



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

MATEUS LIBERATO CAMPELO ARRUDA

**DETERMINAÇÃO VIA CRITÉRIO DINÂMICO DAS CARGAS CRÍTICAS EM
ELEMENTOS DE MÚLTIPLAS CAMADAS**

FORTALEZA

2017

MATEUS LIBERATO CAMPELO ARRUDA

DETERMINAÇÃO VIA CRITÉRIO DINÂMICO DAS CARGAS CRÍTICAS EM
ELEMENTOS DE MÚLTIPLAS CAMADAS

Monografia apresentada ao curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Júnior

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A819d Arruda, Mateus Liberato Campelo.

Determinação via critério dinâmico das cargas críticas em elementos de múltiplas camadas / Mateus Liberato Campelo Arruda. – 2017.
82 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia Civil, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Júnior.

1. Método dos elementos finitos. 2. Vigas de múltiplas camadas. 3. Pilares de múltiplas camadas. 4. Carga crítica. I. Título.

CDD 620

MATEUS LIBERATO CAMPELO ARRUDA

DETERMINAÇÃO VIA CRITÉRIO DINÂMICO DAS CARGAS CRÍTICAS EM
ELEMENTOS DE MÚLTIPLAS CAMADAS

Monografia apresentada ao curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Júnior

Aprovada em (14/12/2017)

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Evandro Parente Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Dra. Marisete Dantas de Aquino
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Dra. Tereza Denyse Pereira de Araújo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGREDECIMENTOS

À minha família em primeiro lugar, em especial a minha Mãe, Angela, meu pai, Arruda, meus avós, Zaira (*In memoriam*), Alzenir, Liberato (*In memoriam*) e Francisco (*In memoriam*), fonte da minha força e apoio durante toda vida.

Às minhas irmãs, Suellen e Fernanda, pelo apoio e companheirismo durante esses anos de faculdade. A todos meus tios, tias, primos e primas, que sempre foram presentes de alguma forma na minha vida.

Agradeço aos meus amigos de faculdade pela amizade e apoio nos momentos difíceis. Em especial: Webert e Artur pelo companheirismo e camaradagem nessa jornada.

Agradeço ao meu orientador Prof. João Batista pelos anos de bolsa e por aceitar o convite de me orientar no projeto de graduação. Agradeço a Profa. Denyse e ao Prof. Evandro por aceitar fazer parte da banca, estando ciente da competência que ambos têm para avaliar meu trabalho.

Agradeço a todos professores do curso de engenharia civil que repassaram seus conhecimentos a mim. Em especial: Francisco de Assis, John Kenedy, Rodrigo Codes, Áurea, Felipe Loureiro, Antônio Macário, Denyse e Luiz Gonzaga, que foram fontes de inspiração durante toda faculdade.

Agradeço a todos que de alguma forma me influenciaram e estiveram ao meu lado durante toda vida.

*“Nem rir nem chorar,
compreender”
Baruch Espinoza*

RESUMO

Este trabalho se propõe a analisar numericamente as cargas críticas e as frequências naturais de vigas e pilares de múltiplas camadas com interação parcial. As soluções analíticas, todavia, são demasiadamente complicadas, sendo necessário implementar computacionalmente métodos numéricos como uma solução alternativa, tais como o método dos elementos finitos. A principal ideia deste trabalho é analisar via critério dinâmico as cargas críticas dos elementos de múltiplas camadas, tais como as vigas mistas, que são bastante utilizadas na construção civil. A análise é fundamentada pela teoria de vigas clássicas, que tem como hipótese principal o deslocamento da estrutura no espaço mantendo as seções planas e perpendiculares ao eixo sem considerar o efeito do esforço cisalhante. A análise dinâmica se caracteriza como método alternativo e superior ao método estático, que se manifesta como um problema de autovalor generalizado entre a matriz de rigidez tangente e a matriz de rigidez elástica. O método dinâmico é, por sua vez, um problema de autovalor entre a matriz de massa e matriz de rigidez tangente. À medida que é submetida à estrutura cargas axiais de compressão, a frequência fundamental do elemento diminui, provocando em última instância o fenômeno da flambagem. Na análise dinâmica é possível associar para cada carga de compressão uma frequência fundamental associada, o que não ocorre com a análise estática. O presente trabalho comparou os resultados obtidos com soluções analíticas de vigas mistas como forma de averiguar a qualidade dos resultados para então expandir a análise para casos de elementos de múltiplas camadas.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos. Vigas de Múltiplas Camadas. Pilares de Múltiplas camadas. Carga Crítica.

ABSTRACT

This paper proposes to analyze numerically the critical loads and the natural frequencies of multilayer beams and columns with partial interaction. The analytical solutions, however, are too complicated, and it is necessary to implement computationally numerical methods as an alternative solution, such as the finite element method. The main idea of this work is to analyze by dynamic criterion the critical loads of the multilayers elements, such as the composite steel-concrete beam, widely used in civil construction. The analysis is based on Euler beam theory, whose main hypothesis is the displacement of the structure in space keeping the sections flat and perpendicular to the axis without considering the effect of the shear stress. The dynamic analysis is characterized as an alternative and superior method to the static method, which manifests as a generalized eigenvalue problem between the tangent stiffness matrix and the elastic stiffness matrix. The dynamic method is, in turn, an eigenvalue problem between the mass matrix and tangent stiffness matrix. As the axial thrust load is forced into the structure, the fundamental frequency of the element decreases, ultimately causing the phenomenon of buckling. In the dynamic analysis it is possible to associate with each compression load an associated fundamental frequency, which does not occur with the static analysis. The present paper compared the results obtained with analytical solutions of 2 layers beams as a way of ascertaining the quality of the results to expand the analysis for cases of multilayer elements.

Keywords: Finite Element Method. Multilayer Beams. Multilayer Columns. Buckling Load.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Viga Mista	6
Figura 1.2 Flambagem em colunas de aço e madeira.....	7
Figura 2.1 Aplicação do método elementos finitos em problemas de impacto, Biologia e Aeronáutica.....	9
Figura 2.2 Elemento finito proposto por Harizumi e Hamada (1980).....	12
Figura 2.3 Elemento finito proposto por Oven et al (1997)	12
Figura 2.4 Elementos que conformam a viga mista.	13
Figura 2.5 Elemento finito proposto por Tamayo.....	13
Figura 2. 6 Elemento finito proposto por Sousa Jr. et al	13
Figura 2.7 Seis primeiros modos de vibração de uma estrutura de barra engastada e livre	14
Figura 2.8 Gráfico tensão-deformação	15
Figura 2.9 Não linearidade geométrica	16
Figura 2.10 Viga de Euler.....	16
Figura 2.11 Cinemática da viga de Euler.....	17
Figura 2.12 Discretização dos elementos finitos.....	19
Figura 2.13 Sistema de múltiplos graus de liberdade.....	23
Figura 3.1 Modelo de elemento finito	26
Figura 3.2 Funções de forma do elemento finito.....	26
Figura 4.3 Modelo de elemento finito com as coordenadas realocadas	32
Figura 4.1 Viga mista bi-apoiada (seção longitudinal e transversal).....	38
Figura 4.2 Viga mista bi-engastada (seção longitudinal e transversal)	40
Figura 4.3 Viga mista engastada e livre (seção longitudinal e transversal).....	41
Figura 4.4 Detalhe da seção longitudinal da viga mista em estudo.....	41
Figura 4.5 Carga crítica e frequência fundamental (Viga bi-apoiada).....	42
Figura 4.6 Carga crítica e frequência fundamental (Viga engastada e apoiada)	43
Figura 4.7 Carga crítica e frequência fundamental (Viga bi-engastada)	44
Figura 4.8 Carga crítica e frequência fundamental (Engastada e livre)	45
Figura 4.9 Viga de múltiplas camadas bi-apoiado (Seção longitudinal e transversal)	46
Figura 4.10 Refinamento de malha para caso de viga bi-apoiada (4 m de vão).....	47
Figura 4.11 Refinamento de malha para caso de viga bi-apoiada (8 m de vão).....	47
Figura 4.12 Carga crítica para caso de viga bi-apoiada ($K_s=100\text{MPa}$; 4 m de vão).....	48
Figura 4.13 Carga crítica para caso de viga bi-apoiada ($K_s=1000000\text{ MPa}$; 4m de vão).....	48
Figura 4.14 Carga crítica para caso de viga bi-apoiada ($K_s=100\text{ MPa}$; 8 m de vão).....	49
Figura 4.15 Carga crítica para caso de viga bi-apoiada ($K_s=1000000\text{ MPa}$; 8 m de vão).....	49

Figura 4.16 Viga de múltiplas camadas engastada e apoiada (Seção longitudinal e transversal)	50
Figura 4.17 Refinamento de malha para caso de viga engastada e apoiada (4 m de vão)	50
Figura 4.18 Refinamento de malha para caso de viga engastada e apoiada (8 m de vão)	50
Figura 4.19 Carga crítica para caso de viga engastada e apoiada ($K_s=100\text{MPa}$; 4 m de vão)	51
Figura 4.20 Carga crítica para caso de viga engastada e apoiada ($K_s=1000000\text{MPa}$; 4 m de vão)	51
Figura 4.21 Carga crítica para caso de viga engastada e apoiada ($K_s=100\text{MPa}$; 8 m de vão)	52
Figura 4.22 Carga crítica para caso de viga engastada e apoiada ($K_s=1000000\text{MPa}$; 8 m de vão)	52
Figura 4.23 Viga de múltiplas camadas bi-engastada (Seção longitudinal e transversal)	53
Figura 4.24 Refinamento de malha para caso de viga bi-engastada (4 m de vão)	53
Figura 4.25 Refinamento de malha para caso de viga bi-engastada (8 m de vão)	53
Figura 4.26 Carga crítica para caso de viga bi-engastada ($K_s=100\text{MPa}$; 4 m de vão)	54
Figura 4.27 Carga crítica para caso de viga bi-engastada ($K_s=1000000\text{MPa}$; 4 m de vão)	54
Figura 4.28 Carga crítica para caso de viga bi-engastada ($K_s=100\text{MPa}$; 8 m de vão)	55
Figura 4.29 Carga crítica para caso de viga bi-engastada ($K_s=1000000\text{MPa}$; 8 m de vão)	55
Figura 4.30 Viga de múltiplas camadas engastada e livre (Seção longitudinal e transversal)	56
Figura 4.31 Refinamento de malha para caso de viga engastada e livre (4 m de vão)	56
Figura 4.32 Refinamento de malha para caso de viga engastada e apoiada (8 m de vão)	56
Figura 4.33 Carga crítica para caso de viga engastada e livre ($K_s=100\text{MPa}$; 4 m de vão)	57
Figura 4.34 Carga crítica para caso de viga engastada e livre ($K_s=1000000\text{MPa}$; 4 m de vão)	57
Figura 4.35 Carga crítica para caso de viga engastada e livre ($K_s=100\text{MPa}$; 8 m de vão)	58
Figura 4.36 Carga crítica para caso de viga engastada e livre ($K_s=1000000\text{MPa}$; 8 m de vão)	58
Figura 4.37 Pilar de múltiplas camadas (Seção longitudinal e transversal)	60
Figura 4.38 Carga crítica para caso de pilar de múltiplas camadas engastado e livre ($K_s=50\text{MPa}$)	61
Figura 4.39 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e livre	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 Frequências naturais (viga bi-apoiada)	38
Tabela 4.2 Viga mista engastada e apoiada (Seção longitudinal e transversal).....	39
Tabela 4.3 Frequências naturais (viga engastada e apoiada)	39
Tabela 4.4 Frequências naturais (viga bi-engastada).....	40
Tabela 4.5 Frequências naturais (viga engastada e livre)	41
Tabela 4.6 Comparativo entre solução numérica e analítica (Viga bi-apoiada)	42
Tabela 4.7 Comparativo entre solução numérica e analítica (Viga engastada e apoiada)	43
Tabela 4.8 Comparativo entre solução numérica e analítica (Viga bi-engastada).....	44
Tabela 4.9 Comparativo entre solução numérica e analítica (Viga engastada e livre)	45
Tabela 4.10 Valores de cargas críticas para caso de viga bi-apoiada (4 m de vão)	48
Tabela 4.11 Valores de cargas críticas para caso de viga bi-apoiada (8 m de vão)	49
Tabela 4.12 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e apoiada (4 m de vão) ...	51
Tabela 4.13 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e apoiada (8 m de vão) ...	52
Tabela 4.14 Valores de cargas críticas para caso de viga bi-engastada (4 m de vão).....	54
Tabela 4.15 Valores de cargas críticas para caso de viga bi-engastada (8 m de vão).....	55
Tabela 4.16 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e livre (4 m de vão)	57
Tabela 4.17 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e livre (8 m de vão)	58
Tabela 4.18 Relação entre os valores das críticas de Euler com a solução numérica	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	6
1.1	Objetivos.....	8
1.1.1	Objetivos gerais.....	8
1.1.2	Objetivos específicos.....	8
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	9
2.1	Considerações iniciais.....	9
2.2	Breve histórico do Método dos Elementos Finitos.....	9
2.3	Análise estática de vigas mistas e multilaminadas com interação parcial.....	10
2.4	Análise dinâmica de vigas mistas e multilaminadas com interação parcial.....	11
2.5	Modelos de elementos finitos aplicados a vigas mistas.....	11
2.6	Análise dos modos de vibração, frequência e cargas críticas em vigas.....	14
2.7	Fundamentação teórica.....	15
2.8	Consideração de linearidade física.....	15
2.9	Consideração de não-linearidade geométrica.....	15
2.10	Formulação cinemática da teoria de viga clássica (Euler-Bernoulli).....	16
2.11	O Método dos Elementos Finitos.....	17
2.11.1	<i>Energia de deformação.....</i>	<i>18</i>
2.11.2	<i>Matriz de Rigidez do Elemento.....</i>	<i>19</i>
2.11.3	<i>Matriz de Rigidez Tangente do Elemento.....</i>	<i>20</i>
2.11.4	<i>Matriz de Massa do Elemento.....</i>	<i>21</i>
2.12	Análise dinâmica.....	22
2.12.1	<i>Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade.....</i>	<i>23</i>
2.12.2	<i>Vibração livre não-amortecida.....</i>	<i>23</i>
2.12.3	<i>Frequência e modo de vibração natural.....</i>	<i>24</i>
2.12.4	<i>Autovalores.....</i>	<i>25</i>
3	METODOLOGIA.....	26
3.1	Modelo de elemento finito.....	26
3.2	Funções de forma.....	27
3.3	Matriz das funções de forma.....	27
3.4	Vetor das deformações, deslocamentos entre camadas e curvatura.....	28
3.5	Matriz Constitutiva.....	30
3.6	Matriz de rigidez do elemento.....	31
3.7	Matriz de rigidez geométrica.....	31

3.8	Matriz de Massa.....	34
3.9	Matrizes de rigidez tangente e de massa globais.....	34
3.10	Frequências naturais	36
4	RESULTADOS.....	37
4.1	Hipóteses.....	37
4.1.1	<i>Exemplo numérico de viga mista bi-apoiada.....</i>	<i>37</i>
4.1.2	<i>Exemplo numérico de viga mista engastada e apoiada.....</i>	<i>39</i>
4.1.3	<i>Exemplo numérico de viga mista bi-engastada</i>	<i>40</i>
4.1.4	<i>Exemplo numérico de viga mista engastada e livre.....</i>	<i>41</i>
4.2	Exemplo numérico para determinação das cargas críticas.....	41
4.2.1	<i>Carga crítica para o caso de viga bi-apoiada.....</i>	<i>42</i>
4.2.2	<i>Carga crítica para o caso de viga mista engastada e apoiada.....</i>	<i>43</i>
4.2.3	<i>Carga crítica para o caso de viga mista bi-engastada</i>	<i>44</i>
4.2.4	<i>Carga crítica para o caso de viga mista engastada e livre</i>	<i>45</i>
4.3	Exemplo numérico de viga de três camadas.....	46
4.3.1	Caso de viga de múltiplas camadas bi-apoiada.....	46
4.3.2	Caso de viga de múltiplas camadas engastada e apoiada	50
4.3.3	Caso de viga de múltiplas camadas bi-engastada	53
4.3.4	Caso de viga de múltiplas camadas engastada e livre	56
4.4	Comparativo entre a solução numérica com o valor da carga crítica de Euler....	59
4.5	Exemplo de pilar de múltiplas camadas engastado e livre.....	60
5	CONCLUSÕES.....	62
6	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	62
	REFERÊNCIAS	63
	APÊNDICE - CÓDIGO FONTE	65

1 INTRODUÇÃO

Tendo em vista o crescimento da complexidade de se projetar estruturas cada vez mais resistentes e seguras para a construção civil, faz-se necessário o estudo de novos elementos estruturais capazes de conciliar economia, praticidade e segurança. Nesse sentido, os elementos de múltiplas camadas vêm despertando o interesse de muitos estudiosos atualmente, sendo seu estudo datado desde a década de 30 do século passado.

Facetar um elemento estrutural em várias estruturas com propriedades diversas tem como objetivo mobilizar as melhores características de cada material laminado para que, juntos, trabalhem de forma mais eficaz. É o exemplo das vigas e colunas mistas, que são estruturas compostas por duas camadas, uma de aço e outra de concreto justapostas por um conector de cisalhamento, que objetivam transmitir as tensões de compressão e tração para respectivamente o concreto e o perfil laminado de aço (Figura 1.1).

Figura 1.1 Viga Mista



Fonte: www.engenhariacivil.com.br, 2017

Tendo em vista o relevante uso na construção civil de elementos mistos, faz-se necessário analisar esse tipo estrutural com maior acurácia afim de garantir segurança contra problemas de flambagem e perda de estabilidade.

O estudo da carga crítica seria, portanto, de suma importância para evitar os problemas mencionados. Há, no entanto, pouca pesquisa na determinação da carga crítica referente a esses tipos de estruturas, uma vez que se torna complicado formular analiticamente o comportamento de uma estrutura laminada, sendo necessário recorrer a métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Figura 1.2 Flambagem em colunas de aço e madeira.



Fonte: www.degruyter.com, 2017

Uma das formas de se obterem, segundo a literatura, as cargas críticas das estruturas de barras é através de análise dinâmica. Implementando incrementos de cargas axiais de compressão à viga, as cargas impostas à estrutura acabam se aproximando do valor de carga crítica até que a frequência natural da mesma se anule.

Diante do exposto, é necessário utilizar o Método dos Elementos Finitos para a devida análise, sendo necessário recorrer a implementação computacional como forma de agilizar o volume de dados a serem processados que o método supracitado exige. A implementação será feita no MAPLE 17[®], que se caracteriza como um software de matemática simbólica, com recursos de programação.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos gerais

Analisar, via Método dos Elementos Finitos, vigas e pilares multilaminadas, determinando, em estudos de casos, suas cargas críticas e frequências naturais.

1.1.2 Objetivos específicos

- a) Formular a matriz de rigidez do elemento.
- b) Formular matriz de rigidez geométrica
- c) Gerar a matriz de rigidez global
- d) Formular o vetor de cargas nodais
- e) Formular a matriz de massa da estrutura
- f) Gerar as frequências naturais da estrutura
- g) Submeter o elemento a incremento de cargas axiais
- h) Determinar as cargas críticas para diferentes tipos de estruturas, condições de apoio e geometria.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Considerações iniciais

Na presente seção serão abordados os antecedentes históricos assim como trabalhos anteriores acerca de vigas mistas e multilaminadas acopladas com conectores flexíveis de cisalhamento e a utilização dos Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise numérica de estruturas.

2.2 Breve histórico do Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos (MEF) foi desenvolvido nos anos 1950 pela indústria aeroespacial, sendo os principais envolvidos a Boeing e Bell Aeroespacial, nos Estados Unidos e a Rolls Royce no Reino Unido (FISH, BELYTSCHKO, 2007, p.2).

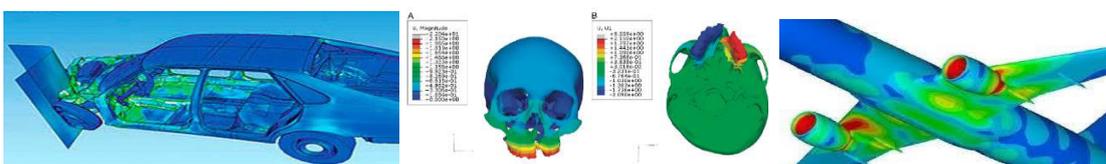
Inicialmente houve um ceticismo quanto a confiabilidade do método por parte da comunidade científica, porém com o desenvolvimento do mesmo, vários pesquisadores passaram a utilizar o MEF em análises aeroespaciais, navais, balísticas e na engenharia estrutural como um todo.

Na primeira metade da década de 60, identificou-se que o MEF pode ser entendido como um caso particular do Método de Rayleigh-Ritz e como tal formulado a partir de Funcionais (SORIANO, 2009, p.3). Dessa forma o método acabou sendo expandido para outras áreas da física e da engenharia, tais como: termodinâmica, hidráulica e eletromagnetismo.

Na década de 90, dado à ampla disponibilidade de microcomputadores e programas comerciais de baixo custo, este método se popularizou com eficientes ferramentas de pré-processamento e pós processamento, o que facilitou seu uso em modelos com muitos graus de liberdade (SORIANO, 2009, p.3).

Desde então, o método tem sido amplamente utilizado em pesquisas, tendo surgido nos últimos anos inúmeros programas como o ABAQUS, ANSYS, SAP2000, NX NASTRAN e MSC SOFTWARE. (Figura 2.1).

Figura 2.1 Aplicação do método elementos finitos em problemas de impacto, Biologia e Aeronáutica



Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Método_dos_elementos_finitos, 2017

2.3 Análise estática de vigas mistas e multilaminadas com interação parcial

A primeira patente notadamente reconhecida na elaboração de projetos em vigas mistas data do ano de 1926 por J.Kahn em pontes rodoviárias dos Estados Unidos. Desde aí, houve um considerável crescimento no uso de vigas mistas em pontes rodoviárias naquele País. Em 1944 a American Association of State Highway Officials (AASHO) publicou seus primeiros estudos para orientar projetos de pontes de elementos mistos. Desde então, inúmeros pesquisadores desenvolveram estudos acerca do comportamento de vigas mistas e materiais multilaminados.

No contexto da análise estática de vigas mistas, o primeiro estudo remonta a Newmark *et al.* (1951), onde estes autores propuseram soluções para vigas mistas com interação parcial fundamentadas na teoria de vigas clássicas considerando o efeito deslizante das camadas. A consideração desse efeito e as inúmeras pesquisas focadas nesse fenômeno advêm do fato de ser comum, na construção civil, o uso de conectores flexíveis entre os elementos, haja vista que enrijecer essas estruturas é economicamente inviável e de complexa execução.

Goodman (1967) pesquisou para diferentes sistemas mistos, incluindo a madeira como material, demonstrando que as formulações de análise de viga mista de aço e concreto podem ser generalizadas para outros materiais.

Os trabalhos evoluíram e Goodman e Popov (1968) estenderam as pesquisas de Newmark para estruturas de três camadas. Ambos autores supracitados trabalharam na faixa da linearidade física e geométrica das estruturas, considerando vigas simplesmente apoiadas.

Inúmeros métodos numéricos foram utilizados para análise de vigas mistas e multilaminadas, entre eles: Método de Elementos Finitos (MEF) e Método das Diferenças Finitas (MDF).

A utilização de métodos numéricos emergiu com o advento do uso de microcomputadores em larga escala, que eram capazes de fornecer resultados precisos com agilidade e eficiência. No contexto do Método dos Elementos Finitos destacam-se os trabalhos de Dall'Asta e Zona (2004), Silva (2006), Oliveira (2009) e Silva (2010).

Outros autores aprofundaram ainda mais os trabalhos de vigas mistas, porém com o uso de vigas contínuas e, portanto, hiperstáticas, que tentavam simular o que acontecia, de fato, nas estruturas usuais da construção civil. Esse tipo de análise foi realizada por Fabroccino (1999).

Dall'Asta e Zona (2002) pesquisaram os efeitos da não linearidade física e geométrica para o caso de vigas mistas, encontrando tanto a solução analítica quanto a solução numérica para o caso estático. Sousa Jr. e Silva (2007 e 2008) trabalharam o efeito da não linearidade em vigas mistas parcialmente conectadas, considerando o deslizamento entre as camadas.

2.4 Análise dinâmica de vigas mistas e multilaminadas com interação parcial

No que diz respeito a análise dinâmica considera-se o efeito de carregamentos que variam ou não em função do tempo, sendo o primeiro caso as cargas harmônicas ou de impacto e o segundo de cargas móveis. Destacam-se Girhammar e Pan (1993) que demonstraram a solução analítica do problema baseada na teoria de vigas clássicas.

Xu e Wu (2007), por sua vez, contemplaram seu trabalho desenvolvendo a solução analítica e numérica para diversas condições de apoio, ambas formuladas na teoria de Timoshenko.

Berczynski e Wróblewski (2005) compararam suas formulações analíticas com ensaios experimentais, objetivando mostrar a aproximação que a solução analítica tem dos experimentos. Concluíram que a teoria de Timoshenko é superior à teoria de viga clássica, porém as duas teorias apresentam resultados bem próximos entre si e entre os ensaios.

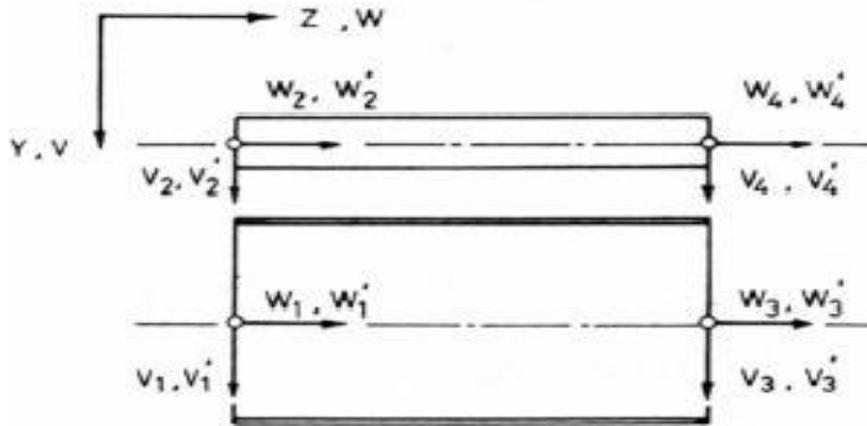
Machado e Sousa Jr. (2012) analisaram numericamente através da teoria de vigas clássicas as frequências naturais e os modos de vibração de vigas bi-apoiadas variando as condições de contorno possíveis. Apresentaram de forma satisfatória resultados próximos aos obtidos com as mesmas condições de contorno do trabalho de Xu e Wu (2007).

2.5 Modelos de elementos finitos aplicados a vigas mistas

Yam e Chapman (1968) foram os pioneiros na criação de um elemento finito (EF) que representasse as vigas mistas objetivando analisar uma viga simplesmente apoiada baseada na teoria de viga clássica. Posteriormente, Yam e Chapman (1972) estenderam o mesmo elemento finito para um caso de vigas contínuas.

Harizumi e Hamada (1980) propuseram um elemento finito (EF) para análise de vigas mistas, composto por duas camadas, uma de aço e uma placa de concreto (Figura 2.2), impondo dois graus de liberdade axiais e transversais por nó.

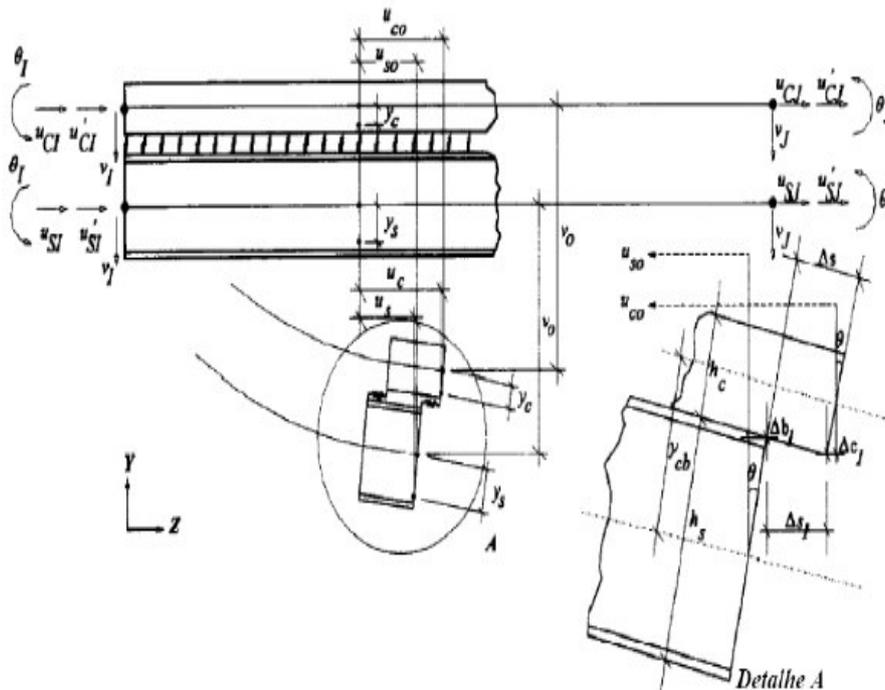
Figura 2.2 Elemento finito proposto por Harizumi e Hamada (1980)



Fonte: Harizumi e Hamada, 1980

Oven et al (1997), formularam um elemento finito de vigas mistas considerando os conectores com rigidez flexível e o efeito de rotação de cada camada por nó. Os resultados acabaram sendo validados com ensaios de vigas mistas em condições de viga bi-apoiada e contínua. (Figura 2.3).

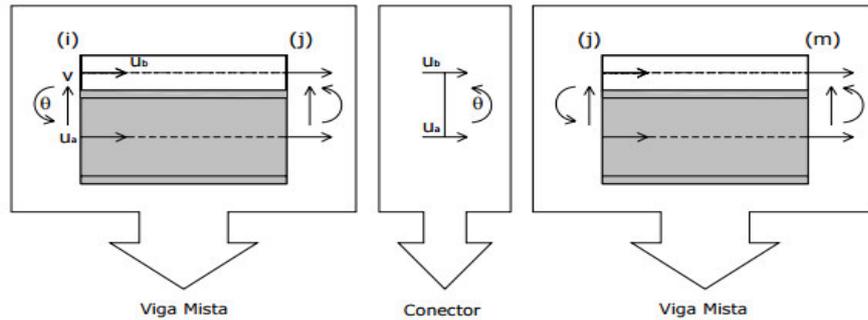
Figura 2.3 Elemento finito proposto por Oven et al (1997)



Fonte: Oven et al, 1997

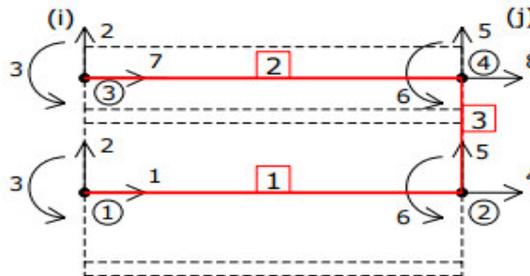
Tamayo (2011) propôs, considerando uma única rotação entre as barras, um elemento finito (Figura 2.4) para uma viga mista com 3 graus de liberdade por nó nas barras planas e três graus de liberdade para o conector, sendo dois longitudinais referentes ao deslizamento e um referente à rotação (Figura 2.5).

Figura 2.4 Elementos que conformam a viga mista.



Fonte: Tamayo, 2011

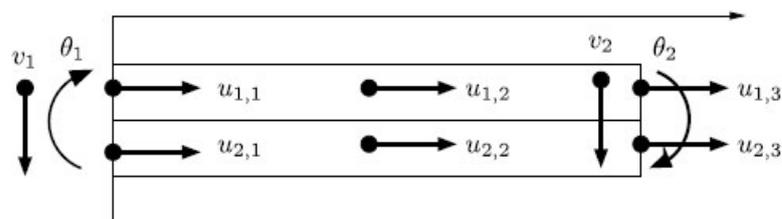
Figura 2.0.5 Elemento finito proposto por Tamayo



Fonte: Tamayo, 2011

Sousa Jr. et al (2010) propuseram um elemento finito quadrático de viga mista com formulação baseada na teoria de viga clássica considerando 4 graus de liberdade por nó nas extremidades e 2 graus de liberdade internos (Figura 2.6).

Figura 2.6 Elemento finito proposto por Sousa Jr. et al

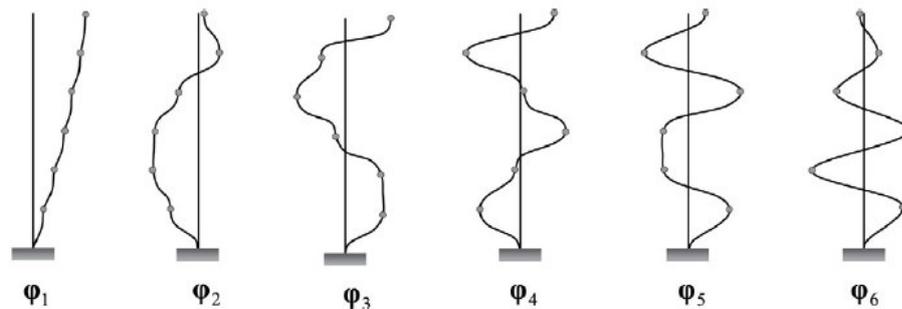


Fonte: Sousa Jr. et al, 2010

2.6 Análise dos modos de vibração, frequência e cargas críticas em vigas

A obtenção das cargas críticas via critério dinâmico é uma metodologia alternativa aos métodos clássicos (carga crítica de Euler), que atribui à frequência fundamental (autovalor) da estrutura uma deformada (autovetor), que tem como característica uma configuração idêntica a deformada causada pela flambagem. Essa configuração pode ser obtida fazendo incrementos de cargas axiais que promovam a diminuição da rigidez da estrutura reduzindo a frequência fundamental da barra, tornando iminente seu encurvamento sob a imposição de qualquer carga adicional. Portanto, para cada frequência fundamental há uma deformada (ou configuração de deformação) associada (Figura 2.7)

Figura 2.7 Seis primeiros modos de vibração de barra engastada e livre (considerando apenas graus de liberdade transversais)



Fonte: Soriano, 2014

No que diz respeito as pesquisas nessa metodologia há poucos trabalhos. Jarek (2007) analisou e implementou no MAPLE®, via métodos dos elementos finitos enriquecidos, o comportamento de placas e vigas com variadas condições de apoio e características geométricas determinando, dessa forma, seus modos de vibração, frequência e cargas críticas.

Xu e Wu (2007) desenvolveram uma solução analítica para vigas mistas fundamentada na teoria de Timoshenko considerando conectores deformáveis e o efeito de rotação da seção após a deformação. Realizaram uma análise estática, dinâmica (frequências naturais e modos de vibração) e de cargas críticas, para diferentes condições de apoio e rigidez de conexão.

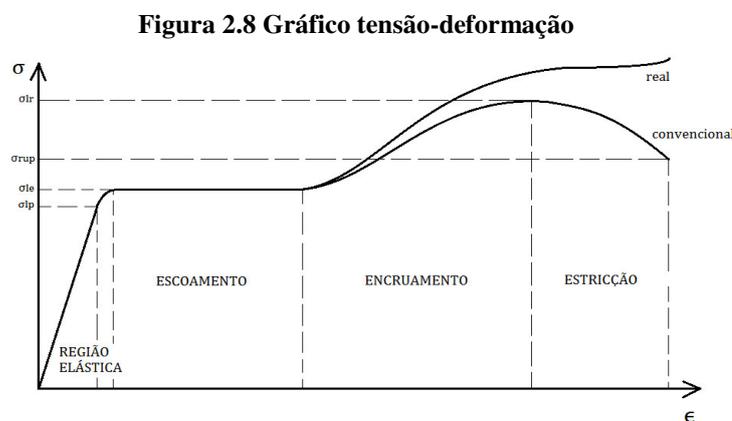
No presente trabalho, os resultados obtidos por Xu e Wu (2007) serão comparados com a solução numérica baseada no método dos elementos finitos, servindo como parâmetro para avaliar a qualidade dos resultados.

2.7 Fundamentação teórica

Na presente seção serão abordados os fundamentos para a análise em elementos finitos das estruturas multilaminadas descrevendo alguns aspectos como: a linearidade física, a não-linearidade geométrica, a teoria de viga clássica, análise dinâmica e o método dos elementos finitos.

2.8 Consideração de linearidade física

A linearidade física descrita por Hooke (1635-1703) constitui um importante fundamento para análise de estruturas, uma vez que é possível associar, para determinados intervalos de tensão e deformação, o comportamento entre barras e molas (Figura 2.8). Isso significa que a resposta de deformação que uma barra submetida a tensões possui são previsíveis caso se obtenha, mediante a realização de ensaios, o módulo de elasticidade do material em estudo. No presente trabalho a análise considerará apenas o fenômeno da linearidade física ou do comportamento elástico das camadas de vigas multilaminadas.



Fonte: www.o-portico.blogspot.com.br, 2017

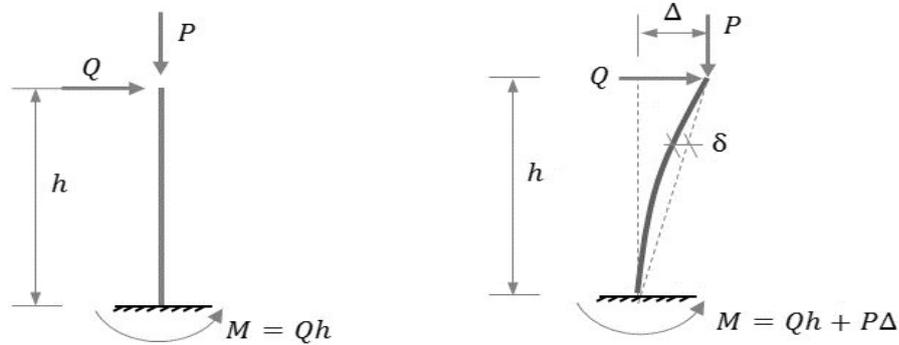
2.9 Consideração de não-linearidade geométrica

É o fenômeno proveniente da excessiva deflexão da estrutura num referencial do espaço. Essa mudança de posição pode ser desprezada no caso de pequenos deslocamentos (efeitos de primeira ordem). No caso de significativos deslocamentos a consequência provocada pela alteração da posição da estrutura no espaço passa a ser relevante (efeitos de segunda ordem).

Os efeitos de segunda ordem exercem, de forma direta, uma notável alteração nas tensões do elemento. É o caso de um pilar engastado e livre submetido a uma carga axial

crecente, que acaba por deformar demasiadamente a estrutura promovendo uma nova configuração a ela. (Figura 2.9).

Figura 2.9 Não linearidade geométrica

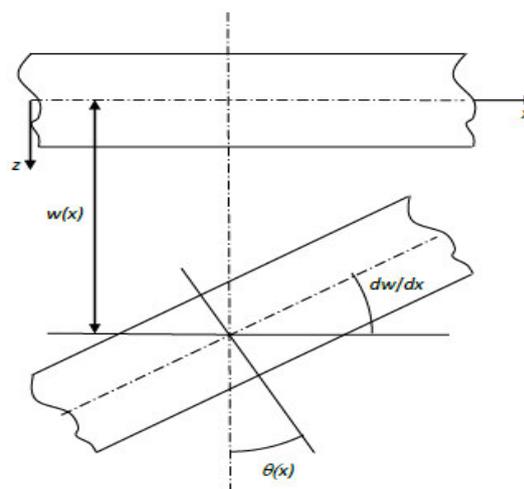


Fonte: www.o-portico.blogspot.com.br, 2017

2.10 Formulação cinemática da teoria de viga clássica (Euler-Bernoulli)

Admite-se que pela teoria de vigas clássicas (Euler-Bernoulli) que um elemento de geometria linear (viga ou pilar) apresentará deformações após o carregamento mantendo as seções transversais planas e perpendiculares a um eixo de referência. Partindo dessa hipótese, pode-se inferir que a rotação em determinado ponto é a derivada da função deslocamento (Figura 2.10)

Figura 2.10 Viga de Euler



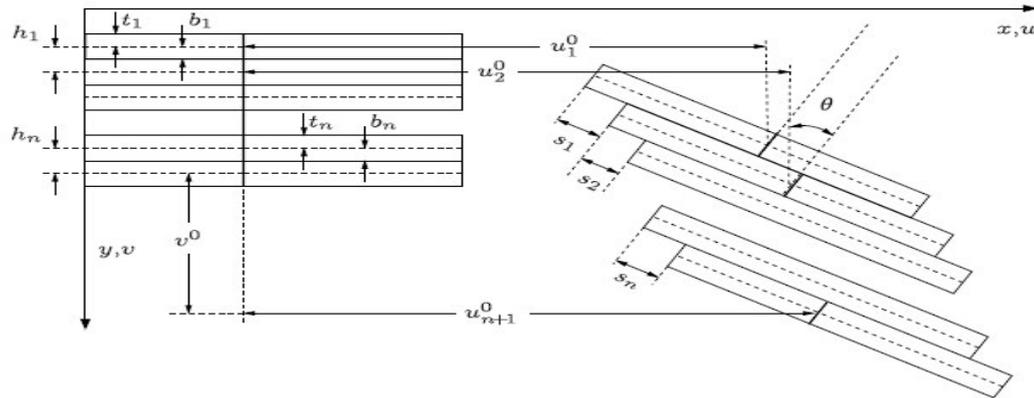
Fonte: www.o-portico.blogspot.com.br, 2017

De acordo com Sousa Jr *et al.* (2010) as equações dos deslocamentos transversais podem ser formuladas partindo de um referencial, $u_n^0(x)$, coincidente com o centróide da n-

ésima camada (Figura 2.11), de onde será considerado que o deslocamento $u_n(x, y)$ é função das coordenadas x e y . A equação do deslocamento é dada por:

$$u_n(x, y) = u_n^0(x) - (y - y_n) \cdot (dv^0(x)/dx) \quad (1)$$

Figura 2.11 Cinemática da viga de Euler



Fonte: Sousa Jr et al (2010)

Considerando a flexibilidade dos conectores e valores pequenos de $(dv^0(x)/dx)$, o deslizamento s entre as camadas ocorrerá de acordo com a seguinte relação:

$$s_{(n)} = u_{n+1}^0 - u_n^0 + (dv^0(x)/dx) \cdot h_{(n)} \quad (2)$$

Onde $s_{(n)}$ e $h_{(n)}$ são, respectivamente, o deslizamento relativo e a distância entre os centros de massa da n -ésima e a $(n+1)$ -ésima camada. Vale ressaltar que o modelo adotado no presente trabalho considera que as camadas constituintes da estrutura possuem a mesma rotação após a deformação.

2.11 O Método dos Elementos Finitos

No contexto da engenharia estrutural, o MEF objetiva encontrar as tensões e as deformações de estruturas sujeitas a um carregamento externo. A formulação do MEF requer a existência de uma equação integral, de modo que seja possível substituir o integral sobre um domínio complexo por um somatório de integrais estendidos a subdomínios de geometria simples (AZEVEDO, 2013, p. 3).

Na presente seção serão abordados os conceitos de energia de deformação, matriz de rigidez do elemento, matriz de rigidez tangente, matriz de rigidez geométrica e matriz de massa, que são fundamentais para operar em análise estrutural via elementos finitos.

2.11.1 Energia de deformação

De acordo com a teoria da elasticidade, baseada na mecânica clássica, as estruturas podem ser, no regime linear, comparadas com molas ideais, isto é, possuem comportamento e propriedades semelhantes. Tal fato permitiria associar os efeitos de uma carga qualquer aplicada a uma mola com os efeitos de uma carga aplicada a uma estrutura. Dessa forma, sabemos que:

$$U = W_{int} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{Le} \varepsilon \cdot \sigma \cdot dx \quad (3)$$

Onde, W_{int} é o trabalho interno, σ é a tensão, ε é a deformação e Le é o comprimento do elemento finito. Pela Lei de Hooke:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4)$$

Onde E é o módulo de elasticidade. Os vetores de tensões em um elemento finito assumem direções e sentidos coincidentes com o centro de massa de cada camada e podem ser organizados na forma matricial. Substituindo (4) em (3), temos:

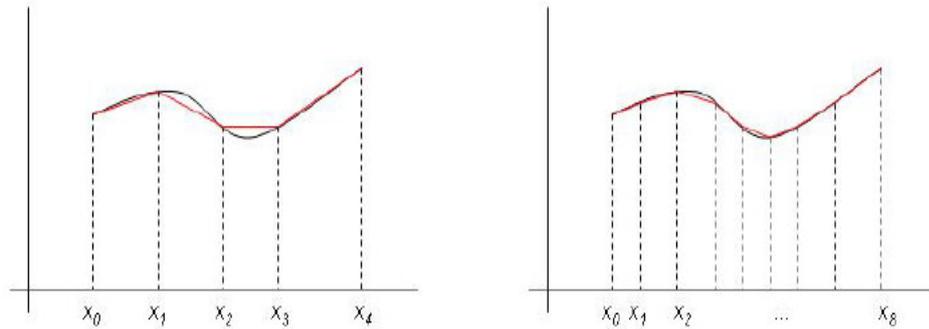
$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{Le} \{\varepsilon\}^T \cdot [C] \cdot \{\varepsilon\} dx \quad (5)$$

Onde $\{\varepsilon\}^T$ é vetor transposto das deformações e $[C]$ a matriz constitutiva.

2.11.2 Matriz de Rigidez do Elemento

Para discretizar uma estrutura em finitos elementos, é necessário atribuir a cada elemento uma função de interpolação que garanta a continuidade entres as funções atribuídas. quanto mais discretizações for imposta, mais próxima da solução analítica estará como segue (Figura 2.12).

Figura 2.12 Discretização dos elementos finitos



As funções de aproximação podem expressas de acordo com a seguinte equação:

$$u_n = \sum_{j=1}^n N_j \cdot d_j \quad (6)$$

Onde N_j são as funções de forma, d_j são a parcela referente aos deslocamentos nodais e n é o número de nós variando de $j = 1$ a $j = n$.

Definindo um vetor que representa as funções de aproximação dos deslocamentos de um elemento finito como $\{u\}$, podemos utilizar a equação (6) de forma matricial com $[N]$ e $\{d\}$ de tal forma que:

$$\{u\} = [N] \cdot \{d\} \quad (7)$$

Onde $[N]$ é a matriz das funções de forma e $\{d\}$ o vetor de deslocamentos nodais.

De acordo com a Teoria da Elasticidade, a derivada da função de um deslocamento qualquer é igual a deformação ε . Utilizando esse conceito da teoria, podemos inferir que:

$$\{\varepsilon\} = \partial\{u\} = \partial[N] \cdot \{d\} = [B] \cdot \{d\} \quad (8)$$

Substituindo (8) em (5), obtemos a matriz de rigidez do elemento, dada pela seguinte equação:

$$K_{el} = \int_0^{Le} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] dx \quad (9)$$

Onde B^T é a matriz derivada transposta das funções de forma.

2.11.3 Matriz de Rigidez Tangente do Elemento

De acordo com Sousa Jr *et al* (2010), a matriz de rigidez tangente, utilizada no regime não linear, pode ser obtida pela derivada dos vetores de forças internas $\{g\}$ pela derivada das funções deslocamento $\{d\}$. Considerando:

$$\{g\} = \int_0^{Le} [B^T] \cdot \{\sigma\} dx \quad (10)$$

Obtemos derivando pela regra do produto as equações (10) e (6):

$$K_{tan} = \frac{\partial\{g\}}{\partial\{d\}} = \int_0^{Le} \frac{\partial[B^T]}{\partial\{d\}} \cdot \{\sigma\} dx + \int_0^{Le} [B^T] \cdot \frac{\partial\{\sigma\}}{\partial\{d\}} dx \quad (11)$$

Onde o primeiro termo do lado direito da equação (11) é conhecido como matriz de rigidez geométrica e o segundo termo como matriz de rigidez elástica. De acordo com Sousa Jr *et. al* (2010), a matriz de rigidez geométrica pode ser expressa pela seguinte relação:

$$\int_0^{Le} \frac{\partial [B^T]}{\partial \{d\}} \cdot \{\sigma\} dx = \int_0^{Le} [Bnl] \cdot (P1 + P2 + P3 \dots Pn) dx \quad (12)$$

Onde $[Bnl]$ é a matriz resultante do produto entre o vetor das funções de forma $\{N\}$ com o vetor tranposto das funções de forma $\{N\}^T$, representando a parcela transversal e de flexão do elemento e Pn como a fora normal aplicada no centro geométrico da n-ésima camada.

É relevante ressaltar que o segundo termo do lado direito da Equação (11) tem como resultado duas parcelas, a rigidez inicial (linearidade física) e a rigidez devido aos deslocamentos anteriores (não linearidade física) a cada instante. Como o objetivo do presente trabalho é obter somente a carga crítica através da solução de um problema de autovalor, se desprezará os deslocamentos pré-críticos, reduzindo a matriz de rigidez elástica somente à matriz de rigidez inicial.

2.11.4 Matriz de Massa do Elemento

As hipóteses para a formulação da matriz de massa são também baseadas da teoria de vigas clássicas, isto é, apresentará deformações após o carregamento mantendo as seções transversais planas e perpendiculares a um eixo de referência.

Partindo da hipótese de um sistema conservativo, isto é, que a energia mecânica da estrutura se mantém constante, podemos admitir que para um infinitesimal volume dV_0 a energia cinética de toda estrutura é dada por uma integral de volume V_0 , que pode ser expressa da seguinte forma:

$$Ec = \int \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 dV_0 \quad (13)$$

Onde ρ é a densidade e v é a velocidade. Sendo a velocidade uma grandeza vetorial que admite duas componentes (x, y) no plano cartesiano, podemos expressar v_x e v_y da forma u_n' e v_n' que são, respectivamente, as derivadas deslocamentos axiais e transversais da n-ésima camada. Podemos escrever matricialmente a Equação (13) da seguinte forma:

$$Ec = \frac{1}{2} \cdot \sum_1^n \int \rho_n \cdot (\{u_n'\}^T \cdot \{u_n'\} + \{v_n'\}^T \cdot \{v_n'\}) dV_0 \quad (14)$$

Onde a Equação (14) representa a soma da energia cinética de todas as camadas constituintes, variando de 1 à n-ésima camada. Derivando os membros da equação (6) e substituindo na equação (14), obtemos a seguinte relação:

$$mu_n = \int_0^{Le} \rho_n \cdot A_n \cdot \{N_u\}^T \cdot \{N_u\} dx \quad (15)$$

Sendo $\{N_u\}$ o vetor das funções de forma de interpolação axial e A_n a área da seção n . A parcela de massa referente à rotação e ao deslocamento transversal é dada por:

$$m_{vva} = \int_0^{Le} \left[\left(\sum_1^n \rho_n \cdot A_n \right) \cdot \{N_v\}^T \cdot \{N_v\} + \left(\sum_1^n \rho_n \cdot I_n \right) \cdot \{N_{v,x}\}^T \cdot \{N_{v,x}\} \right] dx \quad (16)$$

Onde I_n é a inércia da seção considerada.

2.12 Análise dinâmica

Na análise dinâmica considera-se que as forças de inércia na estrutura são relevantes, sendo a carga uma função do tempo. O objetivo da análise dinâmica é encontrar os deslocamentos, as velocidades e as acelerações da estrutura em estudo, seja por modelos que simplificam o elemento (discretos), seja por modelos que consideram sua complexidade.

A equação do movimento é descrita pelo princípio de D'Alembert (1717-1783), cuja formulação é dada, para um grau de liberdade, pela seguinte relação:

$$F(t) = M \cdot u'' + C \cdot u' + K \cdot u \quad (17)$$

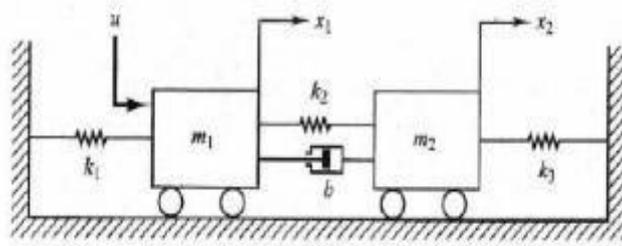
Onde $F(t)$ é a carga em função do tempo, u é o deslocamento, u' a velocidade, u'' a aceleração, M a massa, C o coeficiente de amortecimento e K é a rigidez.

Podemos conceber o problema de análise dinâmica de duas formas distintas: quanto ao grau de liberdade e quanto ao tipo de vibração. No presente trabalho será considerado um sistema de múltiplos graus de liberdade e de vibração livre não-amortecida.

2.12.1 Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade

Diferente do sistema de um grau de liberdade, que tem seu estudo limitado para a maioria dos problemas de engenharia, o SMGL pode representar melhor o comportamento de um elemento ou de um conjunto de elementos estruturais. Seu modelo simplificado pode ser representado pelo sistema massa-mola. (Figura 2.13).

Figura 2.13 Sistema de múltiplos graus de liberdade



Fonte: www.engenharicivil.com.br, 2017

As equações de equilíbrio para o SMGL geradas pelo diagrama de corpo livre do sistema massa-mola resultam em um sistema linear, que, matricialmente, pode ser representado da seguinte forma:

$$[M].\{\ddot{u}\} + [C].\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (18)$$

2.12.2 Vibração livre não-amortecida

É um caso particular de vibração onde não se considera forças sendo aplicadas nem a existência de sistemas de amortecimento, sendo expresso da seguinte forma:

$$[M].\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (19)$$

Assume-se que no caso de vibração livre o deslocamento u , baseado em um de seus modos de vibração, pode ser expresso da seguinte forma:

$$u = \phi \cdot q(t) \quad (20)$$

Sendo ϕ um vetor constante que fisicamente representa os modos de vibração e $q(t)$ uma função harmônica do tipo $A \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t)$, onde A e B são constantes de integração obtidas a partir de condições de contorno do problema e ω_n é denominada de frequência natural da estrutura para um grau de liberdade dada pela seguinte expressão:

$$\omega_n = \sqrt{K/M} \quad (21)$$

2.12.3 *Frequência e modo de vibração natural*

Substituindo a função harmônica $A \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t)$, em (21), obtemos a seguinte relação:

$$u = \phi \cdot A \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B \cdot \text{sen}(\omega_n \cdot t) \quad (22)$$

Substituindo (23) em (20):

$$(-\omega_n^2 \cdot M \cdot \phi + K \cdot \phi) \cdot q(t) = 0 \quad (23)$$

Na hipótese de $q(t)$ vir a ser nulo, tal fenômeno caracterizaria a não existência de movimento, não tendo solução de interesse para a dinâmica. A solução de interesse se resume na seguinte equação:

$$\phi \cdot (K - \omega_n^2 \cdot M) = 0 \quad (24)$$

A equação (25) é uma forma de expressar um típico problema de Autovalor ou Valor Característico. Sendo a frequência natural os Autovalores ω_n^2 do problema. Os deslocamentos ou deformadas representam os Autovetores ou modos de vibração natural.

A solução não-trivial para a equação (25) condiciona que o determinante do termo em parênteses deverá ser nulo, isto é:

$$\text{Det}(K - \omega_n^2 \cdot M) = 0 \quad (25)$$

2.12.4 Autovalores

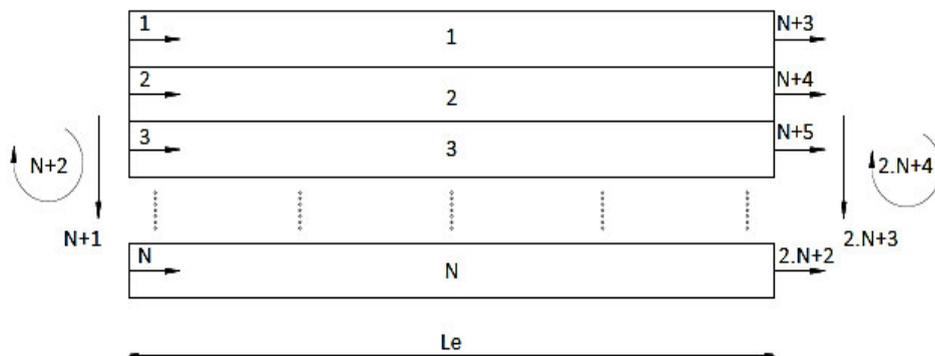
Os autovalores podem ser obtidos resolvendo o determinante da equação (26), que resultará num polinômio de grau $2 \cdot N$, onde N é número de graus de liberdades. O determinante da Equação (26), fornecerá um polinômio de grau 6, que pode ter as raízes ordenadas num vetor (Autovalores).

3 METODOLOGIA

3.1 Modelo de elemento finito

O modelo de elemento finito adotado no presente trabalho é composto por dois nós na extremidade do elemento, que distam entre si um comprimento Le . Cada nó atribuído ao elemento comporta $N + 2$ graus de liberdade, onde N é o número de camadas adotadas (Figura 3.1).

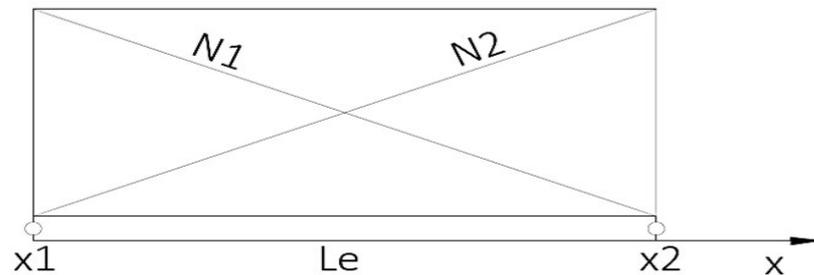
Figura 3.1 Modelo de elemento finito



Fonte: Autor

O modelo adotará um elemento unidimensional linear com dois nós localizados nos extremos, o que significa as funções de forma dos graus de liberdade axial são equações do primeiro grau, expressas da seguinte forma:

Figura 3.2 Funções de forma do elemento finito



Fonte: Autor

$$N_1 = \frac{1 - x}{Le}$$

$$N_2 = \frac{x}{Le}$$

(26)

3.2 Funções de forma

Para representar os deslocamentos e as rotações em elementos lineares (vigas e pilares) é comum utilizar os Polinômios de Hermite, que para um elemento discretizado de comprimento Le , são dados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 N_{u1} = M1 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi)^2 \cdot (2 + \xi) \\
 N_{\theta1} = M2 &= \frac{Le}{8} \cdot (1 - \xi)^2 \cdot (1 + \xi) \\
 N_{u2} = M3 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi)^2 \cdot (2 - \xi) \\
 N_{\theta1} = M4 &= \frac{Le}{8} \cdot (1 + \xi)^2 \cdot (1 - \xi) \\
 \xi &= \frac{2x}{Le} - 1
 \end{aligned} \tag{27}$$

3.3 Matriz das funções de forma

O vetor deslocamento para vigas mistas pode ser ordenado de acordo com a posição dos graus de liberdade considerados no elemento, de tal forma que:

$$\mathbf{d}^t = \{u_{1,1} \ u_{1,2} \ v_1 \ \theta_1 \ u_{2,1} \ u_{2,2} \ v_2 \ \theta_2\} \tag{28}$$

A matriz das funções forma pode ser montada de acordo com a posição dos graus de liberdade no elemento. Para o caso de 2 camadas, podemos exemplificar da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix}
 N1 & 0 & 0 & 0 & N2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & N1 & 0 & 0 & 0 & N2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & M1 & M2 & 0 & 0 & M3 & M4
 \end{bmatrix} \tag{29}$$

De acordo com a Equação (6) as funções deslocamento, tanto das deformações axiais, quanto das rotacionais e transversais, dada, de acordo com um exemplo de 2 camadas, da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(x)^t = \{u_1(x) \ u_2(x) \ v(x)\} \quad (30)$$

Ao longo da metodologia do presente trabalho serão demonstrados exemplos literais de 2 e 3 camadas objetivando a melhor explanação dos conceitos abordados na revisão bibliográfica.

3.4 Vetor das deformações, deslocamentos entre camadas e curvatura

O vetor das deformações é obtido, de acordo com a teoria da elasticidade, pela derivada da função deslocamento $u(x)$ da viga de múltiplas camadas. Derivando (01) em relação a x , obtemos a seguinte relação:

$$\varepsilon_n = \frac{du_n(x)}{dx} = \frac{du_n^0(x)}{dx} - (y - y_n) \cdot \left(d^2v^0(x)/dx^2 \right) \quad (31)$$

A curvatura é obtida pela derivada segunda da função deslocamento v^0 , como expressa em (33):

$$\kappa = \left(d^2v^0(x)/dx^2 \right) \quad (32)$$

O deslocamento axial entre duas camadas adjacentes é obtido pela diferença entre as camadas u_{n+1}^0 e u_n^0 , de tal forma que:

$$s_{(n)} = u_{n+1}^0 - u_n^0 + \left(dv_0(x)/dx \right) \cdot h_{(n)} \quad (33)$$

O sistema de equações acima pode ser organizado de acordo com a equação (8), em que o vetor deformação é dado pelos produtos de uma matriz de operadores diferenciais $\mathbf{\partial}$ pela matriz das funções de forma em conjunto com o vetor das deformações nodais. Segue o exemplo de matriz $\mathbf{\partial}[N^t]$ para um caso de 3 camadas:

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{d(N1)}{dx} & 0 & 0 & 0 & -N1 & 0 \\
 0 & \frac{d(N1)}{dx} & 0 & 0 & N1 & -N1 \\
 0 & 0 & \frac{d(N1)}{dx} & 0 & 0 & N1 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{d(M1)^2}{dx^2} & \frac{h1 d(M1)}{dx} & \frac{h2 d(M1)}{dx} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{d(M2)^2}{dx^2} & \frac{h1 d(M2)}{dx} & \frac{h1 d(M2)}{dx} \\
 \frac{d(N2)}{dx} & 0 & 0 & 0 & -N2 & 0 \\
 0 & \frac{d(N2)}{dx} & 0 & 0 & N2 & -N2 \\
 0 & 0 & \frac{d(N2)}{dx} & 0 & 0 & N2 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{d(M3)^2}{dx^2} & \frac{h1 d(M3)}{dx} & \frac{h2 d(M3)}{dx} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{d(M4)^2}{dx^2} & \frac{h1 d(M4)}{dx} & \frac{h2 d(M4)}{dx}
 \end{array} \right] \quad (34)$$

A configuração acima apresenta um padrão na mudança das dimensões da matriz e do número dos elementos à medida que a quantidade de camadas da viga aumenta, haja vista que a matriz acima pode ser recortada em submatrizes, que se expandem de forma distinta e independente com o aumento do número de camadas.

A implementação das matrizes em conjunto com as demais operações algébricas que método dos elementos finitos exige foi realizada no MAPLE 17[®], cuja implementação se encontra em apêndice no final do presente trabalho.

3.5 Matriz Constitutiva

A matriz constitutiva é parte fundamental para a obtenção da matriz de rigidez do elemento. Os dados de entrada no código de implementação para a construção da matriz constitutiva são compostos pelas listas das áreas, inércias, módulos de elasticidade, pela rigidez das conexões de cada uma das camadas ordenados de cima para baixo e pela lista dos centroides das camadas, ordenados de cima para baixo, respectivamente intitulados de A, In, E, k, h .

A disposição dos termos da matriz se encontra na diagonal principal, onde aloca-se a lista de rigidez axial de cada uma das camadas constituintes, o somatório da rigidez de flexão de todas as camadas e a lista de rigidez das conexões entre as N camadas da estrutura. Segue um exemplo literal de 3 camadas para a matriz constitutiva:

$$\begin{bmatrix} E1 A1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E2 A2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E3 A3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E1 In1 + E2 In2 + E3 In3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

3.6 Matriz de rigidez do elemento

É obtida de acordo com a equação (9), como a integral no domínio de 0 à L_e . Segue um exemplo literal de matriz de rigidez de 2 camadas organizado em blocos, ordenados da esquerda para direita e de cima para baixo

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}k + E1 A1 & -\frac{1}{3}k & 0.5kh & -0.1kh \\ -\frac{1}{3}k & \frac{1}{3}k + E2 A2 & -0.5kh & 0.1kh \\ 0.5kh & -0.5kh & 1.2h^2k + 12.0E1 In1 + 12.0E2 In2 & 0.1h^2k + 6.0E1 In1 + 6.0E2 In2 \\ -0.1kh & 0.1kh & 0.1h^2k + 6.0E1 In1 + 6.0E2 In2 & 0.1h^2k + 4.0E1 In1 + 4.0E2 In2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6}k - E1 A1 & -\frac{1}{6}k & -0.5kh & 0.1kh \\ -\frac{1}{6}k & \frac{1}{6}k - E2 A2 & 0.5kh & -0.1kh \\ 0.5kh & -0.5kh & -1.2h^2k - 12.0E1 In1 - 12.0E2 In2 & 0.1h^2k + 6.0E1 In1 + 6.0E2 In2 \\ 0.1kh & -0.1kh & -0.1h^2k - 6.0E1 In1 - 6.0E2 In2 & -0.0h^2k + 2.0E1 In1 + 2.0E2 In2 \end{bmatrix}$$

(36)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6}k - E1 A1 & -\frac{1}{6}k & 0.5kh & 0.1kh \\ -\frac{1}{6}k & \frac{1}{6}k - E2 A2 & -0.5kh & -0.1kh \\ -0.5kh & 0.5kh & -1.2h^2k - 12.0E1 In1 - 12.0E2 In2 & -0.1h^2k - 6.0E1 In1 - 6.0E2 In2 \\ 0.1kh & -0.1kh & 0.1h^2k + 6.0E1 In1 + 6.0E2 In2 & -0.0h^2k + 2.0E1 In1 + 2.0E2 In2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}k + E1 A1 & -\frac{1}{3}k & -0.5kh & -0.1kh \\ -\frac{1}{3}k & \frac{1}{3}k + E2 A2 & 0.5kh & 0.1kh \\ -0.5kh & 0.5kh & 1.2h^2k + 12.0E1 In1 + 12.0E2 In2 & -0.1h^2k - 6.0E1 In1 - 6.0E2 In2 \\ -0.1kh & 0.1kh & -0.1h^2k - 6.0E1 In1 - 6.0E2 In2 & 0.1h^2k + 4.0E1 In1 + 4.0E2 In2 \end{bmatrix}$$

3.7 Matriz de rigidez geométrica

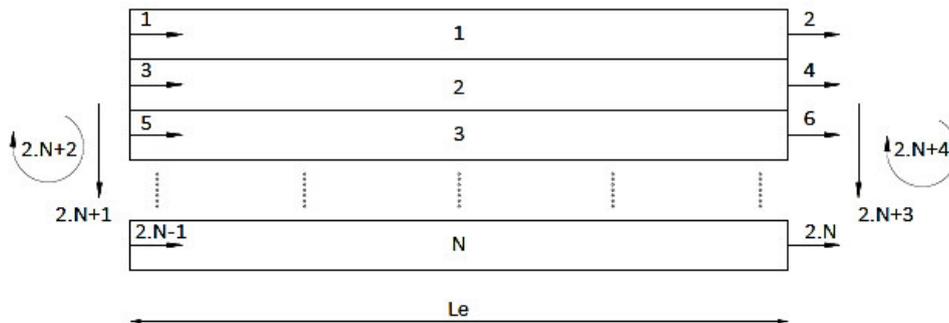
De acordo com a Equação (11), a matriz de rigidez geométrica é obtida pelo produto das funções de forma pelo somatório das cargas axiais atuantes nos centróides das camadas.

O código implementado da matriz de rigidez geométrica coloca os graus de liberdade transversais e rotacionais na posição inferior direita da matriz de rigidez geométrica, alocando os graus de liberdade em posições distintas da matriz de rigidez do elemento, segue abaixo a matriz de rigidez geométrica gerada para um caso de 2 camadas com cargas axiais (q_a, q_b) aplicadas nos centróides das seções:

$$\begin{bmatrix} 1.2 q_a + 1.2 q_b & 0.1 q_a + 0.1 q_b & -1.2 q_a - 1.2 q_b & 0.1 q_a + 0.1 q_b \\ 0.1 q_a + 0.1 q_b & 0.1 q_a + 0.1 q_b & -0.1 q_a - 0.1 q_b & -0.0 q_a - 0.0 q_b \\ -1.2 q_a - 1.2 q_b & -0.1 q_a - 0.1 q_b & 1.2 q_a + 1.2 q_b & -0.1 q_a - 0.1 q_b \\ 0.1 q_a + 0.1 q_b & -0.0 q_a - 0.0 q_b & -0.1 q_a - 0.1 q_b & 0.1 q_a + 0.1 q_b \end{bmatrix} \quad (37)$$

É possível observar, entretanto, que as parcelas referentes aos graus de liberdade axiais e transversais da matriz de rigidez geométrica ocupam posições diferentes da ilustrada na matriz de rigidez do elemento, sendo necessário, dessa forma, realocar a matriz de rigidez do elemento em novas coordenadas, de tal maneira que a equação (11) possa ser satisfeita. Segue o modelo organizado em blocos, ordenados da esquerda para direita, de cima para baixo

Figura 4.3 Modelo de elemento finito com as coordenadas realocadas



Fonte: Autor

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} h + E1 A1 & \frac{1}{6} h - E1 A1 & -\frac{1}{3} h & -\frac{1}{6} h \\ \frac{1}{6} h - E1 A1 & \frac{1}{3} h + E1 A1 & -\frac{1}{6} h & -\frac{1}{3} h \\ -\frac{1}{3} h & -\frac{1}{6} h & \frac{1}{3} h + E2 A2 & \frac{1}{6} h - E2 A2 \\ -\frac{1}{6} h & -\frac{1}{3} h & \frac{1}{6} h - E2 A2 & \frac{1}{3} h + E2 A2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 k h & -0.1 k h & -0.5 k h & 0.1 k h \\ 0.5 k h & 0.1 k h & -0.5 k h & -0.1 k h \\ -0.5 k h & 0.1 k h & 0.5 k h & -0.1 k h \\ -0.5 k h & -0.1 k h & 0.5 k h & 0.1 k h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 k h & 0.5 k h & -0.5 k h & -0.5 k h \\ -0.1 k h & 0.1 k h & 0.1 k h & -0.1 k h \\ -0.5 k h & -0.5 k h & 0.5 k h & 0.5 k h \\ 0.1 k h & -0.1 k h & -0.1 k h & 0.1 k h \end{bmatrix}$$

(38)

$$\begin{bmatrix} 1.2 k^2 h + 12.0 E1 I_{n1} + 12.0 E2 I_{n2} & 0.1 k^2 h + 6.0 E1 I_{n1} + 6.0 E2 I_{n2} \\ 0.1 k^2 h + 6.0 E1 I_{n1} + 6.0 E2 I_{n2} & 0.1 k^2 h + 4.0 E1 I_{n1} + 4.0 E2 I_{n2} \\ -1.2 k^2 h - 12.0 E1 I_{n1} - 12.0 E2 I_{n2} & -0.1 k^2 h - 6.0 E1 I_{n1} - 6.0 E2 I_{n2} \\ 0.1 k^2 h + 6.0 E1 I_{n1} + 6.0 E2 I_{n2} & -0.0 k^2 h + 2.0 E1 I_{n1} + 2.0 E2 I_{n2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.2 k^2 h - 12.0 E1 I_{n1} - 12.0 E2 I_{n2} & 0.1 k^2 h + 6.0 E1 I_{n1} + 6.0 E2 I_{n2} \\ -0.1 k^2 h - 6.0 E1 I_{n1} - 6.0 E2 I_{n2} & -0.0 k^2 h + 2.0 E1 I_{n1} + 2.0 E2 I_{n2} \\ 1.2 k^2 h + 12.0 E1 I_{n1} + 12.0 E2 I_{n2} & -0.1 k^2 h - 6.0 E1 I_{n1} - 6.0 E2 I_{n2} \\ -0.1 k^2 h - 6.0 E1 I_{n1} - 6.0 E2 I_{n2} & 0.1 k^2 h + 4.0 E1 I_{n1} + 4.0 E2 I_{n2} \end{bmatrix}$$

O código de implementação que muda de forma automática as coordenadas dos graus de liberdade da matriz de rigidez do elemento de N camadas se encontra em apêndice.

3.8 Matriz de Massa

De acordo com as equações (15) e (16) a matriz de massa é gerada por três parcelas diferentes, onde (15) representa a integral do produto entre massa específica da n -ésima camada, a área da n -ésima camada, matriz transposta das funções de forma axial e matriz das funções de forma axiais. Vale ressaltar que, de acordo com (17), essas matrizes se alocam na diagonal da matriz de massa em forma de blocos variando de 1 à N .

A equação (16) é dividida em duas parcelas, onde a primeira é referente ao produto a integral do produto entre massa específica da n -ésima camada, a área da n -ésima camada, matriz transposta das funções de forma transversais e matriz das funções de forma transversais. A segunda, por sua vez, diz respeito a integral do produto entre massa específica da n -ésima camada, a inércia da n -ésima camada, matriz transposta das derivadas das funções de forma transversais e matriz das derivadas das funções de forma transversais. Valendo ressaltar que os termos ficam alocados na extremidade da matriz de massa, como expresso em (17).

Em seguida foi implementado a matriz de massa do elemento para o caso de duas camadas, sendo o exemplo explanado de forma literal com as seguintes variáveis: E, A, I_n, h, p , que são, respectivamente, a lista de módulos de elasticidade, lista de áreas, lista de inércias, lista da distância dos centroides e da massa específica da cada camada, onde todos são ordenados, na implementação do código, de cima para baixo.

3.9 Matrizes de rigidez tangente e de massa globais

De posse das matrizes dos elementos, parte-se para a obtenção das matrizes globais, que são obtidas baseadas na superposição dos efeitos. Alocando cada matriz do elemento numa matriz global nula cuja dimensão é igual ao número dos graus de liberdade da estrutura, somam-se os efeitos dos elementos vizinhos nos nós que estes compartilham.

A superposição só é possível caso seja adotado um modelo de elemento finito em acordo com a figura 2.1, sendo, portanto necessário realocar de forma reversa as coordenadas das matrizes de rigidez tangente e de massa. O código de implementação das matrizes de rigidezes e de massa globais se encontram em apêndice.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} pA & 0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & \frac{1}{3} pA & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7 pA + 2.4 pIn & 0.1 pA + 0.2 pIn \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 pA + 0.2 pIn & 0.0 pA + 0.3 pIn \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} pA & 0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & \frac{1}{6} pA & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 pA - 2.4 pIn & -0.1 pA + 0.2 pIn \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 pA - 0.2 pIn & -0.0 pA - 0.1 pIn \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} pA & 0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & \frac{1}{6} pA & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 pA - 2.4 pIn & 0.1 pA - 0.2 pIn \\ 0.0 & 0.0 & -0.1 pA + 0.2 pIn & -0.0 pA - 0.1 pIn \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} pA & 0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & \frac{1}{3} pA & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7 pA + 2.4 pIn & -0.1 pA - 0.2 pIn \\ 0.0 & 0.0 & -0.1 pA - 0.2 pIn & 0.0 pA + 0.3 pIn \end{bmatrix}$$

(39)

3.10 Frequências naturais

De acordo com (25) os autovalores são obtidos pela solução do determinante da expressão que relaciona a matrizes de massa e rigidez tangente globais, resultando em um polinômio de variável ω_n^2 , cuja as raízes acabam sendo os autovalores ou frequências naturais do problema.

No presente trabalho a quantidade de elementos presentes nos vetores das frequências naturais é igual ao número de graus de liberdade da estrutura, que foram ordenados do menor valor (frequência fundamental) ao maior valor.

Foram impostos incrementos de cargas axiais aplicados no centroide de cada seção, tendo em vista que esses incrementos mudam a matriz de rigidez geométrica, que por sua vez acaba alterando a matriz de rigidez tangente e que, por fim, retorna diferentes vetores de frequências naturais.

Os incrementos de cargas axiais de compressão nas seções fariam com que as frequências naturais da estrutura tendessem a zero, sendo associado, a cada frequência natural obtida, uma carga axial.

No presente trabalho as soluções numéricas obtidas foram comparadas com as soluções analíticas obtidas por Xu e Wu (2007). A aproximação dos resultados entre as duas soluções indicará que o método adotado e o modelo de elemento finito empregado fornecem bons resultados.

4 RESULTADOS

4.1 Hipóteses

Na presente seção serão abordados exemplos numéricos para vigas de múltiplas camadas variando a geometria, número de camadas, rigidez das conexões, condições de apoio e esbeltez das peças. A solução numérica para obtenção das frequências naturais obtida será comparada com os resultados analíticos de Xu e Wu (2007) obtidos para uma viga mista.

A análise de Xu e Wu (2007) abordou quatro hipóteses, entre elas estão: deformação devido ao cisalhamento e a rotação à inércia; deformação devido ao cisalhamento (exclusivamente); rotação à inércia (exclusivamente) e por nenhum dos fatores anteriormente considerados. No presente trabalho, para efeitos comparativos, será considerado apenas a rotação à inércia dos exemplos. Será considerado uma rigidez de conexão de 50 MPa e uma malha contendo um total de 20 elementos, a qual demonstrou ser uma boa aproximação dos resultados da solução analítica.

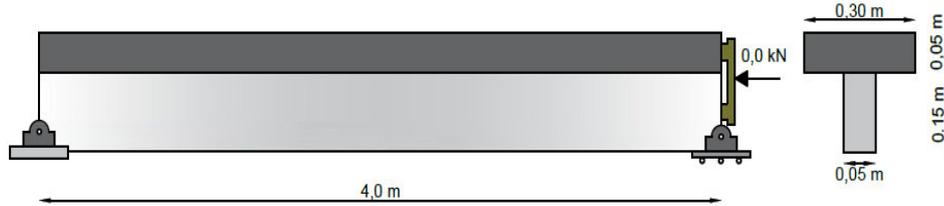
Posteriormente, serão apresentados outros exemplos, com diferentes características, precedidos de um teste de refinamento de malhas em elementos finitos com o intuito de avaliar se as soluções obtidas convergem os seus resultados.

Os termos que estão contabilizados na solução numérica e ausentes na solução analítica se referem as frequências naturais correspondentes aos deslocamentos axiais, representando, por sua vez, os modos de vibração axial da viga. Esses valores não foram obtidos na análise de Xu e Wu (2007), uma vez que estes autores só consideraram as vibrações transversais da viga.

4.1.1 Exemplo numérico de viga mista bi-apoiada

O exemplo a seguir é um caso de viga mista, de seção transversal mostrada na Figura 4.1, para qual as propriedades da seção transversal e dos materiais (ordenadas de cima para baixo) são as seguintes: $L=4\text{m}$, $h=0,1\text{m}$, $E1=12\text{GPa}$, $E2=8\text{GPa}$, $A1=0,015\text{m}^2$, $A2=0,0075\text{m}^2$, $I_{n1}=3,125 \times 10^{-6}\text{m}^4$, $I_{n2}=1,40625 \times 10^{-4}\text{m}^4$, $m_1=36\text{kg/m}$ e $m_2=3,75\text{kg/m}$.

Figura 4.1 Viga mista bi-apoiada (seção longitudinal e transversal)



Fonte: Autor, 2017

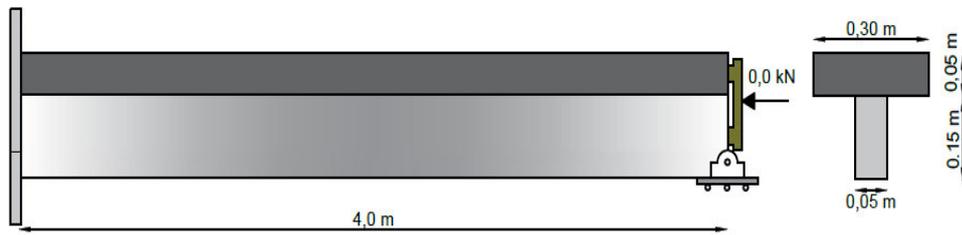
Tabela 4.1 Frequências naturais (viga bi-apoiada)

Ordem	Solução numérica	Solução Analítica - Xu e Wu (2007)	Erro (%)
1	10.30789712	10.3202	0.1192116
2	33.47248903	33.5087	0.1080644
3	66.31508746	66.4042	0.1341971
	92.33378894		
4	110.1259394	109.9384	0.1705859
5	164.832545	164.7303	0.0620681
6	231.1748725	231.0143	0.0695076
7	309.1523801	308.8379	0.1018269
	318.1435464		
8	398.8159232	398.1566	0.1655939
9	500.1519837	498.8747	0.256033
	563.2600573		
	595.0660864		
10	613.20318	610.8634	0.3830283

Fonte: Autor, 2017

4.1.2 Exemplo numérico de viga mista engastada e apoiada

4.2 Viga mista engastada e apoiada (Seção longitudinal e transversal)



Fonte: Autor, 2017

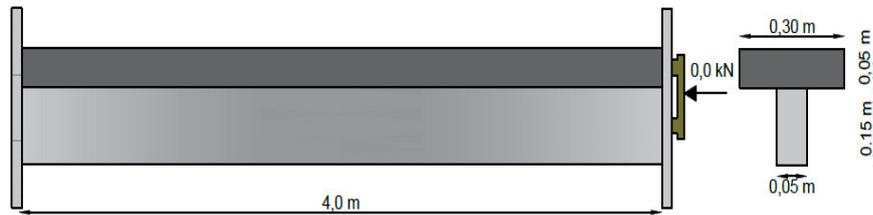
Tabela 4.3 Frequências naturais (viga engastada e apoiada)

Ordem	Solução numérica	Solução Analítica - Xu e Wu (2007)	Erro(%)
1	14.25446641	14.2527	0.0123935
2	39.52400444	39.5196	0.011145
3	75.10753123	75.0998	0.0102946
4	121.5922562	121.5804	0.0097517
	152.848375		
5	179.4107794	179.3902	0.0114719
6	248.737063	248.6975	0.0159081
7	329.606702	329.5263	0.0243993
8	421.9826366	421.8229	0.0378682
	447.8294159		
9	525.794647	525.4876	0.0584309
	565.3924914		
10	640.9485244	640.3893	0.0873257

Fonte: Autor, 2017

4.1.3 Exemplo numérico de viga mista bi-engastada

Figura 4.2 Viga mista bi-engastada (seção longitudinal e transversal)



Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.4 Frequências naturais (viga bi-engastada)

Ordem	Solução numérica	Solução Analítica - Xu e Wu (2007)	Erro(%)
1	18.806903	18.8029	0.0212893
2	46.10019836	46.0966	0.0078061
3	84.56790391	84.5605	0.0087558
4	134.0102055	134	0.007616
5	194.8626462	194.8408	0.0112123
6	267.2033339	267.162	0.0154715
	302.2627517		
7	351.0845853	350.9908	0.0267202
8	446.4428265	446.2562	0.0418205
9	553.2127609	552.8609	0.0636437
	591.1635636		
	668.3153475		
10	671.5986652	670.6677	0.1388117

Fonte: Autor, 2017

4.1.4 Exemplo numérico de viga mista engastada e livre

Figura 4.3 Viga mista engastada e livre (seção longitudinal e transversal)



Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.5 Frequências naturais (viga engastada e livre)

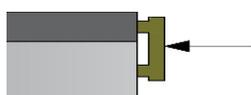
Ordem	Solução numérica	Solução Analítica - Xu e Wu (2007)	Erro(%)
1	3.997271324	3.9974	0.003219
2	20.17224016	20.1785	0.0310223
3	49.10592685	49.1164	0.0213231
4	87.41236885	87.4384	0.0297708
5	136.6939767	136.7388	0.0327802
	152.875349		
6	197.1911804	197.2268	0.0180602
7	269.1824798	269.23	0.0176504
8	352.6134771	352.6873	0.0209316
9	446.282709	447.5887	0.2917837
	449.0929892		
10	551.5879872	553.7899	0.397608
	568.7229246		
	671.9770865		

Fonte: Autor, 2017

4.2 Exemplo numérico para determinação das cargas críticas

Na presente seção será comparada a análise numérica com a analítica realizadas por Xu e Wu (2007). Serão consideradas as mesmas características dos exemplos anteriores, com um exemplo adicional de uma viga mista de camadas justapostas por conectores de rigidez infinita. As cargas de compressão serão aplicadas nos centros geométricos das seções de cada camada, sendo necessária a imposição de uma carga concentrada numa superfície lisa, que divide e distribui de forma igualitária a carga nos eixos de cada seção (Figura 4.4).

Figura 4.4 Detalhe da seção longitudinal da viga mista em estudo

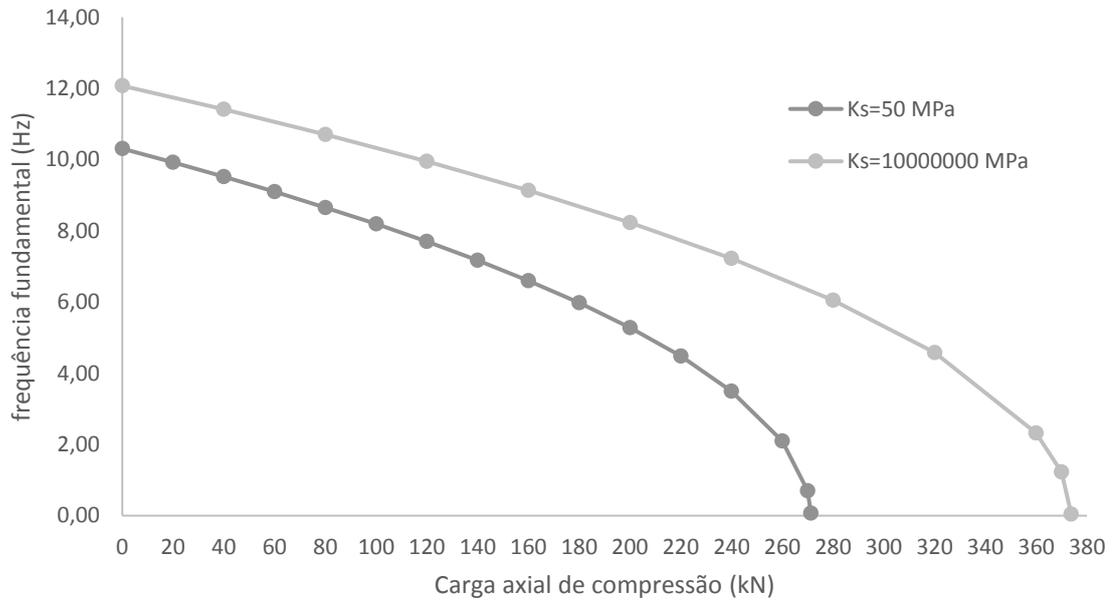


Fonte: Autor, 2017

4.2.1 Carga crítica para o caso de viga bi-apoiada

A viga em estudo para o presente caso se refere ao exemplo da Figura (4.1) com rigidez de conexão (K_s), flexível e infinitamente rígida.

Figura 4.5 Carga crítica e frequência fundamental (Viga bi-apoiada)



Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.6 Comparativo entre solução numérica e analítica (Viga bi-apoiada)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga crítica (kN)		
	Xu e Wu (2007)	Solução numérica	Erro (%)
50	271.0222	271.24	0.080362
10000000	370.1102	373.84	1.007754

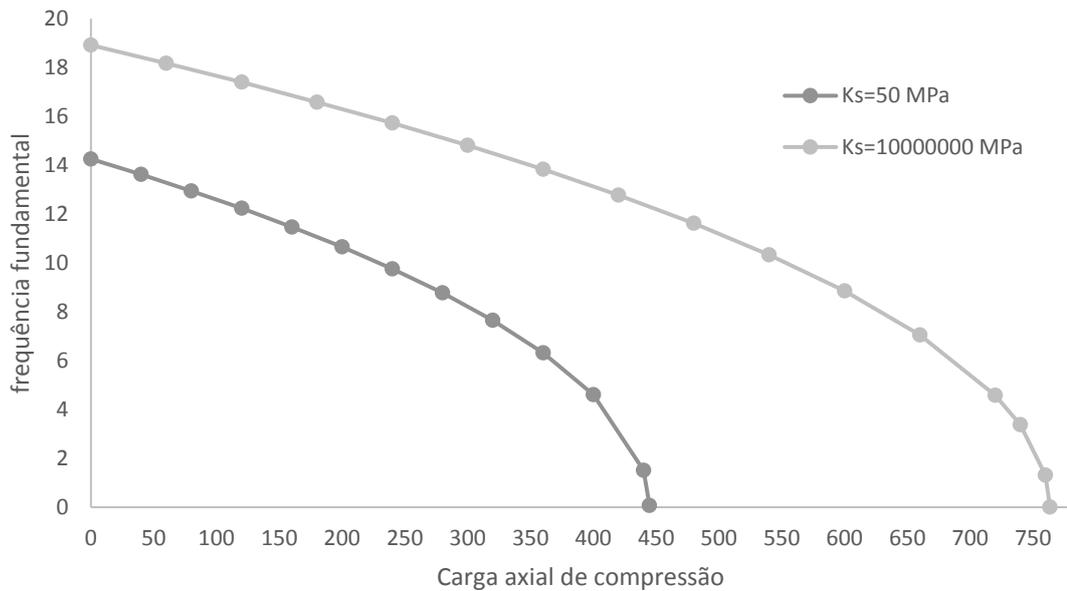
Fonte: Autor, 2017

É possível observar no gráfico acima (Figura 4.5) trechos lineares, havendo um encurvamento dos pontos à medida que os valores se aproximam das cargas críticas determinadas (Tabela 5.6), cujo comportamento é previsto, uma vez que há consideração de não linearidade geométrica.

4.2.2 Carga crítica para o caso de viga mista engastada e apoiada

A viga em estudo para o presente caso se refere ao exemplo da Figura (4.2) com rigidez de conexão (K_s), flexível e infinitamente rígida.

Figura 4.6 Carga crítica e frequência fundamental (Viga engastada e apoiada)



Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.7 Comparativo entre solução numérica e analítica (Viga engastada e apoiada)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga crítica (kN)		
	Xu e Wu (2007)	Solução numérica	Erro (%)
50	444.2441	444.74	0.111628
10000000	757.1523	763.61	0.852893

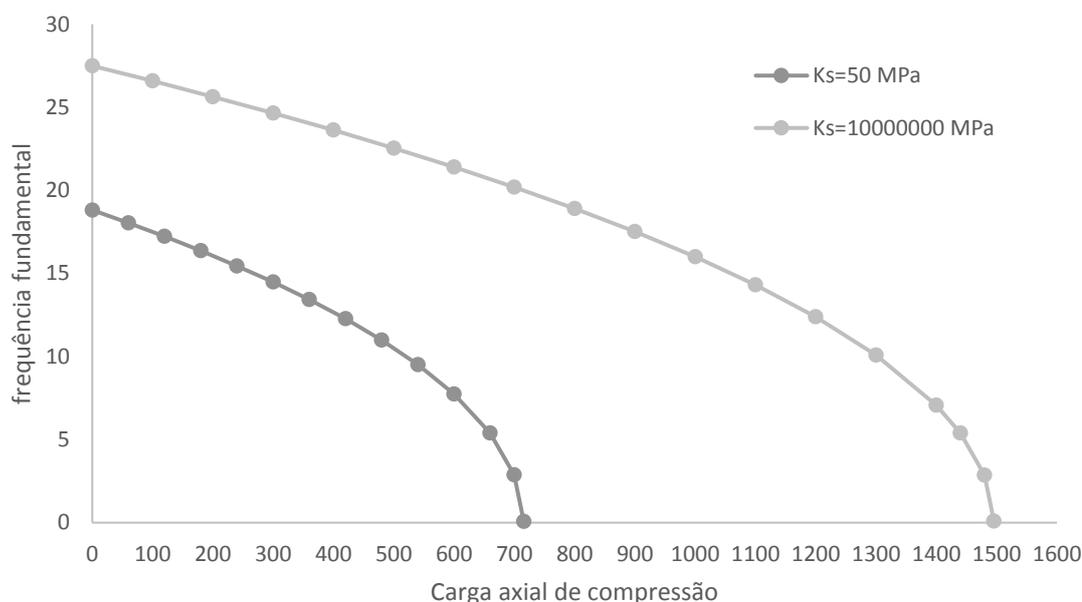
Fonte: Autor, 2017

É possível observar o mesmo comportamento para o caso de viga engastada e apoiada com o exemplo anterior, porém com um considerável aumento no valor de carga crítica para o caso de conectores rígidos em relação aos flexíveis (aproximadamente de 70 %). Ambos erros ficam abaixo de 1%, o que implica numa boa aproximação do método numérico.

4.2.3 Carga crítica para o caso de viga mista bi-engastada

A viga em estudo para o presente caso se refere ao exemplo da Figura (4.3) com rigidez de conexão (K_s), flexível e infinitamente rígida.

Figura 4.7 Carga crítica e frequência fundamental (Viga bi-engastada)



Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.8 Comparativo entre solução numérica e analítica (Viga bi-engastada)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga crítica (kN)		
	Xu e Wu (2007)	Solução numérica	Erro (%)
50	714.8772	715.74	0.120692
10000000	1480.4407	1495.54	1.019919

Fonte: Autor, 2017

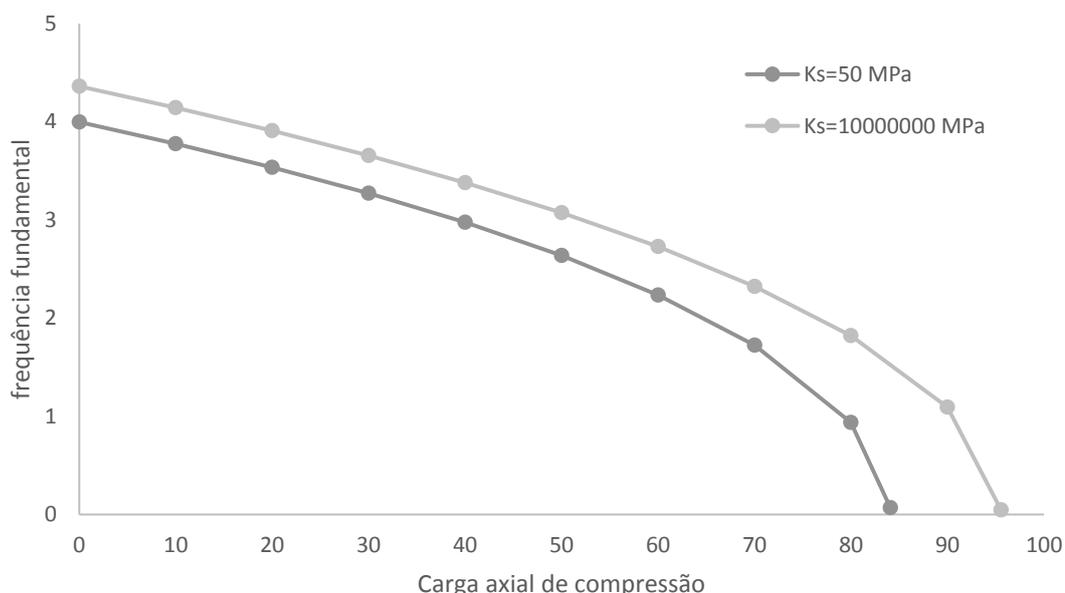
Novamente, o mesmo comportamento para o caso de viga bi-engastada com trechos lineares e curvos, com um considerável aumento no valor de carga crítica para o caso rígido em relação ao flexível (aproximadamente de 100 %).

Vale ressaltar que para um caso de engastamento duplo com rigidez de conexão elevada o valor da carga crítica quadruplica em relação ao caso de viga bi-apoiada e dobra em relação ao caso de viga apoiada e engastada, o que acaba convergindo com os resultados esperados pela resistência dos materiais.

4.2.4 Carga crítica para o caso de viga mista engastada e livre

A viga em estudo para o presente caso se refere ao exemplo da Figura (4.4) com rigidez de conexão (K_s), flexível e infinitamente rígida.

Figura 4.8 Carga crítica e frequência fundamental (Engastada e livre)



Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.9 Comparativo entre solução numérica e analítica (Viga engastada e livre)

Carga crítica (kN)			
Rigidez das conexões (MPa)	Xu e Wu (2007)	Solução numérica	Erro (%)
50	84.0703	84.08	0.011538
10000000	92.5275	95.56	3.277404

Fonte: Autor, 2017

O exemplo acima demonstra que as cargas críticas para o caso de viga engastada e livre apresentam valores de cargas críticas baixas, não havendo tanta discrepância entre os casos para rigidez de conexão alta e flexível. Converte também com os resultados esperados pela resistência dos materiais, onde a carga crítica para o caso engastado e livre é cerca de quatro vezes menor que o caso de viga bi-apoiada, oito vezes menor que o caso de viga engastada e apoiada e dezesseis vezes menor que o caso de viga bi-engastada.

4.3 Exemplo numérico de viga de três camadas

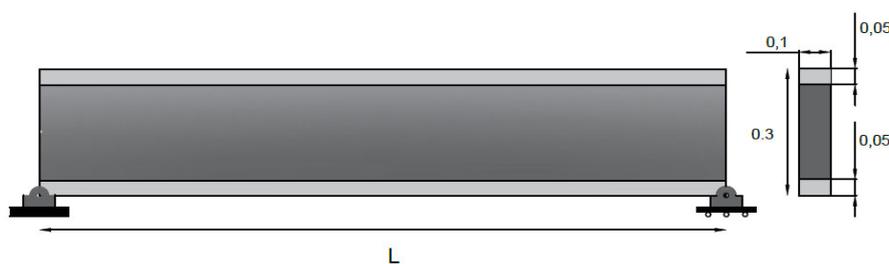
Na presente seção será abordado um exemplo de viga composta por duas camadas de aço conectadas por um núcleo de concreto. Será considerado para esse exemplo diferentes rigidezes das conexões ($100,0\text{MPa}$ e 10^9MPa), variando a esbeltez e as condições de apoio da peça. Serão determinadas as frequências fundamentais e as cargas críticas para cada caso.

Uma vez que não foram encontrados exemplos na literatura de estudos em que se determina a carga crítica de elementos de múltiplas camadas, será imposto um refinamento de malha em elementos finitos, cujo objetivo é verificar se os autovalores do problema e as cargas críticas convergem para um resultado, o que evidenciaria numa aproximação da resposta dessa solução aos valores exatos. Será também avaliado a aproximação dos resultados esperados pela resistência dos materiais para o caso de rigidezes de conexão infinita, sendo um argumento que poderia creditar a solução numérica a resultados confiáveis.

Seguem as propriedades físicas dos materiais: Módulo de elasticidade do concreto (E_1) = $30,67\text{GPa}$ (C-30); Módulo de elasticidade do aço (E_2) = 210GPa ; massa específica do concreto (ρ_1) = 2400kg/m^3 ; massa específica do aço (ρ_2) = 7860kg/m^3 ; Inércia da seção de concreto (I_{n1}) = $0,0000144\text{m}^4$; Inércia da seção do aço (I_{n2}) = $0,00000833\text{m}^4$. Os comprimentos da viga (L) serão de 4 e 8 metros.

4.3.1 Caso de viga de múltiplas camadas bi-apoiada

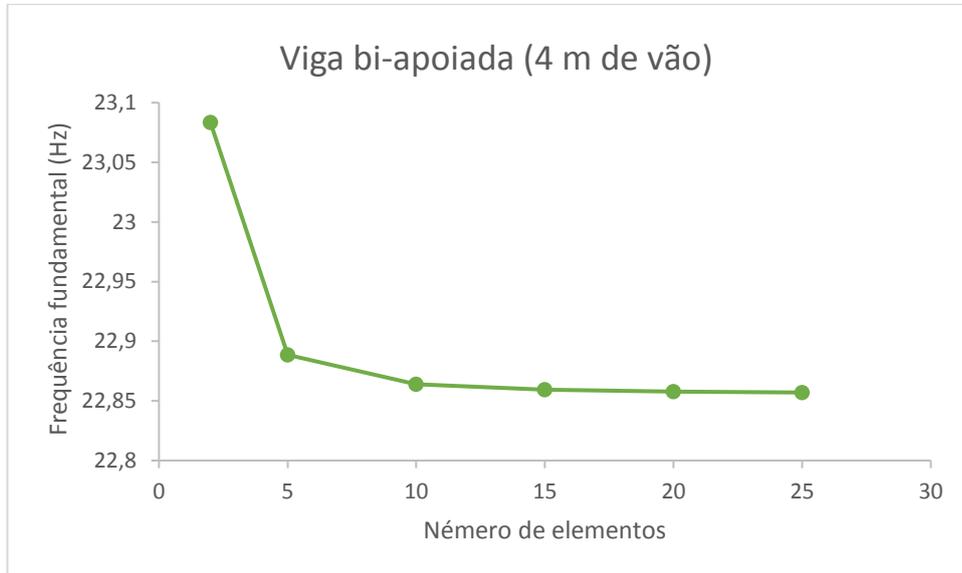
Figura 4.9 Viga de múltiplas camadas bi-apoiada (Seção longitudinal e transversal)



Fonte: Autor, 2017

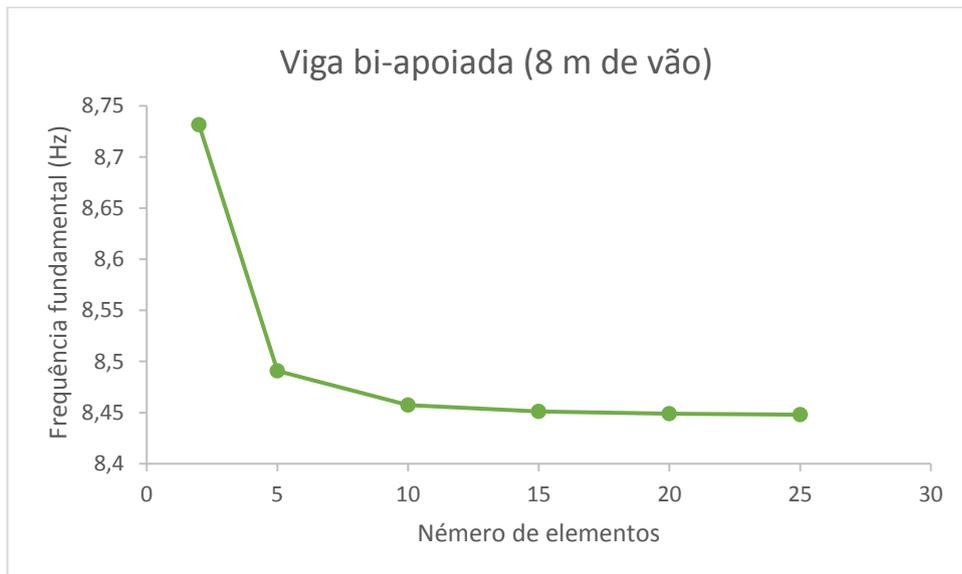
Na primeira etapa será realizado um refinamento de malhas afim de verificar se há alguma convergência nos resultados para a frequência fundamental encontrada, seguem os gráficos:

Figura 4.10 Refinamento de malha para caso de viga bi-apoiada (4 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

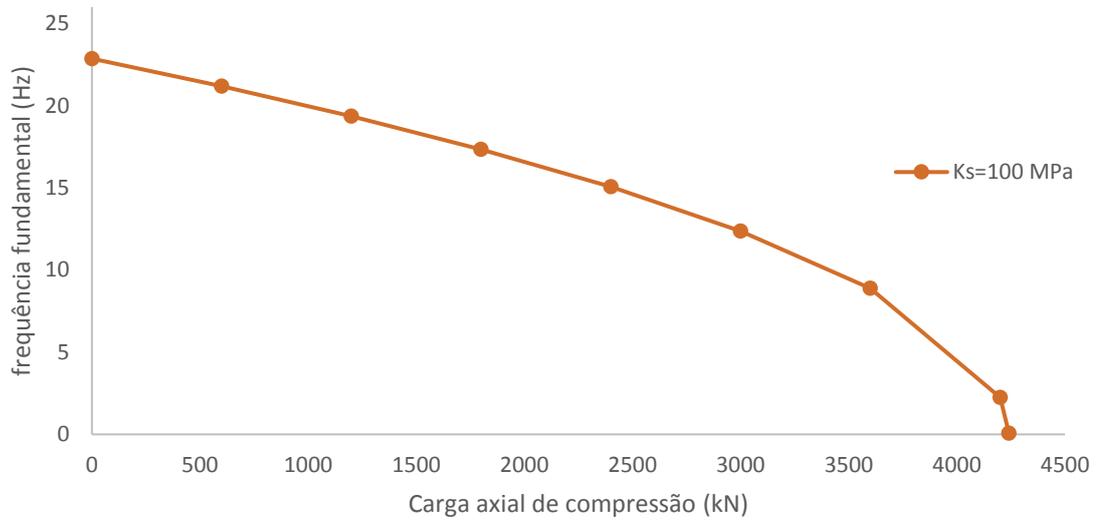
Figura 4.11 Refinamento de malha para caso de viga bi-apoiada (8 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

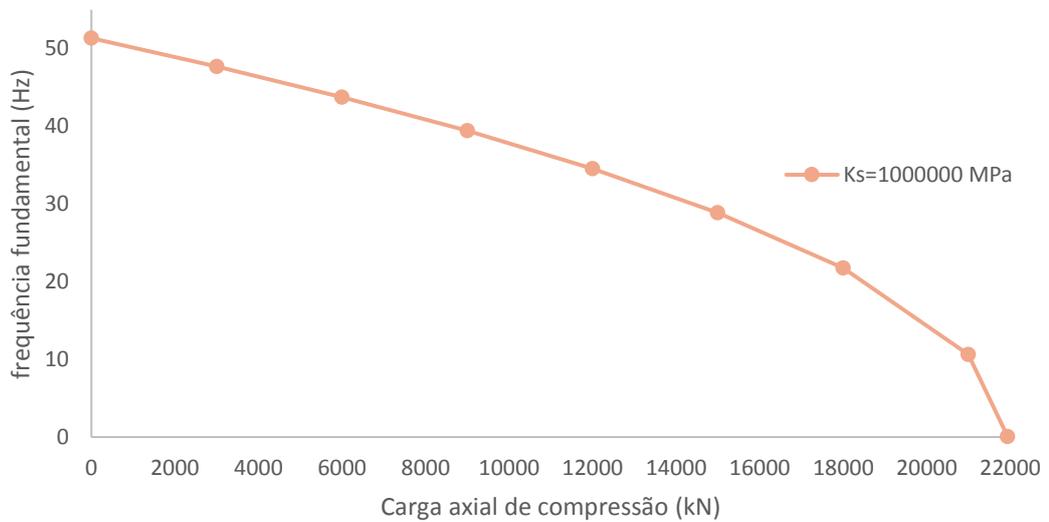
Nos dois casos há uma boa convergência dos resultados a partir de 10 elementos, valendo ressaltar que a esbelteza dos pilares influencia muito na estabilidade da estrutura. Os resultados acima demonstram essa influência nos valores de frequência fundamental.

Figura 4.12 Carga crítica para caso de viga bi-apoiada ($K_s=100\text{MPa}$; 4 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.13 Carga crítica para caso de viga bi-apoiada ($K_s=1000000\text{MPa}$; 4m de vão)



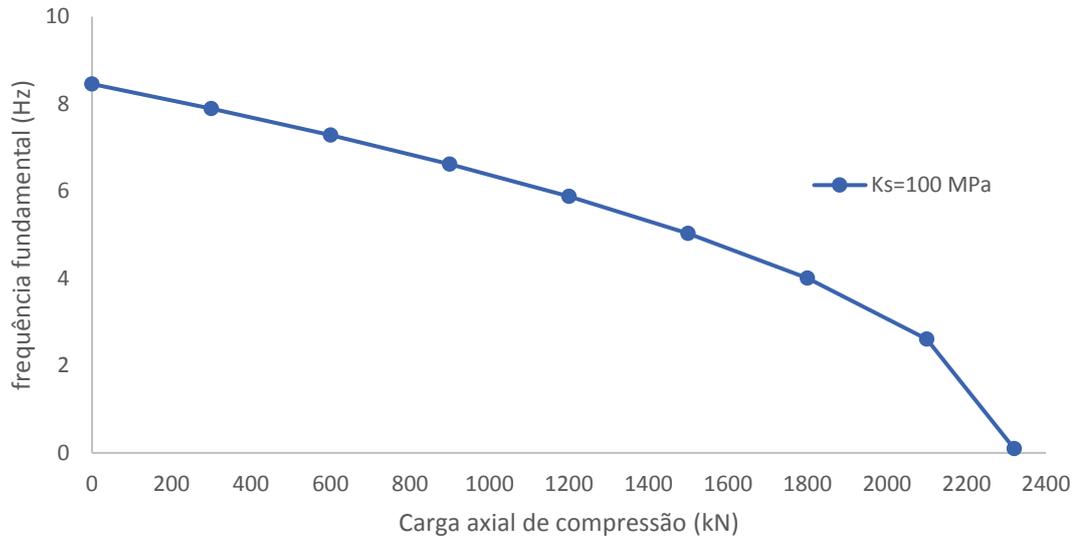
Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.10 Valores de cargas críticas para caso de viga bi-apoiada (4 m de vão)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga critica kN (4 m de vão)
100	4241.1
1000000	21937.44

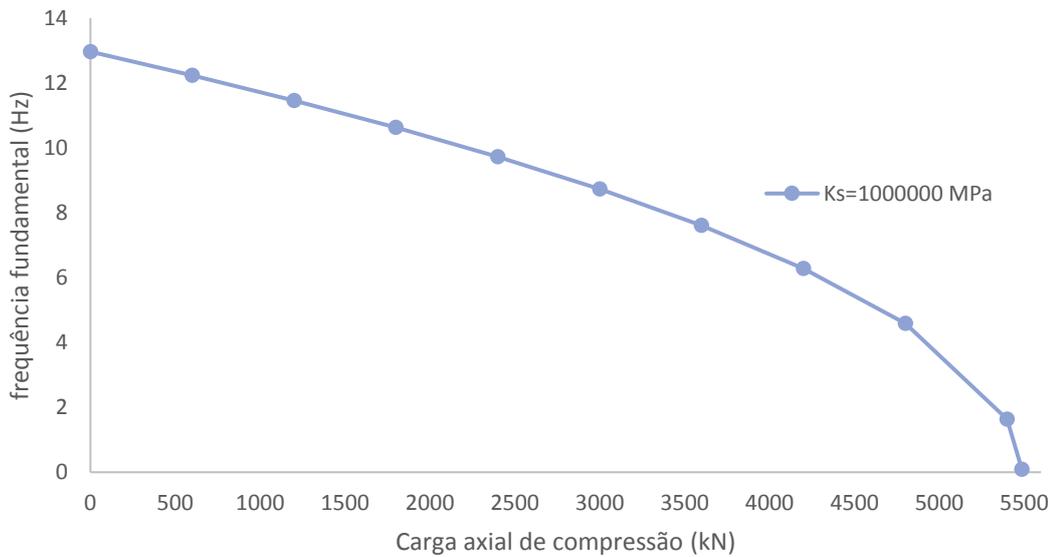
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.14 Carga crítica para caso de viga bi-apoiada ($K_s=100$ MPa; 8 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.15 Carga crítica para caso de viga bi-apoiada ($K_s=1000000$ MPa; 8 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.11 Valores de cargas críticas para caso de viga bi-apoiada (8 m de vão)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga critica kN (8 m de vão)
100	2320.47
1000000	5486.7

Fonte: Autor, 2017

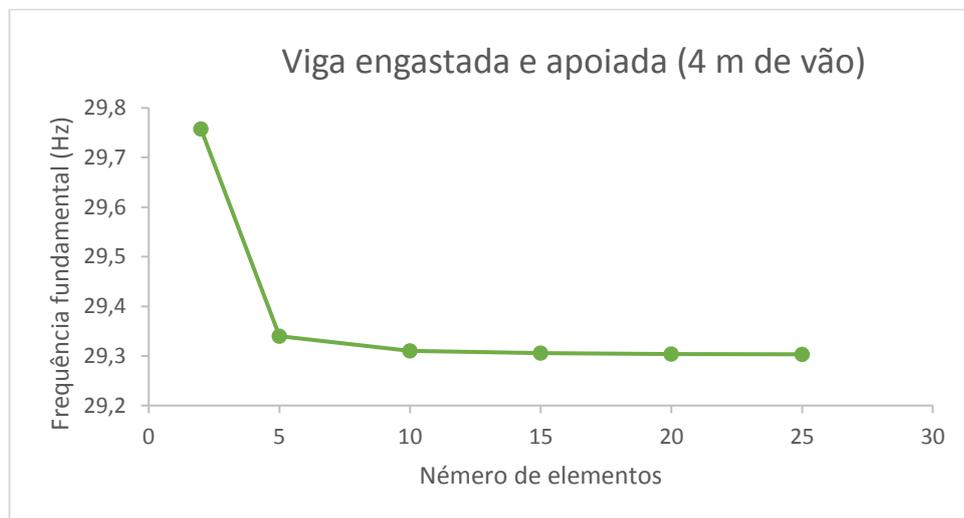
4.3.2 Caso de viga de múltiplas camadas engastada e apoiada

Figura 4.16 Viga de múltiplas camadas engastada e apoiada (Seção longitudinal e transversal)



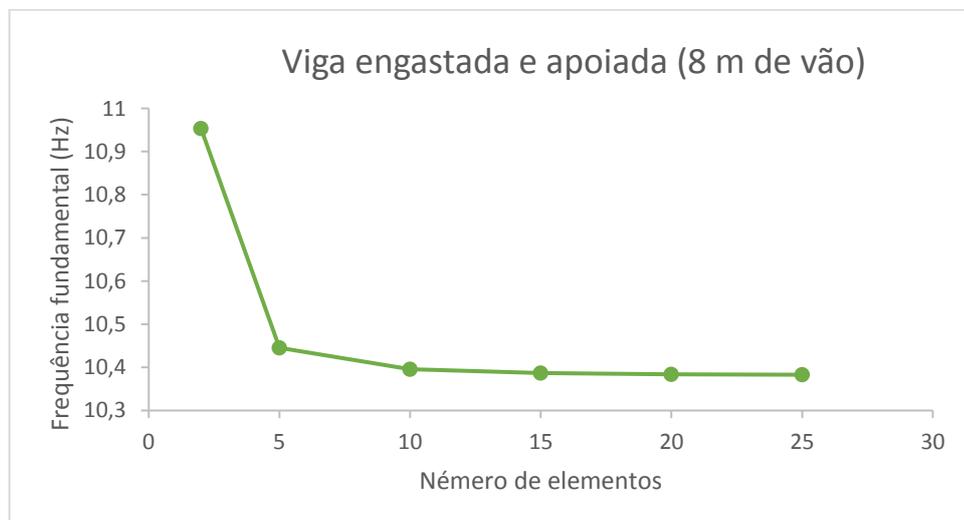
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.17 Refinamento de malha para caso de viga engastada e apoiada (4 m de vão)



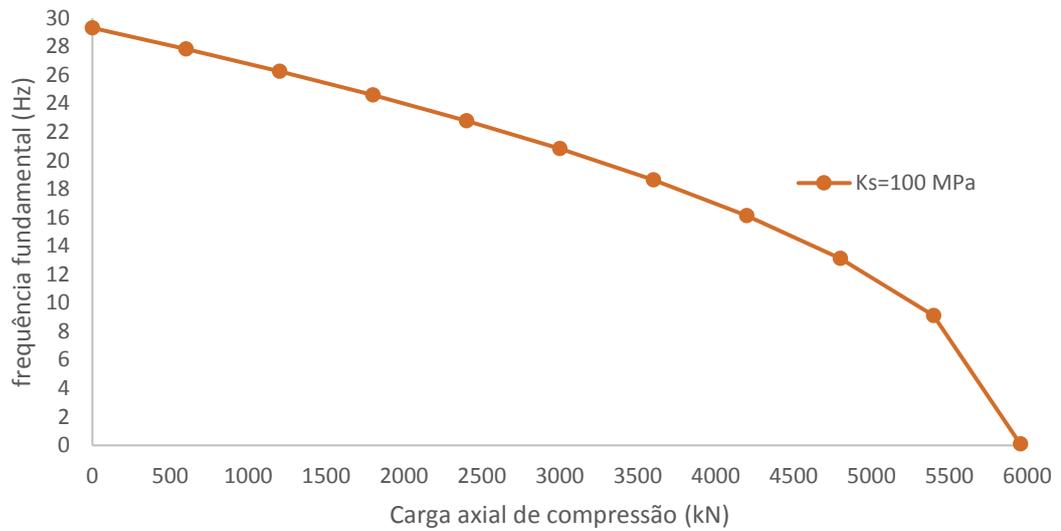
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.18 Refinamento de malha para caso de viga engastada e apoiada (8 m de vão)



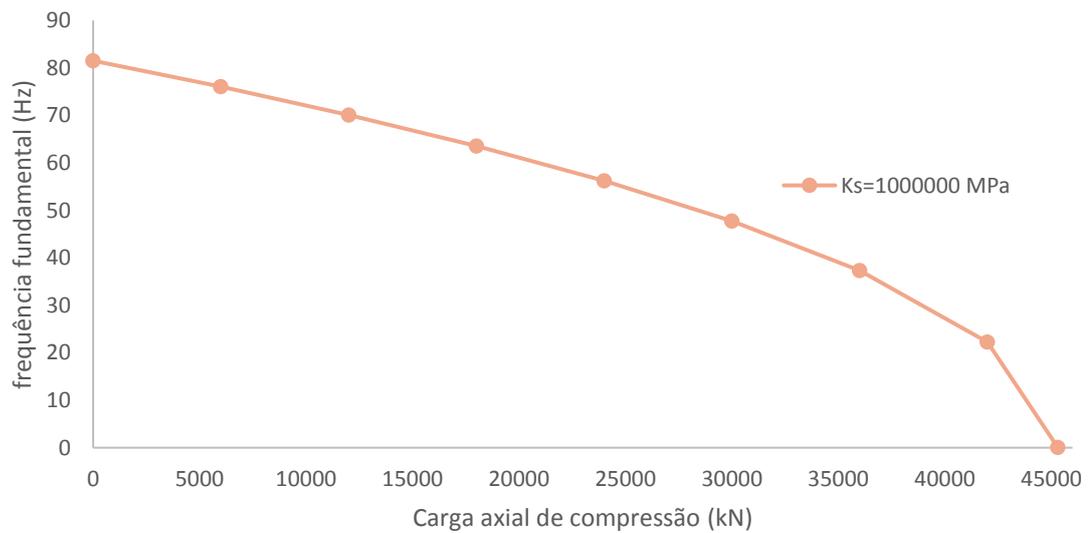
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.19 Carga crítica para caso de viga engastada e apoiada ($K_s=100\text{MPa}$; 4 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.20 Carga crítica para caso de viga engastada e apoiada ($K_s=1000000\text{MPa}$; 4 m de vão)



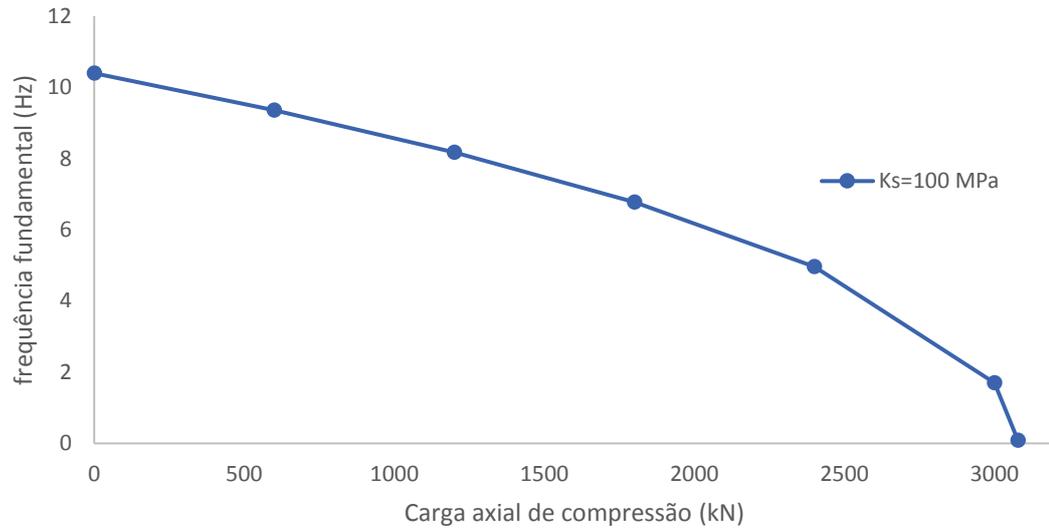
Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.12 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e apoiada (4 m de vão)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga critica kN (4 m de vão)
100	5956.11
1000000	45306.45

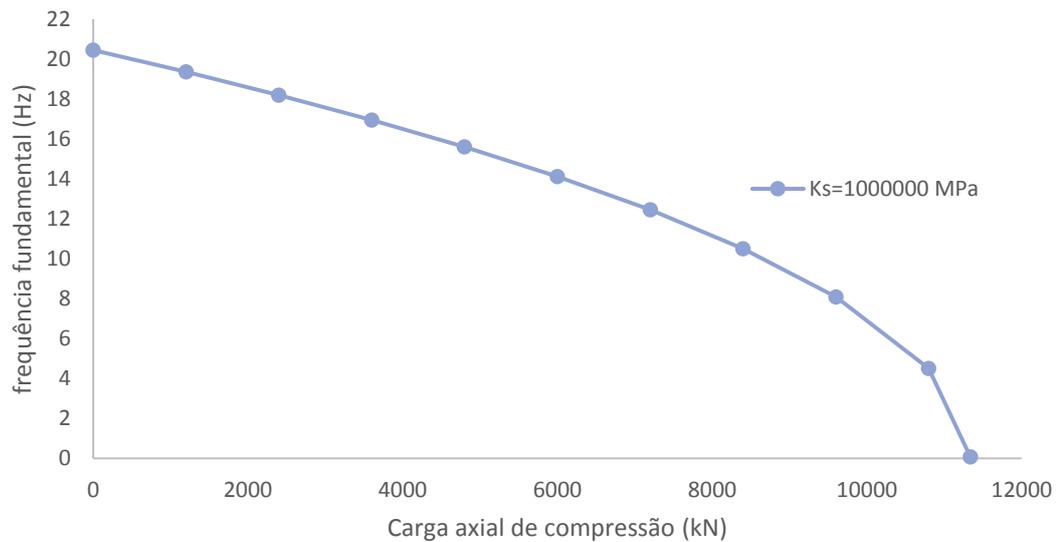
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.21 Carga crítica para caso de viga engastada e apoiada ($K_s=100$ MPa; 8 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.22 Carga crítica para caso de viga engastada e apoiada ($K_s=1000000$ MPa; 8 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.13 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e apoiada (8 m de vão)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga critica kN (8 m de vão)
100	3078.3
1000000	11338.5

Fonte: Autor, 2017

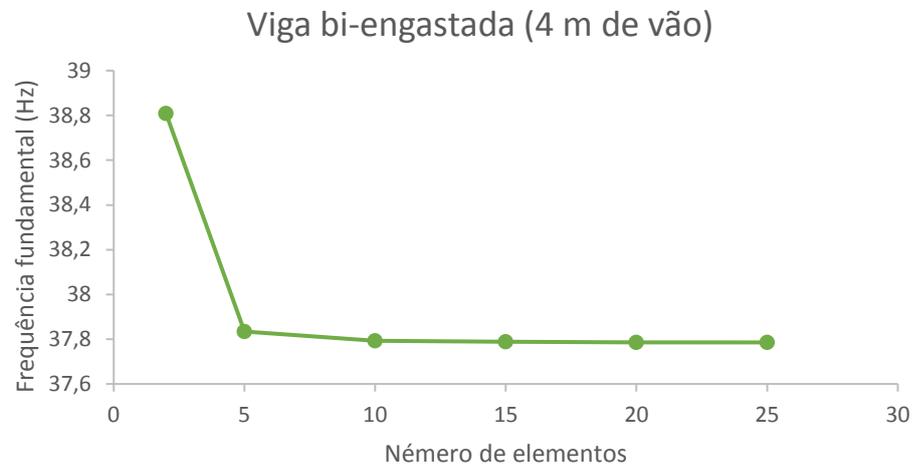
4.3.3 Caso de viga de múltiplas camadas bi-engastada

Figura 4.23 Viga de múltiplas camadas bi-engastada (Seção longitudinal e transversal)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.24 Refinamento de malha para caso de viga bi-engastada (4 m de vão)



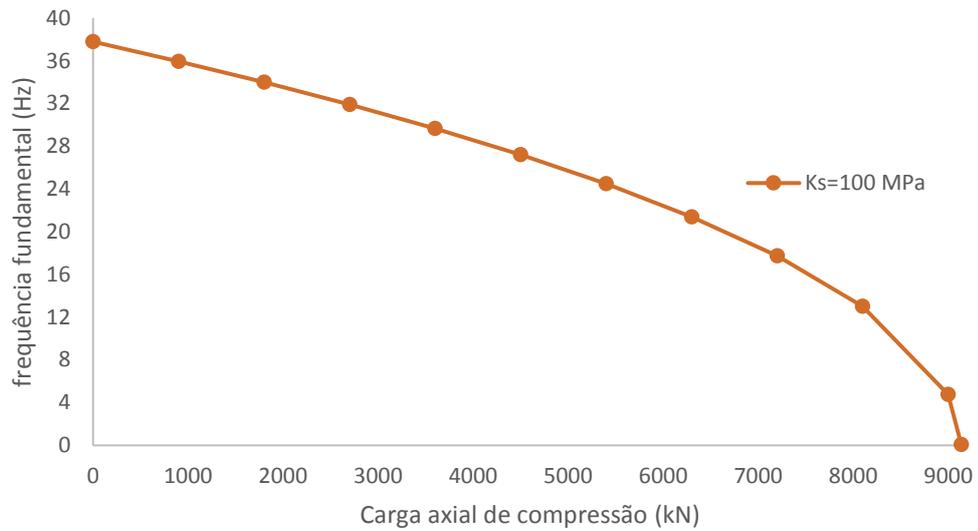
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.25 Refinamento de malha para caso de viga bi-engastada (8 m de vão)



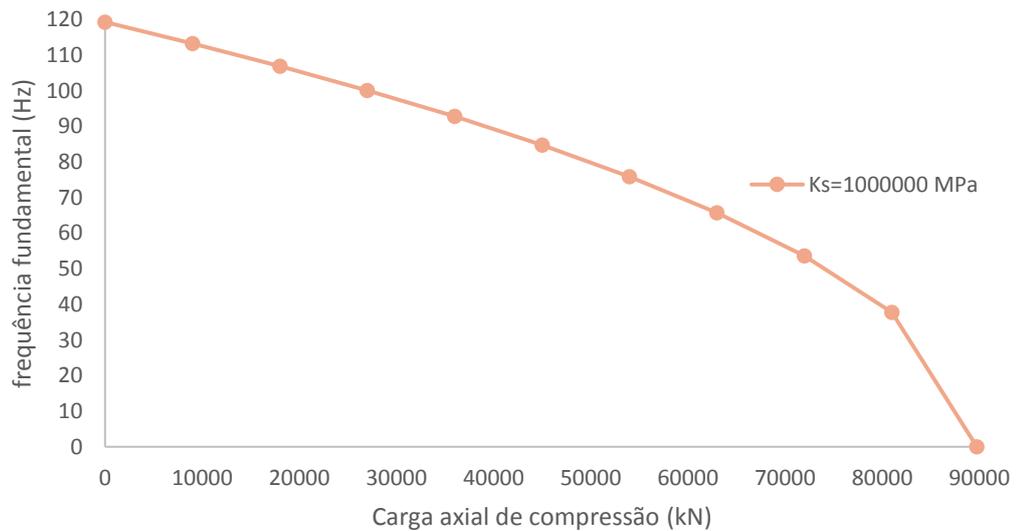
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.26 Carga crítica para caso de viga bi-engastada ($K_s=100\text{MPa}$; 4 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.27 Carga crítica para caso de viga bi-engastada ($K_s=1000000\text{MPa}$; 4 m de vão)



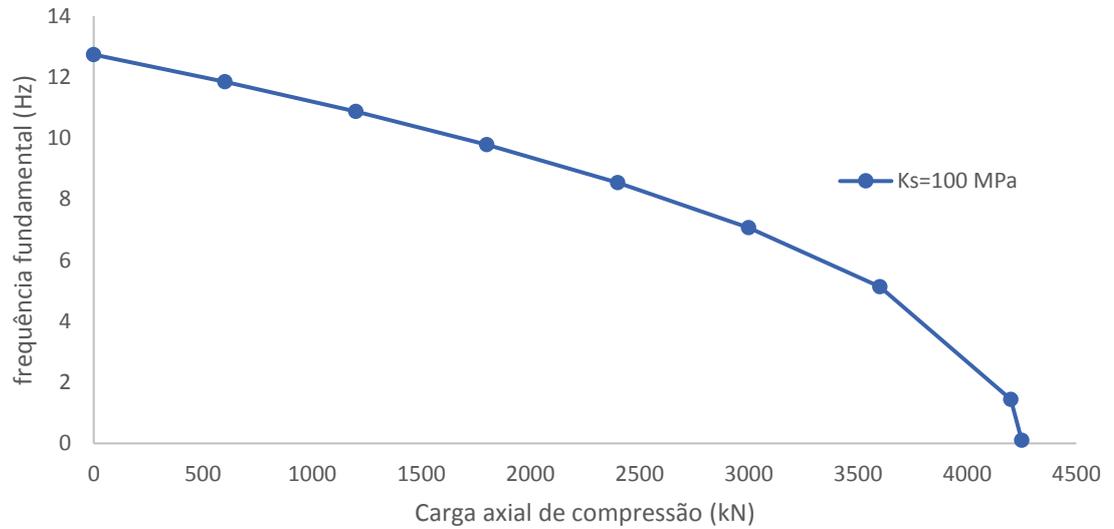
Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.14 Valores de cargas críticas para caso de viga bi-engastada (4 m de vão)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga critica kN (4 m de vão)
100	9138.27
1000000	89758.65

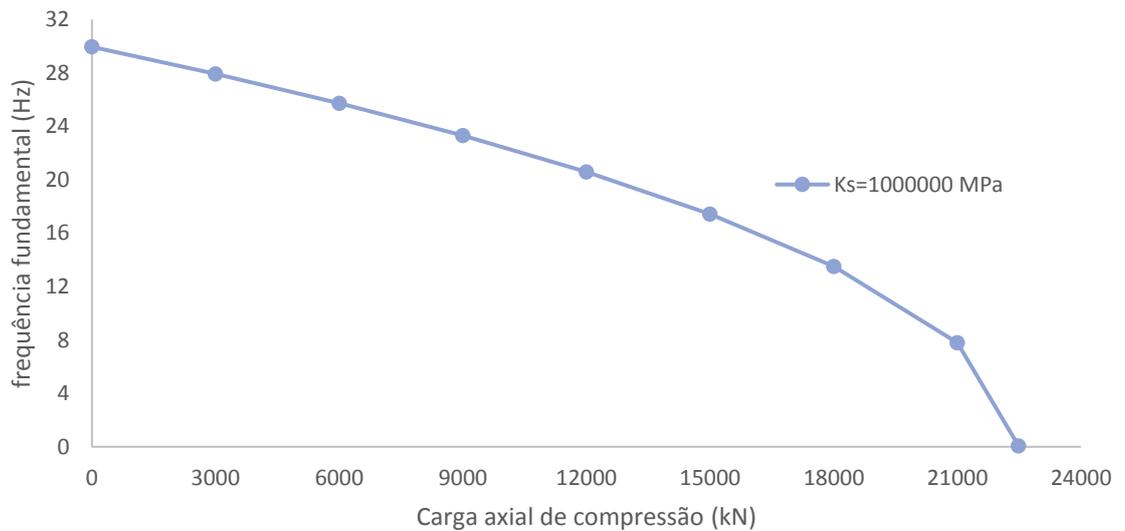
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.28 Carga crítica para caso de viga bi-engastada ($K_s=100$ MPa; 8 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.29 Carga crítica para caso de viga bi-engastada ($K_s=1000000$ MPa; 8 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

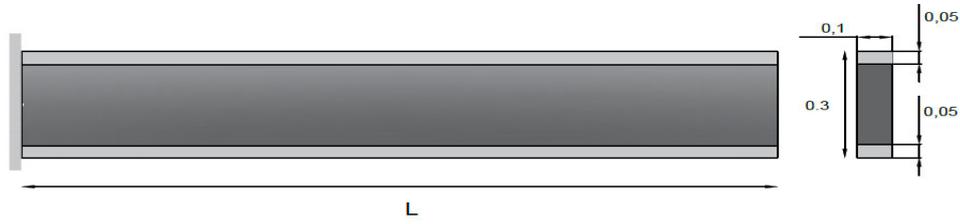
Tabela 4.15 Valores de cargas críticas para caso de viga bi-engastada (8 m de vão)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga critica kN (8 m de vão)
100	4250.1
10000000	22482.3

Fonte: Autor, 2017

4.3.4 Caso de viga de múltiplas camadas engastada e livre

Figura 4.30 Viga de múltiplas camadas engastada e livre (Seção longitudinal e transversal)



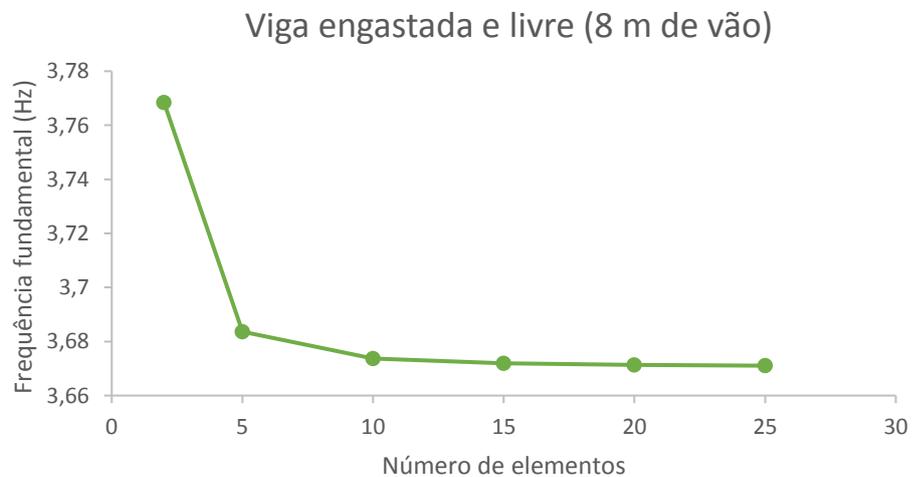
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.31 Refinamento de malha para caso de viga engastada e livre (4 m de vão)



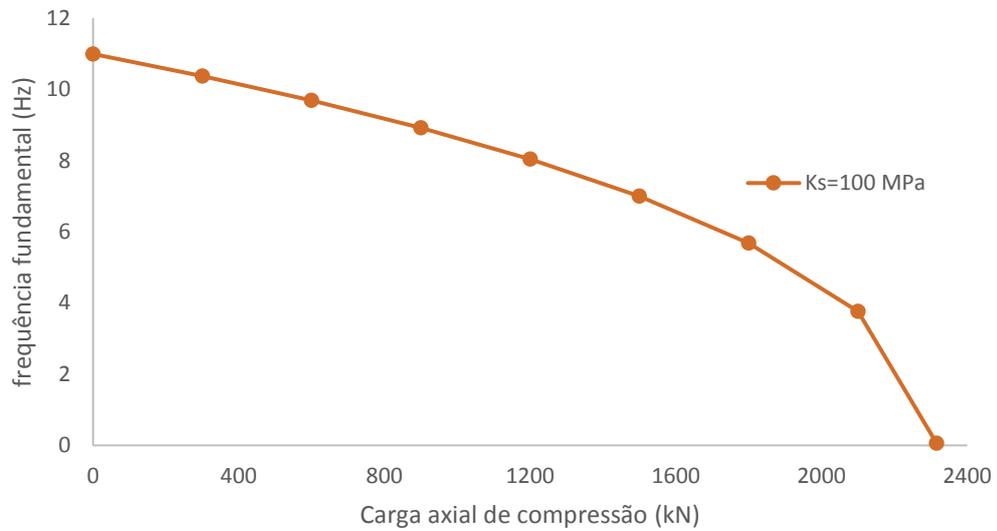
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.32 Refinamento de malha para caso de viga engastada e apoiada (8 m de vão)



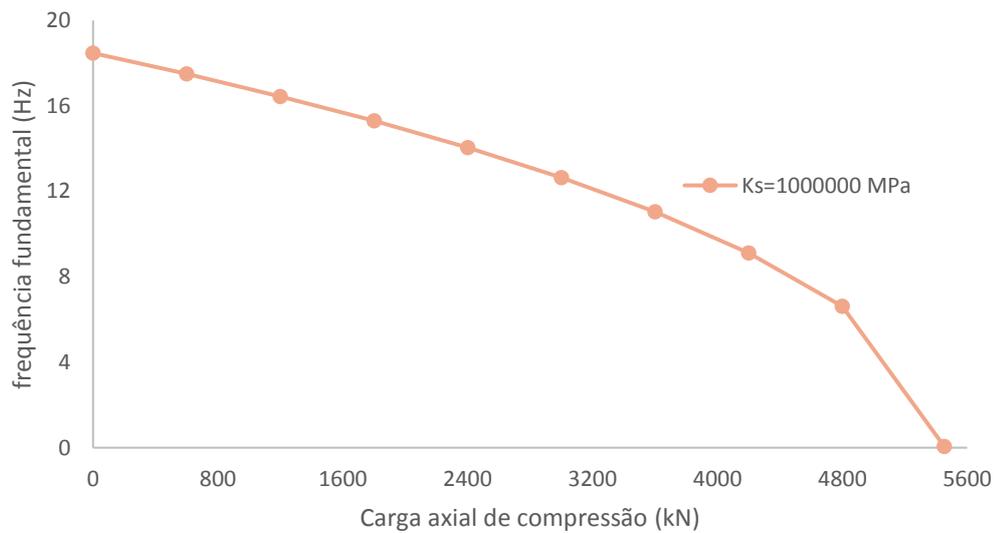
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.33 Carga crítica para caso de viga engastada e livre ($K_s=100\text{MPa}$; 4 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.34 Carga crítica para caso de viga engastada e livre ($K_s=1000000\text{MPa}$; 4 m de vão)



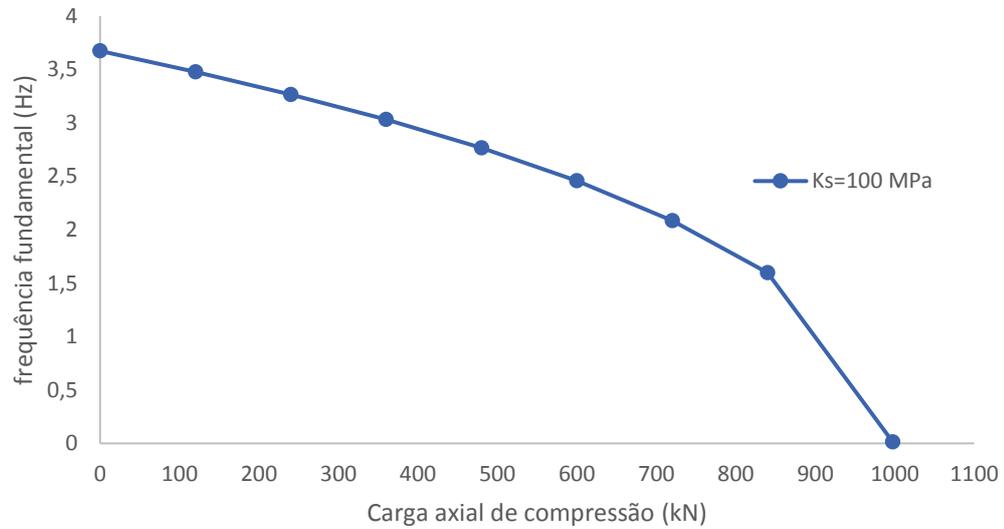
Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.16 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e livre (4 m de vão)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga critica kN (4 m de vão)
100	2316.15
1000000	5453.16

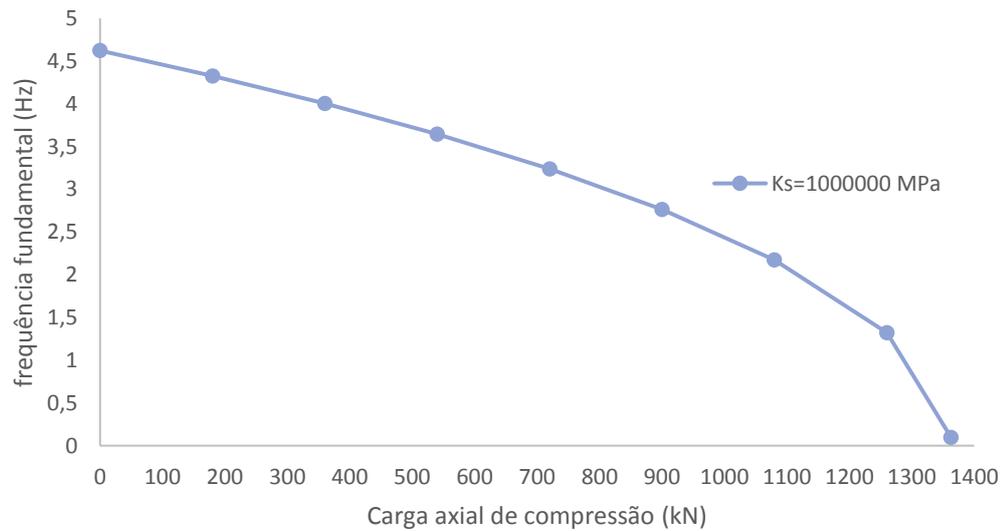
Fonte: Autor, 2017

Figura 4.35 Carga crítica para caso de viga engastada e livre ($K_s=100\text{MPa}$; 8 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.36 Carga crítica para caso de viga engastada e livre ($K_s=1000000\text{MPa}$; 8 m de vão)



Fonte: Autor, 2017

Tabela 4.17 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e livre (8 m de vão)

Rigidez das conexões (MPa)	Carga critica kN (8 m de vão)
100	997.5
1000000	1362.9

Fonte: Autor, 2017

4.4 Comparativo entre a solução numérica com os valores da carga crítica de Euler

A carga crítica de Euler é determinada pela resolução da equação diferencial ordinária da deflexão da flecha de uma barra esbelta bi-rotulada. Os valores são substituídos por equações simplificadas, que têm constantes que dependem das condições de contorno da barra.

As cargas críticas podem ser simplificadas para quatro casos possíveis: Engastada e livre (P_{el}), bi-apoiada (P_{ba}), engastada e apoiada (P_{ea}) e bi-engastada (P_{be}). As relações possíveis são expressas e comparadas com as soluções numéricas da seção anterior para caso de rigidez de conexão de valor alto ou infinito (1000000 MPa).

Tabela 4.18 Relação entre os valores das críticas de Euler com a solução numérica

Razão	Carga crítica de Euler	Solução numérica (Vão de 4 m)	Solução numérica (Vão de 8 m)
P_{ba} / P_{el}	4.000	4.023	4.026
P_{ba} / P_{ea}	0.489	0.484	0.484
P_{ba} / P_{be}	0.250	0.244	0.244

Fonte: Autor, 2017

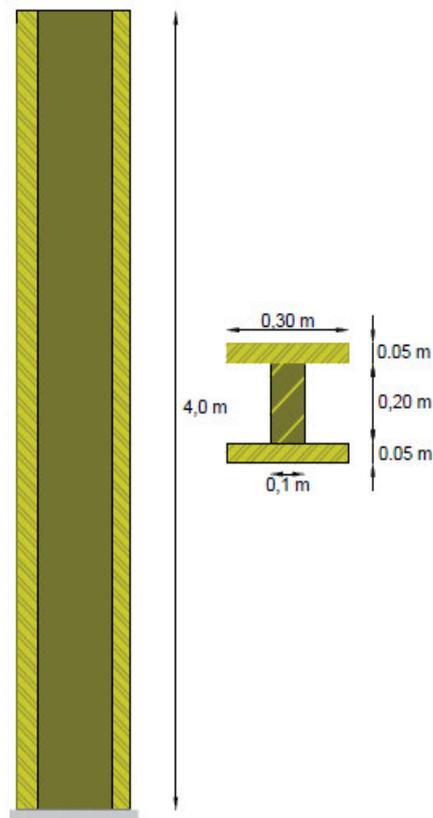
Os resultados acima demonstram que a solução numérica se aproxima dos resultados de cargas críticas obtidos pela da resistência dos materiais. Vale ressaltar também que uma malha a partir de 10 elementos finitos convergiu os valores de frequência fundamental para todos os casos explanados na seção anterior. Tal fato demonstra que há fortes indícios de que solução numérica se aproxima da solução exata.

Vale ressaltar que os exemplos utilizados no presente trabalho consideram a rigidez axial da estrutura muito maior que a rigidez à flexão e que, pelas condições de contorno estabelecidas não há vibração nos conectores, isso garante que o primeiro modo de vibração será necessariamente o transversal. A convergência dos resultados numéricos comparados com a resistência dos materiais também reforça a tese de que a frequência fundamental encontrada se refere ao modo de vibração transversal.

4.5 Exemplo de pilar de múltiplas camadas engastado e livre

É comum a associação de camadas ou feixes de estruturas para formar um único elemento estrutural, seja ele viga ou pilar. Geralmente esses elementos são montados sobrepondo uma camada a outra por meio de parafusos, pregos, ranhuras ou cola, que são responsáveis por absorver o esforço cisalhante que atua entre os entes da estrutura. Uma vez que enrijecer esses conectores é economicamente inviável, faz-se necessário o uso de conectores de rigidez flexível, que acabam promovendo um deslizamento entre as camadas. Segue o modelo pilar que será analisado.

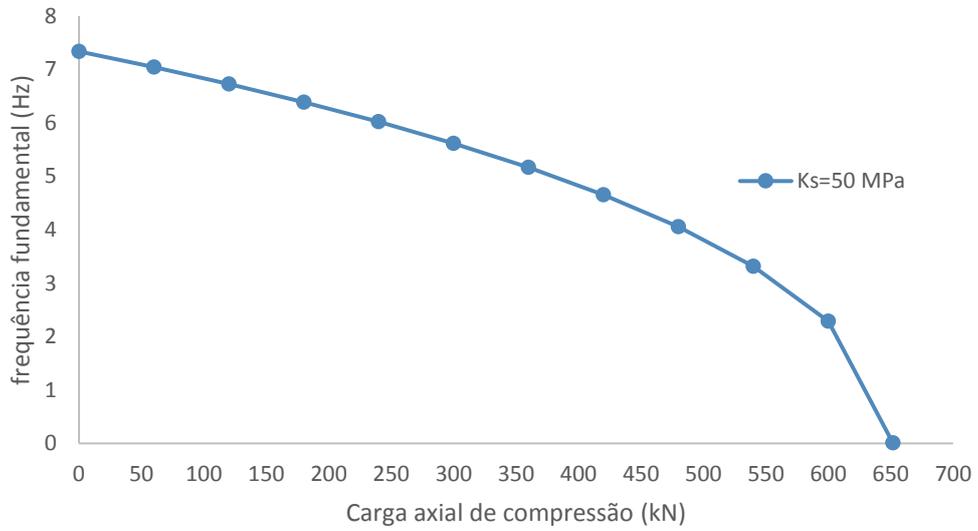
Figura 4.37 Pilar de múltiplas camadas (Seção longitudinal e transversal)



Fonte: Autor, 2017

Seguem as propriedades físicas do pilar: Módulo de elasticidade da mesa = 12 GPa, Módulo de elasticidade da alma = 8 GPa, Inércia da mesa = $3,12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, Inércia da alma = $6,67 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, rigidez das conexões de 50 MPa e massas específicas da mesa e da alma, respectivamente, 2300 kg/m^3 e 700 kg/m^3 .

Figura 4.38 Carga crítica para caso de pilar de múltiplas camadas engastado e livre ($K_s=50$ MPa)



Fonte: Autor, 2017

Figura 4.39 Valores de cargas críticas para caso de viga engastada e livre

Rigidez da conexão (MPa)	Carga Crítica (kN)
50	651.78

Fonte: Autor, 2017

5 CONCLUSÕES

Diante do que foi exposto, houve uma aproximação das frequências naturais via elementos finitos com a solução analítica propostas por Xu e Wu (2007). Os resultados foram satisfatórios na medida que para todos os casos supracitados os erros giraram em torno de 1,00 % da solução analítica. O refinamento de malha com 10 elementos implica num custo computacional baixo, uma vez que os processamentos eram realizados em poucos segundos na planilha.

As cargas críticas obtidas também se aproximaram, para baixos refinamentos de malha, das soluções analíticas. Tal fato permitiu assegurar que o método dos elementos finitos poderia ser expandido na análise de outros casos, onde as características físicas, geométricas e de condições de contorno das estruturas poderiam variar.

Aliado a isso, os resultados esperados pela resistência dos materiais convergiram com a solução numérica para o caso em que as camadas eram justapostas por conectores de rigidez elevada.

6 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

A principal sugestão para essa linha de pesquisa é a de considerar, na formulação do problema, o efeito da não linearidade física. Uma vez que a solução numérica convergiu com a solução analítica, há embasamento suficiente, do ponto de vista teórico, para avançar na análise não linear, comparando os resultados dos dois métodos.

Outra possibilidade diz respeito ao uso da teoria de Timoshenko como fundamento para análise de vigas e pilares de múltiplas camadas, podendo ser contrastado os resultado desta teoria com a teoria de vigas clássicas.

Podem ser fomentadas pesquisas que analisem os outros modos de vibração para elementos de múltiplas camadas. Outra sugestão é avançar nos estudos acerca do efeito dinâmico de cargas harmônicas, de impacto ou sob o efeito de sismos aplicados a estruturas de múltiplas camadas.

REFERÊNCIAS

- BERCZYNSKI, S., & WRÓBLEWSKI, T. (2005). **Vibration of Steel-Concrete Composite Beams Using the Timoshenko Beam Model**. Journal of Vibration and Control, 829-48.
- BISCONTIN, G., MORASSI, A., & WENDEL, P. (2000). **Vibrations of Steel-Concrete Composite Beams**. Journal of Vibration and Control, 671-714.
- CALDAS, R. B. (2004). **Análise Numérica de Pilares Mistos Aço Concreto**. Ouro Preto, MG: Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP.
- CLOUGH, R., PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 2. Ed. Berkeley. Computers and Structures Inc, 2003.
- DALL'ASTA, A., & ZONA, A. (2002). **Non-linear Analysis of Composite Beams by a Displacement Approach**. Computers and Structures, 2217-28.
- DALL'ASTA, A., & ZONA, A. (2004a). **Slip Locking in Finite Elements for Composite Beams with Deformable Shear Connection**. Finite Elements in Analysis and Design, 1907-30.
- FABBROCINO, G., MANFREDI, G., & GOSENZA, E. (1999). **Non-Linear Analysis of Composite Beams under Positive Bending**. Computers and Structures, 77-89.
- FAELLA, C., MARTINELLI, E., & NIGRO, E. (2002). **Steel and Concrete Composite Beam with Flexible Shear Connection: "Exact" Analytical Expression of the Stiffness Matrix and Applications**. Computer & Structures, 1001-09.
- FISH, J., BELYTSCHKO, T. **Um Primeiro Curso em Elementos Fintos**. 2. Ed. Rio de Janeiro, LTC, 2009.
- GIRHAMMAR, U. A., & GOPU, V. K. (1993). **Composite Beam-Columns with Interlayer Slip Exact Analysis**. Journal Structural Engineering, 1265-82.
- GIRHAMMAR, U. A., & PAN, D. H. (1993). **Dynamic Analysis of Composite Members with Interlayer Slip**. International Journal of Solids and Structures, 797-823.
- GIRHAMMAR, U. A., PAN, D. H., & GUSTAFSSON, A. (2009). **Exact Dynamic Analysis of Composite Beams with Partial Interaction**. International Journal of Mechanical Sciences, 565-82.

GOODMAN, J. (1967). **Layered Wood Systems with Interlayer Slip**. Berkeley, CA: Tese PhD, Universidade da Califórnia.

GOODMAN, J. R., & POPOV, E. P. (1968). **Layered Beam Systems with Interlayer Slip**. **American Society of Civil Engineers**. Structural Division Journal, 2535-47.

LIMA, S. S., & SANTOS, S. H. **Análise Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2008.

MACHADO., M., G., & SOUSA, J. J (2012). **Análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial**. Ouro Preto, MG: Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP.

OVEN, V. A., BURGESS, I. W., PLANK, R. J., & WALI, A. A. (1997). **An analytical Model for the Analysis of Composite Beam with Partial Interaction**. *Computer & Structures*, 493-504.

SILVA, A. R., & SOUSA, J. J. (2008). **A Family of Interface Elements for the Analysis of Composite Beams with Interlayer Slip**. *Finite Elements in Analysis and Design*, 305-14

SORIANO., H.,L. *Introdução à Dinâmica das Estruturas*. 1. Ed. Rio de Janeiro. Elsevier, 2014.

SOUSA, J. J., & CALDAS, R. B. (2005). **Numerical Analysis of Composite Steel Concrete Columns of Arbitrary Cross-section**. *J. Struct. Eng.*, 1721-30.

SOUSA, J. J., & SILVA, A. R. (2007). **Nonlinear Analysis of Partially Connected Composite Beams Using Interface Elements**. *Finite Elements in Analysis and Design*, 954-964.

XU, R., & WU, Y. F. (2007). **Two-dimensional Analytical Solutions of Simply Supported Composite Beams with Interlayer Slips**. *Int. J. Solids Struct*, 165-75.

APÊNDICE - CÓDIGO FONTE

A.1 Procedure da implementação da matriz derivada das funções de forma

```

FF := proc(N, VS, E, In, L, h)
  local gl, Le, nlh, nlin, ncol, Anull, Del, i, j, b, a, B, C, K, M, P,
  Anull1, N1, N2, N3, N4, xi;
  gl := (VS + 1) * (N + 2);
  Le := L / VS;
  nlh := numelems(h);
  ncol := 2 * N + 4;
  nlin := N + 1 + nlh;
  Del := [seq(b, b = N + 2 + nlh .. 2 * N + 4)];
  Anull := Matrix(nlin, ncol);
  K := 1 - x / Le;
  M := x / Le;
  M := [seq(diff(M, x), i = 1 .. N)];
  K := [seq(diff(K, x), i = 1 .. N)];
  for i to N do
    for j to N do
      if i = j then Anull[i, j] := K[i] else 0 end if
    end do
  end do;
  Anull;
  for i to N do
    for j to N do
      if i = j then Anull[i, j + N + 2] := M[i] else 0 end if
    end do
  end do;
  B := Anull;
  C := LinearAlgebra:-DeleteRow(B, Del);
  Le := L / VS;
  xi := 2 * x / Le - 1;
  N1 := 0.3 * (1 - xi)^2 * (2 + xi);
  N2 := 0.1 * Le * (1 - xi)^2 * (1 + xi);
  N3 := 0.3 * (1 + xi)^2 * (2 - xi);
  N4 := 0.1 * Le * (1 + xi)^2 * (xi - 1);
  nlh := numelems(h);
  Del := [seq(b, b = N + 2 + nlh .. 2 * N + 4)];
  a := N + 2;
  P := (i, j) → if i = N + 1 and j = N + 1 then
    diff(N1, x, x)
  elif i = N + 1 and j = N + 2 then
    diff(N2, x, x)
  elif i = N + 1 and j = N + 1 + a then
    diff(N3, x, x)
  elif i = N + 1 and j = N + 2 + a then
    diff(N4, x, x)
  else
    0
  end if;

```

```

P := Matrix(2 * N + 4, P);
P := LinearAlgebra:-DeleteRow(P, Del);
gl := (VS + 1) * (N + 2);
Le := L / VS;
nlh := numelems(h);
ncol := 2 * N + 4;
nlin := N + 1 + nlh;
Del := [seq(b, b = N + 2 + nlh .. 2 * N + 4)];
Anull1 := Matrix(nlin, ncol);
xi := 2 * x / Le - 1;
for a to nlh do
    Anull1[N + 1 + a, N + 1] := h[a] * (diff(N1, x));
    Anull1[N + 1 + a, N + 2] := h[a] * (diff(N2, x));
    Anull1[N + 1 + a, 2 * N + 3] := h[a] * (diff(N3, x));
    Anull1[N + 1 + a, 2 * N + 4] := h[a] * (diff(N4, x))
end do;
Anull := Matrix(nlin, ncol);
K := 1 - x / Le;
M := x / Le;
for a from 0 to nlh - 1 do
    Anull[N + 2 + a, 1 + a] := -K;
    Anull[N + 2 + a, 2 + a] := K;
    Anull[N + 2 + a, N + 3 + a] := -M;
    Anull[N + 2 + a, N + 4 + a] := M
end do;
Anull;
Anull1 + P + C + Anull
end proc

```

A.2 Procedure da implementação da matriz constitutiva

```

Cons := proc(N, VS, E, A, In, L, h, k)
    local gl, Le, nlh, nlin, ncol, Anull, Anulld, Anulle, Del, i, j, b,
    a, B, C, K, M, N1, N2, N3, N4, xi, H;
    gl := (VS + 1) * (N + 2);
    Le := L / VS;
    nlh := numelems(k);
    ncol := N + 1 + nlh;
    nlin := N + 1 + nlh;
    Anull := Matrix(nlin, ncol);
    for a to N do Anull[a, a] := E[a] * A[a] end do;
    K := add(i, i = [seq(E[a] * In[a], a = 1 .. numelems(E))]);
    Anull[N + 1, N + 1] := K;
    for a to nlh do Anull[N + 1 + a, N + 1 + a] := k[a] end do;
    Anull
end proc

```

A.3 Procedure da implementação da matriz rigidez do elemento

```

Kel := proc(N, VS, E, A, In, L, h, k)
  local gl, Le, nlh, nlin, ncol, Anull, Anulld, Anulle, Del, i, j, b,
  a, B, C, K, M, N1, N2, N3, N4, xi, H, A1, A2, A3, A4, BT, B1, B2, B3,
  G1;
  A1 := MFF(N, VS, E, In, L, h);
  Le := L / VS;
  C := Cons(N, VS, E, A, In, L, h, k);
  B2 := LinearAlgebra:-Transpose(A1);
  B3 := LinearAlgebra:-Multiply(B2, C);
  G1 := LinearAlgebra:-Multiply(B3, A1);
  map(c → int(c, x), G1);
  map(c → int(c, x = 0 .. Le), G1)
end proc

```

A.4 Procedure da implementação do vetor dos carregamentos externos

```

Qel := proc(N, VS, L, q, qa)
  local Le, ncol, Vnull, xi, i;
  Le := L / VS;
  xi := 2 * x / Le - 1;
  Vnull := Vector(2 * N + 4);
  Vnull[N + 1] := q * 0.3 * (1 - xi)^2 * (2 + xi);
  Vnull[N + 2] := q * 0.1 * Le * (1 - xi)^2 * (1 + xi);
  Vnull[2 * N + 3] := q * 0.3 * (1 + xi)^2 * (2 - xi);
  Vnull[2 * N + 4] := q * 0.1 * Le * (1 + xi)^2 * (xi - 1);
  for i to N do Vnull[i] := qa[i] * (1 - x / Le) end do;
  for i to N do Vnull[i + N + 2] := qa[i] * x / Le end do;
  map(c → int(c, x), Vnull);
  map(c → int(c, x = 0 .. Le), Vnull)
end proc

```

A.5 Procedure da implementação da re-alocação da matriz de rigidez do elemento

```

KelC := proc(N, VS, E, A, In, L, h, k)
  local gl, Le, nlh, ncol, nlin, Anull, K, c1, c2, i, j;
  gl := (VS + 1) * (N + 2);
  Le := L / VS;
  nlh := numelems(h);
  ncol := 2 * N + 4;
  nlin := 2 * N + 4;
  Anull := Matrix(nlin, ncol);
  Anull := Matrix(Anull, shape = symmetric);
  K := Kel(N, VS, E, A, In, L, h, k);

```

```

c1 := 1; for i by 2 to 2*N do
  c2 := 1;
  for j by 2 to 2*N do
    Anull[i, j] := K[c1, c2]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := 1; for i by 2 to 2*N do
  c2 := 1;
  for j from 2 by 2 to 2*N do
    Anull[i, j] := K[c1, c2 + N + 2]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := 1; for i from 2 by 2 to 2*N do
  c2 := 1;
  for j by 2 to 2*N do
    Anull[i, j] := K[c1 + N + 2, c2]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := 1; for i from 2 by 2 to 2*N do
  c2 := 1;
  for j from 2 by 2 to 2*N do
    Anull[i, j] := K[c1 + N + 2, c2 + N + 2]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := N + 1; for i to 2 do
  c2 := 1;
  for j by 2 to 2*N do
    Anull[i + 2*N, j] := K[c1, c2]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := N + 1; for i to 2 do
  c2 := N + 3;
  for j from 2 by 2 to 2*N do
    Anull[i + 2*N, j] := K[c1, c2]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := 2*N + 3; for i to 2 do
  c2 := 1;
  for j by 2 to 2*N do
    Anull[i + 2*N + 2, j] := K[c1, c2]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := 2*N + 3;

```

```

for i to 2 do
  c2 := N + 3;
  for j from 2 by 2 to 2 * N do
    Anull[i + 2 * N + 2, j] := K[c1, c2]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
for i to 2 do
  for j to 2 do
    Anull[i + 2 * N, 2 * N + j] := K[N + i, N + j]
  end do
end do;
for i to 2 do
  for j to 2 do
    Anull[i + 2 * N + 2, 2 * N + j] := K[i + 2 * N + 2, N + j]
  end do
end do;
for i to 2 do
  for j to 2 do
    Anull[i + 2 * N + 2, 2 * N + 2 + j] := K[i + 2 * N + 2, 2 * N + 2 + j]
  end do
end do;
Anull
end proc

```

A.6 Procedure da implementação da matriz de rigidez geométrica

```

MRG := proc(N, VS, L, q)
  local xi, Le, K, N1, N2, N3, N4, B, C, P, F, G, i, j, a, Del, nlh;
  Le := L / VS;
  xi := 2 * x / Le - 1;
  N1 := 0.3 * (1 - xi)^2 * (2 + xi);
  N2 := 0.1 * Le * (1 - xi)^2 * (1 + xi);
  N3 := 0.3 * (1 + xi)^2 * (2 - xi);
  N4 := 0.1 * Le * (1 + xi)^2 * (xi - 1);
  Del := [seq(b, b = N + 2 .. 2 * N + 4)];
  a := N + 2;
  P := (i, j) → if i = N + 1 and j = 2 * N + 1 then
    diff(N1, x)
  elif i = N + 1 and j = 2 * N + 2 then
    diff(N2, x)
  elif i = N + 1 and j = N + 1 + a then
    diff(N3, x)
  elif i = N + 1 and j = N + 2 + a then
    diff(N4, x)
  else
    0
  end if;

```

```

P := Matrix(2 * N + 4, P);
P := LinearAlgebra:-DeleteRow(P, Del);
K := add(i, i = [seq(q[a], a = 1 .. N)]);
G := K * (LinearAlgebra:-Transpose(P) . P);
map(c → int(c, x), G);
map(c → int(c, x = 0 .. Le), G)
end proc

```

A.7 Procedure da implementação da matriz de rigidez tangente

```

MT := proc(N, VS, E, A, In, L, h, k, q)
    KelC(N, VS, E, A, In, L, h, k) + MRG(N, VS, L, q)
end proc

```

A.8 Procedure da implementação para re-alocar a matriz de rigidez tangente

```

KT := proc(N, VS, E, A, In, L, h, k)
    local gl, Le, nlh, ncol, nlin, Anull, K, c1, c2, i, j;
    gl := (VS + 1) * (N + 2);
    Le := L / VS;
    nlh := numelems(h);
    ncol := 2 * N + 4;
    nlin := 2 * N + 4;
    Anull := Matrix(nlin, ncol);
    Anull := Matrix(Anull, shape = symmetric);
    K := MT(N, VS, E, A, In, L, h, k, q);
    c1 := 1;
    for i by 2 to 2 * N do
        c2 := 1;
        for j by 2 to 2 * N do
            Anull[c1, c2] := K[i, j]; c2 := c2 + 1
        end do;
        c1 := c1 + 1
    end do;
    c1 := 1;
    for i by 2 to 2 * N do
        c2 := 1;
        for j from 2 by 2 to 2 * N do
            Anull[c1, c2 + N + 2] := K[i, j]; c2 := c2 + 1
        end do;
        c1 := c1 + 1
    end do;
    c1 := 1;

```

```

for i from 2 by 2 to 2*N do
  c2 := 1;
  for j from 2 by 2 to 2*N do
    Anull[c1 + N + 2, c2 + N + 2] := K[i, j]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := N + 1;
for i to 2 do
  c2 := 1;
  for j by 2 to 2*N do
    Anull[c1, c2] := K[i + 2*N, j]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := N + 1;
for i to 2 do
  c2 := N + 3;
  for j from 2 by 2 to 2*N do
    Anull[c1, c2] := K[i + 2*N, j]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := 2*N + 3;
for i to 2 do
  c2 := 1;
  for j by 2 to 2*N do
    Anull[c1, c2] := K[i + 2*N + 2, j]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
c1 := 2*N + 3;
for i to 2 do
  c2 := N + 3;
  for j from 2 by 2 to 2*N do
    Anull[c1, c2] := K[i + 2*N + 2, j]; c2 := c2 + 1
  end do;
  c1 := c1 + 1
end do;
for i to 2 do
  for j to 2 do
    Anull[N + i, N + j] := K[i + 2*N, 2*N + j]
  end do
end do;
for i to 2 do
  for j to 2 do
    Anull[i + 2*N + 2, N + j] := K[i + 2*N + 2, 2*N + j]
  end do
end do;
for i to 2 do
  for j to 2 do
    Anull[i + 2*N + 2, 2*N + 2 + j] := K[i + 2*N + 2, 2*N + 2 + j]
  end do
end do;
Anull
end proc

```

A.8 Procedure da implementação para a matriz de massa

```

MM := proc(N, VS, E, A, In, L, h, rô)
  local gl, Le, nlh, nlin, ncol, Anull, Del, i, j, b, a, B, C, D, K, F,
  P, Q, G, xi, N1, N2, N3, N4, F1;
  Le := L / VS;
  nlh := numelems(h);
  ncol := 2 * N + 4;
  nlin := N + 1;
  Del := [seq(b, b = N + 2 .. 2 * N + 4)];
  Anull := Matrix(nlin, ncol);
  K := 1 - x / Le;
  D := x / Le;
  D := [seq(D, i = 1 .. N)];
  K := [seq(K, i = 1 .. N)];
  for i to N do
    for j to N do
      if i = j then Anull[i, j] := K[i] * rô[i] * A[i] else 0 end if
    end do
  end do;
  Anull;
  for a to N - 1 do
    B := (i, j) → if i = a and j = N + 2 + a then D[a] * rô[a] * A[a] else 0
    end if
  end do;
  B := add(i, i = [seq(Matrix(2 * N + 4, B), a = 1 .. N)]);
  C := LinearAlgebra:-DeleteRow(B, Del);
  P := Anull + C;
  for i to N do
    for j to N do
      if i = j then Anull[i, j] := K[i] else 0 end if
    end do
  end do;
  Anull;
  for a to N - 1 do
    B := (i, j) → if i = a and j = N + 2 + a then D[a] else 0 end if
  end do;
  B := add(i, i = [seq(Matrix(2 * N + 4, B), a = 1 .. N)]);
  C := LinearAlgebra:-DeleteRow(B, Del);
  F := LinearAlgebra:-Transpose(Anull + C);
  F1 := F.P;
  map(c → int(c, x), F1);
  F1 := map(c → int(c, x = 0 .. Le), F1);
  Le := L / VS;
  xi := 2 * x / Le - 1;
  N1 := 0.3 * (1 - xi)^2 * (2 + xi);
  N2 := 0.1 * Le * (1 - xi)^2 * (1 + xi);
  N3 := 0.3 * (1 + xi)^2 * (2 - xi);
  N4 := 0.1 * Le * (1 + xi)^2 * (xi - 1);
  Del := [seq(b, b = N + 2 .. 2 * N + 4)];

```

```

a := N + 2;
P := (i, j) → if i = N + 1 and j = N + 1 then
  N1
  elif i = N + 1 and j = N + 2 then
  N2
  elif i = N + 1 and j = N + 1 + a then
  N3
  elif i = N + 1 and j = N + 2 + a then
  N4
  else
  0
  end if;
P := Matrix(2 * N + 4, P);
P := LinearAlgebra:-DeleteRow(P, Del);
K := add(i, i = [seq(rô[a] * A[a], a = 1 .. numelems(E))]);
G := (K * LinearAlgebra:-Transpose(P)).P;
map(c → int(c, x), G);
G := map(c → int(c, x = 0 .. Le), G);
Del := [seq(b, b = N + 2 .. 2 * N + 4)];
a := N + 2;
P := (i, j) → if i = N + 1 and j = N + 1 then
  diff(N1, x)
  elif i = N + 1 and j = N + 2 then
  diff(N2, x)
  elif i = N + 1 and j = N + 1 + a then
  diff(N3, x)
  elif i = N + 1 and j = N + 2 + a then
  diff(N4, x)
  else
  0
  end if;
P := Matrix(2 * N + 4, P);
P := LinearAlgebra:-DeleteRow(P, Del);
F := add(i, i = [seq(ro[a] * In[a], a = 1 .. numelems(E))]);
Q := (F * LinearAlgebra:-Transpose(P)).P;
map(c → int(c, x), Q);
Q := map(c → int(c, x = 0 .. Le), Q);
G + Q + F1
end proc

```

A.9 Procedure da implementação para a matriz de rigidez global

```

KG := proc(N, VS, E, A, In, L, h, k, T, q)
  local gl, Le, Anull, Aelem, Aelem1, Aelem2, Del, i, j, H, S, f, B,
  G;
  gl := (VS + 1) * (N + 2);
  Le := L / VS;
  Anull := Matrix(gl);
  Aelem1 := KT(N, VS, E, A, In, L, h, k, q);
  Aelem := Aelem1;

```

```

for  $f$  from 0 by  $N + 2$  to  $(VS - 1) * (N + 2)$  do
  for  $i$  to  $2 * N + 4$  do
    for  $j$  to  $2 * N + 4$  do
       $Anull[i + f, j + f] := Aelem[i, j]$ 
    end do
  end do;
   $G[f] := seq(Matrix(gl, Anull), f=1);$ 
   $Anull := Matrix(gl)$ 
end do;
 $H := [seq(G[f], f=0 .. (VS - 1) * (N + 2), N + 2)];$ 
 $S := add(i, i=H);$ 
 $S := LinearAlgebra:-DeleteColumn(S, T);$ 
 $S := LinearAlgebra:-DeleteRow(S, T)$ 
end proc

```

A.10 Procedure da implementação para a matriz de massa global

```

 $MG := \mathbf{proc}(N, VS, E, A, In, L, h, r\hat{o}, T)$ 
  local  $gl, Le, Anull, Aelem, Del, i, j, H, S, f, B, G;$ 
   $gl := (VS + 1) * (N + 2);$ 
   $Le := L / VS;$ 
   $Anull := Matrix(gl);$ 
   $Aelem := MM(N, VS, E, A, In, L, h, r\hat{o});$ 
  for  $f$  from 0 by  $N + 2$  to  $(VS - 1) * (N + 2)$  do
    for  $i$  to  $2 * N + 4$  do
      for  $j$  to  $2 * N + 4$  do
         $Anull[i + f, j + f] := Aelem[i, j]$ 
      end do
    end do;
     $G[f] := seq(Matrix(gl, Anull), f=1);$ 
     $Anull := Matrix(gl)$ 
  end do;
   $H := [seq(G[f], f=0 .. (VS - 1) * (N + 2), N + 2)];$ 
   $S := add(i, i=H);$ 
   $S := LinearAlgebra:-DeleteColumn(S, T);$ 
   $S := LinearAlgebra:-DeleteRow(S, T)$ 
end proc

```

A.11 Procedure da implementação para vetor de cargas externas globais

```

 $QG := \mathbf{proc}(N, VS, L, q, qa, T)$ 
  local  $gl, Le, Anull, Aelem, Del, i, j, H, S, f, B, G;$ 
   $gl := (VS + 1) * (N + 2);$ 
   $Le := L / VS;$ 
   $Anull := Vector(gl);$ 
   $Aelem := Qel(N, VS, L, q, qa);$ 

```

```

for f from 0 by N+2 to (VS - 1)*(N+2) do
  for i to 2*N+4 do Anull[i+f] := Aelem[i] end do;
  G[f] := seq(Vector(gl, Anull), f=1);
  Anull := Vector(gl)
end do;
H := [seq(G[f], f=0 .. (VS - 1)*(N+2), N+2)];
S := add(i, i=H);
S := LinearAlgebra:-DeleteRow(S, T)
end proc

```

A.12 Procedure da implementação para as frequências naturais e carga crítica

```

Fn := proc(N, VS, E, A, In, L, h, k, T, q, ro)
  local B, C, D;
  B := KG(N, VS, E, A, In, L, h, k, T, q);
  C := MG(N, VS, E, A, In, L, h, ro, T);
  D := LinearAlgebra:-Eigenvalues(B, C, datatype=float);
  D := sort(D, `<`);
  D := `~`[sqrt](D);
  D := `~`[:-`*`](0.2, $, D);
  print(D[1]);
  print(D[2]);
  print(D[3]);
  print(D[4]);
  print(D[5]);
  print(D[6]);
  print(D[7]);
  print(D[8]);
  print(D[9]);
  print(D[10]);
  print(D[11]);
  print(D[12]);
  print(D[13]);
  print(D[14]);
  print(add(i, i=q))
end proc

```

