UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO BRASILEIRA

WENDEL MELO ANDRADE

UM ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM A MEDIAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

FORTALEZA-CE

2017

WENDEL MELO ANDRADE

UM ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM A MEDIAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Educação.
Orientador: Prof. Dr. Jorge Carvalho Brandão.

FORTALEZA-CE

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A571e Andrade, Wendel Melo.
Um estudo sobre a aprendizagem das funções quadráticas com a mediação do software geogebra / Wendel Melo Andrade. – 2017.
170 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Jorge Carvalho Brandão.

1. Funções quadráticas. 2. Software geogebra. 3. Aprendizagem mediada. I. Título.
CDD 370

WENDEL MELO ANDRADE

UM ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS COM A MEDIAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Educação.

Aprovada em: 12/12/17.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jorge Carvalho Brandão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profª. Dra. Ivoneide Pinheiro de Lima
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

AGRADECIMENTOS

A Deus por me dar forças para superar todas as dificuldades que surgiram ao longo da caminhada.

A minha família, em especial a minha esposa Aurelane e aos meus filhos Wendy e Kayo, pelo apoio e incentivo na realização deste sonho.

A meu orientador Prof. Dr. Jorge Carvalho Brandão pela excelente orientação, pelo apoio, pelo acolhimento durante a pesquisa e, principalmente pela confiança em mim depositada.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, pelos ensinamentos compartilhados ao longo das disciplinas cursadas.

Ao núcleo gestor e professores da Escola de Ensino Médio Governador Adauto Bezerra, que me acolheram e me apoiaram na realização da pesquisa de campo desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Francisco Gêvane Muniz pelas suas grandes contribuições para com o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos membros da banca examinadora, Profª. Dra. Maria José Costa dos Santos e Profª. Dra. Ivoneide Pinheiro de Lima, por dedicarem o seu precioso tempo e conhecimento para contribuírem com este trabalho.

A todas as amizades construídas ao longo do mestrado.

A todas as pessoas que, apesar de não terem seus nomes aqui expostos, contribuíram direta ou indiretamente, para a concretude deste trabalho e realização deste grande sonho.

RESUMO

A temática em questão veio à tona em decorrência da dificuldade apresentada pelos alunos no aprendizado das funções quadráticas e também considerando o crescente avanço da tecnologia, em que percebemos a necessidade de uma maior inserção de recursos tecnológicos, tais como o *software* geogebra, no processo de aprendizagem deste conteúdo. Diante disso, podemos evidenciar o problema desta pesquisa por meio da seguinte questão: de que forma o uso do *software* geogebra pode contribuir com a aprendizagem dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas? Com base nesta problemática e fundamentando-se na teoria sociointeracionista de Vygotsky, e nas suas concepções sobre mediação, no processo de internalização, na zona de desenvolvimento proximal e na formação de conceitos, esta pesquisa tem como objetivo geral analisar o uso do *software* geogebra, como instrumento pedagógico inserido num processo de aprendizagem com a mediação, e suas contribuições para a construção dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas. A metodologia deste trabalho conta com método qualitativo de pesquisa, do tipo exploratória, tomando-se elementos de uma pesquisa participante, uma vez que foi realizada uma intervenção metodológica com fins de analisar a utilização do *software* geogebra como instrumento de mediação na aprendizagem das funções quadráticas. Os sujeitos da pesquisa são alunos da 1.ª série do ensino médio de uma escola pública do município de Massapê-Ce. Os instrumentos para a coleta de dados se constituíram em diário de campo, questionários de identificação de aprendizagens e teste de sondagem de conhecimentos. Com base na análise dos dados coletados ao longo da pesquisa de campo percebeu-se que a aprendizagem das funções quadráticas com a mediação do *software* geogebra e do professor, se apresentou satisfatória principalmente no que se refere ao estudo das suas representações gráficas.

Palavras-chave: Funções quadráticas. *Software* geogebra. Aprendizagem mediada.

ABSTRACT

The issue in question came to light due to the difficulty presented by the students in learning the quadratic functions and also considering the growing advance of technology, in which we perceive the necessity of a greater insertion of technological resources, such as geogebra software, in the process of learning this content. In view of this, we can highlight the problem of this research by means of the following question: how can the use of geogebra software contribute to the learning of concepts related to the content of quadratic functions? Based on this problem and based on the socio-interactionist theory of Vygotsky, and its conceptions about mediation, the process of internalization, the zone of proximal development and the formation of concepts, this research has as general objective to analyze the use of software geogebra, as an educational tool inserted in a learning process with mediation, and its contributions to the construction of concepts related to the content of quadratic functions. The methodology of this work has a qualitative method of research, of the exploratory type, being taken elements of a participant research, once a methodological intervention was carried out with the purpose of analyzing the use of the software geogebra as instrument of mediation in the learning of quadratic functions . The subjects of the research are students of the 1st grade of high school in a public school in the municipality of Massapê-Ce. The instruments for data collection consisted of field diaries, questionnaires to identify learning and test of knowledge probing. Based on the analysis of the data collected during the field research, it was noticed that the learning of the quadratic functions with the mediation of the software geogebra and the teacher, was satisfactory mainly with regard to the study of their graphic representations.

Keywords: Quadratic functions. *Software* geogebra. Mediated learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CREDE 6	6ª Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IDHM	Índice de Desenvolvimento Humano Municipal
MEC	Ministério da Educação
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como objeto de estudo o uso do *software* geogebra como instrumento de mediação para a aquisição de conceitos relacionados às funções quadráticas.

O interesse pela abordagem do tema em questão veio a partir da experiência profissional deste pesquisador quanto professor de matemática, na qual, assim como outros, sentimos dificuldades para explicar certos conceitos e propriedades desta disciplina, pois às vezes parece quase impossível explanar sobre o comportamento da curva de uma função tendo como recurso didático apenas o pincel e o quadro branco. Muitas características e propriedades acabam sendo abordadas apenas verbalmente, ficando a cargo da imaginação dos alunos perceberem como ocorrem de fato às variações do comportamento do gráfico das funções.

O estudo do conceito de função, bem como das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica são trabalhados logo no primeiro ano do ensino médio, momento em que o aluno está entrando neste nível de escolaridade, muitas vezes saindo de um ensino fundamental fragilizado. Neste momento, percebemos que os alunos apresentam muitas dificuldades na aprendizagem destes conteúdos, principalmente por se tratarem de assuntos com alto grau de abstração.

Em meio a esta e outras dificuldades na qual o professor de matemática se depara cotidianamente em sua sala de aula e considerando que a informática pode ser uma forte aliada neste processo de ensino e aprendizagem, principalmente no que se refere à visualização de gráficos por meio de aplicativos e programas que projetam a trajetória da curva de uma função na tela do computador, veio então o desejo de se pesquisar sobre este tema na busca de identificar as reais contribuições destes recursos didáticos, especialmente para o ensino das funções quadráticas.

A escolha pelo assunto de função quadrática justifica-se pela sua importância como conhecimento de base para a matemática e pela sua grande aplicabilidade nas demais áreas do conhecimento como na física, química, engenharia e outras.

Neste contexto, a relevância desta pesquisa se dá pela urgente e necessária busca de caminhos pedagógicos, capazes de contribuir para a superação das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da matemática, principalmente em se tratando de conhecimentos mais abstratos, como os de funções quadráticas.

Alguns pesquisadores como Fiorentini e Lorenzato (2007), Moran (2004), Valente (2003) e outros, já vêm abordando a temática do uso de computadores e da informática educativa como recurso didático em sala de aula.

D'Ambrosio (1999) também defende esta ideia e reforça a importância dos recursos tecnológicos na escola e no ensino de matemática, asseverando que:

> A modernização da Matemática nas escolas tornou-se uma preocupação em todos os países, sobretudo em vista da entrada na era da alta tecnologia. Os trabalhadores e a população em geral, e sem dúvida técnicos e cientistas, necessitam de uma Matemática mais Moderna. Novas posturas, novos métodos de ensino e até mesmo novos conteúdos se fazem necessários (D'AMBROSIO, 1999, p. 5).

Para Sancho (2006, p. 21), "[...] o estudo, a experimentação, a exploração da informação, em qualquer área do currículo escolar, melhora imediatamente a motivação, o rendimento e as capacidades cognitivas dos alunos". Tudo isso é possível com *softwares* educacionais específicos associados a metodologias de ensino eficazes. Pais (2008, p. 31) nos ajuda a lançar luzes sobre esta questão, afirmando que "[...] inovações didáticas resultantes da utilização do computador podem ser ilustradas por *softwares* destinados ao ensino da geometria e funções, incorporando o recurso do movimento e da simulação na representação de conceitos".

É notável a importância da utilização das tecnologias na área da matemática. E nos dias atuais, encontramos uma grande disponibilidade de *softwares* e aplicativos educacionais que a internet tem a oferecer, trazendo novos caminhos à educação escolar e renovando as tradicionais práticas docentes. Sobre isso D'Ambrósio (2001), comenta que:

> Ao longo da evolução da humanidade, Matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbiótica. A tecnologia entendida como convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a matemática são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto ser dissociada da tecnologia disponível (D'AMBRÓSIO, 2001, p. 15).

Em se tratando do estudo das funções, a representação e a interpretação do comportamento do gráfico são fundamentais, em especial na aprendizagem da função quadrática. Ao longo da história o uso exclusivo do livro como mecanismo de ensino tem tornado o processo de aprendizagem pouco eficiente, devido à falta de recursos didáticos que possibilitem uma investigação minuciosa e dinâmica das propriedades gráficas desta função.

Percebemos então que há uma necessidade de utilização de recursos que sejam capazes de concretizar o dinamismo de uma função quadrática, pois a compreensão do seu gráfico está intimamente relacionada ao domínio das suas propriedades. Considerando a grande diversidade de programas hoje disponíveis na internet, optamos por realizar esta pesquisa estudando a utilização do *software* geogebra para este fim.

A escolha do *software* geogebra como instrumento de mediação na aprendizagem das funções quadráticas justifica-se por tratar-se de um aplicativo de matemática dinâmica que combina geometria e álgebra com o mesmo grau de importância. Nele podem ser feitas construções geométricas (pontos, vetores, segmentos, seções cônicas, linhas e funções em geral) permitindo a manipulação dinâmica por meio da alteração de suas coordenadas, além de construção de gráficos de funções podendo identificar seus pontos fundamentais e explorando o comportamento da curva da função.

Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter juntamente com uma equipe internacional de programadores e tem a finalidade de auxiliar no ensino e na aprendizagem da matemática. (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2009). É um *software* gratuito de fácil instalação, possui uma interface simples e está disponível em 22 idiomas.

O aplicativo pode ser acessado de modo *on-line* diretamente pelo seu site oficial (www.geogebra.org) ou através da instalação por meio de *download* disponível no mesmo sítio, sendo um programa de multiplataforma, pois pode ser executado em sistemas operacionais *Windows*, *Linux*, *MacOsx* e recentemente em *tablets* e celulares com sistema *android* e *iOS* para *iPads* e *iPhones* .

Um fator que contribuiu para a escolha desse aplicativo está nos laboratórios de informática das escolas públicas, na qual o sistema *linux* educacional é adotado. Neles o *software* geogebra já é um aplicativo que vem instalado no próprio computador, o que facilita bastante o seu uso pelos alunos e professores. Da mesma forma nos *tablets* educacionais enviados pelo Ministério da Educação – MEC para as escolas públicas do Brasil, o sistema *android* utilizado por estes dispositivos móveis já conta com a instalação do *software* geogebra.

Além do mais para a utilização deste programa não há necessidade de internet. Este requisito também conta a favor do *software* quando consideramos a lentidão nas conexões da internet nas escolas públicas.

Como fundamentação teórica, esta pesquisa se ancora na teoria sociointeracionista de Vygotsky (1998, 1993, 2000), uma vez que a utilização do *software* aqui proposto se apresenta na perspectiva de instrumento de mediação para a aprendizagem das funções quadráticas. Logo a abordagem vygotskiana nos oferecerá subsídios teóricos sobre o processo de aprendizagem com a mediação, sendo importante pautarmos nossa perspectiva, quanto pesquisa, nos pressupostos de sua teoria, tais como: a mediação, o processo de internalização do conhecimento, a zona de desenvolvimento proximal e a formação de conceitos.

Sendo assim, considerando que este trabalho trata de tema referente ao uso do *software* geogebra como instrumento de mediação para a aquisição de conceitos relacionados às funções quadráticas. Nesta perspectiva, podemos evidenciar o problema desta pesquisa levantando a seguinte questão: De que forma o uso do *software* geogebra pode contribuir com a aprendizagem dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas?

Com base no que já foi levantado, pautando-se na perspectiva da fundamentação teórica sociointeracionista de Vygotsky, destacamos que o objetivo geral desta dissertação consiste em:

- Analisar o uso do *software* geogebra, como instrumento pedagógico inserido num processo de aprendizagem com a mediação e suas contribuições para a construção dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas.

Com base na problemática e objetivo da proposta a ser investigada, assinalou-se os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as ferramentas e aplicações do *software* geogebra voltadas para a aprendizagem das funções quadráticas.
- Realizar uma intervenção com o uso do *software* geogebra a partir dos fundamentos da teoria da mediação pedagógica de Vygotsky.

Sob o ponto de vista da abordagem do problema, privilegiamos neste trabalho o método qualitativo de pesquisa, considerando que o processo e o seu significado são os focos principais desta abordagem, levando o pesquisador a manter contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão. (PRODANOV; FREITAS, 2013)

Em decorrência dos objetivos a serem alcançados identificamos que esta pesquisa se caracteriza como sendo do tipo exploratória, uma vez que as pesquisas exploratórias são aquelas habitualmente realizadas por pesquisadores sociais preocupados com a atuação prática. (GIL, 2008).

Quanto aos procedimentos de pesquisa, optamos pela utilização de elementos da pesquisa participante, pois esse tipo de pesquisa se desenvolve a partir da interação entre pesquisador e membros da situação investigada. (PRODANOV; FREITAS, 2013)

O trabalho tem como *lócus* uma escola pública situada no município de Massapê-Ce e tem como sujeitos, 12 (doze) alunos da 1.ª série do ensino médio, todos estudantes da referida escola.

O delineamento da pesquisa participante constituiu-se de três etapas, de modo que:

(1) A primeira caracterizou-se pela realização de um teste de sondagem de conhecimentos, para a identificação dos conhecimentos prévios, ou seja, dos conceitos espontâneos dos alunos sobre o conteúdo de funções quadráticas;

(2) A segunda configurou-se com a realização de uma intervenção metodológica que contou com cinco encontros, na qual foram estudados conceitos referentes ao conteúdo das funções quadráticas, com a mediação do *software* geogebra para que se possibilite a internalização dos conceitos científicos pelos alunos;

(3) A terceira resultou na reaplicação do teste de sondagem de conhecimentos após a realização da intervenção metodológica, para identificação dos conceitos adquiridos pelos alunos.

Todas as atividades desenvolvidas nos encontros aconteceram no laboratório de informática da escola e ocorreram com a mediação do *software* geogebra para a internalização de conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas, sendo explorado o comportamento do gráfico com seus pontos notáveis e as modificações gráficas proveniente das variações individuais dos coeficientes da função.

Como instrumentos para a coleta de dados, utilizamos o diário de campo, as atividades, os questionários e o teste de sondagem de conhecimentos. Contando também com a observação como procedimento para colher as informações que serão analisadas nesta pesquisa.

A partir dos dados coletados realizamos uma análise sistemática das informações que nos levou a identificar as contribuições do uso do *software* geogebra como instrumento de mediação para a internalização de conceitos referentes ao conteúdo de funções quadráticas.

Estruturamos este trabalho com seis capítulos. O primeiro consiste nesta introdução. O segundo capítulo traz uma revisão de literatura onde estabelecemos o conceito de função e mais especificamente de função quadrática, além de apresentar uma reflexão sobre o uso de *softwares* no ensino das funções quadráticas e de modo mais específico conhecemos alguns estudos já realizados sobre o uso do *software* geogebra. O terceiro capítulo apresenta a fundamentação teórica desta pesquisa sendo pautada nos pressupostos da teoria sociointeracionista de Vygotsky, contando com o aprofundamento de conceitos como: a mediação, os processos de internalização, a zona de desenvolvimento proximal e a formação de conceitos. O quarto capítulo trata dos procedimentos metodológicos, trazendo a abordagem, o tipo e os procedimentos da pesquisa, como também apresentando o delineamento da pesquisa e os instrumentos de coleta de dados. O quinto capítulo consiste na análise dos dados coletados e discussões dos resultados da pesquisa a luz da fundamentação teórica. E no sexto capítulo temos as considerações finais desta dissertação.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo traz uma revisão de literatura contendo reflexões sobre a aprendizagem das funções quadráticas. Os conhecimentos levantados aqui são frutos de pesquisas bibliográficas e consiste em discussões pautadas nas ideias de autores que pesquisam sobre o estudo das funções, dentre os quais destaco Lima (2006), Rattan e Klingbeil (2017) e Brandão (2017).

Também serviram de base para o estudo dos tópicos tratados neste capítulo dissertações e teses defendidas nos últimos anos, cujo tema possui relação com o objeto de estudo desta pesquisa, entre os trabalhos estudados, destacam-se as pesquisas de Barreto (2009), Lopes Júnior (2013), Ricardo (2012) e outros.

O capítulo encontra-se dividido em quatro seções: na primeira e segunda refletiremos respectivamente, sobre o estudo do conceito de função e das funções quadráticas; na terceira seção discutiremos sobre o uso de *softwares* no ensino das funções quadráticas; e na quarta conheceremos algumas pesquisas já realizadas com a utilização do *software* geogebra no ensino da matemática.

2.1 Entendendo o conceito de função

Em nosso dia a dia estamos sempre utilizando o conceito de função, pois sua ideia está relacionada às variações quantitativas presente nos fenômenos naturais e também nas atividades humanas. Constantemente estamos relacionando grandezas físicas, financeiras, temporais ou sociais, sendo assim de algum modo estamos vivenciando o conceito de função, embora sem percebermos.

Brandão (2017) nos mostra um bom exemplo do uso do conceito de função na simples conjuração do verbo cantar, como podemos ver no Quadro 1. Segundo ele:

> O verbo cantar é um verbo de primeira conjuração porque termina em AR. Além disso, é um verbo regular. Verbos regulares são verbos que não possuem alteração no radical, no caso CANT.
> Percebemos que há uma relação direta entre os sujeitos, que possuem suas características, e as desinências (terminações). A relação entre esses conjuntos, conjunto dos sujeitos e o conjunto das desinências, é dada pela existência do radical CANT.
> Como os sujeitos influenciam (DOMINAM) as desinências, podemos indicar tal conjunto como o DOMÍNIO da função "conjugar o verbo cantar". As desinências refletem, reagem a este domínio, isto é, elas representam CONTRADOMINIO. Ao conjunto das desinências de um tempo verbal específico chamamos de IMAGEM. (BRANDÃO, 2017, p. 6)

Quadro 1: Conjuração do verbo cantar

No presente do indicativo temos:		
EU	CANT	O
TU	CANT	AS
...		
Caso seja no pretérito, fica:		
EU	CANT	EI
TU	CANT	ASTE
...		

Fonte: Brandão (2017, p. 6)

Na escola o conceito de função é amplamente utilizado, não apenas na matemática, como também de forma interdisciplinar envolvendo várias outras disciplinas, como a física, a química e a biologia. Ele está formalmente associado a um dos ramos da matemática que conhecemos como álgebra, mas também se encontra presente na geometria e até na aritmética, pois envolve relações de dependência entre duas grandezas.

A versão preliminar da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2016) enfatiza a relação entre a álgebra e o estudo das funções, sobretudo quanto a sua importância na matemática e em outras áreas do conhecimento.

> [...] A álgebra no ensino médio deve ser entendida como o estabelecimento de relações, ampliando e consolidando as noções de equações e função. Nessa etapa de escolaridade, merece especial destaque o estudo das funções por seu papel como modelo matemático para analisar e interpretar relações de dependência entre variáveis de duas grandezas em fenômenos do mundo natural ou social, incluindo os trabalhados em componentes de outras áreas de conhecimento como Física, Química e Biologia, por exemplo. Para tanto, o trabalho e a conversão entre representações algébricas e gráficas são de vital importância para análise e interpretação das relações existentes entre as variáveis envolvidas. (BRASIL, 2016, p. 576)

É importante ressaltar que o documento da BNCC, apresenta qualidades que possibilitam propor, sugerir e até estabelecer conexões entre conteúdos da matemática e as demais áreas do conhecimento, como é o caso do estudo das funções nas áreas da física, química e biologia, porém a BNCC ainda não se apresenta pronta para assegurar o completo domínio dos conteúdos e nem o desenvolvimento pleno das competências na matemática, até porque se encontra na versão preliminar, logo ainda em processo de construção.

Seguindo com o pensamento a cerca do conceito de função, entendemos que ele deve ser compreendido como a variação de uma grandeza em decorrência da variação de outra, porém sua compreensão se torna incompleta do ponto de vista prático se não estudamos como ocorre esta variação de forma qualitativa e voltada para sua aplicabilidade. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 72) deixam claro que “a elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções”. Portanto é preciso perceber que o simples uso de tabelas numéricas não nos leva a uma compreensão plena do conceito de função.

Fossa e Fossa (2000, p. 155) destacam que: “de fato, a definição do conceito de função parece ter um papel bastante reduzido na determinação de como este conceito é entendido pelo aluno”. Percebemos que no cotidiano da sala de aula os discentes têm um contato limitado com este conceito, na prática em suas atividades escolares, como também ao estudar o livro texto, geralmente eles são levados a construírem gráficos e a manipularem algebricamente equações, isto, porém exercita uma parte restrita do entendimento de função.

Lima (2006) busca conceituar função destacando que:

> Dado os conjuntos X, Y, uma função f: X → Y (lê-se “uma função de X em Y) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a *imagem* de x pela função f, ou o *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em f(x). (LIMA, 2006, p. 38)

Em geral uma função pode ser dada por meio de uma lei de correspondência que sempre associa os elementos de dois conjuntos dos quais, um será o domínio e o outro contra-domínio, e este contém a imagem da função que é encontrada pela aplicação da lei de correspondência sobre os elementos do domínio. Porém o conceito de função não se limita apenas a isso, duas especificidades devem ser rigorosamente atendidas: i) todos os elementos “x” do conjunto domínio devem obrigatoriamente ser utilizados na função e ii) todos os elementos “x” do conjunto domínio deve estar relacionados unicamente com um elemento “y” do contra-domínio, que será sua imagem, logo devem possuir uma única imagem no contra-domínio.

Reforçando este pensamento, Lima (2006) enfatiza que uma função deve estar sujeita as seguintes condições:

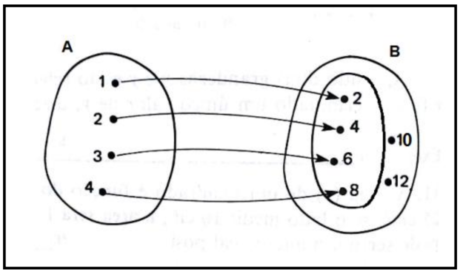
> a) Não deve haver exceções: afim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in X$ dado.

> b) Não pode haver ambiguidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder a um único f(x) em Y. (LIMA, 2006, p. 41)

Sobre a lei de correspondência a ser utilizada para estabelecer a relação de função entre os valores do domínio e do contra-domínio, esta é sempre uma expressão algébrica envolvendo duas variáveis, as mais usuais são “x” e “y” ou “x” e “f(x)”, uma vez que consideramos y = f(x).

Na Figura 1 podemos observar a representação de uma função por meio de diagramas de flechas. Este tipo de reprodução é inicialmente muito utilizado pelos livros didáticos para esclarecer o conceito de função para os alunos, devido a sua forma simples e didática.

Figura 1: Representação de uma função por diagrama de flechas



Fonte: Autor

Temos no exemplo da Figura 1, o conjunto A = {1, 2, 3, 4} que se apresenta como domínio da função, ou seja, os valores que “x” assume na função, o conjunto B = {2, 4, 6, 8, 10, 12} refere-se aos possíveis valores assumidos por “y”, e que representa o contra-domínio da função. A relação estabelecida nesta função através das conexões realizadas pelas flechas é indicada pela lei de correspondência y = 2x. O conjunto imagem Im = {2, 4, 6, 8} contido no contra-domínio da função se constitui dos valores de “y” que estão se relacionando com “x”. Note que neste exemplo, todo elemento “x” do conjunto A está associado a algum elemento do conjunto B e para um dado elemento de A associa-se um único elemento em B. Logo temos aqui uma função que pode ser representada por f: $A \rightarrow B$, onde f(x) = 2x.

Barreto (2009) sugere o trabalho com o conceito de função pautado numa metáfora em que utilizamos a alegoria da máquina, onde podemos perceber uma função y = f(x) como sendo uma máquina onde os elementos “x” do domínio são transformados nas imagens correspondentes f(x). Segundo ele “este processo de transformação é justamente a lei de correspondência entre a variável dependente y com a variável x." (BARRETO, 2009, p. 286)

Nesta pesquisa, por se tratar de uma abordagem junto a alunos do ensino médio, utilizamos para os conjuntos do domínio e do contradomínio apenas subconjuntos do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). No geral estamos utilizando na grande maioria dos casos a notação f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para indicar que na função "f" foi escolhido o conjunto dos reais tanto para o domínio quanto para o contra-domínio.

Não é por acaso que os livros do ensino médio sempre apresentam em seus capítulos anteriores o estudo sobre os conjuntos numéricos, pois são conhecimentos muito utilizados quando tratamos de função, como também o conceito de relação que se bem compreendido pelos alunos facilitará na compreensão do conceito de função, uma vez que função é um caso particular de relação.

Barreto (2009) em sua pesquisa sobre a compreensão do conceito de função mediado por ambientes computacionais enfatiza alguns dos obstáculos que dificultam a aprendizagem deste conceito pelos alunos. Dentre os quais destaco aqueles que consideramos relevante, sendo eles:

(1) Um entendimento confuso a cerca do significado do sinal de igual: pois muitos alunos ora o entendem como um indicativo de operação numérica, tipo em 2 + 3 = 5, ora de equilíbrio entre os membros da igualdade, como em x + 4 = 7;

(2) A dificuldade na realização das operações com a utilização de letras: este problema é muito presente nos alunos que não se familiarizaram com o uso de letras nas equações;

(3) O pouco entendimento sobre o conceito de variável em função: pois percebemos que é muito comum os alunos se atrapalharem com os conceitos de incógnita e variável;

(4) A dificuldade na realização de operações com números negativos: uma vez que muitos alunos ainda apresentam grandes falhas nas operações numéricas por conta do jogo dos sinais. Está dificuldade muitas vezes se dá pela confusão que é feita entre a regra dos sinais usada na soma e subtração com a regra dos sinais usada na multiplicação e divisão, isto considerando que tais regras são estudadas pelos alunos sem nenhum argumento que a justifique, sendo tratadas apenas como regras que devem ser seguidas.

Ainda sobre as dificuldades na compreensão do conceito de função Barreto (2009, p. 55) destaca que:

> Em contexto de ensino e aprendizagem, funções podem ser faladas de várias maneiras diferentes pelos alunos. Algumas dessas maneiras podem ser dinâmicas, outras podem ser estáticas e algumas delas são operacionais. Assim por exemplo, trabalhando com a função f(x) = 2x + 1, muitos estudantes comentam que a função era como se fosse uma máquina: “substitua o x pelo número desejado, depois multiplique por dois e some com 1, e aí você tem o produto final”. Em outros momentos, trabalhando com a mesma função, o aluno pode escrever em sua resolução da prova f(2) = 5.

O trabalho com funções considerando apenas os métodos mecânicos e operatórios se constitui num procedimento de aprendizagem muito limitado e que não levará o aluno à compreensão plena deste assunto.

Nesta pesquisa enfatizamos o estudo de um tipo específico de função, que é a função quadrática ou função polinomial do 2º grau, porém o entendimento sobre o conceito de função se constitui algo primordial para aqueles que desejam compreender este tipo particular de função.

Realizaremos, a seguir, um breve estudo sobre o conceito de função quadrática, além de levantarmos algumas reflexões sobre as dificuldades na aprendizagem deste conteúdo.

2.2 Reflexões acerca do estudo das funções quadráticas

Em alguns casos, percebemos que o estudo das funções quadráticas tem ocorrido sem que os alunos possuam os conhecimentos mínimos para uma eficiente aprendizagem desde conteúdo, isto tem levado o ensino deste conteúdo ao patamar de difícil compreensão pelos alunos, o que é muito preocupante, quando consideramos a sua importância e grande aplicabilidade não apenas na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento como na física, engenharia, informática e outras.

Para uma aprendizagem eficiente das funções quadráticas é importante que os alunos possuam uma boa base não apenas sobre compreensão do conceito de função, mas também no campo da aritmética, e principalmente na área da álgebra.

O que se percebe, de um modo geral, é que o estudo das funções quadráticas vem acontecendo de modo artificial, limitando-se a construção de tabelas e gráficos, com pouca interpretação do comportamento da curva que representa o gráfico dessa função e sem muito significado para o aluno.

Faz-se necessário uma melhor abordagem desse conteúdo de modo a levar os alunos a uma maior compreensão de seu verdadeiro significado e com isso os alunos passarão a ter maior interesse pela teoria que permeia este conteúdo.

Smole e Diniz (2013) publicaram um livro didático voltado para a primeira série do ensino médio, intitulado “Matemática: ensino médio – volume 1”, adotado por muitas escolas públicas e privadas, inclusive também utilizado pelos alunos sujeitos dessa pesquisa, e considerado por muitos professores como um bom livro, cuja linguagem é de fácil compreensão e bem acessível para os estudantes. Nesta obra as autoras buscam definir uma função quadrática ou polinomial do 2º grau como sendo “uma função f , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número x associa o número $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.” (SMOLE; DINIZ, 2013, p. 115).

Nesta definição, ao refletirmos um pouco mais, considerando todas as limitações dos alunos ingressantes na 1.ª série do ensino médio, podemos perceber que embora fazendo uso de uma linguagem clara, o conceito de função quadrática pressupõe uma série de outros conceitos e habilidades que necessariamente precisam estar previamente estabelecidos na compreensão dos alunos, dentre as quais destaco: i) a simbologia matemática; ii) o conceito inicial de função; iii) a compreensão sobre conjuntos numéricos; iv) uma boa noção sobre a teoria dos conjuntos; v) uma grande capacidade de abstração.

Isso nos leva a entender o quanto é complexo para os alunos a compreensão deste conteúdo. Porém é imprescindível que a compreensão desse conceito seja consolidada pelos discentes, considerando que temos aqui o princípio de um assunto que será estudado pelos alunos por muitos meses e por que não dizer anos, a considerar que ao longo do ensino médio eles sempre estarão se deparando com situações problemas que remetem a uma função quadrática.

Para tanto, professores podem e devem fazer uso da mais ampla variedade de recursos para facilitar a compreensão do conceito de função quadrática pelos alunos.

Dentre os possíveis recursos a serem utilizados com este fim, pelos professores, destacam-se os diagramas, gráficos e tabelas, como também aqueles mais dinâmicos como animações e *softwares*. Neste momento, para uma aprendizagem mais eficaz, todo recurso disponível é válido.

Encontramos na BNCC (BRASIL, 2016) alguns objetivos de aprendizagem relacionados ao estudo das funções quadráticas no ensino médio, são eles:

> - Compreender função como uma relação de dependência entre duas variáveis, as ideias de domínio, contradomínio e imagem, e suas representações algébricas e gráficas, e utilizá-las para analisar, interpretar e resolver problemas em contextos diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas.
> - Reconhecer função quadrática e suas representações algébrica e gráfica, compreendendo o modelo de variação, determinando domínio, imagem, máximo e mínimo, e utilizar essas noções e representações para resolver problemas como os de movimento uniformemente variado.
>
> (BRASIL, 2016, p. 578)

Percebemos aqui que atrelado ao aprendizado da função quadrática também encontramos conceitos e definições importantes, tais como raízes, parábola, concavidade, discriminante, valor de máximo e mínimo da função, entre outros. A compreensão destes conceitos levará o aluno a um melhor entendimento do real significado de uma função quadrática.

Encontramos no Apêndice A desta pesquisa um texto trazendo um maior detalhamento sobre estes conceitos, contendo não apenas as suas definições como também apresentando algumas aplicabilidades do *software* geogebra na identificação destes elementos.

A utilização do *software* geogebra como ferramenta didática para facilitar a compreensão dos elementos que compõe uma função quadrática constitui em um elo primordial na realização desta pesquisa, uma vez que o objetivo deste trabalho consiste em analisar o uso do *software* geogebra, como instrumento pedagógico inserido num processo de aprendizagem com a mediação, e suas contribuições para a construção dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas.

De acordo com a BNCC:

> O trabalho com a função quadrática deve ser desenvolvido por meio de situações que favoreçam ao estudante compreender o modelo de variação que se estabelece entre as variáveis envolvidas e perceber aspectos importantes como os pontos de máximo e de mínimo. (BRASIL, 2016, p. 577)

Uma boa possibilidade de relacionar o conceito de função quadrática com o cotidiano dos alunos, dando assim mais significado ao conteúdo, está em associar ao seu gráfico, que no caso é uma parábola, ao lançamento de uma bola ao ar durante um jogo de futebol, por exemplo, pois a trajetória da bola ao subir de descer transcreverá uma curva que é representada por uma parábola, logo, com base nos estudos da função que representa esta parábola será possível mensurarmos a altura máxima atingida pela bola, à distância que a bola percorreu ao tocar o solo novamente, e se formos além, relacionando outras variáveis a esta situação problema, também podemos determinar o tempo de duração do lançamento e a velocidade da bola.

René Descartes[1] foi um dos primeiros matemáticos a associar as formas geométricas com fórmulas algébricas, dando origem ao que conhecemos hoje por geometria analítica, que é o ramo da matemática que busca relacionar geometria e álgebra, sendo a parábola uma das curvas cônicas estudadas por este segmento da matemática.

O termo parábola também é comumente empregado na engenharia eletrônica quando se fala em antena parabólica, pois se girarmos uma parábola em torno de seu eixo, ela vai gerar uma *superfície parabólica*, na qual é válido destacar para os alunos que graças às propriedades presentes nesta superfície é possível convergir por meio das antenas os sinais emitidos pelos satélites para os receptores e consequentemente para os aparelhos de televisão, fazendo assim com que possamos assistir diversos canais abertos e por assinatura em nossas residências.

Estes exemplos destacam para os alunos um pouco da importância de se estudar as funções quadráticas levando-os a perceberem seu significado no dia-a-dia, uma vez que futebol e televisão são duas coisas extremamente presentes na vida de um jovem estudante.

Podemos aprofundar mais sobre o conceito de parábola estudando o texto do Apêndice A desta pesquisa.

Encontramos nos trabalhos de Rattan e Klingbeil (2017) aplicações das funções quadráticas no lançamento de foguetes, na qual é possível estabelecermos uma relação entre a sua altura e o tempo, no cálculo da corrente elétrica de uma lâmpada em função de sua potência e na determinação da resistência equivalente de um circuito elétrico.

Na seção seguinte, levantaremos reflexões sobre o estudo das funções quadráticas e seus desafios nos processos de ensino e aprendizagem, trazendo para a discussão a utilização dos *softwares* como elemento didático metodológico.

2.3 Uso de *softwares* no ensino das funções quadráticas

Conforme já discutimos anteriormente, são muitas as dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão do conceito de função quadrática. Uma das causas desta dificuldade pode estar na forma como muitos livros didáticos abordam o assunto, às vezes

[1]René Descartes (1596 – 1650) foi um filósofo, físico e matemático francês, criador do pensamento cartesiano, sistema que deu origem a geometria analítica.

sem relacionar com as demais disciplinas estudadas pelos alunos, ocasionando a perca da grande possibilidade de se gerar uma interdisciplinaridade, principalmente entre os conteúdos de física e matemática.

A descontextualização também leva o aluno a um maior desinteresse pelo assunto, pois os estudantes não conseguem associar os conceitos aprendidos nas aulas com as situações cotidianas vivenciadas por eles.

Outra grande causa de dificuldades na compreensão deste conceito está na forma estática como ele é abordado pelos livros didáticos, como também em sala de aula pelo professor. Pois considerando que este assunto é componente curricular trabalhado na 1.ª série do ensino médio, e que nesta etapa escolar os alunos são jovens pré-adolescentes com idade média de 14 a 16 anos, e que graças aos avanços da tecnologia estão sempre conectados a tudo e a todos. Há de se convir que este conhecimento, apresentado de modo estático, não desperta nesse aluno interesse algum pelo conteúdo.

Em consonância com este pensamento, Lopes Júnior (2013) enfatiza que:

> A juventude de hoje está acostumada com dinamismo e interatividade relacionados com uma infinidade de aparelhos eletrônicos que caracteriza o mundo tecnológico e informatizado de hoje. Assim, aulas na lousa e no livro são desestimulantes para muitos desses jovens e até para alguns adultos. (LOPES JÚNIOR, 2013, p. 12)

Numa aula de matemática ao se abordar o conteúdo de funções quadráticas utilizando a lousa, o professor inevitavelmente ficará limitado ao problema do gráfico estático sem possibilidade de movimentação quando da variação dos coeficientes da função. De um modo geral, até por conta da limitação física apresentada pela lousa, muitos professores lamentavelmente não enfatizam esta interpretação do gráfico da função ou quando abordam este assunto, fica por conta da imaginação do aluno entender a movimentação da curva da parábola quando se altera os valores dos coeficientes da função, o que convenhamos é algo bastante complexo e abstrato.

Uma possibilidade de sanar esta e outras dificuldades didáticas no ensino do comportamento do gráfico das funções quadráticas pode ser com a utilização de recursos computacionais que realizam construções de gráficos de funções. Neste cenário, o professor pode levar os alunos da condição de meros expectadores para condutores de seu próprio conhecimento, uma vez que eles mesmos podem realizar mudanças nos coeficientes das funções e perceberem o que acontece com seus gráficos, entendendo assim algumas propriedades presentes no estudo deste conteúdo.

Sobre a possibilidade do uso do computador tornar o aluno mais protagonista de seu conhecimento, Fainguelernt (1999) destaca que:

> O computador pode ser um catalisador para mudar a dependência e, em um ambiente interativo, envolver os alunos em atividades matemáticas durante as quais eles podem propor os seus próprios problemas, tomar suas próprias decisões e depurar suas representações baseados no *feedback* proporcionado pelo computador. (FAINGUELERNT, 1999, p. 63)

A expressão *feedback* enfatizada por Fainguelernt (1999) refere-se aos dados de resposta oferecidos pelos programas de computadores destinados a realizarem operações com base em comandos estabelecidos, tais *feedbacks* podem ser apresentados em forma de resultados numéricos, algébricos, figuras geométricas, tabela de dados, animações ou mais especificamente em gráficos de funções.

Ao se fazer uso da tecnologia, o professor pode levar sua aula a um patamar que vai além da mera exposição, possibilitando a investigação e a dedução de novos conhecimentos.

No processo de ensino com o uso da tecnologia o planejamento é algo muito importante, não levando o computador a ser um mero “resolvedor” de problemas no qual se digita os dados de entrada e ele disponibiliza a solução do problema, como também, quando do estudo com as funções, tomar o cuidado para que este recurso não seja apenas um “construtor” de gráfico no qual se digita a função na caixa de entrada e o *software* apresenta o gráfico.

Cabe ao professor elaborar situações de aprendizagem nas quais o aluno seja levado a refletir sobre aquilo que ele está vendo na tela do computador, analisando o comportamento do gráfico, descobrindo padrões e propriedades, levando assim a conjecturar ideias e investigar novos conhecimentos.

Segundo enfatiza a BNCC “o uso de *softwares* se constitui uma ferramenta fundamental para a análise e interpretação das relações existentes entre as variáveis envolvidas numa função.” (BRASIL, 2016, p. 576)

Nos dias atuais, com o avanço tecnológico cada vez mais acelerado, já estão disponibilizados na internet uma quantidade significante de *softwares* e aplicativos voltados para o ensino das funções e consequentemente das funções quadráticas. Entre os que oferecem possibilidade de trabalhar com gráficos de funções destacam-se: *Cabri-Géomètre*, *Graphequation*, *Graphmática*, *Winplot*, *Aplusix*, *Winfun*, *Modelus*, *Régua e Compasso*, *Thales*, *WinMat*, *Geogebra*, e muitos outros. Dentre os aplicativos citados acima, muitos são disponibilizados gratuitamente e em versões que rodam em diversas plataformas e sistemas operacionais, inclusive em dispositivos móveis, como celulares e tabletes. (LOPES JÚNIOR, 2013)

Embora considerando a grande diversidade de programas voltados para o ensino das funções, nesta pesquisa priorizamos o trabalho com o *software* geogebra o que será evidenciado na seção seguinte.

2.4 Alguns estudos sobre o uso do *software* geogebra

O *software* geogebra é um aplicativo voltado para o ensino e aprendizagem da matemática. Seu grande valor reside no fato de trabalhar com muita eficiência conceitos de geometria e álgebra, como também nas versões mais modernas, a geometria espacial, o cálculo, a estatística, além de outros assuntos, podendo ser utilizado em diversos níveis de ensino, que variam desde as séries iniciais até o ensino superior.

Vários estudos já apontam a eficiência do uso pedagógico do geogebra em diversas áreas do conhecimento, principalmente na matemática. Nascimento (2012) destaca em sua pesquisa a importância da utilização do *software* geogebra como instrumento psicopedagógico de ensino de geometria, ele enfatiza que “a utilização do *software* geogebra como recurso didático no ensino da geometria constitui um caminho que o professor pode seguir na perspectiva de chegar a uma maior satisfação em relação à aprendizagem” (NASCIMENTO, 2012, p. 86).

Ballejo (2015) também pesquisou sobre as aplicações do geogebra no ensino de conceitos da geometria plana para alunos do 6° ano do ensino fundamental e concluiu que “o *software* em questão realmente fez diferença no processo de aprendizagem” (BALLEJO, 2015, p. 132), ressaltando também outros fatores que contribuíram para aprendizagem dos alunos como o interesse dos alunos e a didática do professor.

Bittencourt (2012), Bacelar Júnior (2013) e Pedroso (2012) estudaram as aplicações do geogebra no ensino das funções trigonométricas chegando a concluir que “a utilização do *software* geogebra torna-se uma ferramenta de caráter criativo e construtivo permitindo ao aluno ampliar seus conhecimentos por múltiplas metodologias”. (BACELAR JÚNIOR, 2013, p. 111).

Bezerra (2015) e Almeida (2014) realizaram pesquisas estudando as aplicações do *software* geogebra voltadas para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Eles sugerem a utilização de tecnologias digitais, como este aplicativo, para que o professor de Cálculo possa tornar o ensino mais dinâmico e atrativo, pois segundo Bezerra (2015, p. 85) tal recurso "permite que seja visto geometricamente o que muitas vezes é tratado apenas pelo caráter algébrico."

Outros pesquisadores como Lopes Júnior (2013), Sousa (2014) e Teixeira (2013) se dedicaram a estudar a utilização do geogebra no ensino das funções quadráticas, objeto de pesquisa deste trabalho. Dentre as conclusões levantadas por essas pesquisas foi evidenciado que "com a construção gráfica, as propriedades das funções são mais bem compreendidas, pois são percebidas pelos próprios alunos por experimentação" (LOPES JÚNIOR, 2013, p. 63). Outro fator importante que foi observado nestas pesquisas retrata que "a aprendizagem foi mais eficaz com aqueles alunos que já dominavam as ferramentas tecnológicas, apresentando rendimentos expressivos." (SOUSA, 2014, p. 73).

Ricardo (2012) investigou a utilização do geogebra no ensino das funções quadráticas com alunos do ensino médio numa escola do Rio de Janeiro, e percebeu que embora com suas limitações alguns aspectos positivos do *software* foram percebidos na sua pesquisa, dentre os quais destaco: a) o contato dos alunos com conhecimentos novos que pode ser proporcionado pelo uso do geogebra; e b) a integração do raciocínio algébrico com o raciocínio geométrico na investigação do comportamento do gráfico das funções quadráticas. E concluiu enfatizando que "qualquer apoio tecnológico deve ser pautado em conceitos sólidos" (RICARDO, 2012, p. 114).

Numa pesquisa sobre o uso do *software* geogebra como ferramenta pedagógica no estudo de funções quadráticas em turmas de 9º ano do ensino fundamental do Colégio Militar de Fortaleza**,** Souza (2012) constatou que o aplicativo possibilita um processo de ensino mais dinâmico tornando-se um instrumento pedagogicamente útil e proporcionando dessa maneira, a facilitação da aprendizagem do educando. Segundo ele:

> [...] o *software*, ao ser aplicado no estudo dessas funções, facilita e dinamiza o processo de aprendizagem dos alunos de forma que, ao passarem informações para o *software*, recebem instantaneamente respostas que correlacionam expressões algébricas com as suas respectivas representações gráficas. (SOUZA, 2012, p. 91)

Considerando às pesquisas acima citadas, este trabalho traz mais contribuições aos estudos já realizados uma vez que analisamos o uso do *software* geogebra, como instrumento pedagógico inserido num processo de aprendizagem com a mediação, identificando as suas contribuições para a construção dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas.

Encontra-se no Apêndice A deste trabalho um texto com uma apresentação mais detalhada sobre o *software* geogebra e também com algumas de suas ferramentas e aplicações voltadas para o aprendizado das funções quadráticas, dentre elas a identificação dos pontos notáveis e o estudo da variação dos coeficientes e do discriminante desta função.

No capítulo seguinte abordaremos a fundamentação teórica desta pesquisa.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação teórica desta pesquisa apóia-se na teoria sociointeracionista de Vygotsky (1993, 1998, 2000), uma vez que para alcançarmos os objetivos deste trabalho, necessitamos investigar a formação de conceitos referentes ao estudo das funções quadráticas mediado pela utilização do *software* geogebra.

Neste contexto a abordagem de Vygotsky poderá oferecer subsídios teóricos sobre o processo de aprendizagem com a mediação.

Para uma maior compreensão do pensamento de Vygotsky necessitamos de um aprofundamento em alguns pressupostos de sua teoria, tais como: a mediação, o processo de internalização, a zona de desenvolvimento proximal e a formação de conceitos.

Considerando que o público pesquisado neste trabalho se trata de jovens e que o objeto desta pesquisa é o uso do *software* geogebra como instrumento de mediação para a aprendizagem, inicialmente discutiremos um pouco sobre a construção do conhecimento no mundo globalizado das tecnologias.

3.1 O conhecimento no mundo das tecnologias digitais

Estamos em um mundo onde o surgimento e a evolução das tecnologias digitais modifica a sociedade, influenciando nos costumes, na cultura, nas relações humanas e também na forma como as pessoas aprendem. Sobre isso D'Ambrosio (2005, p. 112) afirma que "estamos vivendo um período em que os meios de captar informação e o processamento da informação de cada indivíduo encontram nas comunicações e na informática instrumentos auxiliares de alcance inimaginável em outros tempos."

Com os recursos das tecnologias e o advento da internet já é possível armazenar informações e trocar conhecimentos de modo instantâneo. Hoje as informações e comunicações já podem ser produzidas e acessadas por diversas mídias, como o celular, o *tablet*, o *notebook* e até as TVs *smart*.

Os jovens da atualidade já são considerados nativos desta era digital. Percebemos isso ao analisarmos algumas práticas comuns em seu dia a dia, como ouvir música, jogar on-line, conversar com amigos por mensagens instantâneas, assistir vídeos da internet ou trocar fotos e arquivos via mensagens de celular. Neste contexto encontramos uma juventude acostumada a interagir e explorar.

Parnaiba e Gobbi (2010) reforçam esta característica da juventude atual destacando que:

> Esse personagem é um nativo digital, nascido rodeado pela tecnologia digital, ele está acostumado a interagir, explorar, construir, descobrir. Ele é "produto" de uma sociedade cercada pelas mais diferentes tecnologias e estas são, por sua vez, não apenas instrumentos nas mãos dessa geração, mas ferramentas que integram o perfil desses jovens. (PARNAIBA; GOBBI, 2010, p. 2)

Como muitos destes estes jovens vivem imersos na internet e cercados por celulares, videogames e câmeras digitais, eles acabam por serem bem diferentes das gerações anteriores, e isso pode ser observado na sua personalidade, na sua forma de se divertir e também no modo de aprender, que é caracterizada por algo mais ativo, do tipo aprender fazendo.

Esta geração não se conforma em ser apenas espectadora dos acontecimentos. Ela cria, modifica, personaliza, expressa sua opinião, critica, analisa, simula, constrói e desconstrói, tudo em tempo real. Os nativos digitais estão acostumados a buscar pelas informações que lhes interessam e a interagir com quem a disponibilizou, além disso, também constroem informações e as transmitem. (PARNAIBA; GOBBI,2010)

O uso do aparelho celular tem se apresentado como uma característica da juventude atual, evidenciando a sua conectividade e forma de se comunicar. O telefone celular tornou-se um aparato tecnológico que faz parte de um novo contexto comunicacional dos jovens, já que nele diferentes meios de comunicação podem ser realizados, como troca de textos, sons, imagens e vídeos, além de estabelecer uma conexão com o mundo globalizado. (ARRAIS, 2014)

A internet vem possibilitando a interação destes jovens com pessoas de lugares e culturas diferentes, rompendo fronteiras geográficas, lhes dando acesso a informações e conhecimentos globais que lhe proporcionam novas vivências e experiências voltadas para uma aprendizagem mais interativa.

Assim, percebemos que num contexto de aprendizagem, as tecnologias permitem a interatividade do aluno com o conhecimento, com outros alunos e com o professor, a partir do momento, em que se propõe um ensino que considera como prioridade as formas de aprendizagens e, consequentemente, os estudantes. (BARROS; CARVALHO, 2011)

A possibilidade de aprender com a mediação das ferramentas tecnológicas implica em rever metodologias de ensino e aprendizagem, pois neste novo processo, o jovem precisa interagir para constrói seu próprio conhecimento, e não apenas ser ouvinte, ou um mero expectador.

Sendo os alunos, nativos digitais, cabe aos educadores adaptarem seus métodos de ensino e aprendizagem para torná-los mais eficiência neste contexto. Pois a forma de aprender desta nova geração é caracterizada pelo aprender fazendo, e isso gera em alguns casos, certo descompasso com a forma como os conteúdos são trabalhados na escola.

Para Parnaiba e Gobbi (2010, p. 8) o professor continua sendo uma figura importante na era digital. "Porém, sua postura deixa de ser a de transmissor absoluto do conhecimento, e passa a ser a de facilitador das descobertas, tudo isso em um novo processo de ensino e aprendizagem."

É importante destacar que não se trata apenas de implantar tecnologias nas salas de aulas, mas usá-las de modos planejado, considerando as interações socais.

Neste contexto de conhecimento inserido no mundo das tecnologias digitais**,** Barros e Carvalho (2011) enfatizam a influência de Vygotsky e a importância das interações sociais neste processo de aprendizagem. Elas destacam que:

> O processo de aprendizagem pelo qual o sujeito passa quando está diante de um objeto de conhecimento pode ser observado sob várias concepções, todavia, quando se entende que a aprendizagem é um processo ativo que conduz a transformações no homem, o olhar se desvia para uma orientação em que o processo se estabelece pelas relações, sobretudo, pelas relações sociais. Esta idéia nos remete a Vygotsky (1998), para quem a questão da relação entre os processos de desenvolvimento e de aprendizagem é central. Mas é o aprendizado que possibilita o despertar de processos internos de desenvolvimento, ou seja, o aprendizado precede o desenvolvimento. Quanto mais se oferece à criança mais chance ela tem para se desenvolver. (BARROS; CARVALHO, 2011, p. 221)

Ressalta-se que todos esses processos cognitivos têm como base a mediação, pois nas ideias de Vygotsky (1998), enquanto sujeito o homem através da mediação tem acesso ao conhecimento do mundo. Isto operado por instrumentos, que podem ser tecnológicos, e por sistemas de signos como a fala, os gestos, ou as imagens. Portanto enfatizamos a construção do conhecimento na era das tecnologias digitais na interação mediada por várias relações.

Neste contexto sociointeracionista, o jovem é quem constrói seu próprio conhecimento, sendo auxiliado pelo professor, que ajuda o estudante, instigando-o a avançar e a aguçar a sua curiosidade, acompanhando o processo de construção do conhecimento do aluno, sempre atento ao fato de que cada ser humano tem sua forma peculiar de aprendizagem, exercendo, assim, papel de mediador da aprendizagem. (BARROS; CARVALHO, 2011)

3.2 O conceito de mediação

Nos estudos de Vygotsky (1998) o processo de mediação pode ser compreendido sob duas possibilidades: *a mediação pelo individuo*, que em situação de aprendizagem este indivíduo pode ser representado pelo professor, por um adulto ou até mesmo por outro estudante detentor de maior saber; e *a mediação através instrumentos e signos*, “incluindo-se como instrumentos os materiais didáticos e como signos, a linguagem, os vários sistemas de contagem, as técnicas mnemônicas, os sistemas simbólicos algébricos, os esquemas, diagramas, mapas, desenhos e todo tipo de signos convencionais.” (MOYSÉS, 1997, p. 23)

A cerca do papel do professor como mediador da aprendizagem Oliveira (2016, p. 139 - 140) enfatiza que:

> [...] a primeira função do professor é mostrar ao educando que ele é um mediador, uma ponte que pode ajudá-lo, com seu consentimento, a atingir os seus próprios objetivos e encontrar o seu próprio rumo. O docente pode trazer as situações do mundo para a sala de aula e explorá-las, enriquecê-las paralelamente com a matéria, pode trabalhar questões difíceis de maneira divertida, trocar experiências, ser muito mais que um professor para seus alunos, considerando a vivência do aluno, seu dia-a-dia, suas questões familiares, seu emprego, seu lazer.

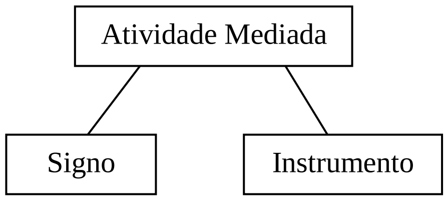
O professor no contexto de mediador não se resume a um transmissor de conteúdo, seu objetivo está na orientação dos estudantes para o despertar de um processo de construção do conhecimento.

Logo um professor que tem postura de mediador é aquele que não se considera como detentor absoluto do saber, mas como alguém que irá colaborar com o educando na construção do conhecimento. Sendo assim sua metodologia de trabalho busca valorizar as relações sociais levando o aluno a ter uma participação mais ativa nas aulas. (OLIVEIRA, 2016)

Para Vygotsky (1998), a relação do homem com o mundo não se dá de forma direta, e sim mediada, seja por outras pessoas, seja por instrumentos e signos, estando estes dois elementos mutuamente ligados.

Sobre os instrumentos e signos destaca-se que seus pontos de semelhança repousam na função mediadora que os caracteriza. Podemos expressar a relação lógica entre o uso de signos e o de instrumentos usando o esquema da Figura 2, que mostra esses conceitos incluídos dentro do conceito mais amplo de atividade mediada. (VYGOTSKY, 1998)

Figura 2: Relação entre o uso de signos e instrumentos em atividade mediada



Fonte: Vygotsky (1998, p. 71)

Em nosso cotidiano é fácil perceber a importância e correlação entre instrumento e signo, basta para tanto refletirmos sobre o processo de interação social por meio da escrita, na qual o homem ao desempenhar a ação de escrever é mediado por instrumentos de escrita, tais como a caneta, o papel, ou até mesmo o computador. A escrita por sua vez representa signos produzidos pelo homem para representar o seu pensamento em forma de palavras.

Numa perspectiva educacional o professor por sua vez, ao ministrar aulas, utiliza-se de instrumentos de mediação como o pincel, o quadro branco, o *datashow* e outros. Como também de sinos como a fala, a escrita ou as imagens.

Uma característica dos instrumentos reside na sua capacidade de ampliação das potencialidades humanas, pois ao se interpor entre o homem e o mundo, eles ampliam as possibilidades de transformação da natureza: o machado, por exemplo, permite um corte mais afiado e preciso, uma vasilha facilita o armazenamento de água etc. Apesar de alguns animais também fazerem uso limitado de instrumentos, somente o homem possui a capacidade de criá-los e manipulá-los de forma mais sofisticada. (MONROE, 2016)

Vygotsky (1998, p. 70) afirma que o “instrumento refere-se à função indireta de um objeto como meio para realizar alguma atividade.” E enfatiza ainda a importância do uso dos instrumentos como objetos pelos quais o homem transforma a natureza e, ao fazê-lo, transforma a si mesmo.

Sobre os signos é importante ressaltar que se trata de um elemento inerente apenas aos seres humanos. A linguagem, por exemplo, é toda composta de signos. E em se tratando de linguagem percebemos que ao mencionarmos uma palavra, tipo: mesa, nosso inconsciente remete-se imediatamente a imagem do objeto concreto mesa. Sobre isso Monroe (2016, p. 2) enfatiza que “para o homem, a capacidade de construir representações mentais que substituam os objetos do mundo real é um traço evolutivo importante.”

Vygotsky (1998) corrobora com este pensamento ao salientar que:

> Signos e palavras constituem para as crianças, primeiro e acima de tudo, um meio de contato social com outras pessoas. As funções cognitivas e comunicativas da linguagem tornam-se, então, a base de uma forma nova e superior de atividade nas crianças, distinguindo-as dos animais. (VYGOTSKY, 1998, p. 38)

É importante destacar que os signos (a linguagem, a escrita, os números), assim como os instrumentos (objetos), são criados pelas sociedades ao longo da história, portanto modificam-se em sua forma e função social dependendo da cultura na qual estão inseridos. No pensamento de Vygotsky (1998) a mediação pelo uso de instrumentos e signos se dá pela interação homem-ambiente.

Neste contexto de mediação, também destacamos as ideias do pesquisador romeno Reuven Feuerstein[2] e suas pesquisas em experiência de aprendizagem mediada, na qual se destaca a importância das interações sociais no processo de aprendizagem, evidenciando neste cenário a dupla "mediador-mediado".

> De acordo com Feuerstein, para se produzir uma aprendizagem significativa torna-se imprescindível a dupla 'mediador-mediado' que, ao desenvolver os critérios de mediação, possibilita a interação e a modificabilidade, já que é somente por meio da interação do sujeito com outros sujeitos capazes de mediar informações necessárias, estando estes sujeitos integrados a um meio ambiente favorável e estimulante, que o desenvolvimento cognitivo acontece. (TURRA, 2007, p. 300)

No pensamento de Feuerstein, a mediação numa perspectiva educacional se dá através da integração de três elementos básicos, sendo eles, o professor que assume o papel de mediador, o aluno, que será o mediado e as relações sociais entre estes sujeitos, de modo que o educador tem o papel de estabelecer à ligação entre o mediado e o conhecimento podendo para isso utilizar-se de instrumentos e signos. Logo, para Feuerstein, mediar é possibilitar interações de forma a conduzir o sujeito a pensar. (TURRA, 2007)

Percebemos que as idéias Feuerstein sobre aprendizagem mediada se aproximam do pensamento Vygotsky, pois ambos consideram que a mediação tem como princípio estimular o indivíduo a interagir com o outro e com o meio, tornando-o capaz de modificá-los e consequentemente modificando também a si mesmo.

---

[2] Reuven Feuerstein (1921 – 2014) foi criador da teoria da Modificabilidade Cognitiva Estrutural, da teoria da Experiência da Aprendizagem Mediada e do Programa de Enriquecimento Instrumental.

3.3 O processo de internalização

No desenvolvimento de atividades mediadas por instrumentos e signos o estudante passa por fases de transformações que a princípio se dá de modo externo para uma posterior interiorização do conhecimento no indivíduo.

Para Vygotsky (1998, p. 74) a internalização é “a reconstrução interna de uma operação externa” e sobre esses processos de transformações ele enfatiza que a internalização acontece conforme as seguintes fases:

> 1) Uma operação que inicialmente representa uma atividade externa é reconstruída e começa a ocorrer internamente.
>
> 2) Um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal.
>
> 3) A transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é o resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento.
>
> (VYGOTSKY, 1998, p. 75)

Numa experiência realizada por Vygotsky (1998), podemos perceber o desenvolvimento dessas fases numa simples ação de estímulo e resposta mediada por um signo. Nessa experiência uma pessoa ao ver a imagem de um cavalo (estimulo) deveria apertar um determinado botão (resposta). Para mediar esta ação, foi colocado a figura de um trenó (signo) em cima do botão a ser apertado, nesse momento a pessoa passou a associa a figura do cavalo a do trenó para executar a tarefa, porém aqui o signo encontra-se numa situação *externa* ao indivíduo, pois foi inserido pelo pesquisador, num processo interpessoal. (VYGOTSKY, 1998)

Em outro momento este sujeito ao executar a mesma tarefa percebe que a figura do trenó foi substituída pela figura de um pão, e de imediato diz “Não, eu quero a tecla do trenó”, ocorre neste momento que o signo assumiu uma situação *interna* do indivíduo, passando então para um processo intrapessoal. E em um momento posterior a internalização desta ação acontecerá quando o sujeito passa a elaborar seus próprios signos. Neste momento ela dirá: “Não preciso mais da figura do trenó. Eu farei por mim mesma.” (VYGOTSKY, 1998)

Sobre o desenvolvimento das fases num processo de internalização, Moysés (1997, p. 26) ressalta que “com o passar do tempo a criança deixa de necessitar desse auxílio externo, e passa a utilizar signos internos. Esses nada mais são do que representações mentais que substituem os objetos do mundo real”.

É importante destacar a relevância das interações sociais nesse processo, Monroe (2016, p. 2) reforça isso ao dizer que “a interação tem uma função central no processo de internalização” e Moysés (1997, p. 32) corrobora com este pensamento ao enfatizar que a internalização é “um processo que teve seu início nas relações interpessoais – interpsicológico, portanto transforma-se em um outro intrapsicológico.”

Vygotsky (1998) entende que a internalização dos sistemas de signos produzidos culturalmente provoca transformações comportamentais no indivíduo, levando-os agir sobre a sociedade.

3.4 A zona de desenvolvimento proximal

Possivelmente uma das maiores contribuições dos estudos desenvolvidos por Vygotsky no ramo da psicologia está nas suas implicações educacionais.

Uma grande questão investigada por ele consiste em relacionar o desenvolvimento do aluno com a sua aprendizagem. A princípio três concepções foram estabelecidas com o propósito de esclarecer esta relação, são elas:

(1) O desenvolvimento do estudante acontece de modo independente ao seu aprendizado, de tal modo que o aprendizado não seria algo que traga influência para o desenvolvimento da pessoa, ou vice-versa. Portanto, nesta concepção o desenvolvimento não se relaciona com o aprendizado. Vygotsky (1998) aponta Piaget como um representante desta concepção;

(2) A aprendizagem está diretamente relacionada com o desenvolvimento, de tal modo que a considerar que aprendizagem é desenvolvimento, pois ambos ocorrem simultaneamente;

(3) Trata-se de um meio termo entre as duas anteriores, é por tanto uma combinação entre elas, e retrata que o desenvolvimento se baseia em dois processos diferentes, a maturação e o aprendizado, porém relacionados e mutuamente dependentes, sendo que um influencia o outro. Aqui se entende que o desenvolvimento do aluno, ou seja, a maturação precede o aprendizado, pois o estudante que não esteja plenamente desenvolvido física e psicologicamente falando, não teria, portanto, condições para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

Porém há uma correlação entre esses processos, de tal modo que à medida que o aprendizado se consolida no discente, ele faz com que seu desenvolvimento físico e cognitivo avance cada vês mais, pois [...] o processo de maturação prepara e torna possível um processo específico de aprendizado. O processo de aprendizado, então, estimula e empurra para frente o processo de maturação.” (VYGOTSKY, 1998, p. 106).

Os defensores desta linha de pensamento entendem que o estudante ao dar um passo no aprendizado, está dando dois passos no desenvolvimento, ou seja, os níveis de aprendizado e o desenvolvimento jamais se encontrarão.

A percepção de Vygotsky frente às três concepções anteriormente citadas é de rejeição, uma vez que ele estabelece uma nova abordagem para a correlação entre aprendizagem e o desenvolvimento do estudante, estabelecendo o conceito de zona de desenvolvimento proximal.

Segundo ele o aprendizado começa muito antes dos discentes frequentarem a escola. Qualquer situação de aprendizado escolar tem uma história prévia. Por exemplo, antes de aprender aritmética o estudante já lidou com noções de quantidade, de adição e outras operações, de comparação de tamanhos, etc.

Para a compreensão do conceito de zona de desenvolvimento proximal algumas ideias iniciais precisam ser conhecidas, entre elas o entendimento de *nível de desenvolvimento real* e *nível de desenvolvimento potencial*.

Ao percebermos que um estudante possui a capacidade de desenvolver uma ação sem que seja necessária a ajuda de um adulto ou de outro discente mais capaz, entendemos que o conhecimento desta ação já está consolidado neste estudante, por exemplo, se um indivíduo já consegue resolver sozinho uma adição, entendemos então que este conhecimento está internalizado neste sujeito, logo no que se refere à aprendizagem, este conhecimento está em seu *nível de desenvolvimento real*.

Os conhecimentos pertencentes ao *nível de desenvolvimento potencial* do estudante serão, portanto, aqueles em que ela não internalizou, logo estão em processo de maturação, porém o seu desenvolvimento físico e cognitivo já oferece potencial para aquisição deste conhecimento, e isso pode ser percebido quando o aluno consegue desenvolver a ação a ser aprendida com o auxílio de um adulto ou outro discente mais adiantado.

Tomando como exemplo o indivíduo anteriormente citado que já tem consolidado em seu *nível de desenvolvimento real* a aprendizagem da adição, esta pode, por exemplo, ter em seu *nível de desenvolvimento potencial* a aprendizagem da multiplicação, quando se percebe que com o auxílio de um adulto, este estudante consegue resolver operações simples de multiplicação, entendendo que esta operação consiste na soma de parcelas iguais.

O *nível de desenvolvimento potencial* também pode ser percebido numa situação onde um aluno que ainda não estudou o conteúdo de funções quadráticas, por exemplo, numa ação didática consegue resolver juntamente com o professor um problema envolvendo este saber, sendo capaz de acompanhar o raciocínio do professor ou até mesmo de resolver o problema em questão sendo auxiliado pelo professor. Neste contexto o conhecimento sobre funções quadráticas, embora ainda não tenha sido estudado pelo aluno, pertencem ao seu *nível de desenvolvimento potencial*.

Compreendido os conceitos de *nível de desenvolvimento real* e *nível de desenvolvimento potencial*, Vygotsky (1998) define que zona de desenvolvimento proximal consistirá na aproximação entre os níveis de desenvolvimento *real* e *potencial*, a partir da solução de problemas sob a mediação de adultos ou de colegas que possuem mais conhecimento.

Sobre a zona de desenvolvimento proximal, Vygotsky ressalta que:

> Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VYGOTSKY, 1998, p. 112).

Neste processo de aprendizagem a mediação assume papel importantíssimo uma vez que será a partir da orientação do professor que o estudante passará a internalizar os conhecimentos que inicialmente estão no seu *nível de desenvolvimento potencial*, e posteriormente serão migrados para o seu *nível de desenvolvimento real*, a partir do momento em que este discente consiga realizar a tarefa proposta sem a ajuda do professor.

Para Vygotsky (1998, p. 113) “[...] aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã”. Pois se o aluno consegue resolver problemas com o fornecimento de dicas ou ajuda, ou se o professor inicia a solução e o estudante conclui, ou ainda, se o aluno resolve o problema junto com o professor, esta ação é um indicativo que, ao se internalizar o aprendizado, o estudante conseguirá resolver o problema sozinho.

Logo a zona de desenvolvimento proximal permite-nos perceber os conhecimentos futuros que o discente em seu processo de maturação pode alcançar. Nas ideias de Monroe (2016), o professor na interação com o aluno assume o papel de mediar o acesso a diferentes saberes. Levando os estudantes a construírem seus próprios conhecimentos baseados nos trabalhados realizados com o docente ou com os colegas.

Neves e Damiani (2006, p. 9) ressaltam a importância do professor nesse processo ao afirmar que:

> Ele está sempre, em seu esforço pedagógico, procurando criar Zonas de Desenvolvimento Proximal (ZDP's), isto é, atuando como elemento de intervenção, de ajuda. Na ZDP, o professor atua de forma explícita, interferindo no desenvolvimento dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente. Vygotsky, dessa forma, resgata a importância da escola e do papel do professor como agentes indispensáveis do processo de ensino-aprendizagem.

É possível estabelecermos uma relação entre a zona de desenvolvimento proximal e a internalização, compreendendo que os procedimentos de assistência ao estudante, desenvolvidos pelo professor ao longo do processo da zona de desenvolvimento proximal, consistem nas transformações de reconstrução interna de um conhecimento inerente a uma operação que se apresenta inicialmente de modo externo e que ao final do processo, quando o estudante conseguir realizar esta operação por si só, entendemos então que este conhecimento foi internalizado por ele.

3.5 A formação de conceitos

Na concepção vygotskiana, a formação de conceitos consiste em algo longo e complexo. O desenvolvimento dos conceitos pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais tais como a atenção, a memória lógica, a abstração, a capacidade para comparar e diferenciar. Suas experiências mostram que o ensino por meio da verbalização direta do conceito é improdutivo. Segundo ele:

> Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio, uma repetição das palavras pela criança, semelhante a um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo. (VYGOTSKY, 1993, p. 72)

Em situações do cotidiano, antes mesmo de ingressarem na escola, os estudantes se deparam com muitos momentos de aprendizagem, na qual necessitam realizar operações matemáticas por meio da contagem ou da quantificação de objetos. O mundo das formas geométricas, desde cedo, já faz parte do dia-a-dia dos estudantes. E em muitas ocasiões elas recebem informações e instruções dos pais, dos adultos e até mesmo dos colegas com maior saber. Essas informações levam os discentes a terem acesso a diversos conhecimentos que ao longo da sua jornada de vida se consolidam em novas aprendizagens.

Vygotsky (1993) entende que estes conhecimentos construídos pela experiência pessoal do estudante no contato com os objetos e na interação com as pessoas, antes mesmos do ingresso na vida escolar, são válidos e os denominou de *conceitos espontâneos* ou *cotidianos*.

Já numa situação de ensino formal, típica do meio escolar, na qual os alunos são levados a novas informações e instruções, porém apresentadas de forma mais organizada e hierarquicamente sistematizadas, levam-na a aquisição de novas aprendizagens. Este tipo de conhecimento, em geral desenvolvido na escola, Vygotsky (1993) denominou de *conceitos científicos*.

A situação escolar é, por excelência, propícia à aquisição desse tipo de conceito. Sua apreensão exige que seja intencionalmente trabalhado num processo de interação, por exemplo, entre professor e aluno. Ou seja, implica reconstrução do saber mediante estratégias adequadas, nas quais o professor atue como mediador entre o aluno e o objeto de conhecimento.

Na formação dos *conceitos científicos,* o professor assume então um papel de extrema importância atuando como mediador no processo de aprendizagem. Sobre este entendimento Moysés (1997, p. 35 -36) ressalta que:

> A principal tarefa do professor ao transmitir ou ajudar o aluno a construir esse tipo de conceito é levá-lo a estabelecer um enlace indireto com o objeto por meio das abstrações em torno de suas propriedades e da compreensão das relações que ele mantém com um conhecimento mais amplo. Ao contrário do espontâneo o conceito científico só se elabora intencionalmente, isto é, pressupõe uma relação consciente e consentida entre o sujeito e o objeto do conhecimento.

Podemos perceber que os *conceitos espontâneos* são um produto do aprendizado pré-escolar, onde o estudante aprende no seu dia-a-dia, no contato com objetos, fatos, fenômenos e principalmente na interação com as pessoas. Enquanto que os *conceitos científicos* são produto do aprendizado escolar, sendo aqueles sistematizados e transmitidos intencionalmente, em geral, segundo uma metodologia específica. Portanto a ausência de uma sistemática é a principal diferença entre estes conceitos.

Porém as conclusões de Vygotsky (1993) sobre a formação de conceitos emanam do confronto que ele estabeleceu entre o desenvolvimento dos conceitos *espontâneos* e *científicos*.

Para ele, esses conceitos não são aprendidos mecanicamente, mas evoluem com ajuda de vigorosa atividade mental por parte do próprio estudante. Ele acredita que os dois processos, o desenvolvimento dos *conceitos espontâneos* e o desenvolvimento dos *conceitos* *científicos*, se relacionam e se influenciam constantemente. Pois “[...] o domínio de um nível mais elevado na esfera dos *conceitos científicos* também eleva o nível dos *conceitos espontâneos*” (VYGOTSKY, 1993, p. 92)

Logo a formação de conceitos aflui do desenvolvimento dos *conceitos espontâneos*, ocorrendo segundo Vygotsky (1993) de modo ascendente, enquanto que o desenvolvimento dos *conceitos científicos* ocorre de modo descendente, porém ambos convergindo para um nível mais elementar e concreto do conhecimento.

3.6 A relação entre a teoria vygotskiana da aprendizagem com a mediação e a referida pesquisa

No desenvolvimento deste trabalho, realizamos com os sujeitos desta pesquisa uma intervenção metodológica que contará com a execução de encontros de aprendizagem utilizando a tecnologia. Os processos de aprendizagem desenvolvidos nestes encontros contarão com a mediação do *software* geogebra, de modo que possamos analisar de que forma o uso deste aplicativo pode contribuir para a internalização de conceitos referentes ao conteúdo de funções quadráticas.

Vimos nas seções anteriores que, segundo o pensamento de Vygotsky (1998), toda ação pressupõe uma mediação. Portanto, o desenvolvimento dos encontros da intervenção metodológica proposto nesta pesquisa adotará os pressupostos da mediação pedagógica, logo a aprendizagem dos conceitos referentes às funções quadráticas ocorrerão com a mediação pelo *indivíduo*, que nesta investigação será representado por este professor pesquisador, e a partir de *instrumentos*, aqui caracterizado pelo uso do *software* geogebra e *signos,* representado nesta pesquisa pela fala, escrita, símbolos matemáticos e gráficos.

No processo de aprendizagem com os alunos ao longo desta pesquisa, quando do desenvolvimento de atividades mediadas por instrumentos (*software* geogebra) e signos (fala, símbolos matemáticos e gráficos), buscamos inicialmente representar as atividades de modo externo ao discente, para que este ao reconstruí-la comece a interiorizá-la, ocorrendo assim à transformação do processo interpessoal para o processo intrapessoal, levando o estudante a internalização dos conhecimentos.

A zona de desenvolvimento proximal encontra-se muito presente nas atividades dos encontros da intervenção metodológica, uma vez que buscamos aproximar a distância entre o *nível de desenvolvimento real,* e o *nível de desenvolvimento potencial,* inicialmente a partir da solução de problemas sob a orientação do professor pesquisador ou em colaboração com os alunos mais capazes, para uma posterior resolução destes problemas de modo independente pelo aluno.

Com base nas ideias de Vygotsky (1993), a compreensão plena dos conceitos referentes às funções quadráticas ocorre a partir da convergência entre os conhecimentos prévios dos alunos (*conceitos espontâneos)*, sendo aqueles que os estudantes aprendem em sua experiência de vida diária e identificados nesta pesquisa por meio da análise do teste de sondagem de conhecimentos realizado antes dos encontros da intervenção metodológica, e os conhecimentos adquiridos no âmbito da escola (*conceitos científicos*), sendo aqueles oriundos dos ensinamentos emanados nos encontros da intervenção metodológica proporcionada por esta pesquisa.

4 METODOLOGIA

Este capítulo abordará os procedimentos metodológicos desta pesquisa, destacando sua natureza, tipo e características quanto à problemática e os objetivos traçados.

Também serão apresentados aqui o *lócus* e os sujeitos da pesquisa, bem como o delineamento de toda pesquisa de campo que contou com elementos de uma pesquisa participante, e que se deu por meio da realização de uma intervenção metodológica que se encontra detalhada na seção 4.4.

A forma de coleta de dados desta pesquisa também é apresentada neste capítulo.

4.1 Características da pesquisa

Em consonância com o quadro teórico apresentado até aqui, concordamos que, do ponto de vista da sua natureza, este trabalho caracteriza-se por uma pesquisa aplicada, pois objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de um problema específico (PRODANOV; FREITAS, 2013), que em nosso caso refere-se às dificuldades na aprendizagem das funções quadráticas pelos alunos a serem pesquisados.

Em decorrência dos objetivos a serem alcançados, identificamos aqui uma pesquisa exploratória uma vez que seu planejamento é bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado.

Segundo Gil (2008, p. 27):

> As pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar uma visão geral, de tipo aproximativo, a cerca de determinado fato. Este tipo de pesquisa é realizado especialmente quando o tema escolhido é pouco explorado e torna-se difícil sobre ele formular hipóteses precisas e operacionalizáveis.

Quanto à forma de abordagem do problema, temos aqui uma pesquisa qualitativa, pois nesse tipo de estudo, cabe ao pesquisador fazer uma análise e interpretação mais aprofundada sobre a complexidade do comportamento humano, descrevendo com mais acuidade sobre as investigações, hábitos e procedimentos. (LAKATOS; MARCONI, 2004)

Nas ideias de Prodanov e Freitas, (2013) a pesquisa com abordagem qualitativa tem o ambiente como fonte direta dos dados, pois aqui o pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo. Os dados coletados nessas pesquisas são descritivos, retratando o maior número possível de elementos existentes na realidade estudada. Este tipo de pesquisa preocupa-se muito mais com o processo do que com o produto.

Assim, nesta pesquisa ao analisarmos os dados sobre o desempenho dos alunos após a intervenção metodológica, temos o interesse não só de saber o seu resultado, mais de analisar a compreensão dos alunos sobre os conceitos relacionados às funções quadráticas quando da mediação pelo *software* geogebra, para que com isso possamos identificar de que modo o uso deste aplicativo pode contribuir com a aprendizagem.

Do ponto de vista dos procedimentos técnicos, ou seja, a maneira pela qual obtemos os dados necessários para a elaboração da pesquisa, adotou-se aqui elementos de uma pesquisa participante uma vez que esta é uma modalidade de investigação que segundo Gil (2008, p. 31) “[...] se caracteriza pelo envolvimento do pesquisador e dos pesquisados no processo de pesquisa”.

Nesta pesquisa tanto o pesquisador quanto os participantes estão envolvidos no trabalho de intervenção metodológica de forma cooperativa.

Almeja-se aqui não apenas um simples levantamento de dados ou de relatórios, pois pretendemos desempenhar um papel ativo na própria realidade dos fatos observados.

Detalharemos na seção 4.4 como se deu o desenvolvimento da intervenção metodológica realizada nesta pesquisa.

4.2 O *lócus* da pesquisa

A referida pesquisa realizou-se numa escola pública de ensino médio situada no município de Massapê-CE.

O município de Massapê está localizado na região norte do estado do Ceará e, segundo levantamento do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE realizado em 2016, possui cerca de 37.892 habitantes, contando com Índice de Desenvolvimento Humano Municipal – IDHM , de 0,616, conforme levantamento realizado em 2010 (IBGE, 2017). Tal índice é considerado baixo quando comparado aos demais municípios deste estado.

A escolha da referida instituição de ensino se deu obedecendo a critério de análise da proficiência da escola em matemática, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM de 2014, que foi de 409 pontos e em 2015, que foi de 406 pontos (QEDU, 2017), na qual a escola, por conta destes resultados, encontra-se situada entre as menores proficiências em matemática quando comparada as demais escolas da abrangência da 6ª Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação – CREDE 6.

4.3 Os sujeitos da pesquisa

Os sujeitos participantes desta pesquisa foram constituídos de 12 alunos da 1.ª série do ensino médio. Todos estudantes do turno da manhã da escola anteriormente mencionada.

A quantidade de alunos delimitada pela pesquisa foi indicada pela limitação de computadores do laboratório de informática da escola, que só dispunha de 12 computadores em funcionamento. Devido à natureza das atividades realizadas na intervenção metodológica, sugere-se que cada aluno esteja em um computador.

A escolha por alunos da 1.ª série do ensino médio se deu pelo fato da presença do estudo das funções quadráticas no currículo programático desta série, o que coloca os alunos em situação privilegiada, pois indica que eles possuem um *nível de desenvolvimento potencial* para o aprendizado deste conteúdo.

O fato de serem alunos do turno da manhã se deu pelo motivo da intervenção metodológica desta pesquisa ter ocorrido no turno da tarde, logo no contraturno escolar dos estudantes.

A escolha dos alunos aconteceu por meio de adesão e disponibilidade para com o propósito da pesquisa. Ressaltamos que houve um período de inscrição, na qual 22 alunos se apresentaram interessados em participar da pesquisa, porém apenas 12 participaram da pesquisa sendo que o critério de escolha se deu pela ordem de inscrição.

4.4 Delineando a pesquisa de campo

O trabalho de campo desta pesquisa foi realizado no mês de maio 2017, envolvendo aplicações do teste de sondagem de conhecimentos e realização da intervenção metodológica.

O delineamento desta pesquisa constituiu-se de três etapas:

1ª ETAPA: Aplicação do teste de sondagem de conhecimentos antes da intervenção metodológica

Esta etapa caracterizou-se pela realização de um teste de sondagem de conhecimentos, para a identificação dos conhecimentos prévios, ou seja, dos *conceitos* *espontâneos* dos alunos sobre o conteúdo de funções quadráticas. Com este teste foi possível identificar o *nível de desenvolvimento real* dos sujeitos da pesquisa em relação ao aprendizado dos conceitos referentes ao conteúdo em questão.

O referido teste de sondagem de conhecimentos foi realizado no dia 2 de maio do ano em curso, no turno da tarde e contou com uma duração de 3 h/a.

O teste dispunha de 12 questões abrangendo o conceito e o reconhecimento de uma função quadrática, a construção do gráfico, a determinação dos zeros, a identificação do vértice da parábola, além de outros conhecimentos relacionados a este conteúdo.

Encontramos o modelo do teste de sondagem de conhecimentos no Apêndice R deste trabalho.

2ª ETAPA: Realização da intervenção metodológica

Esta etapa da intervenção metodológica configurou-se com a realização de cinco encontros que abordaram conceitos referentes ao conteúdo das funções quadráticas. Os encontros aconteceram entre os dias 3 e 9 de maio de 2017 no laboratório de informática da referida escola.

Os encontros ocorreram no turno da tarde, contemplando o contraturno dos estudantes. Cada encontro contou com uma carga horária de 4 h/a, perfazendo ao final desse processo uma carga horária total de 20 h/a.

Em jornada normal de sala de aula, segundo plano anual da escola, o conteúdo de função quadrática é trabalhado numa carga horária de aproximadamente 25 h/a. Percebemos que a intervenção metodológica acrescida do tempo de aplicação dos testes de sondagem de conhecimentos aproxima-se desta carga horária.

O período de realização desta intervenção metodológica foi escolhido estrategicamente pelo fato dos alunos ainda não terem contato com o conteúdo de funções quadráticas no seu programa curricular da sala de aula.

Veremos na caracterização dos sujeitos desta pesquisa (seção 5.1) que apenas um dos alunos investigados afirmou ter estudado funções quadráticas no ensino fundamental, porém este destacou que não se lembra mais do assunto. Os demais asseguraram nunca ter estudado este conteúdo.

O propósito desta intervenção metodológica consistiu na realização de atividades sobre o conteúdo de funções quadráticas, com a mediação do *software* geogebra para a internalização de *conceitos científicos*.

Cada encontro abordou uma temática relacionada a um assunto específico seja do *software* geogebra seja do conteúdo de funções quadráticas. Sendo eles:

- **1º Encontro:** Contemplou conhecimentos sobre o *software* geogebra e suas ferramentas, abordando também conhecimentos básicos sobre localização de pontos no plano cartesiano;
- **2º Encontro:** Estudou-se a compreensão do conceito de função quadrática e a identificação das suas raízes;
- **3º Encontro:** Abordou a construção do gráfico da função quadrática com a identificação dos pontos notáveis;
- **4º Encontro:** Analisou-se o comportamento do gráfico da função quadrática pela variação dos coeficientes *a*, *b*, *c* e do discriminante (Δ);
- **5º Encontro:** Resolveram-se problemas contextualizados envolvendo o conteúdo de funções quadráticas. (Destacamos que os problemas trabalhados neste encontro foram retirados do livro didático utilizado pelos alunos na escola)

Ressaltamos mais uma vez que as atividades realizadas nestes encontros contaram com a mediação do *software* geogebra, para tanto foi utilizado além dos computadores do laboratório de informática, pincel, quadro branco e um *datashow* ligado a um *notebook* na qual o professor pesquisador pode utilizar o *software* para dar exemplos e explicar conceitos referentes ao conteúdo de funções quadráticas.

Vale salientar que a mediação foi desenvolvida também pelo professor, aqui representado por este professor pesquisador.

Nesta etapa, destaca-se a zona de desenvolvimento proximal acontecendo à medida que o professor atua como mediador da aprendizagem, estabelecendo conexões entre os conceitos e auxiliando no processo de significação do conteúdo. (OLIVEIRA, 2016)

Também contribuiu para a ocorrência da zona de desenvolvimento proximal a participação do monitor do laboratório de informática da escola, que se constituía num aluno com maior saber, pois se tratava de um estudante da 3ª série do ensino médio com maiores habilidades tanto conceituais referentes ao conteúdo das funções quadráticas como na utilização do computador, e que pode colaborar com seus companheiros durante a realização das atividades para a internalização e compreensão dos *conceitos científicos* ali estudados.

O planejamento de cada encontro seguiu uma rotina semelhante para cada dia, que pode ser identificada por meio dos seguintes momentos:

- **1º Momento:** Explicação de conceitos com a mediação *software* geogebra e realização de atividades pelo professor com o acompanhamento dos alunos.
- **2º Momento:** Realização de atividades pelos estudantes com a mediação *software* geogebra.
- **3º Momento:** Momento de reflexão sobre as conclusões e aprendizagens suscitadas a partir das atividades realizadas com a mediação do *software* geogebra.
- **4º Momento:** Aplicação do questionário de identificação de aprendizagem.

Já sabemos que cada encontro contou com um tempo total de 4 h/a, porém não houve tempo fixo destinado para cada momento do encontro, o tempo destinado para cada momento variou dependendo da intensidade da explicação do professor, ou do envolvimento dos alunos no decorrer das atividades propostas, como também da participação dos estudantes ao longo do dia de estudo.

3ª ETAPA: Aplicação do teste de sondagem de conhecimentos após da intervenção metodológica

Esta etapa caracteriza-se pela nova aplicação do teste de sondagem de conhecimentos após a realização da intervenção metodológica, com o propósito de verificar se houve aprendizagem de conceitos referentes às funções quadráticas.

A nova aplicação do teste de sondagem de conhecimentos aconteceu no dia 10 de maio de 2017, ou seja, no dia seguinte ao término da intervenção metodológica. Foi realizada no turno da tarde e contou novamente com duração de 3 h/a.

Esta aplicação possibilitou a comparação entre os conhecimentos dos alunos sobre funções quadráticas, antes e depois da realização da intervenção metodológica, conferindo assim o seu nível de aprendizagem.

É importante destacar que o objetivo principal desta pesquisa é analisar o uso do *software* geogebra, como instrumento pedagógico inserido num processo de aprendizagem com a mediação, e suas contribuições para a construção dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas. Logo o foco aqui não se trata apenas da verificação da aprendizagem dos alunos, mas uma vez constatado que houve aprendizado, cabe, portanto, a investigação das possíveis contribuições do *software* para esta aprendizagem.

As observações e os instrumentos de coleta de dados, principalmente os questionários e as atividades realizadas durante a intervenção metodológica se apresentaram de fundamental importância para a identificação das contribuições do uso do *software* na aprendizagem das funções quadráticas.

4.5 A coleta de dados

Nesta pesquisa a coleta de dados contou com a utilização dos seguintes procedimentos e instrumentos:

A observação

Entendemos que a observação pode ser muito útil para a obtenção de informações, pois mais do que perguntar, podemos constatar um comportamento ou uma ação que muitas vezes não é captada pelos questionários. Na pesquisa priorizou-se a *observação assistemática***,** pois esta técnica da observação também denominada espontânea, informal, ou simples, consiste em recolher e registrar os fatos da realidade sem que o pesquisador utilize meios técnicos especiais ou precise fazer perguntas diretas. (PRODANOV; FREITAS. 2013)

Quanto à posição do pesquisador no processo de observação, adotamos a postura de *observador participante*, pois conforme define Becker (1997, p.84)

> O observador participante coleta dados através de sua participação na vida cotidiana do grupo ou organizado que estuda. Ele observa as pessoas que está estudando para ver as situações com que se depara normalmente e como se comporta diante delas. Entabula conversação com alguns ou com todos os participantes desta situação e decorre as interpretações que eles têm sobre os acontecimentos que observou.

Neste tipo de observação, assim como foi realizado neste trabalho, o pesquisador se integra a um grupo de pessoas para estudá-lo, coletando dados durante os momentos de conversa, ouvindo seus comentários e observando suas ações ao desenvolverem as atividades propostas.

Este procedimento de coleta de dados foi utilizado ao longo desta pesquisa na realização de todos os momentos da intervenção metodológica, como também nos momentos de aplicação do teste de sondagem de conhecimentos.

As anotações realizadas com base nas observações foram feitas num diário de campo.

O diário de campo

O diário de campo é o registro dos fatos verificados através de notas e observações, nele o pesquisador deve registrar com exatidão e muito cuidado as observações, percepções, vivências e experiências obtidas na pesquisa. Também são registros do diário de campo as impressões pessoais sobre as ações desenvolvidas na pesquisa. (BARROS; LEHFELD, 2007)

No diário de campo desta pesquisa realizamos os registros dos acontecimentos do dia, as dúvidas e dificuldades dos alunos, os *conceitos espontâneos* identificados e os *conceitos científicos* adquiridos pelos alunos.

No Apêndice C encontramos um modelo das questões que orientaram a produção do diário de campo adotado nesta pesquisa.

Os questionários

O questionário é uma das formas mais usadas para coletar dados em pesquisas, pois possibilita medir com melhor exatidão o que se deseja. Em geral a palavra *questionário* refere-se a um meio de se obter respostas às questões onde o próprio informante preenche. (CERVO; BERVIAN, 1996)

Segundo Gil (2008, p. 121) os questionários como técnica de investigação consistem em “um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc.”

Foram adotados para realização desta pesquisa alguns questionários contendo combinações de perguntas fechadas e abertas, dentre os quais destaco:

- Questionário de caracterização do aluno (ver Apêndice B): Aplicado no dia 2 de maio de 2017, aos 12 alunos participantes da pesquisa com o propósito de identificação das características dos sujeitos desta investigação.

- Questionário de identificação de aprendizagens (ver Apêndice Q): Aplicado diariamente no período de 3 e 9 de maio de 2017 ao final de cada encontro de aprendizagem. Tem o propósito de identificar os conhecimentos adquiridos pelos alunos, suas dificuldades e como eles consideram que o *software* contribuiu para a o aprendizado dos conceitos relacionados às funções quadráticas.

- Atividades (ver Apêndices D a P): Realizadas diariamente no decorrer da intervenção metodológica, possibilitando a coleta da solução dada pelos alunos e a opinião deles quanto aos aprendizados adquiridos com a referida atividade.

O teste de sondagem de conhecimentos também foi um importante instrumento de coleta de dados para averiguação dos *conceitos científicos* internalizados pelos alunos neste processo de aprendizagem que contou com a mediação do *software* geogebra.

De posse dos dados colhidos, a etapa seguinte deste trabalho consiste em sistematizarmos e analisarmos as informações de modo que possamos identificar como o uso do *software* geogebra pode contribuir para a construção dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas.

5 ANÁLISE DE DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo se divide em cinco seções e tem como propósito realizar uma análise de caráter qualitativo dos dados colhidos durante a pesquisa de campo.

Na primeira seção, apresentaremos a caracterização dos sujeitos da pesquisa. A partir de então, seguiremos este capítulo realizando uma análise cronológica de acordo com as ações realizadas na pesquisa de campo, ou seja, inicialmente fazendo, na segunda seção, uma análise dos resultados obtidos no teste de sondagem de conhecimentos aplicado antes da intervenção metodológica. Na sequência, já na terceira seção, mostraremos como os dados estão categorizados e faremos uma análise de cada encontro da intervenção metodológica.

Posteriormente, na quarta seção, apresentaremos os resultados do teste de sondagem de conhecimentos aplicado depois da intervenção metodológica, também realizando uma análise comparativa com os resultados do teste aplicado antes da intervenção. Por fim, na quinta seção discutiremos os resultados encontrados nesta pesquisa.

Sobre a análise de dados, Minayo (2000, p. 69) aponta três finalidades para essa etapa: “estabelecer uma compreensão dos dados coletados,confirmar ou não os pressupostos da pesquisa e/ou responder às questões formuladas, e ampliar o conhecimento sobre o assunto pesquisado”. Seguiremos por todo este capítulo, pautando-se neste pensamento.

5.1 Caracterização dos sujeitos da pesquisa

Para uma melhor interpretação e análise dos dados colhidos neste trabalho, é de fundamental importância um conhecimento minucioso acerca dos sujeitos pesquisados, e para isso os 12 alunos que participaram da intervenção metodológica foram submetidos a um questionário de caracterização (ver Apêndice B), com questões abertas e fechadas que foi aplicado no dia 2 de maio de 2017. As informações apresentadas nesta seção têm como base a análise dos dados colhidos neste instrumento.

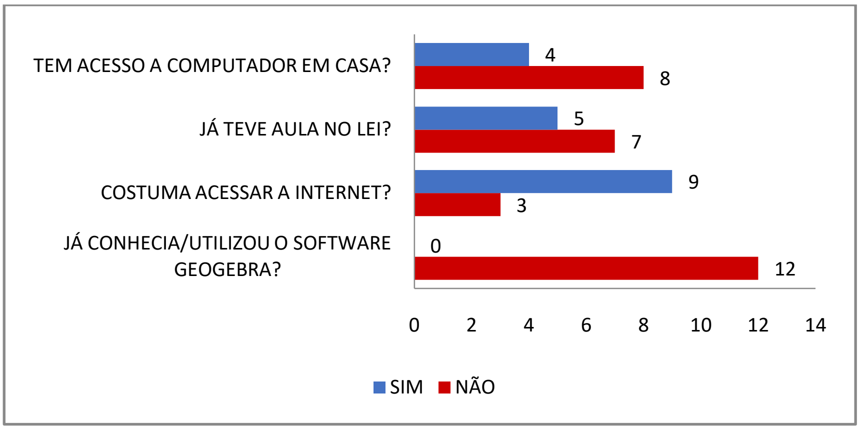
Já sabemos que os alunos são da 1ª série do ensino médio, do turno da manhã, porém estes não são oriundos de uma mesma sala de aula. Cinco são da turma do 1º A, três da turma do 1º B e quatro do 1º C.

Dos 12 alunos pesquisados, com idades entre 14 a 16 anos, 6 são do sexo masculino e 6 são do sexo feminino. Um coincidente equilíbrio de sexo, uma vez que a seleção dos alunos conforme já foi mencionado na metodologia não levou em consideração este fator e sim a ordem de inscrição para participar da pesquisa.

Por questões éticas, a identidade dos participantes não será revelada, sendo eles referenciados apenas com as letras iniciais de seus nomes.

As informações colhidas no questionário referentes ao contato dos alunos com a informática foram consolidadas e estão representadas no Gráfico 1.

Gráfico 1: Informações dos sujeitos da pesquisa referentes ao contado com a informática



Fonte: Pesquisa direta

Pelo Gráfico 1 podemos observar que o contato dos alunos pesquisados com o computador não é muito grande, pois apenas 4 (33,3%) possui acesso a computador em sua residência e mesmo na escola, apenas 5 (41,6%) já tiveram aulas no laboratório de informática.

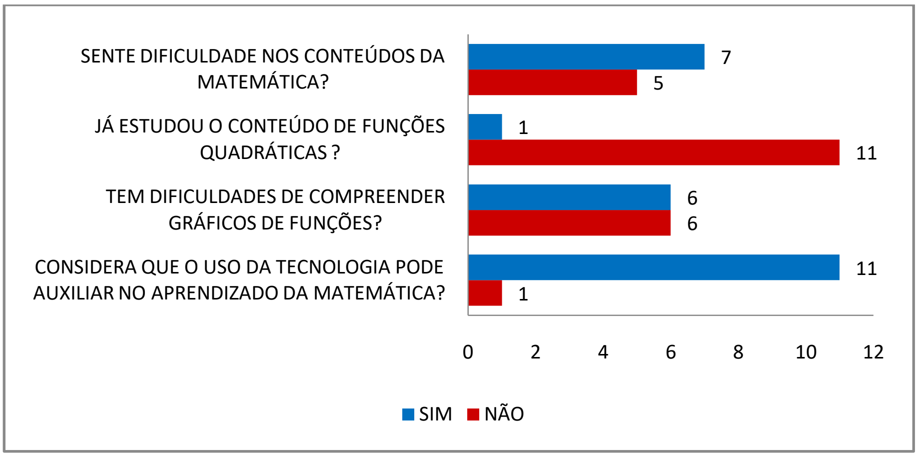
9 alunos (75%) informaram que acessam a internet e quando questionados sobre os sites que costumam visitar apontaram as redes sociais, entre elas o *facebook* e o *whatsapp*, além de sites de vídeos, como o *youtube*. Este cenário reforça a necessidade de uma melhor orientação aos jovens quanto ao uso da internet como instrumento de obtenção de conhecimento e não apenas de entretenimento.

Ainda sobre esta questão outro dado nos levanta uma inquietação, 3 alunos (25%), informaram que não tem o hábito de acessar a internet, o que nos revela que apesar dos avanços da tecnologia, estando à internet cada vez mais presente em nosso dia-a-dia, ainda encontramos jovens em idade escolar que não utilizam este recurso.

Outro fato importante de ser observado é que nenhum dos alunos pesquisados afirmou conhecer o *software* geogebra. O que nos leva a refletir o quanto ainda é necessário avançar, seja na formação de professores para a utilização do *software* em suas aulas, ou no melhor planejamento das ações metodológicas no sentido de inserir o computador nas suas práticas pedagógicas. Tudo isto no sentido de fazer os alunos ter mais contato com este aplicativo.

As informações do questionário referentes ao envolvimento dos alunos com a matemática estão consolidadas no Gráfico 2.

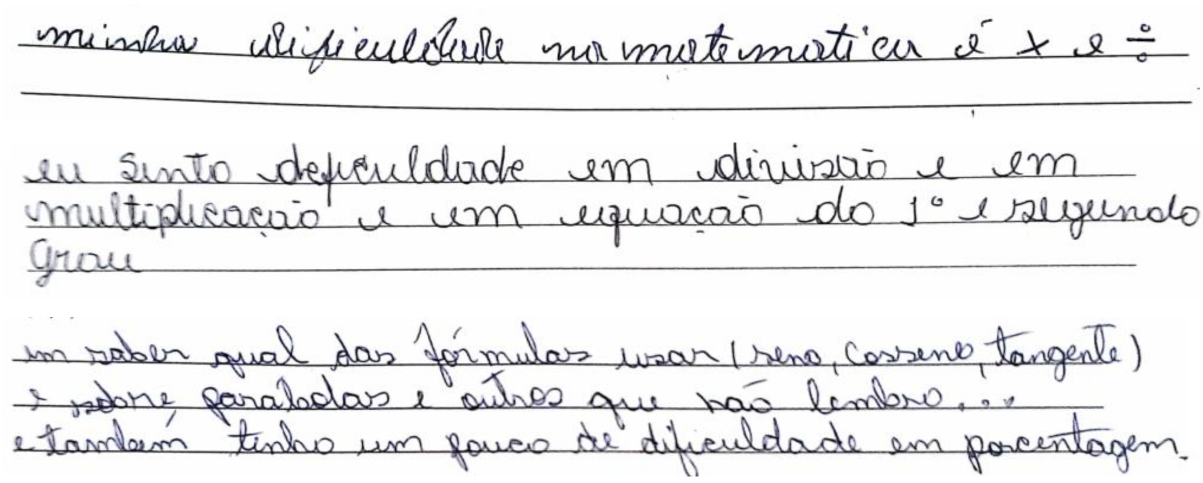
Gráfico 2: Informações dos sujeitos da pesquisa referentes ao seu envolvimento com a matemática



Fonte: Pesquisa direta

Uma constatação relevante nos mostra que 7 alunos (58,3%) afirmam que tem dificuldade no aprendizado da matemática, e ao citarem os conteúdos que apresentam mais dificuldades destacam-se com mais frequência a operação de divisão, o jogo dos sinais e a resolução de equações. Na Figura 3, podemos observar alguns comentários dos alunos sobre suas dificuldades na matemática.

Figura 3: Resposta dos alunos MRL, JPS e FBF para a pergunta: Você sente alguma dificuldade de aprendizagem dos conteúdos de matemática? Se sim descreva em que e qual a sua dificuldade.

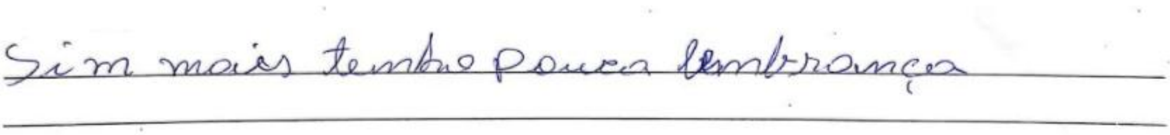


Fonte: Pesquisa direta

Estas dificuldades apresentadas pelos alunos estão em consonância com o que afirma Barreto (2009), que constatou em sua pesquisa, que as operações numéricas, o jogo dos sinais e as operações com a utilização de letras, ou seja, a resolução de equações, constituem obstáculos para aprendizagem da matemática.

Sobre o conteúdo de funções quadráticas, sabemos que os alunos ainda não tiveram contato com este assunto na sala de aula no ano de 2017, porém este conteúdo consta na proposta curricular de matemática do 9º ano do ensino fundamental, no entanto 11 alunos (91,6%) afirmaram nunca ter estudado este conteúdo. Apenas 1 aluno (8,3%) disse já ter visto este conteúdo, no entanto destaca ter pouca lembrança, conforme podemos ver em seu comentário na Figura 4.

Figura 4: Resposta do aluno FBF para a pergunta: Nas aulas de matemática, você já estudou funções quadráticas?



Fonte: Pesquisa Direta

Isto evidencia que o *nível de desenvolvimento real* para com o conteúdo de funções quadráticas é praticamente insistente. A análise do teste de sondagem de conhecimentos realizado antes da intervenção metodológica, que veremos na seção 5.2, também reforça esta afirmação.

Um fato importante percebido no perfil dos alunos é que metade possui dificuldade na compreensão de gráficos de função, sendo que esta habilidade foi bastante trabalhada nos encontros de intervenção metodológica com a mediação do *software* geogebra.

Em consonância com o pensamento de D'Ambrósio (1999, 2001), Pais (2008) e Sancho (2006), 11 alunos (91,6%) consideram que o uso da tecnologia pode auxiliar na aprendizagem da matemática. Na Figura 5, destaco alguns comentários dos alunos sobre este assunto.

Figura 5: Resposta dos alunos FEAC, MJMC e AQNM para a pergunta: Você considera que o uso da tecnologia pode auxiliar no aprendizado da matemática? Se sim, descreva em que você acha que ela pode contribuir.

hoje em dia Tudo é techologia, temos que levar o aprendizado para todos a melhor forma é com a tecnologia

Tecnologia e matemática são duas ciências que em conjunto têm capacidade de evoluir o raciocinio humano.

Ela é, sem dúvida, um incentivo a mais já que nos dias de hoje, a vida dos jovens é alicerçada na tecnologia.

Fonte: Pesquisa direta

Como sugestão para melhorar o processo de ensino e aprendizagem da matemática, 8 alunos (66,6%) destacam o uso da tecnologia nas aulas de matemática. A Figura 6 traz alguns dos comentários dos alunos sobre esta questão.

Figura 6: Resposta dos alunos FBF, MJMC para a pergunta: O que você sugere ou sugeria para melhorar o processo de ensino e aprendizagem da matemática?

utilizár-mos mais ~~tecnol~~ tecnologia, ~~mais nos~~ utilizár-mos algum aplicativo que nos ajude nas aulas e fazer dinâmicas com os alunos.

Mais aulas eficientes usando o computador para aumentar mais os nossos aprendizados e capacidade

Fonte: Pesquisa direta

Sabemos que diante das muitas possibilidades de trabalho em sala de aula, o uso da informática pode ser um caminho a ser seguido com o propósito de melhorar processo de ensino e aprendizagem.

Pelos comentários dos alunos, percebemos que há um interesse, e até mesmo um desejo por um processo de aprendizagem mediado pelo uso da tecnologia. O que é plenamente compreensível, considerando que se trata de jovens que vivem muitas vezes imerso neste mundo da informação *on-line*, pois como retrata Parnaiba e Gobbi (2010) eles já são considerados nativos desta era digital.

5.2 Análise do desempenho dos alunos no teste de sondagem de conhecimentos aplicado antes da intervenção metodológica

O teste de sondagem de conhecimentos foi aplicado ao grupo de alunos sujeitos desta pesquisa em dois momentos, no dia 2 de maio do ano em curso, antes da intervenção metodológica, e no dia 10 de maio de 2017, depois da intervenção metodológica.

As duas aplicações aconteceram no turno da tarde e contaram com duração de 3 h/a.

Nesta primeira análise, estudaremos apenas os resultados obtidos na primeira aplicação deste teste, pois esta primeira aplicação tem como propósito identificar o *nível de desenvolvimento real* dos sujeitos da pesquisa em relação ao conteúdo de funções quadráticas, bem como os *conceitos espontâneos* dos alunos sobre este assunto.

O teste constou de 12 questões na qual: a questão 1 trata de identificação de pontos no plano cartesiano; a questão 2 remete ao conceito de função quadrática; a questão 3 aborda o reconhecimento de uma função quadrática na forma algébrica; a questão 4 trata sobre a determinação dos zeros da função; a questão 5 versa sobre a identificação do sentido da concavidade da parábola; a questão 6 explora conhecimentos sobre a determinação das coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas; a questão 7 remete a construção do esboço do gráfico da função; a questão 8 busca indicar se a função possui ponto de máximo ou de mínimo; a questão 9 aborda a construção do esboço do gráfico da função com a determinação dos pontos notáveis; e as questões 10, 11 e 12 versam sobre a resolução de problemas contextualizados envolvendo funções quadráticas e pontos de máximo.

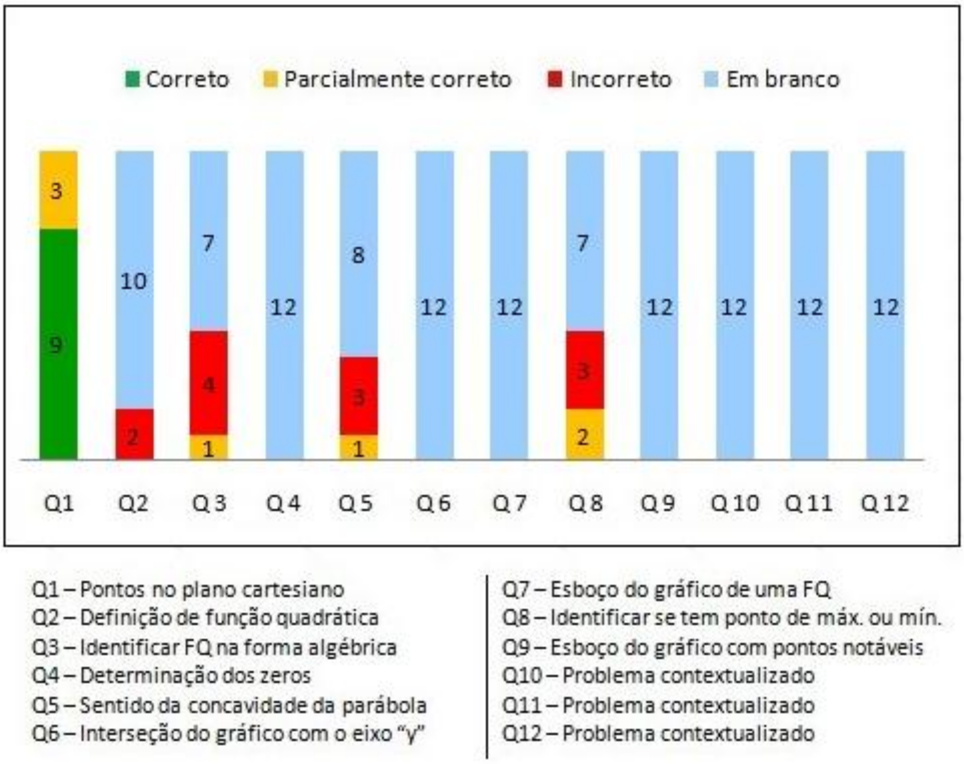
Para uma melhor análise das questões do teste foram adotados os seguintes critérios na sua correção:

- **Correto** – Para as questões em que o aluno apresentou uma resposta satisfatória.
- **Parcialmente correto** – Para as questões que não estiverem plenamente corretas ou se apresentarem incompletas. Nas questões em que o aluno deve marcar alternativas, foi considerado parcialmente correto os casos em que o aluno assinalou mais itens corretos do que errados.

- **Incorreto** – Para as questões erradas. Novamente nas questões em que o aluno deve marcar alternativas, foi considerado incorreto os casos em que o aluno assinalou mais itens errados do que corretos.
- **Em branco** – Para as questões em branco.

No Gráfico 3, podemos visualizar o resultado do teste de sondagem dos conhecimentos antes intervenção metodológica.

Gráfico 3: Desempenho dos alunos no teste de sondagem de conhecimentos aplicado antes da intervenção metodológica



Fonte: Pesquisa direta

É importante destacar que neste momento da pesquisa os alunos investigados ainda não haviam estudado o conteúdo de funções quadráticas, nem no decorrer dos estudos na sala de aula da escola, nem por conta de intervenções de ensino promovidas por este pesquisador. Logo já era esperado que muitas questões do teste fossem deixadas em branco, é o que constatamos ao analisarmos as questões 4, 6, 7, 9, 10, 11 e 12.

Em dialogo com os alunos sobre o que eles acharam do teste, muitos afirmaram que não sabiam o que fazer diante das perguntas, pois não entendiam o significado de algumas palavras, como por exemplo: concavidade, parábola, vértice e outros. Esta dificuldade nos mostra que os alunos ainda não conheciam os conceitos que permeiam o estudo das funções quadráticas.

Houve alguns alunos que mesmo desconhecendo o assunto da questão, acabaram que marcando as opções das questões 3, 5 e 8, vindo até a acertar algumas alternativas, no entanto é fácil de perceber que foram questões marcadas aleatoriamente pois não traziam nenhum cálculo ou argumento que conduzi-se as respostas.

Uma simples análise no gráfico nos faz perceber que os alunos já apresentavam conhecimentos prévios sobre a identificação de pontos no plano cartesiano, isto devido a questão 1, que aborda este assunto, ter sido acertada por 9 alunos (75%), e respondida parcialmente correta pelos outros 3 alunos (25%), sendo que estes discentes acabaram por cometer alguns erros na identificação dos pontos, trocando as coordenadas de “x” com “y”.

O resultado deste teste nos aponta que os conhecimentos sobre o conteúdo de funções quadráticas ainda não estão presentes no *nível de desenvolvimento real* dos sujeitos da pesquisa.

No entanto a grande quantidade de acerto da questão 1, nos leva a entender que os conceitos básicos sobre ponto, plano cartesiano, coordenadas cartesianas e localização de pontos no plano, além e assuntos que se relacionam a este saber, como o de conjuntos numéricos, são conhecimentos que os alunos já trazem consigo, oriundos de vivencias anteriores, logos estes conhecimentos se caracterizam como sendo os seus *conceitos espontâneos*.

5.3 Categorização e análise dos dados colhidos durante a intervenção metodológica

Considerando o processo qualitativo de pesquisa e para que os dados possam ser adequadamente analisados, faz-se necessário ordená-los em categorias e subcategorias principalmente nos casos em que as informações são colhidas através de questionários (GIL, 2008). Tais categorias organizam os dados de forma que facilite sua análise indo de encontro ao problema da pesquisa.

Nesta pesquisa dispomos as categorias e subcategorias buscando aproximar-se dos assuntos e conteúdos abordados nos encontros da intervenção pedagógica. Sendo elas identificadas no Quadro 2.

Quadro 2: Categorias e subcategorias da pesquisa

CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS
1 – Estudo sobre pontos no plano cartesiano	1.1 – Identificação das coordenadas de pontos no plano cartesiano
2 – Compreensão do conceito de função quadrática e identificação das suas raízes	2.1– Entendimentodo conceito de função quadrática 2.2 – Identificação de uma função quadrática na forma algébrica 2.3 – Determinação dos zeros da função quadrática com a utilização da fórmula de Bhaskara
3 – Construção do gráfico da função quadrática com a identificação dos pontos notáveis	3.1 – Construção do gráfico de uma função quadrática e identificação do sentido da concavidade da parábola em função do sinal do coeficiente “a” 3.2 – Identificação, no gráfico, dos pontos correspondentes aos zeros da função quadrática 3.3 – Identificação do vértice da parábola 3.4 – Identificação do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas
4 – Compreensão do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação dos coeficientes “a”, “b”, “c” e do discriminante (Δ)	4.1 – Estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação do coeficiente “a” 4.2– Estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação do coeficiente “b” 4.3 – Estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação do coeficiente “c” 3.4 – Estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação do discriminante “Δ”
5 – Resolução de problemas contextualizados envolvendo o conteúdo de funções quadráticas	5.1 – Resolução de problema contextualizado envolvendo função quadrática e/ou identificação de valores de máximo ou mínimo.

Fonte: Autor

Considerando que cada encontro da intervenção metodológica abordou um assunto referente a cada uma das categorias citadas no Quadro 2, analisaremos nas subseções seguintes os dados referentes a cada encontro e consequentemente a cada categoria.

5.3.1 Análise do primeiro encontro da intervenção metodológica

Como já foi citado na metodologia, a rotina dos encontros contou com quatro momentos: o primeiro onde temos a explicação de conceitos com a mediação *software* geogebra e realização de atividades com o acompanhamento dos alunos; o segundo com a realização de atividades pelos estudantes com a mediação *software* geogebra sob o monitoramento do professor; o terceiro com a realização de um momento de reflexão sobre as aprendizagens suscitados a partir das atividades realizadas; e o quarto com a aplicação do questionário de identificação de aprendizagem.

As informações colhidas neste dia da intervenção metodológica se consolidarão na primeira categoria desta pesquisa, que trata sobre o estudo dos pontos no plano cartesiano.

É válido relembrar que nesta etapa da pesquisa este autor assume a postura de professor pesquisador.

A Figura 7 mostra o momento em que os alunos encontravam-se realizando uma atividade proposta no encontro de intervenção metodológica.

Figura 7: Alunos realizando atividade durante a intervenção metodológica

Fonte: Foto retirada pelo autor

O primeiro encontro da intervenção metodológica aconteceu no dia 3 de maio de 2017. Seu principal propósito foi apresentar *software* geogebra e suas ferramentas, levando os alunos a se familiarizarem com o aplicativo. Para tanto, optou-se por trabalhar como a identificação de pontos e a construção de segmentos e retas no plano cartesiano, por se tratar de conteúdos bem elementares e necessários para uma melhor compreensão do viria a ser estudado nos encontros seguinte.

No momento inicial do encontro foram apresentadas as ferramentas do *software* geogebra, partindo desde como localizá-los na pasta de programas do computador até o acionamento do programa para abertura da sua tela inicial. Tal procedimento parece simples, porém dado a pouca habilidade de alguns alunos com o uso do computador, tomou-se um certo tempo com esta ação sendo necessário que os alunos com maior conhecimento ajudassem aqueles com mais dificuldades. À medida que este procedimento ia se repetindo ao logo dos encontros esta dificuldade foi rapidamente sendo superada.

Com pouco tempo de exploração livre do aplicativo, percebeu-se que muitos alunos já haviam se familiarizado bem com as ferramentas básicas do *software*, pois em algumas telas encontrávamos construções de formas geométricas envolvendo pontos, retas, polígonos e círculos.

Após a explicação e realização de atividades com a mediação *software* geogebra, os alunos fizeram atividades sob o monitoramento do professor. Analisaremos a seguir a Atividade 1.1.

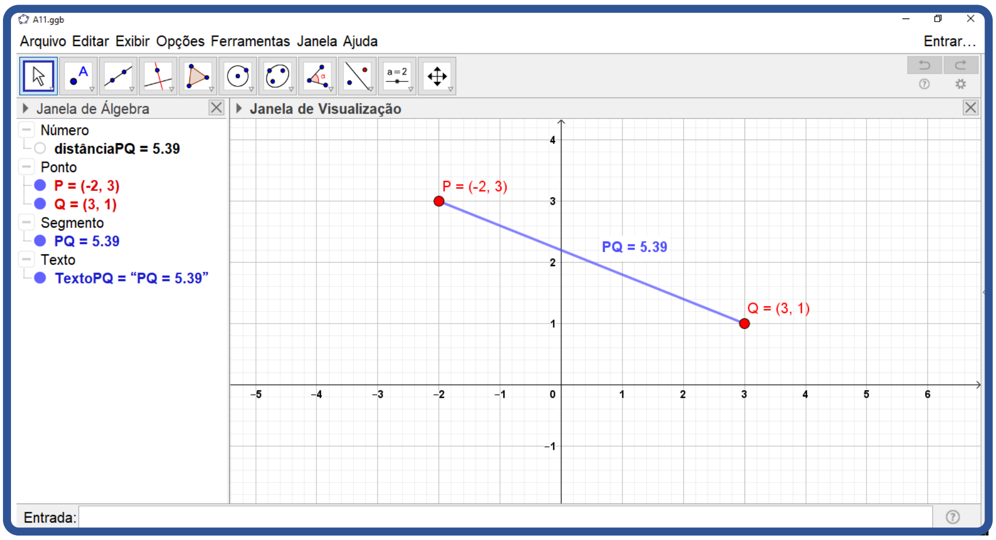
Análise da Atividade 1.1 - Identificação de pontos no plano cartesiano

Esta atividade (ver Apêndice D) tem o objetivo de desenvolver conhecimentos no aluno para a identificação e localização de pontos no plano cartesiano. Ela está dividida em duas etapas. Na primeira a ser realizada com o auxílio do *software* geogebra, os alunos foram orientados a construírem pontos, identificado suas coordenadas, e a construírem segmentos utilizando os pontos anteriormente identificados e realizarem movimentos nos pontos com fins de perceberem a alteração nas coordenadas dos pontos e no comprimento dos segmentos.

A Figura 8 traz a ilustração desta atividade no ambiente do *software* geogebra.

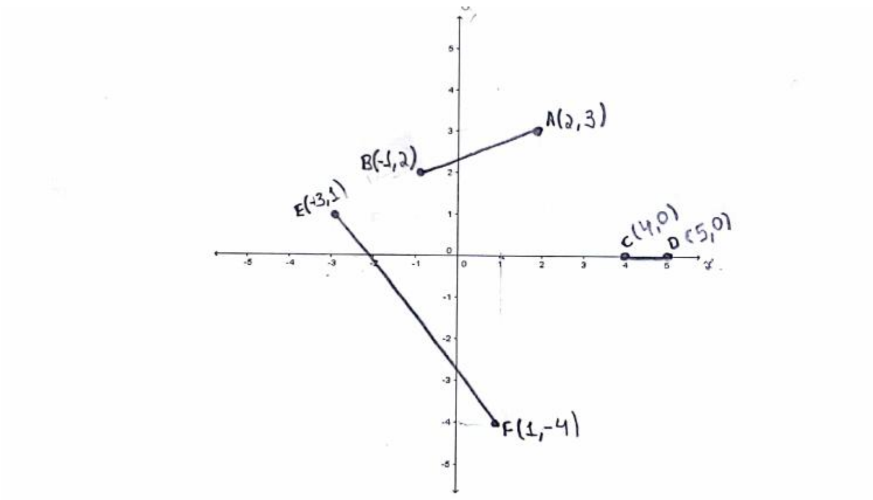
A segunda etapa da atividade, a ser realizada no próprio formulário de atividade consiste na localização dos pontos A(2, 3); B(-1, 2); C(4, 0); D(5, 0); E(-3, 1); F(1,- 4)no plano cartesiano e na construa os segmentos AB, CD e EF. Na Figura 9 temos uma solução da atividade feita pelo aluno FHFC.

Figura 8: Representação da construção do gráfico proposto pela Atividade 1.1



Fonte: Autor

Figura 9: Resposta do aluno FHFC a pergunta: a) Localize no plano cartesiano abaixo os pontos A (2, 3); B(-1, 2); C(4, 0); D(5, 0); E(-3, 1); F(1,- 4). e b) Construa os segmentos AB, CD e EF.

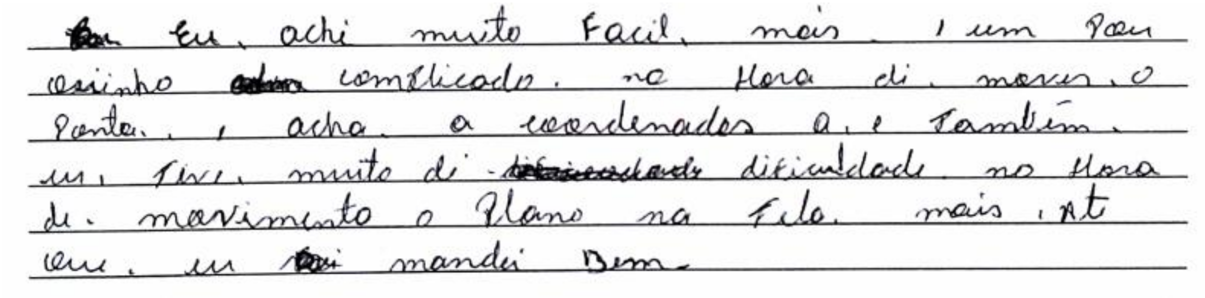


Fonte: Pesquisa direta

De um mondo geral esta atividade não apresentou dificuldades para sua realização, 10 alunos (83,3%) a responderam corretamente sendo que 2 (16,6%) cometeram erros confundindo as coordenadas de "x" com "y" em alguns pontos que foram representados no plano cartesiano.

Porém algo que chamou muita atenção dos alunos foi à dinamicidade do *software* em alterar instantaneamente as coordenadas do ponto à medida que os alunos movimentavam o ponto com a ajuda do *mouse*. O comentário do aluno AMVL, destacado na Figura 10, ilustra o sentimento dos alunos ao realizarem a atividade.

Figura 10: Comentário do aluno AMVL sobre a Atividade 1.1

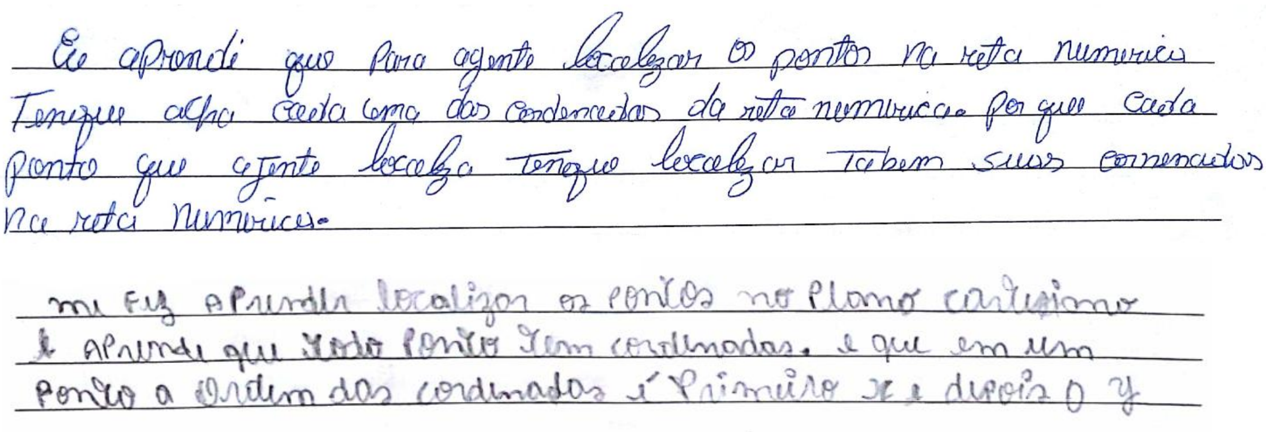

Eu achi muito Facil, mais, um Pouco asinho complicado. no Hora di mover o Ponto, acha a coordenados a, e Também eu tivi muito di dificuldade no Hora di movimento o Plano na Tela. mais, até eu, eu mandei Bem.

Fonte: Pesquisa Direta

Com base nos dados coletados na atividade e no questionário de identificação de aprendizagem, esta atividade, embora simples, pode proporcionar boas aprendizagens, entre elas destacam-se: melhor entendimento do que é um plano cartesiano; identificação das coordenadas de um ponto no plano cartesiano e localização de um ponto no plano cartesiano dado suas coordenadas.

A Figura 11 ilustra algumas das aprendizagens citadas pelos alunos com a realização desta atividade

Figura 11: Resposta dos alunos MANS e CEGS para a pergunta: O que você aprendeu ao realizar esta atividade? (referindo-se à Atividade 1.1)


Eu aprendi que Para agente localizar os pontos na reta numerica Tenque acha cada uma das condenadas da reta numerica por que cada ponto que agente localiza tenque localizar Tabem suas cornenadas na reta numerica.

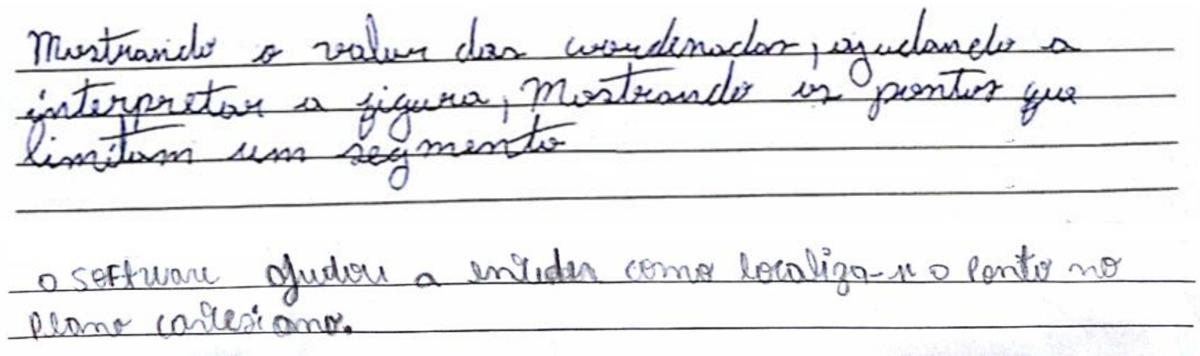
me Fiz aPrender localizar os pontos no Plano cartesiano & aPrendi que todo Ponto Tem coordenadas, e que em um Ponto a ordem das cordenadas é Primeiro x e depois o y

Fonte: Pesquisa Direta

Quando questionados sobre as contribuições do *software* na construção dos conhecimentos adquiridos ao realizarem esta atividade foi destacado que o aplicativo ajuda na visualização do ponto no plano e na compreensão da relação entre as coordenadas de um ponto com os eixos do plano cartesiano.

Na Figura 12, podemos observar alguns comentários dos alunos sobre as contribuições do *software* nesta atividade.

Figura 12: Resposta dos alunos AFO e CEGS a pergunta: Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade? (referindo-se a Atividade 1.1)

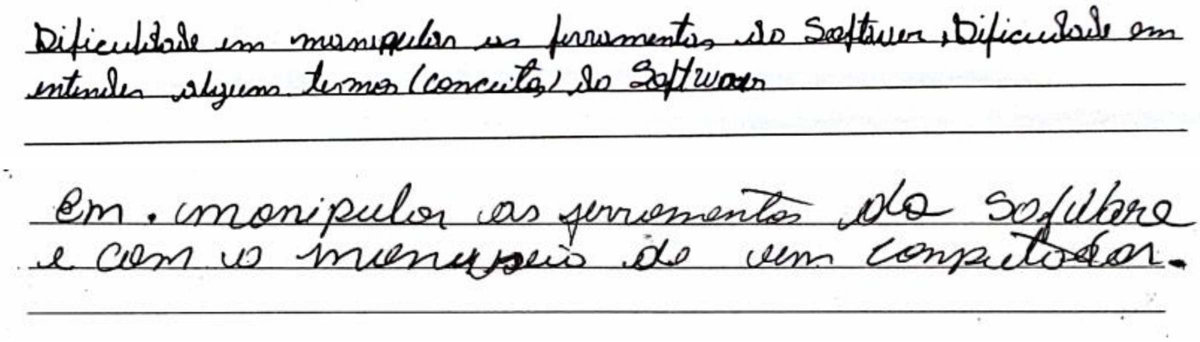

Mostrando o valor das coordenadas, ajudando a interpretar a figura, Mostrando os pontos que limitam um segmento

o software ajudou a entender como localiza-se o ponto no plano cartesiano.

Fonte: Pesquisa direta

Finalizado o primeiro dia de encontro, algumas dificuldades foram levantadas pelos alunos, dentre elas destaca-se principalmente o uso do computador e o manuseio das ferramentas do software, conforme podemos ver nos comentários dos alunos FEAC e MRL, na Figura 13.

Figura 13: Resposta dos alunos FEAC e MRL, para a pergunta: Que dificuldades você teve ao longo do encontro? (referindo-se ao 1º encontro da intervenção metodológica)


Dificuldade em manipular as ferramentas do Software, Dificuldade em entender alguns termos (conceitos) do Software

Em. manipular as ferramentas do sofware e com o menuseio de um computador.

Fonte: Pesquisa direta

Ao longo dos demais dias de encontro, estas dificuldades deixaram de ser identificadas nos questionários, nos levando a concluir que à medida que os alunos utilizavam o computador aprendiam a manusear as ferramentas do *software*.

5.3.2 Análise do segundo encontro da intervenção metodológica

Este encontro aconteceu no dia 4 de maio de 2017, e baseou-se na compreensão do conceito de função quadrática e na identificação de suas raízes, nos conduzindo as informações que se enquadrarão na segunda categoria desta pesquisa.

Para tanto alguns conceitos prévios, como os de conjuntos numéricos foram abordados inicialmente, pois como destaca Lima (2006, p. 1), "toda matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjuntos é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas".

Na sequência os conceitos de relação e função foram abordados para dar melhor subsídio ao estudo do conceito de funções quadráticas.

Ressalta-se que estes ensinamentos iniciais foram abordados de forma resumida, já contando com os conhecimentos prévios que os alunos adquiriram ao longo das suas experiências pessoas, seja no ambiente da escola, na interação com as pessoas ou no contato com os objetos. Entre estes conhecimentos, destacamos as noções de conjuntos, as operações aritméticas a resolução de equações algébricas. Estes conhecimentos prévios são entendidos por Vygotsky (1993) como *conceitos espontâneos.*

O conceito de função quadrática foi explicado com a mediação da fala, da escrita, e através de exemplos com diagramas, tabelas numéricas e principalmente com a utilização do *software* geogebra para sua representação e compreensão gráfica. Pois como defende Fossa e Fossa (2000), este conceito não pode ficar restrito apenas a construção de gráficos e a manipulação algébrica de equações.

No processo de aprendizagem com a mediação, para ocorrer melhor significado a um conteúdo, o professor sempre que necessário deve utilizar-se de diversos instrumentos e signos. Sobre isto Oliveira (2016) enfatiza que:

> O professor é responsável por criar pontes entre todas as fontes de conhecimento, estabelecendo um terreno de sustentação para o desenvolvimento das capacidades globais do aluno, sendo responsável por auxiliar nos processos de significação dos conteúdos, que entendemos ser a ideia central da concepção sobre o professor mediador. (OLIVEIRA, 2016, p. 138)

Na sequência foi mostrado aos alunos como encontrar os valores dos zeros de uma função quadrática por meio da fórmula de Bhaskara. A partir daí uma série de exercícios envolvendo a obtenção dos zeros de uma função quadrática foram resolvidos, inicialmente pelo professor, com os alunos acompanhando, em seguida pelo professor com os alunos ajudando, posteriormente por imitação, pelos alunos com o professor ajudando e por fim pelos alunos com o professor apenas acompanhando. Pondo em prática a zona de desenvolvimento proximal. (VYGOTSKY, 1998)

A realização de exercícios pelos alunos por meio da imitação constitui uma etapa importante no processo de aprendizagem. Vygotsky (1993, p. 89) enfatiza isto e destaca que “no desenvolvimento da criança, a imitação desempenha um papel importante no aprendizado. Trazendo à tona qualidades especificamente humanas da mente e levando a criança a novos níveis de desenvolvimento”, e complementa destacando que “para se imitar, é necessário possuir os meios para se passar de algo que já se conhece para algo novo.” (VYGOTSKY, 1993, p. 89)

Em se tratando do uso de exemplos e exercícios no ensino da matemática, Lima (2006, p. 19) ressalta que eles ilustram os conceitos e contribui para implantar a linguagem do conteúdo abordado, segundo ele “[...] este procedimento pode também ajudar a relembrar, ou até mesmo aprender, fatos interessantes sobre geometria, aritmética, etc.”

Depois da resolução dos exercícios os alunos foram orientados a realizem uma atividade na qual analisaremos a seguir.

Análise da Atividade 2.1 - Conceito de função quadrática e identificação das raízes

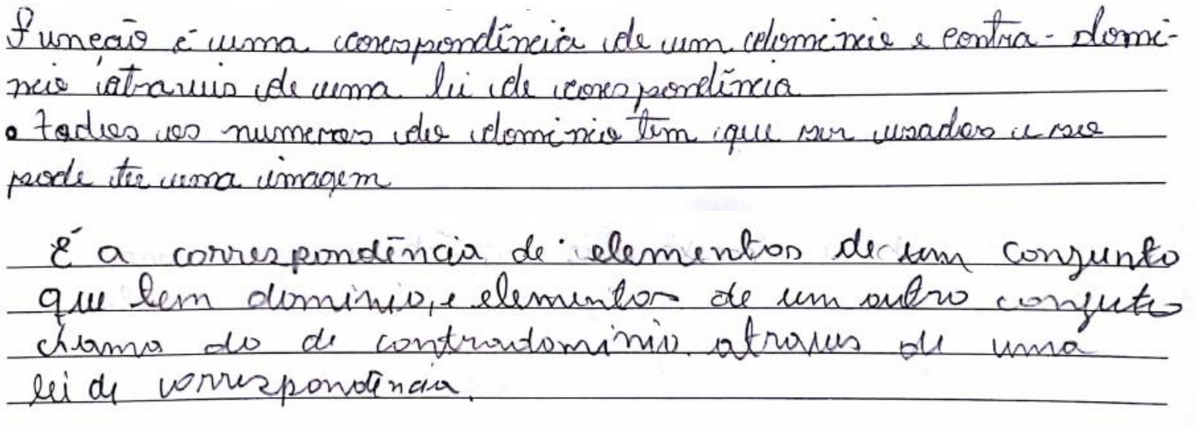
Esta atividade (ver Apêndice E) se caracteriza por ser um tanto conceitual, ela tem o objetivo de contribuir para a construção, no aluno, do conceito função e função quadrática, bem como de despertar neles a capacidade de identificar uma função quadrática na forma algébrica e encontrar os seus zeros.

A pergunta inicial desta atividade questiona o aluno sobre o conceito de função, e ao analisar os dados percebeu-se que embora alguns deles consigam expressar a noção deste conceito verbalmente, quando se trata de escrever o que estão entendendo, a dificuldade apresentada pelos alunos aumenta bastante. Pois nesta pergunta apenas 5 alunos (41,6%) souberam colocar no papel a resposta de modo relativamente correto, os demais (58,3%) escreveram respostas um tanto incompletas e até incorretas.

Esta questão levanta uma inquietação que nos faz refletir. Pois, estes alunos possuem dificuldade na compreensão do conceito de função ou tem dificuldade em escrever corretamente este conceito, uma vez que eles conseguem verbalizá-lo?

Veja na Figura 14 algumas das respostas formuladas pelos alunos.

Figura 14: Resposta dos alunos JPS e MRL para a pergunta: O que você entende por função?

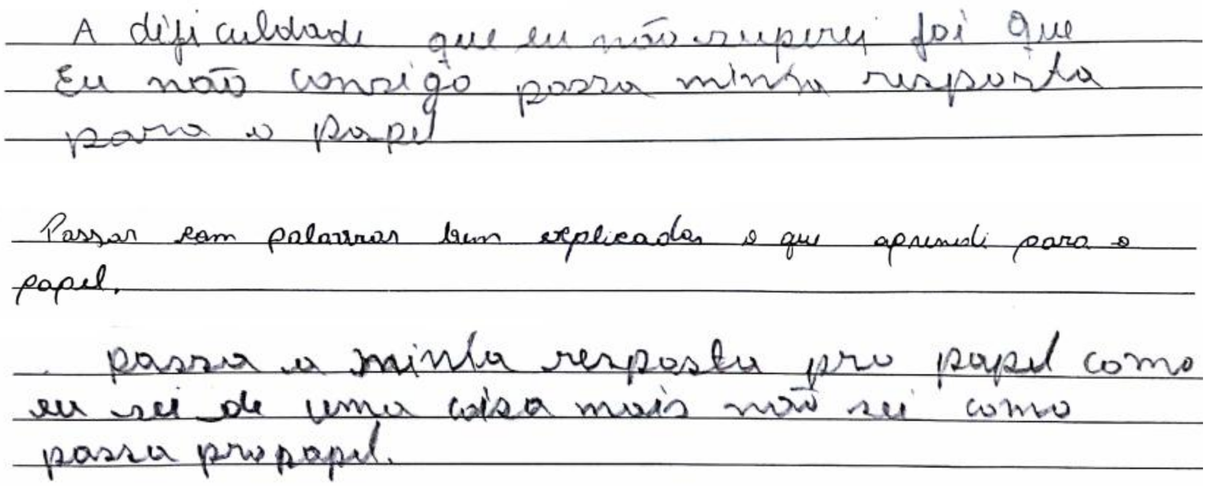

Funcão é uma correspondência de um domínio e contra-domínio através de uma lei de correspondência
a todos os numeros do domínio tem que ser usados e só pode ter uma imagem

É a correspondência de elementos de um conjunto que tem domínio, e elementos de um outro conjuto chamado de contradomínio através de uma lei de correspondência.

Fonte: Pesquisa direta

A dificuldade em escrever as respostas dos questionários tem sido um obstáculo para os alunos. Os comentários dos alunos MRL, FHFC e FBF, na Figura 15, ilustram esta dificuldade em transcrever para o papel aquilo que estão pensando.

Figura 15: Resposta dos alunos MRL, FHFC e FBF para a pergunta: Que dificuldades você ainda não superou?


A dificuldade que eu não superei foi que Eu não consigo passar minha resposta para o Papel

Passar com palavras bem explicadas o que aprendi para o papel.

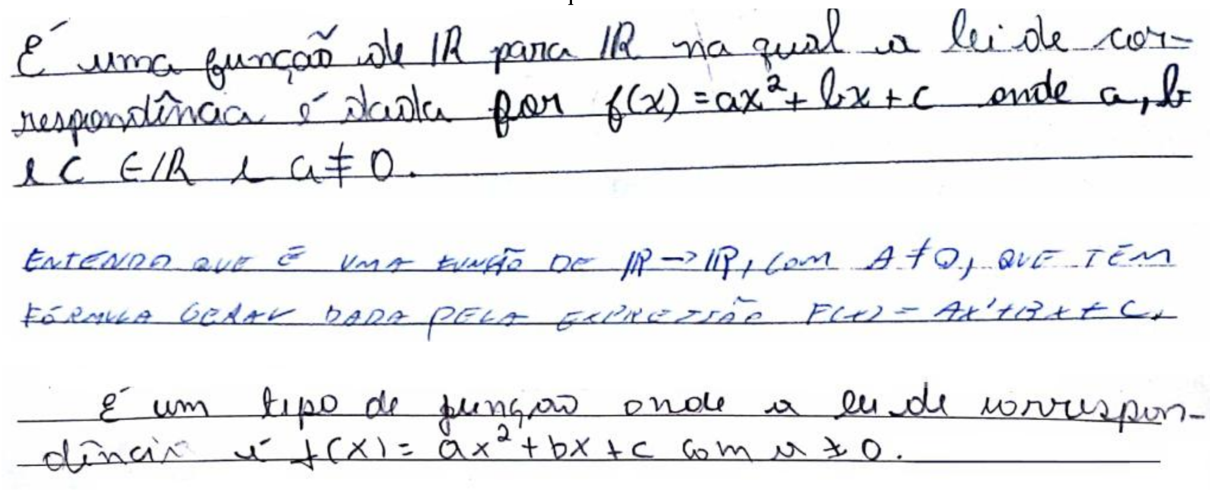
passar a minha resposta pro papel como eu sei de uma coisa mais não sei como passar pro papel.

Fonte: Pesquisa direta

Na pergunta seguinte, os alunos foram questionados sobre o conceito de função quadrática. Ao analisarmos as respostas dos alunos, percebeu-se uma melhora no desempenho da escrita de seus pensamentos, possivelmente pelo fato deste conceito ser um tanto simples quando comparado ao de função. Nesta pergunta 7 alunos (58,3%) responderam de modo satisfatório.

Veja na Figura 16, algumas das respostas dos alunos.

Figura 16: Resposta dos alunos CEGS, TAL e MRL para a pergunta: O que você entende por função quadrática?



É uma função de IR para IR na qual a lei de correspondência é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde a, b e c $\in$ IR e $a \neq 0$.

ENTENDO QUE É UMA FUNÇÃO DE $IR \to IR$, COM $A \neq 0$, QUE TEM FÓRMULA GERAL DADA PELA EXPRESSÃO $F(x) = Ax^2 + Bx + C$.

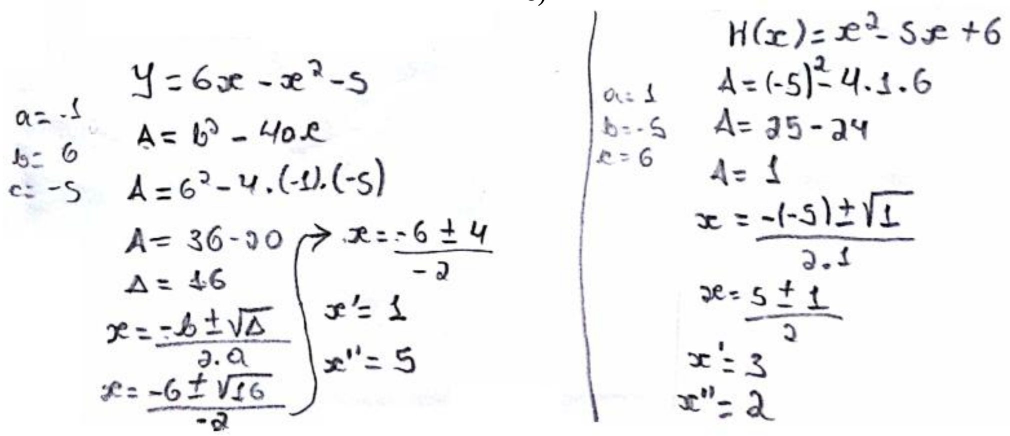
É um tipo de função onde a lei de correspondência é $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$.

Fonte: Pesquisa direta

A pergunta 3 desta atividade aborda sobre a forma algébrica de uma função quadrática. 8alunos (66,6%) não tiveram dificuldades com esta questão, porém 4 alunos (33,3%) erraram ao considerar $x^2 – 4x + 6 = 0$ uma função. Isto nos faz perceber que tais alunos ainda confundem uma função quadrática com uma equação polinomial do 2º grau. O que nos leva a concluir que o conceito de função ainda não está completamente consolidado nestes alunos.

A pergunta seguinte solicita que os alunos encontrem os zeros das funções $y = 6x – x^2 – 5$ e $h(x) = x^2 – 5x + 6$. 7alunos (58,3%) resolveram corretamente a questão conforme ilustra a resolução da Figura 17 dada pelo aluno MRL.

Figura 17: Resposta do aluno MRL para a pergunta: Encontre os zeros das funções quadráticas identificadas na questão anterior utilizando a fórmula de Bhaskara. (referindo-se as funções $y = 6x – x^2 – 5$ e $h(x) = x^2 – 5x + 6$)



$y = 6x - x^2 - 5$

a = -1, b = 6, c = -5

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 6^2 - 4.(-1).(-5)$

$\Delta = 36 - 20$

$\Delta = 16$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2}$

$x = \frac{-6 \pm 4}{-2}$

$x' = 1$

$x'' = 5$

$H(x) = x^2 - 5x + 6$

a = 1, b = -5, c = 6

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$

$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1$

$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1}$

$x = \frac{5 \pm 1}{2}$

$x' = 3$

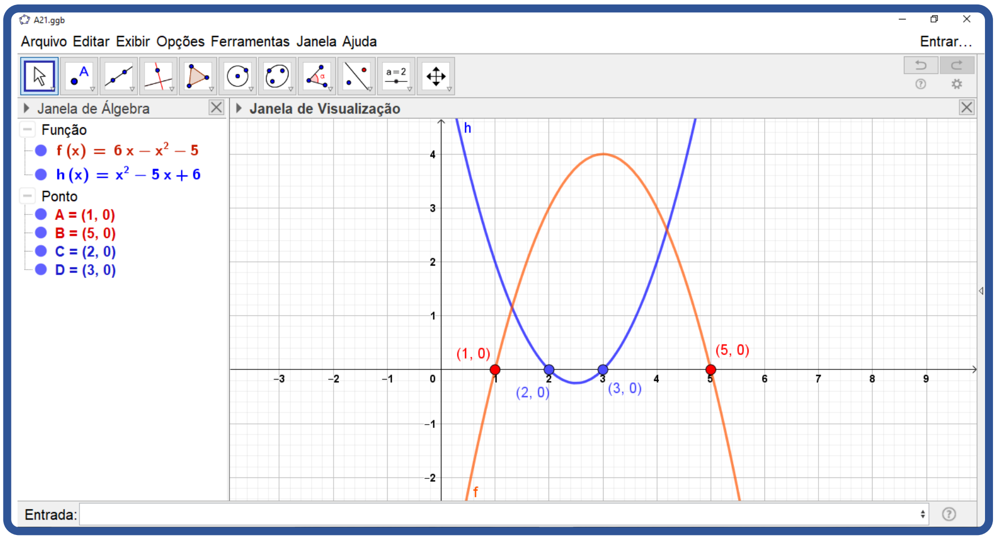
$x'' = 2$

Fonte: Pesquisa direta

Ainda nesta questão 5 alunos (41,6%) cometeram erros durante o seu desenvolvimento algébrico. Com base nos erros, identificamos que uma das dificuldades destes alunos está no jogo de sinais, nos remetendo novamente ao pensamento de Barreto (2009) quando enfatiza que esta dificuldade com o jogo de sinais constitui obstáculo que dificulta a aprendizagem dos alunos.

A questão seguinte da atividade, a ser realizada com o auxílio do *software* geogebra, tratou-se da construção dos gráficos das funções resolvidas na questão anterior ($y = 6x - x^2 - 5$ e $h(x) = x^2 - 5x + 6$), com a identificação no gráfico dos pontos correspondentes aos zeros das funções. A Figura 18 representa a construção do gráfico desta questão.

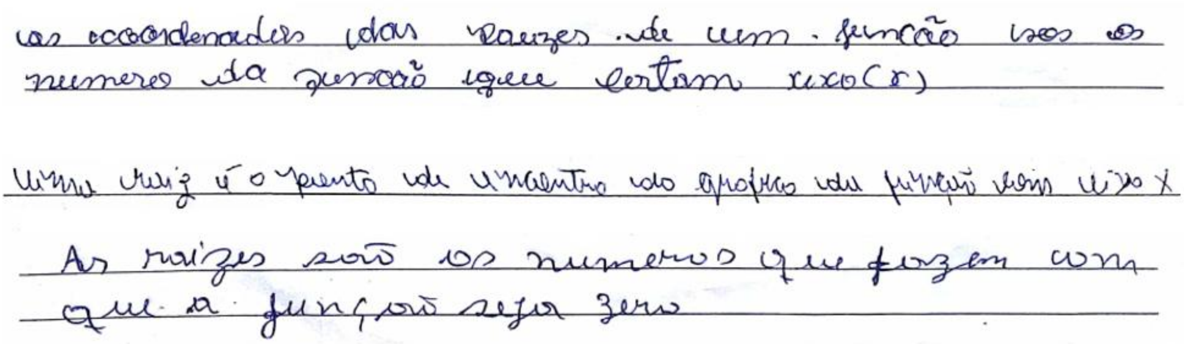
Figura 18: Representação da construção do gráfico proposto pela Atividade 2.1



Fonte: Autor

No entanto, o objetivo desta questão não reside apenas na construção do gráfico, e sim na percepção de que as raízes das funções correspondem aos pontos de interseção da parábola com o eixo das abscissas, fazendo com que a função seja zero. O que foi percebido no comentário dos alunos FHFC, AFO e AMVL, como mostra a Figura 19.

Figura 19: Resposta dos alunos FHFC, AFO e AMVL para a pergunta: O que você aprendeu ao realizar esta atividade? (referindo-se à Atividade 2.1)


as coordenadas das raizes de uma função são os numeros da função que cortam eixo (x)

uma raiz é o ponto de encontro do grafico da função com eixo x

As raizes são os numeros que fazem com que a função seja zero

Fonte: Pesquisa direta

Pelos comentários dos alunos percebemos que houve uma compreensão da relação existente entre os zeros da função e os pontos em que seu gráfico corta o eixo “x”. A percepção deste conhecimento pelos alunos também foi evidenciada na análise da Atividade 3.2 que veremos na seção 5.3.3.

5.3.3 Análise do terceiro encontro da intervenção metodológica

Ocorridos os dois encontros iniciais, os alunos já se apresentavam bastante familiarizados com o *software*, de modo que neste encontro, que aconteceu no dia 5 de maio de 2017 as dificuldades referentes ao manuseio do aplicativo já se mostravam bem reduzidas.

Os conhecimentos abordados neste encontro envolveram a construção do gráfico de uma função quadrática e a identificação de seus pontos notáveis tanto algebricamente quanto graficamente, nos levando a obtermos informações que compõem a terceira categoria desta pesquisa.

Os pontos notáveis aqui mencionados referem-se: as raízes da função quadrática representadas pelos pontos $(x_1,0)$ e $(x_2,0)$; ao ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas, indicado pelas coordenadas $(0,y)$; e o vértice da parábola, representado pelo ponto (x_v, y_v).

O primeiro momento deste encontro contou com a mediação do *software* geogebra para abordar o conceito de parábola, apresentando suas propriedades e já mostrando aos alunos o seu vértice. Na sequência, dado algumas funções, construímos os seus gráficos, inicialmente esboçando-o na lousa e já destacando os pontos notáveis seguido da sua construção no aplicativo, explorando os pontos notáveis com maior precisão e detalhe.

Sabemos que o processo de mediação, segundo Vygotsky (1998), se dá *pelo individuo*, que neste caso é o professor pesquisador, e por *instrumentos e signos*. O *software* geogebra neste momento do encontro assumiu o papel de instrumento, pois nas ideias de Monroe (2016), possibilitou ao professor ampliar suas capacidades, uma vez que com o aplicativo houve uma maior possibilidade de exploração das construções dos gráficos do que a utilização apenas do quadro branco. O uso dos signos, neste contexto, se deu pela fala, pela escrita, pelos símbolos e gráficos que foram utilizados, seja com a lousa ou com o computador.

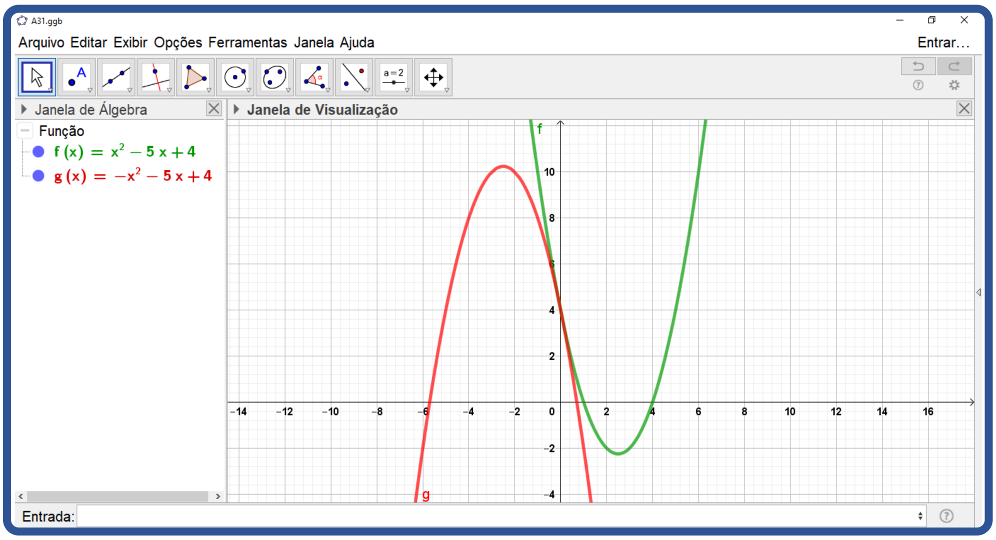
No momento seguinte os alunos foram levados a realizarem atividades, na qual analisaremos a seguir.

Análise da Atividade 3.1 – Gráfico de uma função quadrática

Esta atividade (ver Apêndice F) tem como objetivo desenvolver no aluno a capacidade de realizar a construção do gráfico de uma função quadrática, como também de fazê-los identificar o sentido da concavidade da parábola de acordo com o sinal do coeficiente “a” da função.

Na primeira parte desta atividade, os alunos foram orientados a construírem, com o auxílio do *software*, o gráfico das funções $f(x) = x^2 – 5x + 4$ e $g(x) = – x^2 – 5x + 4$. Na Figura 20, podemos observar uma representação desta construção.

Figura 20: Representação da construção do gráfico proposto pela Atividade 3.1

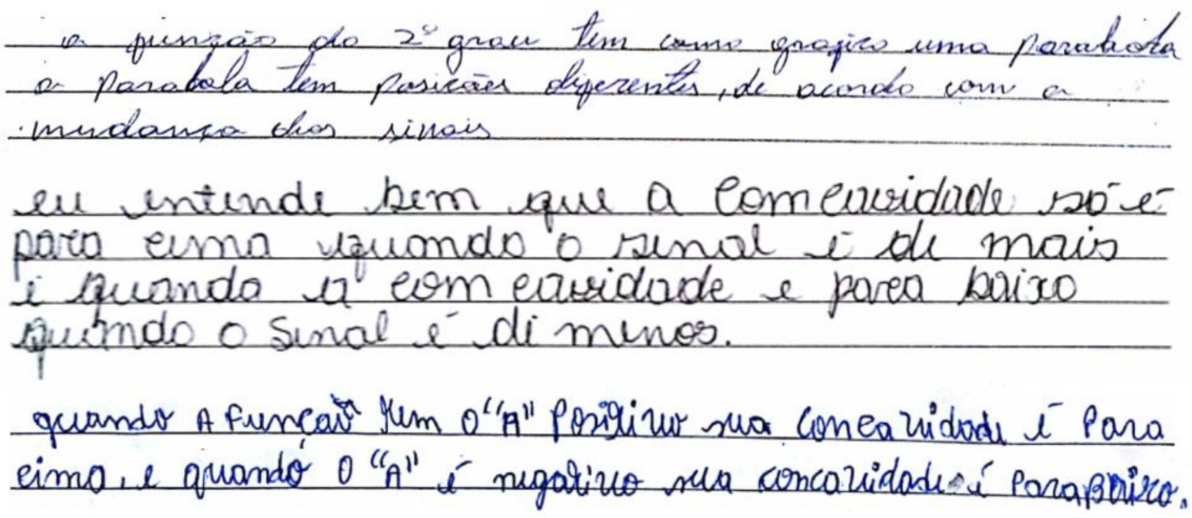


Fonte: Autor

Feita a construção no aplicativo, o propósito desta atividade foi fazer os alunos observarem a principal diferença entre estas duas funções, tanto na sua escrita algébrica quanto no gráfico. Com esta observação, aliada as explicações dadas no momento anterior, os alunos perceberam melhor a relação existente entre a concavidade da parábola e o sinal do coeficiente “a”.

Este fato pode ser constatado pelos relatos dos alunos FEAC, JPS e CEGS, conforme podemos observar na Figura 21.

Figura 21: Resposta dos alunos FEAC, JPS e CEGS para a pergunta: O que você aprendeu ao realizar esta atividade? (referindo-se a Atividade 3.1)



Fonte: Pesquisa direta

Percebemos pelos comentários dos alunos que, apesar da dificuldade em se expressarem na forma escrita, houve uma boa compreensão desta relação que envolve o sinal do coeficiente “a” da função e o sentido da concavidade do seu gráfico. Tal fato também foi observado na Atividade 4.1 que trata do estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação do coeficiente “a”, e analisada na seção 5.3.4 desta pesquisa.

O documento da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2016) enfatiza que o trabalho com as representações algébricas e gráficas de uma função é de vital importância para análise e interpretação das relações existentes entre suas variáveis.

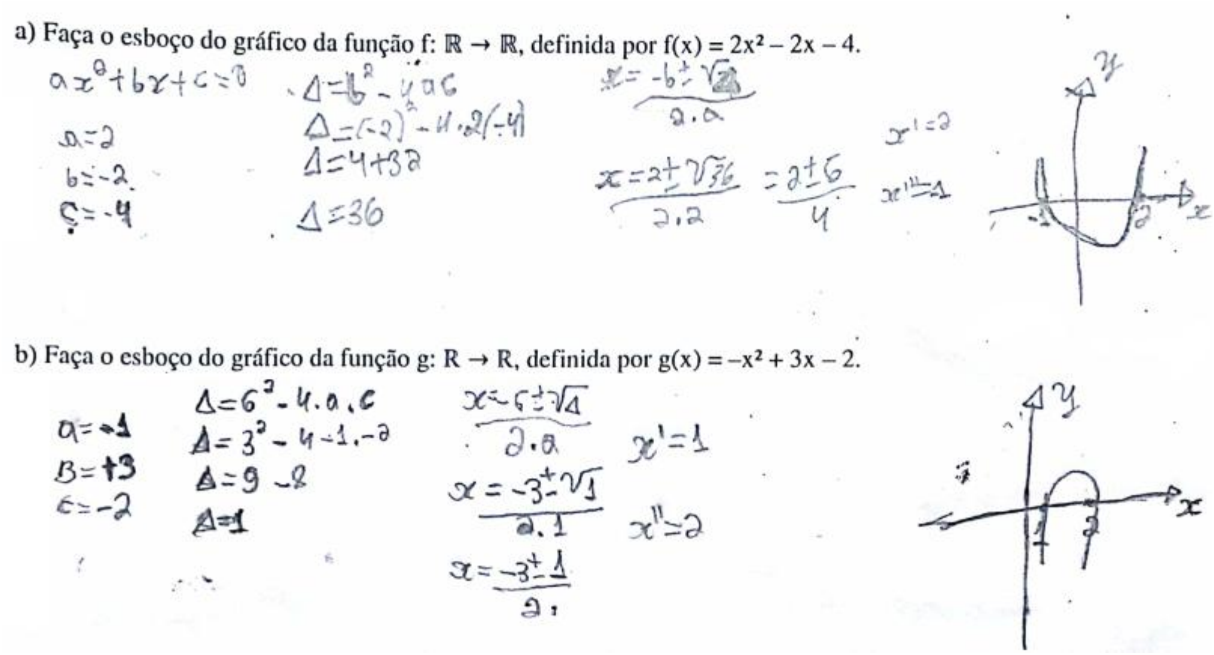
Nesta atividade a utilização do aplicativo contribuiu com o desenvolvimento deste aprendizado mostrando aos alunos diferentes gráficos de funções, agregando com isso, possibilidades metodológicas ao professor, que além de verbalizar o assunto pode também apresentá-lo através de imagens.

Na formação de conceitos defendida por Vygotsky (1993) o ensino por meio apenas da verbalização direta do conceito é algo improdutivo. Para este pensador a construção dos conceitos pressupõe o desenvolvimento da atenção, da observação e de outras habilidades intelectuais.

Dando sequência a atividade, a sua segunda parte foi realizada no próprio formulário de atividade, na qual os alunos tiveram que construir o esboço do gráfico das funções $f(x) = 2x^2 – 2x – 4$ e $g(x) = –x^2 + 3x – 2$. 10 alunos (83,3%) realizaram a atividade satisfatoriamente e 2 alunos (16,6%) responderam de modo incompleto.

Podemos observar na Figura 22 a solução apresentada pelo aluno FEAC.

Figura 22: Resposta do aluno FEAC para as perguntas: a) Faça o esboço do gráfico da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 – 2x – 4$; b) Faça o esboço do gráfico da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = –x^2 + 3x – 2$.



Fonte: Pesquisa direta

Nesta atividade percebemos que o computador atuou como um instrumento de mediação para a compreensão de conceitos referentes à identificação das raízes de uma função quadrática no plano cartesiano e a identificação do sentido da concavidade da parábola.

Sobre a interação entre computador e aluno no processo de aprendizagem, Valente (1998, p. 34) preconiza que:

> Quando o aprendiz está interagindo com o computador ele está manipulando conceitos e isso contribui para o seu desenvolvimento mental. Ele está adquirindo conceitos da mesma maneira que ele adquire conceitos quando interage com objetos do mundo.

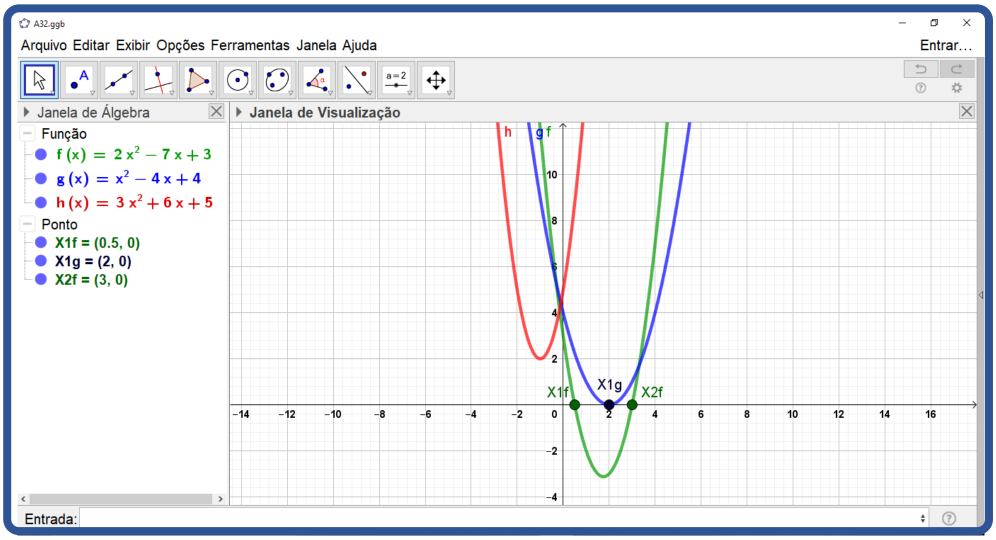
Análise da Atividade 3.2 – Interseção da parábola com o eixo “x”

Esta atividade (ver Apêndice G) teve como objetivo levar os alunos a perceber a relação que existe entre as raízes de uma função e os pontos em que o gráfico da função corta o eixo das abscissas.

Na primeira parte desta atividade, que foi realizada com o auxílio do *software* geogebra, os alunos foram orientados a construírem os gráficos das funções $f(x) = 2x^2 – 7x + 3$, $g(x) = x^2 – 4x + 4$ e $h(x) = 3x^2 + 6x + 5$, e a determinarem, o(s) ponto(s) de interseção entre os gráficos das funções e o eixo das abscissas, caso existissem.

A Figura 23 mostra uma representação da construção proposta por esta atividade.

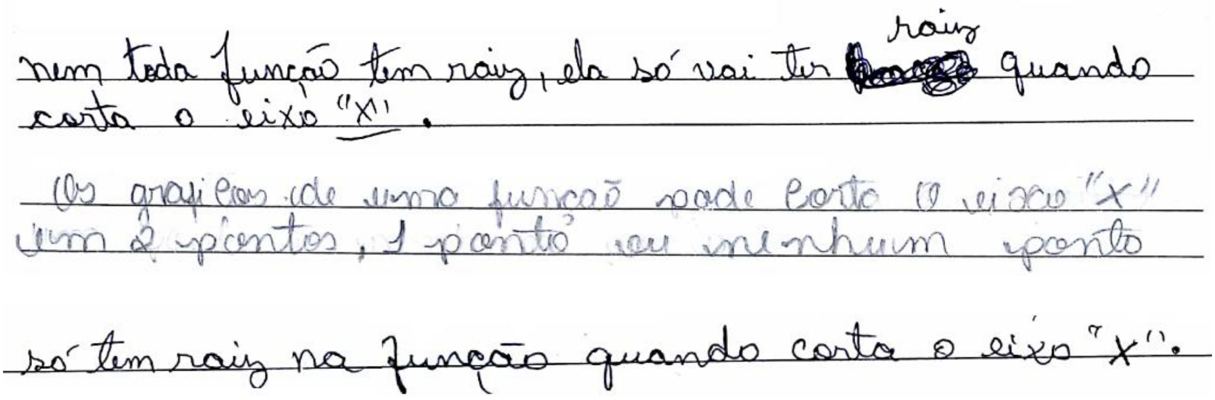
Figura 23: Representação da construção do gráfico proposto pela Atividade 3.2



Fonte: Autor

Feita a construção, foi levantado reflexões sobre a diferença entre os gráficos e o que isso representa. Diversas falas e comentários foram suscitados pelos alunos, levando-os a perceberem, entre outros conhecimentos que nem toda função tem raiz, e consequentemente o seu gráfico pode ou não cortar o eixo “x”. Isto pode ser evidenciado pelos comentários dos alunos AMVL, MRL e FBF, conforme podemos observar na Figura 24.

Figura 24: Resposta dos alunos AMVL, MRL e FBF para a pergunta: O que você percebe ao observar os gráficos destas funções? (referindo-se a Atividade 3.2)



Fonte: Pesquisa direta

As falas dos alunos na discussão desta atividade reforçam a importância do diálogo para a construção dos *conceitos científicos*. Em trabalhos que se baseiam na teoria sociointeracionista de Vygotsky,o diálogo estabelecido com os integrantes indica que os processos de socialização e interação estão sendo privilegiados. De acordo com Vygotsky (1998, p. 13), “as crianças resolvem suas tarefas práticas com a ajuda da fala”. E isso pode ser estendido aos nossos alunos, uma vez que a fala e a ação constituem características humanas de nosso comportamento. Percebemos que a fala propicia a internalização conceitual, uma vez que ao falar o aluno reformula e reaprende o conceito estudado. (VYGOTSKY, 1998)

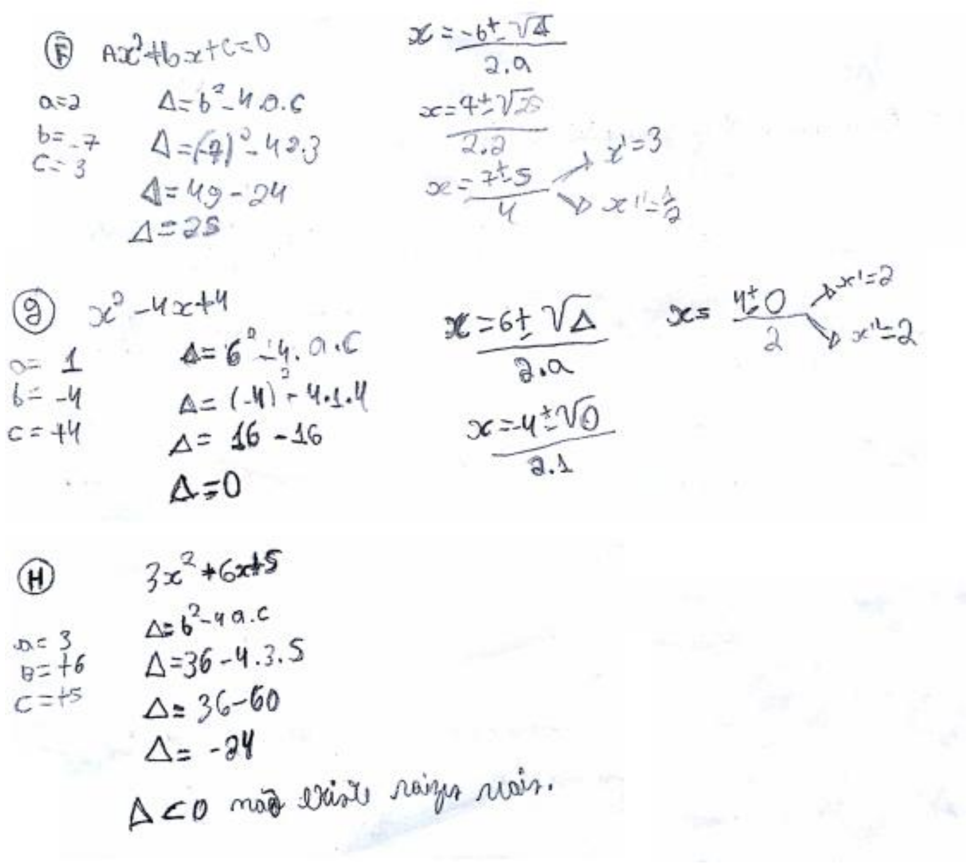
No decorrer desta atividade os alunos foram levados a determinarem algebricamente (caso existisse) os zeros das funções $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$ e $h(x) = 3x^2 + 6x + 5$, cujos gráficos foram construídos com o uso do *software* geogebra na parte anterior da atividade.

Neste momento os alunos se debruçaram nos cálculos e se deparam com situações que conduziram a $\Delta = 0$ e $\Delta = -24$, ocasião em que se levantou boas discussões na sala, fazendo com que os estudantes percebessem a relação que podemos estabelecer entre o discriminante “Δ” e as raízes.

Ao analisarmos as respostas dadas pelos alunos percebemos que 8 alunos (66,6%), resolveram corretamente a atividade, enquanto que 4 alunos (33,3%) acabaram por cometer erros nas operações numéricas ou responderam de modo incompleto.

Podemos ver na Figura 25 uma resolução desta atividade dada pelo aluno CEGS.

Figura 25: Resposta do aluno CEGS para a pergunta: Determine algebricamente, caso exista, os zeros das funções a seguir: $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$ e $h(x) = 3x^2 + 6x + 5$.



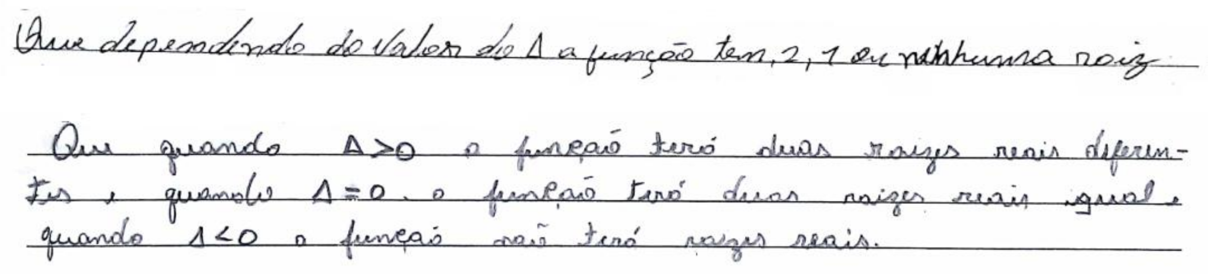
Fonte: Pesquisa direta

O empenho dos alunos nesta atividade, juntamente as ações de mediação pelo indivíduo, naquele momento representado pelo professor, e por instrumentos e signos, ali representados pelo *software* geogebra e as construções dos gráficos, contribuíram para uma melhor compreensão da relação entre o discriminante "Δ" e as raízes de uma função quadrática.

Bona, Basso e Fagundes (2011, p. 10) defendem que "quando engajado em uma atividade, o estudante pode atingir níveis mais elevados de compreensão de conceitos matemáticos, desencadeados pela necessidade de superar seu próprio desafio."

Os comentários da Figura 26 ilustram os conhecimentos adquiridos com esta atividade.

Figura 26: Resposta dos alunos FEAC e FHFC para a pergunta: Observando as funções *f*, *g* e *h*. Que relação podemos estabelecer entre os zeros da função e o valor do seu discriminante (Δ)?(referindo-se à Atividade 3.2)



Que dependendo do Valor do Δ a função tem, 2, 1 ou nenhuma raiz

Que quando Δ>0 a função terá duas raizes reais diferentes, quando Δ=0 a função terá duas raizes reais igual e quando Δ<0 a função não terá raizes reais.

Fonte: Pesquisa direta

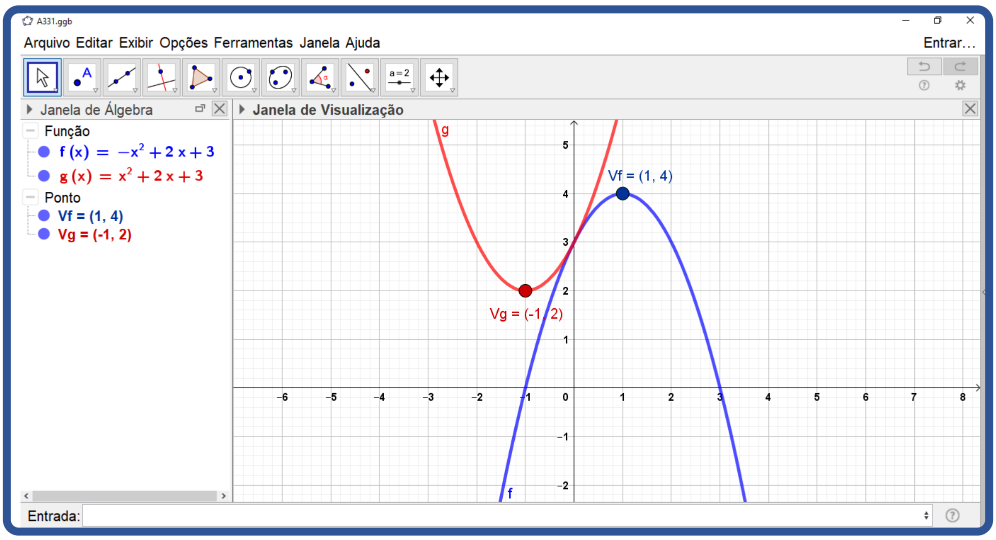
Percebemos pelo comentário do aluno FEAC, houve a compreensão de que uma função pode ter nenhuma, uma ou duas raízes, e isto a depender do valor do discriminante da função. O comentário do aluno FHFC já detalha melhor conhecimento apontando que se o $\Delta > 0$ a função terá duas raízes diferente, quando $\Delta = 0$, a função terá as raízes iguais e quando $\Delta < 0$ a função não terá raízes reais.

Análise da Atividade 3.3 – Vértice da parábola

Esta atividade (ver Apêndice H) tem como objetivo, levar os alunos a compreender melhor o conceito e as propriedades que permeiam o vértice da parábola. Ela está dividida em três partes. Na primeira os alunos, com a mediação do *software*, construíram os gráficos e localizaram os vértices da função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + 2x + 3$.

Na Figura 27, podemos ver uma representação desta construção.

Figura 27: Representação da construção do gráfico proposto na primeira parte da Atividade 3.3



Fonte: Autor

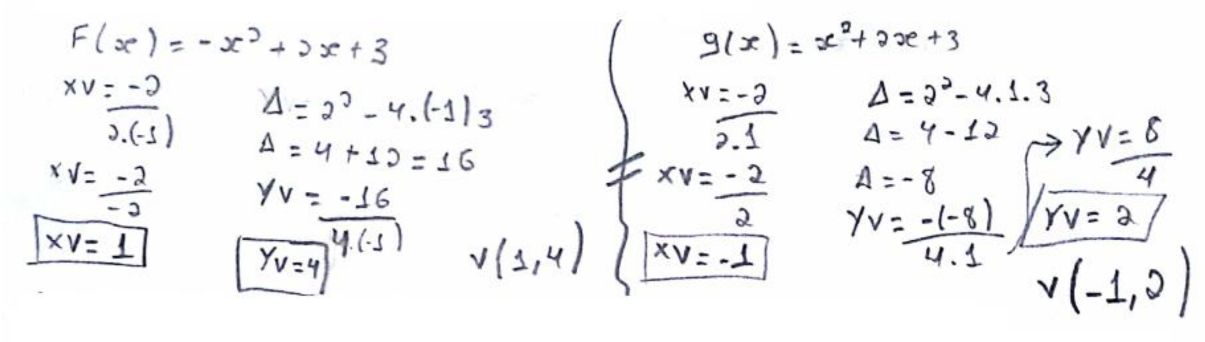
Com base na visualização dos gráficos foi perguntado aos alunos se a função possui ponto de máximo ou de mínimo. Todos responderam corretamente, afirmando que a função “f” possui ponto de máximo e a função “g” ponto de mínimo.

Na sequência os alunos foram conduzidos para a segunda parte desta atividade, na qual eles determinaram algebricamente, as coordenadas do vértice das parábolas das funções $f(x) = – x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + 2x + 3$, que tinham sido construídas no *software* na primeira parte desta atividade.

Neste momento os alunos se debruçaram nos cálculos, de modo que 11 alunos (91,6%) resolveram a atividade corretamente e 1 aluno (8,3%) deixou a questão em branco.

Na Figura 28 podemos ver a resposta do aluno AQNM para esta questão

Figura 28: Resposta do aluno AQNM para a pergunta: Determine algebricamente, as coordenadas do vértice da parábola das funções $f(x) = – x^2 + 2x + 3$ e $g(x) =x^2 + 2x + 3$.


$F(x) = -x^2 + 2x + 3$

$xv = \frac{-2}{2.(-1)}$

$xv = \frac{-2}{-2}$

$\boxed{xv = 1}$

$\Delta = 2^2 - 4.(-1).3$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$yv = \frac{-16}{4.(-1)}$

$\boxed{yv = 4}$

$v(1,4)$

$g(x) = x^2 + 2x + 3$

$xv = \frac{-2}{2.1}$

$xv = \frac{-2}{2}$

$\boxed{xv = -1}$

$\Delta = 2^2 - 4.1.3$

$\Delta = 4 - 12$

$\Delta = -8$

$yv = \frac{-(-8)}{4.1}$

$yv = \frac{8}{4}$

$\boxed{yv = 2}$

$v(-1,2)$

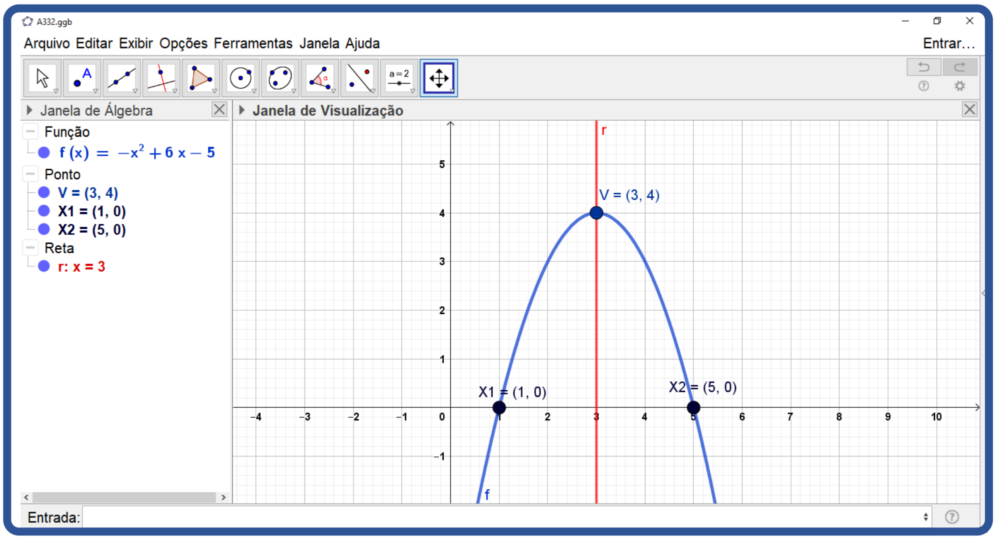
Fonte: Pesquisa direta

A resolução desta atividade demonstra que houve uma boa compreensão dos alunos quanto à identificação dos valores das coordenadas do vértice da parábola.

Foi percebido que houve nesta atividade a reconstrução interna, pelos alunos, de uma operação realizada inicialmente de forma externa, pelo professor. Ocorrendo a internalização do conceito, uma vez que houve um processo de transformação em que uma operação foi, em primeiro momento, representada pelo professor de modo externo, e ao longo do desenvolvimento da aprendizagem transformou-se em algo interno do aluno. (VYGOTSKY, 1998)

A terceira parte desta atividade foi realizada, novamente com o auxílio do *software* geogebra, A Figura 29 traz uma representação da construção do gráfico proposto por esta atividade.

Figura 29: Representação da construção do gráfico proposto na terceira parte da Atividade 3.3



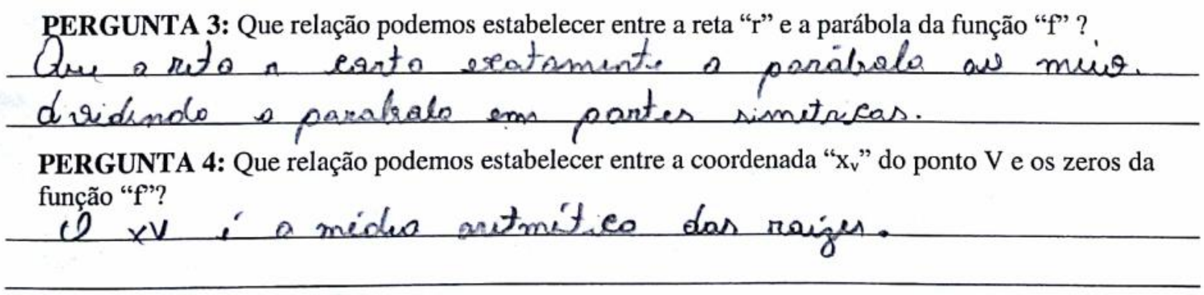
Fonte: Autor

Com o gráfico construído na tela do computador e projetado pelo *datashow* foram levantadas discussões com os alunos, instigando-os a refletirem sobre as relações que podem ser estabelecidas entre a parábola, as coordenadas do seu vértice e as raízes da função.

É importante ressaltar que as concepções de aprendizagem defendidas por Vygotsky (1998), reforçam a importância das interações sociais, logo os momentos de discussões e reflexões em que os alunos participam e interagem são de fundamental importância no processo de aprendizagem. Moysés (1997, p. 27) reforça isso ao afirmar que "[...] é na interação social e por intermédio do uso de signos que se dá o desenvolvimento das funções psíquicas superiores".

A partir da mediação pelo professor e pelo *software*, algumas aprendizagens foram suscitadas dentre elas destaca-se esta citada no comentário do aluno AMVL que podemos observar pela Figura 30.

Figura 30: Resposta do aluno AMVL para as perguntas: Que relação podemos estabelecer entre a reta "r" e a parábola da função "f"? e Que relação podemos estabelecer entre a coordenada "x_v" do ponto V e os zeros da função "f"? (referindo-se à Atividade 3.3)



PERGUNTA 3: Que relação podemos estabelecer entre a reta "r" e a parábola da função "f" ?

Que a reta a corta exatamente a parábola ao meio. dividindo a parabola em partes simetricas.

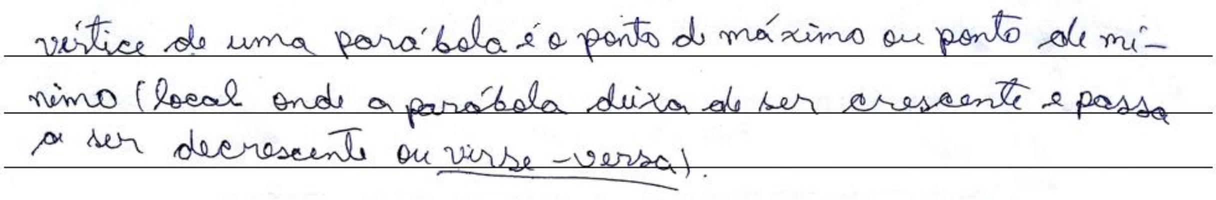
PERGUNTA 4: Que relação podemos estabelecer entre a coordenada "x_v" do ponto V e os zeros da função "f"?

O xv é a média aritmética das raízes.

Fonte: Pesquisa direta

Ainda no desenvolvimento desta atividade, percebemos que houve também a compreensão por parte dos alunos de que o vértice consiste no ponto de inflexão da parábola. Este aprendizado foi percebido pelo comentário do aluno AFO, ao ser questionado sobre o que aprendeu ao realizar esta atividade (ver Figura 31).

Figura 31: Resposta do aluno AFO para a pergunta: O que você aprendeu ao realizar esta atividade? (referindo-se à Atividade 3.3)


vértice de uma parábola é o ponto de máximo ou ponto de mí-
nimo (local onde a parábola deixa de ser crescente e passa
a ser decrescente ou virse-versa).

Fonte: Pesquisa direta

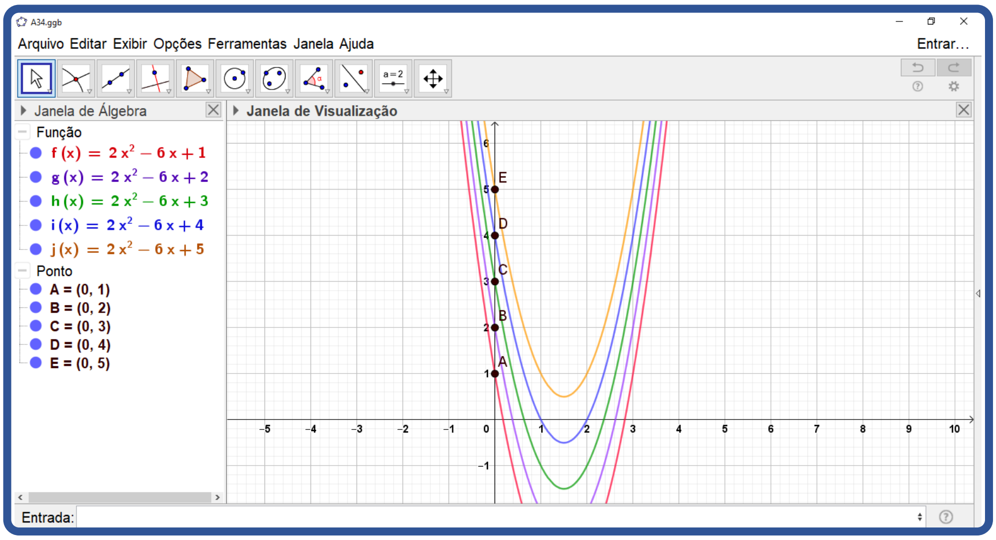
Análise da Atividade 3.4 – Interseção da parábola com o eixo “y”

A última atividade do dia (ver Apêndice I) teve como objetivo identificar o ponto de interseção do gráfico de uma função quadrática com o eixo das ordenadas, como também de construir um esboço do gráfico de uma função identificando seus pontos notáveis.

A atividade está dividida em duas partes e na primeira, realizada com a mediação do *software*, os alunos construíram o gráfico das funções $f(x) = 2x^2 – 6x + 1$, $g(x) = 2x^2 – 6x + 2$, $h(x) = 2x^2 – 6x + 3$, $i(x) = 2x^2 – 6x + 4$ e $j(x) = 2x^2 – 6x + 5$ e identificaram o ponto de interseção entre a parábola e o eixo das ordenadas para cada uma das funções.

A Figura 32 representa a construção dos gráficos no *software* geogebra.

Figura 32: Representação da construção dos gráficos proposto na terceira parte da Atividade 3.4



Fonte: Autor

A partir da construção dos gráficos foi discutido com os alunos a relação existente entre o ponto de interseção do gráfico da parábola com o eixo "y" e o coeficiente "c". Ao analisarmos os formulários de atividade percebemos que houve uma boa compreensão desta relação. Os comentários dos alunos FHFC e JPS, constante na Figura 33, ilustram esta compreensão.

Figura 33: Resposta dos alunos FHFC e JPS para a pergunta: Que relação podemos estabelecer entre as funções e as coordenadas dos pontos de interseção das parábolas com o eixo das ordenadas? (referindo-se a Atividade 3.4)

O valor de ~~x~~ c) é o ponto de cruzamento da parábola com o eixo y.

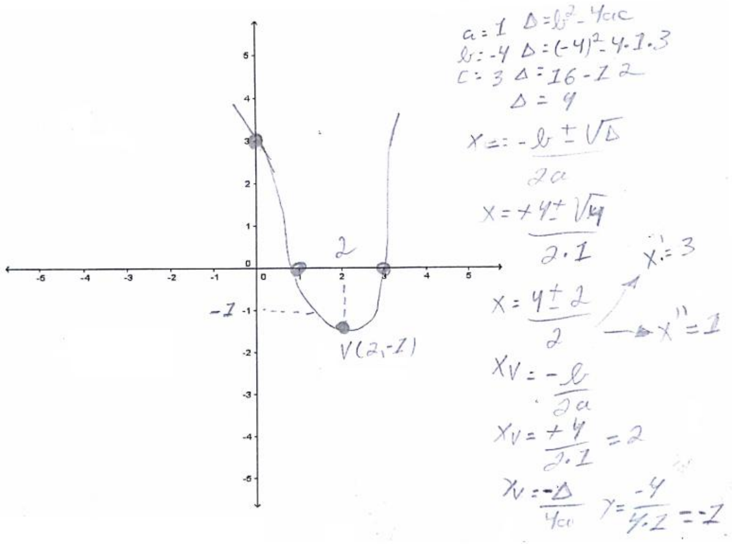
O coeficiente c indica onde a parabola cortar o eixo y

Fonte: Pesquisa direta

Na segunda parte desta atividade, realizada na própria folha do formulário, os alunos foram orientados a construírem o esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ com a identificação de todos os pontos notáveis.

Veja na Figura 34, uma solução apresentada pelo aluno AMVL.

Figura 34: Resposta do aluno AMVL para a pergunta: Construa, no plano cartesiano abaixo o esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e determine as coordenadas das raízes (caso existam), do ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e do vértice da parábola.



Fonte: Pesquisa direta

Esta atividade foi realizada de modo satisfatório por 9 alunos (75%), que apresentaram o gráfico e as operações algébricas para identificação das raízes e das coordenadas do vértice da parábola. 3 alunos (25%) construíram o gráfico identificando alguns pontos notáveis, mas não registraram no formulário os cálculos que levaram aos valores dos zeros e das coordenadas do vértice.

5.3.4 Análise do quarto encontro da intervenção metodológica

Neste encontro, ocorrido no dia 8 de maio do ano em curso, foi explorado as ferramentas do *software* geogebra com a análise do comportamento do gráfico da função quando da variação dos valores dos seus coeficientes e do discriminante. As informações colhidas neste encontro se consolidarão na quarta categoria desta pesquisa.

Estrategicamente esta exploração foi levada para o quarto dia da intervenção metodológica, uma vez que os alunos já se apresentavam mais familiarizados com o *software*, e principalmente com os conceitos referentes às funções quadráticas.

No primeiro momento deste encontro houve a retomada de alguns assuntos abordados no encontro passado, e com a mediação do *software* geogebra, por meio da construção de alguns gráficos reforçou-se os conceitos de parábola, raízes e vértice.

Na sequência os alunos foram conduzidos a realizarem as atividades que analisaremos a seguir

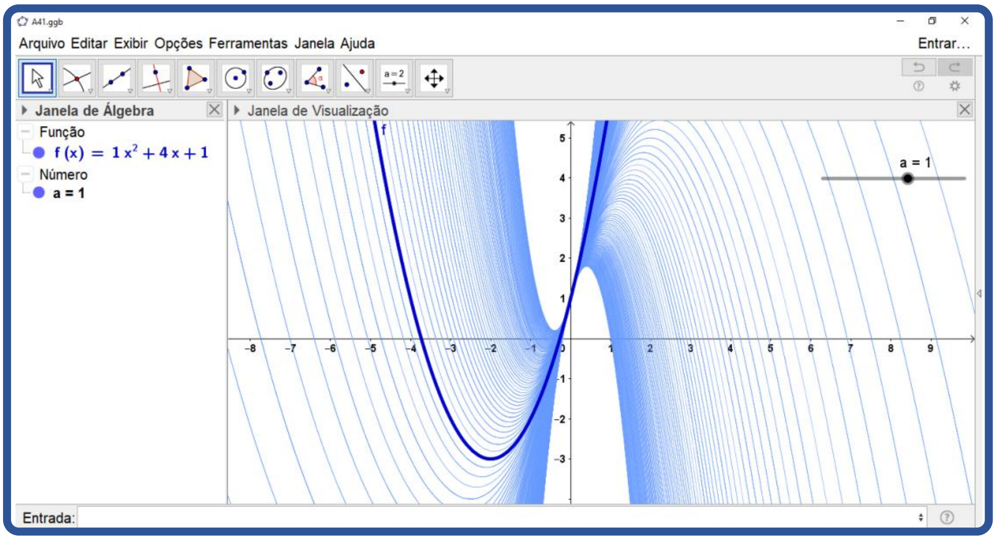
Análise da Atividade 4.1 - Comportamento do gráfico com a variação de “a”

Esta atividade (ver Apêndice J) tem como objetivo investigar o comportamento do gráfico da parábola com a variação apenas do coeficiente “a”. Nela os alunos, com o auxílio da ferramenta de controle deslizante, foram levados a analisar o comportamento do gráfico da função $f(x) = ax^2 + 4x + 1$, com a variação do coeficiente “a”.

Na Figura 35, encontramos uma representação da construção do gráfico desta atividade.

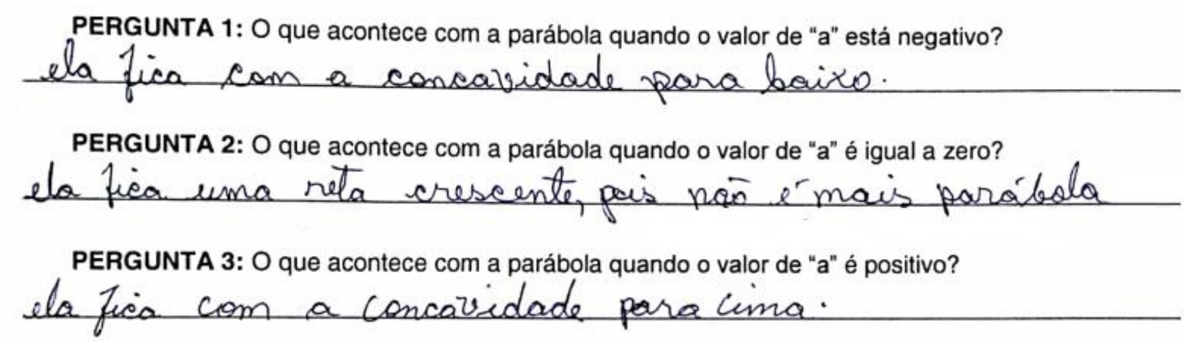
Partindo da análise do gráfico algumas perguntas foram levantadas sobre a relação da parábola com o valor do coeficiente “a” e, com certa facilidade, todos os alunos responderam que há uma mudança no sentido da concavidade da parábola. Na Figura 36, podemos ver um exemplo da resposta fornecida pelo aluno FBF.

Figura 35: Representação da construção do gráfico proposto na Atividade 4.1



Fonte: Autor

Figura 36: Resposta do aluno FBF para perguntas referentes ao gráfico da Atividade 4.1



PERGUNTA 1: O que acontece com a parábola quando o valor de "a" está negativo?

ela fica com a concavidade para baixo.

PERGUNTA 2: O que acontece com a parábola quando o valor de "a" é igual a zero?

ela fica uma reta crescente, pois não é mais parábola

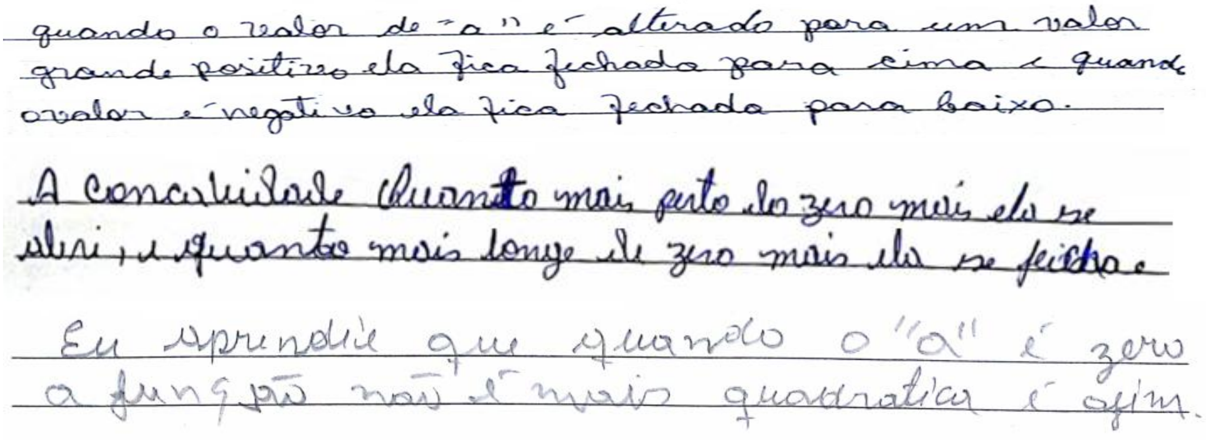
PERGUNTA 3: O que acontece com a parábola quando o valor de "a" é positivo?

ela fica com a concavidade para cima.

Fonte: Pesquisa direta

Neste momento, alguns alunos entenderam porque na definição de uma função quadrática, existe a restrição de que "a" seja diferente de zero. Este fato foi verbalizado pelo aluno FHFC no momento da discussão que envolvia a construção deste gráfico. Ele também foi percebido quando analisamos as respostas dos alunos sobre as aprendizagens adquiridas com esta atividade, conforme podemos observar na Figura 37.

Figura 37: Resposta dos alunos MANS, MRL e FBF para a pergunta: O que você aprendeu ao realizar esta atividade? (referindo-se a Atividade 4.1)


quando o valor de "a" é alterado para um valor grande positivo ela fica fechada para cima e quand ovalor é negativo ela fica fechada para baixo.

A concavidade quanto mais perto do zero mais ela se abri, e quanto mais longe de zero mais ela se fecha.

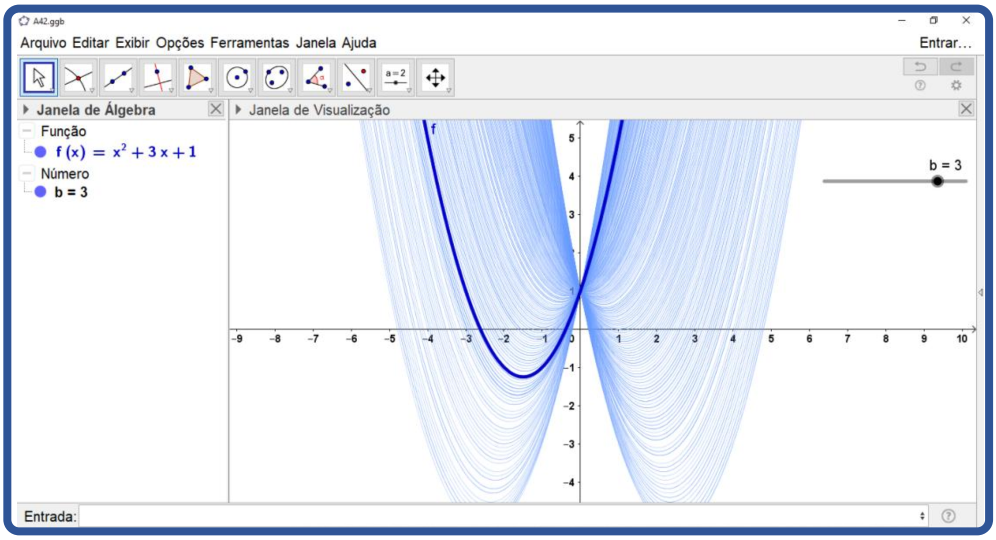
Eu aprendie que quando o "a" é zero a função não é mais quadratica e sim.

Fonte: Pesquisa direta

Análise da Atividade 4.2 - Comportamento do gráfico com a variação de "b"

Esta atividade (ver Apêndice K) tem o objetivo de investigar sobre o comportamento da parábola de uma função quadrática quando o coeficiente "b" altera o seu valor. Ela sugere que o aluno construa no *software* geogebra o gráfico da função f(x) = x^2 + bx + 1, modificando o valor de "b" por meio da ferramenta de controle deslizante. Veja na Figura 38 uma representação desta construção.

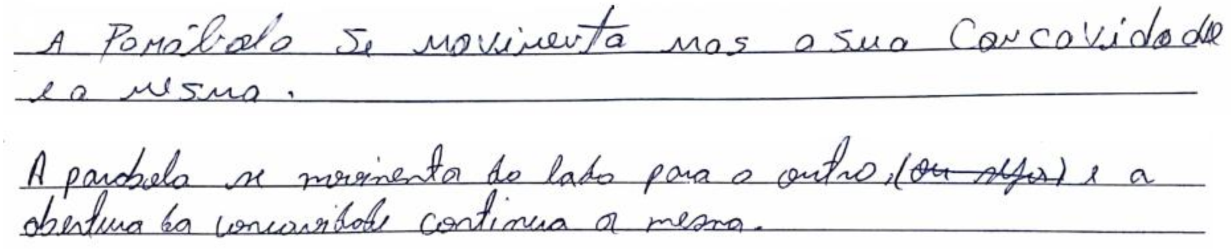
Figura 38: Representação da construção do gráfico proposto na Atividade 4.2



Fonte: Autor

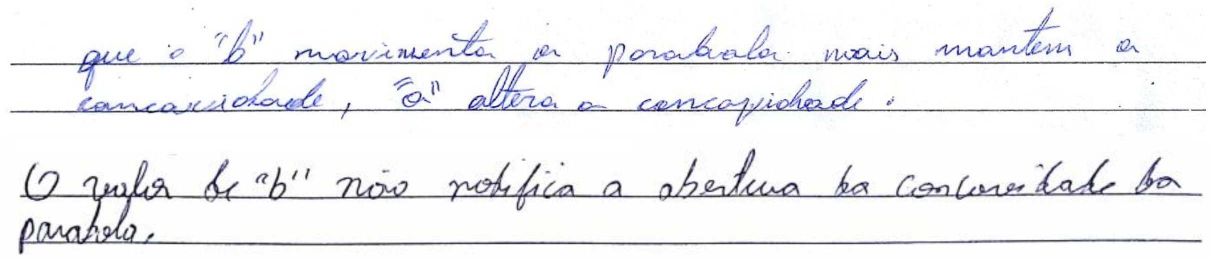
Após a construção do gráfico pelos alunos e investigação do seu comportamento pela variação do coeficiente “b” foram levantados questionamentos sobre o que eles perceberam com a atividade. Muitos relataram que a parábola se movimenta de um lado para o outro, porém quando se questionou sobre a diferença entre o movimento da parábola com a variação do “b” e com a variação do “a”, feita na atividade anterior, os alunos perceberam que apesar do valor de “b” modificar a posição da parábola, sua concavidade continua inalterada. Este aprendizado pode ser constatado nos comentários dos alunos FHFC, AMVL, FEAC e AMVL. (ver Figuras 39 e 40).

Figura 39: Resposta dos alunos FHFC e AMVL para a pergunta: O que acontece com a parábola quando o valor de “b” é modificado? (referindo-se a Atividade 4.2)



Fonte: Pesquisa direta

Figura 40: Resposta dos alunos FEAC e, AMVL para a pergunta: O que você aprendeu ao realizar esta atividade? (referindo-se à Atividade 4.2)



Fonte: Pesquisa direta

A participação dos alunos nas discussões provocadas durante o processo de construção dos gráficos contribuiu para a consolidação deste conhecimento. De acordo com o pensamento de Oliveira (2016), no processo de aprendizagem com a mediação, o professor deve assumir a postura de mediador, logo sua metodologia deve priorizar as relações sociais, contando sempre com a participação ativa dos alunos nas atividades.

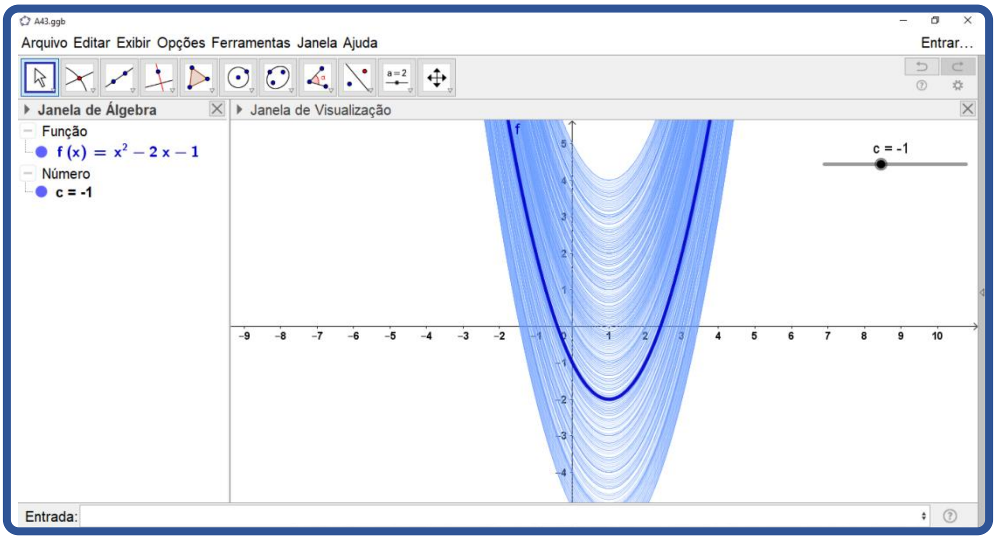
Sobre a ação do professor como mediador da aprendizagem Moysés (1997, p. 36) ressalta que “[...] O professor, trabalhando com o aluno, deve explicar, dar informações, questionar, corrigir o aluno e o fazer explicar". O professor neste sentido deve sempre estimular o aluno a assumir uma postura mais ativa no processo de aprendizagem.

Análise da Atividade 4.3 - Comportamento do gráfico com a variação de "c"

Esta atividade (ver Apêndice L), tem o objetivo de investigar o comportamento da parábola com a variação do coeficiente "c" da função quadrática. Ela retomou as investigações da relação entre o ponto de interseção da parábola com o eixo "y" e o valor de "c". Reforçando os aprendizados adquiridos no encontro anterior, quando da realização da atividade 3.4, analisada na seção 5.3.3.

A Figura 41 representa a construção do gráfico proposto por esta atividade com a exploração do movimento do gráfico quando da variação do coeficiente "c".

Figura 41: Representação da construção do gráfico proposto na Atividade 4.3

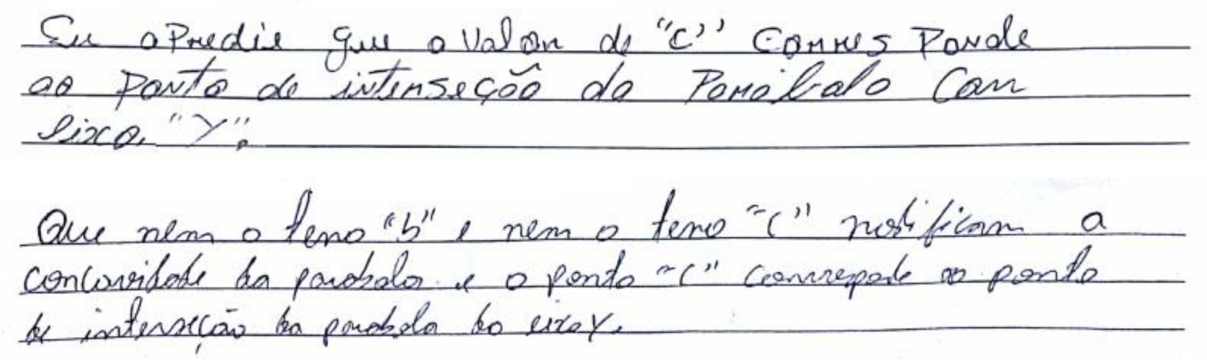


Fonte: Autor

Novamente relacionando esta atividade com as anteriores, os alunos foram levados a refletirem sobre a mudança no gráfico da parábola quando se altera os valores de "a", "b" e "c". Fazendo com que eles percebessem que somente o coeficiente "a" influencia na abertura e no sentido da concavidade da parábola. A mudança nos coeficientes "b" e "c" apenas translada a parábola para outra posição do plano cartesiano, preservando a abertura e o sentido da concavidade.

Na Figura 42, podemos observar os comentários dos alunos MJMC e MANS sobre os aprendizados adquiridos nesta atividade.

Figura 42: Resposta dos alunos MJMC e MANS para a pergunta: O que você aprendeu ao realizar esta atividade? (referindo-se a Atividade 4.3)


Eu aPredie que o Valor de "C" Corresponde ao ponto de intenseção da Porabalo Com eixo "Y".

Que nem o termo "b" e nem o termo "c" modificam a concavidade da parabola e o ponto "c" corresponde ao ponto de intersecção da parabola do eixo Y.

Fonte: Pesquisa direta

No comentário do aluno MANS, percebemos que pelo fato dele entender que nem o coeficiente "b" nem o coeficiente "c" modificarem a concavidade da parábola, isto implica disser que somente o coeficiente "a" altera a concavidade da parábola. Esta compreensão pelo aluno o leva a perceber com maior significado a afirmação que diz que quando o "a" é positivo a concavidade da parábola é para cima e quando o "a" é negativo a concavidade é para baixo. Pois como ele mesmo observou, somente o coeficiente "a" modifica a concavidade da parábola.

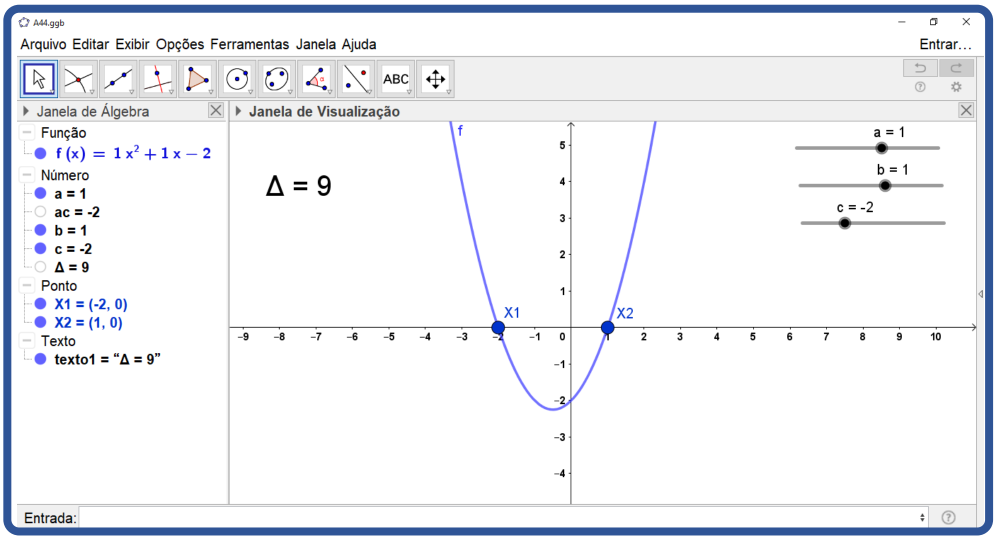
Percebemos que a sistematização desta atividade, associada hierarquicamente com as anteriores, contando com a mediação do professor e do *software*, levou os alunos a aquisição de novas aprendizagens. Estas aprendizagens, segundo Vygotsky (1993), caracterizam-se neste contexto como *conceitos científicos.*

Análise da Atividade 4.4 - Comportamento do gráfico com a variação de "Δ"

Esta atividade (ver Apêndice M) tem o objetiva de investigar a influência do discriminante na quantidade de raízes da função. Este assunto também foi abordado na atividade 3.2 do encontro anterior, já analisado na seção 5.3.3. Porém nesta atividade graças à ferramenta de controle deslizante, foi possível fazer uso de todo dinamismo do *software* para reforçar os conhecimentos vistos naquela atividade.

A construção gráfica proposto nesta atividade pode ser observada na Figura 43.

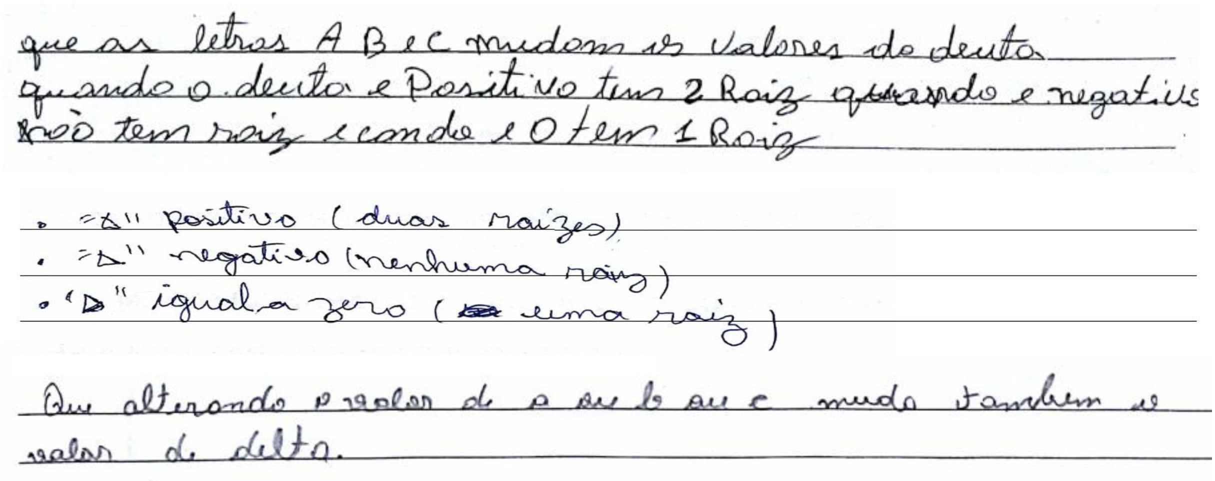
Figura 43: Representação da construção do gráfico proposto na Atividade 4.4



Fonte: Autor

Com o gráfico construído e após momentos de muita discussão e reflexão, os alunos perceberam, de modo mais significativo, qual a influência do "Δ" na quantidade de raízes de uma função quadrática. Suas aprendizagens podem ser observadas através dos comentários feitos pelos alunos FBF, AFO e FHFC, conforme podemos ver na Figura 44.

Figura 44: Resposta dos alunos FBF, AFO e FHFC para a pergunta: O que você aprendeu ao realizar esta atividade? (referindo-se a Atividade 4.4)


que as letras A B e C mudam os Valores do deuta
quando o deuta e Positivo tem 2 Raiz quando e negativo
não tem raiz e cando e 0 tem 1 Raiz

• "Δ" positivo (duas raízes)
• "Δ" negativo (nenhuma raiz)
• "Δ" igual a zero (uma raiz)

Que alterando o valor de a ou b ou c muda tambem o valor de delta.

Fonte: Pesquisa direta

O estudo do comportamento da parábola de uma função quadrática com a variação de seus coeficientes é algo difícil de ser trabalhado sem o auxílio de *softwares*. Neste caso o aprendizado com a mediação do computador é essencial.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC,

> [...] o trabalho e a conversão entre representações algébricas e gráficas são de vital importância para análise e interpretação das relações existentes entre as variáveis envolvidas numa função. O uso de *softwares* se constitui uma ferramenta fundamental para esse trabalho, sobretudo para analisar variações quando se modificam parâmetros. (BRASIL, 2016, p. 576)

5.3.5 Análise do quinto encontro da intervenção metodológica

O último encontro da intervenção metodológica dedicou-se a resolução de problemas envolvendo os conteúdos estudados nos encontros anteriores. As informações colhidas neste encontro voltaram-se para a quinta categoria desta pesquisa.

Entendemos que todo aprendizado deve ser munido de significado, portanto é imprescindível que, sempre que possível, se apresente aplicações dos conhecimentos estudados em situações do cotidiano ou em outras áreas de conhecimento como na física, química ou biologia. Neste aspecto a resolução de problemas pode ser uma boa estratégia para contextualizar melhor os conteúdos da matemática. (BRASIL, 2016)

Segundo Dante (2002, p. 10) um problema matemático "é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la". Ele ainda reforça destacando que "um dos principais objetivos do ensino da matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações problemas que o envolvam, o desafiem e o motivem a resolvê-las." (Dante, 2002, p. 11)

No trabalho com situações problemas em aulas de matemática, Polya (1995, p. 25) aponta quatro etapas principais para a resolução de um problema, são elas: "(1) Compreender o problema; (2) Estabelecimento de um plano; (3) Execução do plano; e (4) Retrospecto, examinado a solução obtida."

Neste encontro da intervenção metodológica os conhecimentos adquiridos nos dias anteriores, foram contextualizados com situações do dia-a-dia ou com outras áreas do conhecimento através de problemas.

No primeiro momento do encontro foram dadas orientações sobre as etapas para resolução de um problema, segundo as concepções de Polya (1995). Na sequência foram resolvidos quatro exemplos de problemas que apresentavam situações contextualizadas envolvendo funções quadráticas e valores de máximo ou mínimo de uma função. Eles serviram de modelo para que os alunos fossem se familiarizando com este tipo de atividade.

Para facilitar a interpretação destes problemas foram utilizadas perguntas norteadoras, do tipo: O que o problema pede? Quais as informações que o problema nos fornece? Como posso resolvê-lo?

No processo de aprendizagem com a mediação, o uso de perguntas norteadoras e a realização de exemplos que servem de modelo, ajudam o aluno na compreensão dos conceitos. Moysés (1997) corrobora com esta ideia e enfatiza que:

> Perguntas-guias, exemplos e demonstrações constituem o cerne dessa ajuda. A aprendizagem mediante demonstrações pressupõe imitação. Trata-se, porém, de um conceito amplo, que implica imitação de um modelo dado socialmente não no seu sentido copiá-lo exatamente, mas algo que envolve uma experimentação construtiva. Ou seja, a criança realiza ações semelhantes à do modelo de uma forma construtiva, imprimindo-lhe modificações. Disso resulta uma nova forma, embora não exatamente igual, mas inspirada no modelo. Desse processo resulta a internalização da compreensão do modelo. (MOYSÉS, 1997, p. 27)

A interpretação dos problemas contou, sempre que possível, com a mediação do *software* geogebra, através da análise da representação gráfica da função que o problema sugere. Após a compreensão do problema, partia-se para a elaboração do plano de ação e posteriormente a execução deste plano, finalizando sempre com uma verificação do resultado obtido.

Após a resolução dos exemplos, os alunos foram encaminhados para a resolverem as atividades 5.1, 5.2 e 5.3 que analisaremos a seguir. Tais atividades têm como objetivo desenvolver no aluno a capacidade de resolver problemas contextualizados envolvendo conhecimentos sobre funções quadráticas.

Análise da Atividade 5.1 - Problema envolvendo função quadrática

Nesta atividade (ver Apêndice N) encontramos um problema que apresenta uma aplicação da função quadrática muito explorada em situações do cotidiano. Trata-se da relação entre a distância percorrida por um objeto em queda livre em função ao tempo transcorrido. No Quadro 3, encontramos o enunciado do problema.

Quadro 3: Problema da atividade 5.1

> Do décimo sexto andar de um edifício, a 50 metros do chão, caiu um vaso. A distância do vaso em relação ao solo em cada momento da queda pode ser calculada pela fórmula **d = 50 – 2t²**.
>
> Considerando a distância **d** em metros e o tempo **t** em segundos. Quanto tempo o vaso levou para atingir o solo?

Fonte: Smole e Diniz (2013, p. 126)

Seguindo o caminho de Polya (1995), os alunos, após a leitura atenta do problema buscaram compreende-lo, e este se mostrou o momento mais difícil para os alunos. Alguns não entendiam bem o que o problema estava propondo e não sabiam por onde começar.

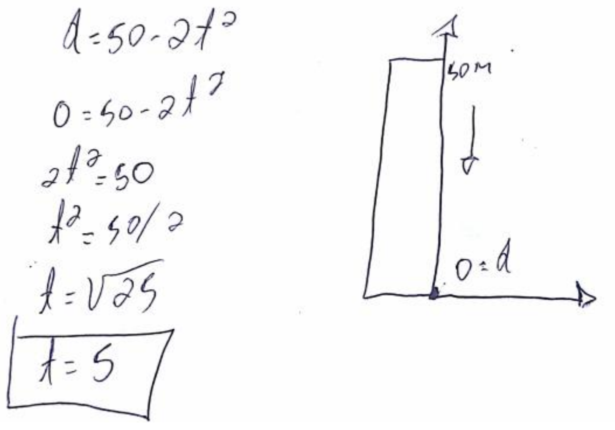
Alguns alunos até construíram o gráfico da função no computador na busca de melhor compreensão, outros rabiscavam no caderno uma ilustração que viesse a representar o problema.

Uma boa discussão surgiu na sala do laboratório, movido por algumas perguntas, entre elas: O valor de “d” é 50? (aluno FBF). É para usar a fórmula de Bhaskara? (aluno JPS). Quando o vaso atingir o solo sua distância será zero? (aluno AMVL).

Diante das dúvidas dos estudantes, foi necessária a mediação do professor que com a utilização do *software* geogebra construiu o gráfico da função e analisou a parábola que o representa. Foi então que os alunos entenderam melhor o problema e partiram para tentar solucioná-lo algebricamente.

Na Figura 45, podemos ver a solução do aluno MJMC para este problema.

Figura 45: Resposta do aluno MJMC ao problema da atividade 5.1



Fonte: Pesquisa direta

Percebemos na resposta da Figura 45, que o aluno MJMC utilizou-se de uma ilustração para melhor compreensão do problema. Também identificamos na sua resolução que ele não usou a fórmula de Bhaskara, isto demonstra que o aluno estabeleceu o seu próprio meio para solucionar o problema, logo houve a internalização do conhecimento pelo aluno, pois, no pensamento de Vygotsky (1998), a internalização ocorre quando no desenvolver do processo de aprendizagem, o estudante deixa de utilizar os meios oferecidos externamente pelo professor, e passa a utilizar signos internos, ou seja, estratégias desenvolvidas por ele mesmo.

Outros alunos resolveram este problema com a aplicação da fórmula de Bhaskara, obtendo o mesmo resultado.

Nesta atividade 8 alunos (66,6%) resolveram o problema corretamente, enquanto que 4 alunos (33,3%) cometeram erros no desenvolvimento algébrico do problema.

Um fato importante a ser destacado é que nenhum aluno realizou a verificação da solução encontrada.

Análise da Atividade 5.2 - Problema envolvendo valor de máximo ou de mínimo da função quadrática

Esta atividade (ver Apêndice O) busca contextualizar os conhecimentos estudados na intervenção metodológica ao estabelecer uma relação entre potência elétrica e corrente elétrica por meio de uma função quadrática. É um problema comumente utilizado em física quando se estuda eletrodinâmica. No Quadro 4, podemos observar o enunciado do problema.

Quadro 4: Problema da atividade 5.2

A potência elétrica **P**, em watt (w), lançada em um circuito por um gerador é expressa por $\mathbf{P = 10i - 5i^2}$, onde **i** é a intensidade da corrente elétrica, medida em ampère (A). Calcule a intensidade da corrente elétrica necessária para se obter a potência máxima do gerador.

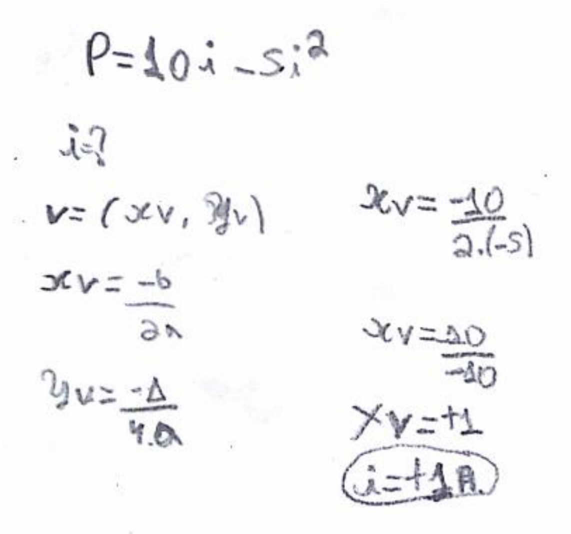
Fonte: Smole e Diniz (2013, p. 130)

Assim como na atividade anterior, a interpretação do problema também se mostrou um grande obstáculo para os alunos. Sendo necessária novamente a mediação do professor com algumas perguntas para nortear o pensamento dos alunos. Entre as perguntas norteadoras, destacaram-se: Quais os dados que o problema oferece? O que se pede no problema? Como posso obter a resposta do problema?

Novamente a mediação do professor contou com o *software* geogebra para a análise do gráfico da função apresentada no problema, contribuindo para que os alunos entendessem melhor o propósito da questão. Levando-os a compreender que havia a necessidade de obtenção do vértice da função proposta pelo problema.

Após a discussão da questão os alunos partiram para a sua resolução. Na Figura 46, temos a solução apresentada pelo aluno AFO.

Figura 46: Resposta do aluno AFO ao problema da atividade 5.2



Fonte: Pesquisa direta

Nesta solução dada pelo aluno AFO, percebemos que ele identificou que o problema pede o valor de i, ou seja, da intensidade da corrente elétrica para que a potência seja máxima, logo buscou encontra o valor de x_v ("x" vértice). Esta mesma percepção aconteceu com outros 6 estudantes, totalizando 7 alunos (58,3%), que responderam este problema corretamente.

Porém 5 alunos (41,6%) erraram a questão, pois calcularam o valor do y_v ("y" vértice), que corresponde ao valor da potência máxima. Isto nos mostra que estes alunos ainda não haviam compreendido o problema.

Foi percebido novamente que os alunos não possuem o hábito de verificar o problema. Pois não foi encontrada em nenhuma das soluções dos alunos a indicação de que eles examinaram a solução obtida aplicando o resultado na função do problema. Em todos os casos, o que se percebeu foi que ao chegarem a uma resposta, simplesmente já consideram que o problema estava resolvido.

Análise da Atividade 5.3 – Problema envolvendo função quadrática e valor de máximo ou de mínimo

Esta atividade (ver Apêndice P) traz um problema que aborda uma situação muito comum em nosso dia-a-dia, o arremesso de um objeto ao ar. Aqui o objeto trata-se de uma bola e a sua altura está em função do tempo transcorrido. O Quadro 5 nos mostra o enunciado do problema.

Quadro 5: Problema da atividade 5.3

Uma bola é arremessada do alto de uma árvore. Suponha que sua altura **h**, em metros, **t** segundos após o lançamento, seja $\mathbf{h = -t^2 + 4t + 6}$. Responda a) Qual é a altura da árvore? b) Qual é o tempo que a bola leva para voltar a suam altura inicial? c) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

Fonte: Adaptado de Smole e Diniz (2013, p. 134)

Após a leitura do problema pelos alunos, uma dúvida foi levantada a partir da pergunta feita pelo aluno FBF: Como saber qual a altura da árvore?

Novamente houve a mediação do professor com perguntas norteadoras para direcionar o pensamento dos alunos para compreensão do problema, entre elas: Ao arremessarmos um objeto, como podemos descrever a sua trajetória? E se esse objeto fosse arremessado do alto de uma árvore? Como podemos estabelecer a relação entre o tempo e a altura do objeto?

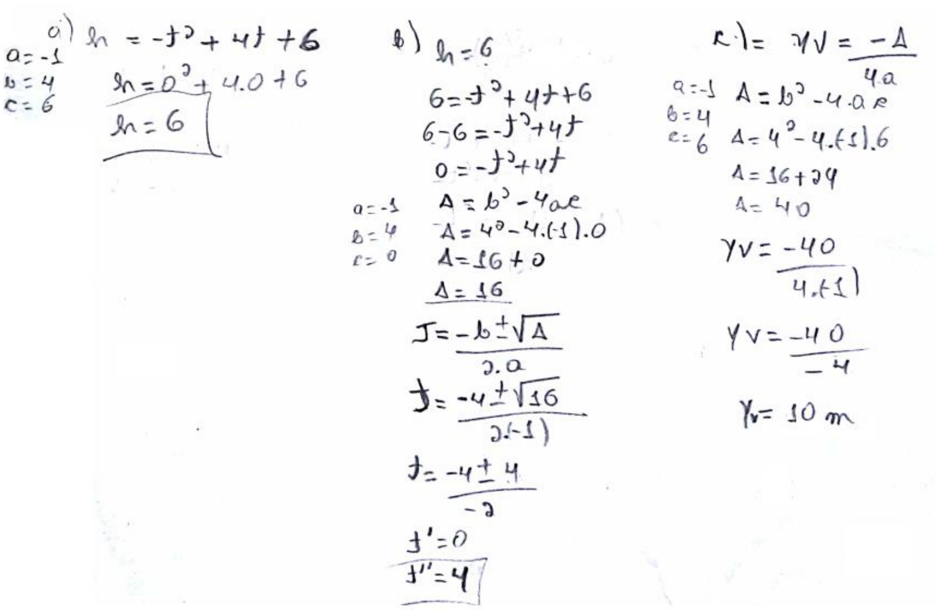
Na discussão do problema, foi constatado que a interpretação do problema ainda se apresenta um obstáculo para a sua resolução, pois embora os alunos conseguissem imaginar o cenário sugerido pelo problema, em que uma pessoa arremessa uma bola do alto de uma árvore, eles não conseguiam estabelecer a relação entre a altura da bola e o tempo transcorrido.

Em meio a esta dificuldade foi utilizado o *software*, para explicar com base na exploração do gráfico da função, a relação que o problema estabelece entre a altura e o tempo.

Depois de um bom momento de discussões e explicações, os alunos já com uma melhor compreensão do problema, partiram para a sua resolução.

Na Figura 47, encontramos a resposta oferecida pelo aluno FHFC.

Figura 47: Resposta do aluno FHFC ao problema da atividade 5.3



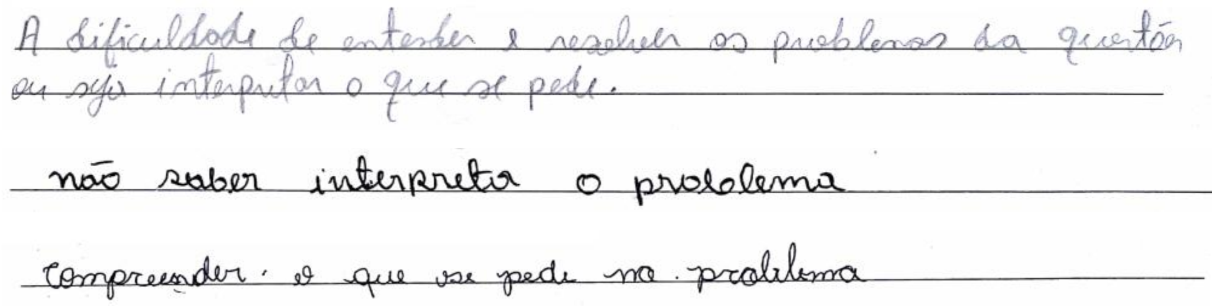
Fonte: Pesquisa direta

Analisando os formulários com as respostas dos alunos percebemos que apenas 4 alunos (33,3%) responderam corretamente o problema, enquanto que 8 alunos (66,6%) apresentaram erros, principalmente no item “b” da questão, pois consideraram a altura inicial da bola como sendo zero, calculando o tempo decorrido para que a bola atingisse o solo.

Isto mais uma vez evidencia a grande dificuldade dos alunos na compreensão do enunciado do problema.

Neste encontro, foi perceptível a dificuldade dos alunos na interpretação dos problemas propostos. Esta dificuldade também foi citada pelos alunos CEGS, FBF e JPS no questionário de identificação de aprendizagem, conforme podemos observar na Figura 48.

Figura 48: Resposta dos alunos CEGS, FBF e JPS para a pergunta: Que dificuldades você teve ao longo do encontro? (referindo-se ao 5º encontro da intervenção metodológica)


A dificuldade de entender e resolver os problemas da questão ou seja interpretar o que se pede.

não saber interpreta o problema

Compreender o que se pede no problema

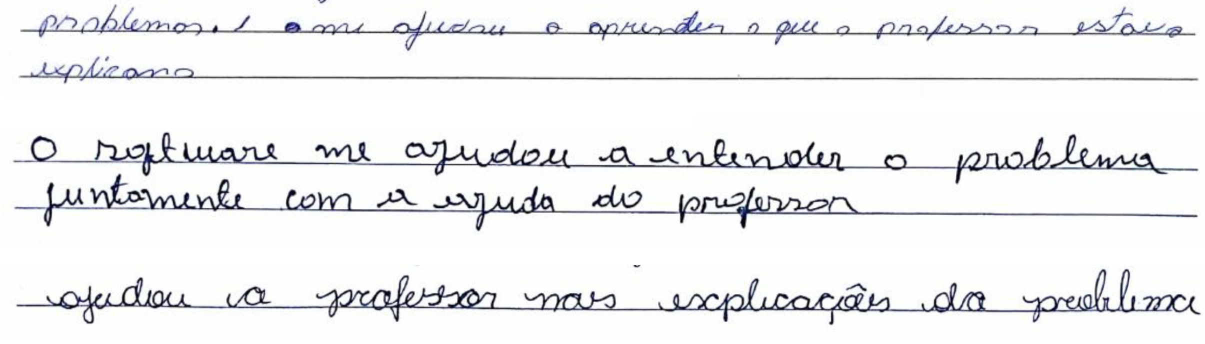
Fonte: Pesquisa direta

Outro aspecto observado é que por si só os alunos não se mostraram capazes de utilizar o *software* para auxiliá-los na interpretação, tão pouco na resolução do problema. A utilização do *software* foi explorada nas explicações do professor para facilitar a compreensão dos problemas através da análise dos gráficos das funções abordadas nas questões.

O uso do computador neste contexto se apresentou como recurso didático utilizado pelo professor. Indo ao encontro do que pensa Valente (1998, p. 31) quando afirma que "o computador é um meio didático e algumas de suas características, como capacidade de animação e facilidade de simular fenômenos, contribuem para que ele seja facilmente usado na condição de meio didático."

A utilização do *software* e as explicações do professor facilitaram a compreensão dos problemas propostos neste encontro de intervenção metodológica. Isto também foi observado nos relatos dos alunos MANS, FBF e JPS, apresentados na Figura 49.

Figura 49: Resposta dos alunos MANS, FBF e JPS para a pergunta: De que modo o uso do *software* geogebra contribuiu para o aprendizado dos conceitos relacionados às funções quadráticas, estudados ao longo do encontro de hoje? (referindo-se ao 5º encontro da intervenção metodológica)


O software ajudou o professor nas explicações dos problemas, e me ajudou a aprender o que o professor estava explicando

O software me ajudou a entender o problema juntamente com a ajuda do professor

ajudou o professor nas explicações do problema

Fonte: Pesquisa direta

Podemos perceber pelos comentários dos alunos que o *software* se apresentou como um instrumento de mediação do professor para levar os alunos a compreenderem melhor os problemas propostos. Não foi percebido dentre as ações dos alunos durante a intervenção metodológica a capacidade de utilizarem o aplicativo sozinho para compreensão dos problemas. Pois o entendimento das questões acabou acontecendo de forma satisfatória apenas depois da mediação do professor, auxiliado pelo *software*.

5.4 Análise comparativa do desempenho dos alunos no teste de sondagem de conhecimentos aplicado antes e depois da intervenção metodológica

A segunda aplicação do teste de sondagem de conhecimentos, foi realizada no dia 10 de maio de 2017, logos depois da intervenção metodológica.

Neste momento a sua aplicação tem como objetivo a identificação dos *conceitos científicos* adquiridos pelo aluno, pois na concepção de Vygotsky (1993) estes *conceitos científicos* são aqueles oriundos do aprendizado escolar e caracterizados por um processo de aprendizagem intencional e sistematizada a partir de uma metodologia específica. Indo ao encontro da proposta de trabalho realizada na interseção metodológica.

É importante ressaltar que os alunos ao realizaram este teste já haviam estudado o conteúdo de funções quadráticas por meio dos encontros da intervenção metodologica.

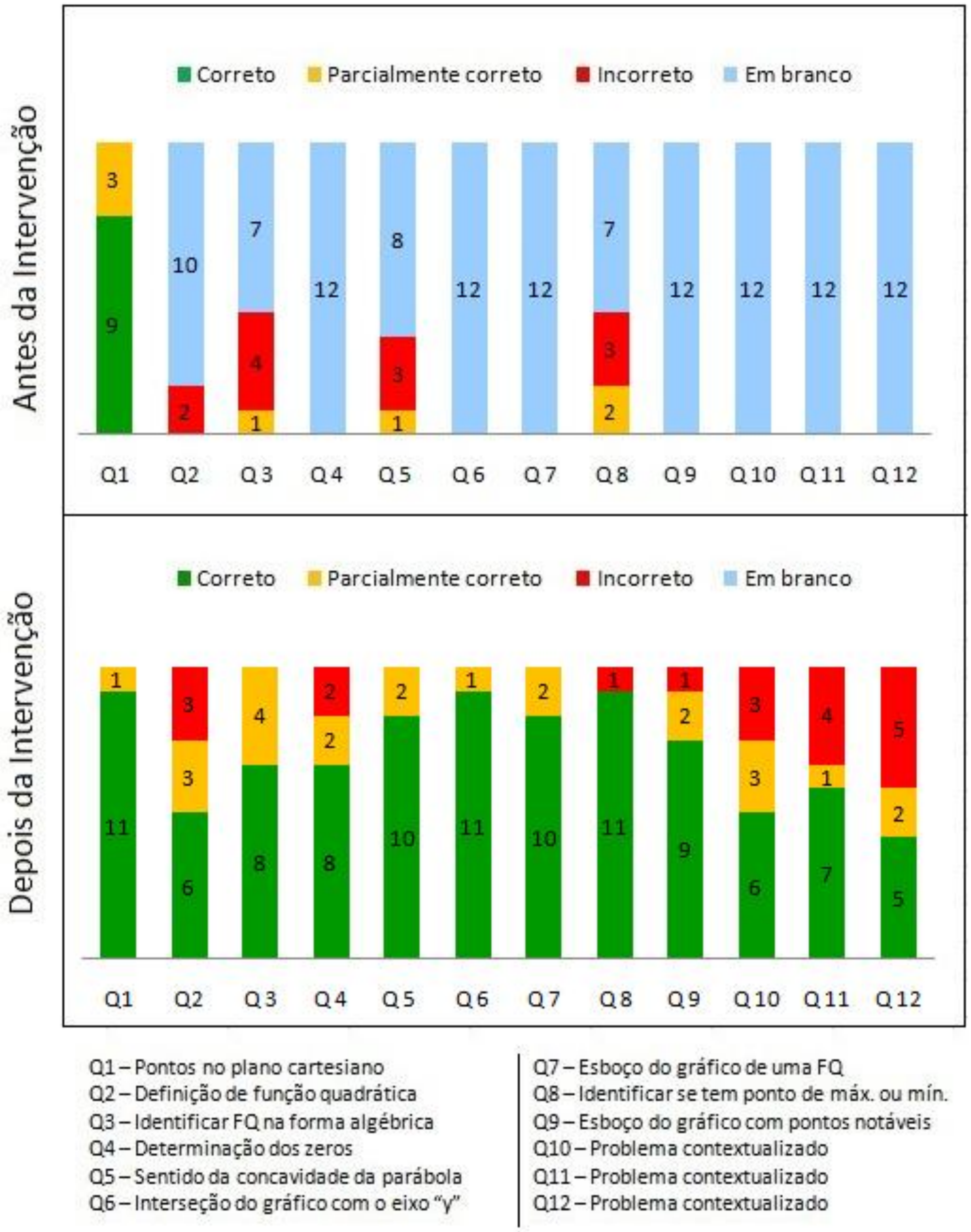
Para uma melhor análise das questões, foram adotados os mesmos critérios na sua correção. Sendo eles: correto, parcialmente coreto, incorreto e em branco.

No Gráfico 4, podemos visualizar uma comparação entre os resultados do teste de sondagem dos conhecimentos, antes e depois da intervenção metodológica.

A através da simples observação entre os resultados obtidos antes e depois da intervenção metodológica percebemos que houve uma maior quantidade de questões corretas no teste aplicado depois da intervenção, sinalizando assim, que houve aprendizagens de conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas.

Uma análise mais atenta nos faz perceber na questão 1, havíamos 3 alunos (25%) que responderam parcialmente correto, pois cometeram erros na identificação das coordenadas de alguns pontos. Este erro foi reduzido na aplicação do teste depois da intervenção, pois apenas 1 aluno (8,3%) voltou a cometê-lo.

Gráfico 4: Desempenho dos alunos no teste de sondagem de conhecimentos aplicado antes e depois da intervenção metodológica



Fonte: Pesquisa direta

Na questão 2, percebemos a dificuldade dos alunos em expressar de modo correto o conceito de função quadrática. Pois mesmo depois da intervenção metodológica, apenas 6 alunos (50%) responderam de modo satisfatório. 3 alunos (25%) responderam não completamente correto, e 3 alunos (25%) responderam de forma errada.

Ao longo da intervenção metodológica, muitos alunos relataram dificuldades em escrever no papel aquilo que estavam aprendendo. Isto retoma uma questão que foi levantada na seção 5.3.2 e que nos faz refletir. Pois, estes alunos possuem dificuldade na compreensão do conceito de função ou tem dificuldade em escrever corretamente este conceito?

Também é possível perceber que, na aplicação do teste depois da intervenção metodológica, sem contar com a questão 1, as questões 5, 6, 7, 8 e 9 foram as que os alunos apresentaram a maior quantidade de acertos, sendo que estas questões abordam conceitos relacionados ao gráfico da função quadrática, nos levando a constatar que a intervenção metodológica trouxe melhores níveis de compreensão e aquisição de conceitos neste assunto do conteúdo.

As questões 10, 11 e 12 tratam de problemas contextualizados sobre o conteúdo de funções quadráticas, e são, juntamente com a questão 2, as que os alunos apresentaram menor quantidade de acerto. Isto evidencia a grande dificuldade dos alunos na interpretação de problemas, fato este que também foi observado ao longo da intervenção metodológica.

5.5 Discussão dos resultados

Neste momento da pesquisa é importante lembrar que o objetivo geral deste trabalho consiste em analisar o uso do *software* geogebra, como instrumento pedagógico inserido num processo de aprendizagem com a mediação, e suas contribuições para a construção dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas.

Para o atendimento deste objetivo geral, elencamos para tanto dois objetivos específicos sendo que o primeiro versa sobre a identificação das ferramentas e aplicações do *software* geogebra voltadas para a aprendizagem das funções quadráticas. A busca por alcançar este objetivo específico se deu através de investigações realizadas no próprio aplicativo. Estas investigações estão presentes no Apêndice A desta pesquisa, onde exploramos as ferramentas *software* para a identificação dos pontos notáveis da função quadrática e dos estudos do comportamento do seu gráfico com a variação dos coeficientes “a”, “b”, “c” e do discriminante “Δ”.

O segundo objetivo específico trata sobre a realização de uma intervenção metodológica com o uso do *software* geogebra a partir dos fundamentos da mediação pedagógica de Vygotsky. As análises dos dados colhidos ao longo desta intervenção foram abordadas neste capítulo e possibilitaram levantar alguns resultados que vão ao encontro do objetivo geral desta pesquisa e que discutiremos nesta seção.

A análise dos instrumentos de coleta dedos foi de fundamental importância para a obtenção dos resultados desta pesquisa, entre eles destacam-se: o questionário de identificação de aprendizagem; os formulários de atividades e o teste de sondagem de conhecimentos.

Para uma melhor organização dos resultados obtidos, buscaremos identificar as contribuições do *software* geogebra para a construção dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas considerando as categorias e subcategorias definidas nesta pesquisa.

No Quadro 6, podemos observar as contribuições do *software* identificadas ao longo da pesquisa quando se trata do estudo sobre pontos no plano cartesiano.

Quadro 6: Contribuições do *software* geogebra referentes à categoria 1

Categoria 1 – Estudo sobre pontos no plano cartesiano	
Subcategorias	**Contribuições do *software* geogebra**
1.1 – Identificação de pontos no plano cartesiano	• Facilita a percepção das coordenadas de um ponto no plano cartesiano através da visualização com a malha quadriculada. • Ajuda na compreensão da localização de um ponto em um plano cartesiano através das suas coordenadas.

Fonte: Autor

A localização de pontos no plano cartesiano se caracterizou como um conhecimento que os alunos já possuíam, ou seja, este conhecimento já se encontrava presente em seu *nível de desenvolvimento real*, caracterizando-se como um *conceito espontâneo* que o aluno já apresentava previamente no início da pesquisa. (VYGOTSKY, 1993, 1998)

Isto pode ser observado na análise do teste de sondagem de conhecimentos realizado antes da intervenção metodológica. Porém 3 alunos (25%) ainda se confundiam com a localização de um ponto no plano cartesiano, trocando as coordenadas de “x” com a de “y”. Ao analisarmos o teste sondagem de conhecimento realizado depois da intervenção, percebemos que a quantidade de estudantes com esta dificuldade caiu para 1 aluno (8,3%). Evidenciando que a mediação do professor e do *software* trouxe contribuições para este conhecimento.

No Quadro 7, encontramos as contribuições do *software* quando se trata da compreensão do conceito de função quadrática e identificação das suas raízes.

Quadro 7: Contribuições do *software* geogebra referentes à categoria 2

Categoria2 – Compreensão do conceito de função quadrática e identificação das suas raízes	
Subcategorias	**Contribuições do *software* geogebra**
2.1– Entendimentodo conceito de função quadrática	• Facilita na compreensão da correspondência entre os valores de "x" e "y" quando a função quadrática se encontra representada graficamente no plano cartesiano. • Na representação gráfica de uma função quadrática, auxilia na compreensão de que todos os elementos do domínio são utilizados. • Na representação gráfica de uma função quadrática, ajuda na compreensão de que cada elemento "x" do domínio possui apenas uma imagem pertencente ao contra-domínio.
2.2 – Identificação de uma função quadrática na forma algébrica	• Mostra graficamente que para haver uma função quadrática é necessário que o coeficiente "a" seja diferente de zero.
2.3 – Determinação dos zeros da função quadrática com a utilização da fórmula de Bhaskara	• Não foi identificado contribuição do *software* para esta subcategoria.

Fonte: Autor

O trabalho com o conceito de função se mostrou ao longo da intervenção metodológica algo bastante desafiador. Foram muitos os recursos utilizados para levar os alunos à compreensão deste conceito, entre eles, a tabela numérica, o diagrama e principalmente os gráficos construídos pelo *software* geogebra.

Os resultados encontrados vão ao encontro do que pensa Barreto (2009) quando diz que:

> Muitas pesquisas apontam que o computador auxilia a aprendizagem do conceito de funções. Principalmente, através de seu impacto visual, o aluno sente mais motivado ao resolver uma determinada situação problema com a sua mediação. [...] Ao trabalhar com as múltiplas representações oferecidas pelo *software* educacional, o aprendiz tem mais possibilidades de produzir significado aos conteúdos ligados ao conceito de função uma vez que ele pode interligar essas representações, ampliando o seu repertório de compreensão. (BARRETO, 2009, p. 279-280)

Nesta pesquisa, também foi constatado à contribuição do *software* no que se refere à representação gráfica de uma função. Porém entendemos que a compreensão plena deste conceito vai além do seu entendimento gráfico, logo o seu estudo não deve se limitar apenas a utilização do *software*. O conceito de função requer amplo estudo e dedicação pelo professor.

Quando observamos os resultados do teste de sondagem de conhecimentos, percebemos que 6 alunos (50%), não responderam satisfatoriamente a definição de função quadrática, parte destes erros pode estar na dificuldade dos alunos em escrever aquilo que aprenderam ou na real dificuldade em compreender este conceito.

Na realização da Atividade 2.1, 4 alunos (33,3%) erraram ao considerar $x^2 - 4x + 6 = 0$ uma função. O que nos mostra que o conceito de função ainda não foi plenamente consolidado, pois tais alunos ainda confundem uma função quadrática com uma equação polinomial do 2º grau.

Nesta categoria, percebemos que para a determinação dos zeros de uma função quadrática não foi utilizado o *software* geogebra, pois durante a intervenção metodológica a obtenção das raízes limitou-se ao uso da fórmula de Bhaskara, logo não foi possível identificarmos as contribuições do aplicativo para esta subcategoria.

No Quadro 8, apresentamos as contribuições do *software* geogebra referente à construção do gráfico da função quadrática e a identificação dos pontos notáveis. E que discutiremos a partir de então.

Barreto (2009) aponta que o trabalho com o estudo das funções pode seguir representações algébricas, gráficas e tabulares. Neste trabalho buscou-se trabalhar com diversas representações, principalmente a algébrica e a gráfica, pois conforme afirma Borba e Penteado (2001, p. 30) “não devemos privilegiar um tipo de representação de função, mas trabalhar várias delas”. Porém, analisando os resultados desta pesquisa, percebemos que a mediação com o *software* geogebra apresentou melhores contribuições no que se refere à representação gráfica de uma função quadrática.

No estudo desta categoria, o auxílio na identificação dos pontos de máximo e mínimo de uma função quadrática foi uma das contribuições mais relevantes do *software*. Pois ao analisarmos o teste de sondagem de conhecimentos, aplicado depois da intervenção metodológica, a questão 8, que é uma das que abordaram este assunto foi acertada por cerca de 92 % dos alunos pesquisados.

A BNCC enfatiza a importância deste assunto no trabalho com as funções quadráticas, destacando que: [...] o trabalho da função quadrática deve ser desenvolvido por meio de situações que favoreçam ao estudante compreender o modelo de variação que se estabelece entre as variáveis envolvidas e perceber aspectos importantes como os pontos de máximo e de mínimo. (BRASIL, 2016, p. 576 e 577)

Quadro 8: Contribuições do *software* geogebra referentes à categoria 3

Categoria 3 – Construção do gráfico da função quadrática com a identificação dos pontos notáveis	
Subcategorias	**Contribuições do *software* geogebra**
3.1 – Construção do gráfico de uma função quadrática e identificação do sentido da concavidade da parábola em função do sinal do coeficiente "a"	• Possibilita uma melhor compreensão das propriedades de uma parábola. • Auxilia na percepção de que o gráfico da função quadrática é uma parábola. • Evidencia graficamente que a parábola tem concavidade para cima se o coeficiente "a" da função for positivo e para baixo se o coeficiente "a" da função for negativo.
3.2 – Identificação, no gráfico, dos pontos correspondentes aos zeros da função quadrática	• Mostra graficamente que os zeros de uma função quadrática correspondem aos pontos de interseção da parábola com o eixo das abscissas. • Auxilia, por intermédio da interpretação do gráfico, na compreensão de que os zeros da função são os valores de "x" que fazem com que "y" seja igual a zero. • Evidencia que uma função quadrática pode ter dois, um ou nenhum ponto de interseção o eixo das abscissas.
3.3 – Identificação do vértice da parábola	• Auxilia na visualização do ponto do vértice da parábola no gráfico. • Ajuda na compreensão de que o vértice é o ponto de inflexão da parábola. • Mostra que o vértice é um ponto de máximo quando o coeficiente "a" da função for negativo e um ponto de mínimo quando "a" for positivo. • Evidencia que o vértice é ponto de encontro entre a parábola e o seu eixo de simetria. • Facilita a percepção de que a coordenada "x_v" do vértice da parábola corresponde à média aritmética dos valores das raízes da função.
3.4 – Identificação do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas	• Auxilia na compreensão gráfica de que o ponto de interseção da parábola com o eixo das ordenadas corresponde ao coeficiente "c" da função quadrática.

Fonte: Autor

Os resultados obtidos nesta categoria nos mostram que, por experimentação, as construções gráficas realizadas no *software* geogebra, auxiliaram na compreensão das propriedades da função quadrática. Este resultado também foi evidenciado em outras pesquisas, a exemplo de Lopes Júnior (2013), Sousa (2014), Souza (2012) e Teixeira (2013).

Assim como foi identificado por Ricardo (2012), em sua pesquisa com a utilização do geogebra no ensino das funções quadráticas, também constatamos que o aprendizado com a mediação deste aplicativo proporciona uma boa integração do raciocínio algébrico com o raciocínio geométrico na investigação do comportamento do gráfico da função quadrática.

Este fato foi evidenciado ao analisarmos os resultados do teste de sondagem de conhecimentos, aplicado depois da intervenção metodológica, onde percebemos que as questões 5, 6, 7, 8, e 9, que possuem relação com o estudo das propriedades gráficas de uma função quadrática estiveram entre as questões com maior percentual de acertos.

No Quadro 9, estão as contribuições do *software* geogebra, no que se refere ao estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação dos coeficientes “a”, “b”, “c” e do discriminante (Δ).

É importante destacar que algumas contribuições identificadas na categoria anterior, também foram percebidas no estudo desta categoria, porém não foram citadas no Quadro 9, pois já haviam sido mencionadas no Quadro 8. Entre elas destaca-se a percepção do sentido da concavidade da parábola pela variação do coeficiente “a” da função, e a identificação do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas pela variação do coeficiente “c”.

Uma das contribuições mais relevantes identificadas nesta categoria está na compreensão de que o coeficiente “a” influencia na abertura da concavidade, fortalecendo no aluno o entendimento de que numa função quadrática o coeficiente “a” deve ser sempre diferente de zero, pois ao tomarmos “a” igual a zero, a função passa a ser afim e seu gráfico deixa de ser uma parábola, tornando-se uma reta.

O estudo das contribuições do *software* geogebra nesta categoria reforça o dinamismo do aplicativo, pois a análise do comportamento do gráfico com a variação dos coeficientes e do discriminante torna-se algo muito difícil de ser trabalhado em sala de aula apenas com pincel e quadro branco.

Este dinamismo do *software*, identificado na pesquisa, vai ao encontro do pensamento de Hohenwarter e Hohenwarter (2009), quando disseram que o aplicativo possibilita que diferentes representações do mesmo objeto estejam ligadas dinamicamente podendo adaptar-se automaticamente à medida que suas variáveis são alteradas.

Quadro 9: Contribuições do *software* geogebra referentes à categoria 4

Categoria 4 – Compreensão do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação dos coeficientes “a”, “b”, “c” e do discriminante (Δ)	
Subcategorias	**Contribuições do *software* geogebra**
4.1 – Estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação do coeficiente “a”	• Mostra que quando o coeficiente “a” da função for igual a zero o gráfico da função passa a ser uma reta, logo a função deixa de ser quadrática e passa a ser afim. • Ajuda na percepção de que a concavidade da parábola se abre à medida que o valor de “a” se aproxima de zero e se fecha à medida que o valor de “a” se afasta de zero, tanto para valores positivos quanto para valores negativos. • Auxilia na compreensão de que apenas o coeficiente “a” possui influencia na abertura da concavidade do gráfico da função quadrática.
4.2– Estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação do coeficiente “b”	• Ajuda o aluno a evidenciar que ao mudarmos o valor de “b”, a parábola muda de lugar, porém a sua concavidade continua com o mesmo sentido e abertura.
4.3 – Estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação do coeficiente “c”	• Mostra ao aluno que ao alterarmos o valor de “c”, assim como na variação de “b”, a parábola também muda de lugar, porém a sua concavidade continua com o mesmo sentido e abertura.
3.4 – Estudo do comportamento do gráfico da função quadrática com a variação do discriminante “Δ”	• Facilita a percepção de que quando “Δ” for negativo o gráfico da função não interceptará o eixo das abscissas, logo a função não possui raízes reais. • Evidencia que quando “Δ” igual a zero, o gráfico da função apenas tangencia o eixo das abscissas, logo a função possui apenas uma raiz. • Facilita na compreensão de que quando “Δ” for positivo, o gráfico da função intercepta o eixo das abscissas em dois pontos, logo a função possui duas raízes. • Mostra que a alteração nos valores dos coeficientes “a”, “b” e “c” altera os valores de “Δ”

Fonte: Autor

No Quadro 10, encontramos as contribuições do *software* no que se refere à resolução de problemas contextualizados envolvendo o conteúdo de funções quadráticas.

Quadro 10: Contribuições do *software* geogebra referentes à categoria 5

Categoria 5 – Resolução de problemas contextualizados envolvendo o conteúdo de funções quadráticas	
Subcategorias	**Contribuições do *software* geogebra**
5.1 – Resolução de problema contextualizado envolvendo função quadrática e/ou identificação de valores de máximo ou mínimo.	• Auxilia o professor na investigação do gráfico identificado na questão, levando os alunos a compreender melhor o problema.

Fonte: Autor

A resolução de problemas se mostrou uma das grandes dificuldades apresentadas pelos alunos pesquisados. Pois a análise dos resultados obtidos no teste de sondagem de conhecimentos aplicado depois da intervenção metodológica, apontou que as questões 10, 11 e 12, que trataram de problemas contextualizados envolvendo funções quadráticas obtiveram os menores percentuais de acertos.

A interpretação dos problemas foi o maior obstáculo identificado pelos alunos, se apresentando como uma dificuldade ainda não superada.

A contribuição do *software* nesta categoria foi percebida como sendo um recurso didático, pois o seu uso juntamente com as explicações do professor levou os alunos a compreender melhor os problemas propostos.

O uso autônomo do *software* pelos alunos, auxiliando na resolução dos problemas propostos, não foi percebido nesta pesquisa.

No capítulo seguinte apresentaremos as considerações finais deste trabalho.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No processo de ensino da matemática, às vezes, o professor se utiliza de metodologias que privilegiam os procedimentos operatórios, principalmente aqueles relacionados à álgebra. O aluno, por vezes, acaba se tornando um personagem passivo, contrariando as concepções da teoria sociointeracionista, que defende que o estudante deve ser um agente ativo na construção do seu saber.

Em sala de aula, o estudo das funções quadráticas geralmente é visto com ênfase nos procedimentos algébricos. As representações com o uso de tabelas e principalmente gráficas são pouco exploradas. Borba e Penteado (2001) apontam que a pouca utilização de gráficos pelos professores se dá pela dificuldade em construí-los num ambiente em que preconiza o uso do pincel e do quadro branco, isto explica porque o professor limita-se apenas a representação algébrica.

Uma possibilidade para mudarmos este cenário está na utilização das tecnologias, que estão cada vez mais presentes em nosso cotidiano, condicionando muitas mudanças, inclusive no modo de aprender dos jovens da atualidade, que já cresceram cercados por elas. Porém estas tecnologias ainda não são usadas na sua totalidade dentro do ambiente escolar. (PARNAIBA; GOBBI, 2010)

Este contexto nos faz refletir sobre a necessidade de avanços, seja na formação dos professores ou no melhor planejamento de suas metodologias, no que se refere ao uso da tecnologia em sala de aula, pois percebemos que ainda estamos distantes da realidade em que este recurso seja utilizado por todos os professores como um instrumento de auxílio pedagógico.

O uso de recursos didáticos que privilegiem o desenvolvimento cognitivo e o pensamento lógico é uma maneira de melhor conduzir as aulas de matemática e o uso da tecnologia pode ser um caminho para este fim. (RICARDO, 2012)

Neste momento é importante lembrar que esta pesquisa foi motivada pelo uso da tecnologia, mais especificamente do *software* geogebra, como instrumento de mediação para a aprendizagem das funções quadráticas, sendo movida pelo seguinte questionamento: De que forma o uso do *software* geogebra pode contribuir com a aprendizagem dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas?

Feitas as devidas investigações, muitos achados vieram à tona, inclusive para além do questionamento levantado.

Um fato que foi observado neste trabalho aponta que o *software* geogebra ainda não havia sido trabalhado com os alunos sujeitos desta pesquisa, pois dentre os alunos investigados nenhum afirmou ter conhecimento deste aplicativo, ou seja, somente durante a pesquisa os alunos tomaram conhecimento do *software*.

Sobre o perfil dos alunos investigados verificou-se que a maioria costuma acessar a internet, utilizando principalmente as redes sociais, o que é bem característico da população jovem da atualidade. Eles também informaram que sentem dificuldade nos conteúdos da matemática e que consideram que a tecnologia pode ser um bom recurso para auxiliar no aprendizado da matemática.

Foi possível verificar na pesquisa de campo que os alunos investigados já possuíam certo conhecimento sobre os conceitos de ponto, reta, conjuntos numéricos e plano cartesiano. Sendo estes conhecimentos apenas revisados no início da intervenção metodológica. A análise do teste de sondagem de conhecimentos aplicado antes da intervenção apontou que eles já apresentavam habilidades para localizar pontos no plano cartesiano por meio de suas coordenadas. Estes conhecimentos prévios contribuíram para os resultados encontrados nesta pesquisa.

Outra constatação relevante que foi identificada neste trabalho vai ao encontro da pesquisa realizada por Barreto (2009) na qual verificamos que as dificuldades com as operações numéricas, o jogo dos sinais e a resolução de equações, constituem-se obstáculos para compreensão do conceito de função com a mediação da tecnologia.

A compreensão do conceito de função se mostrou algo desafiador, tanto para o professor pesquisador que se utilizou de tabelas, diagramas e principalmente do *software* geogebra durante sua explicação, quanto para os alunos que apresentaram dificuldades na sua plena compreensão.

A dificuldade dos alunos no manuseio do computador e em manipular as ferramentas do *software* geogebra também foi evidenciada na pesquisa, principalmente nos primeiros encontros da intervenção metodológica, porém à medida que os alunos utilizavam o computador e o aplicativo, está dificuldade era superada, de modo que ao final da intervenção eles já possuíam uma boa habilidade tanto no manuseio do computador e com as ferramentas do *software* geogebra.

Na superação das dificuldades dos alunos, ao longo da construção do conhecimento com a utilização do computador, cabe ao professor assumir o importante papel de mediador deste processo de aprendizagem e não o de transmissor de conteúdo. O aluno pode e deve promover seu próprio conhecimento, ultrapassando suas dificuldades, contribuindo assim para a formação de seus próprios conceitos. (SOUZA, 2012)

Uma verificação relevante no uso do computador ao longo desta pesquisa se deu através do aspecto dinâmico que envolve as relações entre a representação algébrica e gráfica de uma função quadrática, pois em muitos momentos, a simples alteração do valor de um coeficiente da função já proporcionava a alteração do seu gráfico, facilitando a vida do professor no processo de explicação do conteúdo e a compreensão do aluno na formação do conceito estudado. Este fato também foi observado na pesquisa realizada por Souza (2012) sobre o uso do *software* geogebra como ferramenta pedagógica no estudo de funções quadráticas em turmas de 9º ano do ensino fundamental.

Mais especificamente no que se refere ao uso do *software* geogebra para a aprendizagem dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas. Com base nos resultados encontrados, concluímos que este aplicativo, quando utilizado como instrumento de mediação e juntamente com a mediação pelo professor, pode contribuir auxiliando o aluno: a entender as propriedades gráficas de uma função quadrática; a determinar graficamente os seus pontos notáveis; e a compreender o comportamento do gráfico da função com a variação dos seus coeficientes e do discriminante.

De modo geral esta pesquisa aponta que as intervenções do professor e o uso do *software* geogebra, como instrumento pedagógico inserido num processo de aprendizagem mediada, contribui para a aquisição dos conceitos relacionados ao conteúdo de funções quadráticas principalmente no que se refere ao estudo das suas representações gráficas.

Pela análise do teste de sondagem de conhecimentos respondido pelos alunos investigados, depois da intervenção metodológica, foi possível perceber que as questões em que eles apresentaram maior quantidade de acertos foram aquelas que abordam conceitos relacionados ao gráfico da função quadrática, tipo a identificação do sentido da concavidade da parábola, a determinação das coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas e a construção do esboço do gráfico da função com a identificação dos pontos notáveis. Isso reforça que a intervenção metodológica, que contou com a mediação do professor e do *software* geogebra, trouxe melhores níveis de compreensão e aquisição de conceitos nesta parte do conteúdo.

Como em todo processo de aprendizagem, muitos desafios e dificuldades estiveram presentes ao longo deste trabalho. Foram muitos os obstáculos superados, e outros nem tanto. Entre as dificuldades não superadas por completo nesta pesquisa, destaco a pouca habilidade dos alunos em escrever no papel os seus pensamentos e aprendizagens, e também a grande dificuldade dos estudantes na interpretação dos problemas contextualizados que foram propostos durante a intervenção metodológica. Abrem-se aqui possibilidades para que pesquisas futuras possam investigar estes problemas.

Este trabalho não tem a intenção de esgotar o assunto. Almejamos que outras pesquisas sobre esta temática sejam realizadas com fins de agregar novas descobertas e conhecimentos, trazendo outros pontos de vista sobre a questão investigada.

Desejamos que os resultados obtidos nesta pesquisa levantem reflexões nos professores quando da utilização do *software* geogebra como recurso didático no ensino das funções quadráticas, e principalmente venha a contribuir no planejamento de ações pedagógicas voltadas para a melhoria da aprendizagem da matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Francisco Wescley Cunha de. **Integral definida:** Uma abordagem para o ensino médio como auxílio do *software* geogebra. 2014. 41 p. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará - UFC, Juazeiro do Norte, 2014.

ARRAIS, Denio Dias. Aprendizagem dos jovens através das tecnologias digitais móveis. In: CONGRESSO INTERNACIONAL COMUNICAÇÃO E CONSUMO – COMUNICOM, 2014, São Paulo. **Anais...** São Paulo: PPGCOM ESPM, 2014. p. 1-15.

BACELAR JÚNIOR, José da Silva. **Uso do geogebra no ensino da trigonometria.** 2013. 113 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências: departamento de matemática, Universidade Federal do Ceará - UFC, Fortaleza, 2013.

BALLEJO, Clarissa Coragem. **Aprendizagem de conceitos de área e perímetro com o geogebra no 6º ano do ensino fundamental.** 2015. 144 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2015.

BARRETO, Antônio Luiz de Oliveira. **A análise da compreensão do conceito de funções mediado por ambientes computacionais**. 2009. 363 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará - UFC, Fortaleza, 2009.

BARROS, A. J. S.; LEHFELD, N. A. S. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 3. ed. São Paulo: Person Prentice Hall, 2007.

BARROS, Maria das Graças; CARVALHO, Ana Beatriz Gomes. As concepções de interatividade nos ambientes virtuais de aprendizagem. In: SOUSA, R. P.; MOITA, F. M. C. S. C.; CARVALHO, A. B. G. (Org.). **Tecnologias digitais na educação**. Campina Grande: EDUEPB, 2011. p. 209-232.

BECKER, Howard S. **Métodos de Pesquisa em Ciências Sociais**. 3. ed. São Paulo: Hucitec, 1997.

BEZERRA, Cristina Alves. P**roposta de abordagem para as técnicas de integração usando o *software* geogebra.** 2015. 87 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Ceará - UFC, Fortaleza, 2015.

BITTENCOURT, Adilson Ortiz. **O ensino da trigonometria no ciclo trigonométrico, por meio do *software* geogebra.** 2012. 97 p. Dissertação (Mestrado profissionalizante em ensino de física e de matemática) – Universidade Franciscana de Santa Maria, Santa Maria - RS, 2012.

BONA, A. S.; BASSO, M. V. A.; FAGUNDES, L. C. A cooperação e/ou a colaboração no espaço de aprendizagem digital da matemática. **RENOTE**: Revista Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, v. 9, n. 2, dez. 2011. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/25163>. Acessado em: 26 de set. 2017.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**: Coleção Tendências em Educação Matemática. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRANDÃO, Jorge Carvalho. **Fundamentos de cálculo diferencial e integral**: para quem não gosta, mas precisa. 1. ed. São Paulo: Scortecci, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação - MEC. **Base Nacional Comum Curricular.** Proposta Preliminar – 2ª Versão. Brasília: MEC/SEF, 2016.

________. **Orientações curriculares para o ensino médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. v. 2. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica - SEMTEC, 2006.

CERVO, Antônio Luiz; BERVIAN, Pedro Alcino. **Metodologia Científica**. 4. ed. São Paulo: Markron Books, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12 ed. São Paulo: Editora Ática. 2002.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Uma análise dos Parâmetros Curriculares em Matemática. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, n. 7, ano 6, 1999.

________. Desafios da educação matemática no novo milênio. **Educação Matemática em Revista.** São Paulo, n. 11, ano 8, 2001.

________. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Revista Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acessado em: 13 out. 2017.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática Representação e Construção em Geometria**. 1. ed. Porto Alegre: ARTMED, 1999.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. (Coleção formação de professores). 2. ed. Campinas-SP: Autores Associados, 2007.

FOSSA, John Andrew; FOSSA, Maria da Glória. **Funções, equações e regras**: ensaios sobre a educação matemática. Belém-PA: EDUEPA, 2000.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. **Ajuda GeoGebra: Manual oficial da versão 3.2**. Traduzido para português de Portugal por Antonio Ribeiro. Lisboa, 2009. Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acessado em: 13 de set. 2016.

IBGE. **Panorama das cidades do Brasil**. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/ce/massape/panorama> Acesso em: 23 mai. 2017.

LAKATOS, E. M. ; MARCONI, M. A. **Metodologia do Trabalho Científico**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2004

LOPES JÚNIOR, Geraldo. **Geometria dinâmica com o geogebra no ensino de algumas funções**. 2013. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa – UFV, Viçosa - MG, 2013.

LIMA, Elon Lages. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio - vol.** 1. 6. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2006.

MINAYO, M.C.S. **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. 15 ed. Petrópolis: Vozes, 2000.

MONROE, Camila. Vygotsky e o conceito de aprendizagem mediada. **Revista Nova Escola,** São Paulo, 31 de Agosto de 2016. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/274/vygotsky-e-o-conceito-de-aprendizagem-mediada> . Acessado em: 23 abr. 2017.

MORAN, J. M. Os novos espaços de atuação do professor com as tecnologias. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v.4, n.12, p.13-21, mai./ago. 2004.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática.** Campinas-SP: Papirus, 1997.

NASCIMENTO, Einard Gomes Antunes do. **Avaliação do *software* geogebra como instrumento psicopedagogo de ensino em geometria**. 2012. 113 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará – UFC, Fortaleza, 2012.

NEVES, Rita de Araujo e DAMIANI, Magda Floriana. Vygotsky e as teorias da aprendizagem. **UNIrevista,** São Paulo, v. 1, n. 2, abri. 2006. Disponível em: <http://www.miniweb.com.br/educadores/Artigos/PDF/vygotsky.pdf>. Acessado em: 23 abr. 2017.

OLIVEIRA, Aline Tatiane Evangelista de. A mediação do professor e do material didático no processo ensino-aprendizagem de matemática. **Revista Evidência**, Araxá, v. 12, n. 12, p. 137-146, 2016. Disponível em: <http://www.uniaraxa.edu.br/ojs/index.php/evidencia/article/view/502>. Acessado em: 23 abr. 2017.

PAIS, Luiz Carlos. **Educação Escolar e as Tecnologias da Informática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PARNAIBA, C. S.; GOBBI, M. C.. Os Jovens e as Tecnologias da Informação e da Comunicação: aprendizado na prática. **Revista Anagrama**: Revista Científica Interdisciplinar da Graduação, São Paulo, ano 3, ed. 4. p. 1-14, jun./ago. 2010. Disponível em: <http://www.revistas.univerciencia.org/index.php/anagrama/article/view/7025/6431>. Acessado em: 24 out. 2017.

PEDROSO, Leonor Wierzynski. **Uma proposta de ensino da trigonometria com o uso do *software* geogebra**. 2012. 271 p. Dissertação (Mestrado profissionalizante em ensino de matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRS, Porto Alegre, 2012.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2ª reimpressão. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: <http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-1538f3aef538/E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf>. Acessado em: 14 fev. 2017.

QEDU. **Resultado do ENEM por escola**. Disponível em: <http://www.qedu.org.br/cidade/3636-massape/enem> Acesso em: 23 mai. 2017.

RATTAN, Kuldip S.; KLINGBEIL, Nathan W..**Matemática básica para aplicações de engenharia**. Tradução e revisão técnica J.R. Souza. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

RICARDO, Jonas da Conceição. **Uma proposta para o ensino de funções quadráticas mediada pela tecnologia: um estudo de caso**. 2012. 135 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras - RJ, 2012.

SANCHO, Juana Maria. De Tecnologias da Informação e Comunicação a Recursos Educativos. In: SANCHO, Juana Maria; HERNANDEZ, Fernando. (Org.). **Tecnologias para Transformar a Educação.** Porto alegre: Artmed, 2006. p. 17-38.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**: ensino médio. v. 1. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOUSA, Reilson Matos. **O uso do geogebra no ensino de função quadrática**. 2014. 77 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, Santarém, 2014.

SOUZA, Francisco Ademir Lopes de. **O uso do *software* geogebra como ferramenta pedagógica no estudo de funções quadráticas em turmas de 9º ano do ensino fundamental do CMF.** 2012. 108 p. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de ciências e matemática) – Universidade Federal do Ceará – UFC, Fortaleza, 2012.

TEIXEIRA, Alexandre de Mattos. **Aprendizagem significativa de funções através do geogebra e de tipos digitais?**. 2013. 108 p. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências e matemática) – Centro Federal Tecnológico Celso Suckow, Rio de Janeiro, 2013.

TURRA, Neide Catarina. Reuven Feuerstein: “experiência de aprendizagem mediada: um salto para a modificabilidade cognitiva estrutural.”. **Educare et educare** : Revista de educação, Paraná, v. 2, n. 4, p. 297-310, jul./dez. 2007. Disponível em: < http://e-revista.unioeste.br/index.php/educereeteducare/article/view/1671> Acessado em: 20 set. 2017

VALENTE, J. A. **Formação de Educadores para o uso da informática na escola.** Campinas-SP: UNICAMP/NIED, 2003.

________. Por quê o computador na educação? In: **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. 2. ed. Campinas, SP: Unicamp/NIED, 1998.

VYGOTSKY, L. S..**A formação social da mente**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

________.P**ensamento e linguagem**. 1. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

________.**A construção do pensamento e da linguagem**. 1. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

APÊNDICES

APÊNDICE A – O *SOFTWARE* GEOGEBRA E SUAS FERRAMENTAS E APLICAÇÕES NO VOLTADAS AO ESTUDO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

1 CONHECENDO O SOFTWARE GEOGEBRA

O *software* geogebra foi desenvolvido pelo australiano Prof. Dr. Markus Hohenwarter juntamente com uma equipe internacional de programadores e tem a finalidade de auxiliar no ensino e na aprendizagem da matemática.

A sua versão inicial foi criada em 2001, sendo que atualmente já se encontra na versão 5.2. A cada versão lançada, uma série de novas aplicações é atrelada ao programa, o tornando mais popular e atrativo.

Trata-se de um *software* livre, gratuito e de multiplataforma, que pode ser acessado diretamente pela internet de modo *on-line* pelo site www.geogebra.org, ou instalado no computador por meio de *download* que pode ser realizado a partir do mesmo sítio, possibilitando com isso a execução do programa no modo *of-line*. Sua instalação é simples e pode ser realizada em vários sistemas operacionais, como *Windows*, *Linus* e *MacOsx*. O que é uma grande vantagem, pois nas unidades de ensino público, em sua grande maioria o sistema operacional que encontramos nos laboratórios de informática é o *Linux* Educacional.

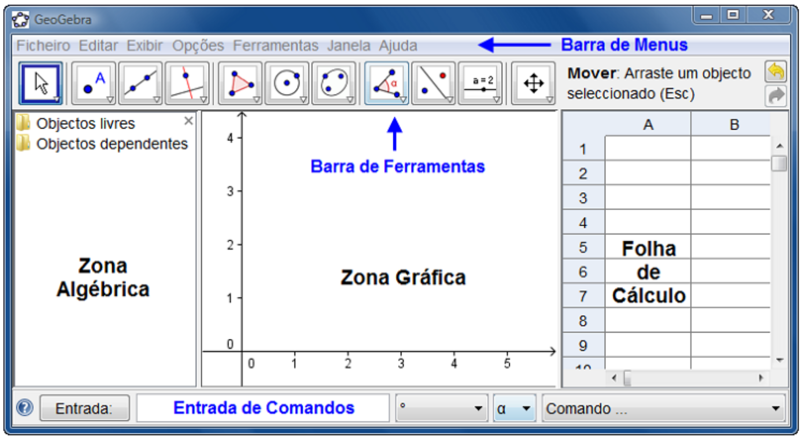
Recentemente foram criadas versões deste *software* para dispositivos móveis como *tablets* e celulares podendo ser executado nos sistemas *android* e *iOS* para *iPads* e *iPhones*. O referido aplicativo para celular é facilmente encontrado em lojas virtuais como *playstore* e outras.

É válido ressaltar que o *software* está disponível em 22 idiomas e possui uma interface simples na qual podem ser feitas construções geométricas como pontos, vetores, segmentos, seções cônicas, linhas e funções em geral, permitindo a manipulação ativa através da alteração de suas coordenadas.

> O geogebra fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica, ou numérica, e a Folha de Cálculo. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (e.g., pontos, gráficos de funções), algebricamente (e.g., coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados. (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2009, p. 6)

Podemos observar na Figura 1 a interface do ambiente do *software* geogebra onde identificamos facilmente os espaços da Zona Algébrica, Zona Gráfica e da Folha de Cálculo, bem como a Barra de Menus, a Barra de Ferramentas e a caixa de Entrada de Comandos.

Figura 1: Interface do ambiente do *software* geogebra



Fonte: Hohenwarter e Hohenwarter (2009, p. 6)

Na zona gráfica do geogebra, podemos visualizar a construção de figuras geométricas ou gráficos de funções, podendo se fazer uma conexão entre a construção geométrica e a representação algébrica que é simultaneamente apresentada na zona algébrica. Assim, o geogebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

Outra funcionalidade do aplicativo está na possibilidade de personalização das construções geométricas e gráficas, podendo para isso alterar as cores, as formas e espessuras de linhas, escolhendo exibi-las ou não, possibilitando inclusive a realização de animações. (LOPES JÚNIOR, 2013).

Com o geogebra também é possível inserir funções e coordenadas diretamente na caixa de entrada de comandos, levando o aplicativo a construir a representação geométrica do comando que foi inserido, tipo o ponto representado pela coordenada ou o gráfico da função indicada. Além disso, é possível se trabalhar com variáveis de números reais ou complexos.

Para que professores e estudantes possam conhecer todas as funcionalidades do *software*, seus desenvolvedores publicaram um tutorial intitulado “Ajuda Geogebra” (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2009) para a versão 3.0 do aplicativo que auxilia bastante no aprendizado das funcionalidades do *software*. Ele pode ser acessado ao clicar no comando *help* que se encontra no lado superior direito no site oficial do geogebra (www.geogebra.org), nele encontramos orientações quanto à funcionalidade de todas as ferramentas do aplicativo, possui linguagem simples e certamente contribuirá bastante para a descoberta de novas aplicações para o uso do geogebra.

Porém recomenda-se realizar os estudos do referido tutorial atrelado ao uso prático do aplicativo, pois o aprendizado se mostrará mais eficaz associando a teoria posta no manual com a ação prática de utilização do *software*.

Além da versão impressa do tutorial também estão disponibilizados versões *on-line* com atualizações mais recentes. Outra possibilidade para o estudo das funcionalidades do aplicativo são os fóruns (www.geogebra.org/forum) e a plataforma *geogebrawiki* (www.geogebra.org/wiki), onde é possível esclarecer dúvidas referentes ao software diretamente com seus desenvolvedores e acessar um conjunto de materiais educativos livres criados por utilizadores do geogebra de todo mundo.

2 FERRAMENTAS E APLICAÇÕES DO *SOFTWARE* GEOGEBRA VOLTADAS PARA O APRENDIZADO DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

No estudo das funções quadráticas, uma das práticas mais comuns é a construção do gráfico da função, evidenciando os pontos referentes às intersecções da parábola com os eixos e o vértice da curva, porém esta prática acaba por ser um pouco limitada, pois não leva o aluno a compreender o comportamento do gráfico mediante a variação dos valores do conjunto domínio e sua interdependência com o conjunto imagem.

Muito se pratica em sala de aula a construção do gráfico de uma função, partindo-se de uma tabela na qual se atribui valores arbitrários para “x” com fins de se identificar os pontos pertencentes à função e construir o gráfico a partir de tais pontos. Esta técnica de ensino acaba por se tornar não muito proveitosa, uma vez que partimos de pontos isolados com pouco significado para a interpretação gráfica da função.

Outro assunto importante no estudo do gráfico de uma função quadrática são os intervalos de crescimento, decrescimento e a identificação do conjunto imagem da função, também pouco explorado em sala de aula.

Veremos nesta seção algumas ferramentas e aplicações do *software* geogebra voltadas para o reconhecimento dos pontos notáveis de uma função e para a compreensão do comportamento da parábola de uma função polinomial do 2º grau.

Segundo Cruz e Pontello (2008) o processo de investigação do gráfico da função com o uso do *software* geogebra permite ao estudante observar o que acontece com o gráfico à medida que é alterado os valores dos coeficientes da função. Com isso o aluno poderá desenvolver hipóteses sobre os procedimentos realizados na representação algébrica e as transformações que ocorre no traço do gráfico à medida que se alteram os valores de seus coeficientes.

Os estudos apresentados a seguir baseiam-se nos trabalhos de Cruz e Pontello (2008) e Borba e Penteado (2001), na qual realizaremos com o auxílio do *software* geogebra, a identificação dos pontos notáveis de uma função quadrática, bem como uma análise do comportamento do seu gráfico quando os coeficientes sofrem variações num intervalo definido.

2.1 Os pontos notáveis da função quadrática

O estudo e análise dos pontos notáveis de uma função quadrática são determinantes para se compreender seu comportamento gráfico. Destaco aqui: a) as raízes da função quadrática representadas no plano cartesiano pelos pontos $(x_1,0)$ e $(x_2,0)$; b) o ponto de intersecção com o eixo "y" indicado pelas coordenadas (0,y); e c) o vértice da parábola, que pode ser representado pelo ponto de coordenadas (x_v, y_v) e que indica o ponto onde a função assume valor máximo ou mínimo.

A compreensão plena desses pontos levará facilmente a um melhor entendimento da interpretação do gráfico da função.

Entendemos como raízes ou zeros de uma função, todo número "x" cuja imagem é nula, isto é f(x) = 0, assim numa função quadrática teremos $ax^2 + bx + c = 0$. O desenvolvimento desta equação nos levará a fórmula de Bhaskara[3], muito utilizada para identificação das raízes da função polinomial do 2º grau.

No Quadro 1, podemos observar uma demonstração que nos conduzirá a referida fórmula. De acordo com o desenvolvimento algébrico apresentado neste quadro, podemos perceber que os valores de "x" que fazem com que f(x) = 0 serão: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, isto quando $b^2 - 4ac \geq 0$.

Denominamos discriminante da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c= 0$, o número $b^2 - 4ac$, que representamos pela letra grega Δ (leia: delta), de modo que: $\Delta = b^2 - 4ac$. Sendo assim a fórmula de Bhaskara também pode ser representada de modo mais simplificado por $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

[3] Bhaskara Akaria (1114 – 1185), nascido na Índia, um dos mais importantes matemáticos do século XII.

Quadro 1: Demonstração da fórmula de Bhaskara

Tomemos a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Começaremos por transformá-la em outra forma mais conveniente, chamada *forma canônica*:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

Logo a *forma canônica* de uma função quadrática será:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Considerando $\Delta = b^2 - 4ac$. Então:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

Fazendo $f(x) = 0$, temos que se $a \neq 0$, então que está dentro do colchete tem que ser igual a zero, logo:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chegando então a Fórmula de Bhaskara, definida por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ou

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Fonte: Adaptado de Iezzi, *et al* (2000)

Observando a dedução da fórmula de Bhaskara no Quadro 1, perceberemos que a função polinomial do 2º grau terá raízes reais se, e somente se, $\Delta \geq 0$, de modo que sendo $\Delta = 0$, teremos que $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

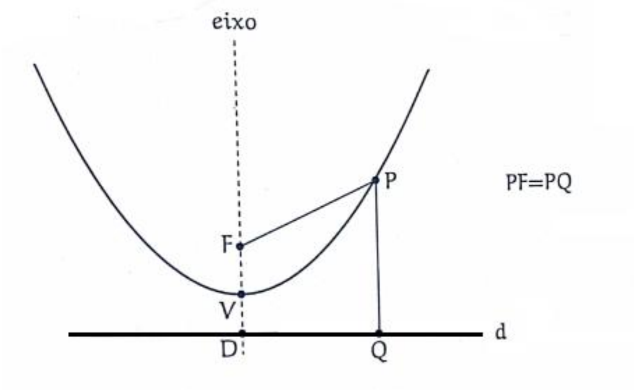
No plano cartesiano, o gráfico que representa uma função quadrática é uma curva denominada parábola, cuja concavidade estará voltada para cima caso a > 0 ou voltada para baixo caso a < 0.

Lima (2006) define uma parábola destacando que:

> Dado um ponto F e uma reta *d* que não o contém, a **parábola** de **foco** F e **diretriz** *d* é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.
> A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se o **eixo** da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se *vértice* dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz. (LIMA, 2006, p. 125)

A Figura 2, representa graficamente o conceito de parábola citado por Lima (2006)

Figura 2: Representação de uma parábola



Fonte: Lima (2006, p. 125)

Ainda sobre este assunto, Lima (2006, p. 129) enfatiza que "o gráfico de qualquer função quadrática f(x) = ax² + bx + c é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$ e cujo foco é o ponto F = $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$."

O eixo da parábola consiste numa reta vertical que divide a parábola em duas partes simétricas. O vértice será também o ponto de divisão da parábola, na qual a função deixa de ser decrescente e passa a ser crescente, caso a concavidade esteja voltada para cima, ou vice-versa, caso a concavidade esteja voltada para baixo.

Sobre as coordenadas do vértice da parábola (x_v, y_v), no Quadro 2 encontraremos uma demonstração para obtenção dos valores de x_v e y_v em função dos coeficientes e do discriminante da função quadrática.

Quadro 2: Demonstração das coordenadas do vértice da parábola

Considere a *forma canônica* de uma função quadrática mostrada no Quadro 1

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Suponhamos $a > 0$, logo a concavidade da parábola estará voltada para cima e a função terá valor de mínimo. Então no interior dos colchetes temos uma subtração de duas parcelas, na qual a primeira depende de x e é sempre ≥ 0 e a segunda é constante.

Neste caso o menor valor que assume *f(x)* será quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Se a < 0, a concavidade da parábola estará voltada para baixo e a função terá valor de máximo.

Neste caso o maior valor que assume *f(x)* será quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja , novamente quando $x = -\frac{b}{2a}$

Portanto:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Encontraremos então y_v substituindo x por x_v na a *forma canônica* da função quadrática. Logo:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left[-\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Considerando, $f(x_v) = y_v$ e $\Delta = b^2 - 4ac$. Então:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Fonte: Adaptado de Iezzi, *et al* (2000)

Assim sendo as coordenadas do vértice da parábola (x_v, y_v) também podem ser representadas por $\left(\frac{-b}{2a}\ ,\ \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

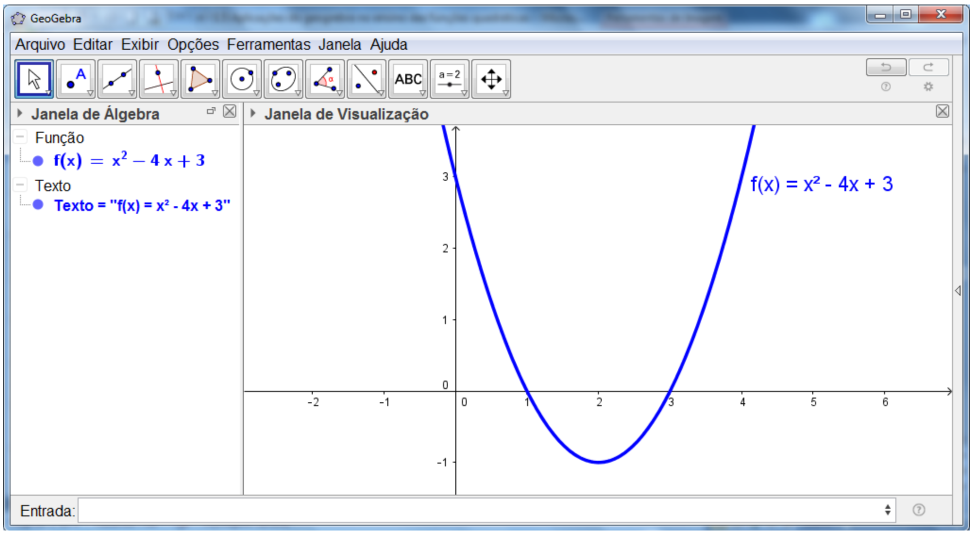
Nas subseções seguintes estudaremos no ambiente do *software* geogebra a identificação das raízes e do vértice da parábola de uma função quadrática.

2.1.1 Identificação das raízes ou zeros da função e o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas no ambiente do software geogebra

Utilizaremos o *software* geogebra para evidenciar os pontos notáveis de uma função quadrática, e para tanto usaremos um caso particular de função quadrática, para ilustrarmos no plano cartesiano o seu gráfico, que servirá de análise para identificação dos pontos notáveis. Faremos uso então da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$, o motivo da escolha desta função se dá pelo fato de ter pontos notáveis inteiros e de fácil visualização.

Na Figura 3, podemos identificar a representação gráfica da função indicada por $f(x) = x^2 - 4x + 3$. A obtenção deste gráfico se deu pela simples inserção desta função na caixa de Entrada de Comandos do aplicativo. Podemos perceber que a função encontra-se destacada na cor azul tanto na sua representação algébrica, indicada na Janela de Álgebra, como seu gráfico na Janela de Visualização. Como podemos observar o gráfico dessa função trata-se de uma parábola cuja concavidade está voltada para cima, uma vez que o coeficiente a = 1 é maior que zero.

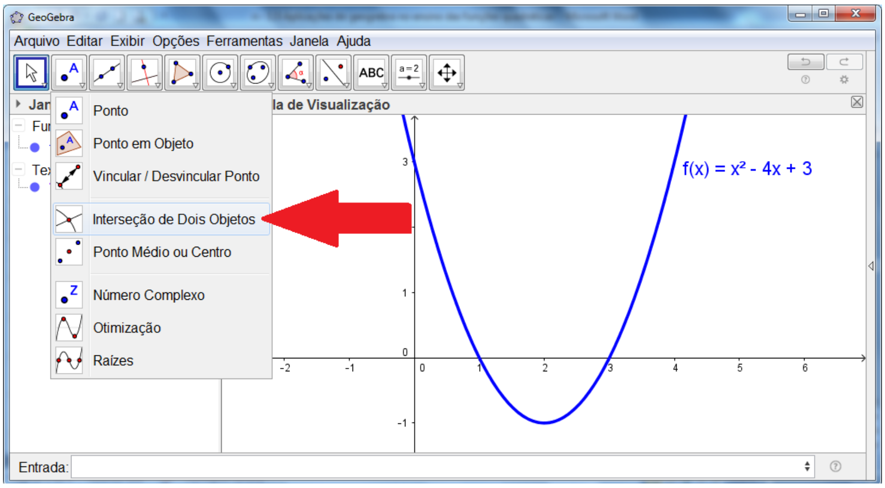
Figura 3: Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ no ambiente do *software* geogebra



Fonte: Autor

Com base na observação do gráfico, ainda na Figura 3, buscaremos agora identificar as raízes. Para tanto, identificaremos os zeros desta função, partindo do conceito de que a raiz de uma função é o ponto de interseção do gráfico da função com o eixo “x”, o que nos leva a concluir que são os valores de “x” que fazem com que a função “y” seja zero. Logo podemos fazer uso do comando “Interseção de dois objetos” (Figura 4) com fins de identificar os pontos que são interseção entre o gráfico da função e o eixo “x”.

Figura 4: Indicação do comendo “Interseção de Dois Objetos” no ambiente do *software* geogebra



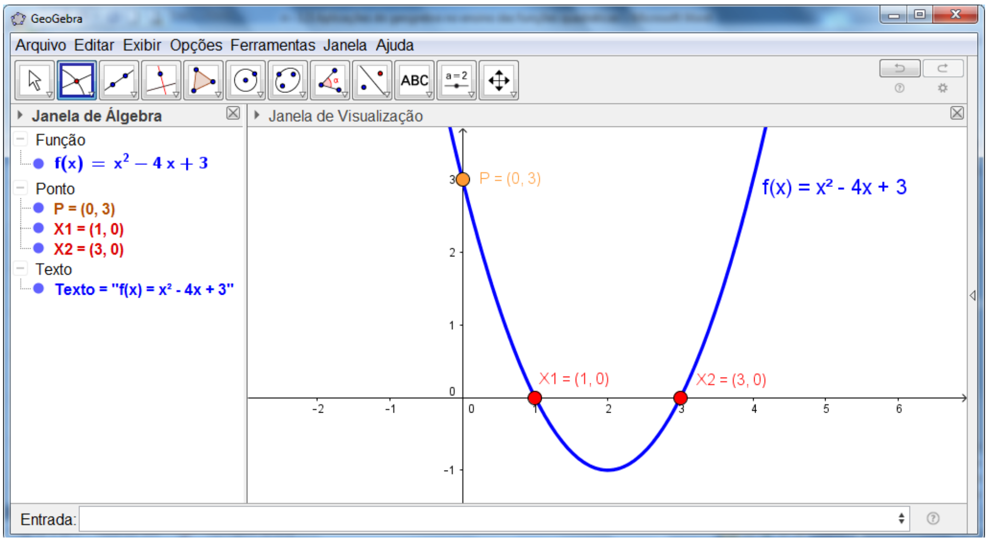
Fonte: Autor

Partindo desse mesmo princípio, e utilizando este mesmo comando podemos identificar o ponto de interseção entre a o gráfico da função e o eixo “y”, aquele no qual a coordenada “x” é igual a zero.

Na Figura 5, observamos em destaque os pontos referentes às raízes indicados por X_1 e X_2 na cor vermelha, e o ponto P = (0, 3) de interseção com o eixo “y” na cor laranja. Também é fácil perceber a representação algébrica e geométrica destes pontos, indicados pelas mesmas cores, nas Janelas de Álgebra e de Visualização, respectivamente.

Nesta figura podemos perceber pelos pontos X_1 = (1, 0) e X_2 = (3, 0), referentes às raízes que “x” ao tomar valores iguais a 1 ou 3 faz com que “y” seja igual a zero, logo f(1) = 0 e f(3) = 0. Como também para o ponto P = (0, 3), quando “x” assume o valor zero o “y” passa a valer 3, logo teremos f(0) = 3, que corresponde ao termo independente de “x” na expressão da função. De fato podemos concluir que numa função quadrática qualquer, f(0) será igual ao termo independente de “x”, pois sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$, logo f(0) = c.

Figura 5: Representação das coordenadas das raízes e do ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas da função f(x) = x^2 – 4x + 3 no ambiente do *software* geogebra



Fonte: Autor

Outra forma de identificar as raízes desta função no ambiente do geogebra seria a inserção do comando “RAIZ [x^2 – 4x + 3]” ou apenas “RAIZ [f]”, pois a citada função está sendo definida por “f”, porém o caminho anteriormente executado evoca o conceito de que as raízes de uma função são os valores de “x” que fazem com que a função seja igual a zero, e isso é de fundamental relevância quando se considera que o *software* não pode ser entendido como um mero executor de comando, e sim como um instrumento para levantar reflexões e proporcionar descobertas.

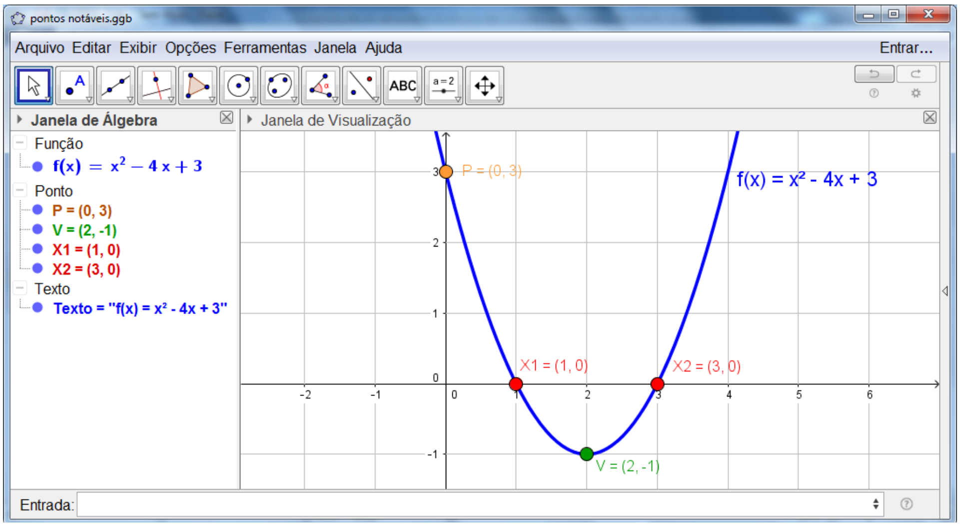
2.1.2 Identificação do vértice da parábola no ambiente do software geogebra

Nesta parábola, as coordenadas do vértice se constituem no ponto de mínimo da função, pois esta função apresenta como gráfico uma curva cuja concavidade encontra-se voltada para cima (estudaremos na seção 2.2 o comportamento da concavidade da parábola quando da variação do coeficiente “a”).

Para obtenção do vértice dessa parábola no ambiente do geogebra, utilizaremos o comando “EXTREMO [x^2 – 4x + 3]”, ou apenas “EXTREMO [f]” que pode ser inserido na caixa de Entrada de Comandos. Vejamos na Figura 6, a representação das coordenadas do vértice da função que esta sendo representado pela cor verde. Também foi destacado na Janela de Visualização uma malha para melhor identificação da relação do ponto indicado pelo vértice com os valores no eixo do “x” e do “y”.

Partindo da identificação do vértice da parábola, é possível facilmente identificarmos no gráfico a imagem da função estudada, uma vez que a mesma se constitui apenas no conjunto dos números pertencentes ao contra-domínio que no caso é o conjunto dos reais, já mencionado inicialmente quando da identificação da função (f: ℝ → ℝ, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$).

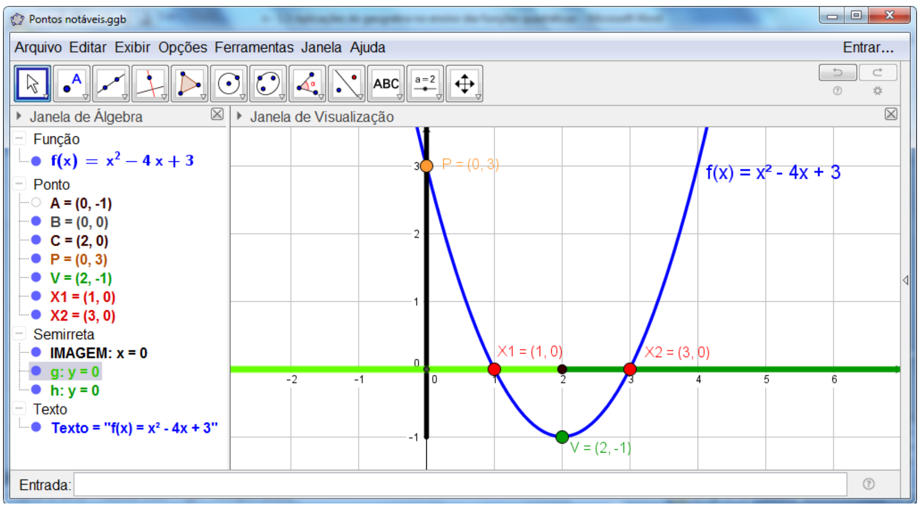
Figura 6: Representação das coordenadas do vértice da parábola da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ no ambiente do *software* geogebra



Fonte: Autor

Na Figura 7, já podemos perceber que a imagem será dada por Im = [– 1, +∞) pois apenas estes valores de “y” possuem relação com os valores de “x”. Nesta figura, identificamos por meio da semirreta indicada na cor preta em destaque sob o eixo da ordenada, exatamente o conjunto imagem dessa função.

Figura 7: Indicação no ambiente do *software* geogebra do conjunto imagem e dos valores de x quando o comportamento do gráfico da $f(x) = x^2 - 4x + 3$ está decrescente e crescente



Fonte: Autor

Outra análise que também pode ser feita a partir da identificação do vértice da parábola é a identificação dos valores de “x” que fazem com que a curva do gráfico se comporte de modo decrescente ou crescente. No exemplo em questão para melhor visualização desses valores, podemos observar ainda na Figura 7, que foi feito um destaque da semirreta indicada pela cor verde-claro no eixo da abscissa, para os valores de “x” em que o gráfico da função assume um comportamento decrescente, logo, nesta função, à medida que “x” varia de $-\infty$ até 2, a função “y” varia de $+\infty$ até – 1. Já na semirreta indicada pela cor verde-escuro no eixo da ordenada, os valores de “x” em que o gráfico da função assume um comportamento crescente, ou seja, quando “x”, varia de 2 até de $+\infty$, a função “y” varia de – 1 até $+\infty$.

Compartilhamos com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) a ideia de que o estudo da função quadrática, como posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função, deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o aspecto do gráfico e a função, levando a uma maior compreensão do comportamento do gráfico, evitando assim a memorização de regras.

A seguir realizaremos com o auxílio do *software* geogebra, uma análise sobre o comportamento da curva de uma parábola quando variamos os valores dos coeficientes a, b e c da função quadrática.

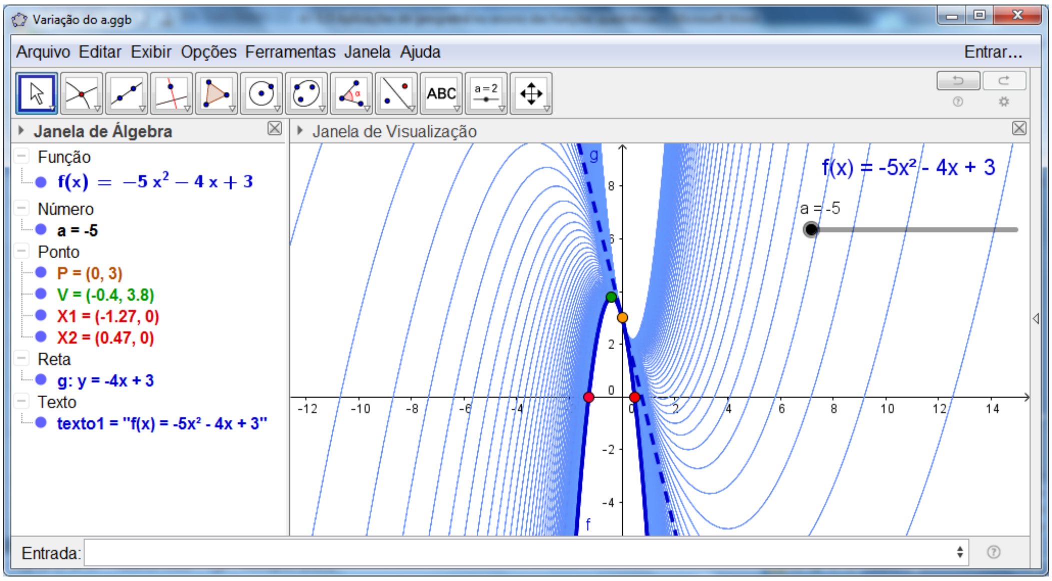
2.2 Estudo da variação do coeficiente “a” da função quadrática no ambiente do *software* geogebra.

Sendo uma função quadrática representada na sua forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, estudaremos aqui com o auxílio do *software* geogebra, o que acontece com o gráfico da função a medida em que os valores do coeficiente “a” se alteram.

Para uma melhor percepção do comportamento da parábola adotaremos valores constantes para os coeficientes “b” e “c”, e variáveis para o coeficiente “a”. Tomaremos o exemplo da função estudada na seção anterior, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$, mantendo $b = -4$ e $c = 3$ e faremos “a” variável, logo $f(x) = ax^2 - 4x + 3$.

Utilizaremos o comando “Controle Deslizante” para criarmos um seletor (espécie de botão) com um intervalo de variação de – 5 a + 5, logo ao movimentarmos esse botão com o auxílio do *mouse* poderemos alterar os valores de “a” neste intervalo. Sendo que à medida que “a” é alterado, dinamicamente o gráfico da função assume uma nova configuração. Conforme podemos observar na Figura 8.

Figura 8: Comportamento da parábola da função $f(x) = ax^2 – 4x + 3$ com a variação de “a” no intervalo de –5 a +5



Fonte: Autor

Podemos observar, na Figura 8, por meio do rastro deixado pelo *software* como se deu o comportamento da curva quando o coeficiente “a” da função $f(x) = ax^2 – 4x + 3$ variava no intervalo de –5 e +5. Obtemos aqui uma família de parábolas a partir da função dada com a variação de “a”.

Na Figura 8, analisando o comportamento da parábola, indicado pelo rastro deixado da cor azul, é fácil perceber algumas características, sendo elas:

(i) A alteração nos valores dos zeros da função;

(ii) A alteração dos valores das coordenadas do vértice da parábola;

(iii) O ponto P = (0, c) de interseção entre as parábolas e o eixo das ordenadas, mantendo-se constante;

(iv) A alteração da concavidade da parábola, para cima quando “a” assume valores maiores que zero, no caso do exemplo dado quando “a” pertence ao intervalo]0, +5] e para baixo quando “a” assume valores menores que zero, no caso acima, quando “a” pertence a [–5, 0[;

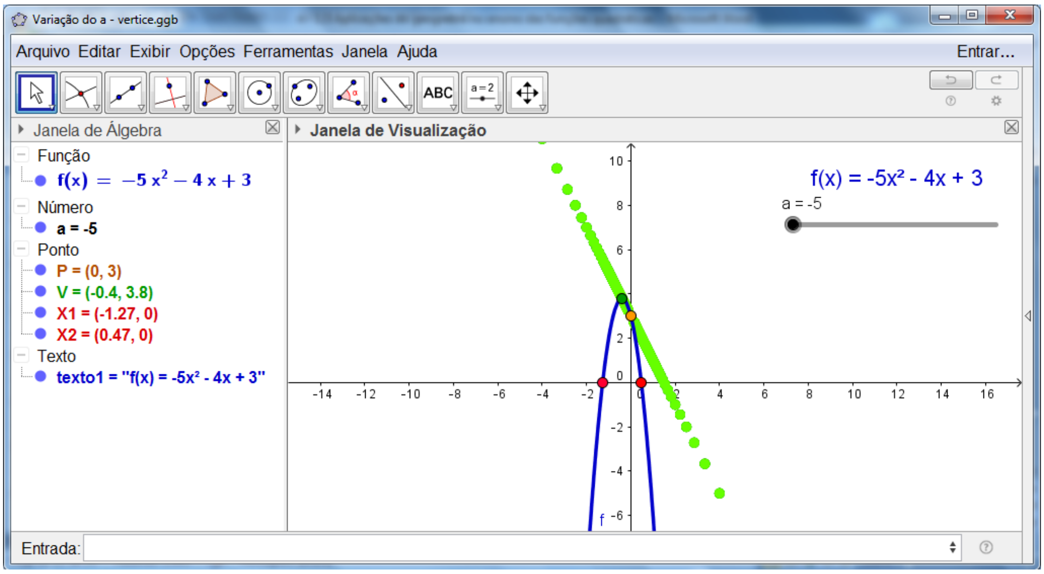
(v) A conversão da parábola para uma reta, indicada pelo pontilhado na Figura 8, quando “a” assume valor igual a zero, momento em que a função deixa de ser quadrática tornando-se afim[4] uma vez que teremos $f(x) = 0x^2 – 4x + 3$;

(vi) O grau da abertura da concavidade da parábola. Abrindo-se à medida que “a” aproxima-se de zero e fechando-se à medida que “a” se afasta de zero, tanto para valores positivos como negativos.

De modo mais apurado, é possível realizarmos uma análise considerando os valores assumidos pelas coordenadas do vértice da parábola quando da variação do coeficiente “a”. Na Figura 9, podemos perceber a construção de duas semirretas indicadas pela cor verde do rastro deixado pelo vértice da parábola da função $f(x) = ax^2 – 4x + 3$ quando “a” variava num certo intervalo.

Se considerarmos o conjunto dos pontos dos vértices de todas as funções possíveis dentro de um intervalo ilimitado de variação do “a”, mantendo-se constantes os coeficientes “b” e “c”, juntamente com o ponto P = (0, c), eles representarão no plano uma reta que está em função das coordenadas do ponto do vértice da parábola.

Figura 9: Indicação das semirretas construídas pelo vértice da parábola da função $f(x) = ax^2 – 4x + 3$ com a variação de “a” no intervalo de –5 a +5



Fonte: Autor

[4] Uma função f: ℝ → ℝ chama-se afim quando existem constantes *a*, *b* ∈ ℝ tais que f(*x*) = *ax* + *b*, par todo *x* ∈ ℝ. (LIMA, 2006, p. 87)

No Quadro 3, temos uma demonstração que nos conduzirá a identificação da equação cujo gráfico é a reta formada pelo conjunto dos vértices da família de parábolas que são os gráficos das funções f(x) = $ax^2 + bx + c$, quando mantemos “b” e “c” constantes e variamos o coeficiente “a”, juntamente com o ponto P = (0, c).

Quadro 3: Demonstração da equação cujo gráfico é obtido pelo ponto P = (0,c) juntamente com o conjunto de pontos correspondentes aos vértices da função f(x) = $ax^2 + bx + c$, quando “b” e “c” são constantes e “a” varia

Na coordenada $x_v = \frac{-b}{2a}$, isolando o coeficiente “a”, teremos: $a = \frac{-b}{2x_v}$ (I)

Para coordenada $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, substituindo $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos:

$$y_v = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-b^2}{4a} + c \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II) teremos:

$$y_v = \frac{-b^2}{4\frac{-b}{2x_v}} + c = \frac{-b^2}{\frac{-2b}{x_v}} + c \Rightarrow y_v = \frac{-b^2 x_v}{-2b} + c \Rightarrow y_v = \frac{bx_v}{2} + c$$

Logo: $y_v = \frac{b}{2}x_v + c$ constitui a equação da reta em questão

Fonte: Adaptado de Cruz e Pontello (2008)

Podemos perceber, ainda na Figura 9, que o ponto P = (0, 3), que representa a interseção entre o gráfico da parábola e o eixo das ordenadas é também um ponto pertencente à reta cuja equação foi encontrada na demonstração do Quadro 3, pois ao substituir x_v por zero, encontraremos y_v igual a 3, que é o coeficiente “c” da função f(x) = $ax^2 - 4x + 3$, utilizada de modo particular como exemplo para construção do gráfico na Figura 9.

Neste momento é importante entender que o ponto P = (0, c) pertence a todas as parábolas oriundas da variação do coeficiente “a” da função f(x) = $ax^2 + bx + c$, quando “b” e “c” são constantes, porém não será vértice de nenhuma dessas parábolas. Portanto a reta cuja equação foi apresentada na demonstração do Quadro 3, realmente é obtida pelo ponto P = (0, c) juntamente com o conjunto de pontos correspondentes aos vértices da função f(x) = $ax^2 + bx + c$, quando “b” e “c” são constantes e “a” varia de ($-\infty, +\infty$).

O ponto P = (0, c), é também ponto de interseção do gráfico da função f(x) = $ax^2 + bx + c$, com o eixo das ordenadas.

Portanto, na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, deixaremos de ter uma função quadrática quando $a = 0$, e passaremos a ter uma função afim, indicada por $f(x) = bx + c$, cujo gráfico será uma reta.

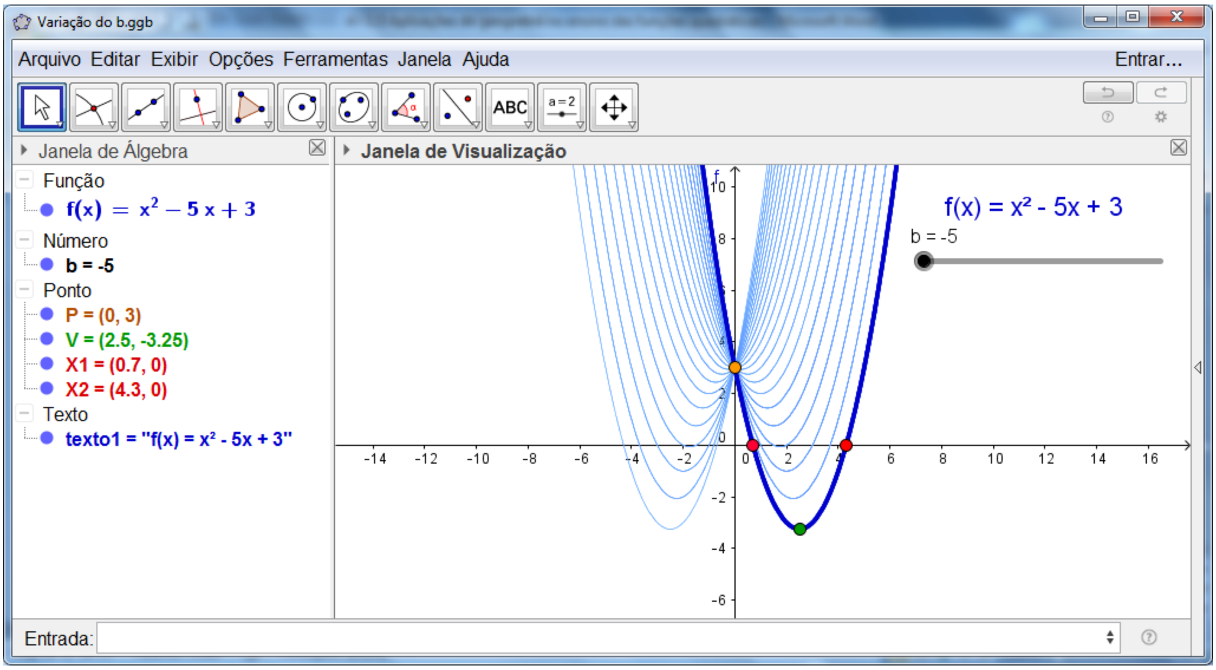
2.3 Estudo da variação do coeficiente "b" da função quadrática no ambiente do *software* geogebra

Tomaremos para esta análise a mesma função da seção anterior, definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - 4x + 3$, porém manteremos constantes $a = 1$ e $c = 3$ e "b" variável, logo $f(x) = x^2 + bx + 3$.

Utilizaremos novamente o comando "Controle Deslizante" para criarmos um seletor com um intervalo de variação de – 5 a + 5, desta vez para o coeficiente "b", logo ao movimentarmos esse botão do "Controle Deslizante" estaremos alternando os valores de "b" no intervalo acima indicado, levando a função e consequentemente seu gráfico a assumirem novas configurações.

Na Figura 10, podemos observar no ambiente do *software* geogebra, o rastro deixado pela parábola quando o "b" da função $f(x) = x^2 + bx + 3$ varia no intervalo de –5 a +5. Podemos visualizar nesta figura a família de parábolas obtidas a partir da função acima variando o coeficiente "b".

Figura 10: Comportamento da parábola da função $f(x) = x^2+bx + 3$ com a variação de "b" no intervalo de –5 a +5



Fonte: Autor

Com base na Figura 10, é possível analisarmos o comportamento da parábola, indicado pelo rastro deixado pela cor azul. Podemos, então, perceber algumas características, sendo elas:

(i) A alteração nos valores dos zeros da função;

(ii) A alteração dos valores das coordenadas do vértice das parábolas;

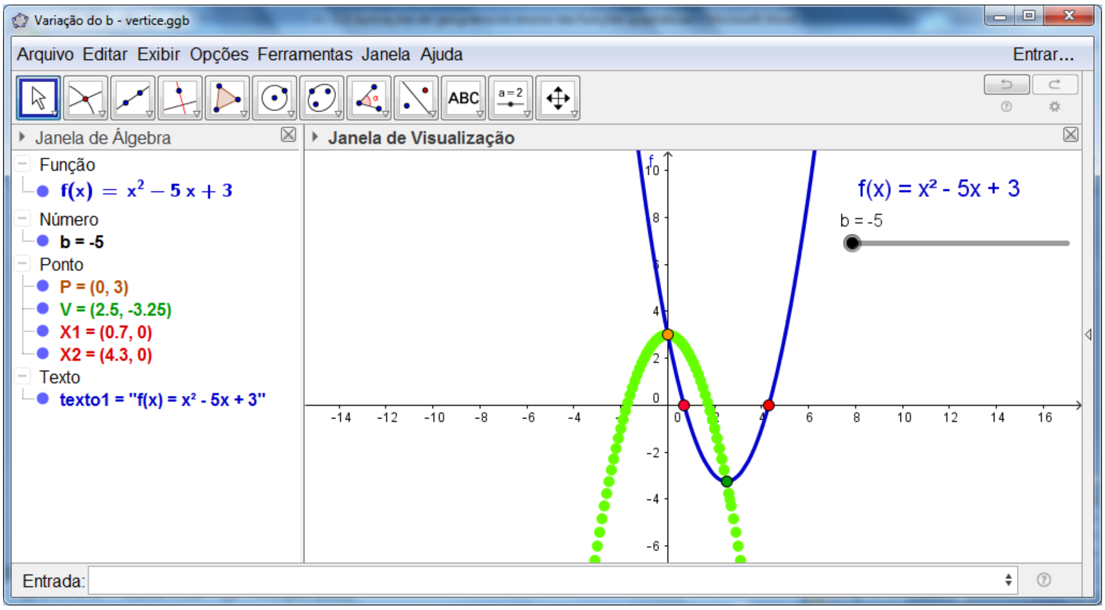
(iii) O ponto P = (0, c) de interseção entre as parábolas e o eixo das ordenadas, mantendo-se constante;

(iv) A concavidade das parábolas mantendo-se constantemente voltada para cima, uma vez que o coeficiente “a” não está variando

(v) A conservação da abertura da parábola, uma vez que a mesma apenas translada de posição no plano cartesiano.

Novamente, de modo mais detalhado, é possível realizarmos uma análise considerando os valores assumidos pelas coordenadas do vértice da parábola quando da variação do coeficiente “b” e mantendo “a” e “c” constantes. Na Figura 11 podemos perceber a construção de uma parábola indicada pela cor verde do rastro deixado pelo vértice da parábola da função f(x) = x^2 + bx + 3 quando “b” varia.

Figura 11: Indicação da parábola construída pelos vértices da parábola da função f(x) = x^2 + bx + 3 com a variação de “b”



Fonte: Autor

Na Figura 11, percebemos pelo rastro deixado na cor verde, o conjunto de pontos assumidos pelo vértice da parábola da função f(x) = x^2 + bx + 3 quando “b” varia num certo intervalo. Observamos à construção de outra parábola cuja concavidade é inversa a concavidade da parábola de origem.

Na demonstração indicada no Quadro 4, podemos observar a construção da equação que descreve a parábola que se constitui pelo conjunto dos vértices das parábolas da função f(x) = ax^2 + bx + c, quando “a” e “c” se mantém constante e “b” altera seus valores.

Quadro 4: Demonstração da equação cujo gráfico é a parábola obtida pelo conjunto dos vértices das parábolas da função f(x) = ax^2 +bx + c, quando “a” e “c” são constantes e “b” varia

Na coordenada $x_v = \frac{-b}{2a}$, isolando o coeficiente “b”, teremos: $b = -2ax_v$ (I)

Para coordenada $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, substituindo Δ = b^2– 4ac, obtemos:

$$y_v = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-b^2}{4a} + c \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II) teremos:

$$y_v = \frac{-(-2ax_v)^2}{4a} + c = \frac{-4a^2{x_v}^2}{4a} + c \Rightarrow y_v = -a{x_v}^2 + c$$

Logo: $y_v = -a{x_v}^2 + c$constitui a equação da parábola em questão

Fonte: Adaptado de Cruz e Pontello (2008)

Percebemos novamente que o ponto P = (0, c), que indica a interseção entre o gráfico da parábola de origem e o eixo das ordenadas é também um ponto pertencente a parábola representada pela equação da demonstração do Quadro 4, pois ao substituir x_v por zero, encontraremos novamente y_v igual a “c”.

Numa função f(x) = ax^2 + bx + c, quando “a” e “c” se mantém constante e “b” varia, o ponto P = (0, c) será vértice da parábola quando “b” for igual a zero. No caso do exemplo indicado pela Figura 11, o ponto P = (0, 3) será o vértice do gráfico da função f(x) = x^2 + 3.

2.4 Estudo da variação do coeficiente “c” da função quadrática no ambiente do *software* geogebra.

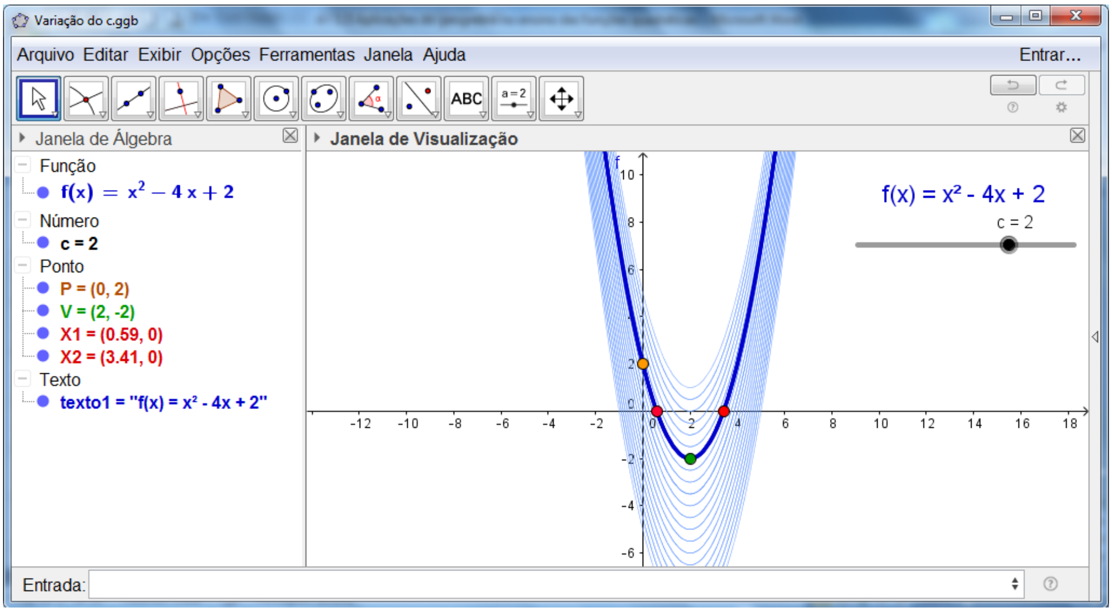
Seguindo com o mesmo raciocínio das seções anteriores, adotaremos novamente a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - 4x + 3$, porém manteremos agora constantes $a = 1$ e $b = -4$, sendo “c” variável, logo $f(x) = x^2 - 4x + c$.

No ambiente do *software* geogebra construiremos um “Controle Deslizante” para possibilitar a variação de “c” no intervalo de – 5 a + 5.

Ao alterarmos os valores de “c”, a função tomará uma nova disposição e de modo dinâmico o gráfico dessa função assumirá uma nova configuração.

No gráfico da Figura 12 podemos observar, graças ao rastro indicado na cor azul, o comportamento do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + c$, quando “c” varia de – 5 a + 5. Temos aqui uma família de parábolas obtidas a partir da função dada variando o coeficiente “c”.

Figura 12: Comportamento do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + c$ com a variação de “c” no intervalo de –5 a +5



Fonte: Autor

Na Figura 12 é possível analisarmos o comportamento da curva, como mostra no rastro da parábola na Figura 12, onde podemos perceber algumas características, sendo elas:

(i) A alteração nos valores das raízes da função;

(ii) No vértice das parábolas, teremos: conservação do valor na coordenada x_V e alteração na coordenada y_v ;

(iii) Alteração nos valores das coordenadas do ponto P (0, c) de interseção entre a parábola e o eixo das ordenadas;

(iv) A concavidade das parábolas mantendo-se constantemente voltada para cima, uma vez que o coeficiente “a” não está variando;

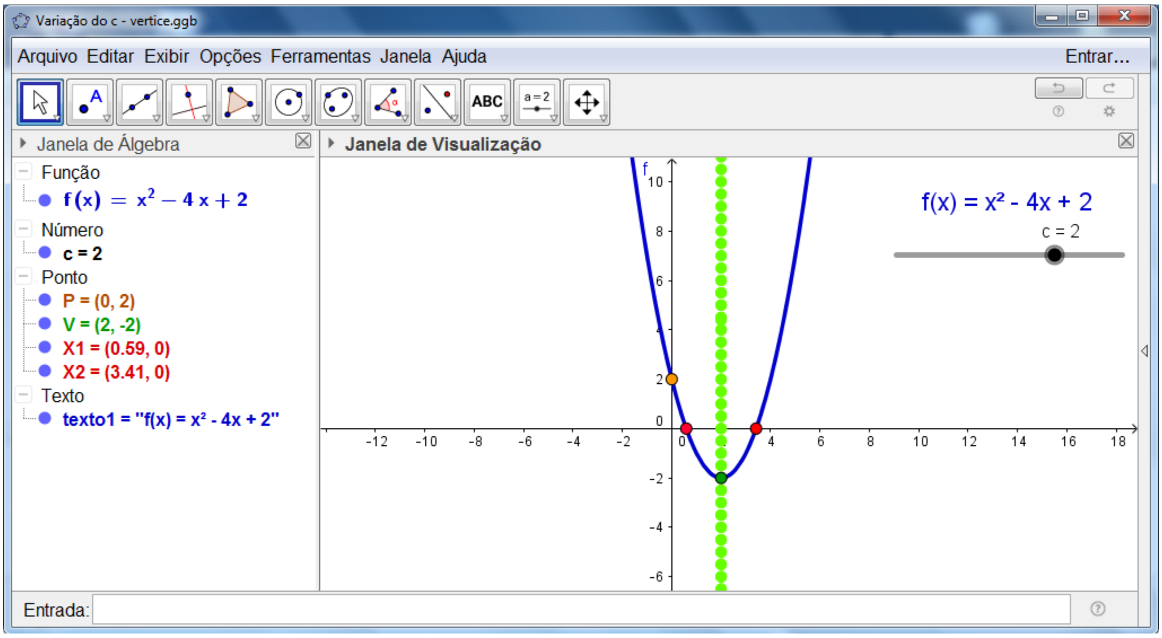
(v) A conservação da abertura da parábola, uma vez que a mesma apenas translada de posição no plano cartesiano, no caso em analise, a parábola está alterado sua posição no sentido vertical, movendo-se para cima quando os valores de “c” aumentam e para baixo quando os valores de “c” diminuem.

Seguindo o mesmo critério de análise das seções anteriores, ao observarmos com detalhes a variação das coordenadas do vértice da parábola quando da variação do coeficiente “c” e mantendo “a” e “b” constantes, perceberemos a representação de uma reta que pode ser identificada pelo rastro destacado de verde na Figura 13.

Percebemos claramente na Figura 13, a construção de uma reta paralela ao eixo das ordenadas e que intercepta o eixo das abscissas no ponto x_v, logo a equação dessa reta constitui o conjunto de pontos cujas coordenadas serão (y, x_v), podendo ser definida como $x = x_v$.

É valido ressaltar que a reta em questão não se constitui num gráfico de função, uma vez que o único valor assumido por “x” (x_v) está se relacionando com todos os valores assumidos por “y”.

Figura 13: Indicação da reta construída pelos vértices da parábola da função $f(x) = x^2 – 4x + c$ com a variação de “c”



Fonte: Autor

2.5 Estudo da variação do discriminante "Δ" da função quadrática no ambiente do *software* geogebra.

É no estudo da variação dos valores de "Δ" que encontraremos a clássica relação de existência das raízes em função do seu discriminante.

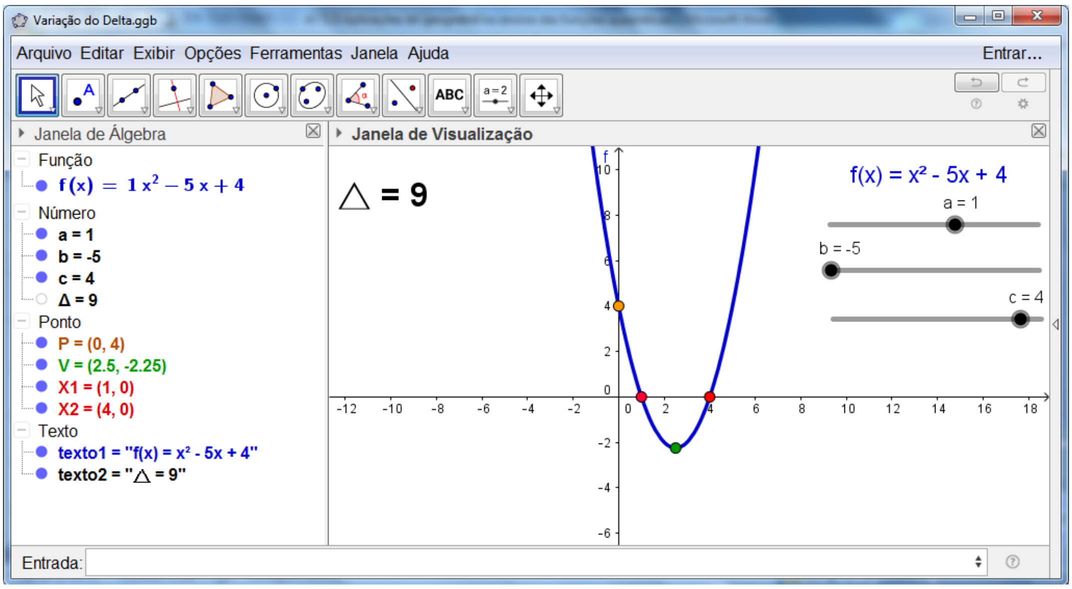
Adotaremos para esta análise a função f: ℝ → ℝ, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com "a", "b" e "c" agora variáveis.

No ambiente do *software* geogebra construiremos um "Controle Deslizante" para cada coeficiente, todos variando no intervalo real de – 5 a + 5. Na sequência, inserimos na caixa de Entrada de Comandos do *software* a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, de modo que os valores de "a", "b" e "c" assumirão os valores indicados pelos "Controles Deslizantes".

Indicaremos no geogebra o discriminante pela fórmula que o define ($\Delta = b^2 – ac$), como inicialmente já definimos os "Controles Deslizantes" pelos coeficientes "a", "b" e "c" o *software* já reconhece no "Δ" os respectivos valores dos coeficientes, logo para cada valor indicado para "a", "b" e "c", o "Δ" assumirá o valor correspondente a fórmula que o define.

À medida que alteramos os valores de "a", "b" e "c", com o auxilio do *mouse*, nos "Controles Deslizantes", dinamicamente a função "f" e seu gráfico assumirão novas configurações e o seu discriminante, novos valores.

Figura 14: Representação do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando a = 1, b = –5 e c = 4,sendo Δ = 9



Fonte: Autor

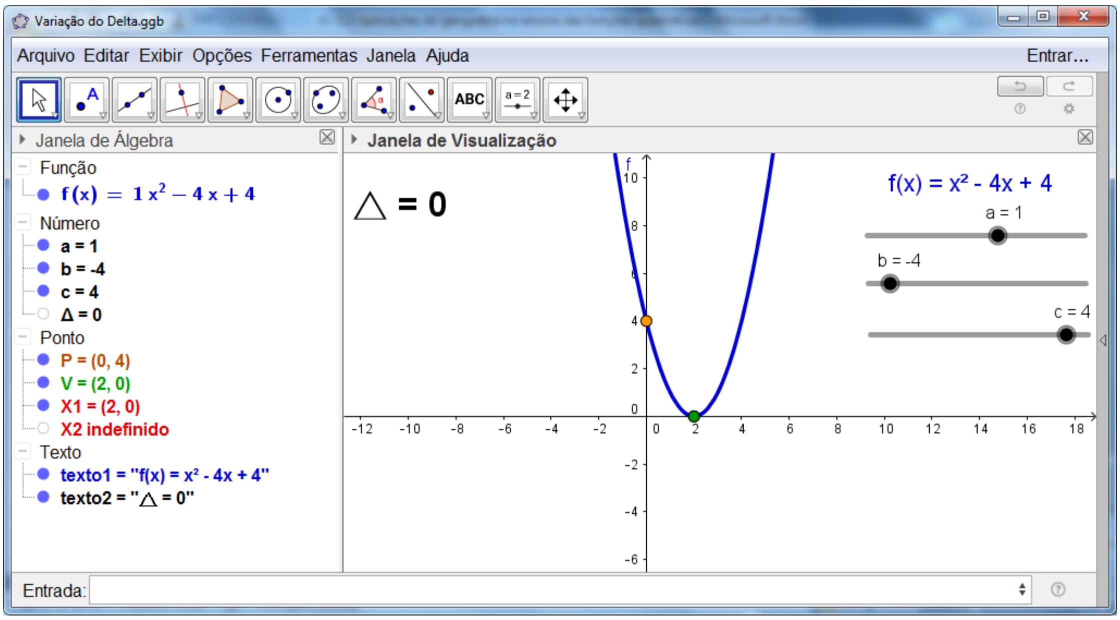
Poderemos observar no ambiente do *software* geogebra que sempre que temos $\Delta > 0$ o gráfico da função intercepta o eixo das abscissas em dois pontos que representam as raízes da função “f”. No exemplo da Figura 14, podemos ver um caso particular desta conclusão, quando adotamos a = 1, b = –5 e c = 4, levando o “Δ” a assumir o valor igual a 9, consequentemente a função tomará duas raízes que percebemos pela interseção do gráfico com o eixo do “x” nos pontos X_1= (1, 0) e X_2= (4, 0).

Continuando por alterar os valores de “a”, “b” e “c”, observaremos no ambiente do *software* geogebra que sempre que “Δ” for igual a zero o gráfico da função intercepta o eixo das abscissas em um único ponto, nos levando a concluir que as duas raízes da função “f” assumirão o mesmo valor.

No exemplo da Figura 15, temos um caso particular desta conclusão, quando adotamos a = 1, b = – 4 e c = 4, fazendo com que “Δ” seja igual a zero e levando a função possuir duas raízes iguais sendo representadas pelo único ponto identificado por X_1= (2, 0) na interseção do gráfico com o eixo das abscissas.

A movimentação do gráfico, no ambiente do *software* geogebra, pela alteração dos valores de “a”, “b” e “c”, nos levará a perceber que sempre que tivermos $\Delta < 0$ o gráfico da função não interceptará o eixo das abscissas, o que nos leva a concluir que nesta situação função “f” não possuirá raízes reais.

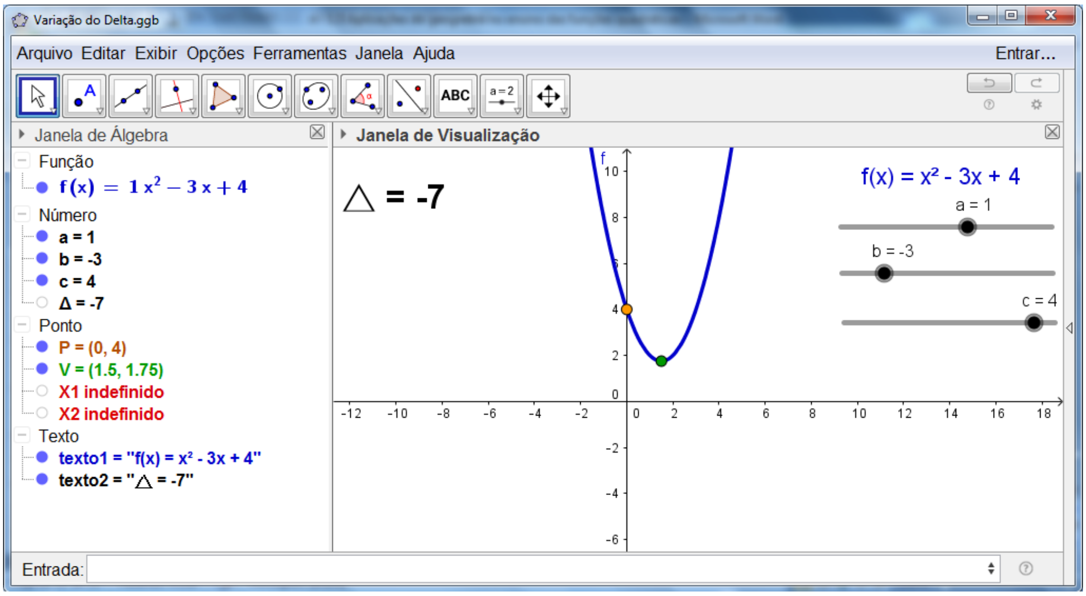
Figura 15: Representação do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando a = 1, b = –4 e c = 4, sendo Δ = 0



Fonte: Autor

No exemplo da Figura 16, temos um caso particular desta conclusão, quando adotamos a = 1, b = – 3 e c = 4, fazendo com que "Δ" assuma um valor igual a – 7, levando o gráfico a se posicionar acima da reta das abscissas, não havendo, portanto, ponto de interseção entre a parábola e o eixo "x", o que corresponde à função não possuir zeros, pois nenhum valor de "x" fará com que a função seja nula.

Figura 16: Representação do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando a = 1, b = – 3 e c = 4, sendo Δ =–7



Fonte: Autor

Por meio das análises apresentadas, foi possível conhecer algumas ferramentas e aplicações do *software* geogebra voltadas para a aprendizagem das funções quadráticas. As observações deste estudo revelam o caráter dinâmico do *software* uma vez que em virtude da possibilidade de manipular os valores dos coeficientes da função, percebemos, de forma imediata, as modificações sofridas no comportamento do gráfico da função.

A realização deste estudo em um ambiente estático como uma lousa, exigiria um grau elevadíssimo de abstração, dificultando em muito a assimilação das propriedades encontradas nesta investigação.

REFERÊCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**: Coleção Tendências em Educação Matemática. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

CRUZ, Marcos Monte; PONTELLO, Luiza Santos. Utilizando *Software* Matemático como mediador do Ensino de Gráficos de Funções Quadráticas. In: III Jornada Cearense de Educação Matemática – III JCEM, 2008, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: IFCE, 2008. p. 257-281

HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. **Ajuda GeoGebra: Manual oficial da versão 3.2**. Traduzido para português de Portugal por Antonio Ribeiro. Lisboa, 2009. Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acessado em: 13 de set. 2016.

IEZZI, Gelson. *et al*. **Fundamento de Matemática Elementar**: conjuntos e funções. v. 1, 3. ed. São Paulo: Atual, 2000.

LIMA, Elon Lages. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio - vol.** 1. 6. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2006.

LOPES JÚNIOR, Geraldo. **Geometria dinâmica com o geogebra no ensino de algumas funções**. 2013. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa – UFV, Viçosa - MG, 2013.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DE CARACTERIZAÇÃO DO ALUNO

QUESTIONÁRIO DE PESQUISA DE CAMPO

01) Nome: ____

02) Sexo:

a) ( ) Masculino

b) ( ) Feminino

03) Turma e turno que estuda: ____

04) Você tem acesso a computador em casa?

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

05) Quais os sites que você mais acessa na internet?

____

____

____

06) Você já teve aula no laboratório de informática da escola? Se sim descreva como foi e o que você estudou nesta aula?

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

____

____

____

____

07) Você já conhecia o *software* geogebra?

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

08) Você já utilizou o *software* geogebra na escola? Se sim, descreva como foi.

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

____

____

____

____

09) Você sente alguma dificuldade de aprendizagem dos conteúdos de matemática? Se sim descreva em que e qual a sua dificuldade.

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

____

____

____

____

10) Nas aulas de matemática, você já estudou funções quadráticas? Se sim, o que você estudou sobre este conteúdo?

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

____

____

____

____

11) Nas aulas de matemática, você tem dificuldades em compreender gráficos de funções? Se sim, descreva qual a sua dificuldade.

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

____

____

____

____

12) Você considera que o uso da tecnologia pode auxiliar no aprendizado da matemática? Se sim, descreva em que você acha que ela pode contribuir.

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

____

____

____

13) O que você sugere ou sugeria para melhorar o processo de ensino e aprendizagem da matemática?

____

____

____

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO ORIENTADOR DO DIÁRIO DE CAMPO

DIÁRIO DE CAMPO

Data: ____/____/____

01) Quais foram os conhecimentos abordados neste dia?

02) Que instrumentos e signos mediaram os conhecimentos científicos estudados neste encontro?

03) Descreva com detalhes como aconteceu a rotina das ações neste encontro de aprendizagem e quais as atividades foram realizadas neste encontro de aprendizagem.

04) Quais as dificuldades encontradas pelo pesquisador para o desenvolvimento deste encontro?

05) Quais os conhecimentos espontâneos apresentados pelos alunos?

06) Quais foram as principais dúvidas e dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dos conteúdos abordados ao longo do dia?

07) Como foram superadas estas dúvidas e dificuldades?

08) Como aconteceu a zona de desenvolvimento proximal?

09) Na percepção do pesquisador, que conhecimentos foram internalizados pelos alunos?

10) Na percepção do pesquisador, de que modo o uso do *software* geogebra contribuiu para a internalização destes conhecimentos?

APÊNDICE D - ATIVIDADE 1.1

IDENTIFICAÇÃO DE PONTOS NO PLANO CARTESIANO

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Marque um ponto P qualquer no plano cartesiano, coloque-o na cor vermelha e mostre suas coordenadas (x,y). Desloque-o no plano. Observe atentamente a mudança de coordenadas.

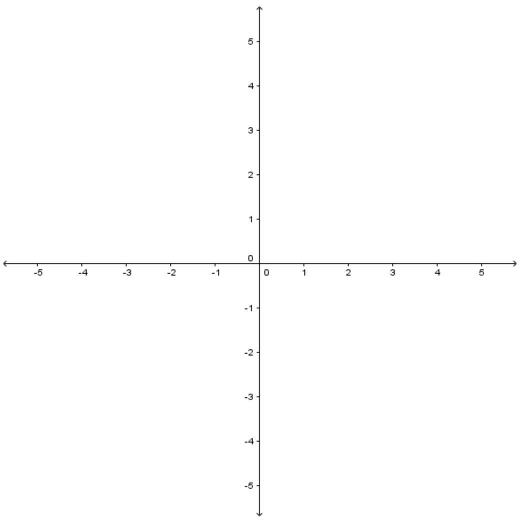
b) Marque outro ponto Q qualquer no plano cartesiano, coloque-o na cor vermelha e mostre suas coordenadas (x,y). Desloque-o no plano. Observe atentamente a mudança de coordenadas.

c) Construa o segmento PQ, coloque-o na cor azul, mostre o comprimento do segmento. Movimente o ponto P. Agora movimente o ponto Q. Observe o que acontece com as coordenadas dos pontos e com o comprimento do segmento.

2 – ATIVIDADE A SER REALIZADA NA FOLHA

a) Localize no plano cartesiano abaixo os pontos A(2, 3); B(-1, 2); C(4, 0); D(5, 0); E(-3, 1); F(1,- 4).

b) Construa os segmentos AB, CD e EF.



O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____

____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____

____

APÊNDICE E - ATIVIDADE 2.1

CONCEITO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA E IDENTIFICAÇÃO DAS RAÍZES

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA NA FOLHA

PERGUNTA 1: O que você entende por função?

____

____

____

PERGUNTA 2: O que você entende por função quadrática?

____

____

____

PERGUNTA 3: Quais das funções abaixo são polinomiais do 2º grau?

(   ) $f(x) = 5 - 2x$ (   ) $y = 6x - x^2 - 5$(   ) $x^2 - 4x + 6 = 0$

(   ) $g(x) = \frac{x}{3} + 5$ (   ) $h(x) = x^2 - 5x + 6$ (   ) $k(x) = x^{\frac{1}{3}} - x$

PERGUNTA 4: Encontre os zeros das funções quadráticas identificadas na questão anterior utilizando a fórmula de Bhaskara. (USE O VERSO DA FOLHA)

2 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Num mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções quadráticas identificadas na questão anterior.
b) Identifique em cada gráfico os pontos correspondentes aos zeros das funções e determine as coordenadas destes pontos.

O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____

____

____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____

____

____

APÊNDICE F - ATIVIDADE 3.1

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Num mesmo plano cartesiano, construa o gráfico das funções $\mathbf{f(x) = x^2 - 5x + 4}$ e $\mathbf{g(x) = -x^2 - 5x + 4}$

PERGUNTA 1: Descreva a principal diferença entre estas duas funções, tanto na sua escrita algébrica quanto no gráfico.

____

____

____

2 – ATIVIDADE A SER REALIZADA NA FOLHA

a) Faça o esboço do gráfico da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

b) Faça o esboço do gráfico da função g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -x^2 + 3x - 2$.

O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____

____

____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____

____

____

APÊNDICE G - ATIVIDADE 3.2

INTERSEÇÃO DA PARÁBOLA COM O EIXO “X”

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Num mesmo plano cartesiano, construa o gráfico das funções $\mathbf{f(x) = 2x^2 - 7x + 3}$, $\mathbf{g(x) = x^2 - 4x + 4}$ e $\mathbf{h(x) = 3x^2 + 6x + 5}$.Determine, caso exista, o(s) ponto(s) de interseção entre os gráficos das funções e o eixo das abscissas.

PERGUNTA 1: O que você percebe ao observar os gráficos destas funções?

____

____

____

2 – ATIVIDADE A SER REALIZADA NA FOLHA

a) Determine algebricamente, caso exista, os zeros das funções a seguir: $\mathbf{f(x) = 2x^2 - 7x + 3}$, $\mathbf{g(x) = x^2 - 4x + 4}$ e $\mathbf{h(x) = 3x^2 + 6x + 5}$. (USE O VERSO DA FOLHA CASO NECESSÁRIO)

PERGUNTA 2: Observando as funções *f*, *g* e *h*. Que relação podemos estabelecer entre os zeros da função e o valor do seu discriminante (Δ)?

____

____

____

O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____

____

____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____

____

____

APÊNDICE H - ATIVIDADE 3.3

VÉRTICE DA PARÁBOLA

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Construa os gráficos da função **f(x) = – x² + 2x + 3** e g**(x) =x² + 2x + 3** (referente a questão anterior).Identifique o ponto do VÉRTICE de cada parábola.

PERGUNTA 1: O gráfico da função "f" possui ponto de MÁXIMO ou MÍNIMO?

____

PERGUNTA 2: O gráfico da função "g" possui ponto de MÁXIMO ou MÍNIMO?

____

2 – ATIVIDADE A SER REALIZADA NA FOLHA

a) Determine algebricamente, as coordenadas do vértice da parábola das funções **f(x) = – x² + 2x + 3** e g**(x) =x² + 2x + 3.** (SE NECESSÁRIO USE O VERSO DA FOLHA)

3 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Construa o gráfico da função **f(x) = – x² + 6x – 5.** Identifique o ponto do VÉRTICE DA PARÁBOLA e altere o nome do ponto para V. Identifique os pontos correspondentes aos ZEROS da função e altere o nome dos pontos para X1 e X2.

b) Construa uma reta "r" perpendicular ao eixo das abscissas passando pelo ponto V.

PERGUNTA 3: Que relação podemos estabelecer entre a reta "r" e a parábola da função "f"?

____

____

PERGUNTA 4: Que relação podemos estabelecer entre a coordenada "x_v" do ponto V e os zeros da função "f"?

____

____

O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____

____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____

____

____

APÊNDICE I - ATIVIDADE 3.4

INTERSEÇÃO DA PARÁBOLA COM O EIXO "Y"

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Num mesmo plano cartesiano, construa o gráfico das funções **$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$**, **$g(x) = 2x^2 - 6x + 2$, $h(x) = 2x^2 - 6x + 3$, $i(x) = 2x^2 - 6x + 4$** e **$j(x) = 2x^2 - 6x + 5$**.Identifique o ponto de interseçãoentre a parábola e o eixo das ordenadas para cada uma das funções.

PERGUNTA 1: Que relação podemos estabelecer entre as funções e as coordenadas dos pontos de interseção das parábolas com o eixo das ordenadas?

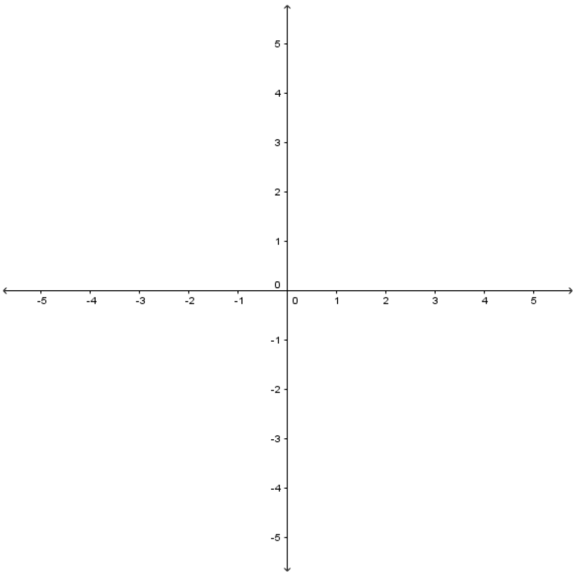
____

____

____

2 – ATIVIDADE A SER REALIZADA NA FOLHA

Construa, no plano cartesiano abaixo o esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e determine as coordenadas das raízes (caso existam), do ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e do vértice da parábola.



O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____

____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____

____

APÊNDICE J - ATIVIDADE 4.1

COMPORTAMENTO DO GRÁFICO COM A VARIAÇÃO DE "A"

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Crie um controle deslizante de nome "a", variando de –5 a +5, com incremento 1.
b) Represente a função **$f(x) = ax^2 + 4x + 1$,** marque o seu gráfico com a cor azul.
c) Movimente o controle deslizante fazendo o valor de "a" mudar de –5 até +5 e observe o que acontece com a parábola.
   PERGUNTA 1: O que acontece com a parábola quando o valor de "a" é negativo?

____

   PERGUNTA 2: O que acontece com a parábola quando o valor de "a" é igual a zero?

____

   PERGUNTA 3: O que acontece com a parábola quando o valor de "a" é positivo?

____

d) Altere a variação do seletor para de – 20 a +20.
e) Movimente o controle deslizante fazendo o valor de "a" mudar de – 20 até +20 e observe o que acontece com a parábola.
   PERGUNTA 4: O que acontece com a parábola quando o valor de "a" se aproxima de zero?

____

____

   PERGUNTA 5: O que acontece com a parábola quando o valor de "a" se afastam de zero, tanto para valores positivos como negativos?

____

____

O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____

____

____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____

____

____

APÊNDICE K - ATIVIDADE 4.2

COMPORTAMENTO DO GRÁFICO COM A VARIAÇÃO DE “B”

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Crie um controle deslizante de nome “b”, variando de –5 a +5, com incremento 1.
b) Represente a função **f(x) =** $\mathbf{x^2}$ **+ bx + 1,** marque o seu gráfico com a cor azul.
c) Movimente o controle deslizante fazendo o valor de “b” mudar de–5 até +5 e observe o que acontece com a parábola.

PERGUNTA 1: O que acontece com a parábola quando o valor de “b” é modificado?

____
____
____
____

O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____
____
____
____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____
____
____
____

APÊNDICE L - ATIVIDADE 4.3

COMPORTAMENTO DO GRÁFICO COM A VARIAÇÃO DE “C”

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Crie um seletor de nome “c”, variando de –5 a +5, com incremento 1.
b) Represente a função **$f(x) = x^2 – 2x + c$,** marque o seu gráfico com a cor verde.
c) Movimente o seletor fazendo o valor de “c” mudar de –5 até +5 e observe o que acontece com a parábola.

PERGUNTA 1: O que acontece com a parábola quando o valor de “c” é modificado?

____

____

____

d) Observe o ponto de intersecção da parábola com o eixo do “y” à medida que você modifica o valor de “c”.

PERGUNTA 2: O que podemos estabelecer de relação entre o valor de “c” e o ponto de interseção da parábola com o eixo y?

____

____

____

O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____

____

____

____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____

____

____

____

APÊNDICE M - ATIVIDADE 4.4

COMPORTAMENTO DO GRÁFICO COM A VARIAÇÃO DE "Δ"

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

a) Crie um controle deslizante de nome "a", variando de –5 a +5, com incremento 1. Crie outro controle deslizante de nome "b", variando de –5 a +5, com incremento 1. Crie outro controle deslizante de nome "c", variando de –5 a +5, com incremento 1.
b) Represente a função **$f(x) = ax^2 + bx + c$,** marque o seu gráfico com a cor verde.
c) Represente na caixa de entrada $\Delta = b^2 - 4ac$
d) Faça uma caixa de texto mostrando o valor do Δ
e) Mostre os pontos de intersecção da parábola com o eixo x, identifique-os como X1 e X2, marquem estes pontos de cor azul. (estes pontos representam as raízes da função "f")
f) Movimente os controles deslizantes fazendo os valores de "a", "b" e "c" mudarem de –5 até +5 e observe o que acontece com a parábola.

   PERGUNTA 1: Mantenha o "a" diferente de zero e diga o que acontece com as raízes da função quando o valor de "Δ" é positivo?

____

____

   PERGUNTA 2: Mantenha o "a" diferente de zero e diga o que acontece com as raízes da função quando o valor de "Δ" é igual a zero?

____

____

   PERGUNTA 3: Mantenha o "a" diferente de zero e diga o que acontece com as raízes da função quando o valor de "Δ" é negativo?

____

____

O que você aprendeu ao realizar esta atividade?

____

____

____

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a construção dos conhecimentos que você aprendeu nesta atividade?

____

____

____

APÊNDICE N - ATIVIDADE 5.1

PROBLEMA ENVOLVENDO FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA NA FOLHA

> Do décimo sexto andar de um edifício, a 50 metros do chão, caiu um vaso. A distância do vaso em relação ao solo em cada momento da queda pode ser calculada pela fórmula $\mathbf{d = 50 - 2t^2}$.
>
> Considerando a distância **d** em metros e o tempo **t** em segundos. Quanto tempo o vaso levou para atingir o solo?

OBS: Problema retirado da página 126, questão 7 do livro: Matemática – Ensino Médio de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz

Resolva o problema acima (se necessário utilize o *software* geogebra para auxiliá-lo na solução).

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a solução deste problema?

____

____

____

____

APÊNDICE O - ATIVIDADE 5.2

PROBLEMA ENVOLVENDO VALOR DE MÁXIMO OU DE MÍNIMO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA NA FOLHA

> A potência elétrica **P**, em watt (w), lançada em um circuito por um gerador é expressa por $\mathbf{P = 10i - 5i^2}$, onde **i** é a intensidade da corrente elétrica, medida em ampère (A). Calcule a intensidade da corrente elétrica necessária para se obter a potência máxima do gerador.

OBS: Problema retirado da página 130, questão 28 do livro: Matemática – Ensino Médio de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz

Resolva o problema acima (se necessário utilize o *software* geogebra para auxiliá-lo na solução).

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a solução deste problema?

____

____

____

____

APÊNDICE P - ATIVIDADE 5.3

PROBLEMA ENVOLVENDO FUNÇÃO QUADRÁTICA E VALOR DE MÁXIMO OU DE MÍNIMO

Nome: ____

1 – ATIVIDADE A SER REALIZADA NA FOLHA

Uma bola é arremessada do alto de uma árvore. Suponha que sua altura **h**, em metros, **t** segundos após o lançamento, seja $\mathbf{h = -t^2 + 4t + 6}$. Responda

d) Qual é a altura da árvore?

e) Qual é o tempo que a bola leva para voltar a suam altura inicial?

f) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

OBS: Problema da página 134, questão 46 do livro: Matemática – Ensino Médio de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz (com adaptações)

Resolva o problema acima (se necessário utilize o *software* geogebra para auxiliá-lo na solução).

Qual foi a contribuição do *software* geogebra para a solução deste problema?

____

____

____

____

APÊNDICE Q – QUESTIONÁRIO DE IDENTIFICAÇÃO DE APRENDIZAGENS

QUESTIONÁRIO

Nome: ____ Data: ___/___/___

01) Quais os assuntos abordados no encontro deste dia?

____

____

____

02) Quais os conhecimentos que você aprendeu ao longo do encontro de hoje?

____

____

____

03) Que dificuldades você teve ao longo do encontro?

____

____

____

04) Que dificuldades você já superou?

____

____

____

05) De que modo o uso do *software* geogebra contribuiu para o aprendizado dos conceitos relacionados as funções quadráticas, estudados ao longo do encontro de hoje?

____

____

____

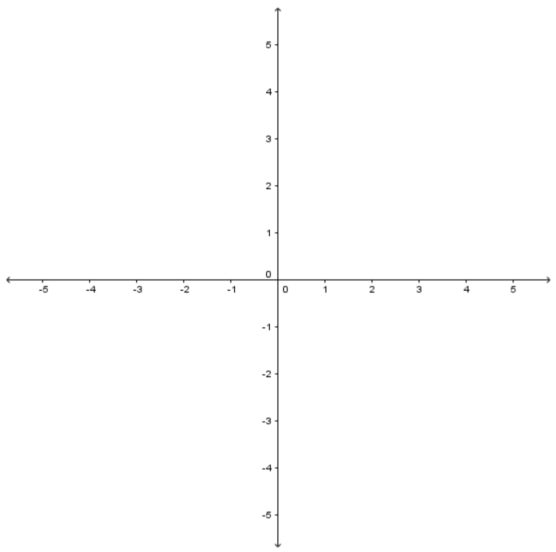
____

APÊNDICE R – TESTE DE SONDAGEM DE CONHECIMENTOS

TESTE

Nome: ____ Data: ___/___/___

01) Localize no plano cartesiano abaixo os pontos A (1, 3); B(-2, 4); C(0, 0); D(5, 0); E(-5, 0); F(0, 2); G(4, -2); H(0, -3) e I (-3, -2).



02) O que você entende por função quadrática ou função polinomial do 2º grau?

____

____

____

03) Marque um X na(s) opção(ões) em que encontramos uma função quadrática na sua forma algébrica.

( ) a) $f(x) = 3x + 2$

( ) b) $f(x) = 6 – 8x + 3$

( ) c) $x^2 – 3x + 6 = 0$

( ) d) $f(x) = \frac{x}{2} + 9$

( ) e) $f(x) = – 2x^2 – 4x + 17$

( ) f) $7x – 5 = y$

( ) g) $y = 3x^2 + 6x – 9$

( ) h) $f(x) = x^2$

( ) i) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 3x – 5$

( ) j) $y = – 5x + 3x^2 – 7$

04) Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determine algebricamente, caso exista, o(s) ponto(s) nos quais $f(x) = 0$ para os casos abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = -x^2 + 8x - 16$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

05) Informe marcando com X, se a função quadrática de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$definida nos casos abaixo, possui parábola com concavidade voltada para cima ou para baixo.

a)$f(x) = x^2 - x - 2$
(   ) Concavidade para cima
(   ) Concavidade para baixo

b) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$
(   ) Concavidade para cima
(   ) Concavidade para baixo

c) $f(x) = 4 - x^2$
(   ) Concavidade para cima
(   ) Concavidade para baixo

d) $f(x) = 3x + x^2$
(   ) Concavidade para cima
(   ) Concavidade para baixo

06) Nos casos abaixo, sendo f(x) uma função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico dessa função com o eixo das ordenadas.

a) $f(x) = x^2 - 4x - 3$

b) $f(x) = -x^2 + 5x$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = 9 - x^2$

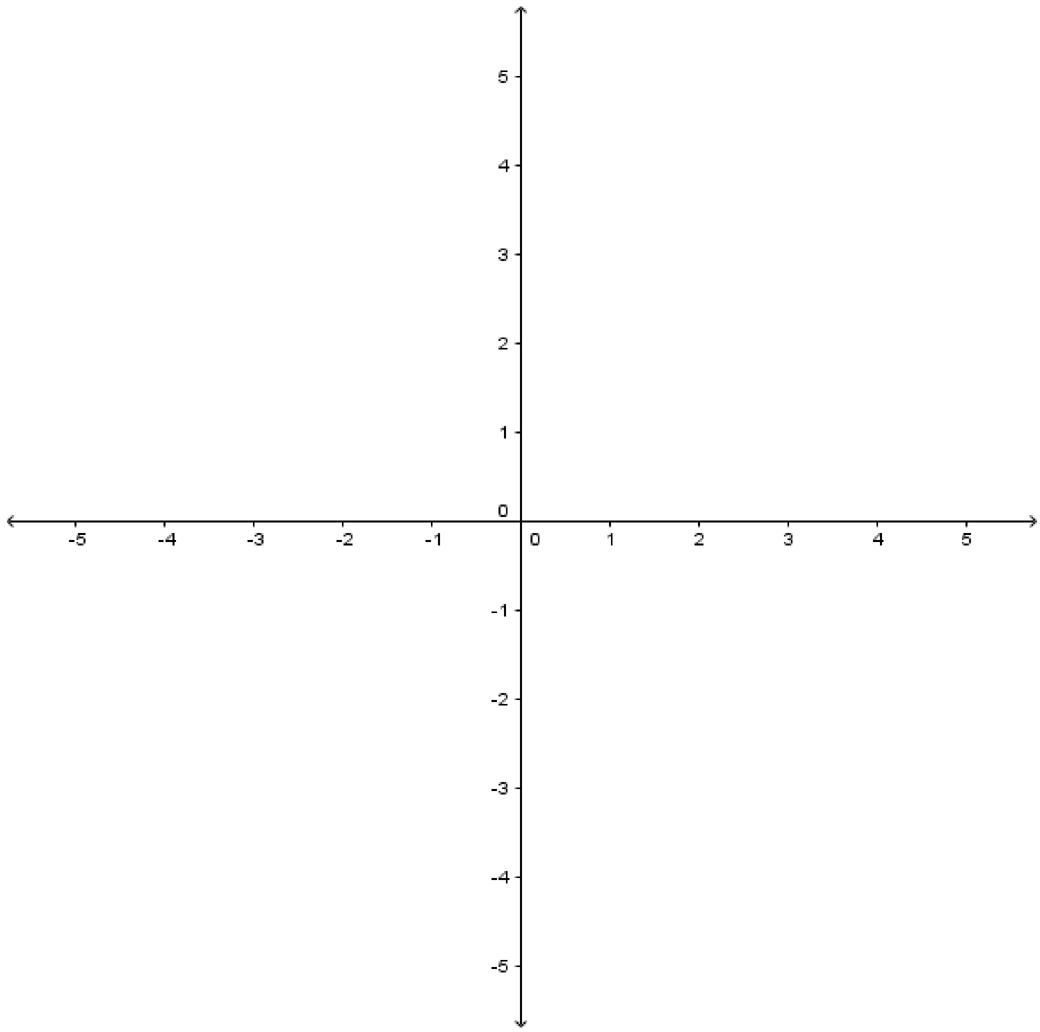
07) Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Construa o esboço do seu gráfico.

08)Informe marcando com X, se a função quadrática indicada nos casos abaixo, possui ponto de máximo ou mínimo.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
(   ) Ponto de máximo
(   ) Ponto de mínimo

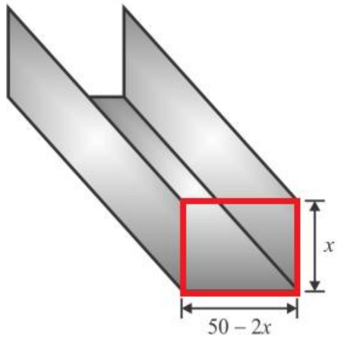
b) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$
(   ) Ponto de máximo
(   ) Ponto de mínimo

09) Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Construa, no plano cartesiano abaixo o esboço do seu gráfico e determine as coordenadas dos pontos notáveis (raízes, ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e vértice da parábola).



10)Uma pizzaria vende a pizza de calabresa por R$ 28,00. Entretanto, o proprietário descobriu que, dando *x* reais de desconto no preço da pizza, a receita diária bruta com a venda é fornecida pela função $r(x) = -x^2 + 9x + 582$. Determine os valores de desconto que podem ser dados para que a receita bruta seja igual a R$ 600,00.

11)Para produzir calhas, um fabricante dobra uma folha de metal com 50 cm de largura, como mostra a figura.

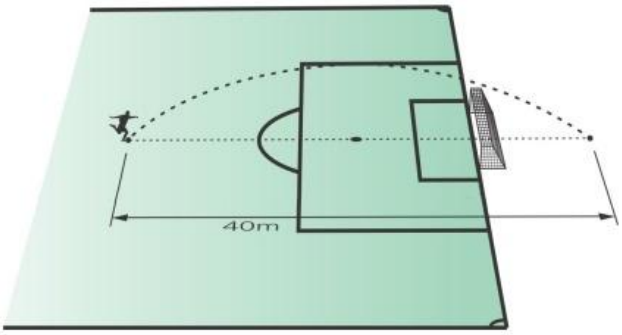


A ilustração em vermelho indica a seção transversal da calha.

a) Determine a função $A(x)$ que fornece a área da seção transversal da calha em relação a x, lembrando que a área de um retângulo de lados *b* e *h* é *bh*.

b) Determine o valor de *x* que faz com que área da seção transversal seja máxima.

12) Um jogador de futebol chuta uma bola em direção ao gol adversário. A bola descreve uma trajetória parabólica, passa por cima da trave e cai a uma distância de 40 metros da sua posição original, como mostrado na figura.



Suponha que a altura, em metros, da bola seja dada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{2x}{5} + c$, em que x é a distância horizontal, em metros, medida a partir do ponto em que a bola foi chutada.

a) Tomando como origem a posição em que jogador chutou a bola, determine o valor de *c*.

b) Horizontalmente, que distância a bola terá percorrido quando atingir a altura máxima?

c) Qual a altura máxima atingida por essa bola?