

Ana Karolinnna Maia de Oliveira

***Estudo de Casos de Complexidade de Colorações
Gulosa de Vértices e de Arestas.***

Fortaleza – CE

Março/2011

Ana Karolinnna Maia de Oliveira

***Estudo de Casos de Complexidade de Colorações
Gulosa de Vértices e de Arestas.***

Dissertação de mestrado apresentada como requisito para obtenção do título de mestre em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Ceará.

Orientador:

Cláudia Linhares Sales

Co-orientador:

Rudini Menezes Sampaio

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PARGO - PARALELISMO, GRAFOS E OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

Fortaleza – CE

Março/2011

Resumo

Os problemas de coloração de vértices e de arestas, que consistem em determinar o menor número de cores necessárias para colorir os vértices e arestas de um grafo, respectivamente, de forma que vértices adjacentes e arestas adjacentes, respectivamente, possuem cores distintas, são problemas computacionalmente difíceis e são objeto de pesquisa recorrente em teoria dos grafos em virtude de inúmeros problemas práticos que eles modelam.

No presente trabalho, estudamos o pior desempenho dos algoritmos gulosos de coloração de vértices e de arestas. O algoritmo guloso tem o seguinte princípio geral: receber, um a um, os vértices (respect. as arestas) do grafo a ser colorido, atribuindo sempre a menor cor possível ao vértice (resp. aresta) a ser colorido. Observamos que colorir de forma gulosa as arestas de um grafo equivale a colorir de forma gulosa o seu grafo linha, tendo sido este o maior interesse na pesquisa em coloração gulosa de arestas.

O pior desempenho dos algoritmos é medido pelo maior número de cores que eles podem utilizar. No caso da coloração gulosa de vértices, esse é o número de Grundy ou número cromático guloso do grafo. No caso da coloração de arestas, esse é o índice cromático guloso ou índice de Grundy do grafo. Sabe-se que determinar o número de Grundy de um grafo qualquer é NP-difícil. A complexidade de determinar o índice de Grundy de um grafo qualquer era entretanto um problema em aberto.

Na presente dissertação, provamos dois resultados de complexidade. Provamos que o número de Grundy de um grafo $(q, q - 4)$ pode ser determinado em tempo polinomial. Essa classe contém estritamente a classe dos cografos e P_4 -esparsos para os quais o mesmo resultado havia sido estabelecido. Esse resultado generaliza portanto aqueles resultados. O algoritmo apresentado usa a decomposição primeval desses grafos, determinando o parâmetro em tempo linear.

No que se refere à coloração de arestas, provamos que o problema de determinar o índice de Grundy é NP-completo para grafos em geral e polinomial para grafos caterpillar, implicando que o número de Grundy é polinomial para os grafos linha desses. Mais especificamente provamos que o índice de Grundy dos caterpillar é Δ ou $\Delta + 1$ e apresentamos um algoritmo polinomial para determiná-lo exatamente.

PALAVRAS-CHAVE: Coloração Gulosa, P_4 -conectividade, Decomposição Primeval, $(q, q - 4)$ -grafos, Grafos Linha.

Abstract

The vertices and edges colorings problems, which consists in determine the smallest number of colors needed to color the vertices and edges of a graph, respectively, so that adjacent vertices and adjacent edges, respectively, have distinct colors, are computationally hard problems and recurring subject of research in graph theory due to numerous practical problems they model.

In this work, we study the worst performance of greedy algorithms for coloring vertices and edges. The greedy algorithm has the following general principle: to receive, one by one, the vertices (respect. edges) of the graph to be colored by assigning always the smallest possible color to the vertex (resp. edge) to be colored. We note that so greedy coloring the edges of a graph is equivalent to greedily coloring its line graph, this being the greatest interest in research on greedy edges coloring.

The worst performance of the Algorithms is measured by the greatest number of colors they can use. In the case of greedy vertex coloring, this is the number of Grundy or greedy chromatic number of the graph. For the edge coloring, this is the greedy chromatic index or Grundy index of the graph. It is known that determining the Grundy number of any graph is NP-hard. The complexity of determining the Grundy index of any graph was however an open problem.

In this dissertation, we prove two complexity results. We prove that the Grundy number of a $(q, q - 4)$ -graph can be determined in polynomial time. This class contains strictly the class of cofrafos P_4 -sparse for which the same result had been established. This result generalizes so those results. The presented algorithm uses the primeval decomposition of graphs, determining the parameter in linear time.

About greedy edge coloring, we prove that the problem of determining the Grundy index is NP-complete for general graphs and polynomial for caterpillar graphs, implying that the Grundy number is polynomial for graphs of line of caterpillars. More specifically, we prove that the Grundy index of a caterpillar is Δ or $\Delta + 1$ and present a polynomial algorithm to determine it exactly.

KEYWORDS: Greedy Coloring, P_4 -conectivity, Primeval Decomposition, $(q, q - 4)$ -graphs, Line Graphs.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por tudo.

Várias pessoas contribuíram para que este trabalho fosse realizado. Sou profundamente grata a todas, e dedico agradecimento especial a algumas delas:

À minha orientadora, Cláudia Linhares, por todo o tempo dedicado, a paciência, a credibilidade depositada e a amizade. Ela realmente me guiou em todos os momentos nesta caminhada e esteve presente sempre que precisei. Certamente seu exemplo e seus sábios conselhos ficarão para além desta etapa de mestrado.

À minha família, em especial aos meus pais, Graça e Oliveira, por sempre terem colocado a minha educação em primeiro lugar. Obrigada por todo o amor e dedicação, e pelos esforços de ambos em tornar o ambiente o mais favorável possível aos meus estudos. Espero estar retribuindo um pouco do que fizeram por mim. Agradeço também minha irmã, Daniele, que sempre me incentivou e acreditou em mim.

Ao meu amor e verdadeiro companheiro, agora meu marido, Júlio. Mesmo à distância em uma parte do tempo deste mestrado, ele se fez presente e esteve ao meu lado, me dando forças, ajudando e apoiando nos momentos de dificuldade. Ele também fez tudo o possível para tornar o ambiente à minha volta favorável ao meu trabalho. Obrigada amor, por tornar não só esse momento, mas todos na minha vida mais agradáveis e felizes.

Ao meu co-orientador, Rudini Sampaio, meu orientador durante o estágio, Frédéric Havet, e ao colega Victor Campos, pelo grande auxílio nesta dissertação e o trabalho conjunto.

Às minha queridíssimas amigas e companheiras de todas as horas, Camila e Cibele, que acompanharam de perto cada momento desse período de mestrado. Obrigada amigas, por todo o carinho, o colo e o suporte que me deram. Teria sido bem mais difícil sem vocês.

Aos meus amigos Arthur, Marcio, Phablo e Vinícius, pela companhia nas muitas horas de laboratório, pelos estudos em grupos e por serem tão prestativos em ajudar e tirar dúvidas.

Também ao Professor e amigo Carlos, por ter me incentivado e acreditado em mim desde o início, além de toda assistência prestada durante a graduação e o mestrado.

Finalmente, ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
- pelo financiamento da bolsa de estudos para a realização do presente trabalho, e ao projeto
EWIN, pelo financiamento do estágio de mestrado.

Sumário

1	Introdução	p. 8
2	Notação e Conceitos Preliminares	p. 12
2.1	Conceitos Básicos	p. 12
2.2	Algumas Classes de Grafos	p. 14
2.3	Coloração de Grafos	p. 18
2.3.1	Coloração de Vértices	p. 18
2.3.2	Coloração de Arestas	p. 19
3	P_4-estrutura de um Grafo	p. 21
3.1	P_4 -conectividade	p. 21
3.2	P_4 -componentes	p. 23
4	Decomposição de Grafos	p. 26
4.1	Decomposição Modular	p. 26
4.2	Decomposição Primeval	p. 29
4.3	Decomposição de $(q, q - 4)$ -grafos	p. 32
5	Coloração Gulosa	p. 33
5.1	Coloração Gulosa Para $(q, q - 4)$ -grafos	p. 35
5.2	Coloração Gulosa de Arestas	p. 40
5.2.1	co- <i>NP</i> -completude de Coloração Gulosa de Arestas	p. 41
5.2.2	Índice de Grundy dos Caterpillars	p. 45

6 Conclusões	p. 50
Lista de Figuras	p. 52
Índice Remissivo	p. 53
Referências Bibliográficas	p. 55

1 Introdução

Seja k um inteiro positivo. Uma k -coloração própria de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição das cores $\{1, \dots, k\}$ aos seus vértices, de forma que uma mesma cor não é atribuída a dois vértices vizinhos. O problema clássico de coloração consiste em, dado um grafo G , encontrar o menor inteiro k para o qual G admite uma k -coloração própria. Esse inteiro k é chamado de número cromático de G e é denotado por $\chi(G)$. A k -coloração própria de arestas é definida de forma similar, mas nesse caso as k cores são atribuídas às arestas do grafo. O menor inteiro k para o qual o grafo admite uma k -coloração própria de arestas é o *índice cromático*, denotado por $\chi'(G)$.

Várias aplicações práticas podem ser modeladas com coloração de grafos. Mais especificamente, esse problema é utilizado em situações em que é necessário particionar um conjunto de objetos de acordo com algum critério, o que é bastante comum. Como exemplo, temos a alocação de produtos químicos em armazéns, a atribuição de frequências a antenas de rádio e o agendamento de palestras em uma conferência [1, 2]. O vasto número de aplicações é um dos motivos da coloração de grafos ser um problema extensivamente estudado em teoria dos grafos.

Calcular o número cromático de um grafo arbitrário G , é um problema NP-difícil [3]. De fato, mesmo a tarefa de encontrar uma boa aproximação para $\chi(G)$ é muito difícil. Especificamente, existe um $\varepsilon > 0$ tal que o problema de coloração não pode ser aproximado por um fator menor que n^ε , a menos que $P = NP$ [4]. Também é NP-difícil determinar o índice cromático de um grafo [29].

Nesse contexto, é natural que se busque alternativas que funcionem bem na prática, ou que resolvam o problema de maneira ótima para certas classes de grafos. Uma das alternativas mais utilizadas é também uma forma bastante intuitiva de colorir um grafo: cada vértice recebe a menor cor possível, isto é, a menor cor que não foi atribuída a nenhum de seus vizinhos. Essa estratégia também pode ser utilizada para colorir as arestas do grafo.

Precisamente, o algoritmo guloso de coloração (de arestas) é executado sobre um grafo $G = (V, E)$ e uma ordem de $V(G)$ ($E(G)$), atribuindo a cor i a um vértice (aresta) v , se i é a

menor cor tal que não existe nenhum vizinho de v previamente colorido com a cor i . O número cromático guloso ou número cromático *first-fit* de um grafo $G = (V, E)$, denotado por $\Gamma(G)$ ou $\chi_{ff}(G)$, é o maior inteiro k tal que existe uma ordem de $V(G)$ que, se utilizada pelo algoritmo guloso, leva o algoritmo a retornar uma coloração com k cores. Dado um inteiro k , determinar se $\Gamma(G) \geq k$ é um problema NP-completo [5]. O número guloso de arestas é denotado por $\Gamma'(G)$.

Neste trabalho, analisamos o problema de Coloração Gulosa para a classe dos $(q, q - 4)$ -grafos e o problema geral de Coloração Gulosa de Arestas.

Um P_4 é um caminho induzido com quatro vértices. Dizemos que um G é um $(q, q - 4)$ -grafo se nenhum conjunto de no máximo q vértices induz mais que $(q - 4)$ P_4 's distintos [6]. Tal classe generaliza outras classes de grafos como os cografos, que são os grafos livres de P_4 e os P_4 -esparcos. Existe ainda uma série de classes de grafos que são definidas com relação à quantidade de P_4 's induzidos que possuem, das quais um estudo detalhado é apresentado em [7].

O estudo do conjunto de P_4 's de um grafo G , também chamado de P_4 -estrutura de G , tem sido bastante explorado nos últimos anos. Uma razão para isso é o fato de que o complemento de um P_4 é também um P_4 , o que torna as propriedades expressadas em termos de P_4 's válidas no complemento. Note, por exemplo, que o complemento de um cografo é também um cografo.

Alguns problemas foram propostos utilizando a análise da P_4 -estrutura de um grafo. Dois grafos são P_4 -isomorfos se existe uma bijeção entre seus vértices de forma que um conjunto de quatro vértices induz um P_4 no primeiro grafo se e somente se sua imagem induz um P_4 no segundo grafo. A conjectura proposta em [8] e provada posteriormente em [9], afirma que um grafo P_4 -isomorfo a um grafo perfeito também é perfeito.

Esse conjunto de fatores motivou a introdução da noção de P_4 -conectividade [10]. Um grafo G é chamado de P_4 -conexo se para toda partição de seus vértices em dois conjuntos não vazios e disjuntos, algum P_4 induzido de G contém vértices de ambas as partes. A figura 1.1 apresenta todas as partições em dois conjuntos de vértices de um P_4 , que é trivialmente um grafo P_4 -conexo. As P_4 -componentes de um G são seus subgrafos induzidos maximais que são P_4 -conexos.

O conceito de P_4 -conectividade leva a um teorema estrutural aplicável a um grafo G qualquer. Tal teorema sugere a associação de uma árvore $T(G)$ a G , que representa uma decomposição do grafo, chamada de decomposição primeval, que será definida posteriormente.

Decompor um grafo é uma estratégia de divisão e conquista, que facilita a resolução de problemas. A árvore de decomposição primeval pode ser encontrada em tempo linear e é

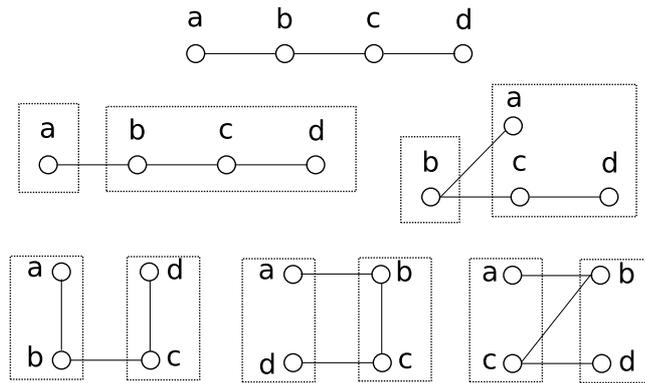


Figura 1.1: P_4 e suas partições.

única, a menos de isomorfismos [11]. Para algumas classes de grafos, podemos aplicar essa decomposição e, através de programação dinâmica, resolver problemas que são difíceis no caso geral.

A decomposição primeval possui uma relação especial com a classe dos $(q, q - 4)$ -grafos. As P_4 -componentes dos $(q, q - 4)$ -grafos, que são folhas na árvore de decomposição primeval, são bem definidas: ou são aranhas (Figura 1.2) ou são grafos com menos de q vértices.

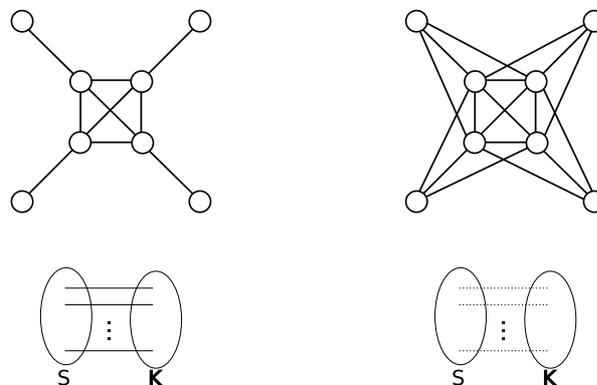


Figura 1.2: Exemplo de aranha magra e aranha gorda.

Diversos problemas difíceis no caso geral foram resolvidos em tempo linear para os $(q, q - 4)$ -grafos utilizando decomposição primeval [12]. Dentre eles, citamos a coloração de grafos [13]. O resultado principal deste trabalho é um algoritmo linear que utiliza a mesma decomposição para resolver a coloração gulosa para os $(q, q - 4)$ -grafos.

Como mencionado anteriormente, também analisamos o problema geral Coloração Gulosa de Arestas. Colorir as arestas de um grafo de forma gulosa equivale a colorir de forma gulosa o seu grafo linha, tendo sido este o maior interesse na pesquisa em coloração gulosa de arestas. Um grafo linha $L(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é tal que seu conjunto de vértices é $E(G)$ e dois vértices são adjacentes em $L(G)$ se as arestas correspondentes em G são adjacentes. Essa

classe é caracterizada por uma lista de subgrafos proibidos, que veremos mais adiante. Para o problema de Coloração Gulosa de arestas, apresentamos uma prova de NP-completude damos um algoritmo polinomial para resolvê-lo na classe dos caterpillars, árvores tais que se todas as folhas e arestas incidentes às mesmas forem removidas, o que resta do grafo é um caminho induzido.

O texto está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2 estabelecemos a terminologia utilizada e outros conceitos necessários ao entendimento do trabalho. No Capítulo 3 exploramos a noção de P_4 -conectividade, muito importante para o desenvolvimento desta dissertação. No Capítulo 4, discutimos duas decomposições de grafos: a modular, bastante conhecida e estudada, e a primeval. No Capítulo 5 investigamos a Coloração Gulosa nos $(q, q - 4)$ -grafos e a Coloração Gulosa em Arestas.

2 *Notação e Conceitos Preliminares*

Neste capítulo, são apresentadas as definições básicas de teoria dos grafos necessárias ao entendimento do trabalho, bem como a notação utilizada. Conceitos mais específicos são dados ao longo do texto. A maior parte das definições foi retirada dos livros [1] e [15], onde podem ser encontrados maiores detalhes.

2.1 **Conceitos Básicos**

Um *grafo* G é uma tripla ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$ consistindo de um conjunto não-vazio $V(G)$ de *vértices*, um conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de *arestas*, e uma função ψ_G que associa a cada aresta um par não ordenado de vértices de G . Comumente, usamos $G = (V, E)$ como notação de um grafo com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E . Todo grafo admite uma representação gráfica onde cada vértice é representado por um ponto e cada aresta é representada por uma linha unindo os pontos correspondentes aos vértices associados a tal aresta. Por simplicidade, escrevemos $e = uv$ ao invés de $\psi_G(e) = (u, v)$, e, quando conveniente, utilizamos uv para nos referirmos à aresta e .

Se e é uma aresta e u e v são vértices tais que $e = uv$, dizemos que e *incide* em u e em v e que u e v *incidem* em e . Dizemos ainda que tais vértices são as *extremidades* de e , e que a aresta e *une* u e v .

Uma aresta e é um *laço* se as suas duas extremidades são iguais. Duas arestas são *múltiplas* se elas coincidem em ambas as extremidades. Um grafo G é *simples* se ele não possui arestas múltiplas nem laços, e o seu conjunto de vértices é finito. Neste trabalho, tratamos apenas de grafos simples.

Duas arestas são *adjacentes* se elas possuem uma extremidade em comum (são incidentes a um mesmo vértice) e dois vértices são adjacentes se eles são incidentes a uma mesma aresta. A *vizinhança* $N_G(v)$ de um vértice v em um grafo G é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v . Definimos também a vizinhança de um conjunto de vértices S , $N_G(S)$, como a união das

vizinhanças de cada vértice em S . O grau de um vértice v , $d_G(v)$, é o número de arestas incidentes a v em G . Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o menor e o maior valor de grau entre os vértices de G , respectivamente. A vizinhança de arestas é definida de forma similar.

Chamamos *trivial* o grafo com apenas um vértice. G é *completo* se é simples e existe uma aresta entre cada par de vértices distintos. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices. G é *vazio* se não possui arestas. O *complemento* \bar{G} de G é o grafo simples cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e cujas arestas são exatamente os pares de vértices não adjacentes de G .

Dois grafos $G_1 = (V, E)$ e $G_2 = (V, E)$ são ditos *isomorfos* se existem bijeções $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ e $g : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$ tais que $v \in V(G_1)$ é incidente a $e \in E(G_1)$ se, e somente se, $f(v)$ é incidente a $g(e)$. Observemos que se G_1 e G_2 forem simples, um isomorfismo pode ser representado apenas por uma função $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ e temos que $(u, v) \in E(G_1)$ se, e somente se, $(f(u), f(v)) \in E(G_2)$.

Dizemos que o grafo H é um *subgrafo* de G ($H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H coincide de ψ_G . Seja S um subconjunto não-vazio de V . O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é S e cujo conjunto de arestas é o conjunto de arestas de G que tem as duas extremidades em S é o subgrafo de G induzido por S e é denotado por $G[S]$. Dizemos que $G[S]$ é um *subgrafo induzido* de G .

Um grafo $G = (V, E)$ é *livre de H* se nenhum subconjunto de V induz um grafo isomorfo a H .

Um *emparelhamento* em um grafo G é um subconjunto de arestas não-adjacentes entre si. Um subconjunto S de $V(G)$ é um *conjunto independente* ou *conjunto estável* de G se nenhum par de vértices de S é adjacente em G . Uma *clique* é um subconjunto K de $V(G)$ tal que $G[K]$ é completo. A cardinalidade do maior conjunto estável e da maior clique de um grafo G são denotadas, respectivamente, por $\alpha(G)$ e $\omega(G)$.

Um *passeio* em G é uma sequência finita e não nula $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$, cujos termos se alternam entre vértices e arestas, tais que, para $1 \leq i \leq k$, as extremidades de e_i são v_{i-1} e v_i . Dizemos que W é um passeio de v_0 para v_k . O inteiro k , que é a quantidade de arestas, é o tamanho de W . Em um grafo simples, W é determinado por uma sequência $v_0 v_1 \dots v_k$ de seus vértices, uma vez que para dois vértices $v_i v_{i+1}$ vizinhos na sequência existe apenas uma aresta entre eles, e por isso pode ser omitida na representação do passeio. Se os vértices v_0, v_1, \dots, v_k de W são todos distintos entre si, dizemos que esse passeio é um *caminho*, e, se v_0, v_1, \dots, v_k é um caminho, exceto por $v_0 = v_k$, dizemos que é um *ciclo*. Um *caminho induzido* em G com k vértices, denotado por P_k , é um caminho sem arestas de G que unem dois vértices não

sucessivos. Tais arestas são chamadas de *cordas*. O ciclo sem cordas, ou induzido, com k vértices é denotado por C_k .

Uma *partição* de um conjunto S é uma família de subconjuntos, também chamados classes, $\mathcal{P} = \{S_i \mid i \in I\}$, tais que $S_i \subseteq S$, $\bigcup_{i \in I} S_i = S$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$, para todo $i, j \in I$ onde $i \neq j$.

Dois vértices u e v estão *conectados* se existe um caminho entre u e v em G . Todo grafo G admite uma partição de $V(G)$ em subconjuntos não-vazios V_1, V_2, \dots, V_l tal que dois vértices u e v estão conectados se e somente se ambos u e v pertencem ao mesmo subconjunto V_i . Os subgrafos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_l]$ são chamados de *componentes* de G . Se G tem exatamente uma componente, então G é dito conexo. Equivalentemente, dizemos que um grafo é conexo se quaisquer dois de seus vértices estão conectados. Caso contrário, o grafo é chamado de *desconexo*.

Dois grafos são *disjuntos* se eles não tem vértices em comum. A *união* de dois grafos simples G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \cup G_2$ com conjunto de vértices $V(G_1) \cup V(G_2)$ e conjunto de arestas $E(G_1) \cup E(G_2)$. Se G_1 e G_2 são disjuntos, nos referimos a união deles como *união disjunta*, também denotada por operação \oplus . Essa operação é associativa e comutativa, e pode ser estendida para um número qualquer de grafos.

A *junção* de dois grafos disjuntos G_1 e G_2 , chamada de operação \circledast , é o grafo $G_1 \circledast G_2$ resultante da aplicação de \circledast acrescido do conjunto de arestas $\{\{vw\} : v \in V(G_1), w \in V(G_2)\}$, que são todas as arestas entre $V(G_1)$ e $V(G_2)$.

Dados grafos G e H , denotamos por *produto lexicográfico* $G[H]$ o grafo cujo conjunto de vértices é formado pelos elementos de $V(G) \times V(H)$ e cujo conjunto de arestas é $E(G[H]) = \{(a,x)(b,y) \mid ab \in E(G), \text{ ou } a = b \text{ e } xy \in E(H)\}$. O grafo $G[H]$ pode ser visto como se cada vértice de G fosse substituído por uma cópia de H .

Nos capítulos seguintes, quando estiver claro a que grafo estamos nos referindo, podemos omitir, nas notações dadas acima, o símbolo que indica um grafo específico. Por exemplo, em vez de $V(G)$ e $N_G(v)$ escrevemos apenas V e $N(v)$.

2.2 Algumas Classes de Grafos

Um grafo G é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y tais que toda aresta tem uma extremidade em X e outra em Y . Se esse grafo é simples e todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y , então G é um *grafo bipartido completo* denotado por $K_{r,s}$, onde $r = |X|$ e $s = |Y|$. Os $K_{1,s}$ são chamados *estrelas*.

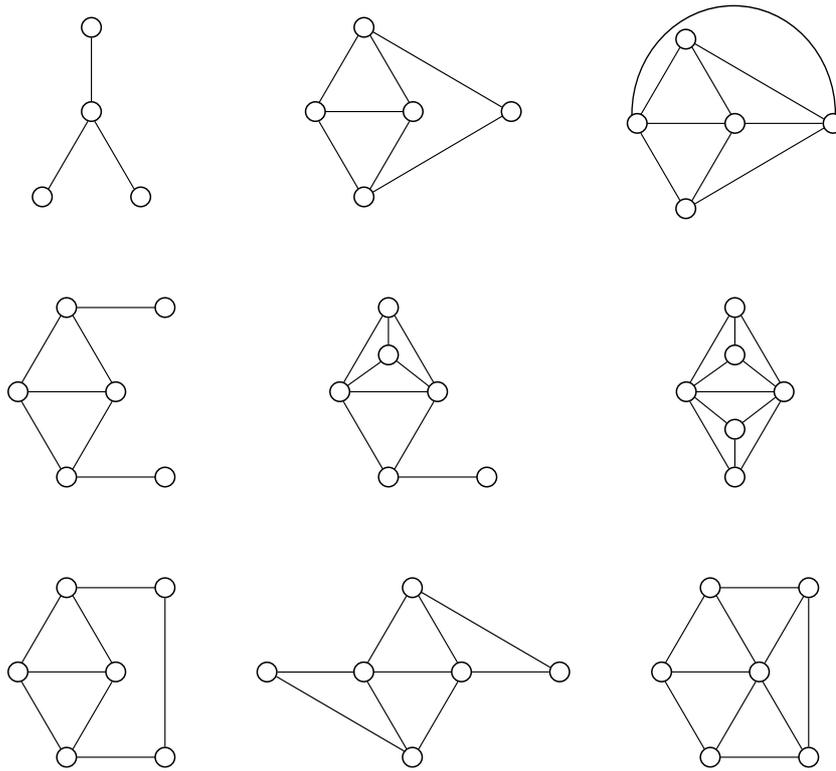


Figura 2.2: Os nove subgrafos proibidos de um grafo linha.

Esses grafos possuem uma decomposição muito simples, que facilita a resolução de problemas [18].

Um grafo G é P_4 -reduzível se, e somente se, cada vértice de G pertence a no máximo um P_4 induzido em G [19]. Note que essa classe é uma generalização dos cografos, uma vez que os mesmos não possuem P_4 's.

Dizemos que um grafo G é uma *aranha* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em 3 conjuntos disjuntos R , S e K tal que:

- K é uma clique, S é um conjunto estável e $|K| = |S| \geq 2$;
- Todo vértice de R se liga a todo vértice de K e a nenhum vértice de S ;
- Existe uma bijeção $f : S \rightarrow K$ tal que, para todo $s \in S$:
 1. ou $N(s) = f(s)$ (aranha magra);
 2. ou $N(s) = K \setminus \{f(s)\}$ (aranha gorda).

Exemplos de aranhas magra e gorda são mostrados na Figura 2.3.

Dizemos que um grafo é P_4 -esparso se cada subconjunto de 5 vértices seus induz no máximo um P_4 [20]. Uma das caracterizações dessa classe afirma que G é P_4 -esparso se, e

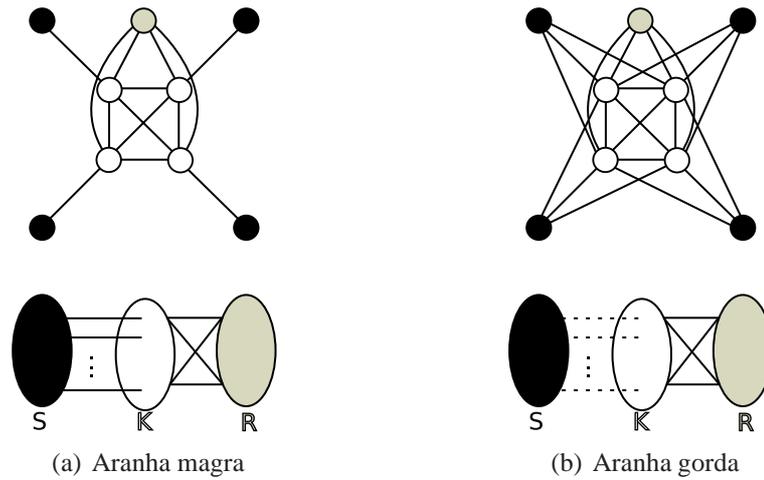


Figura 2.3: Aranhas.

somente se, todo subgrafo H induzido em G ou é desconexo, ou possui complemento desconexo, ou é uma aranha [21].

Os P_4 -leve [22] são os grafos cujos subgrafos induzidos de até seis vértices possuem no máximo dois P_4 induzidos ou são isomorfos ao grafo H ou ao grafo H' da Figura 2.4.

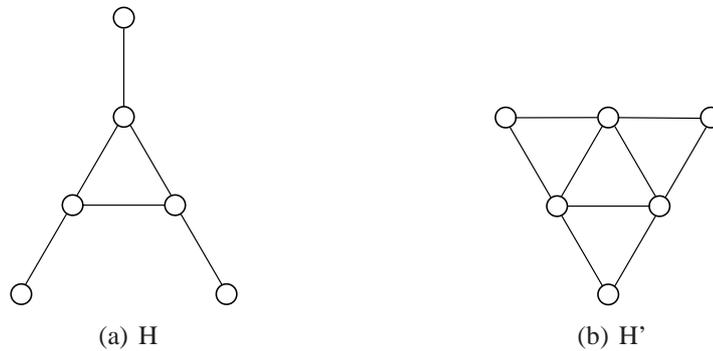


Figura 2.4: Grafos P_4 -leve.

A classe P_4 -extensível contém os grafos G tais que, para todo P_4 induzido P de G , existe um outro P_4 induzido P' de G , diferente de P , que intercepta P [23].

Os P_4 -arrumado são aqueles em que para todo P_4 induzido P , existe no máximo um vértice v tal que $v \cup V(P)$ induz mais de um P_4 [24].

Em [7] pode ser encontrado um estudo detalhado das P_4 -classes citadas acima.

Para finalizar este tópico, temos em seguida a definição da classe que faz parte do estudo central deste trabalho. Os (q,t) -grafos foram introduzidos em [6] e sua definição foi motivada pelo estudo das várias classes que contém um número restrito de P_4 , como P_4 -reduzível, P_4 -esparso e P_4 -leve. Tal estudo teve início com os cografos. Um incentivo para a investigação dos

grafos com poucos P_4 's são os bons resultados alcançados nos cografos, onde alguns problemas que são difíceis no caso geral podem ser resolvidos eficientemente, a exemplo do problema da b -coloração [25].

Definição 2.1 Um grafo $G = (V, E)$ pertence à classe dos (q, t) -grafos se nenhum conjunto de V com no máximo q vértices induz mais do que t P_4 's distintos em G .

Neste trabalho tratamos dos $(q, q - 4)$ -grafos. Na Figura 2.5 vemos o exemplo de um grafo que pertence e outro que não pertence a essa classe para $q = 5$. Observe, entretanto, que todo grafo está na classe $(q, q - 4)$ para algum q . Podemos ver que esse fato é verdadeiro tomando $q = \binom{n}{4} + 4$, onde $n = |V|$, pois certamente um grafo com n vértices não terá mais que $\binom{n}{4}$ P_4 's. Note que a definição da classe $(q, q - 4)$ permite que ela contenha grafos com menos de q vértices, e que todo subgrafo induzido de um $(q, q - 4)$ -grafo pertence à mesma classe, para o mesmo q .

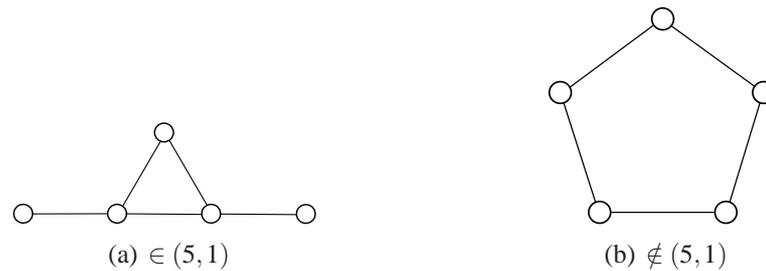


Figura 2.5: Exemplo de grafos que pertencem e não pertencem aos $(5, 1)$ – grafos.

Além de generalizar várias classes, como a classe dos cografos, que são os $(4, 0)$ -grafos, e a classe dos P_4 -esparcos, que são os $(5, 1)$ -grafos, a classe dos $(q, q - 4)$ -grafos possuem uma decomposição com um estrutura simples, como veremos mais adiante.

2.3 Coloração de Grafos

Nesta seção, vemos as definições básicas para coloração de vértices e coloração de arestas.

2.3.1 Coloração de Vértices

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma coloração de vértices de G , ou simplesmente uma *coloração* de G , é uma função $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada vértice do grafo um número inteiro, denominado cor. Denotamos por $c(H)$ a coloração c de um grafo G restrita a um subgrafo H de G .

Se uma coloração de um grafo G possui k cores, também podemos chamá-la de k -coloração de G . Habitualmente, escolhemos $\{1, 2, \dots, k\}$ para ser o conjunto de inteiros representativo das k cores de uma k -coloração.

Alternativamente, uma k -coloração de um grafo G pode ser vista como uma partição $\mathcal{P} = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ do conjunto de vértices de G em k conjuntos disjuntos onde cada conjunto S_i contém os vértices coloridos com a cor i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Os conjuntos S_i são as classes de cores da coloração.

Dizemos que uma coloração c é *própria* se uma mesma cor não é atribuída a dois vértices vizinhos. Em uma k -coloração própria, cada classe de cor é um conjunto estável. Como tratamos apenas de colorações próprias nesse texto, nos referimos às mesmas apenas como colorações ou k -colorações.

Um grafo é k -colorível se admite um k -coloração. O menor inteiro k para o qual um grafo G é k -colorível é o número cromático de G , denotado por $\chi(G)$.

Em um grafo $G = (V, E)$ tal que $|V| = n$, cada classe de cor possui no máximo $\alpha(G)$ cores, uma vez que são conjuntos estáveis. Dessa forma, temos o seguinte limite inferior para o número cromático: $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$. Um outro limite inferior é o tamanho da maior clique, já que em um grafo completo todos os vértices devem receber cores diferentes. O Teorema 2.1 mostra um limite superior para $\chi(G)$.

Teorema 2.1 [26] *Seja G um grafo conexo. Então, $\chi(G) \leq \Delta(G)$, a menos que G seja um ciclo ímpar ou um grafo completo, situações em que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

Determinar se um grafo qualquer é k -colorível é um problema NP -completo mesmo para $k = 3$ [3]. Consequentemente, determinar $\chi(G)$, dado um grafo G , é um problema NP -difícil. Além disso, existe um $\varepsilon > 0$ tal que o problema de coloração não pode ser aproximado por um fator menor que n^ε , a menos que $P = NP$ [4]. Em algumas classes específicas, porém, esse parâmetro pode ser obtido em tempo polinomial, como é o caso dos $(q, q - 4)$ -grafos [13].

2.3.2 Coloração de Arestas

A coloração de arestas é definida de forma similar à coloração de vértices. Dessa forma, uma k -coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de k cores às suas arestas, de tal forma que uma mesma cor não é atribuída a duas arestas adjacentes.

Uma k -coloração de arestas de um grafo G também pode ser vista como uma partição $\mathcal{P} = (M_1, M_2, \dots, M_k)$ do conjunto de arestas do grafo em k conjuntos disjuntos onde cada

conjunto M_i contém as arestas coloridas com a cor i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Cada M_i é um emparelhamento de G .

Observe que uma k -coloração de arestas de um grafo G qualquer é uma k -coloração de vértices do grafo linha $L(G)$ de G .

Um grafo é k -colorível em arestas se admite um k -coloração de arestas. O menor inteiro k para o qual um grafo G é k -colorível em arestas é o *índice cromático* de G , denotado por $\chi'(G)$. Claramente, $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

É fácil ver que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, pois todas as arestas incidentes ao vértice de maior grau em um grafo G são adjacentes entre si e portanto devem receber cores diferentes em uma coloração de arestas. O limite superior para o índice cromático é dado pelo conhecido Teorema de Vizing, onde afirma-se que $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, para um grafo G qualquer [1,27]. Assim, dado um grafo G , temos que $\chi'(G) \in \{\Delta, \Delta + 1\}$. Se $\chi'(G) = \Delta(G)$, dizemos que G pertence à *classe 1*. Caso contrário, G pertence à *classe 2*. Grafos bipartidos pertencem à classe 1 [1,28], mas determinar o índice cromático de um grafo arbitrário é *NP-completo*, como foi mostrado em [29]. Na verdade, nesse artigo é mostrado o seguinte teorema:

Teorema 2.2 *Determinar se o índice cromático de um grafo cúbico é 3 ou 4 é NP-completo.*

3 P_4 -estrutura de um Grafo

Neste capítulo, discutimos a P_4 -conectividade a definição de P_4 -componentes, conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

3.1 P_4 -conectividade

O conceito de P_4 -conectividade foi introduzido em [10] e se relaciona a outro conceito muito estudado em computação, que é a conectividade de um grafo. Sua definição também foi motivada pelas relações existentes entre P_4 's em classes de grafos como P_4 -reduzível, onde cada vértice pertence a no máximo um P_4 , entre outras classes discutidas amplamente em [7], e ainda pela observação de que o complemento de um P_4 é um P_4 .

Definição 3.1 *Um grafo $G = (V, E)$ é P_4 -conexo se para toda partição de V em dois conjuntos disjuntos e não vazios V_1 e V_2 , existe um P_4 induzido cruzando a partição, isto é, um P_4 contendo vértices de V_1 e V_2 .*

Obviamente, um P_4 é um grafo P_4 -conexo. Como ilustração, as partições de um P_4 são apresentadas na Figura 3.1.

Aranhas com $R = \emptyset$ também são P_4 -conexas, pois observe que sempre existem P_4 's sem cordas entre os vértices de S e K . Na Figura 3.2 são dados exemplos de aranha magra e aranha gorda com $R = \emptyset$. No primeiro caso da aranha (aranha magra), em que todo vértice de S tem um e somente um vizinho em K , todos diferentes (pela bijeção), temos P_4 's formados por dois vértices quaisquer de S e seus respectivos vizinhos em K , já que os vértices de S não são adjacentes por fazerem parte de um conjunto independente e os de K são todos vizinhos entre si, por fazerem parte de uma clique. No segundo caso (aranha gorda), em que cada vértice de S tem um único não vizinho, e nenhum tem o mesmo não vizinho, também temos P_4 's formados por dois vértices quaisquer de S , onde para um vértice de S , s_1 , escolhemos um vizinho qualquer dele na clique, k_i , e então pegamos o vértice não vizinho de k_i em S , s_i , e o não vizinho de s_1 em

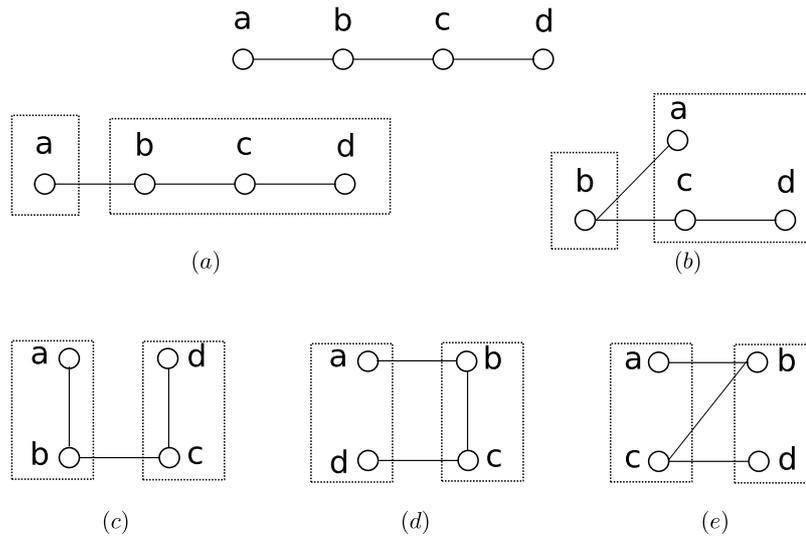


Figura 3.1: P_4 e suas partições.

K, k_1 . Então, em qualquer partição dos vértices de uma aranha, se tivermos somente vértices de S em uma das partições, escolhemos qualquer vértice e teremos um P_4 partindo dele e passando por um vértice de K que está na outra componente. Para uma partição somente com vértice de K , procedemos da mesma maneira, e para partições contendo ambos vértices de K e S , pegamos um vértice de S em cada uma das partições e construímos o P_4 da maneira citada acima.

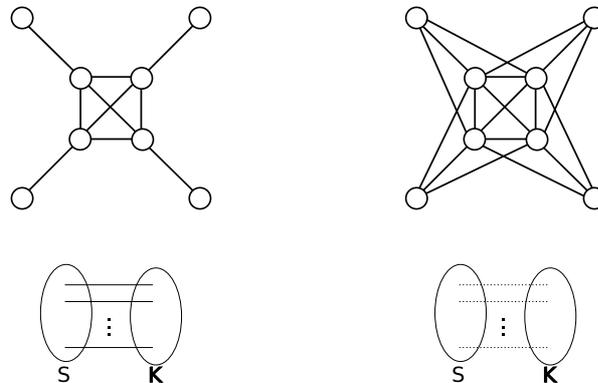


Figura 3.2: Aranha magra e aranha gorda com R vazio.

Grafos P_4 -conexos tem que ser conexos, mas não podem ter uma grande quantidade de arestas, pois nesse caso vão haver partições em que não temos nenhum P_4 sem cordas cruzando as partes. Note, por exemplo, que um grafo completo não satisfaz essa definição.

Os cografos, que são grafos livres de P_4 , não são grafos P_4 -conexos. Um outro exemplo de grafo não P_4 -conexo pode ser visto na Figura 3.3.

Uma outra caracterização para os grafos P_4 -conexos é baseada na definição de P_4 -cadeias [30]. Seja um grafo $G = (V, E)$ e sejam x e y dois vértices de G . Uma P_4 -cadeia de tamanho t conectando x e y é uma sequência de vértices distintos $(v_0, v_1, \dots, v_{t-1}, v_t)$ tal que

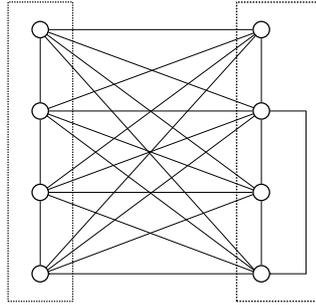


Figura 3.3: Grafo não P_4 -conexo.

- $x = v_0, y = v_t, e$
- para todo $i, (0 \leq i \leq t - 3)$, o conjunto $Q_i := \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ induz um P_4 .

Um grafo é P_4 -conexo se e somente se existe uma P_4 -cadeia conectando todo par de vértices do grafo [30]. É mostrado também em [30] que pode-se testar em tempo linear se um grafo é P_4 -conexo. No mesmo trabalho, é apresentado um algoritmo linear para construir uma P_4 -cadeia entre quaisquer dois vértices em um grafo P_4 -conexo.

Essa última caracterização se assemelha com a definição mais conhecida da conectividade habitual, em que um grafo é conexo se e somente se cada par de vértices é conectado por um caminho.

3.2 P_4 -componentes

Uma outra definição que merece destaque é a seguinte:

Definição 3.2 *As P_4 -componentes de um grafo G são os subgrafos induzidos de G que são P_4 -conexos, e além disso são maximais com relação a essa propriedade.*

Observe que toda P_4 -componente ou é um único vértice, que satisfaz a Definição 3.2 por vacuidade, ou deve ter pelo menos quatro vértices. Os vértices de um grafo $G = (V, E)$ que não estão contidos em nenhuma P_4 -componente com pelo menos quatro vértices de G são chamados de *vértices fracos*.

A Figura 3.4 mostra um exemplo de um grafo particionado em suas P_4 -componentes. Note que tal grafo não é P_4 -conexo. Basta observar que não há P_4 cruzando as partições $V_1 = V(P_1)$ e $V_2 = V(P_2 \cup P_3)$.

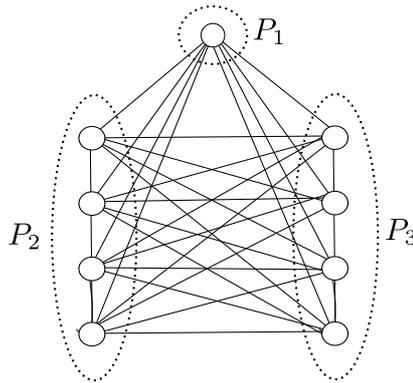


Figura 3.4: Grafo particionado em suas P_4 -componentes.

Dado o conceito de P_4 -componentes, temos que as seguintes observações são válidas para um grafo G qualquer:

1. G admite uma única partição em P_4 -componentes e vértices fracos;
2. Uma P_4 -componente de G também induz uma P_4 -componente em \bar{G} ;
3. Toda P_4 -componente é um subgrafo conexo de G e \bar{G} ;

A primeira observação vale pelo fato de que as P_4 -componentes são maximais. Do contrário, imagine que existe mais de uma partição. Seja a primeira partição \mathcal{A} e a segunda \mathcal{B} . Certamente uma das partes de \mathcal{A} tem interseção com uma das partes de \mathcal{B} . Sejam A_i e B_j essas partes, respectivamente. Cada uma dessas partes tem a propriedade de P_4 -conectividade, onde para toda partição que fizermos para cada uma delas teremos um P_4 cruzando. Chamemos de S a união de A_i e B_j . Qualquer partição de S em dois conjuntos de vértices vai ter vértices de A_i nas duas partes ou vértices de B_j nas duas partes. Isso garante que tem P_4 cruzando toda partição de S em dois conjuntos, e nesse caso A_i e B_j não são maximais.

A observação 2 segue do fato de um P_4 ser fechado sob complemento e a terceira observação segue da definição de P_4 -componentes juntamente com a segunda observação.

Uma outra importante definição é a de P_4 -componente separável:

Definição 3.3 Uma P_4 -componente é *separável* se existe uma partição do seu conjunto de vértices em subconjuntos não-vazios H_1 e H_2 , tal que todo P_4 que possui vértices em ambos H_1 e H_2 tem seus pontos internos em H_1 e as extremidades em H_2 .

Um P_4 é trivialmente separável (Figura 3.1 (d)). Também é fácil ver que uma aranha com $R = \emptyset$ é separável, basta olhar para a partição do seu conjunto de vértices em que $H_1 = K$ e

$H_2 = S$, o conjunto estável e a clique. Na Figura 3.5 podemos ver o exemplo de um grafo que não é P_4 -conexo, mas possui uma P_4 -componente separável.

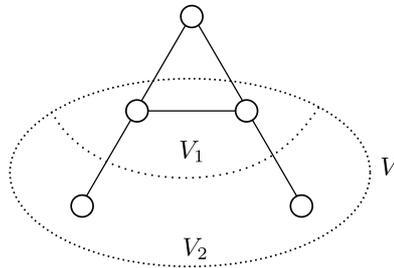


Figura 3.5: Grafo com P_4 -componente separável V .

As definições acima levam ao seguinte teorema, denominado Teorema da Estrutura, para uma grafo qualquer, provado em [10]:

Teorema 3.1 *Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer. Exatamente uma das seguintes afirmações é válida:*

1. G é desconexo;
2. \bar{G} é desconexo;
3. G é p -conexo;
4. Existe uma única p -componente própria separável H de G com partições (H_1, H_2) tal que todo vértice fora de H é adjacente a todos os vértices de H_1 e a nenhum vértice de H_2 .

4 Decomposição de Grafos

Já comentamos a importância das decomposições de grafos como ferramenta de auxílio na resolução de problemas. Neste capítulo apresentamos duas decomposições: a modular, uma das mais conhecidas e estudadas [7], e a primeval, definida com base no Teorema 3.1 (Teorema da Estrutura). Utilizamos a última para resolver problemas na classe dos $(q, q - 4)$ -grafos.

4.1 Decomposição Modular

Dado um grafo $G = (V, E)$, dizemos que $M \subseteq V$ é um *módulo* de G se, para todo $v \in V \setminus M$, v é adjacente a todo ou a nenhum vértice de M . De outra forma, um módulo de um grafo é um subconjunto do seu conjunto de vértices tal que os vértices que não pertencem a esse subconjunto não distinguem os que pertencem com relação à adjacência. A introdução desse conceito é atribuída a Gallai [31, 32].

A definição de módulo sugere naturalmente um particionamento do grafo nos conjuntos M , $N(M)$ e $\bar{N}(M)$, onde existem todas as arestas possíveis entre M e $N(M)$, nenhuma aresta entre M e $\bar{N}(M)$, e uma atribuição qualquer de arestas entre $N(M)$ e $\bar{N}(M)$. Essa característica ajuda a derivar algumas propriedades, como veremos adiante.

Uma observação pertinente é que M é um módulo de G se, e somente se, M é um módulo de \bar{G} . Note ainda que cada componente de um grafo G desconexo é um módulo desse grafo e cada componente de um grafo \bar{G} desconexo é um módulo de G . Também é fácil ver que entre dois módulos disjuntos de um grafo ou existem todas as arestas possíveis ou não há nenhuma. No caso de haver todas as arestas entre dois módulos de um grafo G , dizemos que esses módulos são adjacentes. Caso contrário, os dois módulos são não-adjacentes.

Os conjuntos com apenas um vértice, o conjunto vazio e $V(G)$ são os *módulos triviais* de G . Os demais módulos também são chamados de *conjuntos homogêneos*. Um grafo é *primo* se todos os seus módulos são triviais.

Um módulo M de um grafo G é *forte* se para todo módulo M' de G temos que $M \cap M' \in$

$\{\emptyset, M, M'\}$, ou seja, se M tem interseção com algum outro módulo de G , ou ele está contido ou contém esse outro módulo. Dizemos ainda que um M é um *módulo maximal forte* se M é maximal entre os módulos fortes do grafo, excluindo o próprio conjunto de vértices do grafo.

Uma *partição de congruência* \mathcal{P} em um grafo G é uma partição dos vértices de G de forma que cada parte é um módulo de G . Como todas as partes de uma partição \mathcal{P} são módulos dois a dois disjuntos, esses módulos são dois a dois adjacentes ou não-adjacentes. Representa-se a relação de adjacência entre as partes de \mathcal{P} por um grafo denominado grafo quociente, definido abaixo:

Definição 4.1 *Dado um grafo G e uma partição de congruência $\mathcal{P} = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$, o grafo quociente de G em relação a \mathcal{P} é o grafo $G_{\mathcal{P}}$ dado por $V(G_{\mathcal{P}}) = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ e $E(G_{\mathcal{P}}) = \{\{m_i, m_j\} : M_i, M_j \in \mathcal{P} \text{ e } M_i, M_j \text{ são adjacentes em } G\}$. Denominam-se fatores os subgrafos induzidos por cada membro de \mathcal{P} em G .*

Em outras palavras, $G_{\mathcal{P}}$ é o grafo onde cada vértice m_i representa um módulo de \mathcal{P} e dois vértices são adjacentes em $G_{\mathcal{P}}$ se e somente se os módulos correspondentes em G forem adjacentes.

Não é difícil ver que podemos ter uma partição de congruência formada pelos módulos maximais fortes de um grafo. Basta observar que, para os módulos fortes que estão contidos uns nos outros, podemos pegar o mais externo. Como dois módulos fortes M e M' não contém interseção diferente de \emptyset , M ou M' , podemos notar que existem blocos de módulos fortes. Pegamos então o mais externo de cada bloco de módulos fortes para fazer a partição de congruência. O seguinte teorema garante a existência de tal partição e, mais ainda, garante que ela é única.

Teorema 4.1 [33] *Dado um grafo não trivial G , existe uma única partição de congruência de G onde cada módulo é maximal forte.*

A *decomposição modular* se propõe a decompor um grafo recursivamente em seus módulos maximais fortes. Como vimos anteriormente, se o grafo é desconexo, suas componentes são módulos, e podemos ver facilmente que são módulos maximais fortes. Suponha que G possui três componentes G_1 , G_2 e G_3 . Podemos ver que G_1 juntamente com G_2 forma um módulo, mas não é forte porque G_2 com G_3 também é um módulo, e haveria uma interseção de G_2 . Podemos fazer um raciocínio semelhante para verificar que os módulos maximais fortes de um grafo com complemento desconexo são as componentes do complemento, uma vez que M é um módulo de G se, e somente se, M é um módulo de \bar{G} . No caso do grafo ser conexo com complemento conexo, não é tão simples ver quais são seus módulos maximais fortes.

A árvore que representa esta decomposição, chamada *árvore de decomposição modular* e denotada por $T(G)$, é exemplificada na Figura 4.1. A raiz dessa árvore é o grafo G , as folhas são os vértices de G e as folhas da sub-árvore enraizada em cada nó interno formam um módulo forte. Os nós internos são rotulados S (nó série), se o grafo for conexo com complemento desconexo; P (nó paralelo), se o grafo for desconexo e N (nó vizinhança), se o grafo for conexo com complemento conexo.

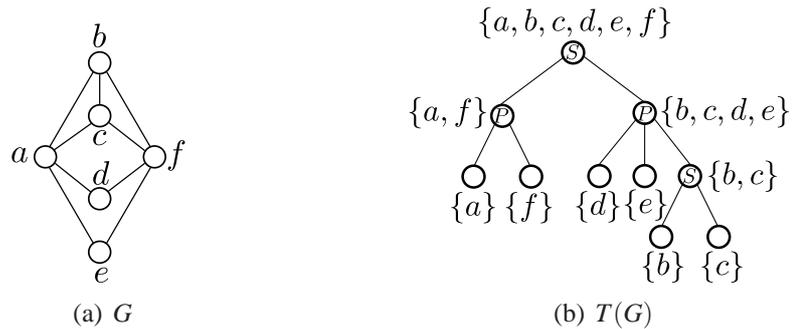


Figura 4.1: Grafo G e sua árvore de decomposição modular.

Uma descrição geral de como encontrar a árvore de decomposição modular é mostrada no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Decomposição Modular

Entrada: grafo $G = (V, E)$

Saída: árvore de decomposição modular $T(G)$ correspondente a G

1 se $|V| = 1$ então

2 retorne G ;

3 se G é desconexo então

4 rotule o nó como P ;

5 crie um nó para cada componente conexa G_i de G e execute o algoritmo para cada G_i ;

6 se \bar{G} é desconexo então

7 rotule o nó como S ;

8 crie um nó para cada componente $G[V(\bar{G}_i)]$ onde \bar{G}_i é uma componente de \bar{G} e execute o algoritmo para cada \bar{G}_i ;

9 se G e \bar{G} são conexos então

10 rotule o nó como N ;

11 seja $Q = q_1, q_2, \dots, q_k$ uma partição de congruência de G ; crie um nó para cada $G[q_i]$ e execute o algoritmos para cada $G[q_i]$.

A dificuldade da decomposição modular está em encontrar a partição relativa aos módulos maximais fortes dos nós de vizinhança. Existem diversos algoritmos na literatura que constroem a árvore de decomposição modular, alguns deles, inclusive, em tempo linear [34].

A decomposição modular de um grafo torna-se ainda mais útil para algoritmos em grafos quando os nós de vizinhança do grafo a ser decomposto possuem uma estrutura conhecida. Em [35], esse fato é utilizado para calcular o número guloso de algumas P_4 -classes.

Para maiores detalhes sobre o assunto é indicada a leitura de [7] e [36].

4.2 Decomposição Primeval

Em [10], foi apresentado um esquema de decomposição de grafos denominado decomposição homogênea, juntamente com a teoria da P_4 -conectividade. Tal esquema utiliza uma decomposição primitiva (primeval em inglês), introduzida no mesmo trabalho.

A decomposição primeval é derivada naturalmente pelo Teorema 3.1 (Teorema da Estrutura), que é uma consequência dos conceitos de P_4 -conectividade e P_4 -componente separável. Na árvore de decomposição do esquema em questão, as folhas são as P_4 -componentes do grafo (terceiro caso do teorema) e seus vértices fracos; Os nós internos correspondem a três tipos de operações de grafos (primeiro, segundo e quarto casos do teorema).

Já vimos anteriormente as operações de união disjunta (operação ①) e junção (operação ②). Claramente essas duas operações correspondem aos dois primeiros casos do teorema da estrutura, no sentido de que, se um grafo é desconexo, então ele é a união disjunta das suas componentes. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para o caso da junção. Precisamos de uma nova operação, que corresponde ao último caso do teorema.

Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos disjuntos tais que G_1 é uma P_4 -componente separável com partição (H_1, H_2) e G_2 é um grafo qualquer disjunto de G_1 :

- Operação ③: Todo vértice de G_2 torna-se adjacente a todo vértice de H_1 e a nenhum vértice de H_2 .

A Figura 4.2 ilustra a operação ③.

O seguinte teorema é mostrado em [10]:

Teorema 4.2 *Todo grafo G ou é P_4 -conexo ou pode ser unicamente obtido a partir de suas P_4 -componentes e seus vértices fracos através da aplicação de uma sequência finita das operações*

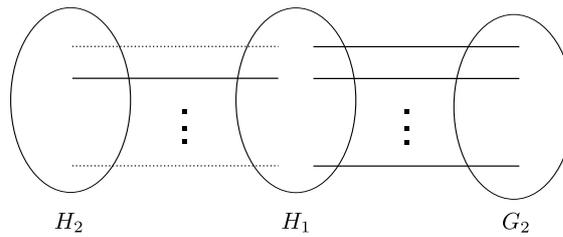


Figura 4.2: Operação ②

0, 1 e 2.

O Teorema da Estrutura e o Teorema 4.2 sugerem a associação de cada grafo G a uma árvore única $T(G)$, que é a árvore de decomposição primeval, cuja construção é feita através de chamadas recursivas ao Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Árvore de Decomposição Primeval

Entrada: grafo $G = (V, E)$
Saída: árvore de decomposição primeval $T(G)$ correspondente a G

- 1 **se** $|V| = 1$ ou G é P_4 -conexo **então**
- 2 retorne a árvore T tendo G como seu único vértice;
- 3 **se** G é desconexo **então**
- 4 sejam G_1, G_2, \dots, G_p ($2 \leq p$) as componentes de G ;
- 5 sejam T_1, T_2, \dots, T_p as árvores primevais de G_1, G_2, \dots, G_p , respectivamente, enraizadas em r_1, r_2, \dots, r_p ;
- 6 retorne a árvore $T(G)$ obtida pela adição de r_1, r_2, \dots, r_p como filhos de um nó ①
- 7 **se** \bar{G} é desconexo **então**
- 8 sejam $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_p$ ($2 \leq p$) as componentes de \bar{G} ;
- 9 sejam T_1, T_2, \dots, T_p as árvores primevais de $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_p$, respectivamente, enraizadas em r_1, r_2, \dots, r_p ;
- 10 retorne a árvore $T(G)$ obtida pela adição de r_1, r_2, \dots, r_p como filhos de um nó ①
- 11 **se** G satisfaz a condição 4 do Teorema da Estrutura **então**
- 12 faça G_1 a p -componente separável e $G_2 = G \setminus G_1$;
- 13 sejam T_1 e T_2 as árvores primevais de G_1 e G_2 , respectivamente, enraizadas em r_1 e r_2 ;
- 14 retorne a árvore $T(G)$ obtida pela adição de r_1 e r_2 como filhos de um nó ②

A Figura 4.3 mostra o exemplo de um grafo e sua árvore de decomposição primeval. Dado um grafo G qualquer, podemos encontrar $T(G)$ em tempo linear. Tal árvore é única, a menos de isomorfismos [11]. Observe ainda que a quantidade de nós de $T(G)$ é da ordem de $|V(G)|$,

uma vez que a árvore de decomposição primeval pode ser vista como uma árvore binária, com $|V(G)|$ folhas. Como em árvores desse tipo as folhas representam metade da quantidade total de nós, $|T(G)|$ possui ao todo $2|V(G)|$ nós.

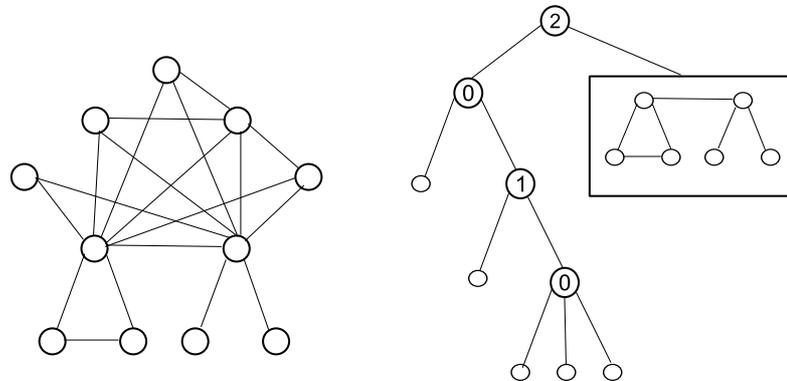


Figura 4.3: Grafo e a árvore de decomposição primeval correspondente.

Os problemas resolvidos em tempo linear para a classe $(q, q - 4)$ citados anteriormente utilizaram a decomposição primeval.

Em suma, para resolver um problema em um grafo através de um esquema de decomposição, primeiramente aplicamos tal decomposição ao grafo, gerando uma árvore. O próximo passo é resolver o problema para as folhas dessa árvore. Note que nesse ponto já existe uma diferença entre as decomposições modular e primeval: as folhas da primeira são vértices únicos, também chamados de vértices fracos, enquanto na segunda as folhas também podem ser P_4 -componentes separáveis. Resolver um problema para vértices fracos é trivial. No caso das folhas que são grafo P_4 -conexos, é necessário um pouco mais de trabalho, mas geralmente é fácil.

Uma vez resolvido o problema para as folhas, precisamos descobrir como resolvê-lo para os nós internos da árvore, que são rotulados por operações em grafos. Isto é, precisamos calcular um certo parâmetro para um grafo resultante de uma operação aplicada a outros grafos, para os quais o parâmetro já foi calculado. As decomposições citadas possuem as operações ① e ② em comum, mas diferenciam em uma terceira operação. Essa diferença é o que determina basicamente a escolha do esquema: a modular é adequada aos casos em que os nós de vizinhança do grafo a ser decomposto possuem uma estrutura conhecida, e a primeval é ideal para os casos em que os grafos P_4 -conexos, bem como as P_4 -componentes separáveis obtidas na operação ② são bem caracterizadas.

4.3 Decomposição de $(q, q - 4)$ -grafos

A seguinte caracterização dos $(q, q - 4)$ -grafos P_4 -conexos é mostrada em [6], onde a aranha considerada possui $R = \emptyset$.

Teorema 4.3 *Seja $G = (V, E)$ um $(q, q - 4)$ -grafo P_4 -conexo. Então, exatamente uma das sentenças abaixo é verdadeira:*

1. *Se G é um $(5, 1)$ -grafo então G é uma aranha;*
2. *Se G é um $(7, 3)$ -grafo então $|V| < 7$ ou G é uma aranha;*
3. *Se G é um $(q, q - 4)$ -grafo, $q = 6$ ou $q \geq 8$, então $|V| < q$,*

Ou seja, se $G = (V, E)$ é um $(q, q - 4)$ -grafo P_4 -conexo, então G é uma aranha ou possui menos de q vértices (nesse caso dizemos que G é pequeno). Na árvore de decomposição primeval, todo nó é um subgrafo induzido do grafo original. Então, se aplicarmos a decomposição primeval a um $(q, q - 4)$ -grafo, todo nó da árvore vai continuar pertencendo a classe $(q, q - 4)$. Como toda P_4 -componente é P_4 -conexa, pelo teorema acima, os nós que são P_4 -componentes ou são aranhas ou são pequenos. Esses nós serão folhas na árvore referida. Utilizando esta informação, vários problemas foram resolvidos em tempo linear para essa classe de grafos, entre eles, o problema de encontrar o número cromático [13]. Dentre outros problemas já resolvidos em tempo linear para essa classe, estão a versão ponderada da clique e conjunto independente, número cromático e cobertura por clique [13], largura em árvore e mínimo fill-in [37] e ainda o problema da árvore de Steiner, circuito hamiltoniano, coloração por lista, extensão de pré-coloração, entre outros [12].

5 Coloração Gulosa

Como vimos anteriormente, o problema clássico de coloração, que consiste em determinar o número cromático de um grafo qualquer, é *NP*-difícil. Uma vez constatado esse fato, é natural que se busquem métodos heurísticos para colorir um grafo minimizando a quantidade de cores utilizadas. Uma maneira intuitiva de fazer isso é colorir os vértices de forma gulosa, atribuindo a cor i a um vértice v se, e somente se, todas as cores menores que i já aparecem em algum dos vizinhos de v . O Algoritmo 3 descreve esse procedimento.

Algoritmo 3: Algoritmo guloso de coloração

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e ordem $\theta = v_1, v_2, \dots, v_n$ de $V(G)$

Saída: Coloração própria c de G

- 1 **para todo** $i = 1, \dots, n$ **faça**
 - 2 $\lfloor c(v_i) = k$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$ é a menor cor não utilizada em $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.
 - 3 **Retorne** c .
-

Dizemos que uma coloração c é gulosa se ela pode ser gerada pelo Algoritmo 3. Se a coloração gerada por tal algoritmo possui k cores, também podemos denotá-la por k -coloração gulosa. Não é difícil ver que o número de cores utilizadas depende da ordem escolhida para os vértices.

O problema de Coloração Gulosa consiste em determinar, dentre todas as possíveis ordenações sobre $V(G)$, a maior quantidade de cores que o algoritmo acima utiliza. Denotamos essa quantidade por *número guloso* de G , ou $\Gamma(G)$, também conhecido como número cromático *first-fit* ou número de Grundy.

O Algoritmo guloso de coloração gera somente colorações próprias de um grafo. Dessa forma, o número de cores de qualquer coloração gerada por tal algoritmo é um limite superior para o número cromático. Em particular, $\chi(G) \leq \Gamma(G)$. O número guloso representa o pior caso da aplicação do Algoritmo 3 em um grafo, determinando o quão ruim esse limite superior para o número cromático pode ser. Existe uma subclasse de árvores que demonstra que a distância

entre o número cromático e o número guloso de um grafo qualquer pode ser tão grande quanto desejarmos. A *árvore binomial* B_k , de ordem k , é definida como segue:

$$B_k = \begin{cases} \text{um vértice,} & \text{se } k = 0 \\ \text{uma árvore com raiz } r \text{ cujos filhos são } B_0, \dots, B_{k-1}, & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

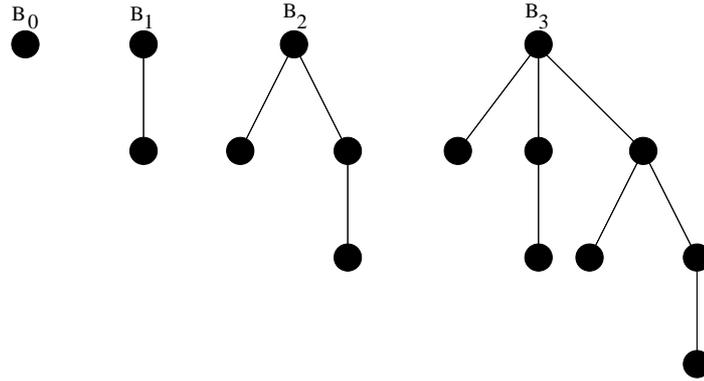


Figura 5.1: Árvores binomiais.

Considere uma árvore binomial B_k e uma ordem θ sobre os vértices de B_k tal que os primeiros elementos da ordem são as folhas $\{f_1, \dots, f_x\}$ de B_k , depois, nesta ordem θ , estão as folhas de $B_k - \{f_1, \dots, f_x\}$, e assim sucessivamente. Veja que ao aplicarmos o algoritmo guloso usando essa ordem θ , o algoritmo utilizará $k + 1$ cores, enquanto o número cromático de uma árvore é 2.

O Teorema 5.1 prova ainda que a quantidade de cores utilizadas em colorações gulosas em um grafo G é contínua entre $\chi(G)$ e $\Gamma(G)$.

Teorema 5.1 [38] *Seja G um grafo com número cromático $\chi(G)$ e número de Grundy $\Gamma(G)$. Para todo $\chi(G) \leq k \leq \Gamma(G)$, existe uma k -coloração gulosa de G .*

Um limite superior trivial para $\Gamma(G)$ é $\Delta(G) + 1$, pois a cor i só é atribuída a um vértice v se existem vértices na vizinhança de v com todas as cores menores que i .

Zaker [39] demonstrou que, dados um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro fixo k , existe um algoritmo de complexidade $\mathcal{O}(n^{2^{k-1}})$ para determinar se $\Gamma(G) \geq k$. Para tanto, foram utilizados os k -átomos, que são uma família de grafos \mathcal{A}_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, tal que \mathcal{A}_k é definido indutivamente como segue:

- $\mathcal{A}_1 = \{K_1\}$.
- $\mathcal{A}_2 = \{K_2\}$.

- $G \in \mathcal{A}_k$ é construído a partir de $H \in \mathcal{A}_{k-1}$ com $|V(H)| = n$ da seguinte forma: Para algum $1 \leq m \leq n$, considere $S_m \cup H$, onde S_m é o conjunto estável com m vértices, e um subconjunto $W \subseteq V(H)$ com $|V(W)| = m$. Construa um emparelhamento perfeito entre W e $V(S_m)$ e conecte cada vértice de $V(H) \setminus W$ à um (e somente um) vértice arbitrário em $V(S_m)$.

A Figura 5.2 ilustra a construção de um k -átomo.

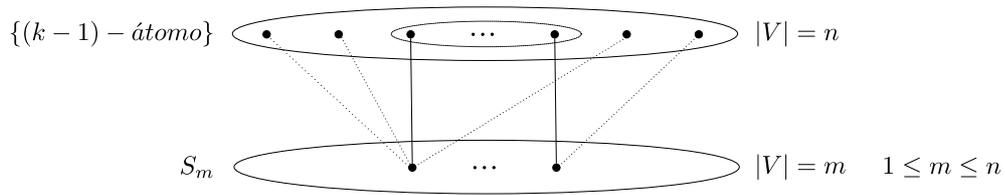


Figura 5.2: k -átomo construído a partir de um $\{k-1\}$ -átomo.

Foi mostrado que $\Gamma(G) \geq k$ se e somente se G contém um k -átomo [39]. Uma vez que a quantidade de k -átomos depende somente de k e a cardinalidade máxima de um k -átomo é 2^{k-1} , buscamos um k -átomo em G em $\mathcal{O}(n^{2^{k-1}})$ passos. Entretanto, determinar se o número guloso de um grafo é superior ou igual a k , para um $k \in \mathbb{N}$ qualquer, é um problema NP -completo [40] e, mesmo para um p fixo, é NP -completo decidir se $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1 - p$ [41]. De fato, encontrar $\Gamma(G)$ é NP -difícil mesmo para complementos de grafos bipartidos [5].

5.1 Coloração Gulosa Para $(q, q-4)$ -grafos

Para determinar o número guloso de um grafo G pertencente aos $(q, q-4)$ -grafos, utilizamos a decomposição primeval. Como explicamos anteriormente, depois de gerar a árvore de decomposição primeval, precisamos calcular Γ para as folhas. Para os vértices fracos, o cálculo desse parâmetro é trivial.

Sabemos, pelo Teorema 4.3, que uma folha H p -componente separável ou é uma aranha com $R = \emptyset$ ou é um grafo com menos de q vértices. No primeiro caso, o Lema 5.1 enunciado a seguir garante que podemos calcular $\Gamma(H)$ em tempo linear. Por outro lado, se a folha for um grafo H com menos de q vértices, podemos gerar todas as ordens possíveis dos vértices do grafo e passar cada uma como entrada para o algoritmo guloso ($\leq q!$ ordens), produzindo dessa forma todas as colorações gulosas de H em tempo constante.

Lema 5.1 [35] *Seja G um grafo com n vértices. Se G é uma aranha e $\Gamma(R)$ é dado, então $\Gamma(G)$ pode ser determinado em tempo linear.*

As três operações da decomposição primeval são ① (união disjunta), ② (junção) e ③. É conhecido que se G é a união disjunta de dois grafo G_1 e G_2 , então $\Gamma(G) = \max\{\Gamma(G_1), \Gamma(G_2)\}$, e se G é a junção de dois grafos G_1 e G_2 , então $\Gamma(G) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2)$ [42].

A determinação do número guloso para a operação ② no caso em que a p -componente separável é uma aranha é dada no Lema 5.1.

Neste trabalho, calculamos Γ para a operação ②, no caso em que a p -componente separável é um grafo com menos de q vértices. O Lema 5.2 é fundamental para a resolução dessa operação.

Lema 5.2 [10] *Um grafo p -conexo G é separável se, e somente se, o seu grafo quociente é um grafo split.*

Se o grafo quociente de uma p -componente separável H é o grafo split (K, S) , então todo módulo maximal forte $M_i^1 \subseteq H_1$ é representado por um vértice v_i^1 na clique K , e todo módulo maximal forte $M_j^2 \subseteq H_2$ é representado por um vértice v_j^2 no conjunto independente S . Dizemos que $H[M_j^i] = H_j^i$.

Existe uma relação entre o número guloso de um grafo e o número guloso dos seus módulos, como mostra a Proposição 5.1.

Proposição 5.1 [35] *Sejam G, H_1, \dots, H_n grafos disjuntos tais que $|V(G)| = n$ e $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Seja G' o grafo obtido pela substituição do vértice $v_i \in V(G)$ por H_i , de forma que existem todas as arestas entre os vértices de H_i e H_j , $i \neq j$, se e somente se $v_i v_j \in E(G)$. Então, em toda coloração gulosa de G' , no máximo $\Gamma(H_i)$ cores ocorrem em cada subgrafo induzido $H_i \subseteq G'$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Observe que, de acordo com a Proposição 5.1, uma coloração gulosa de um grafo G restrita aos seus módulos também é gulosa para eles. O seguinte lema é uma generalização de um resultado mostrado em [43].

Lema 5.3 *Seja G um grafo e M um módulo de G tal que $G[M] = H$. Seja G' o grafo obtido pela substituição de H por K_k , onde k é a quantidade de cores que aparecem em H em uma coloração gulosa de G que gera $\Gamma(G)$. Então $\Gamma(G) = \Gamma(G')$.*

Demonstração: Seja c a coloração que gera $\Gamma(G)$ e $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ o conjunto de cores de c que aparece em H . Denote os vértices do grafo completo que substitui H em G' por w_1, \dots, w_k e denote por c' a coloração de G' definida por $c'(G - K_k) = c(G - H)$ e $c'(w_i) = \alpha_i$, para todo $1 \leq i \leq k$. É fácil ver que c' é uma coloração gulosa de G' . Então $\Gamma(G') \geq \Gamma(G)$.

Note que, pela Proposição 5.1, existe uma k -coloração gulosa de H e seja (S_1, \dots, S_k) essa k -coloração gulosa. Seja c uma $\Gamma(G')$ -coloração gulosa de G' . Denote por $B = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ o conjunto de cores que aparecem em K_k com $\beta_1 < \dots < \beta_k$. Seja c' a coloração de G que atribui a cor β_i aos vértices de S_i , para todo $1 \leq i \leq k$, e $c'(G - H) = c(G - K_k)$. Claramente, c' é uma coloração gulosa de G . Logo, $\Gamma(G) \geq \Gamma(G')$. \square

Denotamos por θ_H uma ordem que dada como entrada para o algoritmo guloso, produz uma coloração com $\Gamma(H)$ para H . Em particular, denotamos por θ_j^i uma ordem que produz uma coloração com $\Gamma(H_j^i)$ cores para H_j^i .

Observe que, no grafo H , H_1 é a junção de H_1^1, \dots, H_l^1 , uma vez que, entre os grafos induzidos por dois módulos de um mesmo grafo, ou existem todas as arestas ou nenhuma, e H_1^1, \dots, H_l^1 são os grafos induzidos pelos módulos maximais fortes de H_1 (Figura 5.3(a)). Logo, $\Gamma(H_1)$ é o número guloso da junção dos grafos H_1^1, \dots, H_l^1 , que é $\sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$. Da mesma forma, o número guloso de um H_i^2 em H_2 com sua vizinhança em H_1 será o número guloso da junção desses grafos (Figura 5.3(b)). O Teorema 5.2 é o resultado principal desta seção.

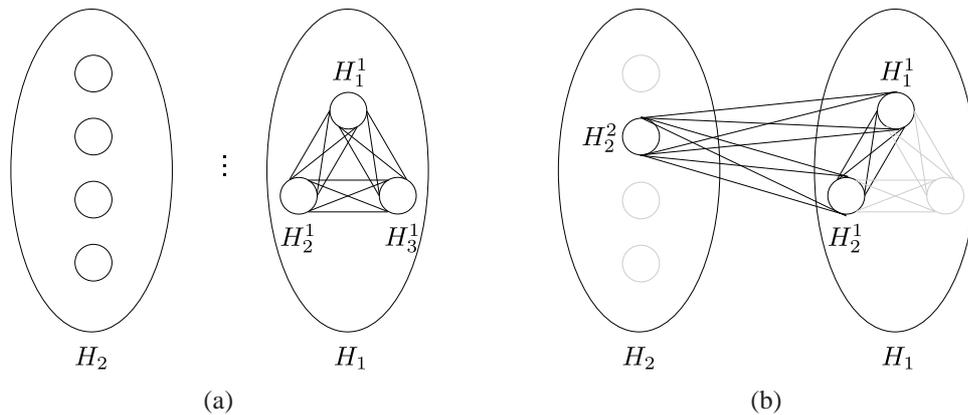


Figura 5.3: Grafo H .

Teorema 5.2 *Seja G um $(q, q - 4)$ -grafo contendo um p -componente separável $H = (H_1, H_2)$ com no máximo q vértices tal que todo vértice em $R = G - H$ é adjacente a todo vértice em H_1 e a nenhum vértice em H_2 . Sejam H_1^1, \dots, H_l^1 os módulos maximais fortes de H_1 e H_1^2, \dots, H_m^2 os módulos maximais fortes de H_2 . Dados $\chi(R)$ e $\Gamma(R)$:*

(a) *Se $\Gamma(R) \geq \max_{1 \leq i \leq m} \Gamma(H_i^2)$, então $\Gamma(G) = \Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$;*

(b) Se $\Gamma(R) < \max_{1 \leq i \leq m} \Gamma(H_i^2)$, $\Gamma(G) = \Gamma(H \otimes K_{\Gamma(R)})$.

Demonstração: (a) Uma ordem que começa por $\theta_R, \theta_1^1, \dots, \theta_1^l$ dada como entrada para o algoritmo guloso produz uma coloração gulosa de G com pelo menos $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ cores, uma vez que $G[H_1 \cup V(R)]$ é a junção de R, H_1^1, \dots, H_l^1 . Então, temos que provar que $\Gamma(G) \leq \Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$. Suponha por absurdo que existe uma coloração gulosa c de G com mais que $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ cores e seja c_{max} a maior cor em c . Considere os seguintes casos:

1. Existe um vértice $v \in R$ colorido com c_{max} :

Seja $c' = c(G[H_1 \cup V(R)])$. Todas as cores em c devem aparecer em c' , uma vez que v , por ser colorido com c_{max} , é adjacente a vértices coloridos com todas as cores diferentes de c_{max} e, além disso, um vértice em R tem vizinhos somente em $G[H_1 \cup V(R)]$. Logo, c' tem mais de $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ cores. Note que c' não é uma coloração gulosa para $G[H_1 \cup V(R)]$, porque uma coloração gulosa para $G[H_1 \cup V(R)]$ tem no máximo $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ cores, dado que $G[H_1 \cup V(R)]$ é a junção de R, H_1^1, \dots, H_l^1 . Portanto, existe um vértice $u \in G[H_1 \cup V(R)]$ com a cor c_u que não tem vizinho colorido com c_k em $G[H_1 \cup V(R)]$, para algum $c_k < c_u$. Tal vértice deve estar em H_1 , pois todos os vizinhos dos vértices em R estão em $G[H_1 \cup V(R)]$. Então, $u \in H_i^1$ tem um vizinho $w \in H_j^2$ com a cor $c_w = c_k$. Note que existem todas as arestas entre H_i^1 e H_j^2 . Algum vértice $z \in G[H_1 \cup V(R)]$ também recebe a cor c_k . É fácil ver que $z \notin R$, caso contrário u teria um vizinho em $G[H_1 \cup V(R)]$ com a cor c_k , uma vez que todo vértice de R é adjacente a todo vértice de H_1 . Pelo Lema 5.2, existem todas as arestas possíveis entre dois módulos de H_1 . Dessa forma, $z \notin H_s^1$, para $s \neq i$, porque também nesse caso u já teria um vizinho em $G[H_1 \cup V(R)]$ colorido com c_k . Portanto, $z \in H_i^1$ e, conseqüentemente, z é adjacente a w , uma vez que existem todas as arestas possíveis entre H_i^1 e H_j^2 . Mas ambos são coloridos com a cor c_k e essa coloração não seria própria.

2. Existe um vértice $v \in H_2$ colorido com c_{max} :

Seja um vértice $v \in H_s^2$, para algum $s \in \{1, \dots, m\}$, e $c' = c(G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)])$. Todas as cores em c devem aparecer em c' , dado que v tem que ser adjacente a vértices coloridos com todas as cores diferentes de c_{max} e um vértice em H_s^2 tem vizinhos somente em $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$. Então, c' tem mais de $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ cores. Note que $\Gamma(R) \geq \max_{1 \leq i \leq m} \Gamma(H_i^2)$ implica em $\Gamma(R) \geq \Gamma(H_s^2)$. Portanto, $\Gamma(H_s^2) + \sum_{i \in N(H_s^2)} \Gamma(H_i^1) \leq \Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$. Então c' não é uma coloração gulosa para $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$, pois uma coloração gulosa para $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$ tem no máximo $\Gamma(H_s^2) + \sum_{i \in N(H_s^2)} \Gamma(H_i^1)$, uma

vez que $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$ é a junção de $H_s^2, H_i^1, \forall i \in N(H_s^2)$. Assim, existe um vértice $u \in G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$ colorido com a cor c_u que não tem vizinho colorido com c_k em $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$, para algum $c_k < c_u$. Tal vértice deve pertencer a H_1 , pois todos os vizinhos dos vértices de H_2 estão em $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$. Então, $u \in H_i^1$, onde $H_i^1 \in N(H_s^2)$, tem um vizinho $w \in R$ colorido com $c_w = c_k$. Observe que algum vértice $z \in (V(H_s^2) \cup N(H_s^2))$ também é colorido com c_k . É fácil ver que $z \notin H_s^2$. Caso contrário, u já teria um vizinho em $G[V(H_s^2) \cup N(H_s^2)]$ colorido c_k uma vez que todo vértice de H_s^2 é adjacente a todo vértice de $N(H_s^2)$. Pela mesma razão, $z \notin H_j^1$, para $j \neq i$ e $j \in N(H_s^2)$. Portanto $z \in H_i^1$, mas existem todas as arestas possíveis entre H_i^1 e R , o que faz com que w e z sejam vizinhos. Porém ambos w e z são coloridos com c_k , e essa coloração seria imprópria.

3. Existe um vértice $v \in H_1$ colorido com c_{max} :

Para receber uma cor maior que $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$, v deve ter pelo menos $\Gamma(R) + \sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1)$ vizinhos com cores diferentes. Da sua vizinhança em R , v tem no máximo $\Gamma(R)$ vizinhos com cores diferentes, por 5.1. Da vizinhança de v em H_i^1 , para $i \in \{1, \dots, l\}$, v tem no máximo $\sum_{i=1}^l \Gamma(H_i^1) - 1$ (sua própria cor), também por 5.1. Logo, uma nova cor c_n deve aparecer em um vértice $w \in H_j^2$, onde $V(H_j^2) \in N(v)$. Uma vez que os vértices em R não possuem nenhum vizinho em H_2 , c_n deve ser maior que todas as cores de R e w deve ser vizinho de vértices coloridos com todas as cores de R . Todas essas cores devem aparecer em H_j^2 , pois os vizinhos de w fora de H_j^2 são vértices de H_1 , todos vizinhos de todos os vértices de R e, portanto, com as cores diferentes das dos vértices de R . Sabemos que em H_j^2 aparecem no máximo $\Gamma(H_j^2)$ cores, então w tem no máximo $\Gamma(H_j^2) - 1$ vizinhos que recebem cores diferentes em H_j^2 . Mas sabemos que $\Gamma(H_j^2) \leq \Gamma(R)$ implica em $\Gamma(H_j^2) - 1 < \Gamma(R)$. Então, todas as cores de R não podem aparecer na vizinhança de w , e tal vértice não pode receber uma cor nova.

(b) Uma vez que $\Gamma(R) < \max_{1 \leq i \leq m} \Gamma(H_i^2)$, em uma $\Gamma(G)$ -coloração gulosa de G , por 5.1, existem $p < q$ cores em R . Não sabemos o valor exato de p , mas sabemos que p vai de $\chi(R)$ a $\Gamma(R)$. Por 5.3, podemos substituir R por um grafo completo com p vértices e podemos obter todas as ordens possíveis dos vértices de G , que são $(q + p)!$ no total. Então, podemos calcular todas as colorações gulosas de G em $\sum_{p=\chi(R)}^{\Gamma(R)} (p + q)!$ passos, onde q é fixo. \square

5.2 Coloração Gulosa de Arestas

Como mencionado anteriormente, a coloração de grafos linha corresponde ao problema de coloração de arestas para grafos em geral. A coloração gulosa de grafos linha, resultado da aplicação do Algoritmo guloso de coloração 3 à tal classe, também possui uma definição equivalente em coloração arestas, dada a seguir.

Seja um grafo $G = (V, E)$ e uma ordem $\theta = e_1, \dots, e_n$ sobre E , o algoritmo de coloração gulosa de arestas atribui a e_i o menor inteiro positivo que ainda não foi atribuído a nenhuma aresta adjacente a e_i no conjunto $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$. Uma coloração obtida pela execução do algoritmo guloso de arestas em um grafo é chamada de coloração gulosa de arestas.

Lembramos que uma k -coloração de arestas de um grafo G também pode ser vista como uma partição $\mathcal{P} = (M_1, M_2, \dots, M_k)$ do conjunto de arestas do grafo em k emparelhamentos disjuntos onde cada M_i contém as arestas coloridas com a cor i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. A coloração gulosa de arestas possui a seguinte propriedade:

Propriedade 5.1 $\forall i < j$, toda aresta e em M_j é adjacente a uma aresta em M_i .

Observe que, se a Propriedade 5.1 não fosse satisfeita, o algoritmo guloso de arestas não atribuiria uma cor maior que i à aresta e . Reciprocamente, uma coloração de arestas que satisfaz 5.1 é uma coloração gulosa de arestas relativa a qualquer ordenação de arestas em que as arestas de M_i precedem as de M_j , $\forall i < j$.

O maior número de cores obtidas pela aplicação do algoritmo de coloração gulosa de arestas em um grafo G é o índice de Grundy e é denotado por $\Gamma'(G)$. Note que $\Gamma'(G) = \Gamma(L(G))$. Por definição, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Gamma'(G)$. Além disso, como uma aresta é adjacente a no máximo $2\Delta(G) - 2$ outras arestas ($\Delta - 1$ em cada extremidade), a coloração gulosa das arestas de G usa no máximo $2\Delta(G) - 1$. Dessa forma, $\Delta(G) \leq \Gamma'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

Estrelas são exemplos de grafos em que o índice de Grundy é igual ao grau máximo. Também existem grafos em que o limite superior de $2\Delta(G) - 1$ para o índice de Grundy é alcançado, como as árvores que chamamos aqui de binomiais em arestas. A definição de tais árvores se assemelha à definição das árvores binomiais. A *árvore binomial em arestas* B_k^e , de ordem k , é definida como segue:

$$B_k^e = \begin{cases} P_2, & \text{se } k = 0 \\ P_3, & \text{se } k = 1 \\ \text{obtida a partir da inclusão uma aresta } e \text{ incidente às raízes de } B_{k-1}^e \text{ e } B_{k-2}^e, \\ \text{e com a mesma raiz de } B_{k-2}^e, & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

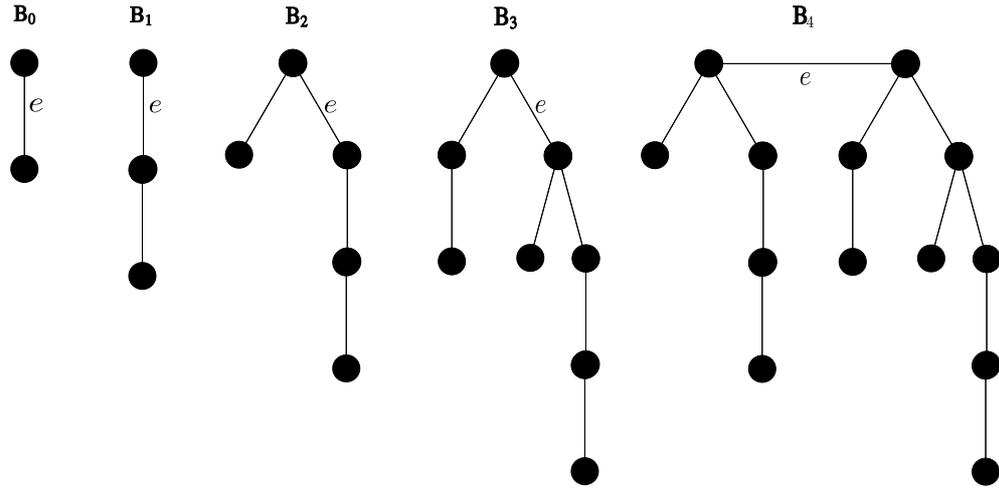


Figura 5.4: Árvores binomiais em arestas.

Considere uma árvore binomial em arestas B_k^e e uma ordem θ sobre as arestas de B_k^e tal que os primeiros elementos da ordem são as arestas incidentes às folhas $\{f_1, \dots, f_x\}$ de B_k^e , depois, nesta ordem θ , estão as arestas incidentes às folhas de $B_k - \{f_1, \dots, f_x\}$, e assim sucessivamente. Veja que ao aplicarmos o algoritmo guloso em arestas usando essa ordem θ , o algoritmo utilizará $2\Delta(B_k^e) - 1$ cores, para $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$.

Não foram encontrados resultados na literatura sobre coloração gulosa de arestas. Os resultados que seguem foram obtidos durante um estágio de mestrado no INRIA/Sophia Antipolis, sob a orientação de Frédéric Havet. O estágio foi realizado graças a uma parceria do grupo ParGO com a equipe Mascotte. Nessa ocasião, estudamos a complexidade de encontrar o índice de Grundy de um grafo, mostrado que é NP-difícil. Além disso, estudamos o problema para a classe dos caterpillars.

5.2.1 co-NP-completude de Coloração Gulosa de Arestas

Nesta seção, provamos que é NP-difícil encontrar o índice de Grundy de um grafo. Para isso, mostramos que o problema CGMA, definido a seguir, é co-NP-completo.

Coloração Gulosa Mínima de Arestas (MCGA)

Instância: Um grafo G .

Pergunta: $\Gamma'(G) = \Delta(G)$?

Nós fazemos uma redução para o problema de coloração de arestas em um grafo cúbico (ICGC), provado ser NP-completo em [29].

Índice Cromático de Grafos Cúbicos (ICGC)

Instância: Um grafo cúbico G .

Pergunta: O índice cromático de um grafo cúbico G é igual a 3?

Nós estendemos esse resultado para um problema mais geral (FCGA).

f -Coloração Gulosa de Arestas (FCGA)

Instância: Um grafo G .

Pergunta: $\Gamma'(G) \leq f(\Delta(G))$?

Observe que se f é a identidade ($f(k) = k$, para todo k), então f -Coloração Gulosa de Arestas é Coloração Gulosa Mínima de Arestas. Nós mostramos que para qualquer função f tal que $k \leq f(k) \leq 2k - 2$, o problema f -Coloração Gulosa de Arestas é co-NP-Completo.

Nós mostramos primeiramente a co-NP-completude de Mínima Coloração Gulosa de Arestas.

Seja H um grafo cúbico com n vértices w_1, \dots, w_n . Seja G o grafo definido por $V(G) = V(H) \cup \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v, a, b, c\}$ e $E(G) = E(H) \cup \{u_i w_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{av, bv, cv\}$. O grafo G é mostrado na figura Figure 5.5.

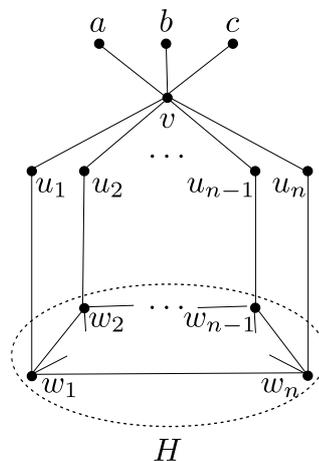


Figura 5.5: Grafo G obtido de um grafo cúbico H .

Em G , $d(v) = n + 3$, enquanto o grau de todos os outros vértices é no máximo 4. Dessa

forma, $\Delta(G) = d(v) = n + 3$, uma vez que $n \geq 4$ por H ser cúbico. Além do mais, toda aresta de G é adjacente a no máximo $n + 3$ arestas, então $\Gamma'(G) \leq n + 4 = \Delta(G) + 1$. Portanto, o índice de Grundy de G é $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$. No Teorema 5.3, mostramos a redução do problema Índice Cromático de Grafos Cúbicos para Mínima Coloração Gulosa de Arestas.

Teorema 5.3 [44] $\chi'(H) = 3$ se e somente se $\Gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que existe uma 3-coloração de arestas c de H . Vamos estender c para uma coloração gulosa de arestas de G com $\Delta(G) + 1 = n + 4$ cores. Faça $c(av) = 1$, $c(bv) = 2$, $c(cv) = 3$ e, para todo $1 \leq i \leq n$, $c(u_i w_i) = 4$ e $c(u_i v) = i + 4$. Note que todo vértice w_i é incidente a uma aresta de H com cada uma das cores 1, 2 e 3, uma vez que H cúbico. É fácil ver que essa é uma $(n + 4)$ -coloração gulosa de arestas de G , pois c cumpre a Propriedade 5.1.

(\Leftarrow) Suponha que existe uma $(n + 4)$ -coloração gulosa de arestas de G . Alguma aresta recebe a cor $(n + 4)$. Tal aresta tem que ser adjacente a pelo menos $n + 3$ arestas e, portanto, tem que ser uma das arestas vu_i , digamos vu_n . Como vu_n é adjacente a exatamente $n + 3$ arestas e a coloração é gulosa, todas as arestas adjacentes a vu_j devem receber cores diferentes entre $1, \dots, n + 3$.

Vamos provar por indução em $1 \leq j \leq n$ que a aresta e_j adjacente a vu_n colorida com $n + 5 - j$ é alguma vu_i , onde o resultado já vale para $j = 1$. Suponha $j \geq 2$. A aresta e_j deve ter grau pelo menos $n + 5 - j$ uma vez que é adjacente a vu_n e uma aresta com cada uma das cores em $\{1, \dots, n + 4 - j\}$, pela Propriedade 5.1. Então e_j deve ser incidente a v , dado que as arestas $u_n w_n$ são adjacentes a somente quatro arestas. Mais ainda, e_j deve ter grau pelo menos $n + 3$ uma vez que é adjacente a $j - 1$ arestas e_l para $1 \leq l < j$, por hipótese de indução, e uma aresta de cada uma das cores em $\{1, \dots, n + 4 - j\}$. Portanto, e_j é uma das vu_i .

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $c(vu_i) = 4 + i$, para todo $1 \leq i < n$. As arestas vu_i são adjacentes a arestas coloridas com 1, 2, 3 e 4. As que tem a cor 4 devem ser $u_i w_i$, dado que as arestas av , bv e cv são adjacentes a no máximo duas arestas coloridas com alguma das cores em $\{1, 2, 3\}$. Logo, $c(u_i w_i) = 4$, para todo $1 \leq i \leq n$, e av , bv , cv são coloridas com $\{1, 2, 3\}$.

Agora toda aresta $u_i w_i$ é adjacente a três arestas, uma de cada cor em $\{1, 2, 3\}$. Uma vez que $c(vu_i) \geq 5$, essas três arestas devem ser as três arestas incidentes a w_i em H . Portanto todas as arestas de H recebem uma das cores em $\{1, 2, 3\}$, e a restrição de c a H é uma 3-coloração de arestas. \square

Teorema 5.4 [44] $\chi'(H) = 3$ se e somente se $\Gamma'(G') = f(\Delta(G')) + 1$.

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que existe um 3-coloração de arestas c de H . Vamos estender c para uma coloração gulosa de arestas de G' com $f(\Delta(G')) + 1 = n + p + 4$ cores. Primeiramente, estendemos c em uma $(n + 4)$ -coloração gulosa de G como fizemos na prova do Teorema 5.3. Em particular, temos $c(u_n w_n) = 4$ e $c(u_n v) = n + 4$. Para todo $1 \leq i \leq p$ e todo $1 \leq j \leq n - 1$, faça $c(t_i a_i) = 1$, $c(t_i b_i) = 2$, $c(t_i c_i) = 3$, $c(t_{i,j} a_{i,j}) = 1$, $c(t_{i,j} b_{i,j}) = 2$, $c(t_{i,j} c_{i,j}) = 3$, $c(t_{i,j} s_{i,j}) = 4$, $c(s_{i,j} t_i) = j + 4$ e finalmente $c(t_i u_n) = n + 4 + i$. É fácil verificar que c cumpre a Propriedade 5.1, e portanto é uma $(n + p + 4)$ -coloração gulosa de arestas de G' .

(\Leftarrow) Suponha que G' admite uma $(n + p + 4)$ -coloração gulosa de arestas c . Para todo $1 \leq i \leq p$, deve existir pelo menos uma aresta e_i com a cor $n + 4 + i$. Essas arestas devem ser adjacentes a pelo menos $n + 3 + i$ arestas, pela Propriedade 5.1. Então toda e_i deve está em $F = \{vu_n\} \cup \{u_n t_i | 1 \leq i \leq p\}$. A aresta e_p é adjacente a uma aresta e_0 colorida com $n + 4$. Essa aresta é adjacente a pelo menos $n - 4$ arestas, uma de cada cor em $\{1, \dots, n + 3\}$ e e_p . Então e_0 também deve está em F . Pela cardinalidade de F , todas as arestas desse conjunto são coloridas com cores diferentes entre $\{n + 4, \dots, n + p + 4\}$.

Desde que vu_n tem uma das cores $\{n + 4, \dots, n + p + 4\}$ e tem arestas vizinhas com as cores $\{1, \dots, n + 3\}$ em G , podemos aplicar o mesmo argumento utilizado na prova do Teorema 5.3 e chegar à conclusão de que a restrição de c a H é uma 3-coloração de arestas. \square

Corolário 5.2 O problema f -Coloração Gulosa de Arestas é co-NP-completo.

Demonstração: O problema f -Coloração Gulosa de Arestas é claramente co-NP, pois uma coloração gulosa de arestas de um grafo G com pelo menos $f(\Delta(G)) + 1$ cores é um certificado que $\Gamma'(G) > f(\Delta(G))$. O resultado é complementado pela redução do Teorema 5.4. \square

5.2.2 Índice de Grundy dos Caterpillars

Nesta seção, mostramos um algoritmo polinomial para resolver o problema da Coloração gulosa de arestas para os caterpillars. Esses grafos que são árvores tais que se todas as folhas e arestas incidentes às mesmas forem removidas, o que resta do grafo é um caminho induzido, chamado caminho principal.

Nos próximos resultados, demonstramos algumas propriedades da coloração gulosa de arestas dos caterpillars. Nós mostramos que se T é um caterpillar, $\Gamma'(T) \leq \Delta(T) + 1$, e então o

índice de Grundy de T é $\Delta(T)$ ou $\Delta(T) + 1$. Em seguida, damos um algoritmo polinomial para computar $\Gamma'(T)$.

Lema 5.4 *Seja T um caterpillar e v um vértice no seu caminho principal. Em toda coloração gulosa de arestas de T , as cores $1, \dots, d(v) - 2$ aparecem nas arestas incidentes a v .*

Demonstração: Seja c uma coloração gulosa de arestas de T . Suponha por absurdo que uma das cores $\alpha \in \{1, \dots, d(v) - 2\}$ não é atribuída a nenhuma aresta incidente a v . Como todas as arestas incidentes a v possuem cores diferentes, pelo menos pelo menos três cores maiores que $d(v) - 2$ aparecem em três arestas incidentes a v . Uma dessas cores, digamos β , deve aparecer em uma aresta e incidente a uma folha. Mas e é adjacente somente às arestas incidentes a v . Então, para algum $\alpha \leq d(v) - 2$, e não é adjacente a α . Como $\alpha \leq d(v) - 2 < \beta$, a coloração de arestas c não é gulosa. \square

Lema 5.5 *Seja c uma coloração gulosa de arestas de um caterpillar T e v um vértice no caminho principal de T . Se duas arestas e_1 e e_2 incidentes em v recebem cores maiores que $d(v) - 1$, então e_1 e e_2 são duas arestas do caminho principal e as arestas que tem como extremidades v e uma folha são coloridas $1, \dots, d(v) - 2$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que uma dessas duas arestas, digamos e_1 , é incidente a uma folha. Então e_1 é adjacente a $d(v) - 1$ outras arestas, e uma delas, e_2 , foi colorida com uma cor maior que $d(v) - 1$. Portanto e_1 é adjacente a no máximo $d(v) - 2$ arestas cujas cores são menores ou igual a $d(v) - 1$. Então, existe uma cor α em $\{1, \dots, d(v) - 1\}$ tal que nenhuma aresta adjacente a e_1 possui a cor α . Isso contradiz o fato de c ser gulosa. Então e_1 e e_2 são arestas do caminho principal.

Agora, pelo Lema 5.4, devem existir arestas incidentes a v com cada uma das cores em $\{1, \dots, d(v) - 2\}$. Dessa forma, as $d(v) - 2$ arestas diferentes de e_1 e e_2 , que são as arestas que conectam v às folhas, possuem as cores $\{1, \dots, d(v) - 2\}$. \square

Teorema 5.5 *Se T é um caterpillar, então $\Gamma'(T) \leq \Delta(T) + 1$.*

Demonstração: Seja T um caterpillar e $\Delta(T) = \Delta$. Suponha por contradição que existe uma coloração gulosa de arestas c de T com $\Delta + 2$ cores. Seja e uma aresta de T que recebeu a cor $\Delta + 2$ em c . Tal aresta deve ser adjacente a pelo menos $\Delta + 1$ arestas, uma de cada uma das cores $1, \dots, \Delta + 1$. Logo, a aresta e está no caminho principal. De acordo com o Lema 5.5, as arestas e_1 e e_2 adjacentes a e com as cores Δ e $\Delta + 1$ estão no caminho principal. Além disso, todas as

arestas adjacentes a e , exceto e_1 e e_2 , possuem uma das cores em $\{1, \dots, \Delta - 2\}$. Então e não é adjacente a nenhuma aresta com a cor $\Delta - 1$, uma contradição. \square

Na Figura 5.7 podemos ver um exemplo em que $\Gamma'(T) = \Delta(T) + 1$, para um caterpillar T .

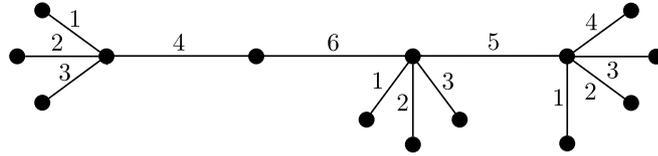


Figura 5.7: Caterpillar T com $\Delta(T) = 5$ e $\Gamma'(T) = 6$.

O Teorema 5.5 implica que o índice de Grundy de um caterpillar é $\Delta(T)$ ou $\Delta(T) + 1$. Dessa forma, determinar o índice de Grundy de um caterpillar é equivalente ao problema da Coloração Gulosa Mínima de Arestas. Com os próximos resultados, mostramos que podemos calcular $\Gamma'(T)$ em tempo linear.

Vejamos primeiramente algumas definições. Seja T um caterpillar com caminho principal $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. A primeira aresta de P é v_1v_2 . Para qualquer aresta $e = v_i v_{i+1} \in P$, se removermos e de T , teremos dois caterpillars T_e^- e T_e^+ , o primeiro contendo v_i e o segundo contendo v_{i+1} . Por conveniência, dizemos que o caminho principal de T_e^- é $P_e^- = (v_i, v_{i-1}, \dots, v_1)$ e o caminho principal de T_e^+ é $P_e^+ = (v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n)$. Portanto a primeira aresta de T_e^- é (v_i, v_{i-1}) e a primeira aresta de T_e^+ é (v_{i+1}, v_{i+2}) .

Lema 5.6 *Seja T um caterpillar de grau máximo Δ com caminho principal $P = (v_1, \dots, v_n)$. Então $\Gamma'(T) = \Delta + 1$ se e somente se existe uma aresta $e \in E(P) \setminus \{v_1v_2, v_{n-1}v_n\}$ tal que*

- (i) *uma extremidade de e tem grau Δ , e*
- (ii) *um dos caterpillars T_e^- e T_e^+ tem uma coloração gulosa de arestas tal que a primeira aresta do seu caminho principal é colorida com Δ e o outro tem uma coloração gulosa de arestas tal que a primeira aresta do seu caminho principal tem a cor $\Delta - 1$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que T tem uma $(\Delta + 1)$ -coloração gulosa de arestas. Seja e uma aresta com a cor $\Delta + 1$. A aresta e é adjacente a uma aresta e_1 com a cor Δ e a outra e_2 com a cor $\Delta - 1$. Pelo Lema 5.5, e , e_1 e e_2 estão no caminho principal e e é incidente a um vértice de grau Δ , provando (i). Note que e não pode ser v_1v_2 ou $v_{n-1}v_n$ uma vez que essas duas arestas são adjacentes a uma única aresta no caminho principal. Além disso, a coloração gulosa de arestas induzida em T_e^- e T_e^+ claramente satisfaz (ii).

(\Leftarrow) Suponha que existe uma aresta $e \in E(P) \setminus \{v_1v_2, v_{n-1}v_n\}$ satisfazendo (i) e (ii). Sejam ϕ^- e ϕ^+ as colorações gulosas de arestas de T_e^- e T_e^+ , respectivamente, como em (ii). Seja ϕ a coloração gulosa de arestas de T definida por $\phi(e) = \Delta + 1$, $\phi(f) = \phi^-(f)$, para todo $f \in T_e^-$ e $\phi(f) = \phi^+(f)$, para todo $f \in T_e^+$. Vamos mostrar que ϕ é uma coloração gulosa de arestas. Claramente, dado que ϕ^- e ϕ^+ são gulosas, é suficiente provar que e é adjacente a arestas de cada uma das cores i em $\{1, \dots, \Delta\}$. Uma vez que ϕ^+ e ϕ^- satisfazem (ii), e é adjacente a arestas coloridas com Δ e $\Delta - 1$. Por (i), e é incidente a um vértice v de grau Δ . Esse vértice é incidente a e e a uma aresta f no caminho principal. A aresta f é a primeira aresta de T_f , onde $T_f = T_e^+$ ou $T_f = T_e^-$. Em uma coloração gulosa de arestas de T_f , a aresta f tem cor maior que $\Delta - 2$, então as $\Delta - 2$ arestas incidentes a v que não são e nem f são coloridas com todas as cores entre $1, \dots, \Delta - 2$. Portanto e é adjacente à arestas com todas as cores em $\{1, \dots, \Delta\}$. \square

Lema 5.7 *Seja T um caterpillar com caminho principal P tal que a primeira aresta é $e = uv$. T tem uma coloração gulosa de arestas em que e recebe a cor k se e somente se uma das seguintes afirmações vale:*

(i) $d(u) \geq k$ ou $d(v) \geq k$;

(ii) $d(u) = k - 1$ e T_e^+ admite uma coloração gulosa de arestas tal que a primeira aresta de P_e^+ possui a cor $k - 1$.

Demonstração: (\Rightarrow) Seja $e = uv$ com u o primeiro vértice de P . Suponha que T tem uma coloração gulosa de arestas tal que e recebe a cor k e e não é incidente a vértices de grau k . Então as arestas incidentes a u devem ter as cores $1, \dots, d(u) - 1$. Pela Propriedade 5.1, e deve ser adjacente a arestas com todas as cores $1, \dots, k - 1$. A aresta colorida com $k - 1$ só pode ser a primeira aresta de P_e^+ , e as arestas incidentes a v e a folhas recebem as cores $1, \dots, d(v) - 2$. Então a aresta incidente a e e colorida com $k - 2$ deve ser incidente a u , e portanto $d(u) - 1 \geq k - 2$, isto é, $d(u) \geq k - 1$.

(\Leftarrow) Suponha agora que (i) vale. Seja x um vértice em $\{u, v\}$ com grau pelo menos k . Podemos colorir todas as arestas incidentes a x com $1, \dots, d(v)$ tal que e é colorida com k e então estendemos essa coloração de arestas de forma gulosa para obter a coloração gulosa de arestas desejada de T .

Finalmente suponha que (ii) vale. Seja ϕ uma coloração gulosa de arestas de T_e^+ tal que a primeira aresta de P_e^+ possui cor $k - 1$. Podemos estender essa coloração atribuindo k à e e $1, \dots, k - 2$ às $k - 2$ arestas que tem como extremidades u e uma folha. É fácil verificar que essa é uma coloração gulosa de arestas de T . \square

O Teorema 5.5 e o Lema 5.6 implicam que o Algoritmo 4 retorna o índice de Grundy de T utilizando a Sub-rotina $\text{primeiraAresta}(T, P, k)$, que retorna 'sim' se um caterpillar T com caminho principal P admite uma coloração gulosa de arestas tal que a primeira aresta de P recebe a cor k .

Algoritmo 4: $\text{indiceGrundy}(T)$

Entrada: Caterpillar T .

Saída: $\Gamma'(T)$.

- 1 Seja $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ o caminho principal de T . Compute $d(v_i)$ para todo $1 \leq v_n$ e compute $\Delta = \Delta(T)$.
 - 2 **para** $i = 2, \dots, n - 2$ **faça**
 - 3 $e := v_i v_{i+1}$;
 - 4 **se** $d(v_i) = \Delta$ **ou** $d(v_{i+1}) = \Delta$ **então**
 - 5 **se** $\text{primeiraAresta}(T_e^+, P_e^+, \Delta) = \text{TRUE}$ **e** $\text{primeiraAresta}(T_e^-, P_e^-, \Delta - 1) = \text{TRUE}$ **então**
 - 6 retorne $\Delta + 1$;
 - 7 **se** $\text{primeiraAresta}(T_e^+, P_e^+, \Delta - 1) = \text{TRUE}$ **e** $\text{primeiraAresta}(T_e^-, P_e^-, \Delta) = \text{TRUE}$ **então**
 - 8 retorne $\Delta + 1$;
 - 9 Retorne Δ ;
-

A sub-rotina primeiraAresta pode ser obtida pelo Algoritmo 5 de acordo com o Lema 5.7.

Algoritmo 5: $\text{primeiraAresta}(T, P, k)$

Entrada: Caterpillar T com caminho principal P e um inteiro k .

Saída: TRUE se existe uma k -coloração gulosa de arestas de T com a primeira aresta de P colorida com a cor k , e FALSE , caso contrário.

- 1 Seja u o primeiro vértice de P e v o segundo vértice. (Então uv é a primeira aresta.)
 - 2 **se** $d(u) \geq k$ **ou** $d(v) \geq k$ **então**
 - 3 retorne TRUE ;
 - 4 **se** $d(u) \geq k - 1$ **então**
 - 5 retorne $\text{primeiraAresta}(T - u, P - u, k - 1)$;
 - 6 retorne FALSE ;
-

6 *Conclusões*

Os problemas de coloração de vértices e de arestas, que consistem em determinar o menor número de cores necessárias para colorir os vértices e arestas de um grafo, respectivamente, de forma que vértices adjacentes e arestas adjacentes, respectivamente, possuem cores distintas, são problemas computacionalmente difíceis e são objeto de pesquisa recorrente em teoria dos grafos em virtude dos inúmeros problemas práticos que eles modelam.

No presente trabalho, estudamos o pior desempenho dos algoritmos gulosos de coloração de vértices e de arestas e provamos dois resultados de complexidade. Provamos que o número de Grundy de um grafo $(q, q - 4)$ pode ser determinado em tempo polinomial. Essa classe contém estritamente a classe dos cografos e grafos P_4 esparsos, para os quais o mesmo resultado havia sido estabelecido. Esse resultado generaliza portanto aqueles resultados. O algoritmo apresentado usa a decomposição primeval desses grafos, determinando o parâmetro em tempo linear.

Uma consequência desse resultado é a prova de que o problema de coloração gulosa é FTP (Fixed Parameter Tractable), isto é, pode ser resolvido em tempo $f(k)p(n)$ para um parâmetro k , o que era desconhecido até o momento. Como vimos anteriormente, todo grafo pertence à $(q, q - 4)$ para algum q , e então podemos utilizar q como parâmetro para o algoritmo FTP.

Uma questão interessante a ser investigada é a determinação da relação dos grafos $(q, q - 4)$ com os grafos P_4 -carregados estendidos gordos e os grafos livres de P_5 . As três classes possuem interseção, porém, para as duas primeiras, o número guloso pode ser calculado em tempo polinomial enquanto para a última é NP-completo. É possível que essa interseção seja exatamente os únicos grafos livres de P_5 para os quais o problema pode ser resolvido em tempo polinomial.

No que se refere à coloração de arestas, provamos que o problema de determinar o índice de Grundy é NP-completo para grafos em geral e polinomial para grafos caterpillar, implicando que o número de Grundy é polinomial para os grafos linha desses. Mais especificamente provamos que o índice de Grundy dos caterpillar é Δ ou $\Delta + 1$, e apresentamos um algoritmo linear

para determiná-lo exatamente. Dado que os caterpillar são árvores bastante especiais, a próxima questão a ser investigada é a complexidade do problema para árvores quaisquer.

Lista de Figuras

1.1	P_4 e suas partições.	p. 10
1.2	Exemplo de aranha magra e aranha gorda.	p. 10
2.1	Um grafo e seu grafo linha.	p. 15
2.2	Os nove subgrafos proibidos de um grafo linha.	p. 16
2.3	Aranhas.	p. 17
2.4	Grafos P_4 -leve.	p. 17
2.5	Exemplo de grafos que pertencem e não pertencem aos $(5, 1)$ -grafos.	p. 18
3.1	P_4 e suas partições.	p. 22
3.2	Aranha magra e aranha gorda com R vazio.	p. 22
3.3	Grafo não P_4 -conexo.	p. 23
3.4	Grafo particionado em suas P_4 -componentes.	p. 24
3.5	Grafo com P_4 -componente separável V	p. 25
4.1	Grafo G e sua árvore de decomposição modular.	p. 28
4.2	Operação 2	p. 30
4.3	Grafo e a árvore de decomposição primeval correspondente.	p. 31
5.1	Árvores binomiais.	p. 34
5.2	k -átomo construído a partir de um $\{k - 1\}$ -átomo.	p. 35
5.3	Grafo H	p. 37
5.4	Árvores binomiais em arestas.	p. 41
5.5	Grafo G obtido de um grafo cúbico H	p. 42
5.6	Grafo G' obtido de um grafo cúbico H	p. 44
5.7	Caterpillar T com $\Delta(T) = 5$ e $\Gamma'(T) = 6$	p. 47

Índice Remissivo

- ($q, q - 4$)-grafos, 18
- P_4 -cadeia, 22
- P_4 -componente, 23
- P_4 -componente separável, 24
- P_4 -conectividade, 21
- k -átomos, 34
- índice cromático, 20
- árvore, 15
 - de decomposição modular, 28
- árvores binomiais, 34
- algoritmo guloso de coloração, 33
- aranha, 16
 - gorda, 16
 - magra, 16
- arestas, 12
 - adjacentes, 12
 - incidentes a um vértice, 12
 - múltiplas, 12
- caminho, 13
 - induzido, 13
- ciclo, 13
- clique, 13
- cografo, 15
- coloração gulosa, 33
- complemento de um grafo, 13
- componentes de um grafo, 14
- conjunto
 - estável, 13
 - independente, 13
- conjunto homogêneo, 26
- cordas, 14
- decomposição
 - modular, 27
- emparelhamento, 13
- extremidades de uma aresta, 12
- fatores, 27
- folhas, 15
- grafo, 12
 - P_4 -arrumado, 17
 - P_4 -esparso, 16
 - P_4 -extensível, 17
 - P_4 -leve, 17
 - P_4 -reduzível, 16
 - acíclico, 15
 - bipartido, 14
 - bipartido completo, 14
 - cúbico, 15
 - completo, 13
 - conexo, 14
 - desconexo, 14
 - estrela, 14
 - isomorfo, 13
 - linha, 15
 - livre de $P_n(C_n)$, 13
 - primo, 26
 - quociente, 27
 - regular, 15
 - simples, 12
 - split, 15
 - trivial, 13
 - vazio, 13
- grafos disjuntos, 14
- grau de um vértice, 13
- isomorfismo, 13
- junção de grafos, 14
- laço, 12
- módulo, 26
 - forte, 26
 - maximal forte, 27
 - trivial, 26
- nó, 15

interno, 15
ancestral, 15
descendente, 15
filho, 15
pai, 15
paralelo, 28
raiz, 15
série, 28
vizinhança, 28
número guloso, 33
partição de congruência, 27
partição de um conjunto, 14
passeio, 13

produto lexicográfico, 14
subgrafo, 13
 induzido, 13
união de grafos, 14
união disjunta de grafos, 14
vértices, 12
 adjacentes, 12
 conectados, 14
 fracos, 23
 incidentes a uma aresta, 12
vizinhança, 12

Referências Bibliográficas

- [1] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory*. New York: Springer, 2008. xii+651 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 244). ISBN 978-1-84628-969-9. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5>>.
- [2] BOLLOBÁS, B. *Modern graph theory*. New York: Springer-Verlag, 1998. xiv+394 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 184). ISBN 0-387-98488-7.
- [3] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: *Complexity of computer computations (Proc. Sympos., IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y., 1972)*. New York: Plenum, 1972. p. 85–103.
- [4] LUND, C.; YANNAKAKIS, M. On the hardness of approximating minimization problems. *J. Assoc. Comput. Mach.*, v. 41, n. 5, p. 960–981, 1994. ISSN 0004-5411. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1145/185675.306789>>.
- [5] ZAKER, M. Grundy chromatic number of the complement of bipartite graphs. *Australas. J. Combin.*, v. 31, p. 325–329, 2005. ISSN 1034-4942.
- [6] BABEL, L.; OLARIU, S. On the structure of graphs with few P_4 s. *Discrete Appl. Math.*, v. 84, n. 1-3, p. 1–13, 1998. ISSN 0166-218X. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0166-218X\(97\)90120-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0166-218X(97)90120-7)>.
- [7] PEDROTTI, V. *Decomposição Modular de Grafos Não Orientados*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, Fevereiro 2007.
- [8] CHVÁTAL, V. A semistrong perfect graph conjecture. In: *Topics on perfect graphs*. Amsterdam: North-Holland, 1984, (North-Holland Math. Stud., v. 88). p. 279–280. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)72940-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-0208(08)72940-2)>.
- [9] REED, B. A semistrong perfect graph theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, v. 43, n. 2, p. 223–240, 1987. ISSN 0095-8956. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0095-8956\(87\)90022-0](http://dx.doi.org/10.1016/0095-8956(87)90022-0)>.
- [10] JAMISON, B.; OLARIU, S. p -components and the homogeneous decomposition of graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, v. 8, n. 3, p. 448–463, 1995. ISSN 0895-4801. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/S0895480191196812>>.
- [11] BAUMANN, S. *A linear algorithm for the homogeneous decomposition of graphs*. [S.l.], 1996.
- [12] BABEL, L. et al. Efficient algorithms for graphs with few P_4 's. *Discrete Math.*, v. 235, n. 1-3, p. 29–51, 2001. ISSN 0012-365X. Combinatorics (Prague, 1998). Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X\(00\)00258-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(00)00258-2)>.

- [13] BABEL, L. On the p_4 -structure of graphs. *Habilitationsschrift, Zentrum Mathematik, Technische Universität München*, 1997.
- [14] IRVING, R. W.; MANLOVE, D. F. The b -chromatic number of a graph. *Discrete Appl. Math.*, v. 91, n. 1-3, p. 127–141, 1999. ISSN 0166-218X. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0166-218X\(98\)00146-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0166-218X(98)00146-2)>.
- [15] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. [S.l.]: American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976. x + 264 p.
- [16] BEINEKE, L. W. Characterizations of derived graphs. *J. Combinatorial Theory*, v. 9, p. 129–135, 1970.
- [17] LERCHS, H. *On cliques and kernels*. [S.l.], Março 1971.
- [18] CORNEIL, D. G.; LERCHS, H.; BURLINGHAM, L. S. Complement reducible graphs. *Discrete Appl. Math.*, v. 3, n. 3, p. 163–174, 1981. ISSN 0166-218X. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X\(81\)90013-5](http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X(81)90013-5)>.
- [19] JAMISON, B.; OLARIU, S. P_4 -reducible graphs—a class of uniquely tree-representable graphs. *Stud. Appl. Math.*, v. 81, n. 1, p. 79–87, 1989. ISSN 0022-2526.
- [20] HOANG, C. T. *Perfect graphs*. [S.l.]: ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1985. (no paging) p. Thesis (Ph.D.)—McGill University (Canada). ISBN 978-0315-31368-2.
- [21] JAMISON, B.; OLARIU, S. A tree representation for P_4 -sparse graphs. *Discrete Appl. Math.*, v. 35, n. 2, p. 115–129, 1992. ISSN 0166-218X. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X\(92\)90036-A](http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X(92)90036-A)>.
- [22] JAMISON, B.; OLARIU, S. A new class of brittle graphs. *Stud. Appl. Math.*, v. 81, n. 1, p. 89–92, 1989. ISSN 0022-2526.
- [23] JAMISON, B.; OLARIU, S. On a unique tree representation for P_4 -extendible graphs. *Discrete Appl. Math.*, v. 34, n. 1-3, p. 151–164, 1991. ISSN 0166-218X. *Combinatorics and theoretical computer science* (Washington, DC, 1989). Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X\(91\)90085-B](http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X(91)90085-B)>.
- [24] GIAKOUMAKIS, V.; ROUSSEL, F.; THUILLIER, H. On P_4 -tidy graphs. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, v. 1, n. 1, p. 17–41 (electronic), 1997. ISSN 1365-8050.
- [25] BONOMO, F. et al. On the b -coloring of cographs and P_4 -sparse graphs. *Graphs Combin.*, v. 25, n. 2, p. 153–167, 2009. ISSN 0911-0119. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00373-008-0829-1>>.
- [26] BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. 37, p. 194–197, 1941.
- [27] VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Diskret. Analiz No.*, v. 3, p. 25–30, 1964.
- [28] KÖNIG, D. Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Math. Ann.*, v. 77, n. 4, p. 453–465, 1916. ISSN 0025-5831. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01456961>>.

- [29] HOLYER, I. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.*, v. 10, n. 4, p. 718–720, 1981. ISSN 0097-5397. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/0210055>>.
- [30] BABEL, L.; OLARIU, S. A new characterization of P_4 -connected graphs. In: *Graph-theoretic concepts in computer science (Cadenabbia, 1996)*. Berlin: Springer, 1997, (Lecture Notes in Comput. Sci., v. 1197). p. 17–30.
- [31] GALLAI, T. Transitiv orientierbare Graphen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, v. 18, p. 25–66, 1967. ISSN 0001-5954.
- [32] GALLAI, T. A translation of T. Gallai’s paper: “Transitiv orientierbare Graphen” [Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967), 25–66; MR0221974 (36 #5026)]. In: *Perfect graphs*. Chichester: Wiley, 2001, (Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim.). p. 25–66. Translated from the German and with a foreword by Frédéric Maffray and Myriam Preissmann.
- [33] MÖHRING, R. H. Algorithmic aspects of the substitution decomposition in optimization over relations, sets systems and Boolean functions. *Ann. Oper. Res.*, v. 4, n. 1-4, p. 195–225, 1985. ISSN 0254-5330. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02022041>>.
- [34] HABIB, M.; MONTGOLFIER, F. de; PAUL, C. A simple linear-time modular decomposition algorithm for graphs, using order extension. In: *Algorithm theory—SWAT 2004*. Berlin: Springer, 2004, (Lecture Notes in Comput. Sci., v. 3111). p. 187–198. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-27810-8_17>.
- [35] ARAÚJO, J. C. S.; SALES, C. L. Grundy number of P_4 -classes. In: *LAGOS’09—V Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*. [S.l.]: Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009, (Electron. Notes Discrete Math., v. 35). p. 21–27.
- [36] MCCONNELL, R. M.; SPINRAD, J. P. Modular decomposition and transitive orientation. *Discrete Math.*, v. 201, n. 1-3, p. 189–241, 1999. ISSN 0012-365X. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X\(98\)00319-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(98)00319-7)>.
- [37] BABEL, L. Triangulating graphs with few P_4 ’s. *Discrete Appl. Math.*, v. 89, n. 1-3, p. 45–57, 1998. ISSN 0166-218X. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0166-218X\(98\)00115-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0166-218X(98)00115-2)>.
- [38] HAVET, F. Private communication.
- [39] ZAKER, M. Results on the Grundy chromatic number of graphs. *Discrete Math.*, v. 306, n. 23, p. 3166–3173, 2006. ISSN 0012-365X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2005.06.044>>.
- [40] GOYAL, N.; VISHVANATHAN, S. np -completeness of undirected Grundy numbering and related problems. Manuscript.
- [41] HAVET, F.; SAMPAIO, L. On the (k-improper) Grundy number of a graph. Manuscript. Março 2010.
- [42] GYÁRFÁS, A.; LEHEL, J. On-line and first fit colorings of graphs. *J. Graph Theory*, v. 12, n. 2, p. 217–227, 1988. ISSN 0364-9024. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/jgt.3190120212>>.

- [43] ASTÉ, M.; HAVET, F.; LINHARES-SALES, C. Grundy number and products of graphs. *Discrete Math.*, v. 310, n. 9, p. 1482–1490, 2010. ISSN 0012-365X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2009.09.020>>.
- [44] HAVET, F.; MAIA, K.; YU, J. Greedy edge-colouring.
- [45] CAIRNIE, N.; EDWARDS, K. Some results on the achromatic number. *J. Graph Theory*, v. 26, n. 3, p. 129–136, 1997. ISSN 0364-9024. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199711\)26:3;129::AID-JGT3;3.0.CO;2-T](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199711)26:3;1-2::AID-JGT3;3.0.CO;2-T)>.
- [46] BODLAENDER, H. L. Achromatic number is NP-complete for cographs and interval graphs. *Inform. Process. Lett.*, v. 31, n. 3, p. 135–138, 1989. ISSN 0020-0190. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0020-0190\(89\)90221-4](http://dx.doi.org/10.1016/0020-0190(89)90221-4)>.
- [47] ASDRE, K.; IOANNIDOU, K.; NIKOLOPOULOS, S. D. The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs. *Discrete Appl. Math.*, v. 155, n. 17, p. 2377–2382, 2007. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2007.07.005>>.
- [48] KRATOCHVÍL, J.; TUZA, Z.; VOIGT, M. On the b -chromatic number of graphs. In: *Graph-theoretic concepts in computer science*. Berlin: Springer, 2002, (Lecture Notes in Comput. Sci., v. 2573). p. 310–320. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/3-540-36379-3_27>.
- [49] CORTEEL, S.; VALENCIA-PABON, M.; VERA, J.-C. On approximating the b -chromatic number. *Discrete Appl. Math.*, v. 146, n. 1, p. 106–110, 2005. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2004.09.006>>.
- [50] VELASQUEZA, C. I. B.; BONOMO, F.; KOCHB, I. On the b -coloring of p_4 -tidy graphs. Submitted to *Discrete Applied Mathematics*.
- [51] CAMPOS, V. et al. Restricted coloring problems on graphs with few p_4 's. 2010.
- [52] ROCHA, L. S. *b-colorações de grafos*. Dissertação (Mestrado) — UFC, Setembro 2009.
- [53] CAMPOS, V. et al. On the b -colorings of graphs with few p_4 s. In: *8th French Combinatorial Conference*. [S.l.: s.n.], Paris, 2010.