UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JASON ROBERTO ALVES DE MORAES

GRAVITAÇÃO QUÂNTICA CANÔNICA

FORTALEZA

2016

JASON ROBERTO ALVES DE MORAES

GRAVITAÇÃO QUÂNTICA CANÔNICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

FORTALEZA
2016

JASON ROBERTO ALVES DE MORAES

GRAVITAÇÃO QUÂNTICA CANÔNICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 22/03/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Kleiton do Carmo Mendes
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

M821g Moraes, Jason Roberto Alves de
Gravitação quântica canônica / Jason Roberto Alves de Moraes. – 2016.
72 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.
Área de concentração: Física da Matéria Condensada.
Inclui bibliografia.

1. Gravidade quântica. 2. Chern-Simons, teoria de. 3. Geometria semirriemanniana. 4. Formalismo ADM. 5. Relatividade geral. I. Carvalho, Ricardo Renan Landim de. II. Título.

CDD 531.14

Aos meus pais,
Sônia e Fernandes, e
à minha namorada,
Amanda.

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares mais próximos e, especialmente, aos meus pais, Sônia e Fernandes, pelo amor e apoio incondicionais.

À minha namorada, Amanda, pelo carinho, apoio e paciência nestes últimos meses.

Aos meus bons amigos do grupo de física teórica, companheiros nos momentos de aprendizado e descontração.

Ao professor Ricardo Renan Landim de Carvalho, não somente pelos ensinamentos e pela paciência no processo de orientação, mas também pela liberdade com a qual me deixou desenvolver o tema deste trabalho.

Aos professores Kleiton do Carmo Mendes e Marcony Silva Cunha, por aceitarem o convite para compor a banca examinadora.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se o formalismo canônico de quantização da gravidade, tanto em sua formulação original, para a qual a métrica é a variável canônica, quanto na de Ashtekar, onde a conexão autodual assume o papel de variável canônica. Nesta última formulação, as equações de vínculo do formalismo são drasticamente simplificadas, e, fazendo uso da teoria de Chern-Simons, constrói-se um estado que satisfaz estas equações no vácuo, constituindo uma importante solução para a equação de Wheeler-DeWitt. O estado de Chern-Simons também tem uma representação em loops, que recebe este nome por ser formulada em termos dos loops de Wilson.

Palavras-chave: Chern-Simons. Formalismo ADM. Gravidade Quântica. Variáveis de Ashtekar.

ABSTRACT

In this work, one presents the canonical formalism for quantizing gravity, both in its original formulation, for which the metric is the canonical variable, and in Ashtekar's formalism, where the self-dual connection plays the role of the canonical variable. In this last formulation, the constraint equations of the formalism are drastically simplified, and, making use of Chern-Simons theory, one builds a state which satisfies these equations in the vacuum, constituting an important solution for the Wheeler-DeWitt equation. The Chern-Simons state also has a loop representation, which receives this name because it's formulated in terms of Wilson loops.

Keywords: Chern-Simons. ADM Formalism. Quantum Gravity. Ashtekar Variables.

LISTA DE SÍMBOLOS

TM	Fibrado tangente da variedade M
D_u	Derivada covariante na direção de u
$Vect(M)$	Conjunto dos campos vetoriais em M
$C^\infty(M)$	Conjunto das funções infinitamente diferenciáveis de M
$\star$	Operador estrela de Hodge
κ	Constante gravitacional de Newton
$End(\mathbb{R}^n)$	Conjunto dos endomorfismos de $\mathbb{R}^n$
T_PM	Espaço tangente da variedade M no ponto p
tr	Traço
$T^*Met(\Sigma)$	Fibrado cotangente do espaço de configuração $Met(\Sigma)$
$\Lambda^2\mathbb{C}^4$	Espaço do produto exterior de dois vetores em $\mathbb{C}^4$
$\mathfrak{so}(3,1)$	Álgebra de Lie do grupo $SO(3,1)$
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	Álgebra de Lie do grupo $SL(2,\mathbb{C})$
$\wedge$	Produto exterior
E	Fibrado vetorial
$End(E)$	Fibrado endomorfismo de E
Λ^pT^*M	Fibrado álgebra exterior das p-formas de M
$H^{2k}(M)$	$2k$-ésimo grupo de cohomologia deRham de M
U_α	Conjunto aberto de uma variedade
$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie do grupo G

LISTA DE SIGLAS

ADM	Arnowitt-Deser-Misner
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
LQG	Loop Quantum Gravity

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sabe-se que os principais desenvolvimentos da Física no século 20 foram a relatividade geral e a teoria quântica, a segunda dando origem ao modelo padrão das interações de partículas. A relatividade geral trata sobre a gravidade, enquanto o modelo padrão trata das forças restantes na natureza. No entanto, não há uma teoria para a gravidade que incorpore a teoria quântica, ou seja, uma teoria de gravidade quântica. Assim, quantizar a gravidade constitui, talvez, o maior problema em aberto na Física.

Uma das principais abordagens na tentativa de quantizar a gravidade é conhecida como gravidade quântica canônica, sendo a mais antiga e começando com o trabalho pioneiro de Dirac na década de 40. Ela teve desenvolvimentos importantes com os trabalhos de Arnowittt, Deser e Misner na década de 50, e, especialmente, com os trabalhos de Wheeler e DeWitt, na década de 60. Neste programa de quantização canônica, estados ψ em um espaço de Hilbert apropriado devem satisfazer a equação de Wheeler-DeWitt, $\hat{H}\psi = 0$, também conhecida como a equação de Einstein quântica [28].

Foi com o trabalho seminal de Ashtekar [1], ao definir novas variáveis para a relatividade geral, que o programa de quantização canônica ganhou novo ímpeto. Os vínculos que dão origem a equação de Wheeler-DeWitt, aparentemente intratáveis, foram radicalmente simplificados em termos das novas variáveis, ainda que ao custo do aparecimento de um vínculo adicional. Além disso, elas tornaram a estrutura da relatividade geral mais semelhante à das outras forças da natureza, possibilitando que outras técnicas fossem aplicadas ao problema de quantizar a gravidade [5]. Neste contexto, aparece, como ferramenta, a teoria de Chern-Simons [8], uma teoria quântica de campos topológica, desenvolvida principalmente por Edward Witten.

O estado de Chern-Simons, também conhecido como estado de Kodama (que o descobriu originalmente) [19], construído a partir da ação de Chern-Simons S_{CS}, mostra-se uma solução formal simples dos vínculos da gravidade quântica no vácuo com constante cosmológica não nula expressa em variáveis de Ashtekar. Tal estado tem mostrado-se importante em gravitação quântica, e pesquisadores como Gambini e Pullin têm, a partir de sua representação em *loops*, construído uma série de soluções da equação de Wheeler-DeWitt [12]. Esta representação é formulada em termos dos chamados loops de Wilson [30], sendo utilizada em uma das mais proeminentes candidatas à teoria de gravitação quântica, conhecida como *loop quantum gravity* (LQG). Pode-se, ainda, ressaltar que a existência do estado de Chern-Simons e o fato de que a teoria descrita por ele apresenta um bom limite para baixas energias têm sido utilizados como justificativa para a consistência da LQG como teoria quântica para a gravidade [26]. Afirma-se, inclusive, que ele constitui a mais promissora solução para a gravidade quântica em termos das novas variáveis até o momento [27].

Ademais, através do importante trabalho de Witten [31], em que ele relaciona os valores esperados de loops de Wilson em uma teoria de Chern-Simons a quantidades chamadas de invariantes de enlaçamentos, foi possível observar que o estado de Chern-Simons coincide com um invariante conhecido como parêntese de Kauffman. Isto indica uma relação estreita entre gravidade quântica e teoria de nós.

Esta dissertação apresenta um estudo sobre gravitação quântica canônica, expondo alguns dos problemas enfrentados por esta abordagem em sua formulação original, bem como sua reformulação em termos das variáveis de Ashtekar. Mostra-se, após uma exposição à teoria de Chern-Simons, que é possível encontrar uma solução para a equação de Wheeler-Dewitt, o estado de Chern-Simons, e discute-se algumas implicações deste para a gravitação quântica, em particular para a LQG. O estudo foi efetuado em 4 capítulos.

No capítulo 2, os principais elementos da relatividade geral são apresentados, tais como a métrica, a conexão de Levi-Civita e os tensores de Riemann e de tensão-energia, dando ênfase aos seus aspectos matemáticos. A partir de considerações sobre a conservação local de energia, deriva-se a equação de Einstein, apresentando, também, sua modificação com o termo cosmológico.

No capítulo 3, demonstra-se como obter a equação de Einstein a partir de um princípio de ação. Isto é feito utilizando-se duas abordagens: através da ação de Einstein-Hilbert, que enfatiza a métrica como seu principal elemento, e através da ação de Palatini, que tem como principal elemento a conexão (ou, de outro modo, seu potencial vetor). Ênfase é dada à segunda abordagem.

No capítulo 4, expõe-se o formalismo ADM para a relatividade geral, o que torna possível implementar o programa de quantização canônica para a teoria. A partir da ação autodual, as novas variáveis (de Ashtekar) são derivadas, e enfatiza-se o quanto elas simplificam o processo de quantização da teoria.

No capítulo 5, descreve-se a teoria de Chern-Simons, construindo, a partir de uma ação, o estado de Chern-Simons. Demonstra-se que este estado é uma solução para uma versão quântica da relatividade geral, expressa nas variáveis de Ashtekar, com constante cosmológica não nula. A representação em loops de tal estado também é brevemente discutida.

2 GEOMETRIA SEMI-RIEMANNIANA

Na relatividade geral, o campo básico é a métrica, que nos permite medir distâncias e ângulos. No entanto, a relatividade geral também assemelha-se a teorias de gauge (tais como a teoria de Yang-Mills), pois a métrica dá origem a uma conexão no fibrado tangente, a conexão de Levi-Civita. Em outras palavras, a métrica no espaço-tempo nos permite transportar paralelamente vetores tangentes de uma maneira única ideal. Deve-se, pois, compreender em quais condições isto acontece: a conexão de Levi-Civita deve preservar a métrica e ser livre de torsão [5].

2.1 A Conexão de Levi-Civita

Quanto à conexão de Levi-Civita, a condição de preservar a métrica é simples: ela diz que um vetor tangente não muda de comprimento ao ser transportado paralelamente. A condição de ser livre de torsão é mais sutil: basicamente significa que um vetor tangente não rotaciona quando transportado paralelamente [5].

Descreveremos matematicamente tais condições em termos de transporte paralelo. Para isto, considere uma variedade M com métrica semi-Riemanniana g, e seja D uma conexão no fibrado tangente TM. A conexão D nos permite tomar a derivada de um campo vetorial v em M na direção de um campo vetorial u, obtendo um novo campo vetorial $D_u v$, de tal modo que as regras usuais para a conexão sejam válidas. Dizemos que D **preserva a métrica** (ou é compatível com a métrica) se, para todo u, v, $w \in Vect(M)$,

$$ug(v, w) = g(D_u v, w) + g(v, D_u w). \tag{2.1}$$

Caso D não preservasse a métrica, teríamos um terceiro termo contendo a derivada de g. Ainda, dizemos que D é **livre de torsão** se, para todo v, $w \in Vect(M)$,

$$[v, w] = D_v w - D_w v. \tag{2.2}$$

Visto que os parênteses de Lie e a expressão $D_v w - D_w v$ são ambos antissimétricos e envolvem derivadas de v e w, é razoável esperar que sejam iguais.

Podemos agora mostrar que, para qualquer métrica g, existe precisamente uma conexão em TM que preserva a métrica e é livre de torsão: a conexão de **Levi-Civita**, denotada por ∇. A fim de fazê-lo, suponha que ∇ seja uma conexão com tais características. Em coordenadas locais, escrevemos

$$\nabla_\alpha = \nabla_{\partial_\alpha}. \tag{2.3}$$

Já que ∇ preserva a métrica, temos que

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g(\partial_\beta, \partial_\gamma) = g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma) + g(\partial_\beta, \nabla_\alpha \partial_\gamma),$$

e, ao permutarmos os índices, obtemos duas equações adicionais:

$$\begin{aligned} \partial_\beta g_{\gamma\alpha} &= g(\nabla_\beta \partial_\gamma, \partial_\alpha) + g(\partial_\gamma, \nabla_\beta \partial_\alpha) \\ \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= g(\nabla_\gamma \partial_\alpha, \partial_\beta) + g(\partial_\alpha, \nabla_\gamma \partial_\beta). \end{aligned}$$

Da condição de torsão e do fato de que os campos vetoriais coordenados comutam, temos

$$\begin{aligned} [\partial_\alpha, \partial_\beta] &= \nabla_\alpha \partial_\beta - \nabla_\beta \partial_\alpha = 0 \\ \nabla_\alpha \partial_\beta &= \nabla_\beta \partial_\alpha, \end{aligned}$$

e junto à propriedade de simetria da métrica, obtemos

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 2g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma), \tag{2.4}$$

que determina unicamente a derivada covariante $\nabla_\alpha \partial_\beta$, o que significa que ∇ é única, caso exista.

A fim de mostrar que ∇ existe, deve-se relembrar que, para uma conexão D em um fibrado vetorial E com base local de secções e_i de E, pode-se definir as componentes do potencial vetor A como:

$$D_\alpha e_j = A^i_{\alpha j} e_j. \tag{2.5}$$

Particularmente, para a conexão de Levi-Civita, define-se os **símbolos de Christoffel** por

$$\nabla_\alpha \partial_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma, \tag{2.6}$$

e a derivada covariante de qualquer campo vetorial w na direção v é dada por

$$\nabla_v w = v^\alpha(\partial_\alpha w^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} w^\gamma)\partial_\beta. \tag{2.7}$$

De modo análogo ao que foi feito em (2.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} 2g_{\delta\gamma}\Gamma^\delta_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \\ \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta}(\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}), \end{aligned} \tag{2.8}$$

com a condição de que, para a base coordenada, tem-se

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}. \tag{2.9}$$

Ora, da expressão (2.8) para os símbolos de Christoffel e da definição (2.6), obtemos uma fórmula explícita para a conexão de Levi-Civita. Está provada, pois, sua existência.

Uma vez definida a conexão de Levi-Civita no fibrado tangente TM, automaticamente obtemos conexãoes em todos os fibrados tensoriais (r,s), também as denotando por ∇, e, se tivermos um campo tensorial (r,s) X, podemos obter as componentes de $\nabla_\mu X$, isto é,

$$(\nabla_\mu X)^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}_{\beta_1 \ldots \beta_s},$$

em termos das derivadas parciais das componentes de X e dos símbolos de Christoffel. Por exemplo, no caso de um campo tensorial (2,2):

$$(\nabla_\mu X)^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = \partial_\mu X^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} X^{\lambda\beta}_{\gamma\delta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} X^{\alpha\lambda}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\gamma} X^{\alpha\beta}_{\lambda\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} X^{\alpha\beta}_{\gamma\lambda}, \tag{2.10}$$

com os sinais $(+)$ e $(-)$ para índices de vetores e covetores, respectivamente.

Já que $\nabla_v X$ depende $C^\infty(M)$-linearmente do campo vetorial v, pode-se definir um campo tensorial (r,s+1) ∇X, a **derivada covariante** de X, por

$$\nabla X(w_1, ..., w_r, v, v_1 ..., v_s) = (\nabla_v X)(w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_s), \tag{2.11}$$

cuja expressão em coordenadas locais é

$$\nabla X = dx^\mu \otimes \nabla_\mu X. \tag{2.12}$$

A derivada covariante satisfaz as propriedades de linearidade

$$\nabla(cX) = c\nabla X \tag{2.13}$$

$$\nabla(X + X') = \nabla X + \nabla X' \tag{2.14}$$

e a regra generalizada de Leibniz

$$\nabla_\mu(X \otimes X') = \nabla_\mu X \otimes X' + X \otimes \nabla_\mu X'. \tag{2.15}$$

Ademais, definimos a derivada covariante de um tensor (0,0) como sendo sua diferencial,

$$\nabla f = df, \tag{2.16}$$

e de modo que coincida com a conexão de Levi-Civita para tensores (1,0).

Pode-se agora verificar um importante resultado. Já que tal conexão preserva a métrica, tem-se que

$$\begin{aligned}\partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \partial_\alpha g(\partial_\beta, \partial_\gamma)\\ &= g(\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu, \partial_\gamma) + g(\partial_\beta, \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\partial_\mu)\\ &= \Gamma^\mu_{\alpha\beta} g_{\mu\gamma} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\beta\mu},\end{aligned}$$

e assim:

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} g_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\beta\mu} = 0. \tag{2.17}$$

2.2 O Tensor de Riemann

O **tensor de curvatura de Riemann** é definido como a curvatura da conexão de Levi-Civita, e, dados os campos vetoriais u, v, w em M, sua expressão é

$$R(u, v)w = (\nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - \nabla_{[u,v]})w, \tag{2.18}$$

ou, para uma base local de campos vetoriais e_α, suas componentes são

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} e_\alpha. \tag{2.19}$$

Pode-se ainda pensar na curvatura de Riemann como sendo um objeto que aceita uma 1-forma μ e três campos vetoriais u, v, w em M, e retorna a função

$$\mu(R(u, v))w.$$

Como $\mu(R(u, v))w$ depende $C^\infty(M)$-lienarmente de u, v, w e μ, a curvatura de Riemann é um campo tensorial (1,3).

Uma vez que $[\partial_\beta, \partial_\gamma] = 0$, é fácil obter a expressão para $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} e_\alpha$ no caso de uma base coordenada:

$$\begin{aligned}R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} e_\alpha &= R(\partial_\beta, \partial_\gamma)\partial_\delta\\ &= \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} - \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} + \Gamma^\sigma_{\gamma\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\sigma} - \Gamma^\sigma_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma},\end{aligned} \tag{2.20}$$

que é simplesmente outra maneira de escrever o resultado

$$F_{\gamma\delta} = \partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma + [A_\gamma, A_\delta].$$

Ao contrairmos o tensor de Riemann, obtemos o **tensor de Ricci**,

$$R_{\alpha\beta} = R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta} \tag{2.21}$$

e o **escalar de Ricci**,

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}. \tag{2.22}$$

Ao multiplicarmos este escalar pela forma volume associada à métrica, obtemos a Lagrangiana para a relatividade geral. Outro importante tensor é o **tensor de Einstein**

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}. \tag{2.23}$$

O tensor de Riemann satisfaz algumas identidades importantes, que expressam suas simetrias básicas. Estas são:

$$\begin{aligned} R^{\lambda}{}_{\beta\gamma\delta} &= -R^{\lambda}{}_{\gamma\beta\delta} && (2.24) \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -R_{\delta\beta\gamma\alpha} && (2.25) \\ R^{\lambda}{}_{[\beta\gamma\delta]} &= 0. && (2.26) \end{aligned}$$

A relação (2.26) pode ser equivalentemente escrita como

$$R^{\lambda}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\lambda}{}_{\gamma\delta\beta} + R^{\lambda}{}_{\delta\beta\gamma} = 0. \tag{2.27}$$

Além disso, das três simetrias, conclui-se que

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta},$$

o que implica em dizer que

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$$

e

$$G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}. \tag{2.28}$$

Ainda, ao levantarmos e contrairmos um índice no tensor de Einstein, ficamos com

$$G^{\mu}_{\mu} = R - \frac{1}{2} R \delta^{\mu}_{\mu} = (1 - \frac{n}{2}) R,$$

e, para dimensões diferentes de 2, podemos escrever

$$R_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \frac{1}{2-n} G^{\mu}_{\mu} g_{\alpha\beta}. \tag{2.29}$$

Deve-se notar que em 2 dimensões

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta},$$

de tal maneira que $G_{\alpha\beta} = 0$.

2.3 A Equação de Einstein

A equação de Einstein diz como o espaço é encurvado pela presença de matéria, ou mais geralmente, pela presença de qualquer coisa possuindo energia ou momento. Além disso, ela é a mais simples equação relacionando curvatura e energia-momento para a qual a lei de conservação local de energia-momento é uma consequência automática. Pode-se fazer uma analogia com a equação de Maxwell

$$\star d \star F = J, \tag{2.30}$$

que automaticamente implica na conservação local da carga elétrica:

$$d \star J = 0. \tag{2.31}$$

No caso da equação de Maxwell, isto deve-se à identidade $d^2 = 0$. Sua generalização natural, no caso da equação de Einstein, é a identidade de Bianchi.

Em física relativística, o fluxo de energia e momento através de um dado ponto no espaço-tempo é dado pelo tensor de tensão-energia, um tensor (0,2) com componentes $T_{\mu\nu}$. Suponha que o espaço tempo seja dividido em tempo e espaço por $\mathbb{R} \times S$, e escolha coordenadas locais x^0,..., x^{n-1}, onde $x^0 = t$. Então as componentes T^{i0} representam o fluxo de energia na direção ∂_i, T^{0j} representa a densidade da j-ésima componente do momento, e T^{ij} representa o fluxo da j-ésima componente do momento na direção ∂_i. Este tensor, na maioria dos casos de interesse, é simétrico:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \tag{2.32}$$

e, no espaço-tempo curvo, a lei de conservação local de energia-momento é

$$g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda T_{\mu\nu} = \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{2.33}$$

ou seja, $T_{\mu\nu}$ é livre de divergência (divergence-free).

A fim de entender o significado físico desta condição, pode-se fazer um paralelo com o eletromagnetismo. Note que, para qualquer 1-forma J em uma variedade de Lorentz,

$$\star d \star J = -\nabla^\mu J_\mu, \tag{2.34}$$

o que significa que podemos expressar (2.31) como

$$\nabla^\mu J_\mu = 0. \tag{2.35}$$

Em um espaço-tempo de Minkowski, isto se reduz à expressão

$$\partial^\mu J_\mu = 0,$$

ou à equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

Similarmente, a equação (2.33) fornece quatro equações: para $\nu = 0$, obtemos a conservação da energia

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i} = 0, \tag{2.36}$$

enquanto, para $j = 1, 2, 3$, obtemos a conservação do momento

$$\frac{\partial T^{0j}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = 0. \tag{2.37}$$

2.3.1 A Identidade de Bianchi

Para se obter equações para a gravidade que sejam consistentes com a conservação da energia, é natural tentar algo da forma

$$C_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{2.38}$$

com $C_{\mu\nu}$ sendo um tensor simétrico livre de divergência que só depende da curvatura do espaço-tempo, isto é, do tensor de Riemann. Por analogia com as equações de Maxwell, espera-se obter algo que seja livre de divergência ao usarmos a identidade de Bianchi para a curvatura de Riemann.

Da identidade de Jacobi (para quaisquer campos vetoriais u, v, w no espaço-tempo),

$$[\nabla_u, [\nabla_v, \nabla_w]] + [\nabla_v, [\nabla_w, \nabla_u]] + [\nabla_w, [\nabla_u, \nabla_v]] = 0, \tag{2.39}$$

podemos escrever

$$[\nabla_\alpha, R(\partial_\beta, \partial_\gamma)] + [\nabla_\beta, R(\partial_\gamma, \partial_\alpha)] + [\nabla_\gamma, R(\partial_\alpha, \partial_\beta)] = 0. \tag{2.40}$$

Isto implica em dizer que

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha R^\lambda{}_{\beta\gamma\delta} + \nabla_\beta R^\lambda{}_{\gamma\alpha\delta} + \nabla_\gamma R^\lambda{}_{\alpha\beta\delta} &= 0 \\ \nabla_{[\alpha} R^\lambda{}_{\beta\gamma]} &= 0, \end{aligned} \tag{2.41}$$

e, ao contrairmos índices e utilizarmos a definição do tensor de Ricci, ficamos com

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + \nabla_\beta R^\alpha{}_{\gamma\alpha\delta} - \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta} &= 0 \\
\nabla^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\beta R^\alpha{}_{\gamma\alpha\delta} - \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta} &= 0 \\
\nabla^\alpha R_{\delta\gamma\beta\alpha} + \nabla_\beta R_{\gamma\delta} - \nabla_\gamma R_{\beta\delta} &= 0 \\
\nabla^\alpha R_{\gamma\alpha} + \nabla^\beta R_{\gamma\beta} - \nabla_\gamma R &= 0,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

onde, na última linha, o índice β foi levantado e contraído com δ. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}\nabla_\gamma R &= 0 \\
\nabla^\alpha (R_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2} g_{\gamma\alpha} R) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

ou seja, mostramos que

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \tag{2.44}$$

Portanto, o tensor de Einstein é o tensor (0,2) simétrico livre de divergência mais simples que depende somente da curvatura do espaço-tempo, e a **equação de Einstein** para a relatividade geral,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.45}$$

automaticamente implica na conservação local da energia e do momento. A equação de Einstein para o **vácuo** ($T_{\mu\nu} = 0$) simplesmente diz que o tensor de Einstein se anula, mas, exceto em 2 dimensões, isto equivale à condição de que o tensor de Ricci seja nulo, ou seja, a métrica é plana (Ricci flat):

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{2.46}$$

Observe, contudo, que a métrica também é um tensor (0,2) simétrico livre de divergência, satisfazendo $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$. Portanto, é possível modificar a equação de Einstein acrescentando um termo proporcional à métrica:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}. \tag{2.47}$$

O parâmetro Λ é a constante cosmológica, introduzido por Einstein quando este observou que sua equação original previa um universo em expansão. É válido ainda ressaltar que a teoria de Chern-Simons fornece uma solução para a versão quantizada das equações de Einstein com constante cosmológica.

3 LAGRANGIANAS PARA A RELATIVIDADE GERAL

As equações de Einstein podem ser obtidas de um princípio de ação. Aqui serão discutidas duas maneiras de se obter um princípio de ação para a gravidade, a saber, a ação de Einstein-Hilbert e a ação de Palatini. A primeira abordagem enfatiza a **métrica**, enquanto a segunda enfatiza a **conexão**, e mostrar-se-á muito útil na discussão da ação **autodual**, ao introduzirmos as variáveis de Ashtekar para a relatividade.

3.1 A Ação de Einstein Hilbert

Suponha que M seja uma variedade orientada, o *espaço-tempo*, com uma métrica semi-Riemanniana g. A Lagrangiana para a relatividade geral é simplesmente

$$R\,vol, \tag{3.1}$$

onde R é o escalar de Ricci de g e vol é a forma volume associada à g. Assim, a ação de Einstein-Hilbert é

$$S(g) = \int_M R\,vol. \tag{3.2}$$

Caso M não seja compacta, a integral pode não convergir. Entretanto, pode-se verificar que a a variação de S ainda fará sentido desde que a variação da métrica se anule fora de um conjunto compacto.

Escrevendo a ação de Einstein-Hilbert em coordenadas locais, temos

$$S(g) = \int_M R\sqrt{|det\, g|}\, d^n x, \tag{3.3}$$

onde $|det\, g| = -det\, g$ para uma métrica Lorentziana. Supondo que g seja uma métrica deste tipo, que δg seja qualquer tensor (0,2) simétrico que se anule fora de um conjunto compacto, e que $s \in \mathbb{R}$, de tal modo que $g + s\delta g$ ainda seja uma métrica de Lorentz, podemos definir a variação de ação como

$$\delta S(g) = \frac{d}{ds} S(g + s\delta g)|_{s=0}, \tag{3.4}$$

o que torna possível definir a variação de qualquer quantidade dependente de g de modo similar. Logo:

$$\delta S = \int_M \delta(R\,vol) = \int_M (\delta R)\,vol + R\delta vol. \tag{3.5}$$

Considerando que, para qualquer matriz A,

$$det(1 + sA) = 1 + s\,tr(A)$$

até termos de ordem s^2, então, para quaisquer duas matrizes A e B,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}det(A + sB)|_{s=0} &= \frac{d}{ds}det(A)det(1 + sA^{-1}B)|_{s=0} \\ &= det(A)tr(A^{-1}B),\end{aligned}$$

e, portanto, temos o resultado:

$$\delta(det\,g) = (det\,g)tr(g^{-1}\delta g) = (det g)g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \tag{3.6}$$

Como $\delta(g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}) = 0$, então

$$\begin{aligned}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} &= -g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \\ \delta(det\,g) &= -(det\,g)g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta},\end{aligned}$$

implicando em

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-det\,g} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-det\,g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \\ \delta vol &= -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}vol. \end{aligned}\tag{3.7}$$

Para calcular a variação δR, devemos inicialmente lembrar da definição (2.8) dos símbolos de Christoffel, de tal sorte que a variação desses símbolos é dada por

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\eta}(\nabla_\beta\delta g_{\gamma\eta} + \nabla_\gamma\delta g_{\beta\eta} - \nabla_\eta\delta g_{\beta\gamma}). \tag{3.8}$$

De modo semelhante, partindo da definição (2.20) para o tensor de Riemann, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}\delta R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\eta} &= \nabla_\beta\delta\Gamma^{\alpha}_{\gamma\eta} - \nabla_\gamma\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\eta} \\ \delta R_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha\delta\Gamma^{\gamma}_{\gamma\beta} - \nabla_\gamma\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

e, se usarmos (3.8), obtemos

$$\delta R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\gamma\eta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g_{\gamma\eta} + g^{\gamma\eta}\nabla_\gamma\nabla_\eta\delta g_{\alpha\beta} - g^{\gamma\eta}\nabla_\gamma\nabla_\beta\delta g_{\alpha\eta} - g^{\gamma\eta}\nabla_\gamma\nabla_\alpha\delta g_{\beta\eta}). \tag{3.9}$$

Finalmente, para a variação do escalar de Ricci, escrevemos

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta(g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}) \\ \delta R &= R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla^{\alpha}\omega_{\alpha}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

com a 1-forma ω dada por

$$\omega_{\alpha} = g^{\gamma\eta}\nabla_{\alpha}\delta g_{\gamma\eta} - \nabla^{\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \tag{3.11}$$

De (3.7) e (3.10), a variação da ação é

$$\delta S = \int_M (R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla^{\alpha}\omega_{\alpha} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta})\, vol, \tag{3.12}$$

e, ignorando momentaneamente o segundo termo, ficamos com

$$\delta S = \int_M (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta})\delta g^{\alpha\beta}\, vol, \tag{3.13}$$

que é nula (para todas as variações $\delta g^{\alpha\beta}$ nulas fora de um conjunto compacto) quando a equação de Einstein é válida:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0.$$

Quanto ao segundo termo, lembrando de (2.34), temos que

$$\nabla^{\alpha}\omega_{\alpha} = -\star d \star \omega,$$

de tal sorte que

$$\int_M vol \wedge \star d \star \omega = \pm \int_M d \star \omega \wedge \star vol = \pm \int_M d \star \omega = 0 \tag{3.14}$$

devido ao teorema generalizado de Stokes (uma vez que M não tem fronteira). Dizemos, pois, que um termo como $\nabla^{\alpha}\omega_{\alpha}$ é uma *divergência total.*

3.2 A Ação de Palatini

Para a relatividade geral, a ação de Palatini é simplesmente a ação de Einstein-Hilbert reescrita de modo que não seja uma função da métrica, e sim uma função da conexão e de uma *estrutura de campo* (frame field). Devemos definir o conceito de estrutura de campo: suponha que M seja uma variedade orientada n-dimensional difeomórfica à $\mathbb{R}^n$. Fisicamente, podemos pensar em M como sendo um pequeno subconjunto aberto do espaço-tempo. Já que o fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$ é trivial, o mesmo pode ser dito sobre

TM. Uma trivialização de TM é um isomorfismo entre fibrados vetoriais,

$$e: M \times \mathbb{R}^n \to TM, \tag{3.15}$$

enviando cada fibra $p \times \mathbb{R}^n$ do fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n$ ao correspondente espaço tangente T_pM. Uma trivialização de TM é também chamada de uma estrutura de campo, uma vez que, para cada p, ela envia a base padrão de $\mathbb{R}^n$ a uma base de vetores tangentes em p, ou *estrutura* (frame). Se M for 3-dimensional, uma etrutura de campo em M é também chamada de tríade ou **dreibein**; se M for 4-dimensional, tal estrutura é conhecida como tetrada ou **vierbein**.

A ideia do formalismo de Palatini é trabalhar principalmente no fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n$, que serve como um substituto para o fibrado tangente. Pode-se, ainda ir de $M \times \mathbb{R}^n$ até TM e vice-versa, utilizando e e sua inversa

$$e^{-1}: TM \to M \times \mathbb{R}^n. \tag{3.16}$$

Supondo uma variedade Lorentziana n-dimensional, uma secção de $M \times \mathbb{R}^n$ é somente uma função em M valorada em $\mathbb{R}^n$, e existe, pois, uma base natural de secções $\xi_0, ..., \xi_n$ dada por

$$\begin{aligned} \xi_0(p) &= (1, 0, 0, ...) \\ \xi_1(p) &= (0, 1, 0, ...) \\ \xi_2(p) &= (0, 0, 1, ...) \end{aligned}$$

e assim por diante. Logo, qualquer secção s pode ser escrita com

$$s = s^I \xi_I. \tag{3.17}$$

Aqui, os índices com letras Latinas maiúsculas $I, J, ...$ são chamados de índices internos (pois $\mathbb{R}^n$ é o *espaço interno*), enquanto as letras Gregas minúsculas são usadas para os índices de espaço-tempo associados aos campos vetoriais coordenados ∂_μ em uma carta.

Podemos pensar na estrutura de campo como definindo um mapa de secções de $M \times \mathbb{R}^n$ em campos vetoriais em M, que também chamaremos de e. Ao aplicarmos este mapa às secções ξ_I, obtemos uma base de campos vetoriais $e(\xi_I)$ em M, e, em uma carta, podemos escrevê-las como

$$e(\xi_I) = e_I^\alpha \partial_\alpha, \tag{3.18}$$

cujas componentes e_I^α são funções em M. Em relatividade, costuma-se abreviá-las por

e_I. Ainda, como os coeficientes e_I^α ou os campos vetoriais $e_I = e(\xi_I)$ são suficientes para determinar a estrutura de campo e, costuma-se denominar qualquer um deles como tal.

A chave para o formalismo de Palatini é que $M \times \mathbb{R}^n$, servindo como uma imitação do fibrado tangente, possui um produto interno canônico, algo que o fibrado TM não possui. Podemos defini-lo como

$$\eta(s, s') = \eta_{IJ} s^I s'^J, \tag{3.19}$$

com η_{IJ} copiada da métrica de Minkowski

$$\eta_{IJ} = (-1, 1, 1, 1) \tag{3.20}$$

e conhecida como métrica interna. Pode-se, então, levantar e abaixar índices internos utilizando η_{IJ} e sua inversa η^{IJ}.

Agora, suponha que M tenha uma métrica g Lorentziana; podemos tomar produtos internos de campos vetoriais em M por

$$g(v, v') = g_{\alpha\beta} v^\alpha v'^\beta. \tag{3.21}$$

Dizemos que a estrutura de campo e é ortonormal se os campos vetoriais e_I forem ortonormais, isto é,

$$g(e_I, e_J) = \eta_{IJ}. \tag{3.22}$$

Se e for ortonormal, a métrica g em M relaciona-se com a métrica interna por

$$\begin{aligned} g(e(s), e(s')) &= g(e(s^I \xi_I), e(s^J \xi_J)) \\ &= s^I s^J g(e_I, e_J) \\ &= \eta_{IJ} s^I s^J \\ &= \eta(s^I \xi_I, s^J \xi_J) \\ &= \eta(s, s'), \end{aligned} \tag{3.23}$$

para quaisquer secções s, s' de $M \times \mathbb{R}^n$.

No formalismo de Palatini, trabalha-se com com estruturas de campos ortonormais, em vez da métrica em M. Caso e seja ortonormal, o resultado (3.23) implica que a métrica em M seja dada em termos da estrutura de campo inversa por

$$g(v, v') = \eta(e^{-1} v, e^{-1} v'). \tag{3.24}$$

Ademais, pode-se mostrar que

$$\eta_{IJ} = g(e_I, e_J) = g(e_I^\alpha \partial_\alpha, e_J^\beta \partial_\beta) = g_{\alpha\beta} e_I^\alpha e_J^\beta \tag{3.25}$$

e

$$\eta^{IK} \eta_{IJ} = \delta_J^K = \eta^{IK} e_I^\alpha e_J^\beta g_{\alpha\beta} = e_\beta^K e_J^\beta. \tag{3.26}$$

A estrutura de campo inversa é dada por

$$e^{-1} v = e_\alpha^I v^\alpha \xi_I, \tag{3.27}$$

e observa-se que

$$e^{-1} v = e_\alpha^I e_J^\alpha s^J \xi_I = s^I \xi_I = s$$

se $v = e(s)$ para alguma secção s de $M \times \mathbb{R}^n$, como esperado. Podemos, então, derivar uma expressão para a métrica g em termos da *coestrutura de campo* (coframe field) e_α^I, também conhecida como cotríade ou cotetrada (em 3 e 4 dimensões, respectivamente):

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} e_\alpha^I e_\beta^J. \tag{3.28}$$

O outro elemento principal do formalismo de Palatini é uma conexão no fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n$. Em analogia com a definição de uma conexão que preserva a métrica, dizemos que uma conexão D neste fibrado é uma conexão de Lorentz se

$$v\eta(s, s') = \eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s'). \tag{3.29}$$

Note que não faz sentido falar em conexão livre de torsão em $M \times \mathbb{R}^n$. Portanto, não há uma conexão de Levi-Civita neste fibrado. Entretanto, há a conexão plana padrão D^0, dada por

$$D_v^0 s = v(s^I) \xi_I, \tag{3.30}$$

e podemos escrever qualquer conexão D como $D^0 + A$ para algum potencial vetor A (com A sendo uma 1-forma em M valorada em $End(\mathbb{R}^n)$):

$$D_v s = (v(s^J) + A_{\mu I}^J v^\mu s^I) \xi_J. \tag{3.31}$$

A curvatura da conexão D escreve-se (usando índices) como:

$$F_{\alpha\beta}^{IJ} = \partial_\alpha A_\beta^{IJ} - \partial_\beta A_\alpha^{IJ} + [A_\alpha, A_\beta]^{IJ}. \tag{3.32}$$

É fácil reconhecer uma conexão de Lorentz por seu potencial vetor, pois este obedece à relação $A_\mu^{IJ} = -A_\mu^{JI}$. Segue daí que $F_{\alpha\beta}^{IJ} = -F_{\beta\alpha}^{IJ} = -F_{\alpha\beta}^{JI}$.

De posse de uma estrutura de campo e e de uma conexão de Lorentz D, podemos usar e para transferir D do fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n$ ao fibrado tangente TM. Obtemos assim uma conexão em TM, aqui designada por $\overline{\nabla}$, dada por

$$\overline{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma, \tag{3.33}$$

com os coeficientes $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ definidos por

$$\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = A^J_{\alpha I} e^I_\beta e^\gamma_J. \tag{3.34}$$

Ela é uma espécie de imitação da conexão de Levi-Civita, e podemos definir quantidades análogas para o tensor de Riemann;

$$\overline{R}^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta} = F^{IJ}_{\alpha\beta} e^\delta_I e^\gamma_J, \tag{3.35}$$

que pode ser facilmente identificado como a curvatura da conexão $\overline{\nabla}$; para o tensor de Ricci;

$$\overline{R}_{\alpha\beta} = \overline{R}^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}, \tag{3.36}$$

e para o escalar de Ricci;

$$\overline{R} = \overline{R}^\alpha_\alpha. \tag{3.37}$$

Podemos construir a ação de Palatini, enfatizando que a métrica em M não é um campo fundamental, mas sim uma função da estrutura de campo, de acordo com a expressão (3.28). Assim, escrevemos a ação como

$$S(A, e) = \int_M e^\alpha_I e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta}\, vol, \tag{3.38}$$

com a forma volume dada pela expressão usual em termos de g. Procedendo de modo análogo ao utilizado para o caso da ação de Einstein-Hilbert, primeiramente variemos S com respeito à estrutura de campo, ou seja, calculemos δS com $\delta A = 0$. Recorrendo à expressão (3.7), precisamos de

$$\delta g^{\alpha\beta} = \delta(\eta^{IJ} e^\alpha_I e^\beta_J) = \delta\eta^{IJ} e^\alpha_I e^\beta_J + \eta^{IJ} \delta e^\alpha_I e^\beta_J + \eta^{IJ} e^\alpha_I \delta e^\beta_J = 2\eta^{IJ} \delta e^\alpha_I e^\beta_J.$$

Portanto,

$$\delta vol = -\eta^{IJ} g_{\alpha\beta} \delta e^\alpha_I e^\beta_J, \tag{3.39}$$

e, com $g_{\alpha\beta} = \eta_{KL} e^K_\alpha e^L_\beta$,

$$\begin{aligned} \delta vol &= -\eta^{IJ}\eta_{KL} e^K_\alpha e^L_\beta e^K_\alpha (\delta e^\alpha_I)\, vol \\ &= -\delta^L_J \delta^I_K e^K_\alpha (\delta e^\alpha_I)\, vol \\ &= -e^K_\alpha (\delta e^\alpha_K)\, vol. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Computemos a variação da ação como segue:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M (\delta e^\alpha_I e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} + e^\alpha_I \delta e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} - e^K_\gamma \delta e^\gamma_K e^\alpha_I e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta})\, vol \\ &= \int_M (2\delta e^\alpha_I e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} - e^I_\alpha \delta e^\alpha_I e^\gamma_K e^\delta_L F^{KL}_{\gamma\delta})\, vol \\ &= 2\int_M (e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} e^I_\alpha e^\gamma_K e^\gamma_L F^{KL}_{\gamma\delta}) \delta e^\alpha_I\, vol. \end{aligned} \tag{3.41}$$

No entanto, de (3.35),

$$\overline{R}_{\alpha\beta} = F^{IJ}_{\alpha\gamma} e^\gamma_J \eta_{IJ} e^J_\beta \implies F^{IJ}_{\alpha\beta} e^\beta_J = \overline{R}_{\alpha\beta}\eta^{IJ} e^\beta_J, \tag{3.42}$$

e, além disso,

$$\frac{1}{2} e^I_\alpha e^\gamma_K e^\gamma_L F^{KL}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} e^I_\alpha \overline{R} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\eta^{IJ} e^\beta_J \overline{R}. \tag{3.43}$$

Segue que

$$\delta S = 2\int_M (\overline{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overline{R} g_{\alpha\beta})\eta^{IJ} e^\beta_J \delta e^\alpha_I\, vol, \tag{3.44}$$

e, para uma variação arbitrária da estrutura de campo, $\delta S = 0$ quando

$$\overline{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overline{R} g_{\alpha\beta} = 0, \tag{3.45}$$

expressão que se assemelha bastante à equação de Einstein. Agora, notando que a Lagrangiana de Palatini é dada por

$$e^\alpha_I e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta}\, vol = \overline{R}\, vol,$$

temos, se $\delta e = 0$, que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M \delta(g^{\alpha\beta}\overline{R}_{\alpha\beta})\, vol \\ &= \int_M g^{\alpha\beta}\delta\overline{R}_{\alpha\beta}\, vol. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Da secção anterior e do fato de que

$$\overline{\nabla}_{[\alpha}\delta\overline{\Gamma}^\lambda_{\sigma]\beta} = \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_\alpha \delta\overline{\Gamma}^\lambda_{\sigma\beta} - \overline{\nabla}_\sigma \delta\overline{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta}),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta \overline{R}^{\lambda}{}_{\alpha\sigma\beta} &= 2\overline{\nabla}_{[\alpha}\delta\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma]\beta} \\ \delta \overline{R}_{\alpha\beta} &= 2\overline{\nabla}_{[\alpha}\delta\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\gamma]\beta}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Ainda, se escrevermos

$$\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + C^{\gamma}_{\alpha\beta} \implies \delta\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \delta C^{\gamma}_{\alpha\beta}$$

e

$$\overline{\nabla}_{\alpha}\delta C^{\gamma}_{\beta\epsilon} = \nabla_{\alpha}\delta C^{\gamma}_{\beta\epsilon} + C^{\gamma}_{\eta\alpha}\delta C^{\eta}_{\beta\epsilon}, \tag{3.48}$$

teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta\overline{R} &= g^{\alpha\beta}\overline{\nabla}_{[\alpha}\delta C^{\gamma}_{\gamma]\beta} \\ &= g^{\alpha\beta}\nabla_{[\alpha}\delta C^{\gamma}_{\gamma]\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(-C^{\gamma}_{\gamma\eta}\delta C^{\eta}_{\alpha\beta} + C^{\eta}_{\gamma\alpha}\delta C^{\gamma}_{\eta\beta}) \\ &= g^{\alpha\beta}\nabla_{[\alpha}\delta C^{\gamma}_{\gamma]\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(-C^{\gamma}_{\gamma\eta}\delta C^{\eta}_{\alpha\beta} + C^{\eta}_{\gamma\alpha}\delta C^{\gamma}_{\eta\beta} - C^{\eta}_{\alpha\beta}\delta C^{\gamma}_{\gamma\eta} + C^{\eta}_{\alpha\beta}\delta C^{\gamma}_{\gamma\eta}) \\ &= g^{\alpha\beta}\nabla_{[\alpha}\delta C^{\gamma}_{\gamma]\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(-C^{\gamma}_{\gamma\eta}\delta C^{\eta}_{\alpha\beta} + C^{\eta}_{\gamma\alpha}\delta C^{\gamma}_{\eta\beta} - C^{\eta}_{\alpha\beta}\delta C^{\gamma}_{\gamma\eta} + C^{\eta}_{\gamma\beta}\delta C^{\gamma}_{\alpha\eta}). \end{aligned} \tag{3.49}$$

O primeiro termo é somente uma divergência total, e pode ser descartado em nossa análise. Pode-se, pois, constatar que a expressão (3.49) é nula se e somente se $C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ [29].

Vê-se que reobtemos a equação de Einstein precisamente quando $\overline{\nabla} = \nabla$.

4 O FORMALISMO ADM

Embora a equação de Einstein seja aparentemente simples, é muito complicado extrair a física contida nela. Neste capítulo, descreveremos como pensar na equação de Einstein como uma regra que dita a evolução da geometria do espaço à medida que o tempo passa. Concentraremo-nos no caso de um espaço-tempo 4-dimensional, o que significa que lidaremos com 10 diferentes equações, uma vez que há 10 componentes independentes no tensor de Einstein.

No formalismo **ADM** (Arnowitt-Deser-Misner), ou **3+1**, da equação de Einstein, veremos que 4 destas 10 equações são *vínculos* a serem satisfeitos, enquanto as 6 restantes são equações *evolucionárias*, que dizem como a 3-métrica muda com o tempo. Basicamente, este é o formalismo Hamiltoniano para a relatividade geral, e a ideia principal consiste em folhear o espaço-tempo em uma família de superfícies *spacelike* Σ_t. Assim, obtemos a métrica destas fatias (a 3-métrica) e seu momento conjugado como variáveis dinâmicas, podendo definir um Hamiltoniano para a teoria. Esta formulação torna possível a implementação de um programa de quantização canônica para a gravitação, o qual esbarra em uma série de dificuldades conceituais e técnicas.

Foi com a introdução das novas variáveis, no final dos anos 80, por Abhay Ashtekar que alguns destes problemas técnicos puderam ser evitados; particularmente, os vínculos foram radicalmente simplificados.

4.1 A Curvatura Extrínseca

Considere uma variedade Lorentziana M difeomórfica à $\mathbb{R}\times S$, onde a variedade S representa o *espaço* e $t \in \mathbb{R}$ representa o *tempo*. Naturalmente, o *fatiamento* (slicing) particular do espaço-tempo em instantes de tempo é uma escolha arbitrária, e não algo intrínseco ao mundo. Assim, se tivermos o espaço-tempo M, há muitas maneiras de se escolher um difeomorfismo

$$\phi : M \to \mathbb{R} \times S. \tag{4.1}$$

Isto nos fornece diversas maneiras de definir uma coordenada tempo τ em M, o pullback da cooredenada tempo padrão t em $\mathbb{R} \times S$:

$$\tau = \phi^* t. \tag{4.2}$$

Agora, dizemos que uma subvariedade $\Sigma \subset M$ é uma **fatia** (slice) de M se satisfizer $\tau = \textit{constante}$ para alguma coordenada temporal τ. Se assumirmos que Σ seja *spacelike*, isto é, se restringirmos a métrica g em M à Σ, obtemos uma métrica Riemanniana em Σ, significando que

$$g(v, v) > 0 \tag{4.3}$$

para todo $v \in T_p\Sigma$ não nulo. Esta métrica será denotada por ${}^3g$, e conhecida como 3-métrica. Nesta situação, podemos encontrar um campo de vetores unitários *timelike* normais à Σ:

$$g(n, n) = -1 \,\mathrm{e}\, \forall v \in T_p\Sigma, \quad g(n, v) = 0. \tag{4.4}$$

Há, na verdade, duas escolhas para um campo vetorial normal n, já que podemos mudar seu sinal; podemos pensar nestas escolhas como apontando nas direções *futuro* e *passado*, por exemplo. Agora, dado qualquer vetor $v \in T_pM$, podemos decompô-lo em uma componente tangente à Σ e uma componente normal, proporcional a n:

$$v = -g(v, n)n + (v + g(v, n)n). \tag{4.5}$$

Podemos checar que a componente normal a n é realmente n com esta definição,

$$-g(n, n)n = n, \tag{4.6}$$

e que a componente tangente de qualquer v é, de fato, ortogonal a n:

$$g(v + g(v, n)n, n) = g(v, n) + g(v, n)g(n, n) = g(v, n) - g(v, n) = 0. \tag{4.7}$$

Particularmente, dados quaisquer campos vetoriais u, v em Σ, podemos separar $\nabla_u v$ em partes tangente e normal:

$$\nabla_u v = -g(\nabla_u v, n)n + (\nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n); \tag{4.8}$$

escrevendo o primeiro termo como

$$-g(\nabla_u v, n)n = K(u, v)n, \tag{4.9}$$

onde $K(u, v)$ é conhecida como **curvatura extrínseca**. Tal curvatura diz o quanto um vetor tangente à Σ falhará em ser tangente se o transportarmos paralelamente usando a conexão de Levi-Civita em M.

Escrevemos o segundo termo como

$$^3\nabla_u v = \nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n. \tag{4.10}$$

Observe que, para quaisquer $u, w \in Vect(\Sigma)$ e $f \in C^\infty(\Sigma)$, temos que

$$\begin{aligned}
{}^3\nabla_u v &= \nabla_v(fw) + g(n, \nabla_v(fw))n \\
&= v(f)w + f\nabla_v w + g(n, v(f)w)n + g(n, f\nabla_v w)n \\
&= v(f)w + f\nabla_v w + v(f)g(n, w)n + fg(n, \nabla_v w)n \\
&= v(f)w + f(\nabla_v w + g(n, \nabla_v w)n) \\
&= v(f)w + f^3\nabla_v w, \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

ou seja, ${}^3\nabla$ obedece à regra de Leibniz. Além disso, temos que esta conexão preserva a métrica:

$$\begin{aligned}
ug(v, w) &= g(K(u, v)n +^3 \nabla_u v, w) + g(v, K(u, w)n +^3 \nabla_u w) \\
&= g({}^3\nabla_u v, w) + g(v,^3 \nabla_u w). \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Ainda, ${}^3\nabla$ é livre de torsão:

$$\begin{aligned}
{}^3\nabla_u v -^3 \nabla_v u &= \nabla_u v - K(u, v)n - \nabla_v u + K(v, u)n \\
&= \nabla_u v - \nabla_v u \\
&= [u, v]. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Mostramos, pois, que ${}^3\nabla$ é somente a conexão de Levi-Civita em Σ associada à métrica ${}^3g$. Pode-se mostrar também que $K(u, v)$ é $C^\infty(\Sigma)$-linear em u e v; isto é:

$$K(fu, v) = fK(u, v) \qquad (4.14)$$

$$K(u, fv) = -fK(u, v). \qquad (4.15)$$

Finalmente, definindo $K_{ij} = K(\partial_i, \partial_j)$, em coordenadas locais, podemos demonstrar a propriedade de simetria $K(u, v) = K(v, u)$:

$$\begin{aligned}
K_{ij} - K_{ji} &= K(\partial_i, \partial_j) - K(\partial_j, \partial_i) \\
&= -g(\nabla_i \partial_j - \nabla_j \partial_i, n) \\
&= -g([\partial_i, \partial_j], n) \\
&= 0. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Outra definição para a curvatura extrínseca é dada por

$$K(u, v) = g(\nabla_u n, v), \qquad (4.17)$$

que concorda com a definição (4.9), pois ∇ preserva a métrica. Esta nova definição nos diz que $K(u, v)$ mede o quanto o vetor normal n rotaciona na direção de v quando transportado paralelamente na direção de u.

4.2 As Equações de Gauss-Codazzi

Considere novamente um difeormorfismo ,

$$\phi : M \to \mathbb{R} \times S$$

que nos fornece uma coordenada tempo $\tau = \phi^*$ em M e, portanto, uma maneira particular de se obter fatias $\{\tau = s\}$. Ele também nos dá um campo vetorial ∂_τ em M, o *pushforward* por ϕ^{-1} do campo vetorial ∂_t em $\mathbb{R} \times S$. Este campo vetorial aponta para a frente no tempo, mas não é necessariamente ortogonal às fatias $\{\tau = s\}$. Tenha uma fatia particular $\Sigma \{\tau = 0\}$, e assuma que é spacelike. Pode-se separar ∂_τ em componentes normal e tangente à Σ:

$$\partial_\tau = Nn + \vec{N}. \tag{4.18}$$

Nesta expressão, $\vec{N}$ é conhecido como o campo vetorial *deslocamento* (shift), enquanto N é denominada função *lapso* (lapse); dadas por

$$N = -g(\partial_\tau, n) \tag{4.19}$$
$$\vec{N} = \partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n, \tag{4.20}$$

de modo que o vetor normal pode ser expresso como

$$n = \frac{1}{N}(\partial_\tau - \vec{N}). \tag{4.21}$$

Podemos mostrar que que 4 das equações de Einstein são vínculos as serem satisfeitos pela 3-métrica e a curvatura extrínseca; as fórmulas que descrevem isto são conhecidas como equações de Gauss-Codazzi. Então, para um ponto p em Σ, escolhamos coordenadas locais x^0, x^1, x^2, x^3 em uma vizinhança de p, de tal maneira que $x^0 = \tau$, e que os campos vetoriais $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ sejam tangentes à Σ em p. Usaremos letras Gregas como índices de 0 a 3, e letras Romanas como índices *spacelike*, de 1 a 3. Ainda, escreveremos os símbolos de Christoffel de ${}^3\nabla$ como ${}^3\Gamma^i_{jk}$, e o tensor de Riemann de ${}^3g$ como ${}^3R^m_{ijk}$.

Queremos as componentes R^α_{ijk} em termos de K_{ij} e ${}^3R^m_{ijk}$ e, para isto, devemos calcular

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k.$$

Ora, de (4.10), podemos escrever

$$\nabla_i \partial_j = K_{ij} n + {}^3\Gamma^m_{ij} \partial_m. \tag{4.22}$$

Além disso, de (4.17), concluímos que

$$\nabla_i n = K_i^m \partial_m. \tag{4.23}$$

Claculando o termo $\nabla_i \nabla_j \partial_k$:

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j \partial_k &= \nabla_i (K_{jk} n + {}^3\Gamma^m_{jk} \partial_m) \\
&= K_{jk,i} n + K_{jk} \partial_i n + {}^3\Gamma^m_{jk,i} \partial_m + {}^3\Gamma^m_{jk} \nabla_i \partial_m \\
&= (K_{jk,i} + {}^3\Gamma^m_{jk} K_{im}) n + K_{jk} K_i^m \partial_m + ({}^3\Gamma^m_{jk,i} + {}^3\Gamma^l_{jk} {}^3\Gamma^m_{il}) \partial_m.
\end{aligned}$$

O termo $\nabla_j \nabla_i \partial_k$ pode ser obtido apenas trocando os índices i e j, e podemos calcular $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$:

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = ({}^3\nabla_i K_{jk} - {}^3\nabla_j K_{ik}) n + ({}^3R^m_{ijk} + K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m) \partial_m, \tag{4.24}$$

onde utilizamos as relações

$${}^3\nabla_i K_{jk} = K_{jk,i} + {}^3\Gamma^m_{jk} K_{im} \tag{4.25}$$

e

$${}^3R^m{}_{ijk} = {}^3\Gamma^m_{jk,i} - {}^3\Gamma^m_{ik,j} + {}^3\Gamma^l_{jk} {}^3\Gamma^m_{il} - {}^3\Gamma^l_{ik} {}^3\Gamma^m_{jl}. \tag{4.26}$$

As equações contidas na expressão (4.24) são conhecidas como as equações de Gauss-Codazzi. Considerando $\partial_0 = n$, o que implica em dizer que o lapso é 1 e o deslocamento é 0, podemos aplicar a 1-forma dx^0 nos dois lados de (4.24), obtendo

$$\begin{aligned}
R^\alpha{}_{ijk} dx^0(\partial_\alpha) &= ({}^3\nabla_i K_{jk} - {}^3\nabla_j K_{ik}) dx^0(\partial_0) \\
R^0{}_{ijk} &= {}^3\nabla_i K_{jk} - {}^3\nabla_j K_{ik},
\end{aligned} \tag{4.27}$$

a equação de Gauss. Por outro lado, repetindo o procedimento anterior, agora com a 1-forma dx^m, obtemos a equação de Codazzi:

$$R^m{}_{ijk} = {}^3R^m_{ijk} + K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m. \tag{4.28}$$

É válido notar que a equação de Codazzi implica que a curvatura intrínseca $R^m{}_{ijk}$ é igual a uma parte do tensor de Riemann quando a curvatura extrínseca de Σ é nula.

Queremos agora escrever 4 das equações de Einstein que envolvem G^0_α utilizando as equações de Gauss-Codazzi. Fazendo também uso das simetrias do tensor de Riemann, escrevemos

$$\begin{aligned} G_{\lambda\nu} &= R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\nu} \\ g^{\lambda\mu}G_{\lambda\nu} &= g^{\lambda\mu}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}_{\nu} \\ G^{\mu}_{\nu} &= R^{\mu\alpha}{}_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Então, para o caso $\mu = \nu = 0$ em 4 dimensões, temos que

$$G^0_0 = -(R^{12}{}_{12} + R^{23}{}_{23} + R^{31}_{31}), \tag{4.30}$$

onde usamos o fato de que $R^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} = -R^{\nu\mu}{}_{\sigma\rho} = R^{\nu\mu}{}_{\rho\sigma}$, implicando em $R^{00}{}_{00} = R^{11}{}_{11} = R^{22}{}_{22} = R^{33}{}_{33} = 0$.

Considerando, da equação de Codazzi, que

$$R^{12}{}_{12} = {}^3R^{12}{}_{12} + K^2_1K^1_2 - K^2_2K^1_1,$$

com termos análogos para $R^{23}{}_{23}$ e $R^{31}{}_{31}$, escrevemos

$$\begin{aligned} -G^0_0 = {}&{}^3R^{12}{}_{12} + {}^3R^{23}{}_{23} + {}^3R^{31}_{31} + \\ &(K^2_1K^1_2 - K^2_2K^1_1) + \\ &(K^3_2K^2_3 - K^3_3K^2_2) + \\ &(K^1_3K^3_1 - K^1_1K^3_3) \end{aligned} . \tag{4.31}$$

No entanto,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}((K^i_i)^2 - K_{ij}K^{ij}) = -\frac{1}{2}(K^i_iK^j_j - K^i_jK^j_i) = {}&K^2_1K^1_2 + K^3_2K^2_3 + K^3_1K^1_3 - \\ &K^1_1K^2_2 - K^2_2K^3_3 - K^1_1K^3_3 \end{aligned} , \tag{4.32}$$

e

$$\frac{1}{2}\,{}^3R = {}^3R^{ij}{}_{ij} = R^{12}{}_{12} + R^{23}{}_{23} + R^{31}{}_{31}; \tag{4.33}$$

portanto,

$$G^0_0 = -\frac{1}{2}({}^3R + (K^i_i)^2 - K_{ij}K^{ij}). \tag{4.34}$$

Em termos matriciais, podemos escrever a última equação como

$$G^0_0 = -\frac{1}{2}({}^3R + (tr\,K)^2 - tr(K^2)). \tag{4.35}$$

Logo, obeservamos que a equação de Einstein $G^0_0 = 8\pi\kappa T^0_0$ é um vínculo, relacionando a curvatura extrínseca à curvatura escalar.

As 3 equações de Einstein, $G_i^0 = 8\pi\kappa T_i^0$ são, também, vínculos. Tome $\mu = 0$ e $\nu = 1$ em (4.29), por exemplo. Isto implica que

$$G_1^0 = R^0{}_{01}{}^0 + R^0{}_{11}{}^1 + R^0{}_{21}{}^2 + R^0{}_{31}{}^3,$$

e, como o primeiro e o segundo termos devem ser nulos (pelas simetrias do tensor de Riemann), temos

$$G_1^0 = R^0{}_{21}{}^2 + R^0{}_{31}{}^3.$$

Finalmente, da equação de Gauss:

$$\begin{aligned} R^0{}_{21}{}^2 &= {}^3\nabla_2 K_1^2 - {}^3\nabla_1 K_2^2 \\ R^0{}_{31}{}^3 &= {}^3\nabla_3 K_1^3 - {}^3\nabla_1 K_3^3. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$G_1^0 = {}^3\nabla_j K_1^j - {}^3\nabla_1 K_j^j; \tag{4.36}$$

resultado que pode ser obtido analogamente para as outras componentes G_i^0, ou seja:

$$G_i^0 = {}^3\nabla_j K_i^j - {}^3\nabla_i K_j^j. \tag{4.37}$$

Em outras palavras, podemos dizer que as equações

$$G_i^0 = 8\pi\kappa T_i^0$$

são vínculos na curvatura extrínseca de qualquer fatia spacelike.

Utilizando a notação n_μ para o unitário normal à Σ_t, temos [18]:

$$n^\mu n_\mu = -1 \tag{4.38}$$

$$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu. \tag{4.39}$$

Com estas definições, e em analogia com as equações (4.35) e (4.37), podemos escrever, para qualquer escolha do lapso e do deslocamento [5]:

$$G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -\frac{1}{2}({}^3R + (tr\,K)^2 - tr(K^2)) \tag{4.40}$$

$$G_{\mu i} n^\mu = {}^3\nabla_j K_i^j - {}^3\nabla_i K_j^j. \tag{4.41}$$

4.3 Quantização Canônica

Na mecânica clássica, o espaço de configuração pode ser qualquer variedade M; a velocidade generalizada é um vetor tangente à M, enquanto o momento é um vetor cotangente. Assim, no formalismo Hamiltoniano, o espaço de fase é o fibrado cotangente do espaço de configuração, e o estado de um sistema é representado por um ponto neste espaço.

As equações de Hamilton,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{4.42}$$

podem ser escritas, em termos dos colchetes de Poisson,

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}, \tag{4.43}$$

como

$$\dot{q}^i = \{H, q^i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}. \tag{4.44}$$

Além disso, para um observável f, temos que

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} = \{H, f\}, \tag{4.45}$$

e dizemos que o Hamiltoniano gera a evolução temporal.

Quanto a abordagem Hamiltoniana na mecânica quântica, se quisermos, por exemplo, quantizar uma partícula em $\mathbb{R}^n$, devemos substituir observáveis que são funções no espaço de fase por operadores autoadjuntos em $L^2(\mathbb{R}^n)$, onde este é o espaço de Hilbert dos estados para a partícula. Além disso, os parênteses de Poisson são substituídos por comutadores. Em outras palvaras, devemos associar a cada f um operador $\hat{f}$, de tal modo que haja a correspondência

$$\{f, g\} = k \to [\hat{f}, \hat{g}] = -i\hat{k}. \tag{4.46}$$

O fator i é requerido para que o operador $\hat{k}$ seja autoadjunto, e consideramos unidades para as quais o fator $\hbar$ é igual à unidade. Se for possível conferir operadores aos observáveis de maneira satisfatória, torna-se possível descrever a evolução temporal dos observáveis ao escrever-se

$$\hat{f}_t = e^{it\hat{H}}\hat{f}e^{-it\hat{H}},$$

de tal sorte que

$$\frac{d}{dt}\hat{f}_t = i[\hat{H}, \hat{f}_t], \tag{4.47}$$

e a evolução temporada é novamente gerada pelo Hamiltoniano.

Ainda, os parênteses de Poisson fundamentais são

$$\{p_j, q^k\} = \delta^k_j, \quad \{p_j, p_k\} = \{q^j, q^k\} = 0, \tag{4.48}$$

e se definirmos operadores em $L^2(\mathbb{R}^n)$ por

$$\begin{aligned}(\hat{q}^j\psi)(x) &= x^j\psi(x)\\ (\hat{p}_j\psi)(x) &= -i\partial_j\psi(x),\end{aligned}$$

obtemos as relações canônicas de comutação:

$$[p_j, q^k] = -i\delta_j^k, \quad [p_j, p_k] = [q^j, q^k] = 0. \tag{4.49}$$

A fim de aplicar o formalismo da quantização canônica à relatividade geral, vamos considerar somente a equação de Einstein no vácuo. Novamente assumimos que o espaço-tempo M é difeomórfico à $\mathbb{R}\times S$, onde S é uma variedade 3-dimensional, e fixamos uma fatia spacelike Σ. Aqui, o análogo da posição q é a 3-métrica, e o análogo do espaço de configuração $\mathbb{R}^n$ é o espaço de de todas as métricas Riemannianas, $Met(\Sigma)$. Portanto, usaremos q_{ij} para representar ${}^3g_{ij}$, e q para o determinante de q_{ij}. Antes de prosseguir, escreveremos que, para cada fatia spacelike, a 3-métrica é

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b,$$

unicamente determinada pelas condições $h_{ab}n^b = 0$ e $h_{ab}s^a = g_{ab}s^a$ (para qualquer vetor tangente à Σ), que são consistente com o que já foi visto. Podemos, ainda, introduzir o campo vetorial evolução temporal t^a, tal que $t^a\nabla_a t = 1$, pois esta definição assegura que $t^a\nabla_a$ possa ser interpretado como ∂_t. Assim, podemos decompor t^a em uma parte tangente, $N^a = h^{ab}t_b$ e em uma parte normal, $Nn^a = t^a - h^{ab}t_b$, com $N = -n_a t^a$. Ademais, podemos definir o tensor de curvatura extrínseca como [6]:

$$K_{ab} = {}^3\nabla_a n_b = h_a^c h_b^d \nabla_c n_d. \tag{4.50}$$

Veja, então, que da definição de derivada de Lie, temos [6]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n h_{ab} &= n^c\nabla_c h_{ab} + h_{cb}\nabla_a n^c + h_{ac}\nabla_b n^c\\ &= (n_a n^c + g_a^c)\nabla_c n_b + (n_b n^c + g_b^c)\nabla_c n_a;\end{aligned} \tag{4.51}$$

e como $K_{ab} = h_a^c\nabla_c n_b = (g_a^c + n_a n^c)\nabla_c n_b$, além de ser simétrico nos índices, então:

$$\mathcal{L}_n h_{ab} = 2K_{ab} \implies K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab}. \tag{4.52}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2N}(Nn^c\nabla_c h_{ab} + h_{ac}\nabla_b(Nn^c) + h_{cb}\nabla_a(Nn^c)) \\ &= \frac{1}{2N}((t^c - N^c)\nabla_c h_{ab} + h_{ac}\nabla_b(t^c - n^c) + h_{cb}\nabla_a(t^c - n^c)) \\ &= \frac{1}{2N}\mathcal{L}_{t-N}h_{ab}, \end{aligned}$$

e, dado que K_{ab} é puramente espacial, poede ser projetado usando $h_a^c h_b^d$:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2N}h_a^c h_b^d \mathcal{L}_{t-N}h_{cd} \\ &= \frac{1}{2N}h_a^c h_b^d(\mathcal{L}_t h_{cd} - \mathcal{L}_N h_{cd}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

A primeira parte de (4.53) é simplesmente $\dot{h}_{cd}$. Quanto à segunda parte, esta pode ser claculada de maneira puramente espacial, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N}h_a^c h_b^d \mathcal{L}_N h_{cd} &= \frac{1}{2N}(N^c\,{}^3\nabla_c h_{ab} + h_{cb}\,{}^3\nabla_a N^c + h_{ac}\,{}^3\nabla_b N^c) \\ &= \frac{1}{2N}({}^3\nabla_a N_b + {}^3\nabla_b N_a). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Finalmente, (4.53), já com a notação usual, é escrita como

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\dot{q}_{ij} - {}^3\nabla_i N_j - {}^3\nabla_j N_i). \quad (4.55)$$

Ora, de definições anteriores, temos

$$g^{ab} = h^{ab} - \frac{1}{N^2}(t^a - N^a)(t^b - N^b),$$

de modo que

$$ds^2 = -N^2dt^2 + h_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt).$$

Vê-se, pois, que

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2}. \quad (4.56)$$

Para a componente $(0,0)$ da métrica inversa, o cofator é $C_{00} = det(h_{ab})$; logo:

$$g^{00} = \frac{C_{00}}{det(g_{cd})} \implies det(g_{cd}) = -N^2 det(h_{ab}), \quad (4.57)$$

ou $det\, g = -N^2 det({}^3g)$, em nossa notação usual.

Vamos agora trabalhar com a densidade Langragiana para a relatividade geral,

$$\mathcal{L} = R\sqrt{-det\, g}; \quad (4.58)$$

que, ao usarmos (4.57), torna-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= R(N^2 det(^3g))^{\frac{1}{2}} \\ &= q^{\frac{1}{2}} N R.\end{aligned} \tag{4.59}$$

Através da equação de Gauss-Codazzi (4.24), descartando os termos que dão origem a divergências totais (estes se anulariam ao serem integrados, se considerarmos Σ compacta), escrevemos R em termos de ^3R e de K, e assim:

$$\mathcal{L} = q^{\frac{1}{2}} N(^3R + tr(K^2) - (tr\,K)^2). \tag{4.60}$$

O momento conjugado a q_{ij} é dado por

$$\begin{aligned}p^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{ij}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ij}}(N q^{\frac{1}{2}}(tr(K^2) - (tr\,K)^2)).\end{aligned} \tag{4.61}$$

Utilando a expressão (4.55), pode-se escrever

$$tr(K^2) = \frac{1}{4} N^{-2}(\dot{q}_{ij} - {}^3\nabla_i N_j - {}^3\nabla_j N_i)(\dot{q}^{ij} - {}^3\nabla^i N^j - {}^3\nabla^j N^i) \tag{4.62}$$

$$(tr\,K)^2 = \frac{1}{4} N^{-2}(\dot{q}_{ij} q^{ij} - 2\,{}^3\nabla_i N^i)^2. \tag{4.63}$$

Com isto,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ij}}(tr\,K)^2 = \frac{1}{2} N^{-2} q^{ij}(\dot{q}^i_i - 2\,{}^3\nabla_i N^i) \tag{4.64}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ij}}(tr(K^2)) &= \frac{1}{4} N^{-2} q^{ik} q^{jl} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ij}}[(\dot{q}_{ij} - {}^3\nabla_i N_j - {}^3\nabla_j N_i)(\dot{q}_{kl} - {}^3\nabla_k N_l - {}^3\nabla_l N_k)] \\ &= \frac{1}{4} N^{-2} q^{ki} q^{lj} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ij}}(\dot{q}_{ij} - {}^3\nabla_i N_j - {}^3\nabla_j N_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} N^{-2}(\dot{q}^{ij} - {}^3\nabla^i N^j - {}^3\nabla^j N^i).\end{aligned} \tag{4.65}$$

Assim, (4.61) torna-se

$$p^{ij} = q^{\frac{1}{2}}(K^{ij} - tr(K) q^{ij}). \tag{4.66}$$

A densidade Hamiltoniana é encontrada através de

$$\mathcal{H} = p^{ij}\dot{q}_{ij} - \mathcal{L}, \tag{4.67}$$

e a integral desta quantidade sobre Σ é o Hamiltoniano para a relatividade geral:

$$H = \int_\Sigma \mathcal{H}\, d^3x. \tag{4.68}$$

A densidade Hamiltoniana fica explicitamente escrita como

$$\mathcal{H} = q^{\frac{1}{2}}(K^{ij} - tr(K)q^{ij})\dot{q}^{ij} - q^{\frac{1}{2}}N(^3R + tr(K^2) - (tr\,K)^2),$$

e, com o auxílio de (4.55), torna-se

$$\mathcal{H} = q^{\frac{1}{2}}2Ntr(K^2) - q^{\frac{1}{2}}2N(tr\,K)^2 + 2q^{\frac{1}{2}}(K^{ij} - tr(K)q^{ij})^3\nabla_j N_i - q^{\frac{1}{2}}N(^3R + tr(K^2) - (tr\,K)^2), \tag{4.69}$$

podendo ainda ser reescrita na forma

$$\mathcal{H} = q^{\frac{1}{2}}N(-\,^3R + tr(K^2) - (tr\,K)^2) + 2q^{\frac{1}{2}}\,{}^3\nabla_j[(K^{ij} - tr(K)q^{ij})N_i] - 2q^{\frac{1}{2}}N_i\,{}^3\nabla_j(K^{ij} - tr(K)q^{ij}), \tag{4.70}$$

e, se descartarmos o termo de divergência total [22]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= q^{\frac{1}{2}}[-N(^3R + (tr\,K)^2 - tr(K^2) - 2N^i\,{}^3\nabla_j(K_i^j - tr(K)q_i^j)] && (4.71)\\ \mathcal{H} &= q^{\frac{1}{2}}(NC + N^iC_i), && (4.72)\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} C &= -(^3R + (tr\,K)^2 - tr(K^2)) && (4.73)\\ C_i &= -2(^3\nabla_j K_i^j - \,^3\nabla_i K_j^j). && (4.74)\end{aligned}$$

Em termos de C e C_i, podemos escrever as equações de Einstein (4.40) e (4.41) como

$$\begin{aligned} C &= 2G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu && (4.75)\\ C_i &= -2G_{\mu i}n^\mu; && (4.76)\end{aligned}$$

ou seja, para a equação de Einstein no vácuo, $C = C_i = 0$, e a densidade Hamiltoniana deve ser nula, o que implica em dizer que

$$H = 0. \tag{4.77}$$

Esta equação parece indicar uma teoria completamente trivial, mas este não é caso. Veja que as equações de Einstein,

$$C = C_i = 0, \tag{4.78}$$

representam **vínculos** nos dados iniciais. Para ficar mais claro, considerando que o espaço de fase da relatividade geral é o espaço dos pares (q_{ij}, p^{ij}), ou o fibrado cotangente $T^*Met(\Sigma)$ (já que o espaço de configuração é $Met(\Sigma)$), as equações de Einstein representam restrições que selecionam um subespaço do espaço de fase, conhecido como o *espaço de fase físico*, cujos pontos representam os estados permitidos [5]:

$$X = \{C = C_i = 0\} \subset T^*Met(\Sigma). \tag{4.79}$$

A fim de formular as equações de Hamilton, pode-se definir formalmente os parênteses de Poisson de duas funções no espaço de fase por

$$\{f, g\} = \int_\Sigma q^{\frac{1}{2}} \{ \frac{\delta f}{\delta p^{ij}(x)} \frac{\delta g}{\delta q_{ij}(x)} - \frac{\delta f}{\delta q_{ij}(x)} \frac{\delta g}{\delta p^{ij}(x)} \} \, d^3x, \tag{4.80}$$

onde fazemos uso de *derivadas funcionais*, que podem ser entendidas como uma extensão do conceito usual de derivadas, e poderíamos, para um funcional $F[f(x)]$, por exemplo, definir

$$\delta F = \int_a^b \frac{\delta F}{\delta f(x)} \delta f(x) \, dx. \tag{4.81}$$

Ora, a derivada funcional $\frac{\delta q_{ij}(x)}{\delta q_{kl}(y)}$ pode ser expressa como o produto simetrizado [6]

$$\frac{\delta q_{ij}(x)}{\delta q_{kl}(y)} = (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l) \delta^3(x - y), \tag{4.82}$$

e, através de (4.80), podemos facilmente obter

$$\{p^{ij}(x), q_{kl}(y)\} = (\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j) \delta^3(x - y) \tag{4.83}$$

$$\{p^{ij}(x), p^{kl}(y)\} = 0 \tag{4.84}$$

$$\{q_{ij}(x), q_{kl}(y)\} = 0, \tag{4.85}$$

análogas às relações de comutação para uma partícula em $\mathbb{R}^n$. Ainda é possível calcular a parte evolucionária das equações de Einstein, equivalentes à $G_{ij} = 0$, através de

$$\dot{q}^{ij} = \{H, q^{ij}\}, \quad \dot{p}_{ij} = \{H, p_{ij}\}, \tag{4.86}$$

obtendo, por exemplo:

$$\dot{q}_{ij} = 2q^{-\frac{1}{2}} N(p_{ij} - \frac{1}{2} p_k^k q_{ij}) + 2\, {}^3\nabla_{[i} N_{j]}. \tag{4.87}$$

A equação para $\dot{p}_{ij}$ é ainda mais complicada, e fica claro que, mesmo no espaço de fase físico X onde $H = 0$, a evolução temporal dada pelas equações de Hamilton é não-trivial.

Devemos relembrar que o lapso e o deslocamento medem o quanto a evolução temporal empurra a fatia Σ nas direções normal e tangente, respectivamente. Em particular, se fizermos o deslocamento igual a zero, o Hamiltoniano para a relatividade geral é

$$C(N) = \int_\Sigma NCq^{\frac{1}{2}}\, d^3x, \tag{4.88}$$

que gera a evolução temporal de um modo que corresponde a empurrar Σ à frente na direção normal. Por outro lado, se fizermos o lapso igual a zero, o Hamiltoniano torna-se

$$C(\vec{N}) = \int_\Sigma N^i C_i q^{\frac{1}{2}}\, d^3x, \tag{4.89}$$

o qual gera um tipo particular de evolução temporal, empurrando Σ em uma direção tangente a ela mesma. Mais precisamente, esta quantidade gera transformações de X correspondendo ao fluxo em Σ gerado por $\vec{N}$. A fim de entender melhor isto, vamos considerar o parêntese de Poisson de qualquer quantidade com o vínculo $C(\vec{N})$. Mas, antes disso, veja que podemos reescrever (4.73) e (4.74) como

$$\begin{aligned} C &= -\,{}^3R + q^{-1}(tr(p^2) - \frac{1}{2}(tr(p))^2) && (4.90)\\ C_i &= -2\,{}^3(\nabla^j p_{ij})q^{-\frac{1}{2}}; && (4.91) \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} C(\vec{N}) &= -2\int_\Sigma d^3x\, q^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} N^i\, {}^3\nabla_j p_i^j \\ &= -2\int_\Sigma d^3x\, N^i q_{ik}\, {}^3\nabla_j p^{jk} \\ &= 2\int_\Sigma d^3x\, q_{ik} p^{jk}\, {}^3\nabla_j N^i \\ &= \int_\Sigma d^3x\, (p^{jk} q_{ik}\, {}^3\nabla_j N^i + p^{kj} q_{ij}\, {}^3\nabla_k N^i) \\ &= \int_\Sigma d^3x\, p^{jk}({}^3\nabla_j N_k + {}^3\nabla_k N_j) \\ &= \int_\Sigma d^3x\, p^{jk}(\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{jk}. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Do resultado anterior, temos que

$$\begin{aligned} \{q_{ij}, C(\vec{N})\} &= \int_\Sigma d^3x\, \{q_{ij}(x), (\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{kl}(y) p^{kl}(y)\} \\ &= \int_\Sigma d^3x\, (\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{kl}(y) \delta^k_{(i}\delta^l_{j)}\delta^3(x-y) \\ &= (\mathcal{L}_{\vec{N}} q)_{ij}(x), \end{aligned} \tag{4.93}$$

e, analogamente, que

$$\{p^{ij}, C(\vec{N})\} = (\mathcal{L}_{\vec{N}} p)^{ij}. \tag{4.94}$$

Logo, para uma função arbitrária das variáveis canônicas, $f(p,q)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\{f, C(\vec{N})\} &= \int_\Sigma d^3x\, (\frac{\delta f}{\delta q_{ij}(x)}\frac{\delta C(\vec{N})}{\delta p^{ij}(x)} - (\frac{\delta f}{\delta p^{ij}(x)}\frac{\delta C(\vec{N})}{\delta q_{ij}(x)}) \\
&= \int_\Sigma d^3x\, (\frac{\delta f}{\delta q_{ij}(x)}\{q_{ij}(x), C(\vec{N})\} + \frac{\delta f}{\delta p^{ij}(x)}\{p^{ij}(x), C(\vec{N})\}) \\
&= \int_\Sigma d^3x\, (\frac{\delta f}{\delta q_{ij}(x)}(\mathcal{L}_{\vec{N}}q)_{ij}(x) + \frac{\delta f}{\delta p^{ij}(x)}(\mathcal{L}_{\vec{N}}p)^{ij}(x)) \\
&= \mathcal{L}_{\vec{N}} f. \qquad (4.95)
\end{aligned}$$

Com este resultado, vemos que o vínculo $C(\vec{N})$ **arrasta por Lie** (Lie drags) a função $f(q,p)$ ao longo do vetor $\vec{N}$; ele é o gerador infinitesimal de difeomorfismos, e sua presença na teoria representa o fato de que ela é invariante sob difeomorfismos. O vínculo $C(N)$ é analogamente associado à invariância da teoria em relação a reparametrizações do tempo [13]. Pelas razões citadas, $C(\vec{N})$, ou C_i, é chamado de *vinculo de difeormorfismo*, enquanto $C(N)$, ou C, é conhecido como *vínculo Hamiltoniano*. O fato de de C e C_i desempenharem os papeis de vínculos e termos do Hamiltoniano é uma característica especial de teorias de campos sem estruturas fixas de background [5].

É interessante ver o que acontece quando calculamos os parênteses de Poisson dos vínculos. Por exemplo, se tivermos

$$f[M] = \int_\Sigma d^3x\, M^{a...b}{}_{c...d}\, f^{c...d}_{a...b}, \qquad (4.96)$$

com $M^{a...b}{}_{c...d}$ sendo um tensor arbitrário em Σ independente dos campos canônicos (p,q), e $f^{c...d}_{a...b}$ sendo uma densidade tensorial de peso $+1$; podemos, com o uso de (4.93), (4.94) e (4.95), facilmente obter o resultado

$$\{C(\vec{N}), f[M]\} = \int d^3x\, (\mathcal{L}_{\vec{N}} M^{a...b}{}_{c...d}) f^{c...d}_{a...b}. \qquad (4.97)$$

As expressões $\{C(\vec{N}), C(\vec{M})\}$ e $\{C(\vec{N}), C(M)\}$ seguem diretamente de (4.97). No entanto, $\{C(N), C(M)\}$ é consideravelmente mais complexa, pois a curvatura escalar ${}^3R$ depende da 3-métrica q_{ij} de modo não polinomial [2]. Escrevamos, então, as expressões:

$$\begin{aligned}
\{C(\vec{N}), C(\vec{M})\} &= C(\mathcal{L}_{\vec{N}}\vec{M}) = C([\vec{N}, \vec{M}]) \qquad (4.98)\\
\{C(\vec{N}), C(M)\} &= C(\mathcal{L}_{\vec{N}} M) \qquad (4.99)\\
\{C(N), C(M)\} &= C(\vec{K}), \qquad (4.100)
\end{aligned}$$

onde $\vec{K} = q^{ij}(M\partial_i N - N\partial_i M)$. Esta é a álgebra de Dirac completa para os vínculos. Note que os vínculos são fechados sob seus parênteses de Poisson, isto é, o parêntese de Poisson de quaisquer dois vínculos também é um vínculo, o que significa que eles são de *primeira classe* [18].

Ao tentar quantizar a gravidade com o formalismo Hamiltoniano, aparece um grande problema; precisaríamos definir o espaço de Hilbert para a teoria. Contudo, o espaço de configuração $Met(\Sigma)$ tem dimensão infinita, e não fica claro o que seria uma função quadrado integrável em $L^2(Met(\Sigma))$. De qualquer modo, suponha que $L^2(Met(\Sigma))$ seja uma escolha razoável. Precisamos, também, definir operadores correspondendo à 3-métrica e ao seu momento conjugado, e uma escolha possível seria

$$(\hat{q}_{ij}(x)\psi)(q) = q_{ij}(x)\psi(q) \tag{4.101}$$
$$(\hat{p}^{ij}(x)\psi)(q) = -i\frac{\delta}{\delta q_{ij}(x)}\psi(q), \tag{4.102}$$

onde $q \in Met(\Sigma)$ é uma 3-métrica e x é qualquer ponto de Σ. Estes operadores satisfazem as relações de comutação canônicas

$$[\hat{p}^{ij}(x), \hat{q}_{kl}(y)] = -i(\delta^i_k\delta^j_l + \delta^i_l\delta^j_k)\delta^3(x-y) \tag{4.103}$$
$$[\hat{p}^{ij}(x), \hat{p}^{kl}(y)] = 0 \tag{4.104}$$
$$[\hat{q}_{ij}(x), \hat{q}_{kl}(y)] = 0. \tag{4.105}$$

Podemos tentar quantizar o Hamiltoniano tomando as fórmulas clássica para os vínculos Hamiltoniano e de difeomorfismo, e substituíndo q_{ij} e p^{ij} por seus respectivos operadores. Entretanto, outro problema aparece: o problema de ordenação de operadores. Há diferentes modos de se escrever versões quânticas de C e C_i, e, já que $\hat{q}_{ij}$ e $\hat{p}^{ij}$ não comutam, estas escolhas dão origem a operadores distintos. Novamente, uma boa escolha seria aquela para a qual os vínculos quânticos satisfizessem relações de comutação análogas às relações clássicas:

$$[\hat{C}(\vec{N}), \hat{C}(\vec{M})] = -i\hat{C}([\vec{N}, \vec{M}]) \tag{4.106}$$
$$[\hat{C}(\vec{N}), \hat{C}(M)] = -i\hat{C}(\mathcal{L}_{\vec{N}}M) \tag{4.107}$$
$$[\hat{C}(N), \hat{C}(M)] = -i\hat{C}(\vec{K}). \tag{4.108}$$

Contudo, isto é bastante difícil de se conseguir, uma vez que lidamos com operadores que não são polinômios dos operadores básicos de posição e momento, mas, supondo que seja possível, podemos escrever o Hamiltoniano para a teoria quântica como:

$$\hat{H} = \int_\Sigma (N\hat{C} + N^i\hat{C}_i)q^{\frac{1}{2}}\, d^3x. \tag{4.109}$$

Classicamente, o Hamiltoniano se anula no espaço de fase físico X por causa das 4 equações de Einstein que servem como vínculos. Quanticamente, em uma abordagem utilizada por

Dirac, dizemos que um vetor ψ é um *estado físico* se satisfizer os vínculos na forma

$$\hat{C}(N)\psi = \hat{C}(\hat{N})\psi = 0, \tag{4.110}$$

para todo $N, \vec{N}$. Equivalentemente, podemos requerer que a **equação de Wheeler-DeWitt**

$$\hat{H}\psi = 0 \tag{4.111}$$

seja satisfeita para quaisquer escolha de lapso e deslocamento [10].

Vale notar que o programa de quantização canônica apresenta alguma sérias dificuldades. Podemos citar, por exemplo, que ninguém conseguiu encontrar soluções para a equação de Wheeler-DeWitt quando posta nesta forma [5]. Veja, também, que se achássemos estados físicos, estes gerariam um *espaço de estados físico*,

$$\mathcal{H}_{fis} = \{\psi : \forall N, \vec{N} \quad \hat{C}(N)\psi = \hat{C}(\vec{N})\psi = 0\}. \tag{4.112}$$

No entanto, não há nenhuma razão para que o produto interno fisicamente relevante em $\mathcal{H}_{fis}$ coincida com o produto interno em $L^2(Met(\Sigma))$. Este é o chamado **problema do produto interno**. Ainda, suponha que tenhamos um operador autoadjunto A, correspondendo a um observável na teoria. Como o Hamiltoniano se anula no espaço físico, segue que A corresponde a um observável que não muda com o tempo; este é o **problema do tempo** na gravitação quântica.

4.4 As Variáveis de Ashtekar

Tenta-se, há muitos anos, formular a relatividade geral de uma maneira na qual a conexão desempenhe um papel mais fundamental, enquanto métrica tenha um papel menos relevante. No formalismo de Palatini, como já visto, a métrica é um conceito secundário; os campos básicos sendo a conexão de Lorentz na imitação do fibrado tangente, $M \times \mathbb{R}^n$, e a estrutura de campo, $e : M \times \mathbb{R}^n \to TM$. Ao tentar quantizar a gravidade canonicamente usando tal formalismo, espera-se que hajam mais vínculos, uma vez que há mais variáveis. De fato, além dos vínculos de difeormorfismo e de Hamilton, aparece um vínculo de tipo *lei de Gauss*, análogo àquele da teoria do eletromagnetismo e de Yang-Mills. Embora a forma destes vínculos seja bem mais simples quando comparada à forma obtida do formalismo de Einstein-Hilbert (pode-se, por exemplo, escrever os vínculos na forma polinomial), eles não são fechados sob os parênteses de Poisson [5].

As novas variáveis podem ser vistas como uma modificação do formalismo de Palatini que evita o problema supracitado. A principal ideia é utilizar as características particulares do espaço-tempo 4-dimensional e trabalhar com a parte autodual da conexão de Lorentz. No que segue, não faremos distinção entre a conexão e seu potencial vetor.

Do mesmo modo que nas equações de Maxwell, utilizar a autodualidade na gravidade quando a métrica é de Lorentz implica em trabalhar com campos **complexos**. Assim, definimos o *o fibrado tangente complexificado* de M, $\mathbb{C}TM$, como o fibrado vetorial cuja fibra em cada ponto $p \in M$ é o espaço vetorial $\mathbb{C} \otimes T_pM$ consistindo de combinações lineares complexas dos vetores tangentes. Naturalmente, surge uma imitação deste fibrado tangente, o fibrado trivial $M \times \mathbb{C}^4$. Com isto, a **estrutura de campo complexa** é um isomorfismo entre fibrados vetoriais, $e : M \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}TM$.

Também em anologia com o caso para $M \times \mathbb{R}^4$, definimos a métrica interna η em $M \times \mathbb{C}^4$, o que nos possibilita levantar e abaixar índices internos. Agora, a conexão A em $M \times \mathbb{C}^4$ é uma 1-forma, com valores em $End(\mathbb{C}^4)$, em M; suas componentes são escritas como $A^I_{\alpha J}$, com α sendo um índice de espaço-tempo e I, J sendo índices internos. Novamente, A é uma conexão de Lorentz se $A^{IJ}_\alpha = -A^{JI}_\alpha$. Devido a esta antissimetria, podemos ver a conexão de Lorentz como uma 2-forma de valores em $\Lambda^2\mathbb{C}^4$, e, lembrando que o operador estrela de Hodge $\star$ mapeia 2-formas em 2-formas no caso de 4-dimensões, temos a base para a simetria de dualidade. Portanto, há um **operador estrela de Hodge interno** análogo, denotado por $*$, mapeando $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ nele mesmo, e dado por

$$*T^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL}T^{KL} \tag{4.113}$$

para qualquer quantidade com dois índices superiores antissimétricos. Pode-se, pois, definir o dual de Hodge interno por

$$(*A)^{IJ}_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL}A^K_\alpha L, \tag{4.114}$$

e escrevemos qualquer conexão de Lorentz A como a soma de suas partes autodual e antiautodual:

$$A = {}^+A + {}^-A, \quad *{}^\pm A = \pm i\,{}^\pm A. \tag{4.115}$$

Isto implica que

$$i * A = i * ({}^+A + {}^-A) = {}^-A - {}^+A, \tag{4.116}$$

e assim:

$${}^\pm A = \frac{1}{2}(A \mp i * A). \tag{4.117}$$

Na formulação autodual da relatividade geral, um dos campos básicos é a conexão autodual de Lorentz, ou seja, ${}^+A$ em $M \times \mathbb{C}^4$ tal que

$$*{}^+A = i\,{}^+A. \tag{4.118}$$

O outro campo é a estrutura de campo complexa, já definida anteriormente. A ação, neste formalismo, é construída usando a curvatura da conexão de Lorentz autodual, denotada por ${}^+F$, e dada por

$$ {}^+F^{IJ}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha {}^+A^{IJ}_\beta - \partial_\beta {}^+A^{IJ}_\alpha + [{}^+A_\alpha, {}^+A_\beta]^{IJ}, \tag{4.119} $$

em analogia com a expressão (3.32). Ainda, podemos, através das expressões (3.27) e (3.28), definir uma métrica g em M por

$$ g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} e^I_\alpha e^J_\beta, \tag{4.120} $$

com os coeficientes e^I_α sendo escritos como

$$ e^{-1}\partial_\alpha = e^I_\alpha \xi_I. \tag{4.121} $$

Observe, no entanto, que a estrutura de campo é complexa, e, como consequência, a métrica é, também, complexa. A *ação autodual*, análoga àquela dada por (3.38) é, então,

$$ S_{AD}({}^+A, e) = \int_M e^\alpha_I e^\beta_J {}^+F^{IJ}_{\alpha\beta}\, vol, \tag{4.122} $$

onde a forma volume é novamente dada por

$$ vol = \sqrt{-det\, g}\, d^4x. $$

Antes de prosseguir com o a variação da ação autodual, façamos mais uma análise sobre a autodualidade. Veja que podemos definir o dual de Hodge interno da curvatura de uma conexão em $M \times \mathbb{C}^4$ como

$$ (*F)^{IJ}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL} F^{KL}_{\alpha\beta}, \tag{4.123} $$

e dizemos que ela é autodual se

$$ *F = iF. \tag{4.124} $$

Segue diretamente de (4.119) que a curvatura de uma conexão de Lorentz autodual é, de fato, autodual, pois o comutador de duas matrizes autoduais é autodual. Isto pode também ser visto da seguinte maneira: uma conexão de Lorentz em $M \times \mathbb{C}^4$ é basicamente uma 1-forma com valores em $\mathfrak{so}(3,1) \otimes \mathbb{C}$, e, como $\mathfrak{so}(3,1)$ é uma álgebra de Lie isomórfica à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, então $\mathfrak{so}(3,1) \otimes \mathbb{C}$ e $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}$ são, também, isomórficas. Como consequência, $\mathfrak{so}(3,1) \otimes \mathbb{C}$ é uma soma direta de duas subálgebras de Lie isomórficas à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, chamadas de partes autodual e antiautodual, e a parte autodual de uma conexão de Lorentz é simplesmente a parte que tem componentes na subálgebra autodual. Ademais, já que toda subálgebra de Lie é fechada sob seus parênteses, se uma conexão ${}^+A$ for autodual, o mesmo pode ser dito sobre sua curvatura ${}^{+}F$ [5].

Vamos calcular a variação da ação autodual, demandando que $\delta S_{AD} = 0$. O formato desta ação é basicamente idêntico ao da expressão (3.38), obtida no formalismo de Palatini. Assim, podemos procedor de modo análogo ao que já foi feito. Variando primeiramente a conexão autodual ${}^{+}A$ (com $\delta e = 0$), e escrevendo

$$ {}^{+}\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = {}^{+}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + {}^{+}C^{\gamma}_{\alpha\beta}, \tag{4.125} $$

onde $\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ é dada pela expressão (3.34):

$$ \overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = A^{J}_{\alpha I} e^{I}_{\beta} e^{\gamma}_{J} \implies {}^{+}\overline{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = {}^{+}A^{J}_{\alpha I} e^{I}_{\beta} e^{\gamma}_{J}. \tag{4.126} $$

Isto significa, se olharmos para (3.49) (de onde concluímos que $C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$), que

$$ {}^{+}C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.127} $$

implicando que ${}^{+}A$ é, de fato, a parte autodual de uma conexão de Lorentz A em $M \times \mathbb{C}^4$ para a qual as correspondentes imitações do símbolos de Chistoffel (3.34) igualam-se aos símbolos de Christoffel da métrica g. Portanto, recorrendo à expressào (3.35), este fato sugere que a parte autodual do tensor de Riemann de g relaciona-se com ${}^{+}F$ por

$$ {}^{+}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma}{}^{\delta} = {}^{+}F^{IJ}_{\beta\gamma} e^{\alpha}_{I} e^{\delta}_{J}, \tag{4.128} $$

onde

$$ {}^{+}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma}{}^{\delta} = \frac{1}{2}(R^{\alpha}{}_{\beta\gamma}{}^{\delta} - \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\delta}{}_{\mu\nu} R^{\mu}{}_{\beta\gamma}{}^{\nu}). \tag{4.129} $$

Por outro lado, variando a estrutura de campo (com $\delta\,{}^{+}A = 0$), obtemos, em analogia com (3.45), a equação autodual de Einstein,

$$ {}^{+}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\,{}^{+}R = 0, \tag{4.130} $$

com

$$ {}^{+}R_{\alpha\beta} = {}^{+}R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\beta}, \quad {}^{+}R = {}^{+}R^{\alpha}_{\alpha}. \tag{4.131} $$

Então, de (4.131),

$$ \begin{aligned} {}^{+}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\,{}^{+}R &= \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} - \frac{i}{4}\epsilon^{\lambda}{}_{\beta\mu}{}^{\nu} R^{\mu}{}_{\alpha\lambda\nu} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} R^{\alpha}_{\alpha} + \frac{i}{8}\epsilon^{\lambda}{}_{\alpha\mu}{}^{\nu} g_{\alpha\beta} R^{\mu\alpha}{}_{\lambda\nu} \\ &= \frac{1}{4} R_{\alpha\beta} + \frac{i}{4}\epsilon^{\lambda}{}_{\alpha\mu}{}^{\nu} R^{\mu}{}_{\beta\lambda\nu}\,; \end{aligned} $$

e (4.130) torna-se

$$ R_{\alpha\beta} - i\epsilon^{\lambda}{}_{\alpha\mu}{}^{\nu} R^{\mu}{}_{\beta\lambda\nu} = 0, \tag{4.132} $$

o que implica em dizer que

$$R_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.133}$$

pois o segundo termo na expressão anterior não é nada mais que a identidade de Bianchi. Com isto, a métrica construída $g_{\alpha\beta}$ é plana (Ricci flat), ou seja, recuperamos a equação de Einstein para métricas complexas no espaço-tempo M. A fim de obter a relatividade geral usual, deve-se impor as chamadas **condições de realidade** (discutidas em [2]) à estrutura de campo, para que a métrica g tenha valores reais [5].

Seja, agora, a fatia spacelike Σ da variedade $\mathbb{R} \times S$, considerando, por simplicidade, que as coordenadas são tais que ∂_0 é normal à Σ, enquanto ∂_i é tangente à Σ para os índices spacelike. Assim, dada uma conexão autodual de Lorentz em $M \times \mathbb{C}^4$, podemos restringi-la a uma conexão A_i^{IJ} em $\Sigma \times \mathbb{C}^4$. Veja que é comum abandonar o sinal $+$ nesta notação. Esta conexão ainda satisfaz as condições

$$A_i^{IJ} = -A_i^{JI}, \quad *A = iA, \tag{4.134}$$

podendo ainda ser denominada conexão autodual de Lorentz. Ora, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ tem uma base em termos das matrizes de Pauli, e podemos escrever A_i^{IJ} como

$$-\frac{i}{2} A_i^a \sigma_a,$$

com as letras a, b, c denotando os índices de 1até 3, associados às matrizes de Pauli. O espaço de configuração para a relatividade geral em termos das novas variáveis será o espaço $\mathcal{A}$ de todas as conexões autoduais de Lorentz em $\Sigma \times \mathbb{C}^4$. Podemos dizer, pois, que o campo desempenhando o papel análogo ao da posição na mecânica clássica é, agora, A_i^a, em vez da 3-métrica [5].

Definindo a variável

$$\tilde{E}_a^i = q^{\frac{1}{2}} e_a^i, \tag{4.135}$$

é possível mostrar que a Lagrangiana para a relatividade geral pode ser posta na forma

$$L = \frac{1}{i} \int_\Sigma d^3x \, (\tilde{E}_i^a A_a^i + \underline{N} \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + \lambda^i (D_a \tilde{E}^a)^i), \tag{4.136}$$

da qual fica claro que $\tilde{E}_i^a$ e A_a^i são variáveis canonicamente conjugadas, e os parâmetros $\underline{N} = q^{-\frac{1}{2}} N$, N^a e λ^i (de gauge) são multiplicadores de Lagrange [14]. Ainda, a conexão A_a^i relaciona-se com a curvatura extrínseca por

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \beta K_a^i, \tag{4.137}$$

onde

$$\Gamma_a^i = \Gamma_{ajk}\epsilon^{jki}, \quad K_a^i = q^{-\frac{1}{2}} K_{ab}\tilde{E}^{ai} \tag{4.138}$$

e β é uma constante conhecida como parâmetro de Barbero-Immirzi. Ashtekar originalmente escolheu $\beta = i$, escolha que fizemos ao escrever a Lagrangiana em (4.136) [14].

Temos que nossas variáveis canônicas satisfazem as relações dos parênteses de Poisson [5],

$$\{A_i^a(x), \tilde{E}_b^j(y)\} = \beta\delta_b^a\delta_i^j\delta^3(x-y) \tag{4.139}$$

$$\{\tilde{E}_a^i(x), \tilde{E}_b^j(y)\} = 0 \tag{4.140}$$

$$\{A_i^a(x), A_j^b(y)\} = 0, \tag{4.141}$$

e, com nossa escolha para β, (4.139) torna-se

$$\{A_i^a(x), \tilde{E}_b^j(y)\} = i\delta_b^a\delta_i^j\delta^3(x-y), \tag{4.142}$$

o que é natural, dado que nossa conexão A é complexa.

Da Lagrangeana (4.136), obtemos o Hamiltoniano total

$$H = \int_\Sigma d^3x \, (\underline{N}\{\epsilon_{ijk}\tilde{E}_i^a\tilde{E}_j^b F_{ab}^k + N^a\tilde{E}_i^b F_{ab}^i + \lambda^i(D_a\tilde{E}^a)^i) \tag{4.143}$$

como uma combinação dos vínculos, já que $H = 0$ para a equação de Einstein no vácuo. Com isto, temos que

$$C = \epsilon_{ijk}\tilde{E}_i^a\tilde{E}_j^b F_{ab}^k = \epsilon^{abc}\tilde{E}_a^i\tilde{E}_b^j F_{ijc} = 0, \tag{4.144}$$

o vínculo Hamiltoniano;

$$C_j = \tilde{E}_i^a F_{ab}^i = \tilde{E}_a^k F_{jk}^a = 0, \tag{4.145}$$

o vínculo de difeomorfismo (onde F_{jk}^a é a curvatura de A em Σ).

Há, também, um terceiro vínculo, conhecido como vínculo da lei de Gauss, dado por

$$G_a = D_i\tilde{E}_a^i = D_a\tilde{E}_i^a = 0, \tag{4.146}$$

onde D é a conexão correspondente ao potencial vetor A.

Naturalmente, espera-se que estes vínculos sejam fechados sob os parênteses de Poisson, e estes podem ser calculados de modo similar ao que já foi feito no formalismo ADM. Os resultados são [14]:

$$\{G(\lambda), G(\mu)\} = G([\lambda, \mu]), \tag{4.147}$$

para a lei de Gauss, com

$$[\lambda, \mu]^i \equiv \lambda_j \mu_k \epsilon^{ijk};$$

novamente

$$\{C(\vec{N}), C(\vec{M})\} = C(\mathcal{L}_{\vec{N}}\vec{M}) \tag{4.148}$$

$$\{C(\vec{N}), C(M)\} = C(\mathcal{L}_{\vec{N}}M) \tag{4.149}$$

$$\{C(N), C(M)\} = C(\vec{K}), \tag{4.150}$$

com $\vec{K}$ agora sendo dado por

$$K^a = q^{-\frac{1}{2}}\tilde{E}^a_i \tilde{E}^{bi}(N\partial_b M - M\partial_b N);$$

e ainda

$$\{C(\vec{N}), G(\lambda)\} = G(\mathcal{L}_{\vec{N}}\lambda) \tag{4.151}$$

$$\{G(\lambda), C(N)\} = 0. \tag{4.152}$$

Deve-se ressaltar que, para obter os resultados (4.147) a (4.152), novamente suavizamos os vínculos com o uso de funções arbitrárias, definindo

$$C(N) = \int_\Sigma d^3x\, q^{-\frac{1}{2}} N \tilde{E}^{ai}\tilde{E}^{bj}F^k_{ab}\epsilon_{ijk} \tag{4.153}$$

$$C(\vec{N}) = \int_\Sigma d^3x\, N^a C_a \tag{4.154}$$

$$G(\lambda_i) = \int_\Sigma d^3x\, \lambda^i (D_a \tilde{E}^a)^i, \tag{4.155}$$

com

$$C_a = \tilde{E}^b_i F^i_{ab} - A^i_a(D_b \tilde{E}^b_i). \tag{4.156}$$

Note que a álgebra encontrada não obedece à estrutura verdadeira de uma álgebra de Lie: na equaçào (4.150), $\vec{K}$ não é uma constante de estrutura, pois depende dos campos $\tilde{E}^a_i$. Além disso, é válido notar que a lei de Gauss (4.146) para a gravidade é idêntica àquela das equações de Yang-Mills, o que torna a estrutura matemática da gravitação mais próxima àquela da teoria de Yang-Mills, embora haja diferenças cruciais: a presença dos vínculos Hamiltoniano e de difeomorfismo, e o fato de que a dinâmica é gerada pelos vínculos.

Quanto à quantização da teoria, espera-se que os estados sejam vetores no espaço $L^2(\mathcal{A})$ de todas as funções quadrado integráveis em $\mathcal{A}$. Vamos, então, pensar nos estados como funções arbitrárias ψ em $\mathcal{A}$, substituindo a *posição* e o *momento* clássicos pelos operadores

$$
\begin{aligned}
(\hat{A}_i^a(x)\psi)(A) &= A_i^a(x)\psi(A) & (4.157)\\
(\hat{E}_i^a(x)\psi)(A) &= \frac{\delta}{\delta A_i^a(x)}\psi(A), & (4.158)
\end{aligned}
$$

satisfazendo as relações de comutação análogas às relações clássicas (dos parênteses de Poisson):

$$[\hat{A}_i^a(x), \hat{E}_b^j(y)] = i(i\delta_b^a\delta_i^j\delta^3(x-y)) = -\delta_b^a\delta_i^j\delta^3(x-y) \quad (4.159)$$

$$[\hat{E}_a^i(x), \hat{E}_b^j(y)] = 0 \quad (4.160)$$

$$[\hat{A}_i^a(x), \hat{A}_j^b(y)] = 0. \quad (4.161)$$

Com estes operadores, podemos construir os operadores para os vínculos Hamiltoniano, de difeomorfismo e da lei de Gauss; uma escolha conveniente que parece satisfazer as relações de comutação (4.159) a (4.161) é [4, 5]

$$\hat{C} = \epsilon^{abc}\hat{E}_a^i\hat{E}_b^j\hat{F}_{ijc}, \quad \hat{C}_j = \hat{E}_a^k\hat{F}_{jk}^a, \quad \hat{G}_a = \hat{D}_i\hat{E}_a^i, \quad (4.162)$$

com

$$(\hat{F}_{jk}^a(x)\psi)(A) = F_{jk}^a(x)\psi(A). \quad (4.163)$$

Finalmente, como na secção anterior (na expressão (4.112)), vamos definir o *espaço de fase físico* $\mathcal{H}_{fis}$ como o espaço das funções ψ em $\mathcal{A}$ que satisfazem os vínculos na forma quântica, ou seja,

$$\mathcal{H}_{fis} = \{\psi : \hat{C}\psi = \hat{C}_j\psi = \hat{G}_a\psi = 0\}. \quad (4.164)$$

O problema resume-se a achar funções ψ em $\mathcal{H}_{fis}$.

5 TEORIA DE CHERN-SIMONS

Sabe-se que a métrica é relacionada a estruturas com background fixo em física. No entanto, como já visto, tais estruturas não são desejáveis em teorias como a relatividade geral, já que esta diz que qualquer métrica é permitida contanto que satisfaça a equação de Einstein. Com esta motivação, construiremos uma ação que não depende da métrica, o que torna possível escrever o estado de Chern-Simons, também conhecido como o estado de Kodama [19]. Mostra-se que tal estado satisfaz os vínculos (expressos nas variáveis de Ashtekar), em sua forma quântica, se trabalharmos com uma versão da relatividade geral na qual a constante cosmológica Λ é não nula. Assim, constata-se que o estado de Chern-Simons é solução da equação de Wheeler-DeWitt.

5.1 Classes de Chern

Escrevendo a ação de Yang-Mills [5]

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{2}\int_M tr(F \wedge \star F), \tag{5.1}$$

observamos que esta depende da métrica no espaço-tempo, já que há a presença do operador dual de Hodge. Assim, poderíamos tentar, para uma teoria que não envolvesse a métrica, uma ação do tipo

$$S(A) = \int_M tr(F \wedge F), \tag{5.2}$$

em 4 dimensões.

Mais geralmente, teríamos uma ação

$$S(A) = \int_M tr(F \wedge ... \wedge F) = \int_M tr(F^n), \tag{5.3}$$

onde $tr(F^n)$ é a n-ésima *forma de Chern.* Antes de variarmos esta ação, devemos estudar um pouco mais a curvatura F.

Seja a curvatura F de uma conexão D em E. Podemos vê-la como uma 2-forma valorada em $End(E)$, pois, para quaisquer campos vetoriais u e v, $F(u,v)$ é uma secção de $End(E)$ e as componentes

$$F(\partial_\mu, \partial_\nu)$$

são secções de $End(E)$ sobre um conjunto aberto U. Podemos, pois, definir a 2-forma curvatura F por

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}. \tag{5.4}$$

Definamos, agora, uma p-forma valorada em E como uma secção de $E \otimes \Lambda^p T^* M$, e segue que qualquer uma destas formas pode ser escrita como uma soma do tipo $s \otimes \omega$, onde s é uma secção de E e ω é uma forma diferencial ordinária em M. Ainda, temos que o produto externo de qualquer forma do tipo $s \otimes \omega$ por uma forma ordinária μ é dada por

$$(s \otimes \omega) \wedge \mu = s \otimes (\omega \wedge \mu).$$

Ainda, podemos definir a derivada covariante d_D de uma secção s de E como uma 1-forma $d_D s$, tal que

$$d_D s(v) = D_v s$$

para qualquer campo vetorial v em M. Se trabalharmos em coordenadas locais em algum conjunto aberto $U \subseteq M$, temos que

$$\begin{aligned} d_D s(v^{\mu}\partial_{\mu}) &= v^{\mu} D_{\mu} s \\ d_D s(\partial_{\mu}) &= D_{\mu} s \\ d_D s &= D_{\mu} s \otimes dx^{\mu}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Assim, para definir a *derivada covariante exterior* d_D para formas diferenciais com valores em E, basta defini-la para formas do tipo $s \otimes \omega$ da seguinte maneira:

$$d_D(s \otimes \omega) = d_D s \wedge \omega + s \otimes d\omega. \tag{5.6}$$

Veja que, trabalhando novamente em coordenadas locais x^{μ}, formas diferenciais do tipo $s \otimes \omega$ podem ser escritas unicamente como

$$s_I \otimes dx^I,$$

onde I abrange todos os índices, já que existe uma base de formas diferenciais dx^I. Sendo s_I secções de $E|_U$, temos

$$\begin{aligned} d_D(s_I \otimes dx^I) &= d_D s_I \wedge dx^I + s_I \otimes d(dx^I) \\ &= D_{\mu} s_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^I. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ademais, é necessário definir o produto exterior entre formas diferenciais valoradas em E e em $End(E)$. Seja a forma diferencial $T \otimes \omega$, onde T é uma secção de $End(E)$, e a forma $s \otimes \mu$, onde s é uma secção de E (ω e μ são formas ordinárias); o produto entre estas formas é definido como

$$(T \otimes \omega) \wedge (s \otimes \mu) = T(s) \otimes (\omega \wedge \mu). \tag{5.8}$$

Agora, com $\eta = s_I \otimes \omega^I$, temos

$$\begin{aligned}
d_D^2\eta &= d_D d_D(s_I \otimes \omega^I) \\
&= d_D(D_\nu s_I \otimes dx^\nu \wedge dx^I) \\
&= D_\mu D_\nu s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^I \\
&= \frac{1}{2}(D_\mu D_\nu s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^I + D_\nu D_\mu s_I \otimes dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^I) \\
&= \frac{1}{2}(D_\mu D_\nu s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^I - D_\nu D_\mu s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^I) \\
&= \frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu] s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^I \\
&= \frac{1}{2}F_{\mu\nu} s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^I \\
&= F \wedge \eta.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Vê-se, do último resultado, que a 2-forma curvatura F é independente da escolha de coordenadas, já que d_D também o é.

Tenha, agora, a identidade de Jacobi,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \tag{5.10}$$

válida par quaisquer operadores lineares $A, B, C : V \to V$ em um espaço vetorial V. Então, para campos vetoriais u, v e w em M, temos

$$[D_u, [D_v, D_w]] + [D_v, [D_w, D_u]] + [D_w, [D_u, D_v]] = 0; \tag{5.11}$$

a identidade de Bianchi. Se, ao invés dos campos vetoriais acima, tivermos os campos vetoriais coordenados $\partial_\mu, \partial_\nu, \partial_\lambda$, a identidade de Bianchi naturalmente assume a forma

$$[D_\mu, F_{\nu\lambda}] + [D_\nu, F_{\lambda\mu}] + [D_\lambda, F_{\mu\nu}] = 0. \tag{5.12}$$

De modo análogo ao que fizemos para a uma conexão D em E, podemos definir a derivada exterior covariante para uma conexão D em $End(E)$. Isto pode ser feito, de fato, bastando notar que pode-se obter uma conexão em $End(E)$ a partir de uma conexão em E, já que $End(E) = E \otimes E^*$. Tal derivada satisfaz algumas propriedades importantes, tais como

$$d_D(\omega \wedge \mu) = d_d\omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d_D\mu, \tag{5.13}$$

onde ω é uma p-forma com valores em $End(E)$ e μ é uma forma valorad em E (ou em

$End(E)$); e

$$[\omega, \mu] = \omega \wedge \mu - (-1)^{pq} \mu \wedge \omega = -(-1)^{pq}[\mu, \omega]. \tag{5.14}$$

Com estes resultados, vejamos o que acontece quando d_D^3 atua em uma forma η (valorada em E) em M. De (5.9), tem-se que

$$\begin{aligned} d_D^3\eta = d_D(d_D^2\eta) = d_D(F \wedge \eta) = d_D F \wedge \eta + F \wedge d_D\eta \\ d_D^3\eta = d_D^2(d_D\eta) = F \wedge d_D\eta, \end{aligned}$$

e, como as duas expressões são válidas para qulquer η, então

$$d_D F = 0, \tag{5.15}$$

que é uma nova forma para a identidade de Bianchi. Isto pode ser verificado se trabalharmos em coordenadas locais. Da expressão (5.4), escrevamos

$$F = \frac{1}{2} F_{I\nu} \otimes dx^I \wedge dx^\nu,$$

com $F_{I\nu} \otimes dx^I$ sendo uma 1-forma valorada em $End(E)$. Portanto:

$$\begin{aligned} d_D F &= d_D(F_{I\nu} \otimes dx^I) \wedge dx^\nu - \frac{1}{2} F_{I\nu} \otimes dx^I \wedge d_D dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} D_\mu F_{I\nu} \otimes dx^\mu \wedge dx^I \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{6}(D_\mu F_{\lambda\nu} \otimes dx^\mu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\nu + D_\nu F_{\mu\lambda} \otimes dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu + D_\lambda F_{\mu\nu} \otimes dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu) \\ &= \frac{1}{3!}(D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu}) \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Segue, de (5.15), que (5.16) é nula quando

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0,$$

o que é equivalente à identidade de Bianchi na forma (5.12).

Agora, consideremos que o fibrado E tenha uma conexão plana D^0, o que é verdade para todos os fibrados triviais. Com respeito à conexão D^0, escrevemos a derivada covariante externa de formas diferenciais valoradas em E ou $End(E)$ como

$$d = d_{D^0}.$$

Sabe-se que qualquer conexão D em E pode ser escrita como $D^0 + A$, onde A é seu potencial vetor (uma 1-forma valorada em $End(E)$). Com isto, mostraremos dois importantes resultados: para uma forma E-valorada ω, temos

$$\begin{aligned}
d_D\omega &= d_D(\omega_I \otimes dx^I) \\
&= D_\mu\omega_I \otimes dx^\mu \wedge dx^I \\
&= (D^0_\mu + A_\mu)\omega_I \otimes dx^\mu \wedge dx^I \\
&= d\omega + (A_\mu \otimes dx^\mu) \wedge (\omega_I \otimes dx^I) \\
&= d\omega + A \wedge \omega, \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

onde ω_I são secções de E; por outro lado, para uma p-forma $End(E)$-valorada $\eta_I \otimes dx^I$, tem-se, de maneira similar, que

$$d_D\eta = d\eta + [A, \eta], \qquad (5.18)$$

onde η_I são secções de $End(E)$.

Podemos calcular

$$\begin{aligned}
d^2_D\omega &= d_D(d_D\omega) \\
&= d_D(d\omega + A \wedge \omega) \\
&= d^2\omega + A \wedge d\omega + d_D(A \wedge \omega) \\
&= A \wedge d\omega + d(A \wedge \omega) + A \wedge A \wedge \omega \\
&= A \wedge d\omega + dA \wedge \omega - A \wedge d\omega + A \wedge A \wedge \omega \\
&= (dA + A \wedge A) \wedge \omega, \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

e, se compararmos esta expressão com (5.9), podemos concluir que

$$F = dA + A \wedge A. \qquad (5.20)$$

De posse da última expressão, podemos ver como F varia ao variarmos A;

$$\begin{aligned}
\delta F &= d\delta A + \delta A \wedge A + A \wedge \delta A \\
&= d\delta A + [A, \delta A] \\
&= d_D\delta A, \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

já que A é uma 1-forma $End(E)$-valorada.

Ainda, para uma p-forma μ e uma q-forma ν, sabe-se que $\mu\wedge\nu = (-1)^{pq}(\nu\wedge\mu)$, o que implica que

$$tr(\mu \wedge \nu) = (-1)^{pq} tr(\nu \wedge \mu). \qquad (5.22)$$

Tem-se, também, que

$$tr(d_D\mu) = d\,tr(\mu), \tag{5.23}$$

e, como consequência,

$$\int_M tr(d_D\mu \wedge \nu) = (-1)^{p+1} \int_M tr(\mu \wedge d_D\nu), \tag{5.24}$$

para uma varieadade orientada n-dimensional M, com $p + q = n - 1$.

Variando a ação (5.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_M tr(\delta F^n) \\
&= \int_M tr(\delta(F \wedge F^{n-1})) \\
&= n \int_M tr(\delta F \wedge F^{n-1}) \\
&= n \int_M tr(d_D\delta A \wedge F^{n-1}) \\
&= n \int_M tr(\delta A \wedge d_D F^{n-1}).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

No entanto,

$$\begin{aligned}
d_D F^{n-1} &= d_D(F \wedge F^{n-2}) \\
&= d_D F \wedge F^{n-2} + F \wedge d_D F^{n-2} \\
&= d_D F \wedge F^{n-2} + F \wedge d_D F \wedge F^{n-3} + ... \\
&= 0,
\end{aligned}$$

devido à identidade de Bianchi, e $\delta S = 0$ para todo A, o que significa que a esta Lagrangiana fornece equações triviais. Podemos, contudo, interpretar este resultado como o fato de que a ação é independente de A.

Há mais informações importantes a serem extraídas das formas de Chern. Veja que

$$\begin{aligned}
d\,tr(F^K) &= tr(d_D F^k) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

devido ao último resultado. Isto significa que todas as formas de Chern são fechadas, e que a k-ésima forma de Chern define *uma classe de cohomologia* em $H^{2k}(M)$. Rigorosamente, dizemos que duas p-formas ω e $\bar{\omega}$ são equivalentes se diferirem por uma p-forma exata, ou seja, se

$$\omega - \bar{\omega} = d\mu,$$

onde μ é uma (p-1)-forma. Neste jargão, fica definida a *classe de cohomologia*

$$[\omega] = \{\bar{\omega} : \exists \mu \; \omega - \bar{\omega} = d\mu\}, \tag{5.26}$$

como um elemento do p-ésimo grupo de cohomologia de M, $H^p(M)$.

Ademais, calculemos $\delta tr(F^K)$:

$$\begin{aligned}
\delta tr(F^K) &= k\, tr(\delta F \wedge F^{k-1}) \\
&= k\, tr(d_D \delta A \wedge F^{k-1}) \\
&= k\, tr(d_D(\delta A \wedge F^{k-1}) - \delta A \wedge d_D F^{k-1}) \\
&= k\, d\, tr(\delta A \wedge F^{k-1}),
\end{aligned}$$

e, se supusermos que A' é um potencial vetor com curvatura F', ao definirmos

$$\delta A = A' - A, \quad A_s = A + s\delta A,$$

podemos calcular a diferença entre duas formas de Chern,

$$\begin{aligned}
tr(F'^k) - tr(F^k) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} tr(F_s^k)\, ds \\
&= k \int_0^1 d\, tr(\delta A \wedge F_s^{k-1})\, ds \\
&= k\, d \left(\int_0^1 tr(\delta A F_s^{k-1})\, ds \right),
\end{aligned} \tag{5.27}$$

e concluímos que é exata. Vemos, pois, que embora a forma de Chern dependa de A, sua classe de cohomologia, não. Isto nos fornece um importante invariante, **a k-ésima classe de Chern** $c_k(E)$ de um fibrado $\pi : E \to M$, definida como a classe de cohomologia de $tr(F^k)$, onde F é a curvatura de qualquer conexão em E.

5.2 A Ação de Chern-Simons

Pode-se demonstrar que existe uma 3-forma explícita, cuja derivada exterior é igual a $tr(F \wedge F)$. Para este fim, considere um potencial vetor $A_s = sA$, de tal sorte que sua curvatura seja

$$F_s = sdA + s^2 A \wedge A.$$

Repetindo os passos feitos em (5.27), temos

$$\begin{aligned}
tr(F\wedge F)-0 &= \int_0^1 \frac{d}{ds}tr(F_s\wedge F_s)\,ds \\
tr(F\wedge F) &= 2\int_0^1 tr(\frac{dF_s}{ds}\wedge F_s)\,ds \\
&= 2d\int_0^1 tr(A\wedge F_s)\,ds \\
&= d\int_0^1 tr(2sA\wedge dA+2s^2A\wedge A\wedge A)\,ds \\
&= d\,tr(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A), \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que, neste caso, $\delta A = A$. A forma obtida em (5.28) é conhecida como forma de Chern-Simons, e pode-se facilmente mostrar que sua derivada exterior é a segunda forma de Chern:

$$\begin{aligned}
d\,tr(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A) &= tr(dA\wedge dA+\frac{2}{3}\cdot 3dA\wedge A\wedge A) \\
&= tr(dA\wedge dA+2A\wedge A\wedge dA) \\
&= tr[(dA+A\wedge A)(dA+A\wedge A)-A\wedge A\wedge A\wedge A] \\
&= tr[(dA+A\wedge A)(dA+A\wedge A)] \\
&= tr(F\wedge F), \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

onde, devido à propriedade (5.22), $tr(A\wedge A\wedge A\wedge A)=0$.

É interessante ressaltar que a forma de Chern-Simons, no caso para 4 dimensões, tem relação com a gravidade quântica, como veremos. Antes disso, definamos a **ação de Chern-Simons** $S_{CS}(A)$ do potencial vetor A no espaço S como

$$S_{CS}(A)=\int_S tr(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A). \qquad (5.30)$$

Esta ação tem características muito peculiares, a saber, ela é invariante sob todos os difeomorfismos de S que preservam a orientação, e é invariante sob transformações de gauge infinitesimais. Vamos demonstrar estas assertivas. Primeiramente, vejamos que a definição de integração para formas diferenciais pode ser feita de maneira independente das coordenadas. A fim de ver isto, podemos trabalhar com coordenadas locais em $\mathbb{R}^n$, definindo

$$\int_{\mathbb{R}^n}\omega=\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx^1...dx^n, \qquad (5.31)$$

onde $\omega = f\,dx^1\wedge...\wedge dx^n$ é uma n-forma em $\mathbb{R}^n$. Supondo outro conjunto de coordenadas em $\mathbb{R}^n$, podemos escrever $\omega = f'\,dx'^1\wedge...\wedge dx'^n$, e, dado que a forma volume se transforma como

$$dx'^1 \wedge ... \wedge dx'^n = (det\, T) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n,$$

onde

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

é o Jacobiano da transformação de coordenadas, segue que

$$f = (det\, T) f'.$$

Entretanto, pela expressão para mudança de coordenadas em integrais múltiplas, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f' |(det\, T)|\, dx^1 ... dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} f'\, dx'^1 ... dx'^n, \tag{5.32}$$

o que significa que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f'\, dx'^1 ... dx'^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\, dx^1 ... dx^n \tag{5.33}$$

para $(det\, T) > 0$, ou seja, quando a mudança de coordenadas preserva a orientação.

Assim, para um difeomorfismo ϕ (preservando a orientação) de S, teremos sempre que

$$\int_S \omega = \int_S \phi^* \omega,$$

com ϕ^* sendo o mapa *pullback*, e, deste modo,

$$S_{CS}(A) = S_{CS}(\phi^* A), \tag{5.34}$$

significando que a ação de Chern-Simons é invariante sob tais difeomorfismos, como queríamos demonstrar.

Agora, suponha que possamos construir E ao juntarmos fibrados triviais do tipo $U_\alpha \times V$ (com uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M), onde V é um espaço vetorial no qual o grupo de Lie G tem uma representação. Dizemos que $\pi : E \to M$ é um *fibrado G*. Se existir uma transformação linear T, tal que $T(p)$ é elemento de G para todo $p \in M$, ela é uma *transformação de gauge*. Costuma-se denotar por $\mathcal{G}$ o conjunto de todas as transformações de gauge [5].

Quanto à conexão, dizemos que D é uma conexão G, se, em coordenadas locais, as componentes de seu potencial vetor, A_μ, são elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Neste caso, sejam uma conexão G em E e uma transformação de gauge $g \in \mathcal{G}$; então existe uma nova conexão G, D', tal que

$$D'_v(gs) = g D_v s \implies D'_v(s) = g D_v(g^{-1} s), \tag{5.35}$$

para todos os campos vetoriais v em M e secções s de E, e é simples verificar que D' é, de fato, uma conexão G.

Podemos obter uma expressão para o potencial vetor de D', A', se trabalharmos em coordenadas locais. Inicialmente, veja que

$$\begin{aligned} D_\mu s &= D_\mu(s^i e_i) \\ &= (\partial_\mu s^i + A^i_{\mu j} s^j) e_i, \end{aligned}$$

onde $\partial_\mu(s) = D^0_\mu(s)$. Com isto,

$$\begin{aligned} D'_\mu(s) &= g D_\mu(g^{-1}s) \\ &= g(\partial_\mu(g^{-1}s) + A_\mu(g^{-1}s)) \\ &= g(\partial_\mu(g^{-1})s + g^{-1}\partial_\mu(s) + A - \mu(g^{-1}s)) \\ &= \partial_\mu(s) + [gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}](s) \\ &= \partial_\mu(s) + A'_\mu(s). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Em analogia com o resultado (5.36), podemos definir as pequenas transformações de gauge, isto é, uma família de transformações g_s, $s \in [0,1]$, tais que $g_0 = 1$ e $g_1 = g$, e para as quais a forma do potencial vetor transformado é

$$A_s = g_s A g_s^{-1} + g_s d(g_s^{-1}). \tag{5.37}$$

Sem perda de generalidade, trabalhemos com o caso $s = 0$. Antes de calcular a variação da ação de Chern-Simons transformada, escrevamos

$$T = \left.\frac{d}{ds} g_s\right|_{s=0}$$

para a secção T de $End(E)$. Considerando que

$$\frac{d}{ds} g_s g_s^{-1} = 0,$$

obtemos

$$\left.\frac{d}{ds} g_s^{-1}\right|_{s=0} = -T.$$

Podemos, pois, variar A_s,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}A_s\Big|_{s=0} &= (\frac{d}{ds}g_s A g_s^{-1} + g_s A \frac{d}{ds}g_s^{-1} + \frac{d}{ds}g_s\, d(g_s^{-1}) + g_s\, d(\frac{d}{ds}g_s^{-1}))\Big|_{s=0} \\
&= (TAg_s^{-1} - g_s AT + T\, d(g_s^{-1}) - g_s\, dT)\big|_{s=0} \\
&= (TA - AT - dT) \\
&= [T, A] - dT, \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$

obtendo uma expressão para como o potencial vetor varia sob transformações de gauge infinitesimais. Com isto, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}S_{CS}(A_s)\Big|_{s=0} &= \int_S tr([T, A] \wedge dA - dT \wedge dA + A \wedge d([T, A]) + 2A \wedge A \wedge ([T, A] - dT)) \\
&= \int_S tr([T, A] \wedge dA - d(T \wedge dA) + [T, A] \wedge dA + 2A \wedge A \wedge ([T, A] - dT)),
\end{aligned}
$$

onde, da propriedade cíclica do traço e do teorema de Stokes, temos que o segundo termo acima anula-se, e

$$\int_S tr(A \wedge A \wedge [T, A]) = 0.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}S_{CS}(A_s)\Big|_{s=0} &= 2\int_S tr([T, A] \wedge dA - A \wedge A \wedge dT) \\
&= 2\int_S tr(T \wedge A \wedge dA - A \wedge T \wedge dA - A \wedge A \wedge dT) \\
&= 2\int_S tr(d(A \wedge T \wedge A)) \\
&= 2\int_S d\, tr(A \wedge T \wedge A) \\
&= 0, \qquad (5.39)
\end{aligned}
$$

o que prova que a ação de Chern-Simons é invariante sob pequenas transformações de gauge, como queríamos demonstrar.

5.3 O Estado de Chern-Simons

No capítulo anterior, vimos que uma solução para a gravidade quântica deve satisfazer 3 equações de vínculo, expressas em (4.162). Podemos demonstrar que um estado construído a partir da ação de Chern-Simons satisfaz todos os vínculos, desde que consideremos uma versão da gravidade quântica com constante cosmológica não nula. Tal fato nos leva, pois, a uma interessante relação entre a teoria de Chern-Simons e a gravidade quântica.

Considere a equação de Einstein (para o vácuo) com constante cosmológica Λ,

$$R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}(\Lambda - \frac{1}{2}R) = 0, \tag{5.40}$$

e, em analogia com a equação (4.59) para a densidade Lagrangiana em termos do lapso,

$$\mathcal{L} = q^{\frac{1}{2}} NR = q\underline{N}R,$$

temos que a expressão equivalente para o termo cosmológico é

$$\mathcal{L}_{cosm} = q\underline{N}\Lambda. \tag{5.41}$$

Como o determinante da 3-métrica é dado por [5, 13]

$$q = \frac{1}{3!}\epsilon^{abc}\epsilon_{ijk}\tilde{E}^i_a\tilde{E}^j_b\tilde{E}^k_c, \tag{5.42}$$

então,

$$\mathcal{L}_{cosm} = \underline{N}\frac{\Lambda}{6}\epsilon^{abc}\epsilon_{ijk}\tilde{E}^i_a\tilde{E}^j_b\tilde{E}^k_c,$$

e a Lagrangiana (4.136) torna-se

$$L = \frac{1}{i}\int_\Sigma d^3x \left(\tilde{E}^a_i A^i_a + \underline{N}\epsilon_{ijk}\tilde{E}^a_i\tilde{E}^b_j F^k_{ab} - \underline{N}\frac{\Lambda}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}\tilde{E}^i_a\tilde{E}^j_b\tilde{E}^k_c + N^a\tilde{E}^b_i F^i_{ab} + \lambda^i (D_a\tilde{E}^a)^i\right). \tag{5.43}$$

A expressão (5.43) implica em dizer que a única mudança trazida paras as equações de vínculo, com a presença do termo cosmológico, acontece no vínculo Hamiltoniano (4.153), o qual ganha um termo extra, tornando-se

$$C(\underline{N}) = \int_\Sigma d^3x\, \underline{N}\left(\epsilon_{ijk}\tilde{E}^a_i\tilde{E}^b_j\tilde{F}^k_{ab} - \frac{\Lambda}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}\tilde{E}^i_a\tilde{E}^j_b\tilde{E}^k_c\right). \tag{5.44}$$

Quanticamente, tal como em (4.162), este vínculo será expresso por

$$\hat{C} = \epsilon^{abc}\hat{E}^i_a\hat{E}^j_b\hat{F}_{ijc} - \frac{\Lambda}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}\hat{E}^i_a\hat{E}^j_b\hat{E}^k_c. \tag{5.45}$$

Definamos, agora, o estado de Chern-Simons como a função em $\mathcal{A}$

$$\psi_{CS}(\mathcal{A}) = e^{-\frac{6}{\Lambda}S_{CS}(\mathcal{A})}, \tag{5.46}$$

onde $S_{CS}(\mathcal{A})$ é a ação de Chern-Simons definida em (5.30).

A escolha de construir este estado a partir da ação de Chern-Simons mostra-se crucial para que ele satisfaça os vínculos na forma quântica, como em (4.164). Dois destes vínculos, a saber, a lei de Gauss e o vínculo de difeomorfismo são automaticamente satisfeitos com tal escolha. Como descrito no capítulo anterior, se observarmos as relações (4.147), (4.151) e (4.152), veremos que a lei de Gauss, $G(\lambda)$, representa o gerador infinitesimal de transformações de gauge, enquanto o vínculo de difeomorfismo, $C(\vec{N})$ representa o gerador infinitesimal de difeomorfismos. No entanto, vimos que a ação de Chern-Simons é invariante sob difeomorfismos que preservam a orientação (5.34), sendo também invariante sob transformações infinitesimais de gauge (5.39). Assim, o estado ψ_{CS} herda naturalmente tais propriedades, satisfazendo, portanto, as condições

$$\hat{G}_a\psi_{CS} = \hat{C}_j\psi_{CS} = 0 \tag{5.47}$$

na forma quântica. Resta, então, verificar se ψ_{CS} satisfaz o vínculo Hamiltoniano, $\hat{C}\psi_{CS} = 0$.

Observe que, ao variarmos S_{CS}, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_{CS} &= \int_\Sigma tr(\delta A \wedge dA + A \wedge d(\delta A) + 2A \wedge A \wedge \delta A) \\ &= \int_\Sigma (d\,tr(A \wedge \delta A) + 2\,tr(\delta A \wedge dA) + 2\,tr(A \wedge A \wedge \delta A)) \\ &= \int_\Sigma 2\,tr((dA + A \wedge A) \wedge \delta A) \\ &= 2\int_\Sigma tr(F \wedge \delta A), \end{aligned} \tag{5.48}$$

onde usamos, uma vez mais, o teorema de Stokes. Em notação coordenada, temos

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j \\ &= -\frac{i}{4}F_{ij}^c\sigma_c dx^i \wedge dx^j, \end{aligned} \tag{5.49}$$

com F_{ij} expresso, em termos das matrizes de Pauli, como

$$F_{ij} = -\frac{i}{2}F_{ij}^c\sigma_c.$$

Similarmente, temos

$$\delta A = -\frac{i}{2}\delta A_k^d\sigma_d dx^k, \tag{5.50}$$

e, levando em conta que $tr(\sigma_c\sigma_d) = 2\delta_{cd}$, a variação (5.48) é igual a

$$\begin{aligned} \delta S_{CS} &= 4 \cdot \frac{i^2}{8}\int_\Sigma \delta_{cd}F_{ij}^c\delta A_k^d dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Sigma F_{ijc}\delta A_k^c dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Sigma \epsilon^{ijk}F_{ijc}\delta A_k^c\, d^3x. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Desta expressão, encontra-se, facilmente, a derivada funcional

$$\frac{\delta S_{CS}(A)}{\delta A_k^c(x)} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ijc}. \tag{5.52}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\psi_{CS}(A)}{\delta A_k^c(x)} &= \frac{\delta}{\delta A_k^c(x)}e^{-\frac{6}{\Lambda}S_{CS}(A)} \\
&= -\frac{6}{\Lambda}\left(-\frac{1}{2}\right)\epsilon^{ijk}F_{ijc}\psi_{CS}(A) \\
&= \frac{3}{\Lambda}\epsilon^{ijk}F_{ijc}\psi_{CS}(A),
\end{aligned} \tag{5.53}$$

e isto implica que

$$\epsilon_{ijk}\frac{\delta\psi_{CS}(A)}{\delta A_k^c(x)} = \delta_i^i\frac{3}{\Lambda}\epsilon^{ijk}F_{ijc}\psi_{CS}(A).$$

Uma vez que $\delta_i^i = 2$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left(F_{ijc} - \frac{\Lambda}{6}\epsilon_{ijk}\frac{\delta}{\delta A_k^c(x)}\right)\psi_{CS}(A) &= 0 \\
\epsilon^{abc}\frac{\delta}{\delta A_i^a}\frac{\delta}{\delta A_j^b}\left(F_{ijc} - \frac{\Lambda}{6}\epsilon_{ijk}\frac{\delta}{\delta A_k^c(x)}\right)\psi_{CS}(A) &= 0 \\
\left(\epsilon^{abc}\hat{E}_a^i\hat{E}_b^j\hat{F}_{ijc} - \frac{\Lambda}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}\hat{E}_a^i\hat{E}_b^j\hat{E}_c^k\right)\psi_{CS}(A) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.54}$$

onde usamos (4.158). Finalmente, de (5.45), vemos que a expressão acima corresponde a

$$\hat{C}\psi_{CS}(A) = 0, \tag{5.55}$$

como queríamos demonstrar. Concluímos que o estado de Chern-Simons satisfaz os vínculos na forma (4.164), sendo solução da equação de Wheeler-DeWitt (4.111).

Há muito o que se discutir sobre o estado de Chern-Simons. Kodama, que o descobriu em 1988 [19], discutiu, em seu trabalho seminal [20] seu possível significado físico. Ainda, através da representação em *loops* deste estado, tem sido possível construir toda uma classe de estados soluções da equação de Wheeler-Dewitt, com propriedades muito interessantes, como se pode ver nos trabalhos de Brügman, Gambini e Pullin [7, 12]. Smolin, também nesta perspectiva, utiliza o estado de Kodama como um indicador de que *loop quantum gravity* é uma teoria consistente para a gravidade quântica, já que tal estado dá origem a uma teoria com um bom limite para baixas energias (uma dos principais problemas enfrentados em LQG), reproduzindo a relatividade geral e teoria quântica de campos [26].

Pode-se, de uma forma superficial, mostrar o que é a representação em loops do estado de Chern-Simons, mencionada acima. Primeiramente, seja E um fibrado vetorial sobre M, cuja conexão é D, e seja $\gamma(t)$ um caminho suave de p até q, supondo que, para $t \in [0,T]$, $u(t)$ é um vetor na fibra de E sobre $\gamma(t)$. Diz-se que $u(t)$ é transportada paralelamente ao longo de γ se

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = 0$$

para todo t, e, usando um método recursivo, é possível resolver esta equação diferencial para $u(t)$, obtendo

$$u(t) = P\, e^{-\int_0^t A(\gamma'(s))\, ds} u, \tag{5.56}$$

onde temos a exponencial ordenada (path-ordered exponential) definida por

$$P\, e^{-\int_0^t A(\gamma'(s))\, ds} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} P \left(\int_0^t A(\gamma'(s))\, ds \right)^n. \tag{5.57}$$

Com isto, escrevemos

$$H(\gamma, D)u = u(t), \quad H(\gamma, D) = P\, e^{-\int_0^t A(\gamma'(s))\, ds}, \tag{5.58}$$

e $H(\gamma, D)$ define um mapa linear, que leva $u(t)$ de p até q ao longo de γ, sendo conhecida como a **holonomia** ao longo do caminho γ. Já conhecendo como uma conexão e seu potencial vetor se comportam após uma transformação de gauge, é possível mostrar que a expressão equivalente para a holonomia $H(\gamma, D')$ é

$$H(\gamma, D') = g(\gamma(T))H(\gamma, D)g(\gamma(0))^{-1},$$

o que significa que

$$H(\gamma, D') = g(p)H(\gamma, D)g(p)^{-1}$$

para uma holonomia ao redor de um *loop* (um caminho fechado) baseado em p. Como consequência,

$$tr(H(\gamma, D')) = tr(H(\gamma, D)),$$

ou seja, $tr(H(\gamma, D))$ é um invariante de gauge, recebendo o nome de *loop de Wilson*, e comumente denotado por

$$W(\gamma, D) = tr(H(\gamma, D)). \tag{5.59}$$

Assim, estes objetos, introduzidos por Kenneth Wilson [30], constituem observáveis físicos, fato que os torna relevantes para a Física [5]. Ademais, segundo Giles (1981), se o traço da holonomia de uma conexão para todos os possíveis loops de uma variedade for conhecido, tem-se, implicitamente, toda a a informação invariante de gauge da conexão [15]. Com isto, os loops de Wilson constituem uma base de funções invariantes de gauge de uma conexão, e isto sugere que estados (na representação da conexão) que satisfazem o vínculo da lei de Gauss (4.164), isto é, estados que são funções invariantes de gauge da conexão, podem ser expandidos na forma

$$\psi[A] = \sum_{\gamma} \psi[\gamma] W_{\gamma}[A], \tag{5.60}$$

onde $W_{\gamma}[A]$, definido em (5.59), é expresso por

$$W_{\gamma}[A] = tr\left(P\, e^{-\int_0^t A(\gamma'(s))\, ds}\right), \tag{5.61}$$

e os coeficientes $\psi[\gamma]$ são funções que dependem do loop γ; a soma sendo feita sobre todos os possíveis loops. Em analogia com a tranformada de Fourier

$$\psi(x) = \int dk\, \psi(k) e^{ikx},$$

podemos definir a *transformada de loop*

$$\psi[\gamma] = \int dA\, W_{\gamma}[A]\psi[A], \tag{5.62}$$

e podemos trabalhar diretamente com $\psi[\gamma]$, na *representação em loops* da teoria [7, 14].

Sendo o estado de Chern-Simons (agora denotado por ψ_{Λ}) uma solução da equação de Wheeler-DeWitt, é natural escrever sua representação em loops

$$\begin{aligned} \psi_{\Lambda}[\gamma] &= \int dA\, W_{\gamma}[A]\psi_{\Lambda}[A] \\ &= \int dA\, W_{\gamma}[A] e^{-\frac{6}{\Lambda} S_{CS}} \\ &= \langle W_{\gamma} \rangle, \end{aligned} \tag{5.63}$$

que pode ser vista como o valor esperado do loop de Wilson em uma teoria de Chern-Simons [12, 31].

Ainda, é interessante notar, graças ao trabalho de Witten [31], que um estado do tipo (5.63) coincide com um *invariante de enlaçamento* (link invariant) conhecido como o **parêntese de Kauffman** [4, 17]. Tais invariantes podem ser compreendidos como funções de coleções de loops que são invariantes sob deformações suaves dos loops.

6 CONCLUSÃO

A partir da formulação de Ashtekar para a relatividade geral [1], verificou-se que, embora ganhassem uma equação adicional, os vínculos do formalismo ADM ficaram bastante simplificados, e a estrutura matemática da relatividade geral, mais próxima daquela da teoria de Yang-Mills, devido ao vínculo da lei de Gauss. Isto possibilitou aplicar técnicas de teorias de gauge, em particular, da teoria de Chern-Simons, à gravidade quântica [5].

Considerando uma teoria de gravitação (para o vácuo) com constante cosmológica não nula, foi possível, com o uso da ação de Chern-Simons, construir uma solução muito simples para a equação de Wheeler-DeWitt, o estado de Chern-Simons, estudado inicialmente por Kodama [19].

Construindo a representação em loops do estado de Chern-Simons, para a qual estados da gravidade quântica correspondem a invariantes de enlaçamentos, observa-se uma interessante relação entre a gravidade quântica e a teoria de nós [5], área da Matemática que estuda tais invariantes.

Pretende-se, futuramente, estudar de maneira rigorosa a relação entre teoria de nós e loop quantum gravity, a fim de se construir mais soluções para a equação de Wheeler-DeWitt.

REFERÊNCIAS

[1] ASHTEKAR, A. **New Hamiltonian formulation of general relativity**. Physical Review D, v. 36, n. 6, p. 1587–1602, 15 set. 1987.

[2] ASHTEKAR, A. **New Perspectives in Canonical Gravity**. [s.l.] Prometheus Books, 1988.

[3] ASHTEKAR, A.; TATE, R. S. **Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity**. [s.l.] World Scientific, 1991.

[4] BAEZ, J. C. **Knots and quantum gravity**. [s.l.] Clarendon Press, 1994.

[5] BAEZ, J.; MUNIAIN, J. P. **Gauge Fields, Knots and Gravity**. [s.l.] WORLD SCIENTIFIC, 1994. v. 4

[6] BOJOWALD, M. **Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity**. 1 edition ed. Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, 2011.

[7] BRÜGMANN, B.; GAMBINI, R.; PULLIN, J. **Jones polynomials for intersecting knots as physical states of quantum gravity**. Nuclear Physics B, v. 385, n. 3, p. 587–603, 1992.

[8] CHERN, S.-S.; SIMONS, J. **Characteristic Forms and Geometric Invariants**. Annals of Mathematics, v. 99, n. 1, p. 48–69, 1974.

[9] CIANFRANI, F. et al. **Canonical Quantum Gravity: Fundamentals and Recent Developments**. [s.l.] World Scientific, 2014.

[10] DEWITT, B. S. **Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory**. Physical Review, v. 160, n. 5, p. 1113–1148, 25 ago. 1967.

[11] FREED, D. S. **Remarks on Chern-Simons Theory**. arXiv:0808.2507 [hep-th, physics:math-ph], 18 ago. 2008.

[12] GAMBINI, R.; PULLIN, J. **The Gauss Linking Number in Quantum Gravity**. arXiv:gr-qc/9310025, 19 out. 1993.

[13] GAMBINI, R.; PULLIN, J. **Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity**. [s.l.] Cambridge University Press, 2000.

[14] GAMBINI, R.; PULLIN, J. **A First Course in Loop Quantum Gravity**. 1 edition ed. Oxford; New York: Oxford University Press, 2011.

[15] GILES, R. **Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops**. Physical Review D, v. 24, n. 8, p. 2160–2168, 15 out. 1981.

[16] HAGGARD, H. M. et al. **Chern–Simons theory, a non-planar graph operator, and 4D quantum gravity with a cosmological constant: Semiclassical geometry**. Nuclear Physics B, v. 900, p. 1–79, nov. 2015.

[17] KAUFFMAN, L. H. **Knots and Physics**. [s.l.] World Scientific, 2001.

[18] KIEFER, C. **Quantum Gravity: Third Edition**. [s.l.] OUP Oxford, 2012.

[19] KODAMA, H. **Specialization of Ashtekar's Formalism to Bianchi Cosmology**. Progress of Theoretical Physics, v. 80, p. 1024–1040, 1 dez. 1988.

[20] KODAMA, H. **Holomorphic wave function of the Universe**. Physical Review D, v. 42, n. 8, p. 2548–2565, 15 out. 1990.

[21] ORITI, D. **Approaches to Quantum Gravity: Toward a New Understanding of Space, Time and Matter**. 1 edition ed. Cambridge, England; New York: Cambridge University Press, 2009.

[22] PADMANABHAN, T. **Gravitation: Foundations and Frontiers**. 1 edition ed. Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, 2010.

[23] ROVELLI, C. **Ashtekar formulation of general relativity and loop-space non-perturbative quantum gravity: A report.** Classical and Quantum Gravity, v. 8, n. 9, p. 1613, 1998.

[24] ROVELLI, C. **Quantum Gravity**. [s.l.] Cambridge University Press, 2004.

[25] ROVELLI, C.; VIDOTTO, F. **Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory**. 1 edition ed. Cambridge, United Kingdom; New York: Cambridge University Press, 2014.

[26] SMOLIN, L. **Quantum gravity with a positive cosmological constant**. arXiv:hep-th/0209079, 9 set. 2002.

[27] SOO, C. **Wavefunction of the Universe and Chern–Simons perturbation theory**. Classical and Quantum Gravity, v. 19, n. 6, p. 1051, 2002.

[28] THIEMANN, T. **Modern Canonical Quantum General Relativity**. 1 edition ed. Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, 2008.

[29] WALD, R. M. **General Relativity**. First Edition edition ed. Chicago: University Of Chicago Press, 1984.

[30] WILSON, K. G. **Confinement of quarks**. Physical Review D, v. 10, n. 8, p. 2445–2459, 15 out. 1974.

[31] WITTEN, E. **Quantum field theory and the Jones polynomial**. Communications in Mathematical Physics, v. 121, n. 3, p. 351–399, 1989.