



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JONATHAN MARCIO AMÂNCIO SALES

MOVIMENTO BROWNIANO FRACIONÁRIO: UMA ANÁLISE

FORTALEZA
JUNHO, 2015

JONATHAN MARCIO AMÂNCIO SALES

MOVIMENTO BROWNIANO FRACIONÁRIO: UMA ANÁLISE

Monografia submetida à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. André Auto Moreira

FORTALEZA
JUNHO, 2015

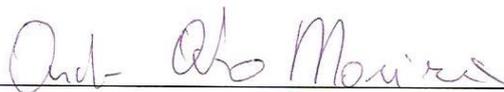
JONATHAN MARCIO AMÂNCIO SALES

MOVIMENTO BROWNIANO FRACIONÁRIO: UMA ANÁLISE

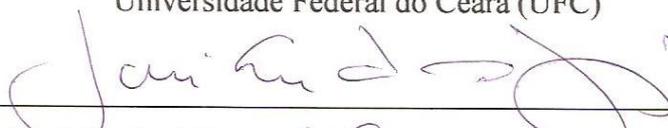
Monografia apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 15/06/2015.

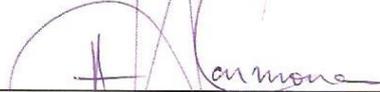
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. André Auto Moreira – **Orientador**
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. José Soares de Andrade Jr – **1º Examinador**
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona – **2º Examinador**
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, acima de tudo, a Cristo, meu Senhor, a quem devo toda a minha vida.

Agradeço aos meus pais Márcio Moreira Sales e Vânia Amâncio Sales por todo apoio que me deram, pelos incentivos e por todos os seus conselhos; e também às minhas irmãs Mylena Amâncio Sales e Amanda Caroline Amâncio Sales.

Agradeço a minha melhor amiga e noiva Juliana Monteiro da Costa por todo seu amor e por sempre estar ao meu lado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. André Auto Moreira, por me apresentar o ramo das simulações computacionais, e pela competência em me orientar neste trabalho e em todos os outros realizados.

Aos professores do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, por proporcionarem todo o aprendizado adquirido ao longo do curso de graduação.

Agradeço também a todos os profissionais, colegas e amigos do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

Aos meus amigos de graduação, Wagner Sena, Matheus Falcão, Daniel Linhares, Pedro Henrique Lima, Laura Barth, João Paulo Nobre, Rafael Farias, Rondinely Oliveira, Bianca Gondim, Mateus Andrade, William Mesquita, João Paulo Nogueira, Ícaro Lavor, Victor Nocrato e Lucas Miranda, por todo apoio ao longo da graduação.

A todos os meus parentes e amigos, que me ajudaram de diversas formas.

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pela bolsa de iniciação científica.

“Os homens jogam dados
sagrados para tirar a sorte,
mas quem resolve mesmo
é Deus, o Senhor.”
(Provérbio de Salomão)

RESUMO

O movimento irregular e errático de pequenas partículas imersas numa solução, inicialmente observado e descrito pelo botânico inglês Robert Brown, por volta de 1828, passou a ser conhecido como movimento browniano. A partir de 1905, com os trabalhos teóricos do físico alemão Albert Einstein, e outros trabalhos posteriores, foi possível então ligar a teoria cinética dos fluidos ao movimento browniano, esclarecendo assim que a verdadeira causa do fenômeno era consequência da interação mecânica das micropartículas com o fluido. A modelagem desse movimento passou, desde então, a ser um dos grandes temas da mecânica estatística. Em 1968, Benoit Mandelbrot e Van Ness propuseram como uma generalização do movimento browniano, o chamado movimento browniano fracionário, através de um expoente real H ($0 < H < 1$), conhecido como expoente de Hurst. Foi a partir dos trabalhos de Mandelbrot que o movimento browniano fracionário começou a ganhar destaque e passou a encontrar inúmeras aplicações em diversas áreas da ciência. Sendo um exemplo de fractal aleatório, o movimento browniano fracionário possui dimensão fractal dada por $D_f = 2 - H$. Neste trabalho, abordamos algumas das propriedades estatísticas mais importantes do movimento browniano e do movimento browniano fracionário, apresentando, em seguida, alguns métodos simples de simulação de uma partícula executando esses tipos de movimento em uma dimensão. E por fim, analisamos os dados gerados nas simulações do movimento browniano fracionário através de alguns métodos utilizados para se estimar o expoente de Hurst.

Palavras chaves: Movimento Browniano, Movimento Browniano Fracionário, Expoente de Hurst, Dimensão fractal.

ABSTRACT

The irregular and erratic movement of small particles immersed in a solution, initially observed and described by English botanist Robert Brown, around 1828, became known as Brownian motion. From 1905 with the theoretical work of the German physicist Albert Einstein, and other later works, it was possible to connect the kinetic theory of fluids to the Brownian motion, explaining how the real cause of the phenomenon was the result of the mechanical interaction of the microparticles with the fluid. The modeling of this movement became since then one of the major themes of statistical mechanics. In 1968, Benoit Mandelbrot and Van Ness proposed a generalization of Brownian motion, called fractional Brownian motion, through a real exponent H ($0 < H < 1$), known as Hurst exponent. It was from Mandelbrot works that the fractional Brownian movement began to gain prominence and went on to found numerous applications in various areas of science. As an example of random fractal, fractional Brownian motion has fractal dimension given by $D_f = 2 - H$. In this paper, we address some of the most important statistical properties of Brownian motion and fractional Brownian motion, showing some simple methods of simulation of a particle performing these types of motion in one dimension. Finally, we analyze the data generated in the simulations of fractional Brownian motion through some methods used to estimate the Hurst exponent.

Keywords: Brownian motion, Fractional Brownian motion, Hurst exponent, Fractal dimension.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Etapas da construção da curva de Koch	19
Figura 2.2: Floco de neve de Koch	21
Figura 2.3: Etapas da construção da quádrlica de Koch	22
Figura 2.4: Etapas de construção do triângulo de Sierpinski por remoção de triângulos	22
Figura 2.5: Triângulo de Sierpinski	23
Figura 2.6: Conjunto de Mandelbrot	24
Figura 3.1: Trajetória de uma partícula executando um MB em duas dimensões	26
Figura 3.2: Exemplo de um caminhante aleatório unidimensional, com passos de comprimento $l = 1$ e intervalos de tempo $\tau = 1$	28
Figura 3.3: Gráfico da média quadrática de x em função do número de passos, para 30.000 caminhantes aleatórios, para $l = 1$ e $\tau = 1$. O coeficiente angular obtido foi $2D \approx 1.001$. .	28
Figura 3.4: Movimento browniano redimensionado. No centro ($r = 1$) temos o gráfico de uma pequena parte do movimento browniano $X(t)$. Nos outros gráficos são exibidos movimentos brownianos redimensionados da forma $r^{-1/2}X(rt)$, onde o fator de escala r varia de $r = 1/12$ à $r = 12$ correspondente à contração e expansão da função original na direção do tempo	30
Figura 3.5: Exemplo de um ruído branco gaussiano (em baixo) e o movimento browniano gerado a partir da integração deste (em cima)	31
Figura 3.6: Ilustração dos primeiros passos do método do deslocamento aleatório do ponto médio em uma dimensão	32
Figura 3.7: Estágios do método de deslocamento aleatório do ponto médio retratando aproximações de um movimento browniano, onde são utilizados 3, 5, 9, . . . , 513 pontos em cada estágio, respectivamente	34
Figura 3.8: Ilustração dos primeiros passos do método de cortes aleatórios	35
Figura 3.9: Estágios do método de cortes aleatórios retratando aproximações de um movimento browniano, onde foram realizados até 1.000 cortes	36

Figura 3.10: Estágios do método de cortes aleatórios aplicado a um plano. (a) 10 cortes; (b) 100 cortes; (c) 500 cortes; (d) 1.000 cortes; (e) 10.000 cortes; (f) 100.000 cortes	37
Figura 3.11: Superfície browniana obtida através do método de cortes aleatórios aplicado a um plano, onde foram realizados 100.000 cortes	38
Figura 3.12: Nove realizações de movimento browniano obtido a partir da expansão em séries trigonométricas (Equação 3.20), onde o número de termos utilizado na série foi $n = 10.000$	39
Figura 3.13: Movimento browniano fracionário redimensionado. Nos gráficos à esquerda, temos MBF com expoente de Hurst $H = 0.3$, e à direita, $H = 0.9$. No centro ($r = 1$) temos o gráfico de uma pequena parte de um MBF $X_H(t)$. Nos outros gráficos são exibidos MBF redimensionados da forma $r^{-H}X_H(rt)$, onde o fator de escala r varia de $r = 1/12$ à $r = 12$ correspondente à contração e expansão da função original na direção do tempo	41
Figura 3.14: Movimento browniano fracionário, para vários valores de H . Quanto mais o valor de H se aproxima de zero, mais rugosa é a aparência das curvas e maior é a dimensão fractal; já quando H se aproxima de um, as curvas se tornam mais suaves, isto é, menos rugosas. . .	41
Figura 3.15: Simulação do movimento browniano fracionário, para vários valores de H , obtida a partir da representação estocástica (Equação 3.25)	43
Figura 3.16: Simulação do movimento browniano fracionário, para vários valores de H , obtido a partir do método de deslocamento aleatório do ponto médio	44
Figura 3.17: Simulação do movimento browniano fracionário, para vários valores de H , obtido a partir do método de adições aleatórias sucessivas	45
Figura 3.18: Exemplos de movimento browniano fracionário para vários valores de H , gerados a partir do método de síntese espectral	48
Figura 3.19: Gráfico da média quadrática de séries $MBF_{H=0.5}$ geradas a partir dos seguintes métodos: (a) integração do ruído branco; (b) deslocamento do ponto médio; (c) cortes aleatórios; (d) expansão em séries trigonométricas	49
Figura 3.20: Gráfico da média quadrática de séries MBF geradas a partir da representação estocástica. (a) $H = 0.2$ e $H = 0.4$. (b) $H = 0.6$ e $H = 0.8$	50
Figura 3.21: Passos do método DFA. (a) Série original $x(t)$; (b) Série integrada $X(t)$; Cálculo da tendência local $X_k(t)$: (c) $n = 80$ (d) $n = 50$	51
Figura 3.22: Método DFA aplicado à séries MBF geradas a partir do método de adições aleatórias sucessivas. (a) $H = 0.1, 0.2$ e 0.3 ; (b) $H = 0.4, 0.5$ e 0.6 ; (c) $H = 0.7, 0.8$ e 0.9	53

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL	14
2.1 Dimensão de Hausdorff-Besicovitch e Dimensão Fractal	15
2.2 Auto-similaridade e auto-afinidade	17
2.3 Curva de Koch	18
2.4 Triângulo de Sierpinski	22
2.5 Conjunto de Mandelbrot	24
3 MOVIMENTO BROWNIANO E MOVIMENTO BROWNIANO FRACIONÁRIO	25
3.1 Movimento Browniano	25
3.1.1 Caminhante Aleatório	26
3.1.2 Propriedades estatísticas do Movimento Browniano	29
3.1.3 Síntese do Movimento Browniano	30
3.1.3.1 Integração do ruído branco	30
3.1.3.2 Deslocamento aleatório do ponto médio	32
3.1.3.3 Cortes aleatórios	34
3.1.3.4 Expansão em séries trigonométricas	38
3.2 Movimento Browniano Fracionário	39
3.2.1 Síntese do Movimento Browniano Fracionário	41
3.2.1.1 Representação estocástica	41
3.2.1.2 Deslocamento do ponto médio e Adições aleatórias sucessivas	43
3.2.1.3 Síntese espectral	45
3.2.2 Métodos para a estimativa do parâmetro H de uma série MBF	48
3.2.2.1 Média quadrática	48
3.2.2.2 Método DFA	50
4 CONCLUSÃO	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	55

1 INTRODUÇÃO

Embora a geometria Euclidiana possa descrever muitas geometrias de objetos naturais, na natureza podemos encontrar diversas formas com um alto nível de complexidade cuja descrição por meio da abordagem Euclidiana se mostra inadequada. Nesse contexto, surge então uma nova geometria, a geometria Fractal. Na natureza encontramos uma infinidade de estruturas fractais chamadas de fractais naturais. Neste trabalho daremos destaque aos movimentos brownianos e movimentos brownianos fracionários, que são exemplos de fractais aleatórios.

Por volta de 1828, o botânico inglês Robert Brown passou a observar e descrever o movimento irregular e errático de pequenas partículas imersas numa solução. Esse tipo de movimento irregular ficou conhecido como movimento browniano. Nessa época, entretanto, não se pensava que a causa do movimento browniano era consequência da interação mecânica das micropartículas com o fluido. Finalmente, a partir de 1905, com os trabalhos teóricos do físico alemão Albert Einstein [17], e outros trabalhos posteriores, foi possível ligar a teoria cinética dos fluidos ao movimento browniano, esclarecendo assim a verdadeira causa do fenômeno. Desde então, a modelagem desse movimento passou a ser um dos grandes temas da mecânica estatística.

Em 1968, Benoit Mandelbrot e Van Ness [25] propuseram um novo processo gaussiano, denominado movimento browniano fracionário, como uma generalização do movimento browniano através de um expoente real H ($0 < H < 1$), conhecido como expoente de Hurst [10]. Foi a partir dos trabalhos de Mandelbrot que o movimento browniano fracionário começou a ganhar destaque e passou, então, a encontrar inúmeras aplicações em diversas áreas da ciência, como física, química, ciências climáticas, geofísica, sociofísica, econofísica e ciências da computação [6]. Pelo fato de estar presente em muitos fenômenos naturais, o movimento browniano fracionário constitui um dos modelos matemáticos mais usados em computação gráfica para a realização de simulações da natureza através de fractais aleatórios [27].

Este trabalho está organizado da maneira como se segue. Inicialmente faremos uma breve introdução à geometria fractal, apresentando conceitos importantes como definição de fractal, dimensão de Hausdorff-Besicovitch e dimensão fractal, bem como também a propriedade de auto-similaridade. Também faremos menção de alguns exemplos bem famosos

de fractais que nos ajudam a compreender melhor os conceitos acima mencionados. Posteriormente, abordaremos o movimento browniano e o movimento browniano fracionário, bem como algumas de suas propriedades estatísticas mais importantes. Também apresentaremos alguns métodos simples de simulação de uma partícula executando esses tipos de movimento aleatório em uma dimensão. Por fim, faremos uma análise dos dados gerados nas simulações utilizando alguns métodos para a estimativa do parâmetro H de um movimento browniano fracionário.

2 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL

Embora a geometria Euclidiana possa descrever muitas geometrias de objetos naturais, podemos encontrar na natureza diversas formas com um alto nível de complexidade cuja descrição por meio da abordagem Euclidiana se mostra inadequada. Nesse contexto, surge uma nova geometria, a geometria Fractal, também conhecida como geometria da natureza, introduzida e estudada por Benoit Mandelbrot [1, 2, 3] na segunda metade do século XX, sendo considerado o Pai da geometria Fractal.

Enquanto a geometria Euclidiana estuda curvas e superfícies (em duas ou mais dimensões) que, globalmente, podem ter uma estrutura bastante complicada, mas em vizinhanças pequenas eles são apenas linhas retas ou planos, os fractais, entretanto, apresentam exatamente o oposto em suavidade; um fractal possui detalhes em todas as escalas, não importam quão pequenas elas sejam, já os objetos “lisos” não produzem muitos detalhes em escalas menores [4]. Em contraposição a esses objetos “lisos”, o termo fractal, que vem do latim “*fractus*”, significa quebrado, fragmentado ou irregular.

Os fractais estão presentes em toda parte. Na natureza encontramos uma infinidade de estruturas fractais chamadas de fractais naturais, como exemplos, podemos citar o contorno das montanhas e de outras formações rochosas, a rugosidade do relevo terrestre, a costa litorânea de um país, diversas fraturas (especialmente em rochas), certos cristais, ramificações de uma bacia hidrográfica, os flocos de neve, as nuvens, os raios, a estrutura das árvores e de outros vegetais, bem como suas raízes e folhas, o sistema de vasos sanguíneos, o sistema nervoso e a formação esponjosa dos pulmões. A geometria Fractal, portanto, apresenta um caráter interdisciplinar por permitir inúmeras aplicações em diversas áreas da Ciência [5].

Há muitas definições de fractais na literatura. Entretanto, a definição de fractal não é facilmente compreendida se não for expressa em linguagem razoavelmente intuitiva [6]. Mandelbrot, inicialmente definiu fractal a partir do conceito de dimensão: “Um fractal é por definição um conjunto para o qual a sua dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede a sua dimensão topológica”. No entanto, esta é uma definição bastante restrita. Um fractal também pode ser definido em função da propriedade de *auto-similaridade* ou auto-semelhança. Dessa forma, um fractal é uma estrutura composta por partes que se assemelham ao todo, só que em uma escala menor. O matemático Kenneth Falconer [7] propõe uma definição menos rigorosa

de fractais, em termos das propriedades ou características de construção; assim um conjunto é considerado um fractal se satisfaz pelo menos algumas das seguintes características [5]:

- Possui detalhes em qualquer escala;
- É localmente ou globalmente muito irregular;
- Possui algum nível de auto-similaridade;
- Possui dimensão fractal maior do que a dimensão topológica;
- Pode ser definido por um algoritmo recursivo simples.

De acordo com Saupe, o fascínio que envolve os fractais tem duas raízes: a primeira, é que os fractais são bastante adequados para simular muitos fenômenos naturais; e a segunda razão é que, em geral, os fractais são simples para se gerar em computadores [4]. Os fractais podem ser agrupados, quanto à forma de geração, em duas categorias principais: fractais *determinísticos* e fractais *aleatórios*. Os fractais determinísticos são gerados por um sistema de funções iteradas ou por relações de recorrência. Já os fractais aleatórios são gerados por processos estocásticos (permitindo, assim, a simulação de fenômenos naturais). Uma vez que fractais possuem infinitos detalhes em todas as escalas segue-se que um cálculo completo de um fractal é impossível; portanto aproximações de fractais para alguma precisão finita devem ser suficientes [4].

2.1 Dimensão de Hausdorff-Besicovitch e Dimensão Fractal

Intuitivamente, podemos entender como dimensão de um conjunto, o quanto esse conjunto preenche o espaço no qual está inserido [8]. Para entendermos melhor essa ideia de dimensão vamos seguir uma linha de raciocínio encontrada em [8, 9] e que culminará na definição de dimensão de Hausdorff-Besicovitch. Suponha, inicialmente, uma curva de tamanho L_0 . Para medir seu comprimento, vamos cobrir a curva com $N(l) = L_0/l$ segmentos de tamanho l . Assim, o tamanho L da curva será dado por

$$L = N(l)l \tag{2.1}$$

Obteremos o real tamanho da curva L , no limite quando l tende a zero:

$$\lim_{l \rightarrow 0} L = \lim_{l \rightarrow 0} N(l)l = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{L_0}{l} l = L_0 \tag{2.2}$$

Se quisermos medir a “área” da curva, podemos cobri-la com pequenos quadrados de área l^2 . Assim a área da curva será dada por

$$A = N(l)l^2 \quad (2.3)$$

No limite quando l tende a zero:

$$\lim_{l \rightarrow 0} A = \lim_{l \rightarrow 0} N(l)l^2 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{L_0}{l} l^2 = \lim_{l \rightarrow 0} L_0 l^1 = 0 \quad (2.4)$$

Portanto, a área da curva é nula. Se desejarmos calcular o “volume” da curva, podemos usar o mesmo raciocínio, cobrindo a curva com pequenos cubos de volume l^3 , de modo que o volume da curva será

$$V = N(l)l^3 \quad (2.5)$$

No limite quando l tende a zero teremos:

$$\lim_{l \rightarrow 0} V = \lim_{l \rightarrow 0} N(l)l^3 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{L_0}{l} l^3 = \lim_{l \rightarrow 0} L_0 l^2 = 0 \quad (2.6)$$

Como podemos ver, o volume da curva é nulo. Suponha, agora, um plano de área A_0 . Podemos cobrir esse plano com $N(l)$ quadrados de tamanho l^2 , de forma que $N(l) = A_0/l^2$. Assim, a área A do plano é

$$A = N(l)l^2 \quad (2.7)$$

No limite quando l tende a zero teremos:

$$\lim_{l \rightarrow 0} A = \lim_{l \rightarrow 0} N(l)l^2 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{A_0}{l^2} l^2 = A_0 \quad (2.8)$$

Se tentarmos cobrir o plano com pequenos cubos de tamanho l^3 , o volume V será dado por:

$$V = N(l)l^3 \quad (2.9)$$

Então, no limite quando l tende a zero teremos:

$$\lim_{l \rightarrow 0} V = \lim_{l \rightarrow 0} N(l)l^3 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{A_0}{l^2} l^3 = \lim_{l \rightarrow 0} A_0 l^1 = 0 \quad (2.10)$$

Se tentássemos calcular o “comprimento” de um plano ou uma superfície, teríamos:

$$L = N(l)l^1 \quad (2.11)$$

Assim, no limite quando l tende a zero

$$\lim_{l \rightarrow 0} L = \lim_{l \rightarrow 0} N(l)l^1 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{A_0}{l^2} l^1 = \lim_{l \rightarrow 0} A_0 l^{-1} = \infty \quad (2.12)$$

Portanto é impossível cobrir um plano com uma linha.

Assim, dado um conjunto de pontos S , podemos definir a dimensão de Hausdorff-Besicovitch D , para o conjunto S , como a dimensão crítica na qual a d -ésima medida M_d desse conjunto muda de zero para infinito [9]:

$$M_d = \sum \gamma(d)l^d \rightarrow \lim_{l \rightarrow 0} N(l)\gamma(d)l^d = \begin{cases} 0, & \text{se } d > D \\ \infty, & \text{se } d < D \end{cases} \quad (2.13)$$

onde $N(l)$ é o número de funções teste $\gamma(d)l^d$ que cobre completamente o conjunto S , $\gamma(d)$ é um fator geométrico, d é a dimensão da medida e l é o comprimento do objeto de medida da função teste [10].

Como já foi citado, um fractal possui dimensão de Hausdorff-Besicovitch (que é por vezes chamada de dimensão fractal) maior do que a sua dimensão topológica. A dimensão topológica ou euclidiana, relacionada aos graus de liberdade espacial, corresponde sempre a números inteiros: 0 para um ponto, 1 para uma curva, 2 para um plano ou superfície, 3 para um volume. Já a dimensão fractal corresponde a números fracionários, para a grande maioria dos fractais. Nesse sentido, a geometria fractal pode ser considerada como uma extensão da geometria euclidiana [11]. A dimensão fractal serve então como um quantificador do grau de irregularidade ou de fragmentação de um objeto [12].

2.2 Auto-similaridade e auto-afinidade

Um fato bastante interessante é que os fractais são invariantes em escala, um conceito intimamente ligado ao de auto-similaridade [6]. Como já vimos, uma estrutura é dita auto-similar quando as partes que a compõe se assemelham ao todo, só que em uma escala reduzida. A auto-similaridade é uma propriedade básica dos objetos fractais [11], mas isso não significa que toda estrutura auto-similar seja um fractal (como, por exemplo, retas, quadrados, cubos). Em princípio, fractais matemáticos são auto-similares sobre um alcance infinito de escalas, enquanto que fractais naturais têm um alcance limitado de auto-similaridade [11].

Existem três níveis de auto-similaridade encontrados em fractais: a *auto-similaridade exata*, a *auto-similaridade aproximada* e a *auto-similaridade estatística*. A auto-similaridade exata é a forma mais marcante de auto-semelhança [13]. Ocorre quando o objeto é idêntico em diferentes escalas; ou quando as partes de um objeto podem ser vistas como réplicas do todo; ou, de outra forma, quando essas partes podem ser consideradas como reduções ou ampliações isotrópicas da estrutura original. Em geral, fractais gerados por sistemas de funções iteradas apresentam auto-similaridade exata [13]. A auto-similaridade aproximada é uma forma enfraquecida do conceito de auto-semelhança. Ocorre quando o fractal aparenta ser aproximadamente idêntico em diferentes escalas [13]; ou ainda, quando o fractal é composto por partes que podem ser consideradas como reduções ou ampliações anisotrópicas da estrutura original. Quando um sistema é invariante apenas em transformações

anisotrópicas, é chamado de auto-afim [6, 14]. Fractais desse tipo contêm pequenas cópias da estrutura completa, mas de maneira distorcida ou degenerada [13]. Em geral, fractais gerados por relações de recorrência possuem auto-similaridade aproximada. Já a auto-similaridade estatística é a forma menos evidente de auto-semelhança; o fractal, nesse caso, possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em escalas diferentes [13]. Os fractais aleatórios se encaixam nessa categoria. No próximo capítulo daremos destaque aos movimentos brownianos fracionários, que são exemplos de fractais aleatórios.

Quanto aos fractais que possuem auto-similaridade exata, podemos calcular sua dimensão fractal através da chamada *dimensão de auto-similaridade*. Se considerarmos um segmento de reta, por exemplo, podemos dividi-lo em 3 partes iguais, sendo cada parte uma redução do segmento original por um fator de 3; ou podemos dividi-lo em 5 (ou n) partes, onde cada parte é uma redução por um fator de 5 (ou n). Se considerarmos um quadrado, podemos dividi-lo em 4 quadrados iguais reduzidos por um fator de 2; ou podemos dividi-lo em 9 (ou n^2) quadrados iguais reduzidos por um fator de 3 (ou n). Se tomarmos um cubo, podemos dividi-lo em 64 (ou n^3) cubos iguais reduzidos por um fator de 4 (ou n). Nesses três exemplos podemos ver que o número de cópias N da estrutura original está relacionado com o fator de escala r da seguinte forma:

$$N = r^{D_A} \quad (2.14)$$

onde D_A é a dimensão de auto-similaridade, que para os três exemplos acima corresponde a dimensão topológica: 1 para a reta, 2 para o quadrado, e 3 para o cubo. Para os fractais exatamente auto-similares, a dimensão de auto-similaridade é a dimensão fractal, dada por:

$$D_f = \frac{\ln N}{\ln r} \quad (2.15)$$

A seguir apresentaremos alguns exemplos simples de fractais que nos ajudam a compreender melhor algumas das propriedades básicas (auto-similaridade e dimensão fractal, por exemplo) desses objetos.

2.3 Curva de Koch

Em 1904, o matemático polonês Niels Fabian Helge Von Koch (1870-1924) publicou um artigo apresentando uma curva sem tangentes que mais tarde ficaria conhecida como *curva de Koch*, ou *curva triádica de Koch*, um exemplo clássico de fractal. Para construirmos a curva de Koch vamos iniciar o procedimento tomando um segmento de reta unitário (vale

observar, entretanto, que é possível obter a curva de Koch a partir de um segmento de reta qualquer e não necessariamente um de comprimento unitário); este é o nível zero, $n = 0$, da construção dessa curva. Então dividimos este segmento em três partes, cada uma com comprimento igual a $1/3$ do comprimento inicial, e substituímos o seu terço central por um triângulo equilátero sem sua base; esta é a primeira iteração ou nível um, $n = 1$. Agora, com quatro segmentos de comprimento igual a $1/3$, procedemos da mesma forma para com cada um deles, isto é, cada novo segmento é dividido em três partes iguais e o seu terço central é substituído por um triângulo equilátero sem a base; dessa forma passamos para a segunda iteração, $n = 2$. E assim repetimos este processo infinitamente. Na Figura 2.1 podemos observar os primeiros níveis de construção da curva de Koch.

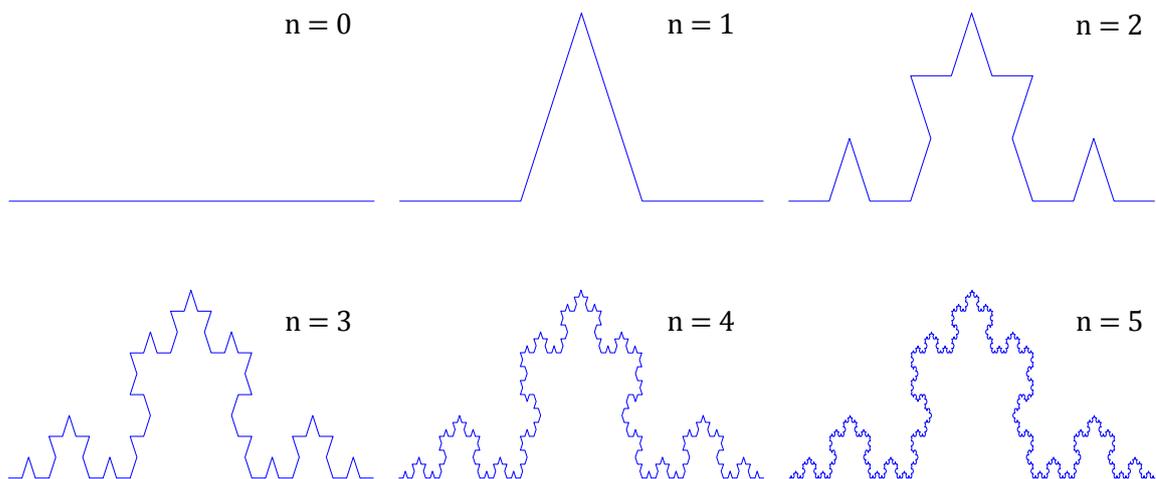


Figura 2.1: Etapas da construção da curva de Koch.

A curva de Koch é sem dúvida bastante interessante; um fato inusitado é que essa curva possui um comprimento que tende ao infinito. Para demonstrar isso vamos primeiramente considerar o número de segmentos s que são gerados a cada iteração, e seus respectivos comprimentos L . Iniciamos a construção com um único segmento, $s(0) = 1$, de comprimento $L(0) = l$. Na primeira iteração temos $s(1) = 4$ segmentos de comprimento $L(1) = l/3$; na segunda, $s(2) = 16$ segmentos de comprimento $L(2) = l/9 = l/3^2$; e assim por diante. Por recorrência, o número de segmentos obtidos após n iterações, será

$$s(n) = 4^n \quad (2.16)$$

e o comprimento de cada segmento será dado por

$$L(n) = l/3^n \quad (2.17)$$

Assim o comprimento total da curva, após n iterações, será dado por

$$s(n)L(n) = l \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (2.18)$$

Portanto, no limite quando o número de iterações tende ao infinito teremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n)L(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty \quad (2.19)$$

O que mostra que a curva de Koch possui um comprimento que tende ao infinito.

Para calcular a dimensão fractal da curva de Koch vamos considerar que o comprimento inicial seja $L(0) = l = 1$, assim, da Equação (2.17), temos que

$$n = -\frac{\ln L}{\ln 3} \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.16), podemos ver que o número de segmentos segue a relação

$$s(n) = 4^n = 4^{-\ln L / \ln 3} = e^{-\ln L \ln 4 / \ln 3} = e^{-D_f \ln L} = L^{-D_f} \quad (2.21)$$

onde $D_f = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.261$ é a dimensão fractal da curva de Koch. Podemos observar que esse fractal é constituído de quatro cópias de si mesmo, reduzidas por um fator de 3.

Tomando um polígono regular e construindo sobre cada um dos seus lados uma curva de Koch, obteremos, no limite quando o número de iterações tende ao infinito, a chamada *ilha de Koch* [5]. Em particular, se iniciarmos esse processo a partir de um triângulo equilátero obteremos o *floco de neve de Koch* (Figura 2.2). Como cada lado deste fractal é formado a partir de uma curva de Koch, então para calcular seu perímetro basta multiplicar por três o comprimento da curva de Koch. Logo, o floco de neve de Koch possui um perímetro que tende ao infinito, embora possua uma área finita, como veremos.

A área de um triângulo equilátero de lado l é:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \quad (2.22)$$

Considerando $l = 1$, a área inicial do floco de neve de Koch (que, nesse nível, é apenas um triângulo equilátero) será $A(0) = \sqrt{3}/4$. A cada iteração, um triângulo é inserido em cada segmento da figura. Assim, na primeira iteração, 3 novos triângulos de lado $1/3$ são inseridos; na segunda iteração, 12 triângulos de lado $1/3^2$; na terceira, 48 de lado $1/3^3$; e assim por diante. Por recorrência, serão inseridos, na n -ésima iteração, $3 \times 4^{n-1}$ triângulos de lado $1/3^n$, cuja área é dada por:

$$A(n) = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{3^{2n}} \quad (2.23)$$

A área total A_T do floco de neve de Koch será dada por:

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{3^{2n}} \right) \quad (2.24)$$

onde o primeiro termo corresponde à área do triângulo inicial e o somatório corresponde às áreas dos triângulos inseridos em cada iteração. Podemos reduzir (2.24) à

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^n \right] \quad (2.25)$$

Como o somatório em (2.25) corresponde a uma progressão geométrica de razão $r = 4/9$, cujo primeiro termo é $a_1 = 4/9$, temos então que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{5} \quad (2.26)$$

Portanto, a área total do floco de neve de Koch é:

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}. \quad (2.27)$$

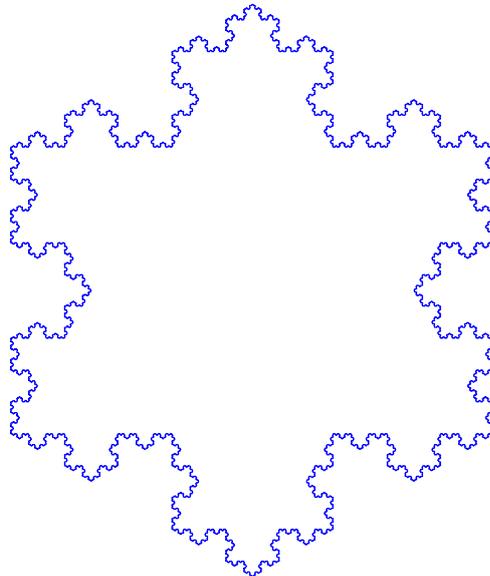


Figura 2.2: Floco de neve de Koch.

Uma outra curva da mesma família da curva de Koch é a quádrica de Koch, que é obtida de forma semelhante à curva triádica de Koch, mas o terço central da reta é substituído por um retângulo sem a base, ao invés de um triângulo equilátero. Veja na Figura 2.3 as primeiras etapas de construção da quádrica de Koch. Como esse fractal é formado por cinco cópias de si mesmo, cada uma reduzida por um fator de 3, então a dimensão de auto-similaridade e portanto, a dimensão fractal, é dada por:

$$D_f = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1.4649 \quad (2.28)$$

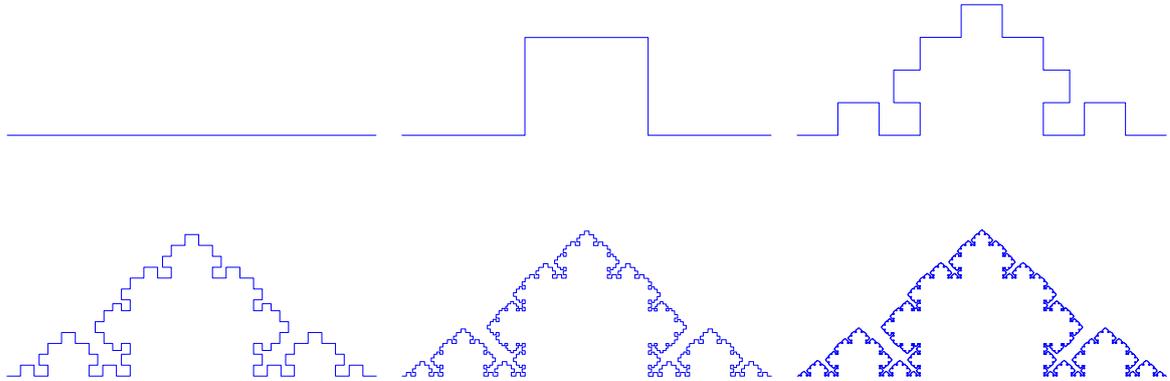


Figura 2.3: Etapas da construção da quádriga de Koch.

2.4 Triângulo de Sierpinski

O matemático polonês Warlaw Sierpinski (1882-1969) apresentou, em 1916, outro clássico dentre os fractais, o *triângulo de Sierpinski*. Um método iterativo bastante conhecido para a construção deste fractal é o *processo por remoção de triângulos*. Começamos esse processo com um único triângulo equilátero, este é o nível zero ($n = 0$) do processo (Figura 2.4 (a)). Vamos denotar por $A(0)$ a área desse primeiro triângulo. Na primeira iteração, $n = 1$, utilizando os pontos médios de cada lado, dividimos o triângulo inicial em 4 triângulos equiláteros, todos iguais, de área $A(1) = A(0)/4$, onde o triângulo central, o que está de "cabeça-para-baixo", é removido (Figura 2.4 (b)). Na segunda iteração, $n = 2$, procedemos da mesma maneira para com os três triângulos que restaram da primeira iteração, isto é, dividimos cada um deles em outros 4 triângulos equiláteros de área $A(2) = A(0)/16$, e removemos o triângulo central (Figura 2.4 (c)). E assim sucessivamente.

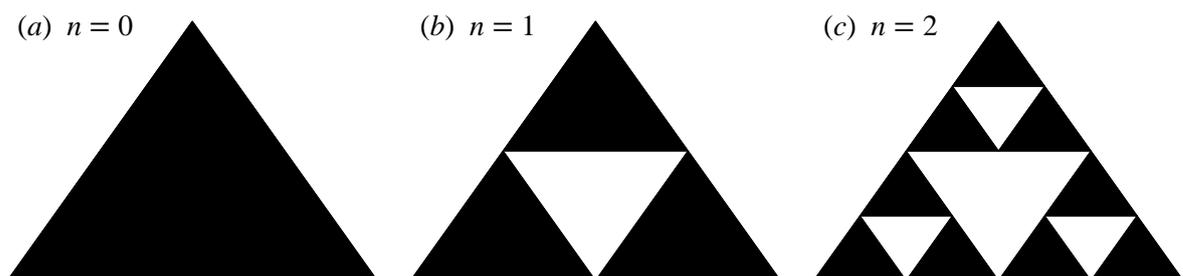


Figura 2.4: Etapas de construção do triângulo de Sierpinski por remoção de triângulos.

Por recorrência, o número N de triângulos obtidos, após n iterações, será dado por

$$N(n) = 3^n \quad (2.29)$$

e a área de cada um desses triângulos será dada por

$$A(n) = \frac{A(0)}{4^n} \quad (2.30)$$

Um fato bastante interessante sobre o triângulo de Sierpinski (Figura 2.5) é que ele possui uma área que tende a zero à medida que o número de iterações tende ao infinito. Para demonstrar isso, basta calcular a área total A_T do triângulo de Sierpinski obtida pela soma das áreas individuais dos 3^n triângulos gerados na n -ésima iteração:

$$A_T(n) = 3^n \frac{A(0)}{4^n} = A(0) \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (2.31)$$

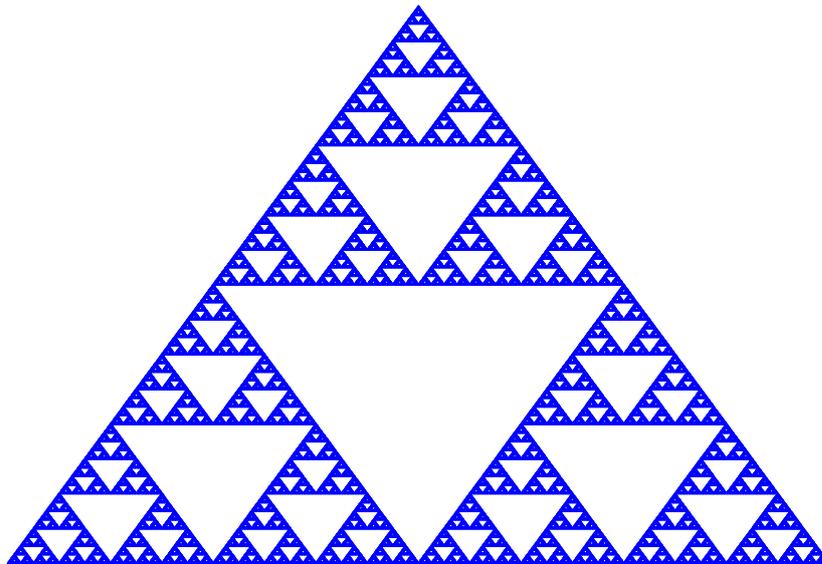


Figura 2.5: Triângulo de Sierpinski.

Assim, no limite quando o número de iterações tende ao infinito teremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_T(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(0) \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \quad (2.32)$$

A dimensão fractal do triângulo de Sierpinski pode ser determinada através do conceito de dimensão de auto-similaridade. Como esse fractal é formado por três cópias de si mesmo, cada uma reduzida por um fator de 2, então:

$$D_f = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1.584 \quad (2.33)$$

2.5 Conjunto de Mandelbrot

Outro exemplo de fractal bastante famoso é o *conjunto de Mandelbrot* (Figura 2.6), que se trata, na verdade, de um conjunto de números complexos definidos da seguinte forma:

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \neq \infty \right\} \quad (2.34)$$

onde $Z_n = Z_{n-1}^2 + c$ e $Z_0 = c$. Assim, se o valor de Z_n , para um dado valor de c , não é infinito quando n tende ao infinito, então c pertence ao conjunto. Uma característica interessante é que este fractal possui um perímetro infinito apesar de possuir uma área finita. Há infinitas regiões no interior deste fractal que podem ser exploradas, gerando diversas figuras muito interessantes.

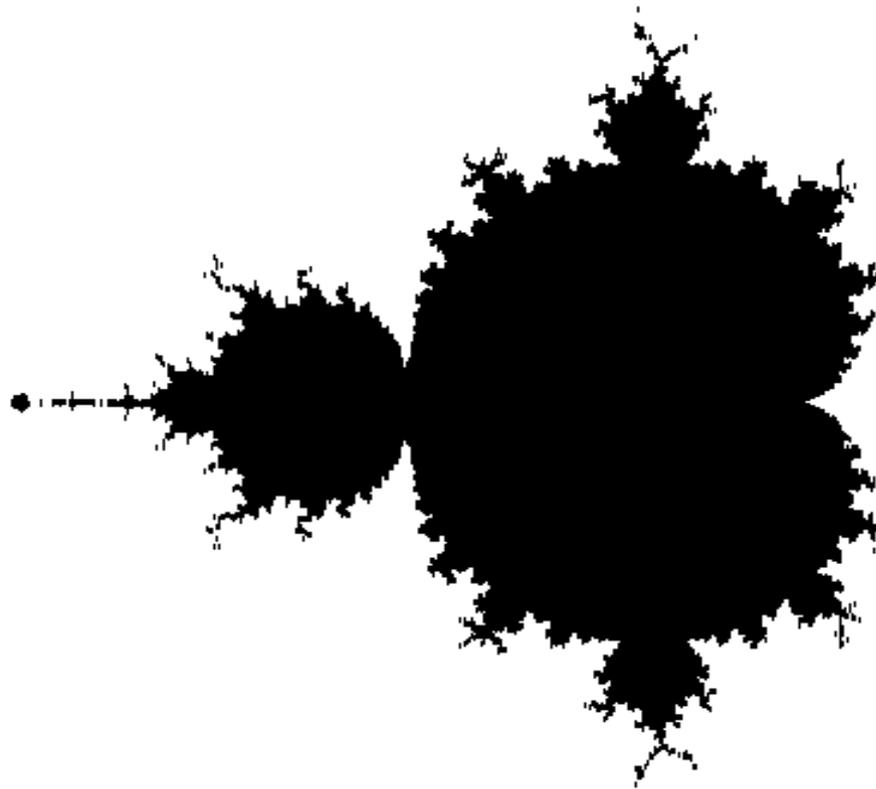


Figura 2.6: Conjunto de Mandelbrot.

3 MOVIMENTO BROWNIANO E MOVIMENTO BROWNIANO FRACIONÁRIO

3.1 Movimento Browniano

O primeiro cientista a observar e descrever o movimento irregular e errático de pequenas partículas imersas numa solução foi o botânico inglês Robert Brown, por volta de 1828 [15]. Esse tipo de movimento irregular ficou conhecido como *movimento browniano* (MB). Nessa época, entretanto, não se pensava que a causa do MB era consequência da interação mecânica das micropartículas com o fluido. Com o intuito de desvendar a natureza do movimento browniano, foram realizados nas décadas seguintes inúmeros experimentos de laboratório onde se verificou que o movimento das partículas ficava mais intenso quando a viscosidade do meio era reduzida ou quando o tamanho das partículas brownianas era diminuído, e também quando se elevava a temperatura da solução [16]. Finalmente, a partir de 1905, com os trabalhos teóricos do físico alemão Albert Einstein [17], e outros trabalhos posteriores, foi possível ligar a teoria cinética dos fluidos ao movimento browniano, esclarecendo assim a verdadeira causa do fenômeno. A partir de então, a modelagem desse movimento passou a ser um dos grandes temas da mecânica estatística [4]. Em 1923, o matemático estadunidense Norbert Wiener [18] construiu uma teoria matemática mais rigorosa sobre o MB, razão pela qual esse tipo de movimento também é conhecido como *processo de Wiener* [19].

O movimento browniano em uma variável constitui um fractal aleatório simples e possui uma dimensão fractal de 1.5; ocasionalmente também é referido como “ruído browniano” [4]. É interessante destacar que os sucessivos deslocamentos das partículas em MB, se observados em intervalos de tempo finito, não possuem qualquer correlação, isto é, são independentes (embora, claramente, as posições não sejam, já que a posição da partícula num certo ponto depende da posição anterior); isto se deve ao fato de que a cada colisão com as moléculas do fluido, todas as direções para o movimento das partículas brownianas são igualmente prováveis, o que torna o MB um movimento aleatório [6, 10]. Na figura abaixo temos um exemplo da trajetória de uma partícula executando um MB em duas dimensões:

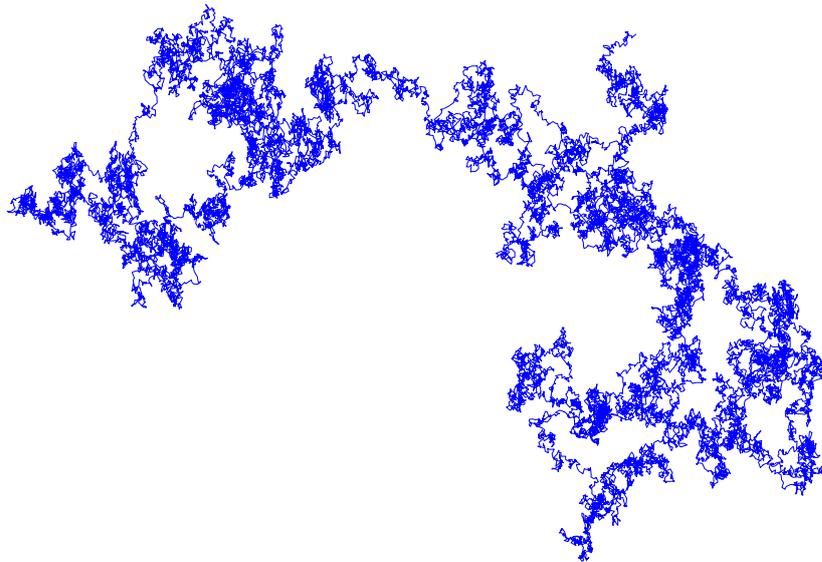


Figura 3.1: Trajetória de uma partícula executando um MB em duas dimensões.

O MB é um processo estocástico no sentido de ser uma lista indexada de números aleatórios, e pode ser modelado e simplificado por processos mais simples, como o do caminhante aleatório [6, 20], como será exposto a seguir.

3.1.1 Caminhante Aleatório

Para definir o conceito de caminhante aleatório, ou caminhante bêbado, em uma dimensão, consideremos uma partícula com movimento confinado a uma linha, dando passos aleatórios x_i em intervalos uniformes de tempo τ . Assim, após N passos, isto é, após um tempo $t_N = N\tau$, a posição do caminhante aleatório, partindo da origem, é dada pela função aleatória (ou processo aleatório) $X(t)$, e pode ser escrito como:

$$X(t = N\tau) = \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.1)$$

Vamos agora considerar que a partícula descreve passos de igual comprimento (l) para a direita, com probabilidade p , ou para a esquerda, com probabilidade $q = 1 - p$. Assim, a probabilidade $P_N(m)$ de se encontrar a partícula na posição $x = ml$ após N passos ($|m| \leq N$) é dada por [21]:

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}} \quad (3.2)$$

A probabilidade $P_N(m)$ dada pela Equação (3.2) é uma distribuição binomial. Para obtermos a distribuição de probabilidades para $N \gg 1$, podemos utilizar o teorema do limite central, e assim chegamos a:

$$P_N(m) = \frac{1}{\sqrt{8\pi Npq}} \exp\left[-\frac{(m - N(p - q))^2}{8Npq}\right] \quad (3.3)$$

Tomando $p = q = 1/2$, temos então:

$$P_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left[-\frac{m^2}{2N}\right] \quad (3.4)$$

Sabendo que $m = x/l$ e $N = t/\tau$, e definindo a chamada constante de difusão $D = l^2/2\tau$, a função densidade de probabilidades pode ser escrita como função de x e t , em que $P(x, t) = P_N(m)/l$ é dada por:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \quad (3.5)$$

Assim, vemos que os incrementos ou passos de um caminhante aleatório possuem distribuição gaussiana. O *valor médio*, ou *valor esperado* da variável x é

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x, t)dx = 0, \quad (3.6)$$

e a variância é dada por:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t)dx = 2Dt, \quad (3.7)$$

de onde obtemos a famosa relação de Einstein:

$$D = \langle x^2 \rangle / 2t \quad (3.8)$$

Após um número considerável de passos, pode-se dizer que o movimento de um caminhante aleatório converge para um movimento browniano [6]. É interessante destacar que se considerarmos somente os deslocamentos a cada n passos, ainda teremos um caminhante aleatório, já que a trajetória deste tipo de movimento é auto-similar [6, 22].

Abaixo, na Figura 3.2, temos um exemplo de um caminhante aleatório unidimensional, com comprimento $l = 1$ para cada passo e intervalos de tempo $\tau = 1$. Em seguida, na Figura 3.3, temos o gráfico da média quadrática de x , para 30.000 partículas, onde obtivemos um valor para D bem próximo ao valor teórico que é $2D = 1$, para $l = 1$ e $\tau = 1$.

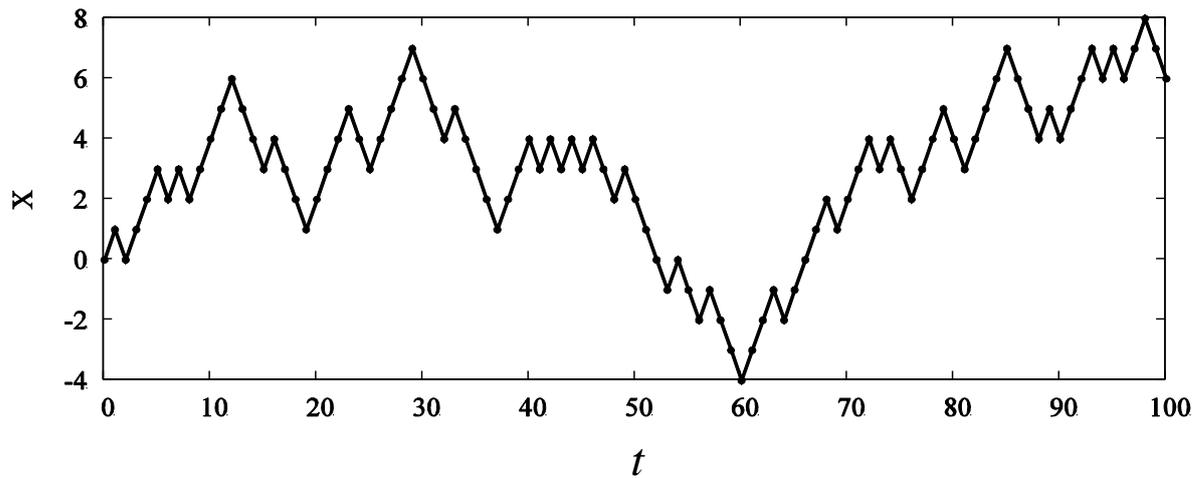


Figura 3.2: Exemplo de um caminhar aleatório unidimensional, com passos de comprimento $l = 1$ e intervalos de tempo $\tau = 1$.

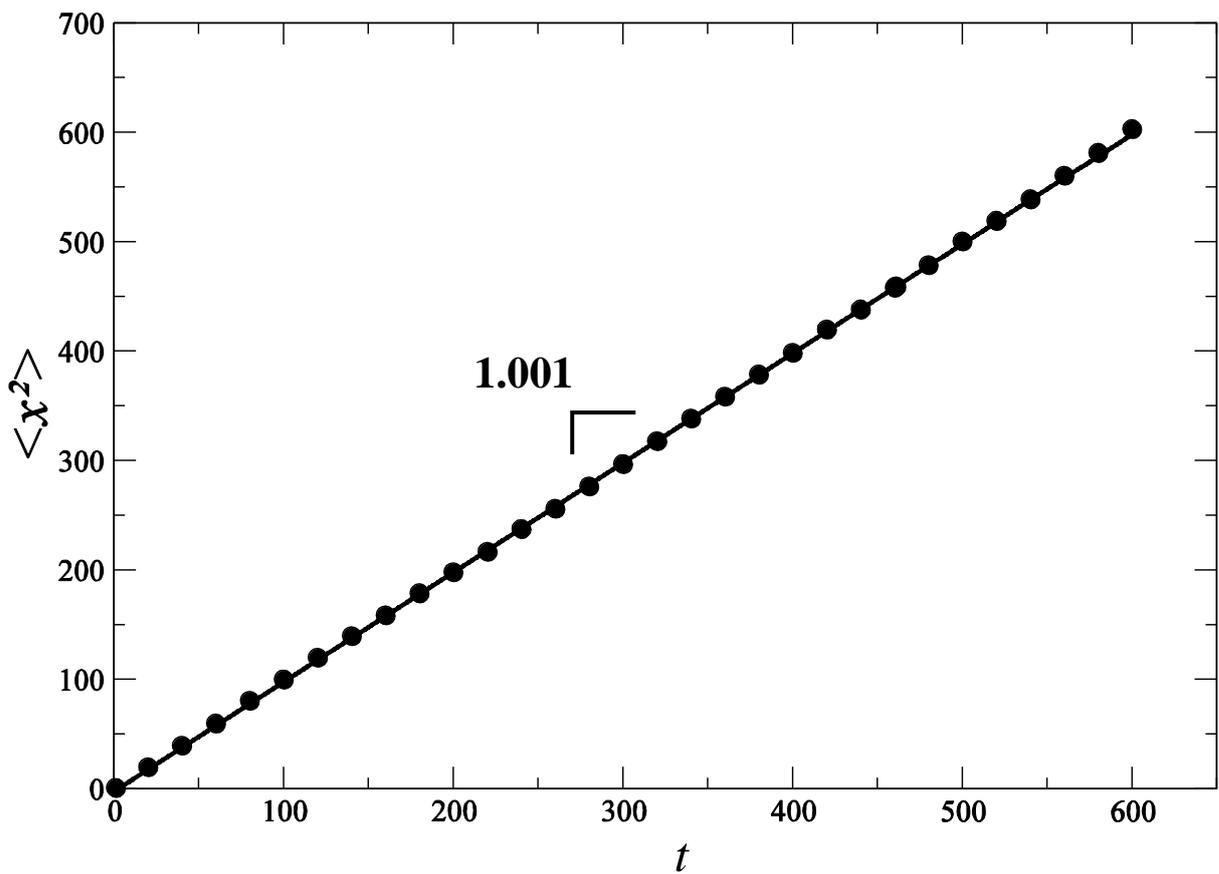


Figura 3.3: Gráfico da média quadrática de x em função do número de passos, para 30.000 caminantes aleatórios, para $l = 1$ e $\tau = 1$. O coeficiente angular obtido foi $2D \approx 1.001$.

3.1.2 Propriedades estatísticas do Movimento Browniano

Em uma dimensão, podemos representar a posição de uma partícula browniana através de um processo aleatório $X(t)$, onde X é simplesmente uma função de uma variável real t (tempo), cujos valores são variáveis aleatórias [4]. Pelo fato de seus incrementos possuírem distribuição gaussiana, o movimento browniano faz parte de uma classe de processos denominados de *processos gaussianos* [6]. O valor médio do processo aleatório é então

$$\langle X(t_1) - X(t_0) \rangle = 0, \quad (3.9)$$

para instantes de tempo que seguem a relação $t_1 > t_0$. E a variância segue a relação abaixo:

$$\langle |X(t_1) - X(t_0)|^2 \rangle = \sigma^2 |t_1 - t_0| \quad (3.10)$$

A partir da relação (3.10) podemos calcular a covariância dada por:

$$\text{cov}\{X(t_1), X(t_0)\} = \langle X(t_1)X(t_0) \rangle = \frac{\sigma^2}{2} [t_1 + t_0 - |t_1 - t_0|] = \sigma^2 \min(t_1, t_0) \quad (3.11)$$

Outra característica interessante é que tal processo aleatório possui invariância de escala [10]. Isso porque os incrementos de X são estatisticamente *auto-similares* no sentido de que

$$X(t_0 + t) - X(t_0) \text{ e } \frac{1}{\sqrt{r}} (X(t_0 + rt) - X(t_0))$$

possuem a mesma distribuição, para qualquer t_0 e $r > 0$ [4]. Tomando por conveniência $t_0 = 0$ e $X(t_0) = 0$ então teremos que os dois processos aleatórios

$$X(t) \text{ e } \frac{1}{\sqrt{r}} X(rt)$$

são estatisticamente indistinguíveis. Na Figura 3.4, abaixo, podemos ver as trajetórias devidamente redimensionadas de uma partícula em movimento browniano. Observe que em todas as amostras a aparência visual é mesma.

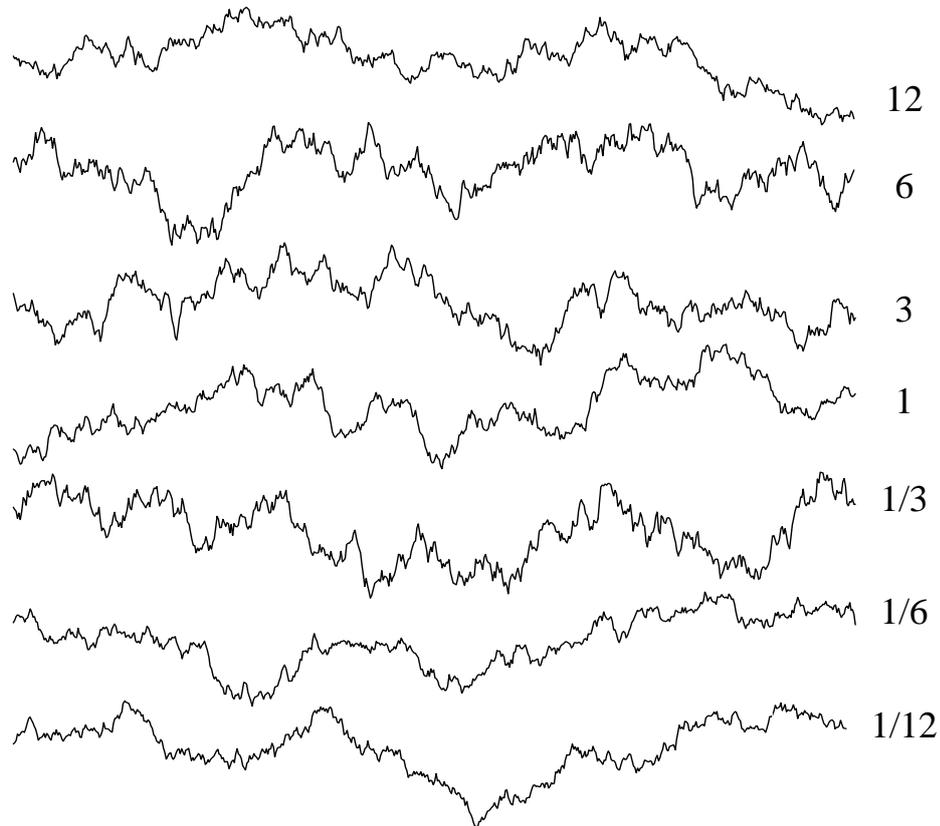


Figura 3.4: Movimento browniano redimensionado. No centro ($r = 1$) temos o gráfico de uma pequena parte do movimento browniano $X(t)$. Nos outros gráficos são exibidos movimentos brownianos redimensionados da forma $r^{-1/2}X(rt)$, onde o fator de escala r varia de $r = 1/12$ à $r = 12$ correspondente à contração e expansão da função original na direção do tempo.

3.1.3 Síntese do Movimento Browniano

3.1.3.1 Integração do ruído branco

Um bom e simples método para a geração de um movimento browniano se dá por meio da utilização de números aleatórios gaussianos. Assim, seja $W(t)$ um processo gaussiano não-correlacionado, estacionário, cujos incrementos, além de serem independentes, possuem distribuição $N(0, 1)$, isto é, uma distribuição normal com valor médio 0 e variância 1. A covariância do processo $W(t)$ segue a relação

$$\langle W(t)W(s) \rangle = \delta(t - s), \quad (3.12)$$

onde $\delta(t - s)$ é um delta de Kronecker. Tal processo gaussiano é chamado de *ruído branco gaussiano* ou simplesmente *ruído branco*. A integral do ruído branco gaussiano dada em (3.13) obedece as relações (3.9) e (3.10) [4]:

$$X(t) = \int_0^t W(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

Também podemos ver que $X(t)$ satisfaz (3.11), pois

$$\langle X(t)X(s) \rangle = \left\langle \int_0^t W(\tau) d\tau \int_0^s W(\tau') d\tau' \right\rangle = \int_0^t \int_0^s \delta(\tau - \tau') d\tau d\tau' = \min(t, s)$$

Dessa forma, a integral do ruído branco $X(t)$ é um movimento browniano.

Numericamente, o processo $X(t)$ nada mais é do que uma soma cumulativa de variáveis gaussianas, como é expresso na equação a seguir:

$$X(t) = \sum_{\tau=0}^t W(\tau) \quad (3.14)$$

Na Figura 3.5, temos um exemplo de um ruído branco gaussiano e o movimento browniano gerado a partir da integração deste.

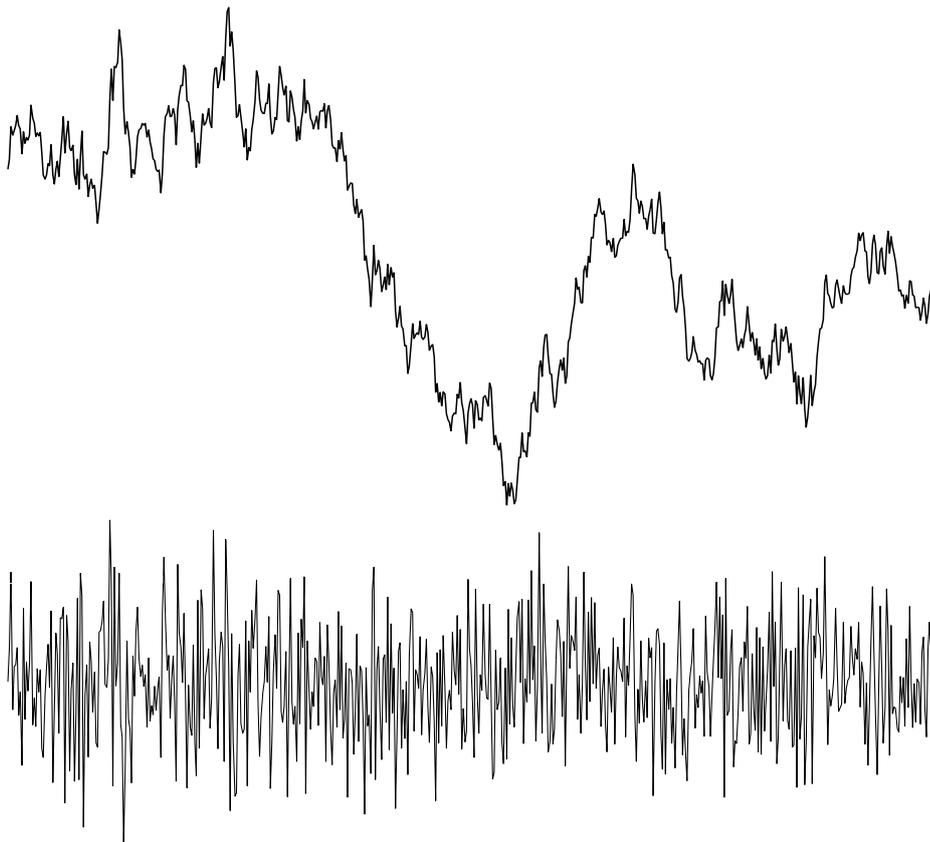


Figura 3.5: Exemplo de um ruído branco gaussiano (em baixo) e o movimento browniano gerado a partir da integração deste (em cima).

3.1.3.2 Deslocamento aleatório do ponto médio

Outro método simples para a geração de movimento browniano, bastante usado em computação gráfica, é o deslocamento aleatório do ponto médio. Este método, que possui a grande vantagem de poder ser generalizado para mais dimensões, consiste basicamente em interpolar dois pontos com a própria média adicionada de um número aleatório gaussiano. Tal processo é então repetido para cada dois pontos consecutivos até que se obtenha a escala desejada. Veja uma ilustração deste método na Figura 3.6.

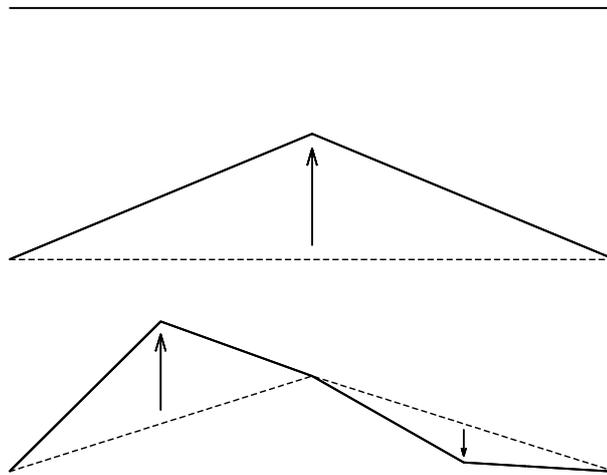


Figura 3.6: Ilustração dos primeiros passos do método do deslocamento aleatório do ponto médio em uma dimensão.

Tomemos então dois pontos: um inicial, $X(0) = 0$, e outro, $X(1)$, como um exemplo de uma variável aleatória gaussiana com média 0 e variância σ^2 , de forma que

$$\langle |X(1) - X(0)|^2 \rangle = \sigma^2 \quad (3.15)$$

De acordo com esse método, uma interpolação desses dois pontos será

$$X(1/2) = \frac{1}{2}(X(1) + X(0)) + D_1 \quad (3.16)$$

onde D_1 é uma variável gaussiana com média 0 e variância Δ_1^2 . Então, para que a série de pontos obtida corresponda a um movimento browniano, devemos esperar que a variância dos incrementos siga a relação expressa em (3.10):

$$\langle |X(t_2) - X(t_1)|^2 \rangle = \sigma^2 |t_2 - t_1| \quad (3.17)$$

para instantes de tempo que seguem a relação $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.

De (3.16) temos que

$$X(1/2) - X(0) = \frac{1}{2}(X(1) - X(0)) + D_1$$

Assim, para que (3.17) seja verdade, devemos ter

$$\langle |X(1/2) - X(0)|^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle |X(1) - X(0)|^2 \rangle + \Delta_1^2 = \frac{1}{2} \sigma^2$$

Logo, aplicando (3.15), devemos ter que

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{4} \sigma^2$$

Agora, o próximo passo é interpolar os pontos $X(0)$ e $X(1/2)$:

$$X(1/4) = \frac{1}{2}(X(1/2) + X(0)) + D_2$$

onde D_2 é uma variável gaussiana com média 0 e variância Δ_2^2 . Procedendo da mesma forma, encontraremos:

$$\langle |X(1/4) - X(0)|^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle |X(1/2) - X(0)|^2 \rangle + \Delta_2^2 = \frac{1}{4} \sigma^2$$

de onde é exigido que

$$\Delta_2^2 = \frac{1}{8} \sigma^2$$

para validar (3.17). Note que este mesmo resultado teria sido obtido se tivéssemos selecionado os pontos $X(1/2)$ e $X(1)$. Podemos então deduzir que, para obtermos resoluções cada vez mais finas, a variância do “deslocamento” D_n deve ser dada por

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2^{n+1}} \sigma^2 \quad (3.18)$$

Por intuição podemos ver que, para uma determinada resolução, esta regra é válida para todos os pontos médios correspondentes a dois pontos consecutivos cuja diferença de tempo seja $\Delta t = 2^{-n}$ [6]. Na Figura 3.7, abaixo, são exibidos alguns estágios do método de deslocamento do ponto médio retratando aproximações de um movimento browniano.

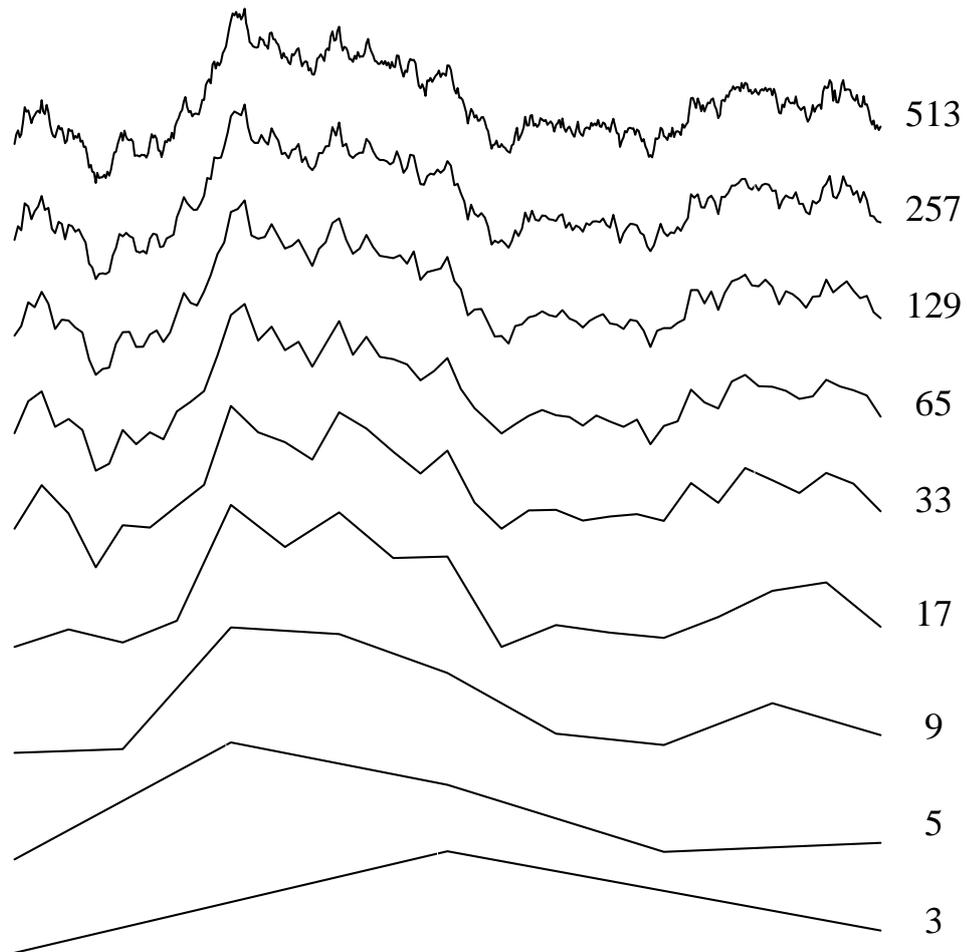


Figura 3.7: Estágios do método de deslocamento aleatório do ponto médio retratando aproximações de um movimento browniano, onde são utilizados 3, 5, 9,..., 513 pontos em cada estágio, respectivamente.

3.1.3.3 Cortes aleatórios

Um outro método de simulação de um movimento browniano é o método de cortes aleatórios. De acordo com Saupe [4], podemos interpretar o movimento browniano como um deslocamento cumulativo de uma série de saltos independentes, ou seja, uma soma infinita de funções do tipo

$$F_i(t) = A_i \beta(t - t_i)$$

onde $\beta(t)$ é uma função degrau e A_i , t_i são variáveis aleatórias com distribuições gaussianas e uniforme, respectivamente. Assim, tomando tempos periódicos em L , obtemos

$$X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \bar{\beta}(t - t_i) \quad (3.19)$$

onde

$$\bar{\beta}(t) = \begin{cases} 0, & t \geq L/2 \\ 1, & t < L/2 \end{cases}$$

e as variáveis aleatórias t_i são uniformemente distribuídas entre 0 e L . Podemos também generalizar esta abordagem para círculos tomando $L = 2\pi$. Dessa forma, cada termo da somatória na Equação (3.19) acrescenta um deslocamento aleatório gaussiano em metade do círculo.

De forma um pouco mais prática, o método de cortes aleatórios consiste em um processo iterativo em que, a cada iteração, escolhe-se um ponto aleatório sobre uma linha com contorno periódico, onde a partir desse ponto metade do segmento da linha será deslocado por uma quantidade aleatória. Assim, quanto mais cortes forem feitos, melhor será a aproximação para o movimento browniano. Este método está ilustrado na Figura 3.8, a seguir.

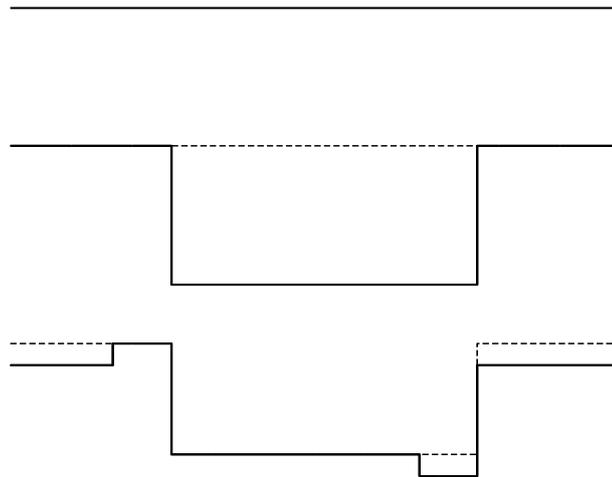


Figura 3.8: Ilustração dos primeiros passos do método de cortes aleatórios.

Na Figura 3.9, a seguir, são exibidos alguns estágios do método de cortes aleatórios retratando aproximações de um movimento browniano.

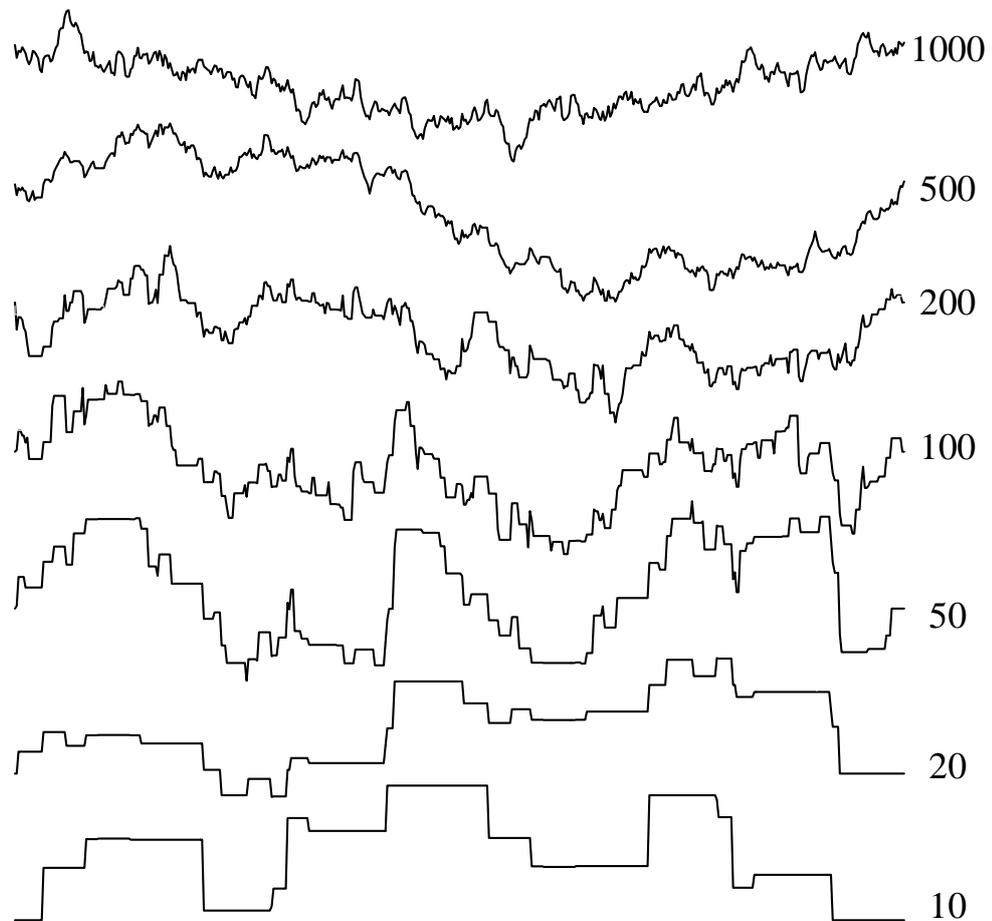


Figura 3.9: Estágios do método de cortes aleatórios retratando aproximações de um movimento browniano, onde foram realizados até 1.000 cortes.

Este método, assim como o método de deslocamento aleatório do ponto médio, também pode ser generalizado para mais dimensões. Podemos aplicar o método de cortes aleatórios em um plano, gerando então uma superfície browniana. Para isso procedemos da seguinte forma [23]: em cada iteração são escolhidos aleatoriamente dois pontos do plano, depois se traça uma reta passando por esses dois pontos formando uma linha de corte; o lado do plano à esquerda da linha é levantado por fator aleatório e o lado do plano à direita da linha é reduzido pelo mesmo fator aleatório. Quanto mais cortes forem feitos, melhor será a aproximação para a superfície browniana. Na Figura 3.10, a seguir, são exibidos alguns estágios do método de cortes aleatórios aplicado a um plano, onde foram realizados até 100.000 cortes e a altura é mapeada em uma escala de cinza. Na Figura 3.11, é exibida uma superfície browniana (correspondente a Figura 3.10 (f)) gerada a partir do método de cortes aleatórios.

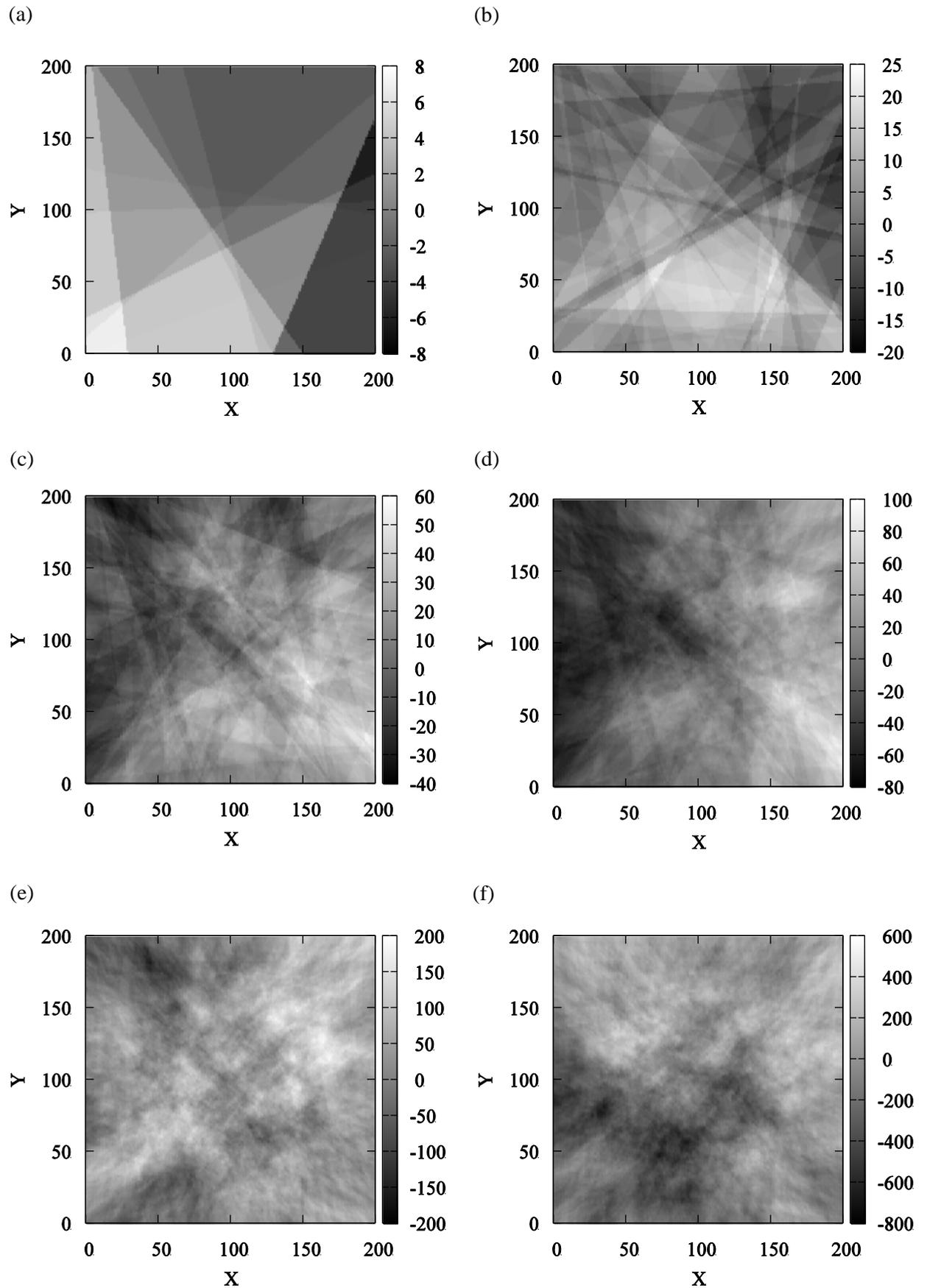


Figura 3.10: Estágios do método de cortes aleatórios aplicado a um plano. (a) 10 cortes; (b) 100 cortes; (c) 500 cortes; (d) 1.000 cortes; (e) 10.000 cortes; (f) 100.000 cortes.

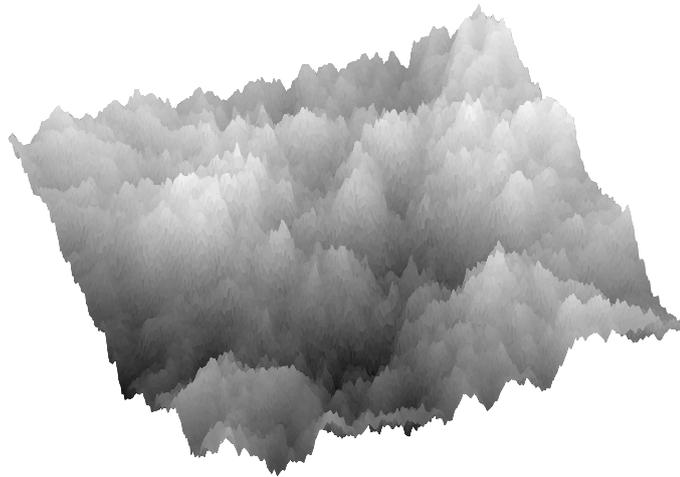


Figura 3.11: Superfície browniana obtida através do método de cortes aleatórios aplicado a um plano, onde foram realizados 100.000 cortes.

3.1.3.4 Expansão em séries trigonométricas

O último método a ser abordado trata-se, na verdade, de uma representação alternativa do movimento browniano através de uma expansão em séries trigonométricas. De acordo com Dzharidze e Zanten [24], o movimento browniano $X(t)$ pode ser expresso como:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi} A_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi t}{n\pi} B_n, \quad t \in [0: 1], \quad (3.20)$$

onde A_n e B_n são variáveis aleatórias gaussianas. Observe que a Equação (3.20) é, na verdade, um análogo da representação em séries trigonométricas do processo gaussiano (não-estacionário) chamado de *ponte browniana* $B(t)$, que pode ser definido em função do movimento browniano $X(t)$ da seguinte forma:

$$B(t) = (1 - t)X\left(\frac{t}{1 - t}\right), \quad t \in [0: 1]$$

cujas representação em séries trigonométricas é dada por

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \text{sen } n\pi t}{n\pi} Z_n, \quad t \in [0: 1]$$

onde Z_n são variáveis aleatórias gaussianas. Na Figura 3.12, a seguir, temos nove realizações de movimento browniano gerado a partir da Equação (3.20), onde o número de termos utilizado na série foi $n = 10.000$.

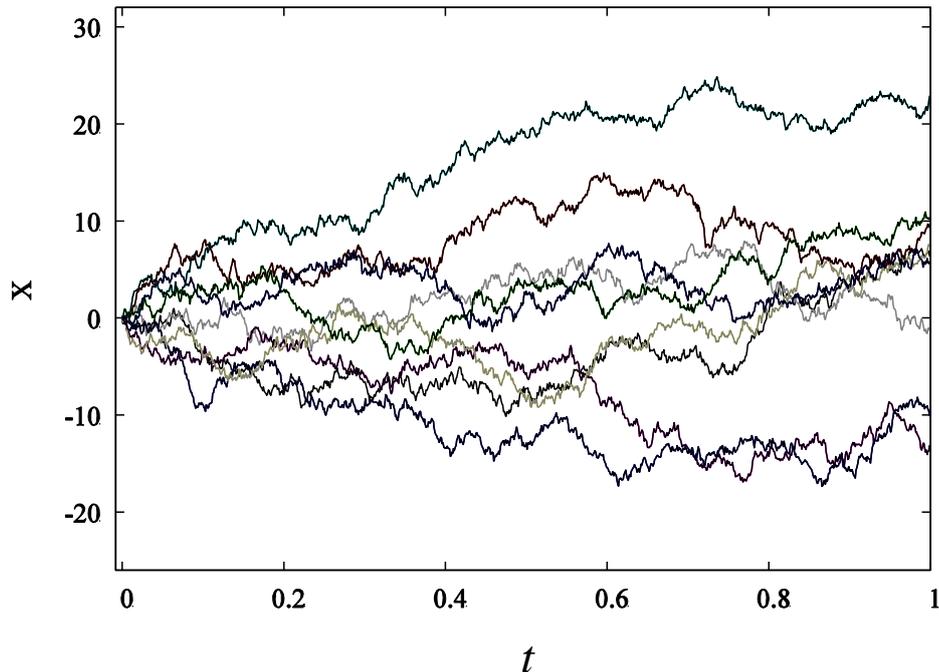


Figura 3.12: Nove realizações de movimento browniano obtido a partir da expansão em séries trigonométricas (Equação 3.20), onde o número de termos utilizado na série foi $n = 10.000$.

3.2 Movimento Browniano Fracionário

Em 1968, Benoit Mandelbrot e John Van Ness [25] propuseram um novo processo gaussiano denominado *movimento browniano fracionário* (MBF) como uma generalização do movimento browniano através de um expoente real H ($0 < H < 1$), conhecido como *expoente de Hurst* [10]. Na verdade, Andrei Nikolaevich Kolmogorov [26], em 1940, já havia considerado implicitamente essa ideia, mas foi a partir dos trabalhos de Mandelbrot que o MBF começou a ganhar destaque e passou, então, a encontrar inúmeras aplicações em diversas áreas da ciência, como física, química, ciências climáticas, geofísica, sociofísica, econofísica e ciências da computação [6]. Pelo fato de estar presente em muitos fenômenos naturais, o MBF constitui um dos modelos matemáticos mais usados em computação gráfica para simulações da natureza através de fractais aleatórios [27].

Como anteriormente, representaremos a posição de uma partícula em MBF através do processo aleatório $X_H(t)$, cujo valor médio é dado por

$$\langle X_H(t_1) - X_H(t_0) \rangle = 0, \quad t_1 > t_0, \quad (3.21)$$

e a variância segue a relação abaixo:

$$\langle |X_H(t_1) - X_H(t_0)|^2 \rangle = \sigma^2 |t_1 - t_0|^{2H} \quad (3.22)$$

Note que a Equação (3.22) é uma generalização da Equação (3.17).

Além de possuir incrementos estacionários, o que significa dizer que

$$X_H(t) \text{ e } X_H(t+h)$$

possuem a mesma distribuição para qualquer valor de $h > 0$, o MBF, assim como o MB, possui invariância de escala, já que os incrementos de X são estatisticamente *auto-similares* no sentido de que

$$X_H(t_0+t) - X_H(t_0) \text{ e } \frac{1}{r^H} (X_H(t_0+rt) - X_H(t_0))$$

possuem a mesma distribuição para qualquer t_0 e $r > 0$ [4]. Como procedemos anteriormente, tomaremos por conveniência $t_0 = 0$ e $X(t_0) = 0$, obtendo assim que os dois processos aleatórios

$$X_H(t) \text{ e } \frac{1}{r^H} X_H(rt)$$

são estatisticamente indistinguíveis. Na Figura 3.13 podemos observar o movimento browniano fracionário redimensionado, onde o fator de escala r varia de $r = 1/12$ à $r = 12$ correspondente à contração e expansão da função original na direção do tempo. É interessante destacar que o MBF é o único processo gaussiano, auto-similar e com incrementos estacionários conhecido [6, 20].

Podemos dividir o MBF em três categorias bem distintas dependendo do parâmetro H . Para $1/2 < H < 1$ há uma correlação positiva entre os incrementos, o que significa que se o valor de X_H passa a aumentar (diminuir) a partir de algum tempo t_0 , então a tendência é que ele continue a aumentar (diminuir) nos tempos posteriores a t_0 ; dizemos que neste caso temos um comportamento persistente ou correlacionado. Para $H = 1/2$ não há correlação alguma entre os incrementos; trata-se do movimento browniano ordinário cujos incrementos são independentes. Para $0 < H < 1/2$ há uma correlação negativa entre os incrementos, em outras palavras, temos um comportamento anti-persistente ou anti-correlacionado. Dessa forma, o expoente de Hurst expressa a interdependência entre os incrementos do MBF.

A dimensão fractal, D_f , do MBF está relacionada com o expoente de Hurst através da seguinte relação [4]:

$$D_f = 2 - H, \quad 0 < H < 1 \quad (3.23)$$

O parâmetro H então descreve a “rugosidade” da função em pequenas escalas [4]. Como se pode ver na Figura 3.14, quanto mais o valor de H se aproxima de zero, mais rugosa é a aparência das curvas e maior é a dimensão fractal; já quando H se aproxima de um, as curvas se tornam mais suaves, isto é, menos rugosas. A seguir veremos alguns métodos para a geração do MBF.

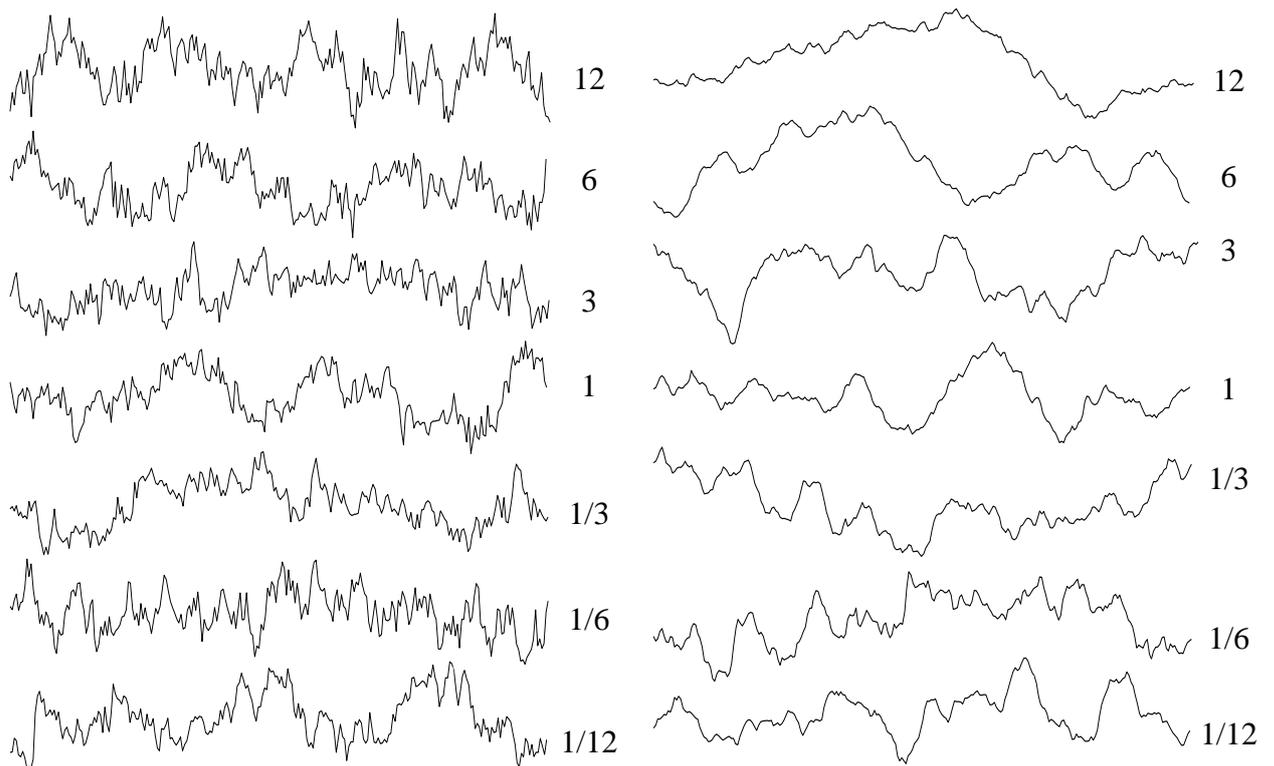


Figura 3.13: Movimento browniano fracionário redimensionado. Nos gráficos à esquerda, temos MBF com expoente de Hurst $H = 0.3$, e à direita, $H = 0.9$. No centro ($r = 1$) temos o gráfico de uma pequena parte de um MBF $X_H(t)$. Nos outros gráficos são exibidos MBF redimensionados da forma $r^{-H}X_H(rt)$, onde o fator de escala r varia de $r = 1/12$ à $r = 12$ correspondente à contração e expansão da função original na direção do tempo.

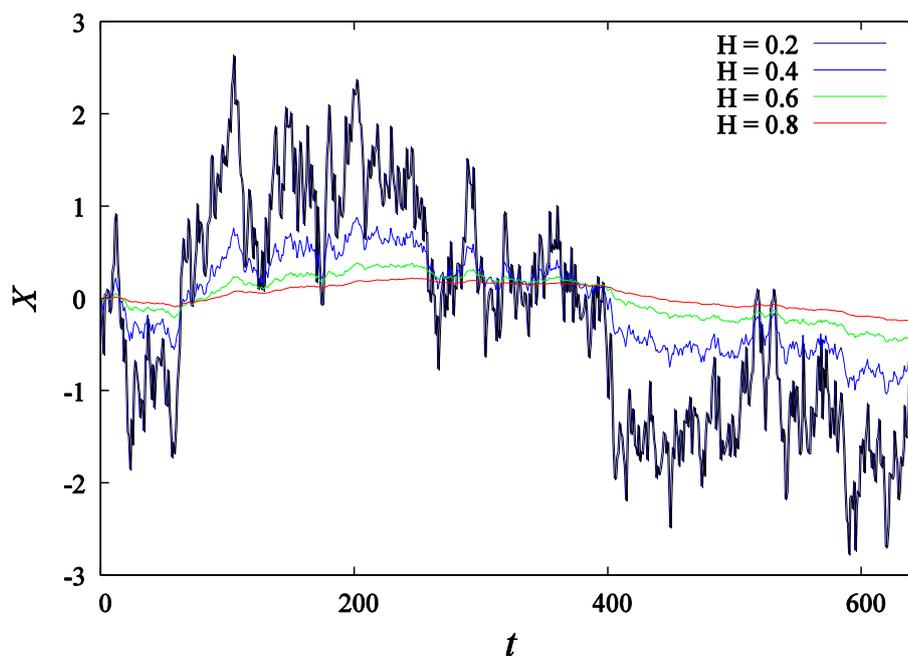


Figura 3.14: Movimento browniano fracionário, para vários valores de H . Quanto mais o valor de H se aproxima de zero, mais rugosa é a aparência das curvas e maior é a dimensão fractal; já quando H se aproxima de um, as curvas se tornam mais suaves, isto é, menos rugosas.

3.2.1 Síntese do Movimento Browniano Fracionário

3.2.1.1 Representação estocástica

De acordo com Mandelbrot e Van Ness [25], o MBF pode ser representado da seguinte forma:

$$X_H(t) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) + \int_0^t \left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) \right\} \quad (3.24)$$

onde $B = \int dB(s)$ é um movimento browniano ordinário e Γ representa a função *gama* definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Essa representação do MBF é chamada de representação estocástica. A chamada ‘versão truncada’ da Equação (3.24) é dada por

$$X_H(t) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_0^t \left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) \quad (3.25)$$

Observe que para $H = 1/2$, as equações (3.24) e (3.25) equivalem à Equação (3.14): a integral do ruído branco. Na Figura 3.15, a seguir, temos uma simulação de um MBF, para vários valores de H , onde foi utilizada a Equação (3.25).

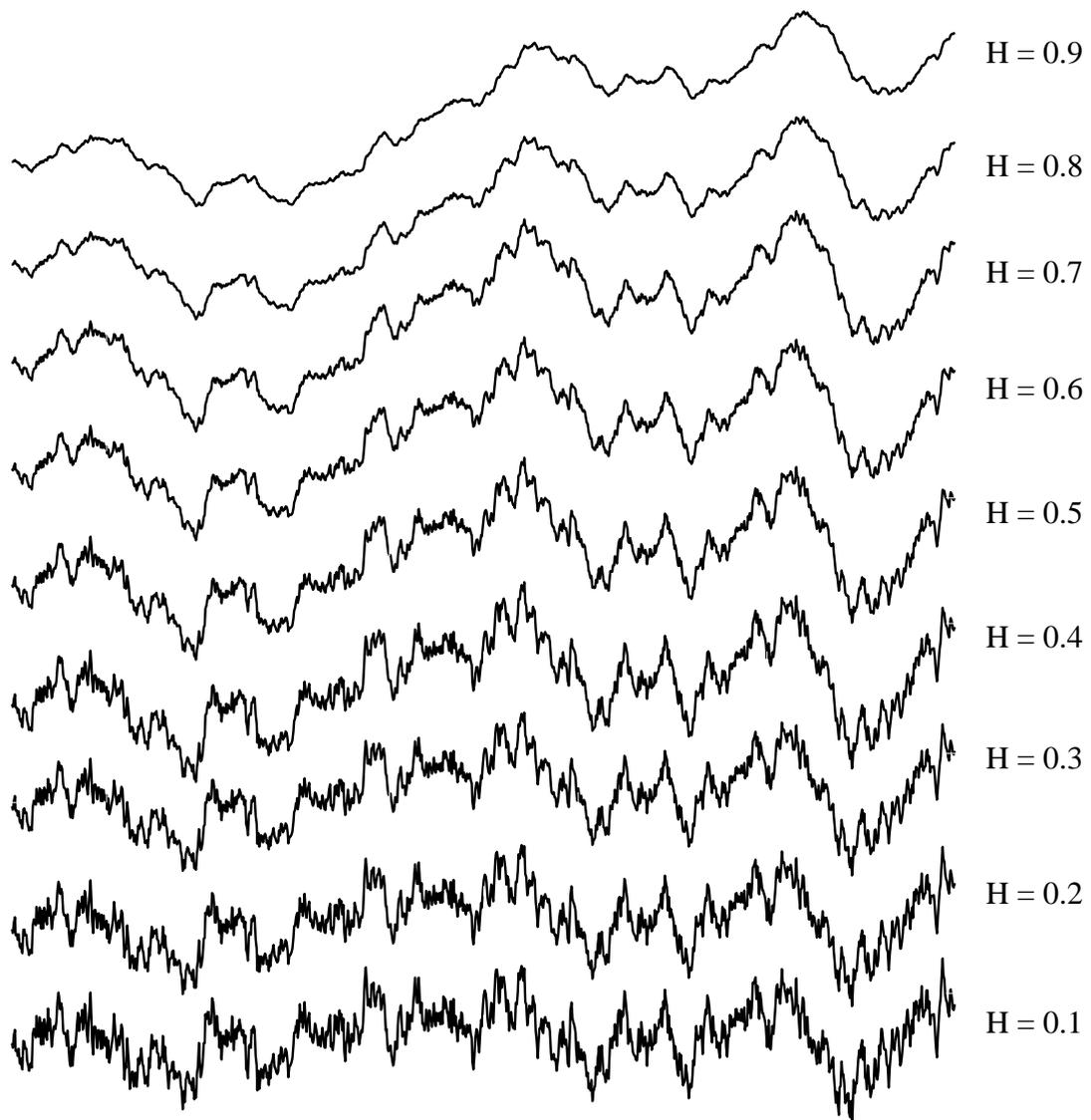


Figura 3.15: Simulação do movimento browniano fracionário, para vários valores de H , obtida a partir da representação estocástica (Equação 3.25).

3. 2.1.2 Deslocamento do ponto médio e Adições aleatórias sucessivas

Podemos gerar uma aproximação do MBF utilizando o método de deslocamento aleatório do ponto médio, já que sua abordagem pode formalmente ser estendida para atender os parâmetros $H \neq 1/2$ [4]. No entanto, para que a série de pontos obtida corresponda a um MBF, devemos esperar que a variância dos incrementos siga a relação expressa em (3.22):

$$\langle |X_H(t_1) - X_H(t_0)|^2 \rangle = \sigma^2 |t_1 - t_0|^{2H} \quad (3.26)$$

Se procedermos como na seção 3.1.3.2, chegaremos à conclusão de que o deslocamento D_n deve ter a variância dada por

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{2^{2Hn}} (1 - 2^{2H-2}) \quad (3.27)$$

A seguir, na Figura 3.16, temos exemplos de MBF, para vários valores de H , gerados a partir do método de deslocamento do ponto médio.

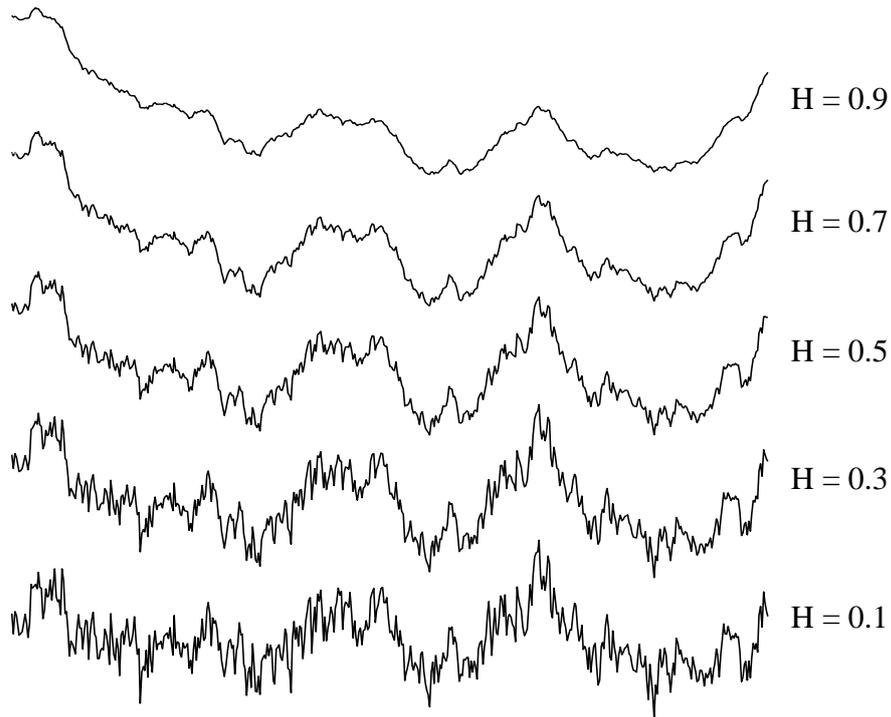


Figura 3.16: Simulação do movimento browniano fracionário, para vários valores de H , obtido a partir do método de deslocamento aleatório do ponto médio.

No entanto, a técnica de deslocamento aleatório do ponto médio não produz um MBF verdadeiro para $H \neq 1/2$ [4]. Pois, embora

$$\langle |X(1/2) - X(0)|^2 \rangle = \langle |X(1) - X(1/2)|^2 \rangle = (1/2)^{2H} \sigma^2 = \sigma^2 / 2^{2H}$$

não temos

$$\langle |X(3/4) - X(1/4)|^2 \rangle = \sigma^2 / 2^{2H}$$

como gostaríamos. Assim, este processo não tem incrementos estacionários; os tempos t não são todos estatisticamente equivalentes; no entanto, este ainda é um algoritmo útil para muitas finalidades [4].

Uma abordagem para lidar com a não-estacionariedade da técnica de deslocamento aleatório do ponto médio é a interpolação dos pontos médios da mesma forma anterior, mas,

em seguida, adicionando um deslocamento D_n de uma variância apropriada para todos os pontos, e não apenas aos pontos médios. Esse método é chamado *adições aleatórias sucessivas* [4]. Um estudo mais detalhado sobre o método de adições aleatórias sucessivas pode ser encontrado em [4]. Na figura abaixo, temos exemplos de MBF, para vários valores de H , gerados a partir do método de adições aleatórias sucessivas.

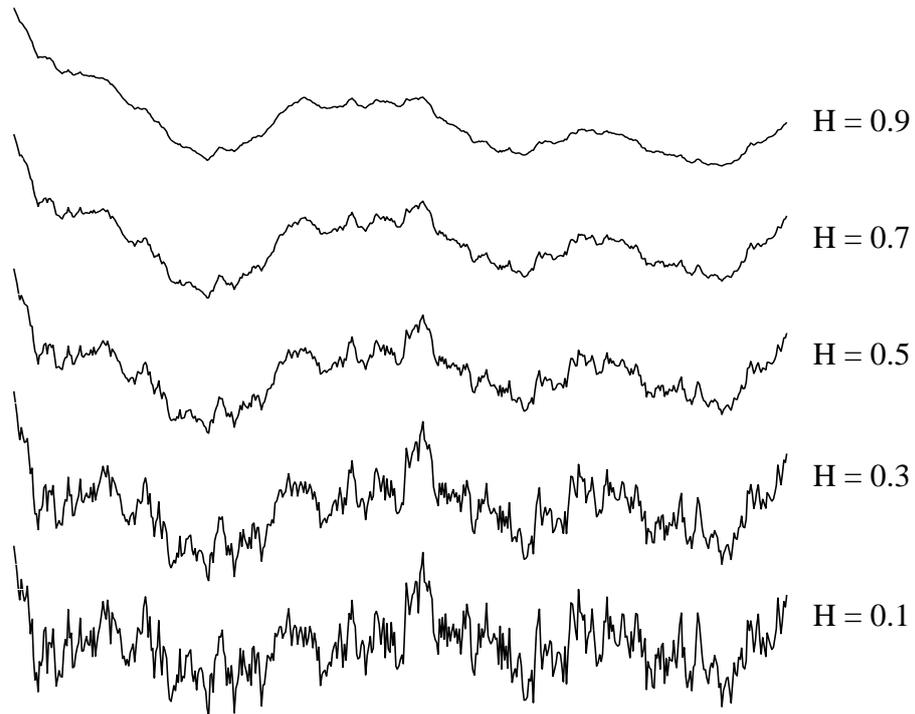


Figura 3.17: Simulação do movimento browniano fracionário, para vários valores de H , obtido a partir do método de adições aleatórias sucessivas.

3. 2.1.3 Síntese espectral

O MBF pode ser gerado por meio da representação espectral de certas funções aleatórias, técnica essa conhecida como método de síntese espectral ou de *Fourier filtering* [10]. Seja $Y(t)$ o processo aleatório reescalonado de $X_H(t)$ dado por

$$Y(t) = \frac{1}{r^H} X_H(rt) \quad (3.28)$$

A transformada de Fourier de $Y(t)$ é então

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) e^{-2\pi i t f} dt \quad (3.29)$$

e a transformada inversa é

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{2\pi itf} df \quad (3.30)$$

Devido às possíveis singularidades de sua transformada, vamos considerar que $Y(t)$ seja não-nula apenas em um intervalo de tempo finito, $0 < t < T$ [10], isto é

$$Y(t, T) = \begin{cases} Y(t), & 0 < t < T \\ 0, & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (3.31)$$

Assim, das Equações (3.29), (3.31) e (3.28), temos que

$$F_Y(f, T) = \int_0^T Y(t, T)e^{-2\pi itf} dt = \frac{1}{r^H} \int_0^{rT} X_H(s)e^{-2\pi if\frac{s}{r}} \frac{ds}{r} = \frac{1}{r^{H+1}} F_X\left(\frac{f}{r}, rT\right) \quad (3.32)$$

onde fizemos a substituição $s = rt$, e $ds = rdt$. A contribuição total de energia das componentes com frequências entre f e $f + df$ é dada pela quantidade $|F_Y(f, T)|^2 df$. A potência média de Y contida no intervalo $[0, T]$ é dada por [4]

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_Y(f, T)|^2 df \quad (3.33)$$

A densidade de potência espectral de $Y(t, T)$ é dada por

$$S_Y(f, T) = \frac{1}{T} |F_Y(f, T)|^2 = \frac{1}{r^{2H+1}} \frac{1}{rT} \left| F_X\left(\frac{f}{r}, rT\right) \right|^2 = \frac{1}{r^{2H+1}} S_X\left(\frac{f}{r}, rT\right) \quad (3.34)$$

No limite $T \rightarrow \infty$, obtemos então a densidade espectral de $Y(t)$:

$$S_Y(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} S_X\left(\frac{f}{r}\right) \quad (3.35)$$

Devido ao fato de que $Y(t)$ e $X_H(t)$ são estatisticamente indistinguíveis, podemos então afirmar que

$$S_Y(f) = S_X(f) \quad (3.36)$$

Assim, a Equação (3.35) fica

$$S_X(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} S_X\left(\frac{f}{r}\right) \quad (3.37)$$

Considerando $f = 1$, e escrevendo $1/r$ como uma outra frequência f , chegamos a

$$S_X(f) = \frac{S_X(1)}{f^{2H+1}} \propto \frac{1}{f^{2H+1}} = \frac{1}{f^\beta} \quad (3.38)$$

onde $\beta = 2H + 1$ é o expoente da densidade espectral unidimensional. Dessa forma, o MBF é incluído na classe dos chamados *ruídos* $1/f$, que se referem a processos cuja densidade

espectral é da forma da Equação (3.38) [6, 20]. Da Equação (3.38), vemos que é possível estimar o expoente de Hurst, H , de uma série $X_H(t)$ a partir do comportamento de seu espectro de potência, já que

$$\log S_x(f) \propto \log \frac{1}{f^\beta} = -\beta \log f \quad (3.39)$$

Assim, se traçarmos o gráfico do $\log S_x(f)$ versus $\log f$, podemos, através de uma regressão linear, obter o coeficiente angular que, neste caso, corresponde a $-\beta$; isso pode ser usado como uma técnica alternativa de estimativa do parâmetro H [20].

Podemos também classificar o MBF em função do parâmetro β ($1 < \beta < 3$). Dessa maneira, para $\beta < 2$ ou $H < 1/2$, temos um comportamento anti-persistente ou anti-correlacionado. Para $\beta = 2$ ou $H = 1/2$, recuperamos o movimento browniano ordinário. Já, para $\beta > 2$ ou $H > 1/2$ temos um comportamento persistente ou correlacionado. Note que para $\beta = 0$ a densidade espectral é independente da frequência, implicando em uma distribuição não-correlacionada, o que corresponde ao ruído branco, que é composto por todas as faixas de frequência (nesse sentido, o termo ruído branco pode ser entendido como uma analogia à luz branca).

Como já foi dito, podemos expressar o MBF através da representação espectral de funções aleatórias. Assim, usando a transformada discreta de Fourier, podemos escrever

$$\overline{X_H}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{2\pi i k t} \quad (3.40)$$

onde deve ser imposta sobre $F(k)$ a seguinte condição

$$\langle |F(k)|^2 \rangle \propto \frac{1}{k^\beta} \quad (3.41)$$

para que a relação (3.38) seja satisfeita. Podemos escrever $F(k)$ como

$$F(k) = \begin{cases} A_0 & , \quad k = 0 \\ A_k + iB_k & , \quad 0 < k < N/2 \\ A_{N-k} - iB_{N-k} & , \quad N/2 \leq k < N \end{cases} \quad (3.42)$$

Assim, o método de síntese espectral consiste simplesmente em escolher aleatoriamente coeficientes sujeitos a condição (3.41) e, em seguida, calcular a transformada inversa de Fourier para se obter X_H no domínio do tempo [4]. O método básico para a criação de coeficientes sujeitos a condição (3.41) envolve a geração de variáveis aleatórias gaussianas multiplicadas por uma potência apropriada de β . Para mais detalhes sobre esse algoritmo veja [4].

Na Figura 3.18, a seguir, temos exemplos de MBF para vários valores de H , gerados a partir do método de síntese espectral.

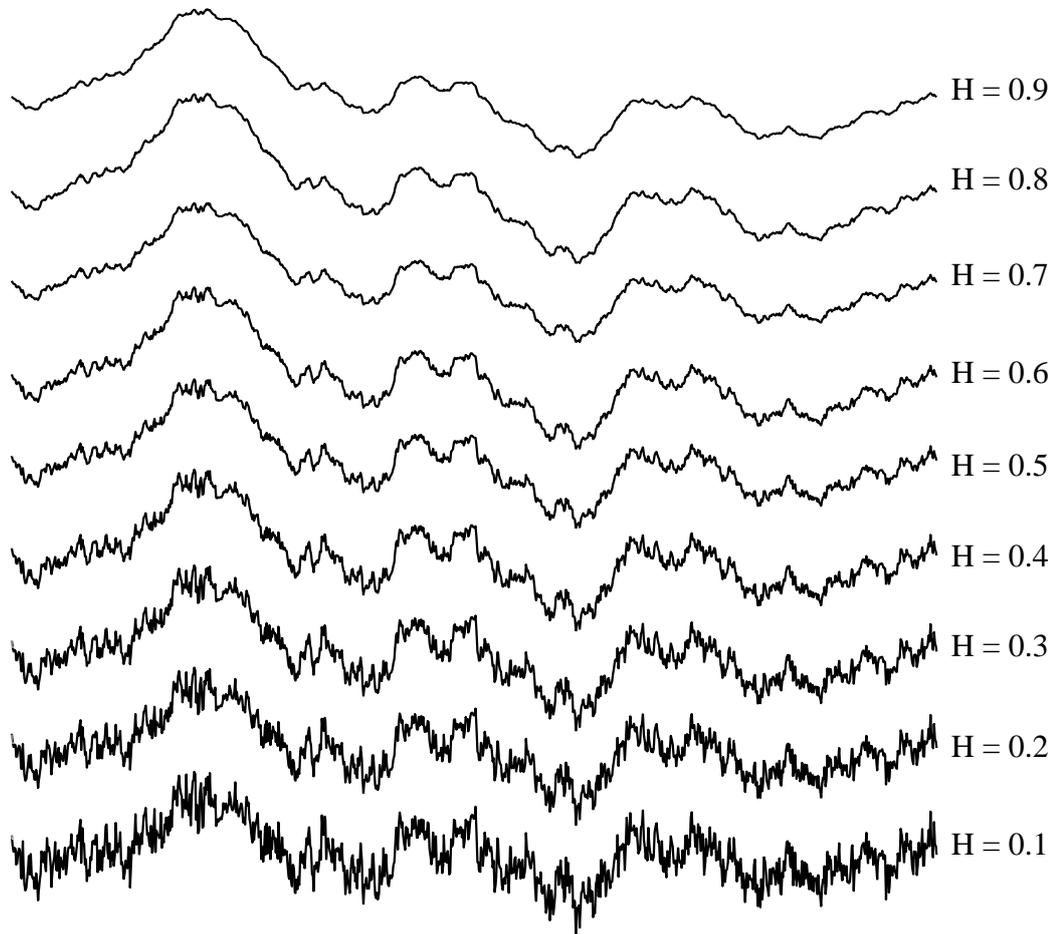


Figura 3.18: Exemplos de movimento browniano fracionário para vários valores de H , gerados a partir do método de síntese espectral.

3.2.2 Métodos para a estimativa do parâmetro H de uma série MBF

3.2.2.1 Média Quadrática

O MBF, como já vimos, possui uma média quadrática da posição proporcional ao tempo elevado ao expoente $2H$ (Equação 3.22). Para calcularmos a média quadrática (ΔX^2) vamos usar a seguinte equação (que é na verdade uma espécie de média ponderada no tempo):

$$\Delta X^2(\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N [X_i(t + \Delta t) - X_i(t)]^2 \quad (3.43)$$

onde $\tau = N - \Delta t$, N é o número total de partículas (ou amostras) e T é tempo total (ou número total de passos). Assim, se traçarmos, em escala logarítmica, o gráfico de ΔX^2 contra Δt , o coeficiente angular obtido será igual a duas vezes o expoente de Hurst H . Nos três primeiros gráficos, a seguir, calculamos a média quadrática dos movimentos brownianos (que nada mais é do que um $MBF_{H=0.5}$) gerados pelos seguintes métodos: integração do ruído branco, deslocamento aleatório do ponto médio, cortes aleatórios e expansão em séries trigonométricas. Nos outros dois gráficos, calculamos a média quadrática de séries MBF obtidas através da representação estocástica (Equação 3.25).

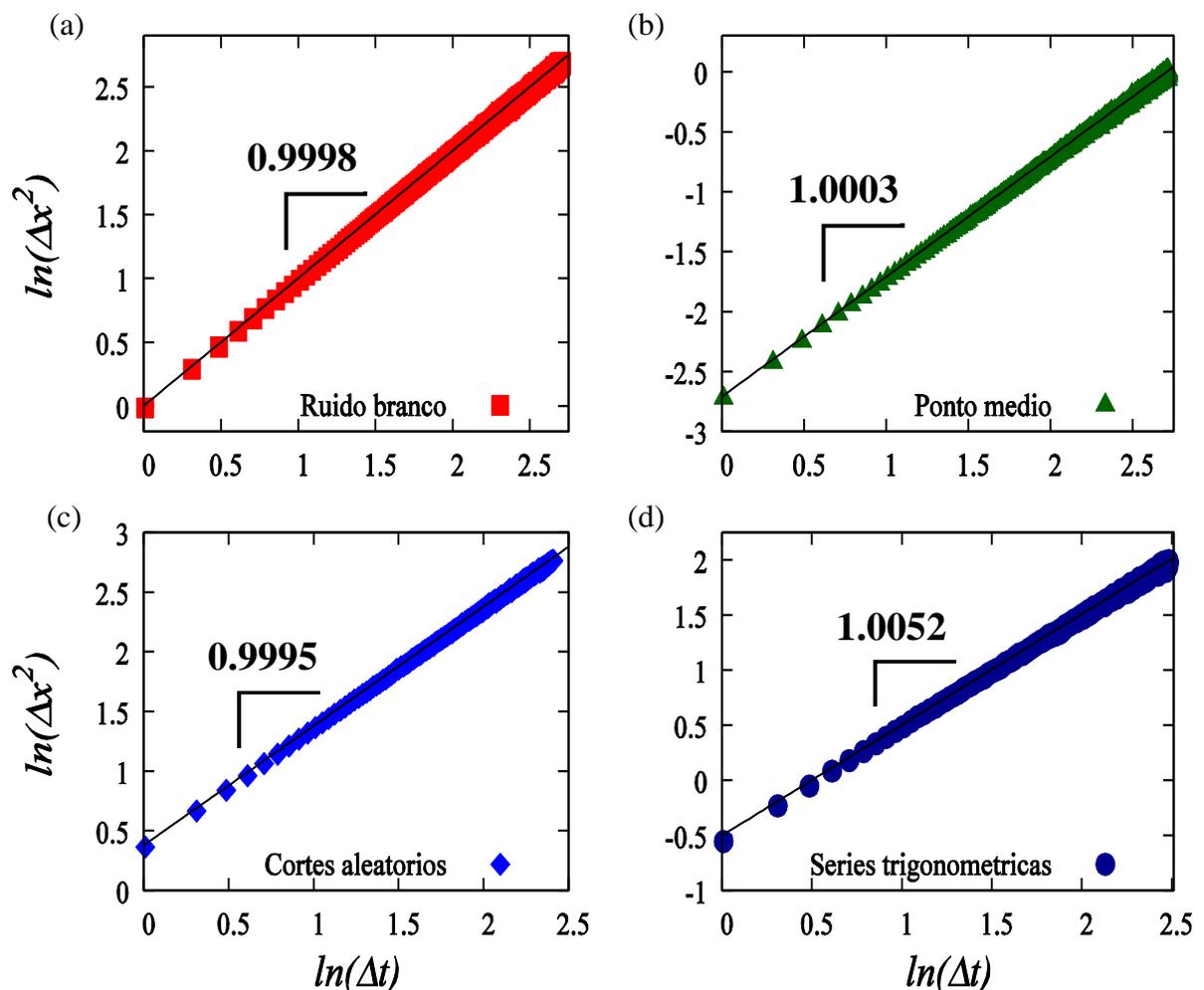


Figura 3.19: Gráfico da média quadrática de séries $MBF_{H=0.5}$ geradas a partir dos seguintes métodos: (a) integração do ruído branco; (b) deslocamento do ponto médio; (c) cortes aleatórios; (d) expansão em séries trigonométricas.

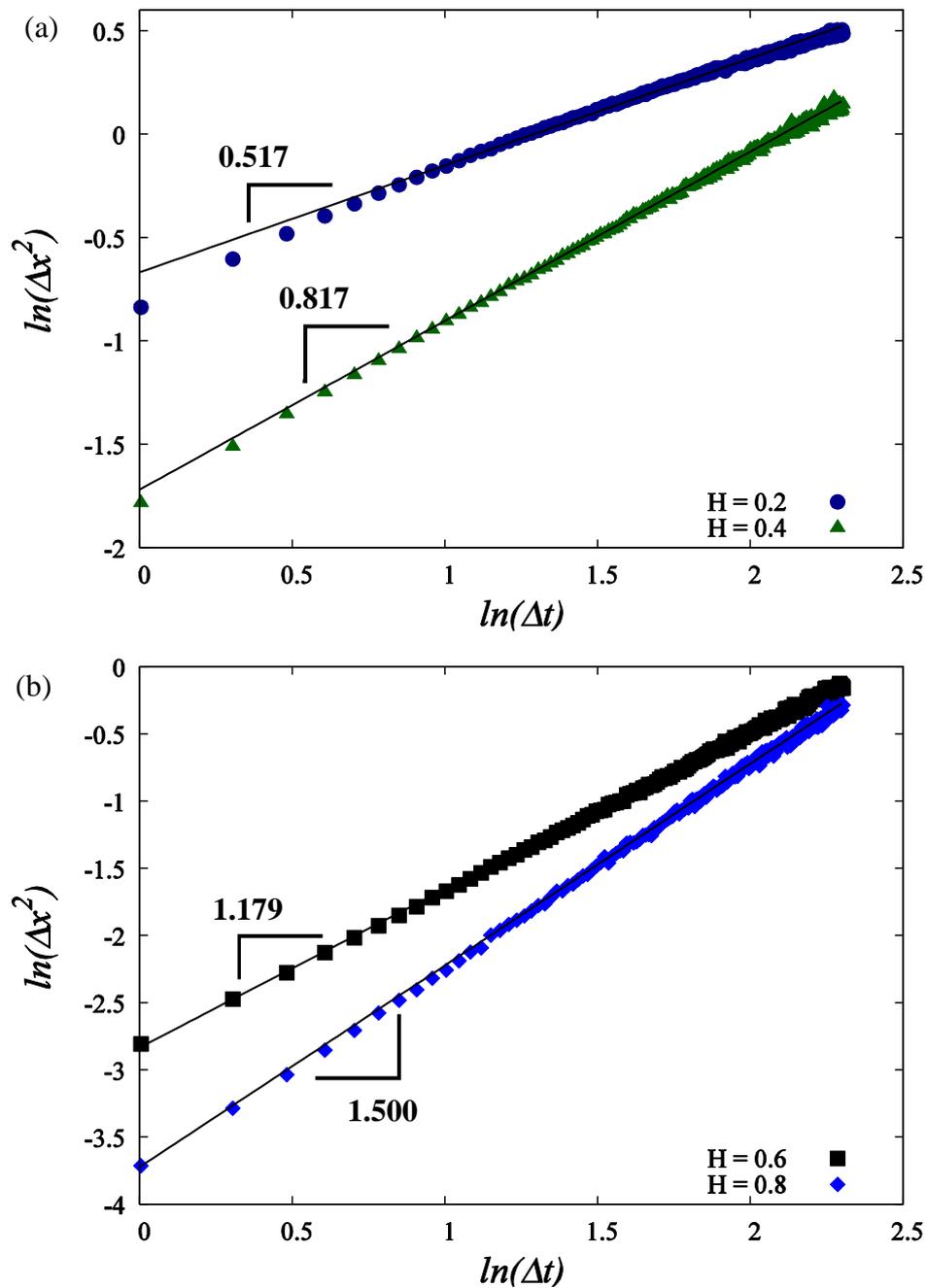


Figura 3.20: Gráfico da média quadrática de séries MBF geradas a partir da representação estocástica. (a) $H = 0.2$ e $H = 0.4$. (b) $H = 0.6$ e $H = 0.8$.

3.2.2.2 Método DFA

O método DFA (*Detrended Fluctuations Analysis*) [28], método de análise de flutuações sem tendências, tem se mostrado uma técnica bastante segura para detectar correlações de longo-alcance; a ideia deste método consiste basicamente em subtrair possíveis

tendências determinísticas da série temporal original e analisar a flutuação dos dados destendenciados [11].

Seja $x(t)$ uma série temporal de tamanho N (Figura 3.21 (a)), cujo valor médio é $\langle x \rangle$. O primeiro passo para se aplicar o método DFA numa série $x(t)$ é ‘integrá-la’ (Figura 3.21 (b)), o que consiste em criar uma nova série $X(t)$ de tamanho igual à série original, isto é, de tamanho N , da seguinte maneira:

$$X(t) = \sum_{i=1}^t (x(i) - \langle x \rangle) \quad (3.43)$$

O próximo passo é dividir a série integrada (ou acumulada) $X(t)$ em N/n blocos de tamanho n , onde para cada bloco k é calculada uma tendência local $X_k(t)$, onde $X_k(t)$, nos casos aqui abordados, é um polinômio do primeiro grau, obtido através do método dos mínimos quadrados (Figura 3.21 (c) e (d)). A seguir é introduzida uma série $Y(t)$ onde é removida a tendência, subtraindo $X_k(t)$ de $X(t)$:

$$Y(t) = X(t) - X_k(t) \quad (3.44)$$

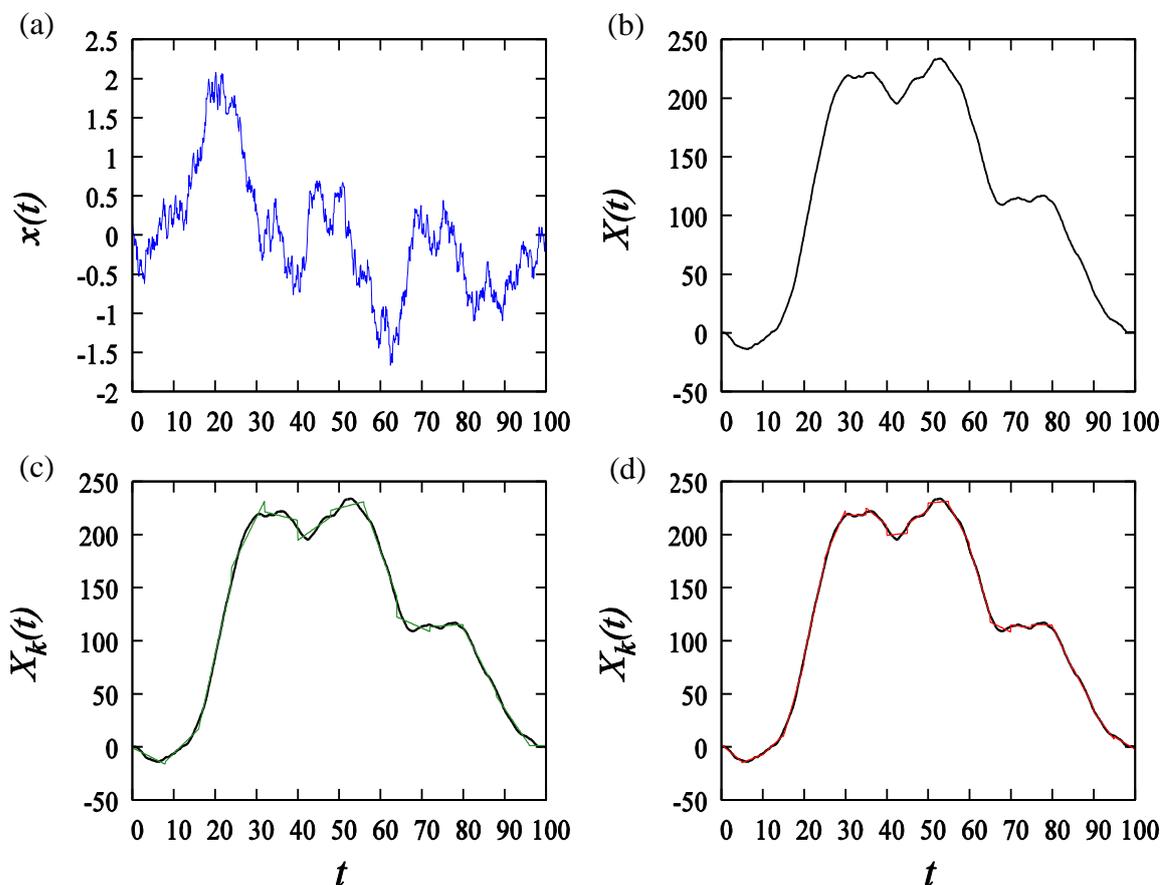


Figura 3.21: Passos do método DFA. (a) Série original $x(t)$; (b) Série integrada $X(t)$; Cálculo da tendência local $X_k(t)$: (c) $n = 80$ (d) $n = 50$.

O terceiro passo do DFA consiste em calcular a função de flutuação $F(n)$ dada por

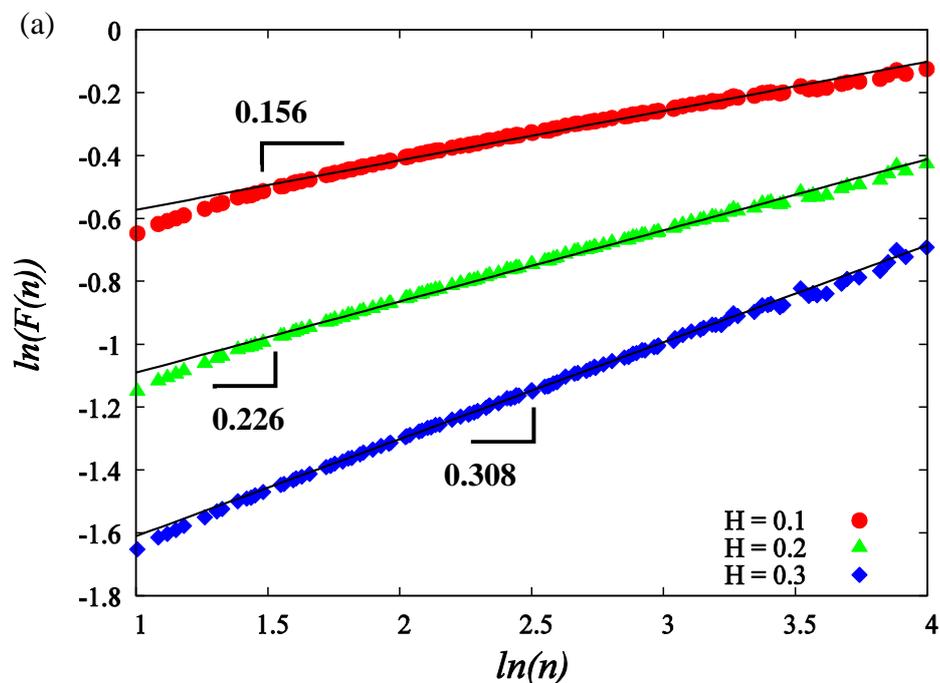
$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Y(t)]^2} \quad (3.45)$$

No último passo, após termos repetido os passos anteriores para blocos de diferentes tamanhos n , construímos o gráfico log-log de $F(n)$ versus n , onde é possível observar um comportamento do tipo lei de potência:

$$F(n) \propto n^\alpha \quad (3.46)$$

onde α está relacionado aos padrões de correlação da série analisada. Para séries seguindo um movimento do tipo MBF, pode-se relacionar o expoente α com o expoente de Hurst [20].

Na Figura 3.22, temos alguns gráficos da aplicação do método DFA (sem integrar) à séries MBF geradas a partir do método de adições aleatórias sucessivas. Também analisamos as séries MBF geradas a partir do método de síntese espectral via DFA, os resultados obtidos se mostraram semelhantes aos resultados apresentados nos gráficos da Figura 3.22.



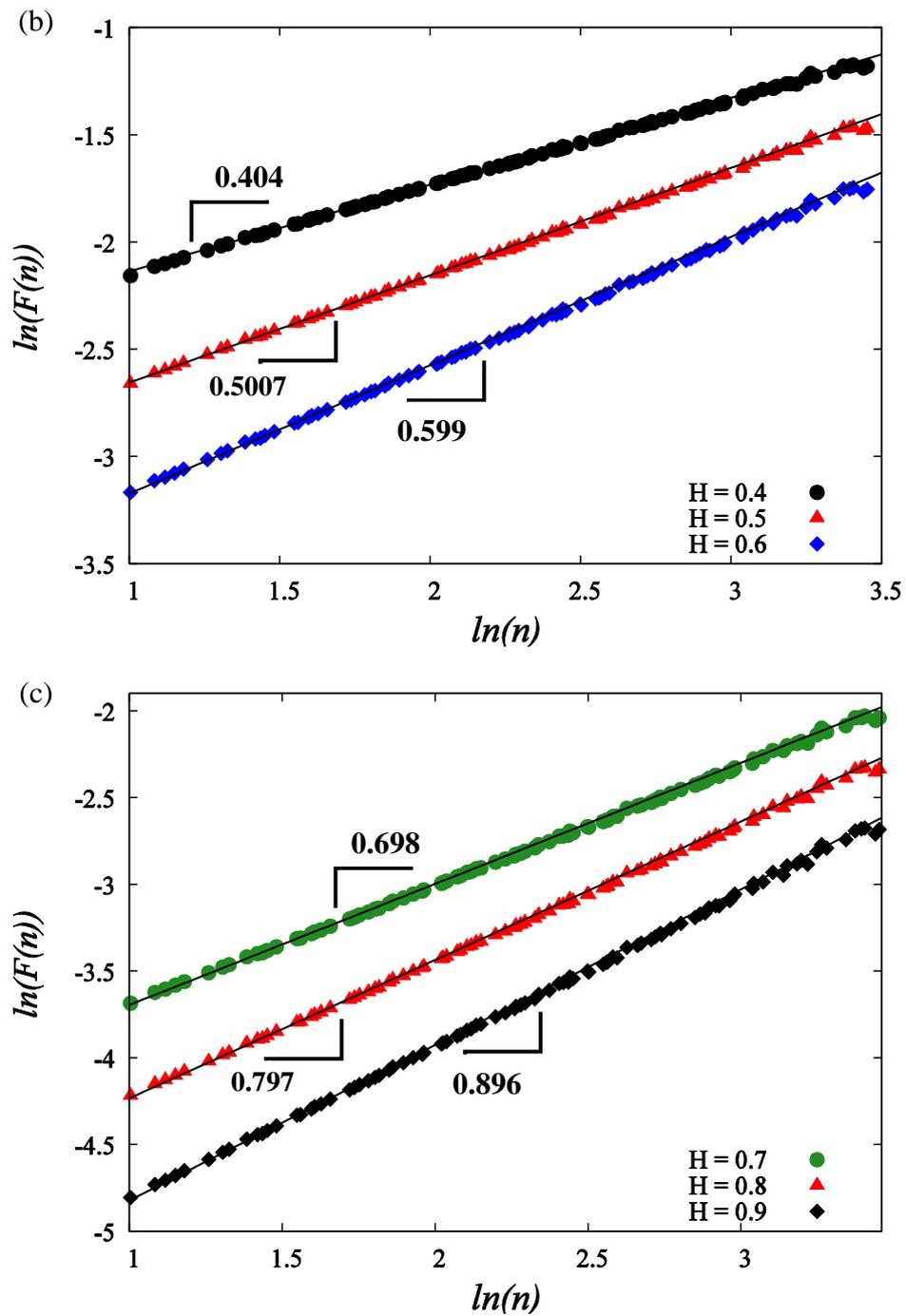


Figura 3.22: Método DFA (sem integrar) aplicado à séries MBF geradas a partir do método de adições aleatórias sucessivas. (a) $H = 0.1, 0.2$ e 0.3 ; (b) $H = 0.4, 0.5$ e 0.6 ; (c) $H = 0.7, 0.8$ e 0.9 .

4 CONCLUSÃO

Na primeira parte desse trabalho, apresentamos inicialmente alguns conceitos básicos, porém importantes, da geometria Fractal, como definição de fractal, dimensão de Hausdorff-Besicovitch e dimensão fractal, bem como também a propriedade de auto-similaridade, que é muito característica nos fractais. Com o intuito de compreender melhor tais conceitos abordamos alguns exemplos bem famosos de fractais, como a curva e floco de neve de Koch, o triângulo de Sierpinski e o Conjunto de Mandelbrot.

Posteriormente, abordamos o movimento browniano e o movimento browniano fracionário, que são exemplos simples de fractais aleatórios, conhecendo um pouco da história desses tipos de movimento aleatório e também algumas de suas propriedades estatísticas mais importantes. O movimento browniano fracionário (MBF), proposto em 1968, trata-se de uma generalização do movimento browniano (MB) feita através da utilização de um expoente real H ($0 < H < 1$), conhecido como expoente de Hurst. Dessa forma, o MB é um MBF cujo expoente de Hurst é $H = 0.5$. Um fato interessante é que o MBF, para $H > 0.5$, possui uma correlação positiva entre os seus incrementos, enquanto para $H < 0.5$, há uma correlação negativa entre os incrementos. Para $H = 0.5$, não há correlação alguma, isto é, os incrementos são independentes. A dimensão fractal do MBF é dada por $D_f = 2 - H$.

Para simularmos o MB utilizamos quatro métodos simples: a integração do ruído branco; o deslocamento aleatório do ponto médio; o método de cortes aleatórios; e a representação em séries trigonométricas. Já para simularmos o MBF utilizamos três métodos de geração: a representação estocástica; o método de adições aleatórias sucessivas; e o método de síntese espectral, também conhecido como *Fourier filtering*.

Por fim, analisamos os dados gerados nas simulações utilizando dois métodos para a estimativa do parâmetro H de um movimento browniano fracionário, a saber, o método DFA (*Detrended Fluctuations Analysis*) e um outro que trata-se de uma espécie de média quadrática ponderada em relação ao tempo. Podemos então concluir, a partir dos resultados obtidos, que os métodos utilizados tanto para a geração do MB e do MBF foram bastante satisfatórios, bem como os métodos para a estimativa do expoente de Hurst.

REFERÊNCIAS

- [1] B. B. Mandelbrot. *Les Objets Fractals: Forms, hasard et dimension*. Paris: Flammarion, 1975.
- [2] B. B. Mandelbrot. *Fractals: Form, chance, and dimension*. San Francisco: W. H. Freeman, 1977.
- [3] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman, 1982.
- [4] H. Peitgen e D. Saupe. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [5] R. S. Souza. *Fractais Geométricos*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática), Universidade Federal de Alfenas, 2010.
- [6] M. V. C. Henriques. *Ondaletas e Movimento browniano fracionário: Aplicação à caracterização de poços de petróleo*. Dissertação (Mestrado em Física), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.
- [7] K. Falconer. *Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Application*. Chichester, John Wiley & Sons, 1990.
- [8] C. E. C. Galhardo. *Análise e modelagem estocástica do barorreflexo através de séries temporais de pressão arterial sistólica*. Tese (Doutorado em Física), Universidade Federal Fluminense.
- [9] J. Feder. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.
- [10] E. A. Oliveira. *Linhas divisoras de águas e fraturas de caminhos ótimos em meios desordenados*. Tese (Doutorado em Física), Universidade Federal do Ceará, 2012.
- [11] C. A. Batista. *Métodos emergentes de física-estatística aplicados a séries temporais*. Dissertação (Mestrado em Biometria), Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2006.
- [12] B. B. Mandelbrot. *Objectos fractais*. Lisboa: Gradiva, 1991.
- [13] A. B. Neto. *Simulação de fluxo de fluidos em meios porosos desordenados - uma análise de efeito de escala na estimativa da permeabilidade e do coeficiente de arrasto*. Tese (Doutorado em Ciência e Engenharia de Petróleo), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2012.
- [14] A. Bunde e S. Havlin. *Fractals in Science*. Springer-Verlag, 1994.
- [15] R. Brown. *A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants*. London and Edinburgh philosophical magazine and journal of science, 4, p. 161, 1828.
- [16] J. M. Silva e J. A. S. Lima. *Quatro Abordagens para o Movimento Browniano*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 1, p. 25-35, 2007.

- [17] A. Einstein. On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der Physik*, 17, p. 549, 1905.
- [18] N. Wiener. Differential-space. *J. Math. and Physics*, 2, p. 131–174, 1923.
- [19] M. T. Castro. Processos estocásticos e equações de difusão: uma abordagem via o formalismo de Paul Lévy para funções características.
- [20] M. V. C. Henriques. Representações espectrais de sistemas complexos: Aplicações à síntese de superfícies brownianas fracionárias anisotrópicas, filtragem de sinais e identificação de correlações. Tese (Doutorado em Física), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2012.
- [21] S. R. A. Salinas. Introdução à Física Estatística. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- [22] S. Havlin e D. Ben-Avraham. Diffusion in Disordered Media. *Advances in Physics*, 2002.
- [23] P. Bourke. “1/f Noise, Modelling planets”. 2000. Disponível em: <<http://paulbourke.net/fractals/noise/>>. Acesso em: 11 abr. 2015.
- [24] K. Dzhaparidze e H. van Zanten. A series expansion of fractional Brownian motion. *Probab. Theory Relat. Fields* 130 (2004), 39–55. *Math. Review* (número não avaliado).
- [25] B. B. Mandelbrot e J.W. Van Ness. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, 10, n. 4, p. 422, 1968.
- [26] A. N. Kolmogorov. Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. *C.R. (Doklady) Acad. URSS*, n. Ser., v. 26, p. 115-118, 1940.
- [27] J. M. R. Neves. Fractais Randômicos na Simulação de Realismo de Paisagens. 1993.
- [28] C. K. Peng. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, v.9, n. 2, 1994.