



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFOMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

SAMY CLEVER POLICARPO

**ANÁLISE DE UM GERADOR ÓPTICO PARA UM QUBIT CODIFICADO EM UM
OSCILADOR**

FORTALEZA

2016

SAMY CLEVER POLICARPO

ANÁLISE DE UM GERADOR ÓPTICO PARA UM QUBIT CODIFICADO EM UM
OSCILADOR

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Teleinformática do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Orientadora: Profa. Dra. Hilma Macedo de Vasconcelos

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- P824a Policarpo, Samy Clever.
Análise de um gerador óptico para um qubit codificado em um oscilador / Samy Clever Policarpo. –
2016.
45 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-
Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2016.
Orientação: Profa. Ma. Hilma Macedo de Vasconcelos.
1. Gato de Schrödinger. 2. Geração de estados quânticos. 3. Estados GKP. 4. Fidelidade. I. Título.
CDD 621.38
-

SAMY CLEVER POLICARPO

ANÁLISE DE UM GERADOR ÓPTICO PARA UM QUBIT CODIFICADO EM UM
OSCILADOR

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia de Teleinformática do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia em Engenharia de Teleinformática. Área de Concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Aprovada em: 23 de Fevereiro de 2016

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Hilma Macedo de
Vasconcelos (Orientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Liliana Sanz de la Torre
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Prof. Dr. João Batista Rosa Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus.

À minha mãe Fátima, minha irmã Nara, meu filho Samuel e a minha esposa Nayane e sua filha Marina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado forças para trilhar os caminhos para mais esta conquista e pelas inúmeras boas amizades que me ajudaram com paciência e compreensão.

À Profa. Dra. Hilma Helena Macedo de Vasconcelos, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da Banca examinadora Prof. Dr. João Batista Rosa Silva, Profa. Dra. Liliana Sanz e Prof. Dr. Rubens Viana Ramos pelo tempo e pelas valiosas colaborações e sugestões.

À minha esposa Nayane, pelo incentivo e paciência nos momentos mais difíceis.

Aos colegas do Grupo de Informação Quântica (GIQ), pelos momentos de inquietantes reflexões.

Finalmente à FUNCAP e CNPQ, por ter fornecido o apoio financeiro necessário, com a manutenção da bolsa de estudos.

RESUMO

O esquema de Computação Quântica tolerante a falhas proposto por Gottesman, Kitaev e Preskill (GKP) em Phys. Rev. A, 64, 012.310 (2001) pode ser realizado utilizando recursos ópticos lineares relativamente simples e fornece uma proteção natural contra pequenos erros arbitrários. Por outro lado, a preparação dos estados iniciais GKP é uma tarefa difícil. Algumas propostas para gerar estados GKP foram feitas ao longo dos últimos anos. Nosso objetivo aqui é analisar o desempenho de um gerador de estados GKP particular que usa estados gato de Schrödinger, dispositivos ópticos lineares, compressão e detecção homódina. Usamos simulações numéricas para estudar o comportamento da fidelidade entre os estados ideais e os estados gerados e mostramos que a proposta aqui considerada é de fato um esquema promissor.

Palavras-chave: Gato de Schrödinger, Geração de estados quânticos, Estados GKP, Fidelidade.

ABSTRACT

The fault-tolerant quantum computation scheme proposed by Gottesman, Kitaev, and Preskill (GKP) in Phys. Rev. A, 64, 012310 (2001) can be performed using relatively simple linear optical resources and provides a natural protection against arbitrary small errors. On the other hand, preparing the initial GKP states is a difficult task. A few proposals to generate GKP states have been done over the last years. Our objective here is to analyze the performance of a particular GKP generator that uses cat states, linear optical devices, squeezing, and homodyne detection. We use numerical simulations to study the behavior of the fidelity between the generated and the ideal states and show that the proposal in consideration is indeed a promising scheme.

Keywords: Cat states, Quantum state generation, GKP states, Fidelity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação dos níveis de energia do oscilador harmônico quântico associado ao campo eletromagnético. O operador de criação \hat{a}^\dagger adiciona um quantum de energia $\hbar\nu$, enquanto o operador de destruição \hat{a} subtrai a mesma quantidade de energia a um estado.	24
Figura 2 – Representação do estado coerente $ \alpha\rangle$ no espaço de fase.	25
Figura 3 – Representação de um divisor de feixe 50/50 ($\theta = \frac{\pi}{4}$), mostrando as duas entradas e as duas saídas.	28
Figura 4 – Código GKP para $ \bar{0}\rangle$ e $ \bar{1}\rangle$, respectivamente.	32
Figura 5 – Função de onda na quadratura x do estado lógico $ \bar{0}\rangle$ com $\Delta = k = 0.15$	33
Figura 6 – Esquema de geração de estado GKP. Em cada modo de entrada tem um estado gato, que será comprimido por uma quantidade s , e enviado para o divisor de feixe. Uma detecção homódina é realizada em um dos modos de saída e, dependendo do resultado da medição, um estado GKP aproximado é obtido na outra saída.	34
Figura 7 – Probabilidade de medir $p_2 = R$ em função de R ao gerar o estado $\tilde{\beta}(x, \zeta, 1)$. Nesse caso, $\alpha = \sqrt{\pi}e^\zeta$ e $\zeta = 1,9$. Esse valor de ζ corresponde a -16 dB de compressão em experimentos convencionais.	35
Figura 8 – Função de onda na quadratura x para o estado $\beta(x, \zeta, 1)$, com $\alpha = \sqrt{\pi}e^\zeta$ e $\zeta = 1,9$	36
Figura 9 – Estado binomial $\beta(x, \zeta, 3)$, uma aproximação do estado GKP lógico 0. Para esse caso temos novamente $\zeta = 1,9$	36
Figura 10 – Função de onda do estado GKP lógico 0 com $\Delta = k = 0,12$	37
Figura 11 – Função de onda $\beta(x; \zeta; 3)$	38
Figura 12 – Fidelidade entre ψ_{GKP} e $\beta(x, \zeta, 3)$ para (a) $\zeta = 1,5$ (curva pontilhada), (b) $\zeta = 1,9$ (curva contínua) e (c) $\zeta = 2,2$ (curva tracejada). Para todos os casos a fidelidade está em função de Δ e $k = 0,15$	40
Figura 13 – Fidelidade entre ψ_{GKP} e $\beta(x, \zeta, 3)$ para (a) $\zeta = 1,5$ (curva pontilhada), (b) $\zeta = 1,9$ (curva contínua) e (c) $\zeta = 2,2$ (curva tracejada). Para todos os casos a fidelidade está em função de k e $\Delta = 0,15$	40
Figura 14 – Fidelidade F entre ψ_{GKP} e $\beta(x; 1,9; 3)$ como uma função de Δ e k	41
Figura 15 – Projeção da Figura 14	42

Figura 16 – Fidelidade F entre ψ_{GKP} e $\beta(x; 1, 9; 3)$ como uma função de α 42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo da notação padrão utilizada na mecânica quântica, chamada de notação de Dirac	17
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	COMPUTAÇÃO QUÂNTICA	14
2.1	Introdução	14
2.2	Mecânica Quântica	14
2.3	Bit Quântico	16
2.4	Notação de Dirac	16
2.5	Estados de Superposição	17
2.6	Fidelidade	18
2.7	Estados Emaranhados	18
3	COMPUTAÇÃO QUÂNTICA COM ESTADOS GKP	20
3.1	Introdução	20
3.2	Variáveis Contínuas	20
3.2.1	<i>Oscilador Harmônico</i>	21
3.2.2	<i>Estados de Número</i>	22
3.2.3	<i>Estados Coerentes</i>	23
3.2.4	<i>Estados comprimidos</i>	26
3.2.5	<i>Estados de Gato de Schrödinger</i>	26
3.3	Dispositivos Ópticos	27
3.3.1	<i>Divisor de Feixe</i>	27
3.4	Detecção Homódina	28
4	OS ESTADOS GKP	30
4.1	Introdução	30
4.2	Codificação do Qubit no Oscilador	30
4.3	Esquema GKP	31
4.4	Geração de Estados GKP	32
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	37
5.1	Introdução	37
5.2	Análise da Fidelidade	37
6	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

A perspectiva da construção de computadores quânticos com capacidade de processamento superior aos computadores clássicos tem motivado uma das áreas mais versáteis da ciência atualmente, a teoria da informação quântica. Segundo Shor (33), esses computadores se baseiam e exploram fenômenos quânticos que podem realizar, simultaneamente, uma quantidade maior e mais veloz de algoritmos, por exemplo, fatorando números de forma mais eficiente, mesmo que isso exija técnicas para o estudo da programação quântica.

A segurança proporcionada pela codificação baseia-se no fato de que precisamos de décadas, ou até mesmo séculos, para conseguir decifrar a codificação usando computadores clássicos. Por outro lado, de posse de um computador quântico, essa quebra poderia ser feita em segundos, fazendo com que essa tecnologia ameace o sigilo de informações. É por isso que vários países no mundo investem bastante em pesquisa nessa área.

A teoria da informação clássica, regida pelas leis da mecânica clássica, quantifica os recursos físicos necessários às informações de transmissão, processamento e armazenamento em canais livre de ruídos e, também, à quantidade de informação útil através de canais com ruídos (7). Estas informações representam os dados ou comandos e são codificadas através da menor representação da informação, denominada bit. O bit é uma linguagem de abstração relativa às propriedades elétricas e magnéticas dos materiais, assumindo valores lógicos 0 quando não há tensão elétrica ou 1 quando a tensão elétrica está presente.

O análogo quântico do bit clássico é denominado bit quântico ou qubit, onde a informação quântica pode ser codificada usando qualquer sistema quântico com no mínimo dois estados. Temos qubits codificados usando estados coerentes, spin nuclear, estados atômicos hiperfinos, polarização da luz, entre outros. Computadores quânticos podem operar, efetivamente, na presença de ruídos, e a informação pode ser processada através de canais quânticos ruidosos de forma precisa.

Feynman (12) apontou, pela primeira vez, em 1982, que efeitos quânticos poderiam oferecer algo novo, mostrando que nenhuma máquina de Turing conseguiria operar usando fenômenos quânticos sem introduzir um fator exponencial em seu desempenho.

Alguns anos atrás, acreditava-se que computação quântica óptica somente seria possível através do uso de elementos não lineares, como o meio Kerr. Muitas portas lógicas baseadas em óptica não-linear foram propostas e estudadas (4, 5, 17, 16). A maior dificuldade com estes esquemas mencionados é o fato de que todos eles necessitam de um meio não linear.

Esse cenário mudou radicalmente quando Knill, Laflamme e Milburn mostraram, em 2001, que óptica linear seria suficiente para implementar um esquema de computação quântica eficiente (22). Desde então, foram propostos outros sistemas ópticos não lineares, alguns com base na codificação de variáveis discretas, e outros baseados na codificação de variáveis contínuas (30).

O computador quântico usando óptica linear proposto por Gottesman, Kitaev e Preskill (GKP) (15) codifica o qubit no espaço de Hilbert contínuo de osciladores nas variáveis posição e momento. Uma das vantagens do esquema de GKP é que ele fornece um esquema de correção de erro natural para corrigir erros devido a pequenas mudanças. Qualquer tipo de oscilador harmônico quântico pode ser utilizado no esquema GKP, mas iremos nos concentrar nos modos propagantes.

A geração de estados GKP é uma tarefa difícil e vários esquemas para gerar esses estados foram propostos nos últimos anos (22, 30, 34, 20, 21). O esquema proposto em (34) usa superposições de estados coerentes (conhecidos como estados gato de Schrödinger), dispositivos ópticos lineares, compressão e detecção homódina.

O objetivo principal desse trabalho é calcular a fidelidade entre o estado GKP gerado pelo sistema descrito em (34) e o estado GKP aproximado descrito em (15). Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 fazemos uma rápida introdução sobre computação e informação quânticas; no capítulo 3 apresentamos a computação quântica com os estados GKP; no capítulo 4 mostramos como são gerados os estados GKP usando o esquema proposto em (34); no capítulo 5 calculamos a fidelidade desejada; e por fim, concluímos este trabalho em 6, apresentando observações a respeito dos resultados obtidos.

2 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

2.1 Introdução

A computação quântica é a ciência que estuda a aplicação das teorias e propriedades da mecânica quântica à ciência da computação. Essa área é bastante explorada não apenas devido a possibilidade de um computador quântico ser superior a um computador clássico, mas também porque os estudos desenvolvidos nessa área ajudam a entender melhor o próprio universo da mecânica quântica.

Entende-se por computação e informação quânticas o estudo da execução de tarefas realizadas pelo processamento da informação codificada em sistemas quânticos. Os primeiros controles sobre sistemas quânticos isolados foram observados a partir da década de 1970, tendo como exemplos o aprisionamento de íons, microscópios de tunelamento e componentes eletrônicos.

Ainda é grande o desafio para físicos e engenheiros desenvolverem técnicas que tornem o processamento da informação quântica em larga escala uma realidade. Todas as formas de processamento de informação podem ser consideradas dentro de um contexto da mecânica quântica, incluindo, por exemplo, as comunicações, as capacidades de canal e os limites quânticos para extração de informação (23).

Neste capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica que motiva esse trabalho. Discorreremos sobre a mecânica quântica baseada no formalismo de Hilbert, seus princípios e postulados, bem como as ideias fundamentais sobre o bit quântico paralelamente aos conceitos do bit clássico. Discutiremos também sobre a notação de Dirac como notação padrão da mecânica quântica e as medidas de fidelidade. E por fim, o emaranhamento de estados quânticos, exemplificado com os estados de Bell.

2.2 Mecânica Quântica

Os primeiros estudos da mecânica quântica ocorreram no início do século XX, onde se estabeleceu que um dos estudos da física teórica são os estados físicos com dimensões próximas ou abaixo da escala atômica, tais como os próprios átomos e partículas atômicas.

Os postulados, nos quais se baseia a descrição quântica de sistemas físicos, são, de acordo com Nielsen e Chuang (2010, p. 80),

Postulado 1 *O estado de um sistema físico isolado qualquer é descrito por um vetor pertencente a um espaço de Hilbert.*

Postulado 2 *Uma transformação unitária descreve a evolução de um sistema físico. Como os vetores de estados quânticos são unitários, essas transformações preservam o módulo dos vetores. Conhecendo o operador U , podemos construir uma operação unitária de A , UAU^{-1} , onde são chamados de observáveis equivalentes unitários.*

Postulado 3 *Assim como a lei do movimento constitui a equação fundamental da mecânica newtoniana, a equação de Schrödinger é para a mecânica quântica, no qual descreve a evolução temporal do estado de um sistema quântico fechado, dado por:*

$$-i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle. \quad (2.1)$$

\hbar é a constante física chamada de constante de Planck, onde seu valor exato não terá utilidade neste trabalho e H é o operador hermitiano conhecido como hamiltoniano do sistema. A equação de Schrödinger fornece a forma do estado quântico $|\psi(t)\rangle$ e esse estado quântico, por consequência, torna-se solução desta equação.

Postulado 4 *Os operadores de medidas são responsáveis pelas medidas quânticas, e atuam sobre o espaço de estados do sistema. Para um estado de um sistema quântico $|\psi\rangle$, antes da medida, a probabilidade dos possíveis resultados é dada por:*

$$p = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (2.2)$$

onde M_m são os operadores e m os possíveis resultados da medida. E o resultado do sistema após a medida, é dado por:

$$|\psi\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (2.3)$$

Postulado 5 *O espaço de estados de um sistema quântico composto é o produto tensorial dos espaços de estados dos sistemas quânticos individuais, dado por:*

$$|\psi_0\rangle \otimes |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle. \quad (2.4)$$

Todo o formalismo matemático utilizado nos postulados e em toda a mecânica quântica é baseada no espaço de Hilbert.

2.3 Bit Quântico

O bit é o objeto lógico com propriedades específicas de natureza fundamental da computação e informação clássicas, associado a um sistema clássico. O análogo desse bit clássico é o bit quântico ou abreviadamente, *qubit*, unidade básica da computação e informação quânticas. Tanto o bit clássico quanto o quântico são implementados como objetos físicos reais.

Da mesma forma que um bit clássico possui estados 0 ou 1, os estados possíveis de um qubit são $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. A diferença entre eles é que os qubits podem estar em uma superposição da forma: $\mu|0\rangle + \nu|1\rangle$, onde μ e ν são quaisquer números complexos (28). Esses estados podem ser representados por um vetor em um espaço vetorial de Hilbert bidimensional:

$$|Q\rangle = \mu|0\rangle + \nu|1\rangle = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

que satisfaz a base canônica na forma ortonormalizada, tal que $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$, onde essa operação garante que a probabilidade de medir $|0\rangle$ é $|\mu|^2$ e a probabilidade de medir $|1\rangle$ é $|\nu|^2$ (31).

Como o computador quântico deve conter um sistema físico que é usado para representar a informação do bit quântico, em geral, qubits podem ser codificados ou implementados em sistemas de dois níveis, tais como o estado padrão de excitação de um átomo, a polarização vertical e horizontal de um único fóton ou dois estados de spin de uma partícula de spin 1/2. Muitos sistemas propostos para representar um qubit tem espaços de Hilbert com mais de duas dimensões, mas geralmente todas as dimensões extras são restritas pela dinâmica dos sistemas relevantes e apenas dois de seus estados são utilizados na definição de qubit (9).

2.4 Notação de Dirac

A notação de Dirac é a notação padrão adotada pelos físicos para a mecânica quântica (8). Essa notação padrão consequentemente é a mesma utilizada para descrever os qubits. Essa notação está resumida na Tabela 1.

Tabela 1 – Resumo da notação padrão utilizada na mecânica quântica, chamada de notação de Dirac

Notação	Descrição
z^*	Complexo conjugado de z $(1 + i)^* = 1 - i$
$ \psi\rangle$	Vetor chamado de <i>ket</i>
$\langle\psi $	Vetor dual de $ \psi\rangle$ também chamado de <i>bra</i>
$\langle\varphi \psi\rangle$	Produto escalar entre $ \varphi\rangle$ e $ \psi\rangle$
$ \varphi\rangle \otimes \psi\rangle$	Produto tensorial entre $ \varphi\rangle$ e $ \psi\rangle$
$ \varphi\rangle \psi\rangle$	Notação abreviada para o produto tensorial entre $ \varphi\rangle$ e $ \psi\rangle$
A^*	Complexo conjugado da matriz A
A'	Transposta da matriz A
A^\dagger	Hermitiano conjugado ou matriz adjunta de A , $A^\dagger = (A')^*$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$

A notação padrão para um vetor no espaço de Hilbert bidimensional é dado por:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

e seu conjugado

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*). \quad (2.7)$$

A combinação de um bra com um ket, chamado *bra-ket* ou simplesmente, *bracket* é o produto escalar, cujo resultado é um número complexo:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_n \varphi_n^* \psi_n = (\varphi, \psi). \quad (2.8)$$

2.5 Estados de Superposição

Superposição é um dos princípios fundamentais da mecânica quântica e indica que um sistema pode estar em mais de um estado simultaneamente. Aplicado à computação quântica, esta superposição é um fenômeno que permite um qubit assumir dois valores de base computacional simultaneamente, ou seja, um qubit pode armazenar os valores 0 e 1 ao mesmo tempo, como visto na equação (2.5). Com isto, percebe-se o aumento exponencial da capacidade de armazenamento e processamento de informação em relação à computação convencional.

Na mecânica quântica, um estado permanece em superposição até que uma medida seja implementada. Assim, quando uma medição é realizada, de acordo com o postulado da

medição da mecânica quântica (4), o estado medido que antes estava em uma superposição, colapsa para um dos estados.

2.6 Fidelidade

Na teoria da computação e informação quânticas, a fidelidade é uma das medidas mais utilizadas e, apesar de muitas vezes ser chamada de medida de distância entre estados quânticos, não é definido um grau de distanciamento no espaço dos estados (18).

A fidelidade entre dois estados puros, $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$, é definida como:

$$F(|\phi\rangle, |\psi\rangle) \equiv |\langle\phi|\psi\rangle|, \quad (2.9)$$

no qual avalia-se a proximidade desses dois estados no espaço de Hilbert, pois é uma medida bem definida para estados puros. Em mecânica quântica, é o valor absoluto do produto escalar entre dois estados, logo, se os estados em questão forem idênticos, então a fidelidade será perfeita.

Para se ter certeza que dois estados são realmente semelhantes um ao outro, sua fidelidade deverá medir o mais próximo de 1. Por outro lado, estados com a mesma fidelidade podem possuir valores diferentes para outras quantidades medidas, como, por exemplo, a energia (11).

2.7 Estados Emaranhados

O emaranhamento quântico é um fenômeno da mecânica quântica que desempenha um papel central nas aplicações da computação e informação quânticas. Representa a capacidade de pares de sistemas correlacionados interagirem a qualquer distância instantaneamente, aumentando a velocidade de processamento e informação nos computadores quânticos, sem haver troca de energia. No entanto, esse fenômeno não permite esta transmissão a uma velocidade superior à da velocidade da luz, pois, nenhuma informação pode ser transmitida dessa forma.

Esse fenômeno é a base para diversos fins tecnológicos, tais como teletransporte de estados quânticos, correção quântica de erros, protocolos de computação quântica e distribuição de chave criptográfica quântica (37).

O sistema bipartite é o caso mais simples de sistema quântico onde pode haver emaranhamento. Vamos considerar um estado $|\psi_{AB}\rangle$ dado por:

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle. \quad (2.10)$$

Este sistema quântico é composto pelos subsistemas A e B , associados ao espaço de Hilbert H_A e H_B , sendo $|\psi_A\rangle$ um estado puro pertencente a H_A , e $|\psi_B\rangle$ pertencente a H_B . Por definição, um estado é dito separável se existir uma forma de escrevê-lo como (2.10), caso contrário o estado é dito emaranhado.

No caso de um sistema bipartite, formado por dois subsistemas de dois níveis cada, os estados emaranhados mais conhecidos são os estados de Bell (2):

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle); \quad (2.11)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle); \quad (2.12)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle); \quad (2.13)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (2.14)$$

também conhecidos como base de Bell e pares EPR (Einstein, Podolky e Rosen). São estados de dois qubits maximamente emaranhados, que formam uma base no espaço de Hilbert.

3 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA COM ESTADOS GKP

3.1 Introdução

Nesse capítulo iremos detalhar os principais conceitos e as ferramentas fundamentais para a implementação da computação quântica baseada no esquema proposto por Gottesman, Kitaev e Preskill (15).

Começaremos com uma introdução sobre as variáveis contínuas, prosseguindo com o estudo do Hamiltoniano correspondente ao oscilador harmônico quântico. Em seguida, falaremos sobre os estados quânticos da luz: estados de número, coerente, comprimidos e gato de Schrödinger e por fim, descreveremos alguns dispositivos ópticos.

3.2 Variáveis Contínuas

Como em computação clássica, a maioria dos estudos em computação quântica é baseado no modelo de qubit discreto. No entanto, também é possível fazer cálculos computacionais com variáveis contínuas, de acordo com Lloyd e Braunstein, que forneceram as condições necessárias e suficientes para a construção de um computador quântico universal sobre variável contínua em (25).

Um sistema quântico é um sistema de variáveis contínuas quando ele possui um espaço de Hilbert de dimensão infinita descrito por observáveis com espectro contínuo (36), dado por:

$$\mathcal{H} = \otimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k, \quad (3.1)$$

onde N é a quantidade de osciladores harmônicos e cada \mathcal{H}_k representa um espaço de Fock, e eles correspondem aos modos de radiação quantizada do campo eletromagnético, ou seja, correspondem aos sistemas de osciladores harmônicos. Para uma melhor compreensão, nesse capítulo será apresentado o oscilador harmônico quântico e os estados quânticos. Outros tipos de variáveis contínuas como a amplitude e fase do campo eletromagnético têm sido alvo de grande interesse nos últimos anos, pois através dessas quadraturas é possível aumentar taxas de processamento da informação quântica (3).

3.2.1 Oscilador Harmônico

Em óptica quântica, os modos eletromagnéticos quantizados correspondem aos osciladores harmônicos quânticos (13) e são descritos pelo Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \sum_j (m_j v_j^2 q_j^2 + m_j \dot{q}^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left(m_j v_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{m_j} \right),\end{aligned}\quad (3.2)$$

onde v_j são as autofrequências da cavidade, $p_j = m_j \dot{q}_j$ é o momento canônico e q_j é o operador de posição do j -ésimo modo pertencente ao espaço de Hilbert. A equação (3.2) expressa o Hamiltoniano como a soma de energias de osciladores independentes.

Os operadores q_j e p_j obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[q_j, p_{j'}] = i\hbar \delta_{jj'}, \quad (3.3)$$

$$[q_j, q_{j'}] = [p_j, p_{j'}] = 0. \quad (3.4)$$

Fazendo uma transformação canônica para o operador não-Hermitiano adimensional a_j , e seu adjunto a_j^\dagger , conhecidos como operadores de criação e aniquilação, temos que:

$$a_j e^{-iv_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar v_j}} (m_j v_j q_j + ip_j), \quad (3.5)$$

$$a_j^\dagger e^{iv_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar v_j}} (m_j v_j q_j - ip_j). \quad (3.6)$$

De onde podemos escrever os operadores q_j e p_j em termos de a_j e a_j^\dagger como:

$$q_j = i\sqrt{\frac{m_j \hbar v_j}{2}} (a_j + a_j^\dagger), \quad (3.7)$$

$$p_j = i\sqrt{\frac{m_j \hbar v_j}{2}} (a_j - a_j^\dagger). \quad (3.8)$$

Usando a equação (3.4), encontramos que:

$$[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}, \quad (3.9)$$

$$[a_j, a_{j'}] = [a_j^\dagger, a_{j'}^\dagger] = 0. \quad (3.10)$$

Em termos de a_j e a_j^\dagger , o Hamiltoniano da equação (3.2) se torna:

$$\mathcal{H} = \hbar \sum_j \frac{v_j}{2} (a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) = \hbar \sum_j v_j \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.11)$$

onde $n = a_j^\dagger a_j$ é o operador de número, que será abordado em seguida.

3.2.2 Estados de Número

Os estados de número ou estados de Fock, $|n\rangle$, são os autoestados do operador de número (32)

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (3.12)$$

que corresponde ao autovalor de energia E_n , dado por:

$$\mathcal{H} |n\rangle = \hbar\nu \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (3.13)$$

Aplicando o operador \hat{a} pela esquerda de (3.13), utilizando a relação (3.10), encontramos

$$\mathcal{H} \hat{a} |n\rangle = (E_n - \hbar\nu) \hat{a} |n\rangle. \quad (3.14)$$

Depois de alguns cálculos, temos que

$$|n-1\rangle = \frac{\hat{a}}{\alpha_n} |n\rangle, \quad (3.15)$$

que também é um autoestado da energia, mas com um autovalor reduzido, dado por

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\nu. \quad (3.16)$$

Usando o fato de que $|n-1\rangle$ deve ser normalizado, podemos determinar a constante $\alpha_n = \sqrt{n}$.

Assim,

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (3.17)$$

Similarmente,

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (3.18)$$

Utilizando essa expressão repetidamente, obtemos o estado número em termos do estado vácuo:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (3.19)$$

Analisando (3.17) e (3.18), observamos que o operador \hat{a} “destrói” um fóton, por esse motivo é chamado de operador de aniquilação, enquanto seu adjunto hermitiano \hat{a}^\dagger “cria” um fóton, sendo assim chamado de operador de criação.

Repetindo-se n vezes a expressão (3.16), obtém-se um estado de energia com um autovalor menor que o do estado fundamental, porém como isso não é permitido, definimos como estado vácuo o estado em que

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (3.20)$$

Utilizando o estado vácuo e (3.14), obtemos

$$\mathcal{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\nu|0\rangle = E_0|0\rangle, \quad (3.21)$$

resultando em

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\nu. \quad (3.22)$$

Na figura 1 é mostrado os níveis de energia do oscilador harmônico quântico associado ao campo eletromagnético.

Os estados de número formam um conjunto completo de estados, dado pela relação de completudeza, representada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbb{I}. \quad (3.23)$$

3.2.3 Estados Coerentes

Os estados coerentes são autoestados do operador de aniquilação \hat{a} :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.24)$$

Como \hat{a} é um operador não-hermitiano, os autovalores α são complexos.

Definimos o operador deslocamento como:

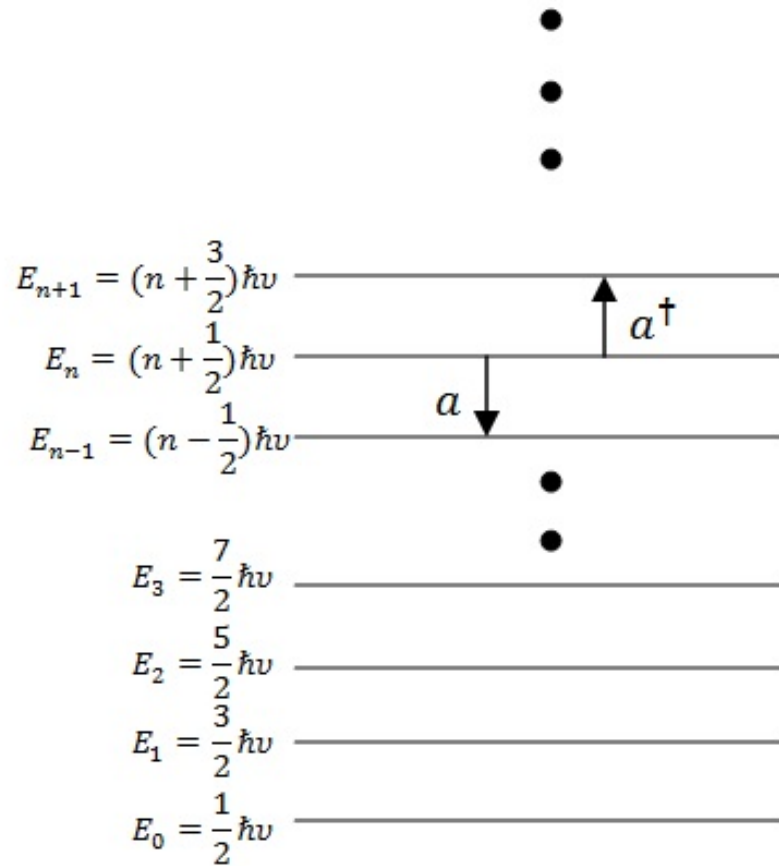
$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}. \quad (3.25)$$

De tal forma que um estado coerente pode ser obtido ao aplicarmos esse operador no vácuo:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (3.26)$$

O estado coerente é o estado de vácuo deslocado da origem para um ponto qualquer do espaço de fase. A representação do estado vácuo no espaço de fase possui uma simetria circular de raio unitário centrado na origem. Já os estados coerentes são representados por um círculo posicionado a uma distância dada por $|\alpha|$, que é a amplitude complexa do estado, como mostrado na Figura 2.

Figura 1 – Representação dos níveis de energia do oscilador harmônico quântico associado ao campo eletromagnético. O operador de criação \hat{a}^\dagger adiciona um quantum de energia $\hbar\nu$, enquanto o operador de destruição \hat{a} subtrai a mesma quantidade de energia a um estado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando a equação (3.19), podemos escrever

$$\langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}}|\alpha\rangle = \frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle. \quad (3.27)$$

Essa expressão pode ser usada para expandir $|\alpha\rangle$ em termos de $|n\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \sum |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \quad (3.28)$$

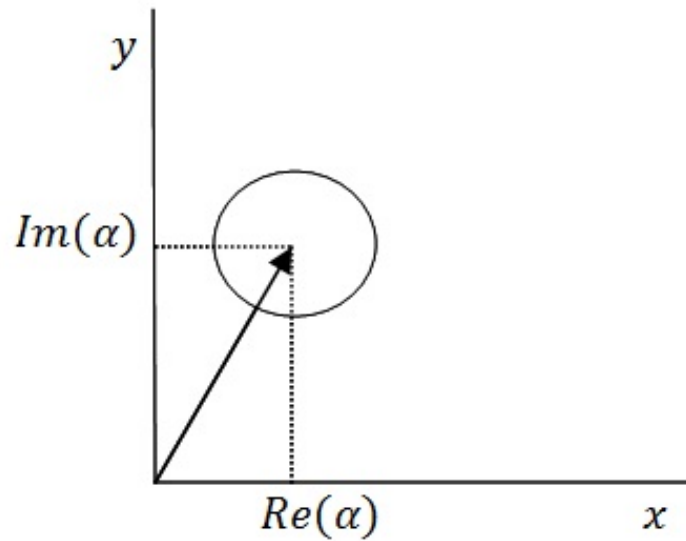
Normalizando, temos:

$$|\langle\alpha|\alpha\rangle|^2 = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{(n!)} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2}, \quad (3.29)$$

onde podemos facilmente ver que

$$\langle 0|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{D}\alpha|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}, \quad (3.30)$$

Figura 2 – Representação do estado coerente $|\alpha\rangle$ no espaço de fase.



Fonte: Elaborada pelo autor.

onde $e^{-\alpha^* \hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$, de tal forma que $|\langle\alpha|\alpha\rangle|^2 = 1$. Com isso, reescreveremos a equação (3.28) como:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.31)$$

A distribuição de probabilidade dos fótons em um estado coerente é uma distribuição Poissoniana

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (3.32)$$

E o número médio de fótons é dado por:

$$\bar{n} = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger \hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \quad (3.33)$$

Para mostrar que estados coerentes não são ortogonais, fazemos o produto escalar entre dois estados coerentes, dados por

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{D}^\dagger(\beta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (3.34)$$

Através das relações (3.25) e (3.19), com $e^{-\alpha^* \hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$, obtemos:

$$\langle 0|\hat{D}^\dagger(\beta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-|\beta|^2/2} e^{-|\alpha|^2/2} e^{\beta^* \alpha}. \quad (3.35)$$

Logo,

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-|\beta|^2/2} e^{-|\alpha|^2/2} e^{\beta^* \alpha}, \quad (3.36)$$

o que nos leva a

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (3.37)$$

De onde vemos que estados coerentes são aproximadamente ortogonais para $|\alpha - \beta| \gg 1$.

Os estados coerentes formam um conjunto super-completo, com relação de completude dada por

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \mathbb{I}. \quad (3.38)$$

3.2.4 Estados comprimidos

Estados comprimidos são estados de mínima incerteza, com incerteza reduzida em uma quadratura ao custo de um aumento na incerteza da outra. Eles podem ser gerados através do operador de compressão

$$\hat{S}(\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon (\hat{a}^\dagger)^2\right), \quad (3.39)$$

onde $\varepsilon = r e^{2i\phi}$.

O operador de compressão atenua uma componente de amplitude complexa (rotacionada) e amplifica a outra. O grau de atenuação e amplificação é determinado por $r = |\varepsilon|$, que é chamado de fator de compressão.

O estado comprimido $|\alpha, \varepsilon\rangle$ é obtido pela compressão do vácuo seguida de um deslocamento

$$|\alpha, \varepsilon\rangle = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\varepsilon) |0\rangle. \quad (3.40)$$

3.2.5 Estados de Gato de Schrödinger

Dodonov et al. (10) foram os primeiros a introduzir os chamados estados gatos de Schrödinger, em homenagem ao famoso experimento idealizado por Schrödinger, no qual haveria a possibilidade de um gato existir em dois estados distinguíveis, denominados vivo e morto. Esses estados foram inicialmente chamados de estados coerentes pares e ímpares como veremos adiante. Os estados gatos de Schrödinger são definidos como uma superposição de dois estados coerentes com fases opostas, descritos por:

$$|\psi_{cat}\rangle = N^{\frac{1}{2}}(|\alpha\rangle + e^{i\theta} |-\alpha\rangle), \quad (3.41)$$

com a constante de normalização dada por:

$$N = \frac{1}{2} [1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \theta]^{-1}. \quad (3.42)$$

Expandindo esse estado na base dos estados de Fock, obtemos:

$$|\psi_{cat}\rangle = N^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n \exp^{i\theta}] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!|n\rangle}}. \quad (3.43)$$

Notamos que, a partir da equação (3.43), esses estados são superposições de estados de número par ou ímpar apenas, quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, respectivamente. A distribuição de probabilidade do número de fótons neste caso é:

$$P_n(\alpha, \theta) = |\langle n|\alpha, \theta\rangle|^2 = \frac{[1 + (-1)^n \cos \theta] |\alpha|^{2n}}{1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos(\theta)n!}. \quad (3.44)$$

3.3 Dispositivos Ópticos

Dispositivos ópticos são utilizados para manipular a luz e, além disso, podem produzir efeitos quânticos úteis, por exemplo, para a construção do computador quântico óptico e geração de superposição de estados coerentes, como é o caso do divisor de feixe, que é um dispositivo óptico linear.

3.3.1 Divisor de Feixe

Um divisor de feixe é representado pela operação unitária:

$$\hat{B} = \exp[\theta(a^\dagger b - ab^\dagger)], \quad (3.45)$$

onde $a(a^\dagger)$ e $b(b^\dagger)$ são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, para cada modo de entrada.

Assim, quando dois estados coerentes $|\alpha\rangle_1$ e $|\beta\rangle_2$ incidem em um divisor de feixe 50/50 ($\theta = \pi/4$) o estado resultante de saída é:

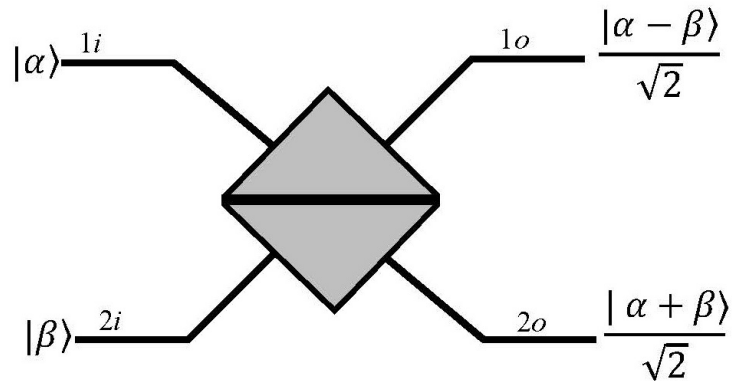
$$|\alpha, \beta\rangle_{1,2} \longrightarrow \left| \frac{(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}}, \frac{(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}} \right\rangle_{1,2}. \quad (3.46)$$

E quando os dois campos de entrada são comprimidos de acordo com (19), o estado de saída a partir de um divisor de feixe é:

$$\hat{B}\hat{S}_1(\epsilon_a)\hat{S}_2(\epsilon_b)|0,0\rangle. \quad (3.47)$$

onde $\hat{S}(\epsilon)$ é o operador de compressão visto em 3.2.4.

Figura 3 – Representação de um divisor de feixe 50/50 ($\theta = \frac{\pi}{4}$), mostrando as duas entradas e as duas saídas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 Detecção Homódina

A detecção homódina é uma ferramenta fundamental para os estudos das propriedades quânticas da luz. Ela pode ser condicionada à preparação de um certo estado quântico de um sistema em análise e permite a observação de fenômenos de óptica quântica sem o análogo clássico.

Esse tipo de detecção pode ser usada para se medir as variâncias das quadraturas, assim como o espaço de fase para a função de Wigner. Uma boa revisão sobre a eficiência dessa técnica pode ser vista em (6). Um outro exemplo de detecção é a detecção por cavidades, também conhecida como rotação da elipse de ruído (35).

A detecção homódina se destaca por sua grande utilização envolvendo medidas de ruído, onde emprega o batimento entre um campo intenso, denominado de oscilador local, e o campo de interesse. Ambos os campos devem possuir uma relação bem definida de frequência e fase, combinados em um divisor de feixe. A mecânica quântica prediz que as pequenas flutuações de amplitude e fase do campo de interesse correspondem às flutuações do oscilador local (38).

A limitação de sua utilização se deve às características do oscilador local, que se assemelha às características do campo em estudo. Estas características são: frequência, fase, perfil e modo espectral, ainda que, a intensidade do oscilador local deve ser maior do que a intensidade do campo de interesse (26).

A medida é realizada usando um interferômetro de Mach Zehnder, no qual, em um dos braços é transmitido o campo a ser estudado e pelo outro braço, um campo intenso, denominado de oscilador local, que é o responsável por variar a fase relativa. Após a incidência

dos dois campos, cada feixe é guiado para um fotodetector (usualmente a resposta é linear). As intensidades I_1 e I_2 são medidas, em seguida processadas, e finalmente subtraídas uma da outra. A diferença $I_{21} = I_2 - I_1$ é a quantidade de interesse, que contém o termo de interferência entre esses dois campos. Assumimos que as medidas são proporcionais ao número de fótons n_1 e n_2 em cada detector.

Os operadores em cada modo são dados por:

$$\hat{a}_1 = 2^{-1/2}(\hat{a} - \alpha_{LO}), \quad (3.48)$$

e

$$\hat{a}_2 = 2^{-1/2}(\hat{a} + \alpha_{LO}), \quad (3.49)$$

onde \hat{a} é operador de aniquilação do sinal e α_{LO} é a amplitude complexa do oscilador local (LO). A diferença I_{21} é proporcional a diferença do número de fótons (assumindo uma eficiência quântica perfeita), dada por:

$$\hat{n}_{21} = \hat{n}_2 - \hat{n}_1 = \alpha_{LO}^* \hat{a} + \alpha_{LO} \hat{a}^\dagger, \quad (3.50)$$

e

$$\hat{n}_{21} = 2^{1/2} |\alpha_{LO}| \hat{q}_\theta, \quad (3.51)$$

no qual \hat{q}_θ é a componente da quadratura medido pelo detector homódino. A fase de referência θ é fornecida pelo oscilador local e pode ser variada ajustando o oscilador local utilizado. Um método experimental para encontrar o dimensionamento da componente da quadratura na diferença de corrente I_{21} é manter um registro da corrente da soma, porque a soma de I_2 e I_1 é proporcional a $|\alpha_{LO}|^2$. Este registro pode ser experimentalmente importante porque a intensidade do oscilador local é geralmente uma quantidade desconhecida (24).

A interferência que ocorre na recombinação dos feixes deve ser suficiente apenas para detectar as variações na intensidade devido às flutuações de fase, mantendo o seu valor médio pouco alterado.

4 OS ESTADOS GKP

4.1 Introdução

A informação quântica pode ser codificada usando sistemas discretos ou contínuos. A maioria dos esquemas de computação quântica propõe qubits codificados em sistemas de dois níveis, como o spin do elétron ou a polarização do fóton, outros exploram a utilização de um sistema infinito, tal como um oscilador harmônico.

Gottesman, Kitaev e Preskill descrevem códigos tolerantes a erros que protegem um estado de um sistema quântico de dimensão finita, que está codificado em um sistema de dimensão infinita, onde esses códigos são úteis para a implementação de computação quântica e protocolos de comunicação quântica (15).

Neste capítulo, será feita uma análise sobre a codificação do qubit no oscilador harmônico quântico utilizado por GKP. Além disso, detalharemos o esquema de geração de estados GKP apresentado por Vasconcelos et al. em (34).

4.2 Codificação do Qubit no Oscilador

Uma das limitações para implementação do computador quântico utilizando as variáveis contínuas é que os autoestados posição $|x\rangle$ e momento $|p\rangle$ não possui significado físico, ou seja, não são normalizáveis. Porém existem várias maneiras de definir autoestados aproximados, mas uma das maneiras mais simples é construir uma função de onda gaussiana normalizada com o pico desta gaussiana em torno do valor central da variável posição, de acordo com (23). Assim,

$$|\psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt[4]{\pi\Delta^2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\Delta^2}\right] |y\rangle, \quad (4.1)$$

e para a variável de momento,

$$|\psi(p)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt[4]{\frac{\pi}{\Delta^2}}} \exp\left[-\frac{(s-p)^2\Delta^2}{2\hbar^2}\right] |s\rangle, \quad (4.2)$$

onde y e s são os autovalores que, respectivamente, correspondem aos autoestados posição e momento representados por $|y\rangle$ e $|s\rangle$, podendo assumir valores inteiros.

4.3 Esquema GKP

Na proposta GKP, o qubit é codificado no espaço de dimensão infinita de um oscilador, de tal forma que se pode proteger o qubit contra mudanças arbitrárias e pequenas das variáveis canônicas x e p . Os estabilizadores geradores do espaço de Hilbert bidimensional em um espaço de Hilbert de dimensão infinita, com variáveis canônicas x e p , são dados por (27):

$$S_x = \exp(2ix\sqrt{\pi}) \quad (4.3)$$

$$S_p = \exp(-2ip\sqrt{\pi}), \quad (4.4)$$

onde estes estabilizadores são simplesmente operadores de mudanças de x para p , e se seus autovalores são 1, então os valores permitidos de x e p são múltiplos inteiros de $\sqrt{\pi}$.

Gottesman et al. proporam em (15) um sistema robusto de dimensão finita utilizando as variáveis contínuas x e p com estados não-normalizáveis, embora na prática sejam utilizados estados aproximados normalizáveis. Eles codificaram erros utilizando estas variáveis fazendo $x \rightarrow x + \delta$ para qualquer $\delta \in \mathbb{R}$, e esse código é escrito de acordo com os estados

$$|\bar{0}\rangle = \sum_{s=-\infty}^{\infty} |2s\alpha\rangle \quad (4.5)$$

$$|\bar{1}\rangle = \sum_{s=-\infty}^{\infty} |(2s+1)\alpha\rangle, \quad (4.6)$$

onde o estado $|\bar{0}\rangle$ forma um envelope de funções delta ao longo do eixo x com um espaçamento de 2α entre as funções δ , e o estado $|\bar{1}\rangle$ possui a mesma estrutura com as funções δ deslocados de uma distância α ao longo do eixo p . A transformada de Fourier transforma esses estados em pentes de funções delta de espaço p e separação $2\pi/\alpha$. Uma medida ao longo do eixo x pode produzir qualquer dos dois estados sendo um múltiplo par ou ímpar de α , $|\bar{0}\rangle$ ou $|\bar{1}\rangle$, respectivamente. Quando o erro de translação δ é menor que $\alpha/2$, pode-se inferir o resultado da medição do estado.

Os estados GKP são uma soma de um número infinito de funções δ definidos por envelope gaussiano de largura k^{-1} , e através da aproximação dos autoestados posição e momento, as funções δ tornam-se uma soma de Gaussianas. Por conseguinte, a codificação do estado

bidimensional é escrita como:

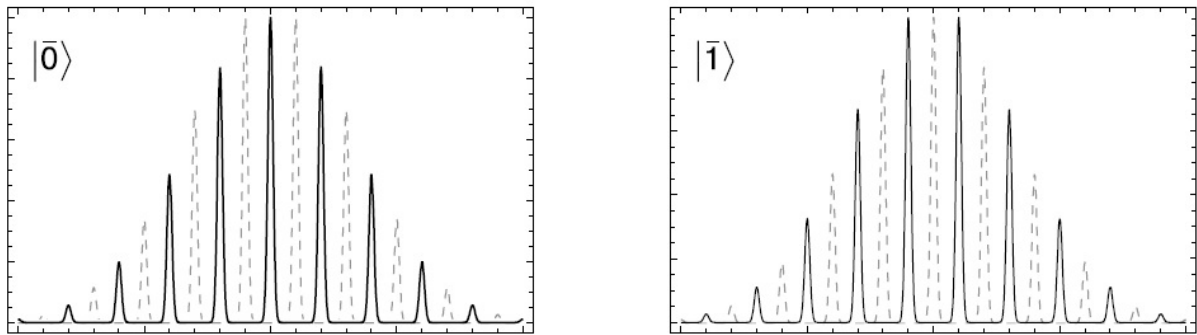
$$|\bar{0}\rangle = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp(-2k^2s^2\alpha^2) T(2s\alpha) |\psi(0)\rangle \quad (4.7)$$

$$|\bar{1}\rangle = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2(2s+1)^2\alpha^2}{2}\right] T[(2s+1)\alpha] |\psi(0)\rangle. \quad (4.8)$$

onde $T(x)$ é um operador de translação. Esse operador, de acordo com a mecânica quântica, é linear e unitário, e também desloca partículas e campos por uma quantidade x . Sua maior atuação está diretamente relacionada com o operador de momento.

As amplitudes de $|\bar{0}\rangle$ e $|\bar{1}\rangle$ são mostradas na figura 4.

Figura 4 – Código GKP para $|\bar{0}\rangle$ e $|\bar{1}\rangle$, respectivamente.



Fonte: Extraído de (23).

4.4 Geração de Estados GKP

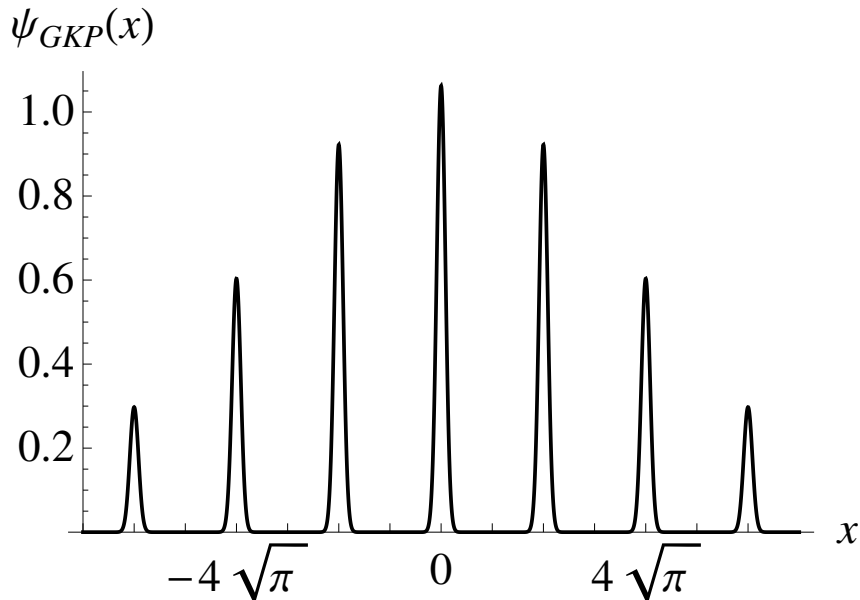
A função de onda na quadratura x do estado GKP $|\bar{0}\rangle$ aproximado tem uma série de picos Gaussianos de largura Δ , contidos em um envelope Gaussiano maior de largura $1/k$ e é dado por (34):

$$\psi_{GKP}(x) = N \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(2sk\sqrt{\pi})^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2s\sqrt{\pi}}{\Delta}\right)^2}, \quad (4.9)$$

onde N é um fator de normalização. Essa função é mostrada na Figura 5. Se Δ e k são pequenos, então ψ_{GKP} será uma aproximação melhor de um estado GKP ideal, e a função de onda terá muitos picos Gaussianos. O desvio de um estado GKP ideal corresponde a probabilidade diferente de zero que o estado sofreu com erros que causam deslocamentos nas variáveis x ou p . Se todos os deslocamentos são menores do que $\sqrt{\pi}/6$, os erros não vão aumentar ao longo do

protocolo de correção de erros. Estados GKP com $\Delta < 0.15$ e $k < 0.15$ terão uma probabilidade maior do que 0.99 de ser livre de erros de deslocamento maior do que $\sqrt{\pi}/6$.

Figura 5 – Função de onda na quadratura x do estado lógico $|\bar{0}\rangle$ com $\Delta = k = 0.15$.



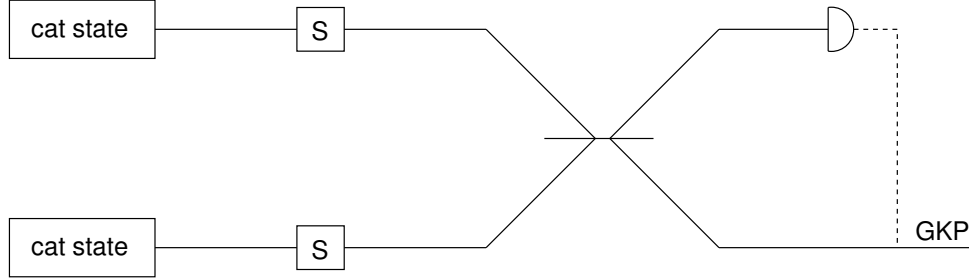
Fonte: Extraído de (34).

Um esquema de geração de um estado GKP aproximado foi proposto em (34), usando superposições de estados coerentes (gatos de Schrödinger), dispositivos ópticos lineares, compressão e detecção homódina. A ideia básica é: em primeiro lugar preparamos dois estados gato de Schrödinger, cada um com dois picos Gaussianos na sua função de onda na quadratura x , em seguida, comprimimos os dois estados gatos, para reduzir a largura dos picos Gaussianos. O próximo passo é interferir os dois estados usando um divisor de feixe. Por último realizamos uma detecção homódina em uma das portas de saída do divisor de feixe. Dependendo do resultado da medida, temos um estado GKP aproximado com três picos Gaussianos na outra porta de saída. Este procedimento é repetido para produzir estados com maior número de picos Gaussianos. A Figura 6 mostra a proposta de maneira esquemática.

De acordo com os conceitos sobre os estados de gato de Schrödinger vistos na Seção 3.2.5, um estado de gato é definido como a superposição de dois estados coerentes de fases opostas, dado por:

$$|\psi_{cat}\rangle = \frac{|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 + e^{-2\alpha^2})}}. \quad (4.10)$$

Figura 6 – Esquema de geração de estado GKP. Em cada modo de entrada tem um estado gato, que será comprimido por uma quantidade s , e enviado para o divisor de feixe. Uma detecção homódina é realizada em um dos modos de saída e, dependendo do resultado da medição, um estado GKP aproximado é obtido na outra saída.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse estado, na quadratura x , toma a seguinte forma:

$$\psi_{cat}(x, \alpha) = G(x, 1, -\sqrt{2}\alpha) + G(x, 1, \sqrt{2}\alpha), \quad (4.11)$$

onde $G(x, V, \mu) = e^{-(x-\mu)^2/2V}$ é uma função Gaussiana de largura \sqrt{V} e centro do pico em μ , de modo que o estado de vácuo não-normalizado é igual a $G(x, 1, 0)$. Utilizamos $\tilde{\psi}$ para indicar que um estado não está normalizado. Após comprimir o estado em (4.11) por uma quantidade ζ , obtemos:

$$\tilde{\psi}_{sqcat}(x, \alpha, \zeta) = G(x, e^{-2\zeta}, -\sqrt{2}\alpha e^{-\zeta}) + G(x, e^{-2\zeta}, \sqrt{2}\alpha e^{-\zeta}). \quad (4.12)$$

Se escolhermos $\alpha = \sqrt{2}^{m-1} \sqrt{\pi} e^{\zeta}$, onde m é um número inteiro maior ou igual a 1, rescrevemos a equação (4.12) como:

$$\tilde{\psi}_{sqcat}(x, \sqrt{2}^{m-1} \sqrt{\pi} e^{\zeta}, \zeta) = G(x, e^{-2\zeta}, -\sqrt{2}^m \sqrt{\pi}) + G(x, e^{-2\zeta}, \sqrt{2}^m \sqrt{\pi}). \quad (4.13)$$

Vamos supor que temos dois estados dados por (4.13), um no modo 1 e outro no modo 2. Quando esses estados se encontram no divisor de feixe de transmissividade $1/2$ e a quadratura no modo 2 é medida, obtendo $p_2 = 0$, o estado não normalizado no modo 1, quando escolhermos $m = 1$, é:

$$\tilde{\beta}(x_1, \zeta, m = 1) = G(x_1, e^{-2\zeta}, -2\sqrt{\pi}) + 2G(x_1, e^{-2\zeta}, 0) + G(x_1, e^{-2\zeta}, 2\sqrt{\pi}). \quad (4.14)$$

Esse estado é similar ao estado GKP lógico 0, mas com apenas três picos. Chamaremos esse estado de estado binomial de ordem 1.

Um estado binomial de ordem m é dado por:

$$\tilde{\beta}(x, \zeta, m) = \sum_{n=0}^{2^m} \binom{2^m}{n} G[x, e^{-2\zeta}, 2\sqrt{\pi}(n - 2^{m-1})]. \quad (4.15)$$

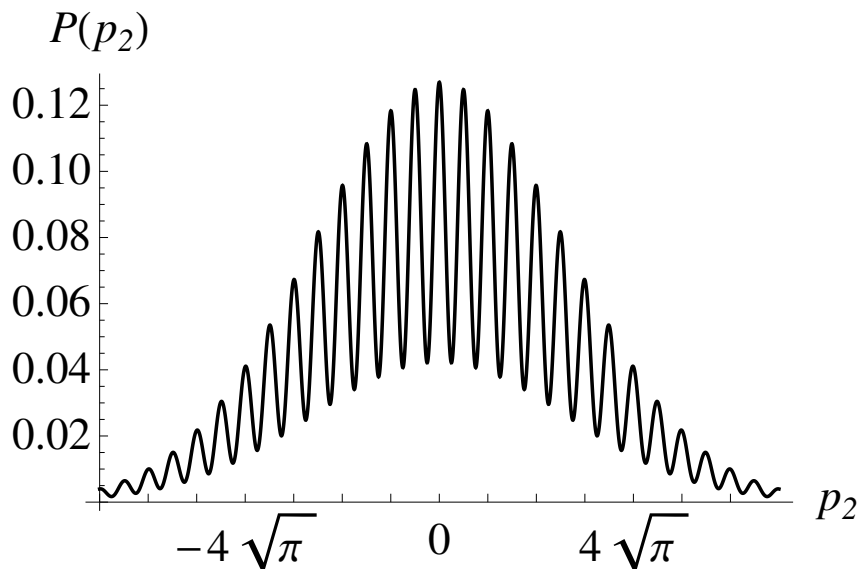
Esse estado é uma série de picos Gaussianos na quadratura x , separados por uma distância de $2\sqrt{\pi}$. As amplitudes dos picos são dadas pela (2^m) -ésima linha do triângulo de Pascal. Se tivermos dois estados binomiais de ordem m e usarmos esses estados nos modos 1 e 2 do esquema de geração, obtemos:

$$\sum_{q=0}^{2^{m+1}} \binom{2^{m+1}}{q} G[x, e^{-2\zeta}, 2\sqrt{\pi}(q - 2^m)]. \quad (4.16)$$

Esse estado é equivalente a $\tilde{\beta}(x, \zeta, m+1)$, com exceção de que os picos Gaussianos são separados por uma distância de $\sqrt{2}\sqrt{\pi}$ e não de $2\sqrt{\pi}$. Para obtermos a separação de $2\sqrt{\pi}$, basta iniciar o processo com estados binomiais espaçados de $2\sqrt{2}\sqrt{\pi}$. À medida que m aumenta, os estados binomiais gerados se aproximam de $\psi_{GKP}(x)$.

A Figura 7 mostra a probabilidade de medir um determinado valor $p_2 = R$, como uma função de R , ao gerar o estado binomial $m = 1$ usando dois estados gatos de Schrödinger. Quando medimos $R = 0$, obtemos a função de onda mostrada na Figura 8. A largura dos picos Gaussianos da Figura 8 são determinados pelo grau de compressão aplicado nos estados iniciais. O estado binomial $m = 3$ é mostrado na Figura 9.

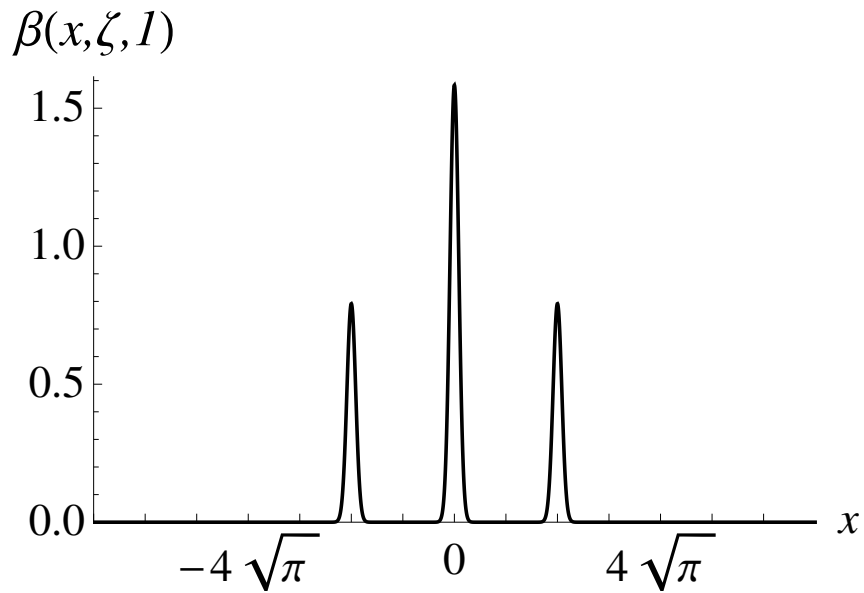
Figura 7 – Probabilidade de medir $p_2 = R$ em função de R ao gerar o estado $\tilde{\beta}(x, \zeta, 1)$. Nesse caso, $\alpha = \sqrt{\pi}e^\zeta$ e $\zeta = 1,9$. Esse valor de ζ corresponde a -16 dB de compressão em experimentos convencionais.



Fonte: Extraído de (34).

Para criar um estado binomial de ordem m é necessário usar pelo menos 2^m estados de gato de Schrödinger. Como precisamos medir $p_2 = 0$ cada vez que realizamos uma medida, o

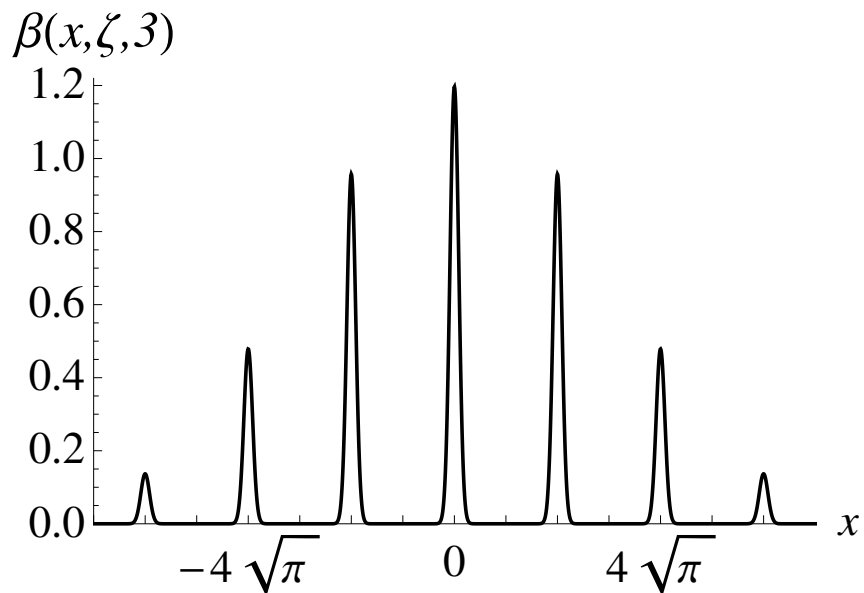
Figura 8 – Função de onda na quadratura x para o estado $\beta(x, \zeta, 1)$, com $\alpha = \sqrt{\pi}e^\zeta$ e $\zeta = 1,9$.



Fonte: Extraído de (34).

número de estados necessários provavelmente será muito maior.

Figura 9 – Estado binomial $\beta(x, \zeta, 3)$, uma aproximação do estado GKP lógico 0. Para esse caso temos novamente $\zeta = 1,9$



Fonte: Extraído de (34).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

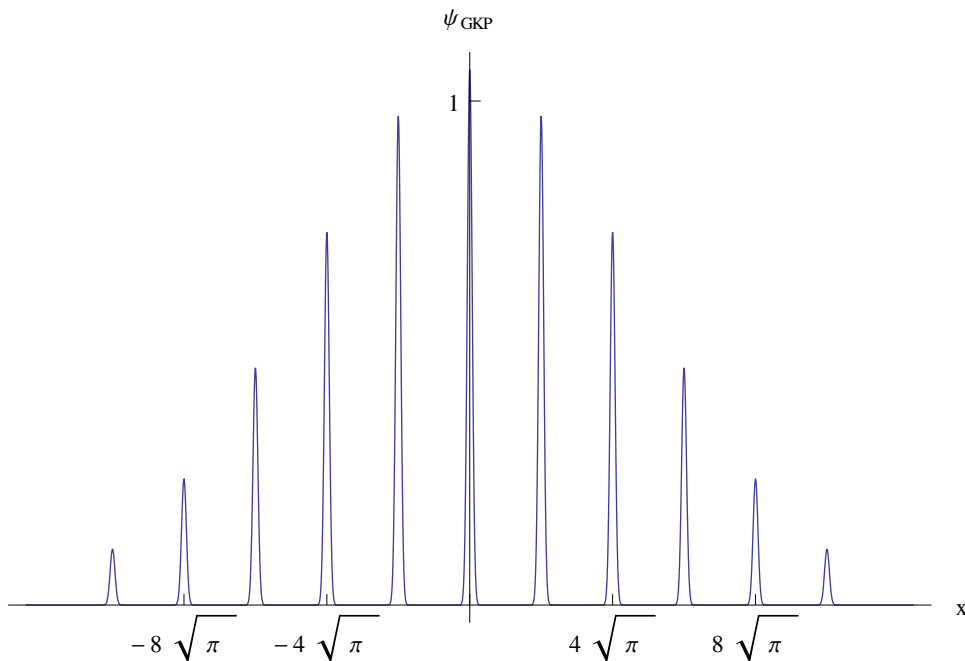
5.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma análise detalhada sobre o cálculo da fidelidade para os dois estados mencionados no capítulo anterior, de acordo com (29).

5.2 Análise da Fidelidade

Como visto na Seção 4.4, a função de onda na quadratura x para o estado GKP lógico 0 possui uma série de picos Gaussianos com largura Δ , contido num envelope Gaussiano maior de comprimento $1/k$, dado pela equação (4.9). Na Figura 10 vemos o gráfico de $\psi_{GKP}(x)$ para $\Delta = k = 0,12$.

Figura 10 – Função de onda do estado GKP lógico 0 com $\Delta = k = 0,12$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

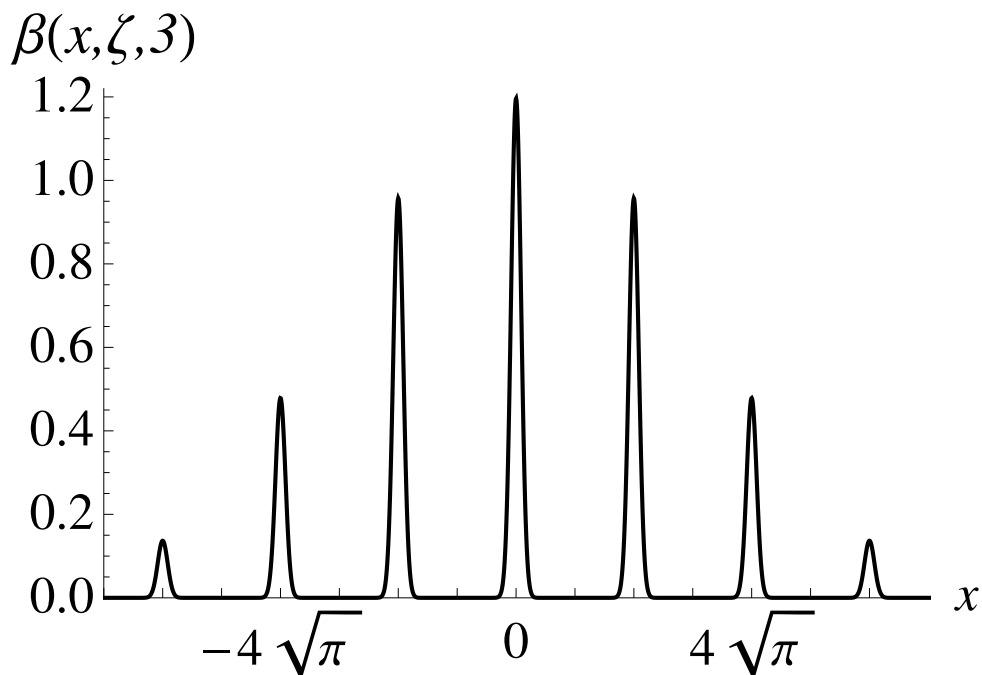
Também na seção 4.4, vimos que o estado gerado pelo esquema proposto em (34) tem função de onda $\beta(x, \zeta, m)$ dada por

$$\beta(x, \zeta, m) = N \sum_{q=0}^{2^m} \binom{2^m}{q} \exp \left[-\frac{\left(x - 2\sqrt{\pi}(q - 2^{(m-1)}) \right)^2}{2e^{-2\zeta}} \right], \quad (5.1)$$

onde N é uma constante de normalização. Na Figura 11, mostramos a função de onda para $\beta(x; 1, 9; 3)$, que representa uma aproximação do estado 0 lógico GKP. Para gerar este estado, precisamos de pelo menos oito estados gato, cada um com $\alpha = 2\sqrt{\pi}e^\zeta$.

Para comparar o estado gerado (5.1) com o estado ideal (4.9), calcularemos a fidelidade entre os dois. Usaremos a fidelidade por dois motivos: primeiro, porque o conceito de fidelidade é intuitivo e, segundo, porque é uma medida matemática usada com muita frequência na literatura.

Figura 11 – Função de onda $\beta(x; \zeta; 3)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

A fidelidade entre dois estados puros é definida como

$$F = |\langle \phi | \psi \rangle|. \quad (5.2)$$

Para o caso estudado aqui, quando se tem um sistema contínuo, a fidelidade é dada por

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{GKP}(x) \times \beta(x, \zeta, m) dx. \quad (5.3)$$

Reescrevendo em função dos dois estados, temos:

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{2^m} \binom{2^m}{q} e^{-\frac{1}{2}(2sk\sqrt{\pi})^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2s\sqrt{\pi}}{\Delta}\right)^2 - \frac{(x-2\sqrt{\pi}(q-2^{(m-1)}))^2}{2e^{-2\zeta}}} dx. \quad (5.4)$$

Vamos explorar a fidelidade calculada na equação (5.4) para valores realísticos de compressão e número de interação m . É importante ter em mente que a escolha de m reflete na quantidade de recursos necessários para a geração de um estado GKP, já que para gerar um estado de ordem m precisamos de 2^m estados gato de Schrödinger.

Definido o estado binomial através de m , a fidelidade resultante calculada dependerá de ζ , Δ e k . Vamos escolher $m = 3$ e analisar a fidelidade em função de Δ e k . Isso ajudará a determinar a quantidade de compressão ζ , no qual obteremos o melhor resultado de redução da largura dos picos gaussianos, fazendo Δ e k pequenos, obtendo uma melhor aproximação de um estado GKP ideal.

Como mostrado em (14), os estados GKP com $\Delta \leq 0,15$ e $k \leq 0,15$ tem probabilidade igual ou superior a 0,99 de ser livre de erros de deslocamento maiores do que $\sqrt{\pi}/6$, em ambas as quadraturas. Esses limites para Δ e k serão também considerados na análise da fidelidade.

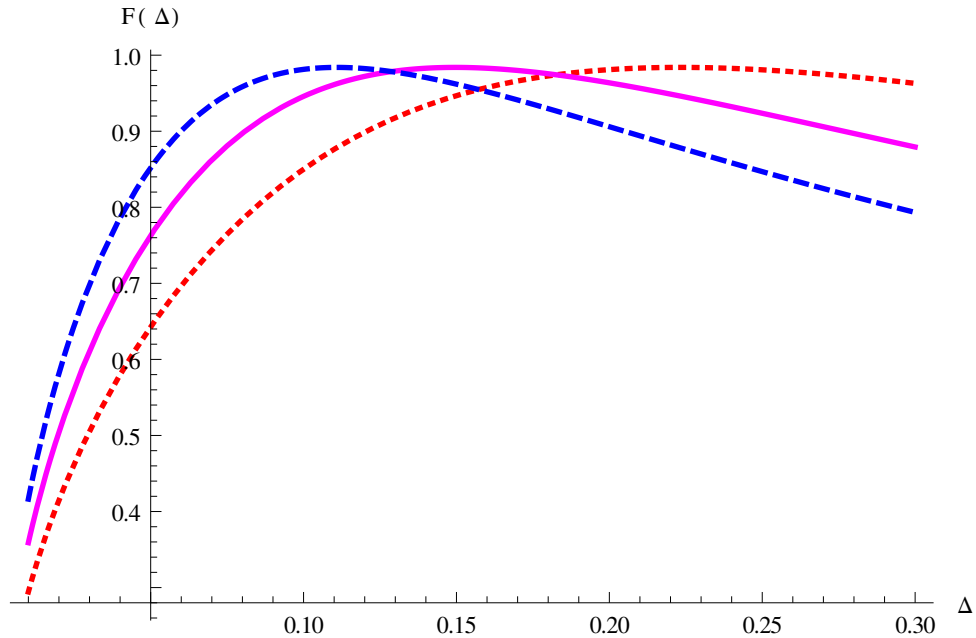
Na Figura 12, apresentamos os nossos resultados do cálculo da fidelidade em função de Δ , com k fixo e igual a 0,15, para três valores diferentes de ζ . A Figura 13 mostra a fidelidade em função de k , com Δ igual a 0,15, para os mesmos valores de ζ . Pelo gráfico 12, percebemos que ao escolher um valor de ζ mais alto, nos afastamos do intervalo desejado de $\Delta \leq 0,15$. Com isso, consideraremos a partir de agora os valores $\zeta = 1,5$ e $\zeta = 1,9$.

Vamos agora olhar a Figura 13. Entre os dois casos mencionados anteriormente, observamos que o caso $\zeta = 1,9$ nos dá uma maior fidelidade do que o caso em que $\zeta = 1,5$. Logo, o estado $\beta(x; 1,9; 3)$ é o estado que apresenta os melhores valores de fidelidade.

O gráfico da fidelidade F como uma função de Δ e k é apresentado na Figura 14. Para esse gráfico, usamos o estado binomial $\beta(x; 1,9; 3)$. O gráfico mostra uma grande perda de fidelidade para valores menores de Δ e k . A fidelidade tem valores mais elevados para um Δ próximo de 0,15 e $0,15 \leq k \leq 0,20$. A fidelidade $F(\Delta, k) = F(0,15; 0,15) = 0,9839$, enquanto $F(0,15; 0,20) = 0,9996$. Como discutido anteriormente, temos um interesse maior em valores de Δ , $k \leq 0,15$, para garantir um esquema de computação GKP livre de erros de deslocamento maiores do que $\sqrt{\pi}/6$. Podemos notar que o esquema aqui considerado é, a princípio, capaz de gerar um estado que tem fidelidade acima de 0,9 com um estado ideal e que garante um computador quântico com erros abaixo do limite desejado. A Figura 15 é uma projeção da Figura 14.

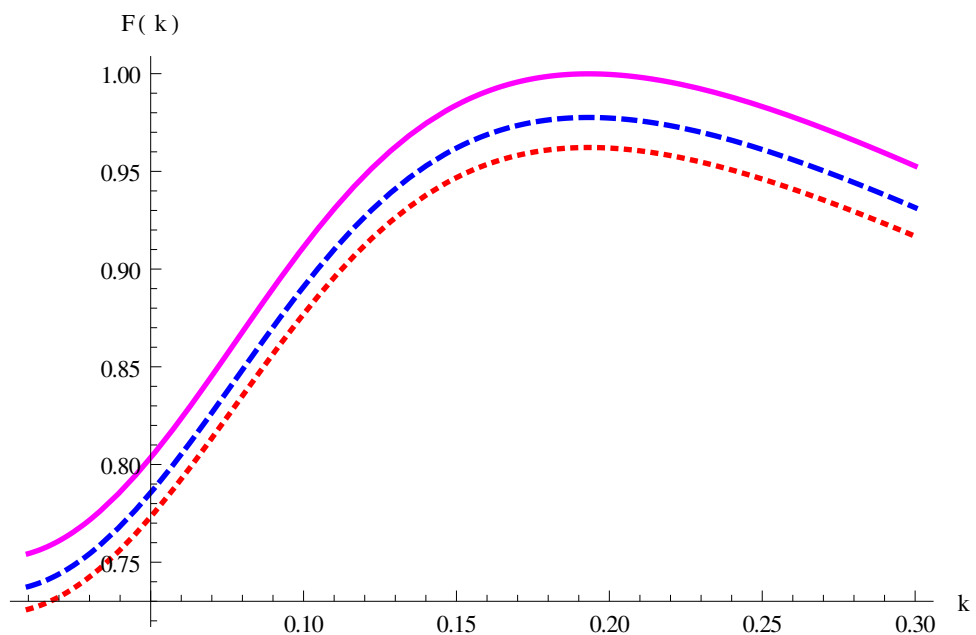
No nosso último gráfico, mostrado na Figura 16, verificamos como a fidelidade

Figura 12 – Fidelidade entre ψ_{GKP} e $\beta(x, \zeta, 3)$ para (a) $\zeta = 1,5$ (curva pontilhada), (b) $\zeta = 1,9$ (curva contínua) e (c) $\zeta = 2,2$ (curva tracejada). Para todos os casos a fidelidade está em função de Δ e $k = 0,15$.



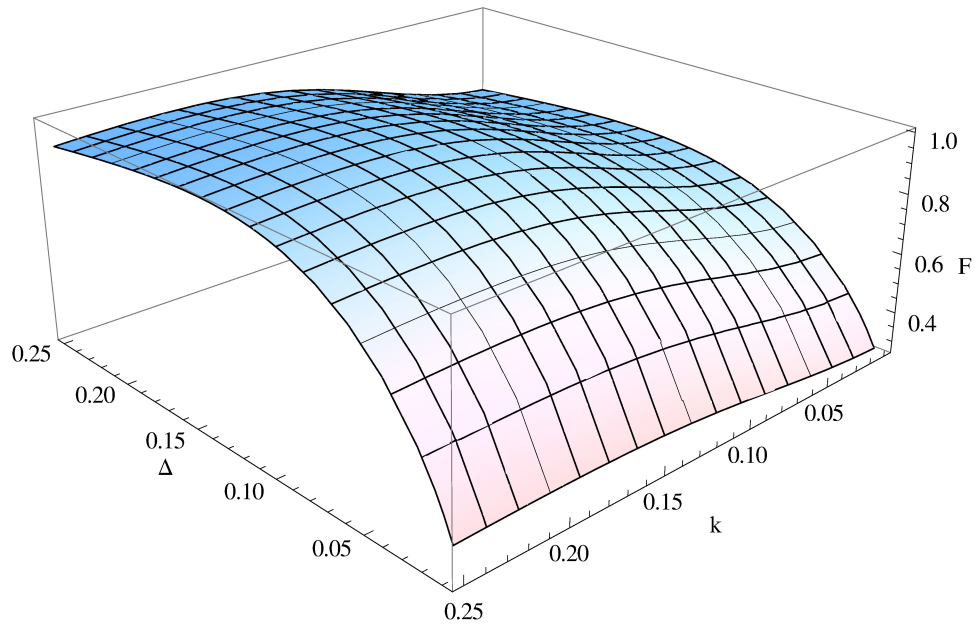
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – Fidelidade entre ψ_{GKP} e $\beta(x, \zeta, 3)$ para (a) $\zeta = 1,5$ (curva pontilhada), (b) $\zeta = 1,9$ (curva contínua) e (c) $\zeta = 2,2$ (curva tracejada). Para todos os casos a fidelidade está em função de k e $\Delta = 0,15$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

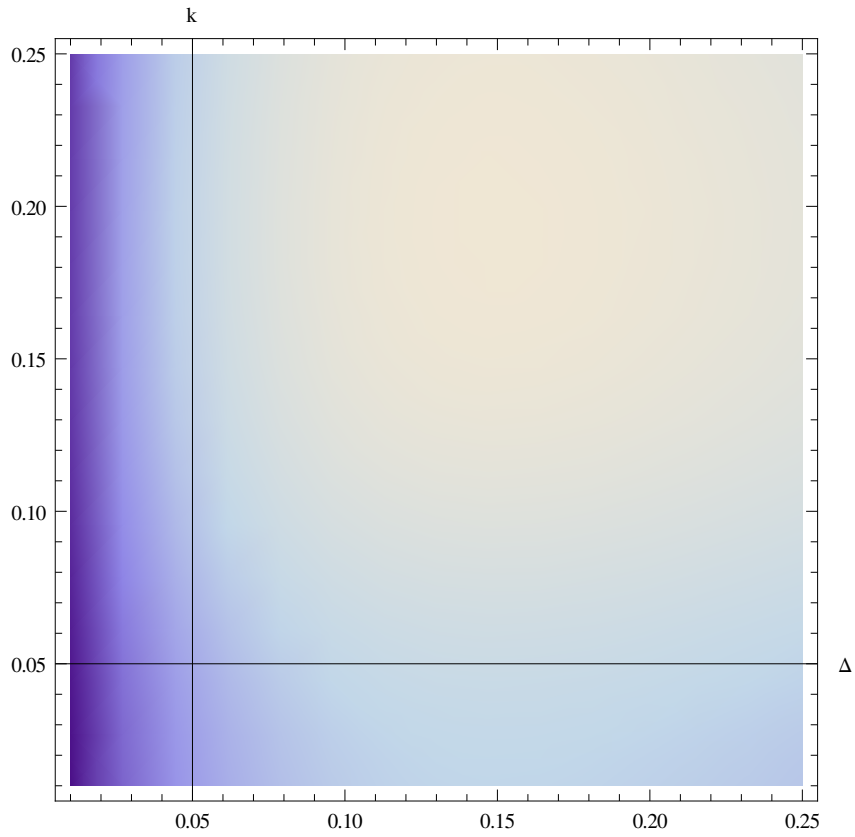
Figura 14 – Fidelidade F entre ψ_{GKP} e $\beta(x; 1, 9; 3)$ como uma função de Δ e k .



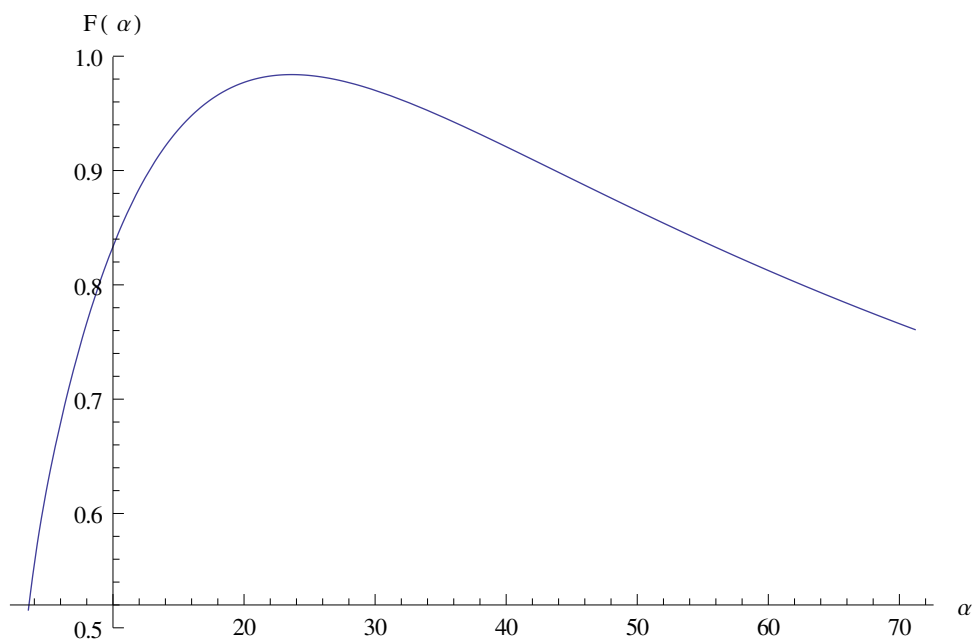
Fonte: Elaborada pelo autor.

varia em função da amplitude do estado coerente, α , do estado gato de Schrödinger descrito na Equação (4.10). Analisando essa figura, temos uma ideia de como uma perda de fótons afetaria a fidelidade do estado GKP gerado, $\beta(x; 1, 9; 3)$. O valor máximo da fidelidade $F \approx 0,9839$ ocorre para $\alpha \approx 24$. Esse valor máximo cai para $F = 0,9480$ para $\alpha = 16$, mostrando que o esquema considerado tem uma certa tolerância à perda de fótons.

Figura 15 – Projeção da Figura 14



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Fidelidade F entre ψ_{GKP} e $\beta(x; 1, 9; 3)$ como uma função de α .

Fonte: Elaborada pelo autor.

6 CONCLUSÃO

Utilizamos simulação numérica para investigar o desempenho do gerador de estado GKP descrito em Phys. Rev. A, 64, 012310 (2001). Fomos capazes de atestar que o estado mais próximo ao ψ_{GKP} é o estado binomial gerado $\beta(x; 1, 9; 3)$. Analisamos o comportamento da fidelidade F entre o estado gerado $\beta(x; 1, 9; 3)$ e ψ_{GKP} como função dos parâmetros Δ e k do estado ψ_{GKP} . Os resultados mostram que os maiores valores de fidelidade são para $\Delta \approx 0,15$ e $0,15 \leq k \leq 0,20$. Apesar do fato de que os maiores valores de F se encontram para valores de k superiores a $0,15$, escolhemos $k \approx 0,15$, para manter o esquema de computação quântica livre de erros de deslocamento maiores do que $\sqrt{\pi}/6$. Por último, verificamos que o esquema de geração em consideração é tolerante a perda de fótons.

REFERÊNCIAS

- 1 BELL, J. S. On the einstein-podolsky-rosen paradox. **Physics**, v. 1, n. 3, p. 195–200, 1964.
- 2 CERF, N. J.; GRANGIER, P. From quantum cloning to quantum key distribution with continuous variables: a review. **J. Opt. Soc. Am. B**, v. 24, n. 2, p. 324–334, 2007.
- 3 CHUANG, I. L.; YAMAMOTO, Y. Simple quantum computer. **Phys. Rev. A**, v. 52, n. 5, p. 3489–3496, 1995.
- 4 D’ARIANO, G.; MACCHIAVELLO, C.; MACCONE, L. Quantum computations with polarized photons. **Fortschr. Phys.**, v. 48, n. 5-7, p. 573–577, 2000.
- 5 DEUTSCH, D. Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer. **Proc. R. Soc. London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, London, v. 400, n. 1818, p. 97–117, 1985.
- 6 DIRAC, P. A. M. **The Principles of Quantum Mechanics**. Number 27. Oxford: Oxford university press, 1981.
- 7 DIVINCENZO, D. P. Quantum computation. **Science**, v. 270, n. 5234, p. 255–261, 1995.
- 8 DODONOV, V. V.; MALKIN, I. A.; MAN’KO, V. I. Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator. **Physica**, v. 72, n. 3, p. 597–615, 1974.
- 9 DODONOV, V. V. *et al.* Energy-sensitive and “classical-like” distances between quantum states. **Phys. Scr.**, v. 59, n. 2, p. 81, 1999.
- 10 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **Int. J. Theor. Phys.**, v. 21, n. 6, p. 467–488, 1982.
- 11 FOX, M. **Quantum Optics: An Introduction**. Oxford: Oxford university press, 2006.
- 12 GLANCY, S.; KNILL, E. Error analysis for encoding a qubit in an oscillator. **Phys. Rev. A**, v. 73, n. 1, p. 012325, 2006.
- 13 GOTTESMAN, D.; KITAEV, A.; PRESKILL, J. Encoding a qubit in an oscillator. **Phys. Rev. A**, v. 64, n. 1, p. 012310, 2001.
- 14 HOWELL, J. C.; YEAZELL, J. A. Reducing the complexity of linear optics quantum circuits. **Phys. Rev. A**, v. 61, n. 5, p. 052303, 2000.
- 15 HOWELL, J. C.; YEAZELL, J. A. Quantum computation through entangling single photons in multipath interferometers. **Phys. Rev. Lett.**, v. 85, n. 1, p. 198–201, 2000.
- 16 JOZSA, R. Fidelity for mixed quantum states. **J. Mod. Optics**, v. 41, n. 12, p. 2315–2323, 1994.
- 17 KIM, M. S. *et al.* Entanglement by a beam splitter: Nonclassicality as a prerequisite for entanglement. **Phys. Rev. A**, v. 65, n. 3, p. 032323, 2002.
- 18 KNILL, E.; LAFLAMME, R.; MILBURN, G. Efficient linear optics quantum computation. **arXiv:quant-ph/0006088**, 2000.

- 19 KNILL, E.; LAFLAMME, R.; MILBURN, G. Thresholds for linear optics quantum computation. **arXiv:quant-ph/0006120**, 2000.
- 20 KNILL, E.; LAFLAMME, R.; MILBURN, G. J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. **Nature**, v. 409, n. 6816, p. 46–52, 2001.
- 21 KOK, P.; LOVETT, B. W. **Introduction to Optical Quantum Information Processing**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- 22 LEONHARDT, U. **Measuring the Quantum State of Light**. Cambridge: Cambridge university press, 1997.
- 23 LLOYD, S.; BRAUNSTEIN, S. L. Quantum computation over continuous variables. *In*: BRAUNSTEIN, S. L.; PATI, A. K. **Quantum Information with Continuous Variables**. Netherlands: Springer, p. 9–17, 2003.
- 24 MANDEL, L.; WOLF, E. **Optical Coherence and Quantum Optics**. Cambridge: Cambridge university press, 1995.
- 25 MARSHALL, K.; WEEDBROOK, C. Device-independent quantum cryptography for continuous variables. **Phys. Rev. A**, v. 90, n. 4, p. 042311, 2014.
- 26 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. Cambridge: Cambridge university press, 2010.
- 27 POLICARPO, S. C.; VASCONCELOS, H. M. Analysis of all-optical state generator for “encoding a qubit in an oscillator”. **Braz. J. Phys.**, v. 46, n. 3, p. 294–298, 2016.
- 28 RALPH, T. C. *et al.* Quantum computation with optical coherent states. **Phys. Rev. A**, v. 68, n. 4, p. 042319, 2003.
- 29 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Pearson Higher Ed, 2014.
- 30 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. **Quantum Optics**. Cambridge: Cambridge university press, 1997.
- 31 SHOR, P. W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. *In*: **Proceedings of the 35th Symposium on Foundations of Computer Science**, Los Alamitos, edited by Shafi Goldwasser (IEEE Computer Society Press), p. 124–134, 1994.
- 32 VASCONCELOS, H. H. M. **Topics in Coherent State Quantum Computation and State Purification**. TESE (Doutorado em Física) - University of Notre Dame, Notre Dame, IN, 2006.
- 33 VASCONCELOS, H. M.; SANZ, L.; GLANCY, S. All-optical generation of states for “encoding a qubit in an oscillator”. **Opt. Lett.**, v. 35, n. 19, p. 3261–3263, 2010.
- 34 VILLAR, A. S. The conversion of phase to amplitude fluctuations of a light beam by an optical cavity. **Am. J. Phys.**, v. 76, n. 10, p. 922–929, 2008.
- 35 WEEDBROOK, C. *et al.* Gaussian quantum information. **Rev. Mod. Phys.**, v. 84, n. 2, p. 621–669, 2012.
- 36 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. **Phys. Rev. Lett.**, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998.

37 YUEN, H. P.; CHAN, V. W. S. Noise in homodyne and heterodyne detection. **Opt. Lett.**, v. 8, n. 3, p. 177–179, 1983.