escrevem:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Onde:

$\rho(\vec{r}, t)$ representa a densidade volumétrica de carga elétrica no ponto \vec{r} , no instante t ;

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ representa o campo elétrico;

$\vec{B}(\vec{r}, t)$ representa o campo magnético no vácuo;

$\vec{J}(\vec{r}, t)$ representa a densidade de corrente;

ϵ_0 representa a permissividade elétrica do vácuo e

μ_0 representa a permeabilidade magnética do vácuo.

A equação (4.1) é a forma local do teorema de Gauss. Se $\rho = q\delta^3(\vec{r})$, onde $\delta^3(\vec{r})$ é o delta de Dirac, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q\delta^3(\vec{r})}{\epsilon_0}$. Integrando o divergente de \vec{E} sob um volume, encerrado por uma superfície fechada S e utilizando as propriedades do delta de Dirac, encontra-se, pelo teorema da divergência, a forma integral do teorema de Gauss:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (4.5)$$

Onde Q_{int} é a carga total encerrada pela superfície S .

A equação(4.3) é a forma local da lei de Faraday, ela diz que a variação temporal de um campo magnético cria um campo elétrico, sua forma integral, obtida por meio do teorema de Stokes, é a seguinte:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (4.6)$$

Onde C é o contorno fechado de uma superfície S . A equação (4.6) é mais conhecida sob a forma

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (4.7)$$

Onde \mathcal{E} é a força eletromotriz induzida em um circuito fechado que é atravessado por um fluxo magnético ϕ que varia com o tempo.

A equação (4.4) resulta de um aprimoramento da lei de Ampère, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, feito por Maxwell, que, considerando válida a conservação da carga elétrica, para satisfazer a identidade vetorial que diz que o divergente do rotacional de um vetor deve ser nulo, introduziu o termo $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Quando \vec{E} não varia com o tempo, a lei de Ampère continua válida e todos os resultados da magnetostática são preservados. Em sua forma integral, a equação (4.4) tem o seguinte aspecto:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (4.8)$$

Onde C é o contorno fechado da superfície S . A equação (4.8) pode ser derivada da equação (4.4) pela aplicação do teorema de Stokes. A dedução da correção de Maxwell encontra-se no Apêndice A.

Pelas equações de Maxwell, deduz-se o comportamento ondulatório dos campos elétrico e magnético. De fato, tomando-se o rotacional da equação (4.3),

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (4.9)$$

e utilizando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ e intercambiando o operador espacial com a derivada temporal no segundo membro da equação (4.9), obtêm-se:

$$\nabla^2 \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t} \quad (4.10)$$

Levando em conta as equações (4.1) e (4.4),

$$\nabla^2 \vec{E} - \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = \frac{\partial(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})}{\partial t} \quad (4.11)$$

Logo,

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (4.12)$$

Quando não há fontes de campo,

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.13)$$

A equação (4.13) é uma equação vetorial e cada componente do campo elétrico \vec{E} satisfaz a uma equação de onda com velocidade

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (4.14)$$

Por um procedimento análogo, o rotacional da equação (4.4) fornece:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t} \quad (4.15)$$

mas, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, pela equação (4.2), logo,

$$\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t} \quad (4.16)$$

levando-se em conta a equação (4.3), $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

$$\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (4.17)$$

em regiões onde não há fontes de campo,

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (4.18)$$

Cada componente do campo magnético \vec{B} satisfaz a uma equação de onda com velocidade

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (4.19)$$

As equações (4.13) e (4.18) mostram que as componentes dos campos elétrico e magnético no vácuo obedecem a uma equação de onda, cuja velocidade é igual à velocidade da luz, aproximadamente $3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$. Essa correspondência entre a velocidade das ondas eletromagnéticas e a da luz leva à correlação natural de que a luz é uma onda eletromagnética. Este é o grande resultado das equações de Maxwell, pois abriu o caminho para a unificação entre óptica e eletromagnetismo, além de exprimir a velocidade da luz, uma grandeza de difícil acesso ao censo comum, em função de constantes conhecidas. Embora as equações

(4.13) e (4.18) sugerem que os campos elétrico e magnético sejam independentes, esses ainda permanecem conectados pelas equações de Maxwell, não sendo independentes um do outro.

4.1 Equações de Maxwell em meios dielétricos.

As equações de Maxwell que foram descritas anteriormente são gerais e podem ser aplicadas em qualquer meio, no entanto, dependendo do meio, é necessário levar em conta o modo como esse reage aos campos eletromagnéticos, pois esta interação interfere nos geradores de campo. Neste capítulo serão analisadas as equações de Maxwell em um meio dielétrico.

Sendo \vec{P} o vetor polarização de um meio dielétrico, quando este é sujeito a um campo elétrico externo, surge, em seu interior, como resultado da deformação da nuvem eletrônica de cada átomo, uma densidade de carga que não pode se deslocar pelo meio, mas que intervém como geradora de campo. Tal carga é chamada de carga ligada e é expressa por

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (4.20)$$

Quando \vec{P} varia com o tempo, surge no interior do meio uma corrente de polarização expressa por

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (4.21)$$

Em um meio dielétrico, onde não há carga livre, a única densidade de carga que intervém nas equações de Maxwell é ρ_p . Logo,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \Rightarrow \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Em meios isotrópicos e lineares, \vec{E} e \vec{P} são colineares e proporcionais, em vista disso, \vec{P} é dado por

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad (4.23)$$

Onde χ é a susceptibilidade elétrica do meio dielétrico. Logo, nesses meios,

$$\vec{\nabla} \cdot [(1 + \chi) \vec{E}] = 0 \quad (4.24)$$

Esse termo dentro do colchete também é conhecido como deslocamento elétrico, \vec{D} , do meio.

Utilizando as equações (4.23) e (4.21) na equação de Maxwell (4.4),

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial (\vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} \Rightarrow \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial [(1 + \chi) \vec{E}]}{\partial t} \Rightarrow \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Definindo a permissividade elétrica ε do meio dielétrico por

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi),\tag{4.26}$$

As equações de Maxwell em um meio dielétrico ficam:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0\tag{4.27}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0\tag{4.28}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\tag{4.29}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\tag{4.30}$$

A única diferença entre as equações de Maxwell no vácuo [4.1, 4.2, 4.3 e 4.4] e as em um meio dielétrico [4.27, 4.28, 4.29 e 4.30] é o termo ε na quarta equação.

Por meio de um procedimento análogo ao efetuado anteriormente, onde se deduziu as ondas eletromagnéticas no vácuo, é possível mostrar as equações de ondas eletromagnéticas em um meio dielétrico:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\tag{4.31}$$

e

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.\tag{4.32}$$

Logo, as componentes dos campos elétrico e magnético em um meio dielétrico obedecem a uma equação de onda com velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}\tag{4.33}$$

Que é relacionada à velocidade c por

$$v = \frac{c}{n}\tag{4.34}$$

Onde n é definido como o índice de refração absoluto do meio e é dado por

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}. \quad (4.35)$$

5 ONDAS MONOCROMÁTICAS E ONDAS PLANAS

Considerando a equação de onda no caso unidimensional,

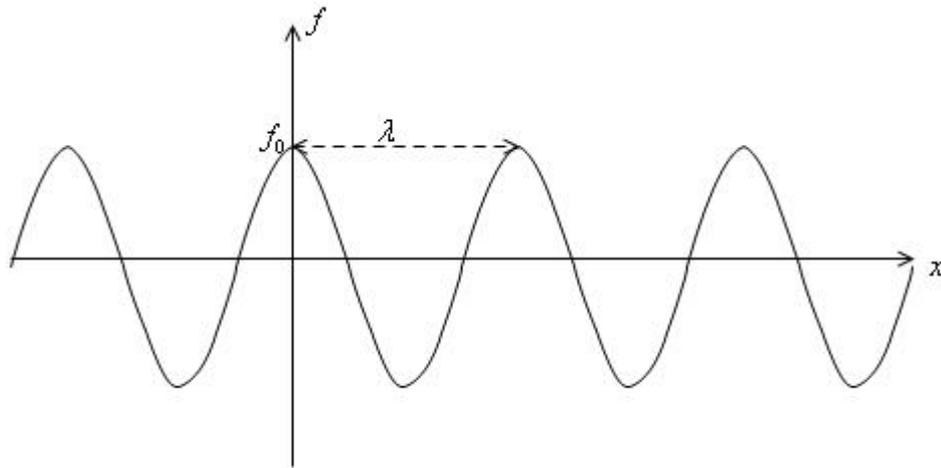
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

onde $f = f(x, t)$, é possível verificar que as funções da forma $f(x + vt)$ e $f(x - vt)$ a satisfazem. Uma aplicação importante de tal propriedade é o caso em que f é da forma

$$f(x, t) = f_0 \cos[k(x - vt) + \varphi], \quad (5.2)$$

onde f_0 , k e φ são constantes, pois, devido à linearidade da equação de onda, uma combinação linear de vários termos da forma (5.2) também é solução da mesma. Desta forma, ajustando diferentes combinações, pode-se obter a solução do problema físico, associado com suas condições de contorno características. Sem perda de generalidade, pode-se considerar $\varphi = 0$ para o que se segue. Em um tempo t fixo, o gráfico de f tem seu aspecto demonstrado abaixo (Figura 6).

Figura 6 - Gráfico de f em função de x para $\varphi = 0$ e $t = 0$.



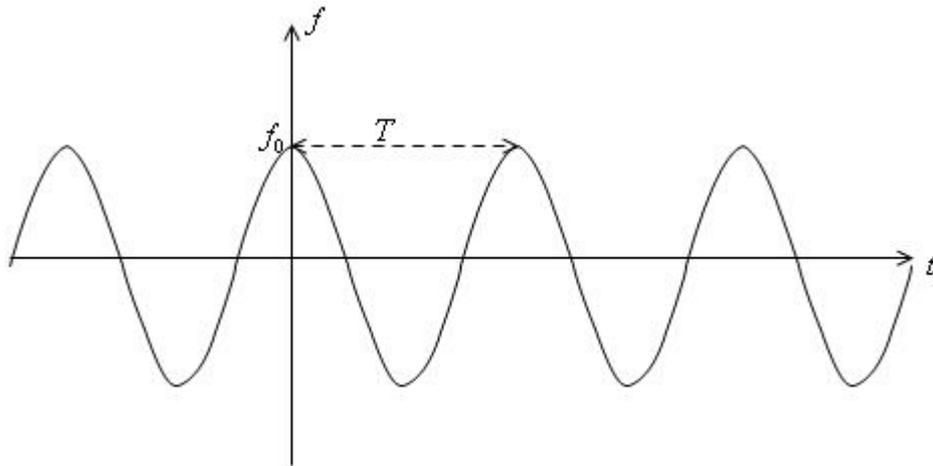
Fonte: Próprio autor.

λ é tal que $f_0 \cos(k\lambda) = f_0$, logo,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (5.3)$$

λ é chamado de comprimento de onda, é o menor valor pelo qual x deve variar, em um tempo fixo, para que o valor assumido por f se repita. Agora, em um ponto fixo, considerado $x = 0$, sem perda de generalidade, a evolução temporal de f tem o seguinte aspecto (Figura 7).

Figura 7 - Evolução temporal de f em um ponto fixo.



Fonte: Próprio autor.

Em um ponto fixo, T é o menor intervalo de tempo para o qual o valor de f se repete e recebe o nome de período. Em $t = 0$, $f = f_0$ e em $t = T$, $f = f_0$, logo,

$$T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v} \quad (5.4)$$

logo,

$$vT = \lambda \quad (5.5)$$

e

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (5.6)$$

Define-se também a frequência como o inverso do período,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda} \quad (5.7)$$

e a pulsação, também conhecida como frequência angular,

$$\omega = 2\pi f = kv. \quad (5.8)$$

A expressão (5.2) pode ser reescrita como

$$f(x, t) = f_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad (5.9)$$

As ondas das formas (5.2) ou (5.9) são chamadas ondas monocromáticas unidimensionais, o termo monocromática faz referência à associação entre a pulsação ou frequência e a cor de um feixe de luz composto por ondas eletromagnéticas com tais características.

Até agora, considerou-se apenas o caso unidimensional da equação de onda, para descrições corretas do mundo físico, faz-se necessário considerar o caso em que as ondas se propagam em todas as dimensões espaciais.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (5.10)$$

Por extensão do caso unidimensional, onde se propôs uma solução da forma (5.9), para o caso tridimensional, procuram-se soluções da forma

$$f(x, y, z, t) = f_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi) \quad (5.11)$$

Substituindo-se a equação (5.11) na equação de onda (5.10), e sabendo-se que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k_x^2 f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -k_y^2 f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -k_z^2 f$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$ são válidas, obtêm-se uma relação entre k e ω que deve ser satisfeita para que (5.11) seja solução da equação de onda:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (5.12)$$

Define-se, então, o vetor de onda, \vec{k} , como sendo o vetor cujas componentes são k_x , k_y , e k_z :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

logo, sua norma é $\|\vec{k}\|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ ou

$$k = \frac{\omega}{v}, \text{ com } k = \|\vec{k}\|. \quad (5.14)$$

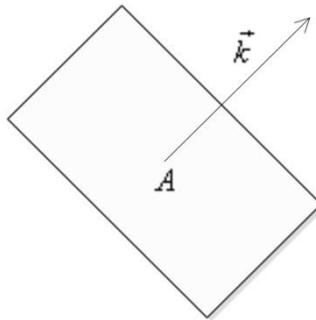
Sendo $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e pela definição (5.13),

$$f(x, y, z, t) = f_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \quad (5.15)$$

No instante t , em um ponto A , de posição \vec{r}_A , o valor de f é $f(\vec{r}_A, t) = f_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_A - \omega t + \varphi)$, uma questão interessante é saber em quais pontos B , de posição \vec{r}_B , o valor de f é o mesmo que em A , para um mesmo instante. Em tal situação, $f(\vec{r}_A, t) = f(\vec{r}_B, t) \Rightarrow \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_A - \omega t + \varphi) = \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_B - \omega t + \varphi) \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_B - \omega t + \varphi = \vec{k} \cdot \vec{r}_A - \omega t + \varphi + 2n\pi \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = 2n\pi$. Sendo O a origem do sistema de coordenadas, $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$, $\vec{k} \cdot \overrightarrow{AB} = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Se $\vec{k} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, diz-se que A e B possuem a mesma fase, neste caso, B está no mesmo plano que passa por A e é perpendicular ao vetor de onda \vec{k} . Esta é a característica das ondas planas, ondas onde as superfícies de onda, lugar

geométrico dos pontos que possuem uma mesma fase, são perpendiculares ao vetor de onda (Figura 8).

Figura 8 - Superfície de onda plana. Todos os pontos do plano perpendicular a \vec{k} estão em fase com A .

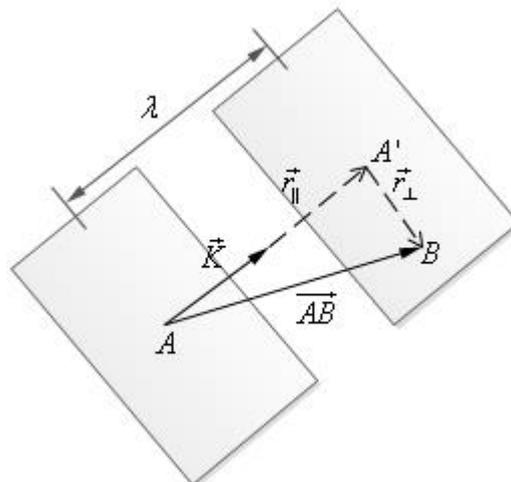


Fonte: Próprio autor.

Quando $\vec{k} \cdot \overline{AB}$ é um múltiplo de 2π , os pontos A e B estão em planos de onda diferentes, no caso em que $\vec{k} \cdot \overline{AB} = 2\pi$, os pontos considerados estão em planos de onda consecutivos cuja distância é 2π .

Além disso, conforme a figura 9, $\vec{k} \cdot \overline{AB} = 2\pi \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) = 2\pi \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_{\parallel} = 2\pi \Rightarrow r_{\parallel} = \overline{AA'} = \lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Figura 9 - A distância entre dois planos de onda consecutivos, igual ao comprimento de onda, vale $\frac{2\pi}{k}$.



Fonte: Próprio autor.

A equação $f(x, y, z, t) = f_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi)$ é um caso particular das chamadas ondas planas cuja forma geral é $V = V(\vec{r} \cdot \vec{k}, t)$, que apresentam a propriedade de serem constantes em cada plano, $\vec{r} \cdot \vec{k}$, perpendicular ao vetor de onda, \vec{k} . Elas recebem o nome de ondas planas monocromáticas e sua importância reside na possibilidade de que todos os outros tipos de onda possam ser expressos por elas, através da transformada de Fourier [BUTKOV, 1988].

6 NOTAÇÃO COMPLEXA

A presença do termo trigonométrico na expressão $f(\vec{r}, t) = f_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$ para as ondas planas monocromáticas sugere que este possa ser reescrito por meio de exponenciais. A linearidade da equação de onda implica que no caso de uma solução complexa, ambas as partes real e imaginária sejam solução da equação. Então, para a obtenção de uma forma mais fácil de ser manipulada matematicamente, devido às propriedades diferenciais das exponenciais complexas, convém reescrever f como uma função complexa de tal modo que f seja a parte real desta nova função, f^* ⁽¹⁾.

$$f^*(\vec{r}, t) = f_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}, \quad (6.1)$$

e $f(\vec{r}, t) = \text{Re}[f^*(\vec{r}, t)]$.

Para as componentes do campo elétrico, que são grandezas reais e obedecem à equação de onda, têm-se as respectivas ondas planas:

$$E_x = E_{0x} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) = \text{Re}\{E_{0x} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}\}, \quad (6.2)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) = \text{Re}\{E_{0y} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}\} \text{ e} \quad (6.3)$$

$$E_z = E_{0z} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) = \text{Re}\{E_{0z} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}\}, \quad (6.4)$$

empregando-se a notação complexa,

$$E_x^* = E_{0x}^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \text{ onde, } E_{0x}^* = E_{0x} e^{i\varphi}, \quad (6.5)$$

$$E_y^* = E_{0y}^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \text{ onde, } E_{0y}^* = E_{0y} e^{i\varphi} \text{ e} \quad (6.6)$$

$$E_z^* = E_{0z}^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \text{ onde, } E_{0z}^* = E_{0z} e^{i\varphi}. \quad (6.7)$$

Logo,

$$\vec{E}^*(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{0x}^* \\ E_{0y}^* \\ E_{0z}^* \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (6.8)$$

que pode ser reescrito como

$$\vec{E}^*(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (6.9)$$

ao definir-se a amplitude do campo elétrico complexo por

$$\vec{E}_0^* = \begin{pmatrix} E_{0x}^* \\ E_{0y}^* \\ E_{0z}^* \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

A notação complexa permite que as derivadas parciais das componentes de \vec{E}^* sejam facilmente calculadas,

1- Neste trabalho, reserva-se o uso do asterisco sobrescrito para indicar a extensão complexa de uma função real, não devendo, portanto, ser confundido com a operação de conjugação complexa.

$$\frac{\partial E_x^*}{\partial x} = ik_x E_x^*, \quad \frac{\partial E_y^*}{\partial y} = ik_y E_y^* \text{ e } \frac{\partial E_z^*}{\partial z} = ik_z E_z^*, \quad (6.11)$$

e

$$\frac{\partial E_x^*}{\partial t} = -i\omega E_x^*, \quad \frac{\partial E_y^*}{\partial t} = -i\omega E_y^* \text{ e } \frac{\partial E_z^*}{\partial t} = -i\omega E_z^*, \quad (6.12)$$

Assim,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* = ik_x E_x^* + ik_y E_y^* + ik_z E_z^* \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* = i\vec{k} \cdot \vec{E}^*. \quad (6.13)$$

A equação (6.13), juntamente com a equação de Maxwell para o divergente do campo elétrico (4.27), implica que, no vácuo, $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, ou seja, o vetor de onda e o campo elétrico são perpendiculares, ou seja, a onda eletromagnética é transversal.

Além do divergente, o rotacional de \vec{E}^* também pode ser reescrito em uma forma simplificada.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x^* \\ E_y^* \\ E_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik_y E_z^* - ik_z E_y^* \\ ik_z E_x^* - ik_x E_z^* \\ ik_x E_y^* - ik_y E_x^* \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (6.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^* = \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x^* \\ E_y^* \\ E_z^* \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}^* = i\vec{k} \times \vec{E}^*. \quad (6.15)$$

As componentes do campo magnético, \vec{B} , satisfazem à mesma equação de onda que as componentes de \vec{E} , logo, adota-se para as ondas planas monocromáticas deste a mesma notação complexa adotada para o campo elétrico, tem-se:

$$\vec{B}^*(\vec{r}, t) = \vec{B}_0^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega' t)} \quad (6.16)$$

A priori, não existe razão para que o número de onda e a pulsação das componentes de \vec{B} sejam as mesmas das de \vec{E} , no entanto, pela equação $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ e levando-se em conta que $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ possui a mesma pulsação de \vec{E} e que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ possui a mesma

pulsação de \vec{B} , conclui-se que $\omega = \omega'$. Além disso, como ambas as ondas possuem a mesma velocidade de propagação, v , e $\omega = kv = k'v$, $k = k'$. Logo,

$$\vec{B}^*(\vec{r}, t) = \vec{B}_0^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (6.17)$$

Sendo $\vec{\nabla} \times \vec{E}^* = -\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t}$ e $\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t} = -i\omega \vec{B}^*$, $i\vec{k} \times \vec{E}^* = i\omega \vec{B}^*$, logo, tomando-se a parte

real,

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}. \quad (6.18)$$

Por conseguinte, \vec{B} é perpendicular a \vec{k} e a \vec{E} . Sendo \vec{k} e \vec{E} perpendiculares entre si, \vec{k} , \vec{E} e \vec{B} formam um conjunto de vetores ortogonais. Tomando a norma de (6.18), $\omega B = kE$, mas $\omega = kv$, logo,

$$vB = E \quad (6.19)$$

Conhecido o campo elétrico, $\vec{E}^*(\vec{r}, t) = \vec{E}_0^* e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$, o campo magnético é determinado pela expressão $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$, sendo $\vec{k} = k\hat{k}$ e $\omega = kv$, tem-se:

$$\vec{B}^* = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}^*. \quad (6.20)$$

7 REFLEXÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS EM MEIOS DIELÉTRICOS

Quando uma onda monocromática se propaga em um meio dielétrico e incide na superfície de separação deste com outro, também dielétrico, seus campos se comportam de modo que a equação de onda característica de cada meio seja satisfeita. Na superfície de separação entre eles as condições de contorno devem também ser satisfeitas, como veremos adiante.

Considera-se agora a seguinte situação: Uma onda incidente, representada pelo índice I , e caracterizada pelos campos

$$\vec{E}_I^*(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0I}^* e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} \text{ e } \vec{B}_I^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} \hat{k}_I \times \vec{E}_I^* \quad (7.1)$$

incide, aproximando-se pela esquerda, sob um ângulo θ_I , na superfície de separação entre dois meios, $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$, dando origem a uma onda refletida,

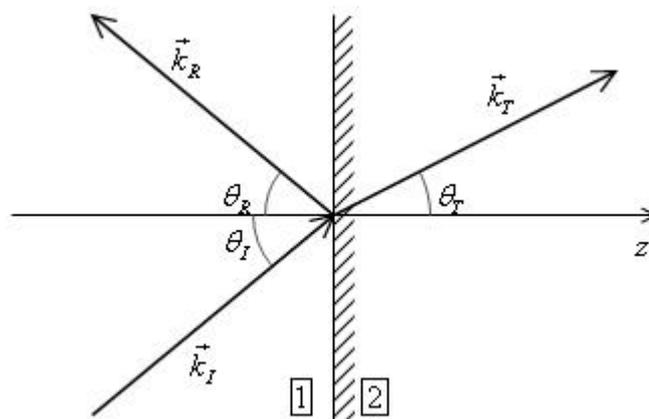
$$\vec{E}_R^*(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0R}^* e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} \text{ e } \vec{B}_R^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} \hat{k}_R \times \vec{E}_R^*, \quad (7.2)$$

que se propaga no mesmo meio que a onda incidente, sob um ângulo θ_R , e a uma onda transmitida,

$$\vec{E}_T^*(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0T}^* e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \text{ e } \vec{B}_T^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_2} \hat{k}_T \times \vec{E}_T^*, \quad (7.3)$$

que se propaga no segundo meio. A Figura 10 esquematiza a situação descrita acima.

Figura 10. Onda plana passando do meio 1 para o meio 2.



Fonte: Próprio autor.

Como as três ondas possuem a mesma natureza física, expressa por meio da frequência angular, ω , tem-se que $k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega$, logo,

$$k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T. \quad (7.4)$$

Além disso, na interface de separação entre os dois meios, determinadas condições, conhecidas como condições de contorno devem ser obedecidas, elas resultam das leis da eletrodinâmica e dizem como os campos eletromagnéticos se comportam na interface, elas são:

$$\varepsilon_1 \vec{E}_1^\perp - \varepsilon_2 \vec{E}_2^\perp = 0 \quad (7.5)$$

$$\vec{E}_1^\parallel - \vec{E}_2^\parallel = 0 \quad (7.6)$$

$$\vec{B}_1^\perp - \vec{B}_2^\perp = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^\parallel = 0 \quad (7.8)$$

Onde \vec{E}_1 e \vec{B}_1 são os campos eletromagnéticos no meio 1, $\vec{E}_I^* + \vec{E}_R^*$ e $\vec{B}_I^* + \vec{B}_R^*$, e \vec{E}_2 e \vec{B}_2 são os campos eletromagnéticos no meio 2, \vec{E}_T^* e \vec{B}_T^* . Cada uma dessas expressões possui o seguinte aspecto:

$$(\) e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} + (\) e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} = (\) e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (7.9)$$

E devem ser válidas no plano de incidência, $z=0$, em qualquer tempo e em qualquer ponto deste, o que implica que as exponenciais devem ser iguais, logo,

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r}, \text{ em } z=0. \quad (7.10)$$

A expressão (7.10) pode ser reescritas em termos das componentes vetoriais,

$$x(k_I)_x + y(k_I)_y = x(k_R)_x + y(k_R)_y = x(k_T)_x + y(k_T)_y. \quad (7.11)$$

A equação (7.11) é válida em todos os pontos x e y do plano de incidência, logo,

$$(k_I)_y = (k_R)_y = (k_T)_y \quad (7.12)$$

e

$$(k_I)_x = (k_R)_x = (k_T)_x. \quad (7.13)$$

Escolhendo os eixos cartesianos de maneira conveniente, afim de que o vetor de onda \vec{k}_I tenha componente nula na direção y , $(k_I)_y = 0$, estando contido no plano xz , a equação (7.12) implica que os vetores de onda \vec{k}_R e \vec{k}_T também têm componentes nulas segundo a direção y e estão, por conseguinte, contidos no plano xy . Decorre, então, que os vetores de onda incidente, transmitida e refletida e o eixo normal à superfície de incidência são coplanares.

Utilizando os ângulos de incidência, reflexão e transmissão, ou refração, definidos como os ângulos formados pelos respectivos vetores de onda com a direção normal à superfície de incidência, eixo z na figura 10, a equação (7.13) pode ser reescrita:

$$k_I \text{sen} \theta_I = k_R \text{sen} \theta_R = k_T \text{sen} \theta_T. \quad (7.14)$$

No entanto, $k_I = k_R$, pela equação (7.4), logo, decorre a lei de reflexão,

$$\theta_I = \theta_R. \quad (7.15)$$

Sendo $k_I = n_1 \frac{\omega}{c}$ e $k_T = n_2 \frac{\omega}{c}$, a equação (7.14) implica que

$$n_1 \text{sen} \theta_I = n_2 \text{sen} \theta_T, \quad (7.16)$$

tal equação é conhecida como lei da refração, ou lei de Snell-Descartes.

A densidade de energia armazenada nos campos eletromagnéticos [Griffiths, 2011] é dada por $u = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right)$, para as ondas planas monocromáticas em meios dielétricos,

$$u = \varepsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \quad (7.17)$$

O fluxo de energia é caracterizado pelo vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \quad (7.18)$$

Para as ondas planas monocromáticas em meios dielétricos,

$$\vec{S} = v \varepsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \hat{k} = v u \hat{k} \quad (7.19)$$

A intensidade, I , é definida como:

$$I = \langle S \rangle \quad (7.20)$$

Para as ondas planas monocromáticas em meios dielétricos:

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2. \quad (7.21)$$

Em função da intensidade das ondas incidente, I_I , transmitida, I_T , e refletida, I_R , define-se os coeficientes de reflexão, R , e de refração, T :

$$R = \frac{I_R}{I_I} \quad (7.22)$$

$$T = \frac{I_T}{I_I} \quad (7.23)$$

Devido a conservação de energia, em meios não absorventes,

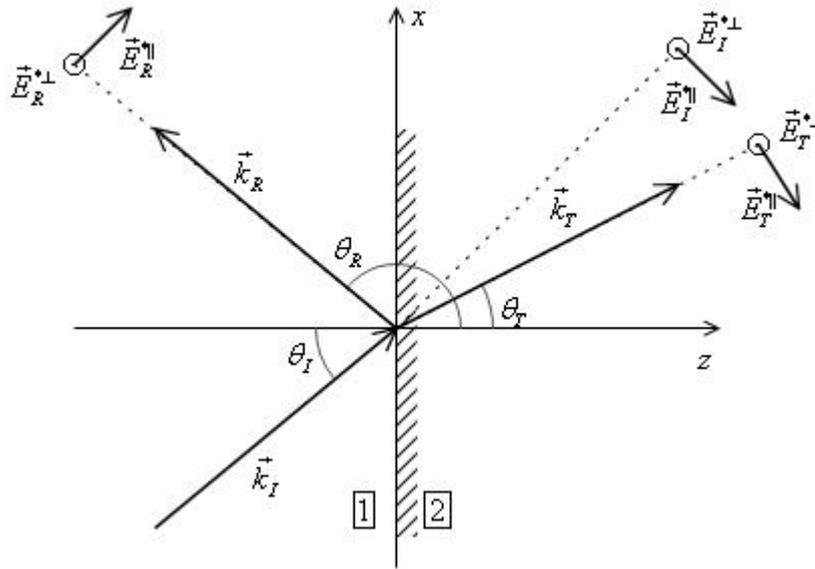
$$R + T = 1. \quad (7.24)$$

7.1. Relações de Fresnel em meios dielétricos

As relações de Fresnel são importantes relações que dizem como as amplitudes das ondas monocromáticas transmitidas e refletidas se comportam em função das amplitudes da onda monocromática incidente.

Decompondo as componentes do campo elétrico incidente em suas componentes paralela, sobrescrito \parallel , e perpendicular, sobrescrito \perp , ao plano de incidência, seguindo as convenções da figura 11,

Figura 11 - Convenções sob a orientação dos campos para as equações de Fresnel.



Fonte: Próprio autor.

as componentes de \vec{E}_I^* nas direções x , y e z , em função de suas componentes perpendicular e paralela ao plano de incidência, são:

$$\begin{aligned} E_{Ix}^* &= -E_I^{*\parallel} \cos \theta_I e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ E_{Iy}^* &= E_I^{*\perp} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{e} \\ E_{Iz}^* &= E_I^{*\parallel} \sin \theta_I e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Sendo $\vec{B}^* = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}^*$ e $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}$, para os meios dielétricos, tem-se

$\vec{B}^* = \sqrt{\mu_0 \epsilon} \hat{k} \times \vec{E}^*$ e as componentes cartesianas de \vec{B}_I^* podem ser determinadas a partir das de \vec{E}_I^* , uma vez que $\hat{k}_I = (\sin \theta_I, 0, \cos \theta_I)$:

$$\begin{aligned} B_{Ix}^* &= -\sqrt{\mu_0 \epsilon_1} E_I^{*\perp} \cos \theta_I e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ B_{Iy}^* &= -\sqrt{\mu_0 \epsilon_1} E_I^{*\parallel} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{e} \\ B_{Iz}^* &= \sqrt{\mu_0 \epsilon_1} E_I^{*\perp} \sin \theta_I e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Procedendo de forma análoga, obtêm-se , para a onda refletida:

$$\begin{aligned} E_{Rx}^* &= -E_R^{\parallel} \cos \theta_R e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ E_{Ry}^* &= E_R^{\perp} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} \mathbf{e} \\ E_{Rz}^* &= E_R^{\parallel} \text{sen} \theta_R e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (7.27)$$

e

$$\begin{aligned} B_{Rx}^* &= -\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} E_R^{\perp} \cos \theta_R e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ B_{Ry}^* &= -\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} E_R^{\parallel} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} \mathbf{e} \\ B_{Rz}^* &= \sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} E_R^{\perp} \text{sen} \theta_R e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (7.28)$$

e para a onda transmitida,

$$\begin{aligned} E_{Tx}^* &= -E_T^{\parallel} \cos \theta_T e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ E_{Ty}^* &= E_T^{\perp} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \mathbf{e} \\ E_{Tz}^* &= E_T^{\parallel} \text{sen} \theta_T e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (7.29)$$

e

$$\begin{aligned} B_{Tx}^* &= -\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} E_T^{\perp} \cos \theta_T e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ B_{Ty}^* &= -\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} E_T^{\parallel} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \mathbf{e} \\ B_{Tz}^* &= \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} E_T^{\perp} \text{sen} \theta_T e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

As equações de contorno (7.6) e (7.8) implicam que as componentes x e y , tangenciais, dos campos elétrico e magnético totais em cada meio sejam contínuas na interface de separação,

$$E_{Ix}^* + E_{Rx}^* = E_{Tx}^*, \quad (7.31)$$

$$E_{Iy}^* + E_{Ry}^* = E_{Ty}^*, \quad (7.32)$$

$$B_{Ix}^* + B_{Rx}^* = B_{Tx}^* \quad (7.33)$$

$$B_{Iy}^* + B_{Ry}^* = B_{Ty}^*, \quad (7.34)$$

como todas as ondas consideradas possuem a mesma pulsação e $\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r}$ em $z = 0$, os fatores exponenciais cancelam-se nas equações de continuidade, que podem ser reescritas, notando-se que $\cos \theta_R = -\cos \theta_I$:

$$\cos \theta_I (E_I^{\parallel} - E_R^{\parallel}) = E_T^{\parallel} \cos \theta_T \quad (7.35)$$

$$E_I^{\perp} + E_R^{\perp} = E_T^{\perp} \quad (7.36)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_I (E_I^{\perp} - E_R^{\perp}) = \sqrt{\varepsilon_2} E_T^{\perp} \cos \theta_T \quad (7.37)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (E_I^{\parallel} + E_R^{\parallel}) = \sqrt{\varepsilon_2} E_T^{\parallel}. \quad (7.38)$$

Estas equações podem ser manipuladas para fornecer as componentes paralela e perpendicular à interface das ondas transmitida e refletida em função das componentes da onda incidente:

$$E_T^{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_I}{n_2 \cos \theta_I + n_1 \cos \theta_T} E_I^{\parallel} \quad (7.39)$$

$$E_T^{*\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_I}{n_1 \cos \theta_I + n_2 \cos \theta_T} E_I^{*\perp} \quad (7.40)$$

$$E_R^{*\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_I - n_1 \cos \theta_T}{n_2 \cos \theta_I + n_1 \cos \theta_T} E_I^{*\parallel} \quad (7.41)$$

$$E_R^{*\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_I - n_2 \cos \theta_T}{n_1 \cos \theta_I + n_2 \cos \theta_T} E_I^{*\perp} \quad (7.42)$$

Essas equações são conhecidas como equações de Fresnel.

8 REFLEXÃO TOTAL

Quando uma onda eletromagnética se propaga de um meio para outro opticamente menos denso, a direção de propagação desta se afasta da direção normal ao plano de incidência, conforme foi apresentado no Capítulo 2, onde se discutiu a reflexão interna total em óptica. Pela lei de Snell-Descartes, viu-se que existe um ângulo limite, θ_c , tal que para ângulos de incidência superiores a este, não existe onda transmitida. No entanto, não existe razão para que os campos eletromagnéticos não se propaguem no segundo meio, as próprias equações de continuidade, de onde emanam as leis de reflexão e refração, presumem a existência de campos em ambos meios. Além disso, várias evidências experimentais mostram que, mesmo no caso da reflexão interna total, existem campos transmitidos. Esta dificuldade pode ser resolvida permitindo-se que o ângulo de refração, θ_T , seja complexo, neste caso, θ_T perde a sua interpretação geométrica e não deve ser interpretado como ângulo, apenas como uma entidade algébrica. [Griffiths, 2011]

$$\text{Sendo } n_1 \text{sen}\theta_I = n_2 \text{sen}\theta_T, \text{sen}\theta_T = \frac{n_1}{n_2} \text{sen}\theta_I = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \text{sen}\theta_I, \text{ definindo } n_{21} = n = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}},$$

tem-se que

$$\text{sen}\theta_T = \frac{\text{sen}\theta_I}{n} \quad (8.1)$$

e

$$\cos\theta_T = \pm i \sqrt{\frac{\text{sen}^2\theta_I}{n^2} - 1}. \quad (8.2)$$

Observa-se que a equação (8.2) pode ser real (para $n > 1$) ou complexa, na condição de reflexão total, com $n < 1$.

Como $\vec{k}_T \cdot \vec{r} = k_T (\text{sen}\theta_T \hat{x} + \cos\theta_T \hat{z}) \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$, os fatores exponenciais dos campos eletromagnéticos podem ser reescritos, utilizando-se as expressões para $\text{sen}\theta_T$ e $\cos\theta_T$ estabelecidas anteriormente nas equações (8.1) e (8.2),

$$\vec{k}_T \cdot \vec{r} = k_T x \frac{\text{sen}\theta_I}{n} \pm i k_T z \sqrt{\frac{\text{sen}^2\theta_I}{n^2} - 1}. \quad (8.3)$$

O sinal negativo da raiz quadrada não corresponde a uma situação física, pois na exponencial da expressão do campo elétrico, este daria origem a um termo que cresceria ilimitadamente com z , o que levaria a uma amplitude de onda infinita, caso em que não haveria conservação de energia.

$$\text{Definindo-se } \eta = k_T \frac{\text{sen}\theta_I}{n} = \frac{\omega n_1}{c} \text{sen}\theta_I \text{ e } \kappa = k_T \sqrt{\frac{\text{sen}^2\theta_I}{n^2} - 1} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \text{sen}^2\theta_I - n_2^2},$$

$\vec{k}_T \cdot \vec{r}$ pode ser posto em uma forma mais simples:

$$\vec{k}_T \cdot \vec{r} = \eta x + i\kappa z. \quad (8.4)$$

Sendo assim,

$$\vec{E}_T^*(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0T}^* e^{-\kappa z} e^{+i(\eta x - \omega t)}, \quad (8.5)$$

O que representa uma perturbação oscilatória na direção x , cuja amplitude diminui à medida que z aumenta.

Além disso, utilizando as expressões para $\text{sen}\theta_T$ e $\text{cos}\theta_T$ em função de $\text{sen}\theta_I$, das equações (7.39) a (7.42), as equações de Fresnel podem ser reescritas:

$$\begin{aligned}
 E_R^{*\parallel} &= \frac{\frac{n_2}{n_1} \cos \theta_I - \frac{n_1}{n_1 n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}}{\frac{n_2}{n_1} \cos \theta_I + \frac{n_1}{n_1 n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\parallel} \Rightarrow \\
 E_R^{*\parallel} &= \frac{n \cos \theta_I - \frac{1}{n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}}{n \cos \theta_I + \frac{1}{n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\parallel} \Rightarrow \\
 E_R^{*\parallel} &= \frac{n^2 \cos \theta_I - i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}}{n^2 \cos \theta_I + i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\parallel}. \tag{8.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_R^{*\perp} &= \frac{\frac{n_1}{n_1} \cos \theta_I - \frac{n_2}{n_1 n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}}{\frac{n_1}{n_1} \cos \theta_I + \frac{n_2}{n_1 n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\perp} \Rightarrow \\
 E_R^{*\perp} &= \frac{\cos \theta_I - \frac{n}{n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}}{\cos \theta_I + \frac{n}{n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\perp} \Rightarrow \\
 E_R^{*\perp} &= \frac{\cos \theta_I - i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}}{\cos \theta_I + i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\perp}. \tag{8.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_T^{*\parallel} &= \frac{2 \frac{n_1}{n_1} \cos \theta_I}{\frac{n_2}{n_1} \cos \theta_I + \frac{n_1}{n_1 n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\parallel} \Rightarrow \\
 E_T^{*\parallel} &= \frac{2 \cos \theta_I}{n \cos \theta_I + \frac{1}{n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\parallel} \Rightarrow \\
 E_T^{*\parallel} &= \frac{2n \cos \theta_I}{n^2 \cos \theta_I + i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\parallel}. \tag{8.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_T^{*\perp} &= \frac{2 \frac{n_1}{n_1} \cos \theta_I}{\frac{n_1}{n_1} \cos \theta_I + \frac{n_2}{n_1 n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\perp} \Rightarrow \\
E_T^{*\perp} &= \frac{2 \cos \theta_I}{\cos \theta_I + \frac{n}{n} i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\perp} \Rightarrow \\
E_T^{*\perp} &= \frac{2 \cos \theta_I}{\cos \theta_I + i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - n^2}} E_I^{*\perp} \quad (8.9)
\end{aligned}$$

Alguns comentários precisam ser feitos depois dos resultados alcançados até agora. Pelas equações (8.6) e (8.7), $|E_R^{*\parallel}| = |E_I^{*\parallel}|$ e $|E_R^{*\perp}| = |E_I^{*\perp}|$, como a intensidade de uma onda eletromagnética monocromática é dada por $I = \frac{1}{2} \varepsilon v E^2$, observa-se que a intensidade da onda refletida é igual à intensidade da onda incidente, e então, a intensidade da onda transmitida deve ser nula. No entanto, as equações (8.8) e (8.9) não estão de acordo com o raciocínio precedente, pois elas implicam que uma onda de intensidade não nula se propaga no segundo meio. Esta contradição parece surgir do postulado inicial de que as ondas incidente, transmitida e refletida incidem, ou emergem, do mesmo ponto na interface de separação entre os dois meios, o que não é verdade, conforme descrito como o deslocamento de Goos-Hänchen, pelo qual, uma onda polarizada, ao sofrer reflexão total, sofre um deslocamento lateral na superfície de reflexão, assim, as ondas incidente e refletida não compartilham o mesmo ponto. [HAIBEL, 2001].

Embora o caso geral descrito no último parágrafo apresente contradições, seguindo o procedimento de GRIFFITHS pode-se observar que ao se particularizar o problema para o campo elétrico polarizado na direção y (de acordo com a Figura 11) chega-se nas expressões para uma onda evanescente. Em função de η e κ , $\text{sen} \theta_T$ e $\cos \theta_T$ podem ser reescritos: $\text{sen} \theta_T = \frac{\eta c}{\omega n_2}$ e $\cos \theta_T = i \frac{c \kappa}{\omega n_2}$, logo, $\hat{k}_T = \frac{\eta c}{\omega n_2} \hat{x} + i \frac{c \kappa}{\omega n_2} \hat{z}$. Considerando-se o caso do campo elétrico polarizado na direção \hat{y} , $\vec{E}_T^*(\vec{r}, t) = E_{0T}^* e^{-\kappa z} e^{+i(\eta x - \omega t)} \hat{y}$, sendo $\vec{B}_T^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_2} \hat{k}_T \times \vec{E}_T^*$, tem-se que $\vec{B}_T^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_2} E_{0T}^* e^{-\kappa z} e^{+i(\eta x - \omega t)} \left(\frac{\eta c}{\omega n_2} \hat{z} - i \frac{c \kappa}{\omega n_2} \hat{x} \right)$. Sendo $\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}_T^*(\vec{r}, t)]$ e $\vec{B}_T(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{B}_T^*(\vec{r}, t)]$, os campos que penetram no segundo meio são:

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = E_{0T} e^{-\kappa z} \cos(\eta x - \omega t + \varphi) \hat{y} \quad (8.10)$$

$$\vec{B}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} E_{0T} e^{-\kappa z} [\cos(\eta x - \omega t + \varphi) \eta \hat{z} + \text{sen}(\eta x - \omega t + \varphi) \kappa \hat{x}]. \quad (8.11)$$

A presença do termo $e^{-\kappa z}$, que atenua a amplitude dos campos, faz com que a amplitude destes decresça rapidamente com z , $\frac{1}{\kappa} \sim \lambda$, por tal razão, a onda correspondente a estes campos é chamada de onda evanescente.

O vetor de Poynting pode ser calculado por $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_T \times \vec{B}_T$, obtêm-se:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 \omega} E_{0T}^2 e^{-2\kappa z} [\eta \cos^2(\eta x - \omega t + \varphi) \hat{x} - \kappa \text{sen}(\eta x - \omega t + \varphi) \cos(\eta x - \omega t + \varphi) \hat{z}] \quad (8.12)$$

Sendo $\langle \cos^2(\eta x - \omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$ e $\langle \cos(\eta x - \omega t + \varphi) \text{sen}(\eta x - \omega t + \varphi) \rangle = 0$,

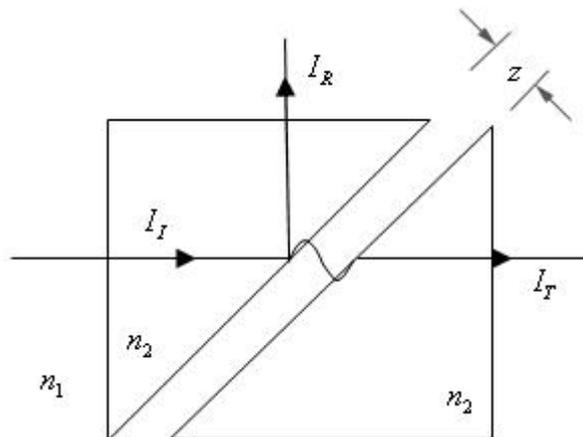
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_{0T}^2 \eta e^{-2\kappa z}}{2\mu_0 \omega} \hat{x}, \quad (8.13)$$

Logo, só há fluxo de energia na direção \hat{x} , tangente ao plano.

8.1 REFLEXÃO TOTAL FRUSTRADA. VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DOS CAMPOS EVANESCENTES.

Devido ao rápido decrescimento da amplitude dos campos evanescente à medida que z aumenta, uma verificação experimental da onda evanescente é de difícil realização, no entanto, empregando-se a seguinte montagem experimental (figura 10), consegue-se contornar este problema.

Figura 12 - Esquema para a verificação da onda evanescente.



Fonte: Próprio autor.

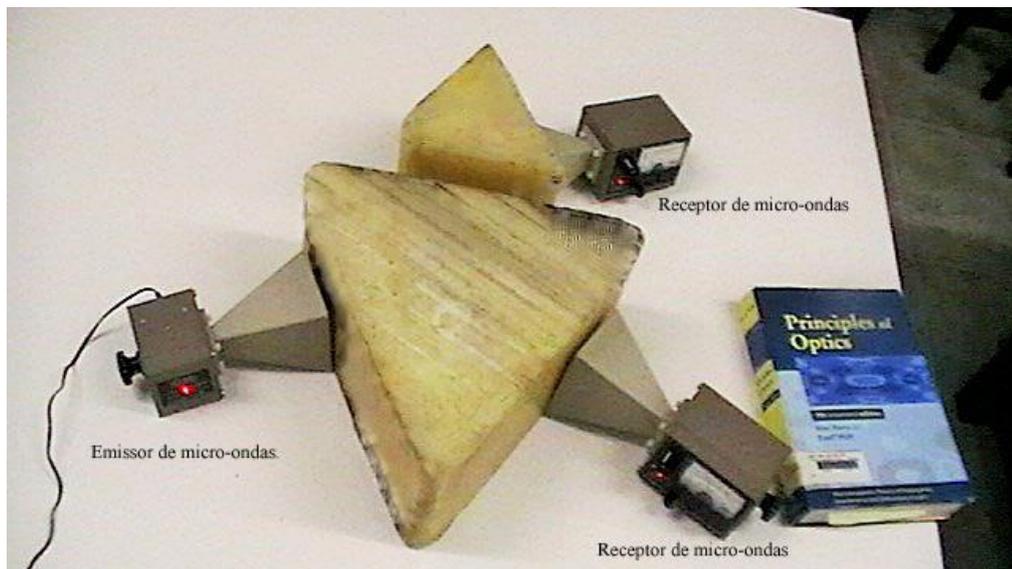
Conforme representado na Figura 12, uma onda de intensidade I_I se propaga de um meio mais refringente para outro menos refringente, $n_2 > n_1$, e sofre reflexão interna total na interface de separação destes. Surge, então, uma onda refletida de intensidade I_R e uma onda evanescente, cuja intensidade decresce exponencialmente com a distância z . O segundo prisma representado tem a função de frustrar o decrescimento da onda evanescente, pois, quando este é aproximado, esta o penetra e passa a se propagar em seu interior, onde não ocorre atenuação de sua intensidade I_T .

Variando-se a distância z , pode-se verificar a dependência de I_T e I_R em função desta. Na montagem feita no Laboratório de Física Moderna, Figura 13, utilizou-se o kit para o estudo de micro-ondas Basic Microwave Optics System, modelo WA-9314B, fabricado pela PASCO Scientific, composto por um emissor de microondas polarizadas linearmente, cujo comprimento de onda é de $2,85\text{ cm}$, e de dois detectores de microondas analógicos ou apenas um detector.

Inicialmente o sistema era alinhado para obter a máxima reflexão interna visto no detector da reflexão e em seguida, a distância entre os prismas era calibrada com o auxílio de pequenos segmentos de uma régua, cuja espessura era de $1,55\text{ mm}$. Foram realizadas duas espécies de medidas, em uma, utilizou-se dois detectores, um para a onda transmitida e outro para a refletida, e em outro, utilizou-se apenas um detector, que era transladado, conforme a onda que se desejava analisar.

Algumas dificuldades surgiram durante o procedimento: Quando eram utilizados dois detectores, cada um possuía uma calibração característica, o que tornava difícil uma medida coerente para duas ondas consideradas e quando era utilizado apenas um detector, o traslado consecutivo do mesmo provocava o seu desalinhamento, de modo que a sua posição mudava em medidas diferentes de uma mesma onda.

Figura 13 - Arranjo experimental com prismas de parafina para o estudo da onda evanescente.



Fonte: Próprio autor.

Os dados experimentais obtidos estão apresentados nas Tabelas a seguir.

Tabela 1 - Valores experimentais obtidos para a intensidade da micro-onda. Escala de 10 mA com polarização paralela (//).

Distância (mm)	Onda Transmitida		Onda Refletida	
	Intensidade A ² (mA)	Intensidade B (mA)	Intensidade A (mA)	Intensidade B (mA)
0,00	1,00	0,87	0,00	0,010
1,55	0,82	0,69	0,075	0,065
3,10	0,59	0,47	0,29	0,32
4,65	0,38	0,30	0,54	0,55
6,20	0,22	0,16	0,72	0,72
7,75	0,10	0,070	0,82	0,82
9,30	0,030	0,038	0,90	0,89
10,85	0,00	0,00	0,93	0,93
12,4	0,00	0,00	0,96	0,96

Fonte: Próprio autor.

Tabela 2 - Valores experimentais obtidos para a intensidade da micro-onda. Escala de 30 mA com polarização paralela (//) e com um único detector.

Distância (mm)	Onda Transmitida	Onda Refletida
	Intensidade (mA)	Intensidade (mA)
0,00	0,99	0,00
1,55	0,94	0,060
3,10	0,76	0,31
4,65	0,61	0,49
6,20	0,36	0,74
7,75	0,24	0,81
9,30	0,14	0,86
10,85	0,035	0,92
12,4	0,00	0,95

Fonte: Próprio autor.

² As letras A, B, C e D servem para indicar séries de medidas, em cada uma das quais foram medidas as intensidades das ondas transmitida e refletida em função da distância.

Tabela 3 - Valores experimentais obtidos para a intensidade da micro-onda. Escala de 30 mA com polarização paralela (//) com dois detectores independentes.

Distância (mm)	Onda Transmitida		Onda Refletida	
	Intensidade C (mA)	Intensidade D (mA)	Intensidade C (mA)	Intensidade D (mA)
0,00	1,00	1,00	0,00	0,00
1,55	0,97	0,91	0,070	0,015
3,10	0,83	0,82	0,31	0,20
4,65	0,68	0,67	0,48	0,45
6,20	0,47	0,46	0,66	0,63
7,75	0,28	0,25	0,79	0,80
9,30	0,17	0,17	0,85	0,86
10,85	0,080	0,075	0,90	0,91

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4 - Valores experimentais obtidos para a intensidade da micro-onda. Escala de 30 mA com polarização perpendicular (⊥) com dois detectores independentes.

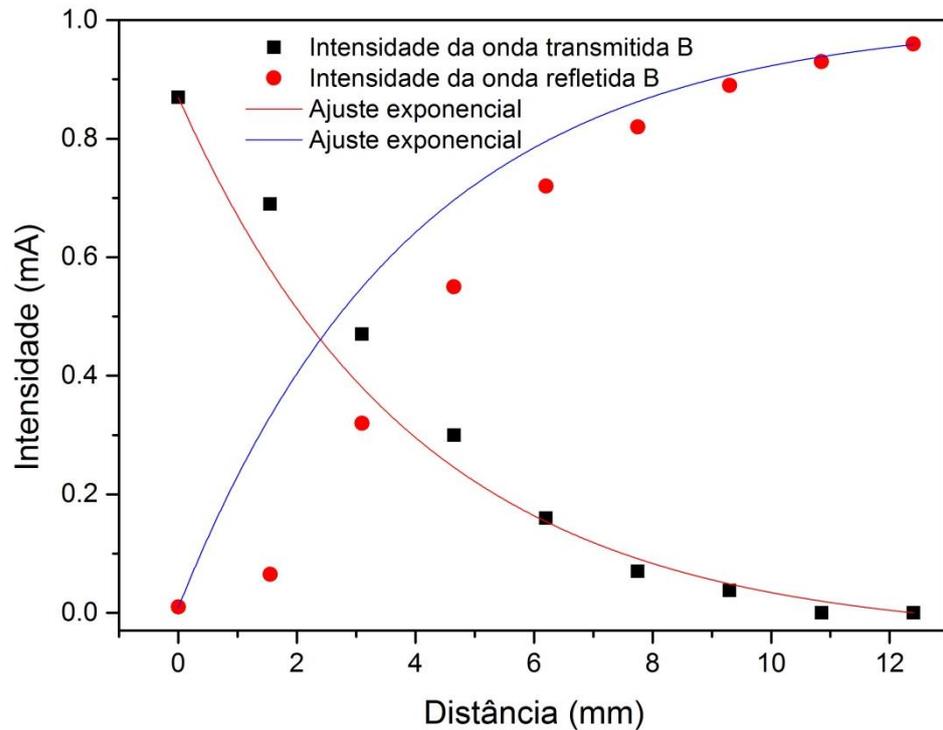
Distância (mm)	Onda Transmitida	Onda Refletida
	Intensidade (mA)	Intensidade (mA)
0,00	1,00	0,00
1,55	0,86	0,060
3,10	0,61	0,29
4,65	0,37	0,43
6,20	0,20	0,55
7,75	0,10	0,62
9,30	0,030	0,68

Fonte: Próprio autor.

Conforme pode ser visto nas tabelas precedentes, em todas as séries de medidas, ocorre um comportamento análogo: À medida que a distância de separação aumenta, a intensidade da onda transmitida diminui e a da onda refletida aumenta. Este comportamento também pode ser observado por meio gráfico, como o representado na Figura 14³. Isto sugere que, de fato, há algo que se propaga no segundo meio, mesmo no caso da reflexão total, e a sua intensidade diminui com a distância de separação entre os meios.

³ Para evitar redundância, escolheu-se representar graficamente apenas os dados de uma das séries.

Figura 14 – Gráfico das intensidades transmitida e refletida para a série B, conforme dados da Tabela 1.



Fonte: Próprio autor.

Em uma primeira análise, pode-se sugerir que tal comportamento seja resultado da onda evanescente prevista teoricamente, cujo comportamento é de decréscimo exponencial. No entanto, a situação é bem mais complexa que a tratada anteriormente, a presença do segundo meio e dos detectores perturba as condições de contorno do problema e modifica a sua solução, assim, ao empregar-se a abordagem utilizada, não se mede o que se deseja.

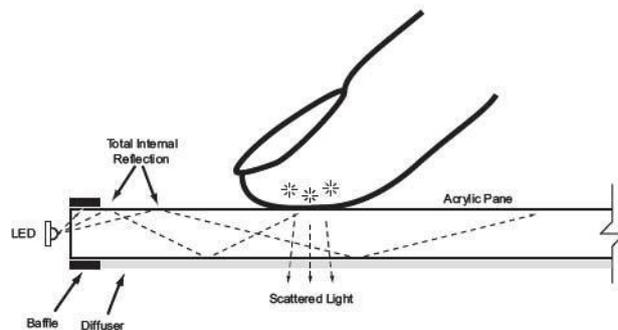
A abordagem utilizada serve apenas para verificar a existência das ondas evanescentes. Para um estudo quantitativo de suas propriedades, faz-se necessário que os detectores e o meio para frustração sejam aprimorados para que perturbem minimamente o sistema. Considerações desta impossibilidade, bem como um método para o estudo das ondas evanescentes com detectores otimizados podem ser encontradas em [PAPATHANASSOGLU, 2003].

9 ALGUMAS APLICAÇÕES PRÁTICAS DA REFLEXÃO TOTAL FRUSTRADA.

Como a onda evanescente se atenua rapidamente com a distância à superfície de separação entre os meios, ela pode ser usada para fornecer informações sobre fenômenos que ocorrem próximos a ela.

Dentre as diversas aplicações neste âmbito, merecem destaque as telas multi-toque FTIR, abreviação de Frustrated Total Internal Reflection, que em pouco menos de dez anos, devido ao seu baixo custo de produção, foram responsáveis pela popularização das telas multi-toques. Elas se baseiam na reflexão total frustrada de uma onda infravermelha, que se propaga no interior de uma lâmina fina, opticamente mais densa que a sua vizinhança. Quando um operador toca a superfície da tela, interage com a onda evanescente, oriunda da reflexão total frustrada, e a reflete na direção de um sensor, localizado embaixo da mesma. A Figura 15 ilustra o funcionamento descrito.

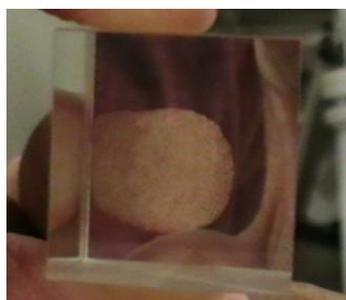
Figura 15 - Esquema das telas multi-toque baseadas na reflexão interna total.



Fonte: <http://cs.nyu.edu/~jhan/ftirsense/index.html>

Outra aplicação que convém ser lembrada são os leitores biométricos de impressão digital, que reproduzem as impressões digitais nitidamente, devido à reflexão total frustrada que ocorre na face espelhada de um prisma, observa-se, aqui, a característica da atenuação das ondas evanescentes com a distância, somente as digitais, que são próximas à superfície, aparecem na imagem (figura 16)

Figura 16 - Impressão digital na face espelhada de um prisma.



Fonte: Próprio autor.

Vale ressaltar, ainda, a aplicação pedagógica da reflexão total frustrada, uma vez que ela possui um análogo de grande valor: O tunelamento quântico, contribuindo à assimilação pelos estudantes de aspectos não intuitivos.

10 CONCLUSÕES

A partir da exposição realizada neste trabalho, pode-se concluir que a reflexão total frustrada foi resultado de um longo período de aprimoramento de técnicas e teorias, que culminou em sua total modelização e posterior aplicação tecnológica. Os dados obtidos no experimento confirmam a existência das ondas evanescentes de forma qualitativa.

Como futuros desenvolvimentos, sugere-se o aperfeiçoamento do experimento de confirmação, para que, por meio da otimização dos detectores e da técnica empregada, possa ser possível o estudo quantitativo das ondas evanescentes e suas características. Sugere-se, também, que o experimento de confirmação seja aprimorado para trabalhar com radiação visível, e que experimentos análogos sejam empregados no estudo das ondas evanescentes associadas a outros tipos de oscilação, diferentes das eletromagnéticas, como as acústicas ou em fluidos, que possuam condições de continuidade semelhantes na interface.

ANEXOS

ANEXO A: CORREÇÃO DE MAXWELL

A correção da equação de Ampère, feita por Maxwell, foi de vital importância para a teoria eletromagnética, por ela tornou-se evidente que campos elétricos variáveis com o tempo produziam campos magnéticos, até o momento, sabia-se apenas que campos magnéticos variáveis produziam campos elétricos, conforme sintetizado na lei de Faraday. No entanto, a importância do termo de Faraday é bem mais abrangente, pois por ele foi possível a dedução das ondas eletromagnéticas, que culminariam, com a teoria eletromagnética da luz, na unificação entre óptica e eletromagnetismo.

Antes de Maxwell, conhecia-se a lei de Ampère,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (\text{A-1})$$

no entanto, esta gerava algum desconforto, pois não era em conformidade com a equação de conservação da carga elétrica, universalmente aceita, pela qual

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (\text{A-2})$$

De fato, aplicando-se o divergente a ambos os membros da equação (A-1),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J}) \Rightarrow \vec{0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}. \quad (\text{A-3})$$

o que contradiz a equação (A-2).

Para contornar o problema, acrescenta-se um termo, por hora desconhecido, ao lado direito da equação (A-1) e procura-se determinar a sua expressão, de modo que a nova equação esteja de acordo com a conservação de carga. Como $\mu_0 \vec{J}$ é um vetor, o termo desconhecido também deve ser um vetor, supondo, sem perda de generalidade, que este termo seja $\mu_0 \vec{J}_d$, a equação de Ampère, com o termo de ajuste é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_d. \quad (\text{A-4})$$

Aplicando-se o divergente a ambos os membros da equação (A-4),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_d \quad (\text{A-5})$$

sendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$, para todo \vec{B} ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_d = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (\text{A-6})$$

logo, pela equação (A-2),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_d = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{A-7})$$

mas, a equação de Gauss diz que

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (\text{A-8})$$

Logo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} \quad (\text{A-9})$$

Sendo as derivadas temporal e espaciais intercambiáveis,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_d = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \quad (\text{A-10})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_d = \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{A-11})$$

Logo,

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{A-12})$$

E o termo de ajuste é

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{A-13})$$

A equação de Ampère, com a correção de Maxwell fica:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{A-14})$$

$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ é conhecido como corrente de deslocamento.

REFERÊNCIAS

BORN, Max; WOLF, Emil. **Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light.** 7th. (expanded) edition. Cambridge, Massachusetts: Cambridge at the University Press, 1999. 952p.

BRUHAT, Georges. **Cours de physique generale: a l'usage de l'enseignement superieur scientifique et technique: optique.** 4. ed./rev. Paris: Masson, 1954. 906p.

BUTKOV, Eugene. **Física matemática.** Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos, c1988. 725p.

GRIFFITHS, David J. **Eletrodinâmica.** 3.ed. São Paulo, SP: Pearson, c 2011. xv, 402 p.

HAIBEL, A.; NIMTZ, G.; STAHLHOFEN, A. A.; Frustrated total reflection: The double-prism revisited. **Physical Review.** E, v. 63, p. 047601, (2001).

HAN, Jefferson Y. Low-Cost Multi-Touch Sensing through Frustrated Total Internal Reflection. **UIST**, p. 115-118 (2005).

LORRAIN, Paul; LARRAIN, François; CORSON, Dale R. **Campos e ondas eletromagnéticas.** Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000. 819p. (Manuais universitários)

NEWTON, Isaac, Sir. **Opticks or a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light.** New York: Dover, c1952. 406p.

PAPATHANASSOGLU, D.A.; VOHNSEN, B. Direct visualization of evanescent optical waves. **Am. J. Physics**, v. 71, n 7, (2003).

VÖRÖS, Zoltán; JOHNSEN, Rainer. A simple demonstration of frustrated total internal reflection. **Am. J. Physics**, v. 76, n. 8, (2008).

ZHU, S.; Yu, A. W.; HAWLEY, D.; ROY, R. Frustrated total internal reflection: A demonstration and review. **Am. J. Physics**, v. 54, p. 601-707 (1986).