



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

Teoria dos Jogos Aplicada ao Controle de Potência e à Equalização Adaptativa em Sistemas de Comunicação Móvel

Autor

Fabiano de Sousa Chaves

Orientador

Prof. Dr. João Cesar Moura Mota

Co-orientadores

Prof. Dr. José Tarcisio Costa Filho

Prof. Dr. Francisco Rodrigo Porto Cavalcanti

*Dissertação apresentada à Coordenação
do Programa de Pós-graduação em
Engenharia de Teleinformática da
Universidade Federal do Ceará como
parte dos requisitos para obtenção do
grau de **Mestre em Engenharia de
Teleinformática.***

FORTALEZA – CEARÁ

MAIO 2005

Resumo

A teoria dos jogos é um ramo da matemática dedicado à análise das interações entre elementos concorrentes, que se encontram em situação de conflito, e à formulação de estratégias de decisão. O potencial de aplicação desta teoria em sistemas de comunicação móvel é considerável, já que em alguns dos problemas podem ser identificados elementos em situação de conflito. Dois problemas são aqui abordados, a saber, o controle de potência de transmissão e a equalização adaptativa de canal. Ambos estão relacionados à interferência, que é um dos mais importantes fatores limitantes do desempenho de sistemas de telefonia celular.

O controle de potência de transmissão consiste em um procedimento de gerenciamento da interferência de múltiplo acesso. Uma nova abordagem deste problema via teoria dos jogos é considerada nesta dissertação, resultando em uma nova dedução do algoritmo clássico de controle de potência DPC (do inglês *Distributed Power Control*).

Um novo algoritmo, denominado GT-DPC (do inglês *Game-Theoretic Distributed Power Control*), é desenvolvido e se revela uma forma geral do algoritmo DPC. O algoritmo GT-DPC se mostra mais eficiente em termos de energia do que os algoritmos convencionais para serviços de qualidade flexível (melhor esforço), isto é, para um mesmo nível de potência de transmissão média o GT-DPC oferece taxas de transmissão mais altas do que o DPC. Além disso, este algoritmo permite o gerenciamento dos recursos de potência em cenários de coexistência de serviços com diferentes características. Neste caso, o algoritmo é denominado GT-MSDPC (do inglês *Game-Theoretic Multi-Service Distributed Power Control*). O desempenho dos algoritmos propostos para sistemas de serviço único e para sistemas de múltiplos serviços é avaliado através de simulações computacionais que emulam os sistemas celulares TDMA (do inglês *Time Division Multiple Access*) e CDMA (do inglês *Code*

Division Multiple Access).

A aplicação da teoria dos jogos à equalização adaptativa de canal, que é o procedimento de combate à interferência entre símbolos, está relacionada a situações de pior caso. O filtro H_∞ (filtro robusto) é derivado através da aplicação de conceitos da teoria dos jogos. Além disso, suas interrelações com o filtro de Kalman (RLS) são apresentadas.

Por meio de simulações computacionais que emulam o sistema de telefonia celular GSM (do inglês *Global System for Mobile Communications*), ambos os filtros têm seu desempenho como equalizador adaptativo de canal avaliado em dois diferentes cenários. No primeiro deles, diferentes velocidades são atribuídas ao usuário, e os resultados mostram que o RLS e o equalizador H_∞ apresentam desempenhos comparáveis. No segundo, considera-se a presença de ruído impulsivo, que pode ser uma consequência do assincronismo de interferência de múltiplo acesso, ou que pode ter fontes externas ao sistema de comunicação, como a ignição de motores, linhas de transmissão de energia, fornos de microondas, entre outros. Neste segundo cenário, a robustez do equalizador H_∞ fica demonstrada, assim como a degradação do desempenho do RLS. Um equalizador híbrido RLS- H_∞ é proposto, com a obtenção de ganhos expressivos com respeito ao equalizador RLS convencional.

Abstract

Game theory is a branch of the Mathematics concerned with the analysis of interactions between competing elements, which are found in conflicting situations, and concerned with the formulation of decision strategies. This theory is potentially applicable to communications systems problems, since elements in conflicting situations can be identified in some of such problems. Two problems are here considered: the transmit power control and the adaptive channel equalization. Both problems are related to interference, which is one of the most important limiting factors for the cellular system performance.

Transmit power control consists of a procedure for multi-access interference management. A new game theoretical approach to power control problem is considered, resulting in a new way to deduce the classical power control algorithm DPC (*Distributed Power Control*).

A new algorithm, denoted GT-DPC (*Game-Theoretic Distributed Power Control*), is developed and can be seen as a general form of DPC algorithm. GT-DPC algorithm is shown to be more energy efficient than the conventional algorithms for best effort services, since for a unique transmit power level it provides data rates higher than DPC. Furthermore, it allows the power resource management in the presence of services with different characteristics. In this case, the algorithm is denoted GT-MSDPC (*Game-Theoretic Multi-Service Distributed Power Control*). The performance of the proposed algorithms for single-service and multi-service systems is demonstrated through computational experiments which simulate TDMA (*Time Division Multiple Access*) and CDMA (*Code Division Multiple Access*) cellular systems.

The game theory application to adaptive channel equalization, which is the procedure to combat the intersymbol interference, is related to worst case situations.

The H_∞ filter (robust filter) is deduced by applying game-theoretic concepts. Furthermore, their relations with the Kalman filter are presented.

Through computational experiments which simulate GSM (*Global System for Mobile Communications*) cellular system, both filters have their performance as adaptive channel equalizers valued in two different scenarios. In the first one, different speeds are attributed to the user, and results show that both RLS and H_∞ equalizer present similar performances. In the second scenario, impulsive noise is considered. Impulsive noise may be consequence of the asynchronous multiple access interference or may have external sources, as motors ignition, energy transmission lines or microwaves ovens. In this scenario, the H_∞ equalizer robustness is demonstrated, so as the RLS performance degradation. A hybrid RLS- H_∞ equalizer is proposed, obtaining expressive gains with respect to the conventional RLS equalizer.

**Aos meus Pais
e à Ângela**

Agradecimentos

Gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos ao Professor João Cesar Moura Mota, pela competência, pela objetividade e pelo entusiasmo com os quais ele assumiu o papel de meu orientador desde a graduação.

Gostaria de agradecer também ao Professor José Tarcisio Costa Filho por ter proporcionado a mim o contato com os conceitos da teoria dos jogos, base dos estudos desenvolvidos na dissertação.

Ao Professor Francisco Rodrigo Porto Cavalcanti sou sinceramente grato pelos valiosos conhecimentos que ele transmitiu e por ter colaborado diretamente no desenvolvimento de minhas qualidades de pesquisador.

A todos os colegas do Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem Fio (GTEL), da Universidade Federal do Ceará, sou grato pelo companheirismo e pelo ambiente favorável ao estudo e à pesquisa. Não poderia deixar de agradecer de maneira especial aos colegas Raimundo Abreu de Oliveira Neto e Tarcisio Ferreira Maciel pelas discussões e pelo aprendizado, e ao colega Carlos Héracles Moraes de Lima pelo total apoio na escrita da dissertação.

Agradeço ainda ao Departamento de Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará pela infra-estrutura oferecida e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xiv
Lista de Siglas	xix
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Teoria dos Jogos: um Enfoque para Problemas de Sistemas de Comunicação Móvel	2
1.3 Metodologia	5
1.4 Produção Científica e Contribuições	6
1.5 Estrutura da Dissertação	8
2 Teoria dos Jogos	11
2.1 Elementos Básicos de um Jogo	12
2.2 Jogos Cooperativos e Não-Cooperativos	14
2.2.1 Equilíbrio de Nash para Jogos Estáticos Discretos	16
2.2.2 Equilíbrio Minimax para Jogos Dinâmicos Discretos	22
2.3 Sumário	27
3 Formulação dos Problemas e Caracterização dos Sistemas de Comunicação Digital	29
3.1 O Sistema Rádio-Móvel	30
3.1.1 Modelagem de Sistemas de Telefonia Celular	36
3.2 O Problema do Controle de Potência de Transmissão	41
3.2.1 Formulação do Problema	43
3.3 O Problema da Equalização Adaptativa	45
3.3.1 Formulação do Problema	48
3.4 Sumário	52

4	Controle de Potência Eficiente: Aplicação da Teoria dos Jogos	53
4.1	Jogo de Controle de Potência em Sistema de Serviço Único	55
4.1.1	Algoritmo Convencional de Controle de Potência	56
4.1.2	Algoritmo de Controle de Potência Proposto para Serviços de Melhor Esforço	61
4.1.3	Análise de Desempenho do Algoritmo GT-DPC	70
4.2	Jogo de Controle de Potência em Sistema de Múltiplos Serviços . . .	76
4.2.1	Algoritmo de Controle de Potência Proposto para Múltiplos Serviços	76
4.2.2	Análise de Desempenho do Algoritmo GT-MSDPC	80
4.3	Conclusões	86
5	Equalização Adaptativa: Análise de Robustez	89
5.1	Filtro de Kalman	92
5.1.1	Formulação do Problema e Resumo do Algoritmo	93
5.2	Filtro H_∞	96
5.2.1	Formulação do Problema	97
5.2.2	Condições Necessárias de Otimalidade de $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. . .	101
5.2.3	Condições Suficientes de Otimalidade de $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$. . .	107
5.2.4	Resumo do Equalizador H_∞	109
5.3	Análise Comparativa: Simulações e Resultados	111
5.3.1	Robustez à Mobilidade	112
5.3.2	Robustez ao Ruído Impulsivo	116
5.4	Conclusões	121
6	Conclusões e Perspectivas	123
Apêndice A Abordagem Variacional para Problemas de Controle		
	Ótimo	127
A.1	Condições Necessárias para o Controle Ótimo	127
A.2	Condições Suficientes para o Controle Ótimo	129
Referências Bibliográficas		139

Lista de Figuras

2.1	Curvas de reação de dois jogadores.	17
2.2	Convergência de soluções de equilíbrio de Nash	19
3.1	Propagação por múltiplos percursos.	31
3.2	Ilustração da estrutura de acesso múltiplo em sistemas TDMA	37
3.3	Ilustração da estrutura celular tri-setorizada	38
3.4	Padrão de radiação da antena tri-setorizada	38
3.5	Ilustração da estrutura de acesso múltiplo em sistemas CDMA	39
3.6	Ilustração da estrutura celular omnidirecional	39
3.7	Estrutura de quadro e de <i>time slot</i> do sistema GSM	40
3.8	Características do modelo de canal	41
3.9	Sistema de comunicação em banda básica.	48
4.1	SINR-alvo em função da potência de transmissão.	63
4.2	Forma genérica da função custo para serviços de melhor esforço.	65
4.3	Amostra da evolução temporal do ganho de canal de um usuário.	70
4.4	Amostra da evolução da SINR para os algoritmos de controle de potência DPC e GT-DPC.	72
4.5	Taxa de transmissão média obtida pelos algoritmos em ambos os cenários e para todas as cargas.	73
4.6	Eficiência energética proporcionada pelo DPC e pelo algoritmo proposto GT-DPC em ambos os cenários e para todas as cargas.	74
4.7	Potência de transmissão média exigida pelo DPC e pelo algoritmo proposto GT-DPC em ambos os cenários e para todas as cargas.	75
4.8	Fração do tempo em que a SINR está 1 dB abaixo da SINR limiar.	75
4.9	Curvas de convergência da SINR obtida pelo algoritmo GT-MSDPC para um cenário de múltiplos serviços com potência de transmissão inicial mínima e máxima.	83
4.10	Curvas da CDF da SINR obtida pelo algoritmo DPC para cenários de serviço único e GT-MSDPC para cenários de múltiplos serviços.	84
4.11	Curvas da CDF da SINR obtida pelo algoritmo DPC para cenários de serviço único e GT-MSDPC para cenários de múltiplos serviços com a presença de desvanecimento de pequena escala.	85

5.1	Relação entre o grau de robustez e o parâmetro γ	100
5.2	Evolução do EQM obtido pelo RLS e pelo equalizador H_∞ para diferentes níveis de mobilidade do usuário.	114
5.3	TEB obtida pelo RLS e pelo equalizador H_∞ para diferentes níveis de mobilidade do usuário.	115
5.4	EQM obtido pelo RLS e pelo equalizador H_∞ na presença de ruído impulsivo.	117
5.5	EQM obtido pelo RLS e pelo equalizador híbrido RLS- H_∞ na presença de ruído impulsivo.	120
5.6	TEB obtida pelo RLS e pelo equalizador híbrido RLS- H_∞ na presença de ruído impulsivo.	121

Lista de Tabelas

2.1	Configuração de um jogo de 2-jogadores	13
2.2	Interrelação entre a otimização e a teoria dos jogos não-cooperativos	15
3.1	Classificação do desvanecimento de pequena escala	35
4.1	Resumo do algoritmo GT-DPC	68
4.2	Cenário de teste para sistemas de serviço único (melhor esforço)	71
4.3	Eficiência energética do usuário cuja evolução da SINR é mostrada na Figura 4.4	73
4.4	Cenário de teste para sistemas de múltiplos serviços	81
4.5	Erro quadrático médio entre a SINR-alvo e a SINR atingida	85
4.6	Fração do tempo média em que a SINR está 1 dB abaixo da SINR limiar no cenário de teste	86
5.1	Definição de parâmetros da formulação do problema no espaço de estados	94
5.2	Resumo do algoritmo do filtro de Kalman discreto	94
5.3	Resumo das correspondências entre as variáveis do filtro de Kalman e do equalizador	95
5.4	Definição de parâmetros da formulação do problema no espaço de estados	98
5.5	Resumo do algoritmo do filtro H_∞ discreto	109
5.6	Resumo das correspondências entre as variáveis do filtro H_∞ e do equalizador	110
5.7	Principais parâmetros das simulações computacionais	112

Lista de Símbolos

\mathbf{x}	Notação vetorial - letra minúscula em negrito
\mathbf{X}	Notação matricial - letra maiúscula em negrito
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	Esperança matemática
$\mathbf{Q}_{(\cdot)}$	Matriz de correlação
$\widehat{(\cdot)}$	Valor aproximado
$(\cdot)^T$	Transposição do vetor
$(\cdot)^*$	Ponto de equilíbrio
$(\cdot)^{dB}, (\cdot)_{dB}$	Valor em decibéis
ζ_i	Elemento do espaço das estratégias do jogador i
η_E	Eficiência energética
λ	Vetor de coestados
λ_w	Comprimento de onda
μ	Fator de esquecimento
ν	Ruído de medida na equalização
$\bar{\rho}$	SINR média
ρ_i	SINR do receptor i
ρ_i^t	SINR alvo do receptor i
σ^2	Potência média do ruído AWGN
σ_τ	Espalhamento de atraso rms
$\bar{\tau}$	Excesso de atraso médio
τ_l	Atraso do raio l
τ_{max}	Excesso de atraso máximo
Γ_i	Espaço das estratégias do jogador i

Π	Incerteza do estado inicial
Σ_i	Curva de reação do jogador i
Υ	Desvio da solução de equilíbrio
Φ_l	Ângulo de chegada do raio l
Ψ	Algoritmo de controle de potência descentralizado
a	Expoente de perda de percurso
B_c	Largura de banda de coerência
B_D	Espalhamento Doppler
B_S	Largura de banda do sinal
BW	Largura de banda do canal
c_i	Função custo do jogador i nos jogos de controle de potência
d	Símbolo transmitido
\mathbf{d}	Vetor de símbolos transmitidos
\tilde{d}	Estimativa do símbolo transmitido após o decisor
E_l	Amplitude do raio do percurso l
f_c	Frequência da portadora
f_d	Deslocamento Doppler
f_m	Deslocamento Doppler máximo
g_i	Ganho de canal
G_K	Jogo de controle de potência de serviço único (convencional)
GH_K	Jogo de controle de potência de múltiplos serviços
G^{H_∞}	Ganho do filtro H_∞
G^{Kalm}	Ganho de Kalman
\mathbf{h}	Resposta ao impulso do canal
H_K	Jogo de controle de potência de serviço único
Hm_k	Hamiltoniano
I_i	Interferência mais ruído percebida pelo receptor i
J_{H_2}	Função custo do filtro de Kalman
J_{H_∞}	Função custo do filtro H_∞
J_i	Função custo do jogador i
J_{multi}	Função custo multi-objetivo
K	Número de estágios do jogo
K^*	Conjunto de estágios do jogo

L_G	Lagrangeano
L_{perc}	Número de múltiplos percursos
M	Número de coeficientes do equalizador
\mathbf{n}	Vetor de amostras do ruído AWGN
N	Número de jogadores
N_c	Número de coeficientes da resposta ao impulso do canal
N_J	Conjunto de jogadores
\mathbf{p}	Vetor de potências dos jogadores
\mathbf{P}	Covariância do erro de estimação
p_i	Potência do transmissor i
\mathbf{p}_{-i}	Vetor de potências dos jogadores, exceto o jogador i
$PL(\varepsilon)$	Atenuação da potência em função da distância ε
$\overline{PL}(\varepsilon)$	Perda de percurso
p_{max}	Potência de transmissão máxima
p_{min}	Potência de transmissão mínima
\mathbf{q}	Ruído (ou perturbação) do processo na equalização
\mathbf{r}	Ruído (ou perturbação) do processo
\mathbf{s}	Vetor de entradas do equalizador
T_c	Tempo de coerência
T_S	Tempo de símbolo
\overline{T}_x	Taxa de transmissão média
\mathbf{u}	Vetor das variáveis de decisão dos jogadores
\mathbf{u}^i	Vetor de decisão do jogador i
u_i	Variável de decisão do jogador i
U_i	Espaço das estratégias do jogador i
\mathbf{u}_{-i}	Variáveis de decisão dos jogadores, exceto o jogador i
U_{-i}	Espaço das estratégias dos jogadores, exceto o jogador i
\mathbf{v}	Ruído de medida
v_w	Velocidade da onda eletromagnética
\mathbf{x}	Vetor de estados
$\bar{\mathbf{x}}_0$	Estimativa do estado inicial
X_J	Desvanecimento de pequena escala
X_S	Desvanecimento de larga escala
\mathbf{y}	Vetor de medida

\mathbf{z}	Combinação linear do vetor de estados
\mathbf{w}	Vetor de coeficientes do equalizador
\mathbf{w}^o	Vetor de coeficientes do equalizador ótimo
$\Delta\mathbf{w}^o$	Varição do Vetor de coeficientes do equalizador em torno do vetor ótimo

Lista de Siglas

AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i>
BPSK	<i>Binary Phase Shift Keying</i>
CDF	<i>Cumulative Distribution Function</i>
CDMA	<i>Code Division Multiple Access</i>
CPLE	Controle de Potência de Laço Externo
CPLF	Controle de Potência de Laço Fechado
DFE	<i>Decision Feedback Equalizer</i>
DPC	<i>Distributed Power Control</i>
DS-CDMA	<i>Direct Sequence - Code Division Multiple Access</i>
EQM	Erro Quadrático Médio
ERB	Estação Rádio-Base
FDMA	<i>Frequency Division Multiple Access</i>
FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
GMSK	<i>Gaussian Minimum Shift Keying</i>
GSM	<i>Global System for Mobile Communications</i>
GT-DPC	<i>Game-Theoretic Distributed Power Control</i>
GT-MSDPC	<i>Game-Theoretic Multi-Service Distributed Power Control</i>
IES	Interferência entre Símbolos
IIR	<i>Infinite Impulse Response</i>
LMS	<i>Least Mean Square</i>
QoS	<i>Quality of Service</i>
RLS	<i>Recursive Least Squares</i>
SINR	<i>Signal to Interference plus Noise Ratio</i>
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>
TDMA	<i>Time Division Multiple Access</i>

TEB	Taxa de Erro de Bit
TPBVP	<i>Two Point Boundary Values Problem</i>
WCDMA	<i>Wideband Code Division Multiple Access</i>
WSS	<i>Wide-Sense Stationary</i>

Introdução

1.1 Motivação

As redes de telefonia celular experimentam um crescimento exponencial da demanda por acesso aos seus serviços. Estes serviços apresentam requisitos de qualidade cada vez mais restritos, como baixas taxas de erro e altas taxas de transmissão de dados. O desafio atual em tais sistemas de comunicação consiste na busca do seu limite de capacidade, de maneira que os requisitos de qualidade dos serviços ofertados sejam satisfeitos. Configura-se então uma situação de conflito, pois requisitos de qualidade mais restritos, assim como a expansão da capacidade das redes, exigem uma maior quantidade de recursos ou, alternativamente, uma utilização mais eficiente dos recursos disponíveis.

Um dos maiores limitantes do desempenho dos sistemas celulares é a interferência. Ela é a principal responsável pela degradação dos sinais transmitidos, que ao chegarem ao receptor podem não ser recuperados corretamente por estarem contaminados. Dois tipos de interferência podem ser destacados: a interferência de acesso múltiplo e a interferência entre símbolos. Estes são fenômenos desacoplados, de naturezas distintas e, por isso, são tratados separadamente.

A interferência de acesso múltiplo surge do compartilhamento dos recursos de rádio pelos usuários de uma rede celular. Quando o recurso em questão é a potência, há claramente um conflito entre os usuários, pois a potência é um recurso escasso e deve ser utilizada de maneira eficiente, sob pena de elevar o nível de interferência de acesso múltiplo e levar o sistema prematuramente a uma situação de indisponibilidade de recursos, o que impede novas conexões e afeta aquelas que já estão em curso. Logo, o gerenciamento da interferência de acesso múltiplo é um

processo importante para o sistema celular tanto com respeito à sua capacidade quanto em relação ao nível de qualidade dos serviços oferecidos. O gerenciamento da interferência de acesso múltiplo é realizado através do controle de potência.

A interferência entre símbolos resulta da combinação desfavorável entre as altas taxas de transmissão de sinais desejadas e o tempo de dispersão dos canais, o que pode causar muitos erros na recepção. Retransmissões são então necessárias, o que afeta tanto a capacidade do sistema quanto o nível de qualidade dos serviços. A equalização adaptativa é uma técnica clássica de combate à interferência entre símbolos. Os agentes conflitantes, no caso da interferência entre símbolos, não são tão claramente identificáveis como são em relação à interferência de acesso múltiplo. Pode-se dizer que o conflito, neste caso, ocorre entre o bom funcionamento do equalizador e as perturbações presentes no sinal recebido.

De uma forma mais precisa, a motivação desta dissertação é o gerenciamento e o combate à interferência através, respectivamente, do controle de potência e da equalização adaptativa. Em ambos os problemas há conflitos de interesse entre elementos dos sistemas que devem ser identificados e postos em solução de compromisso. A formulação de tais conflitos motiva a abordagem para a solução dos problemas através da **teoria dos jogos**. A teoria dos jogos é um ramo da matemática dedicado à análise das interações entre elementos com objetivos conflitantes e à formulação de estratégias de decisão. A modelagem dos problemas do controle de potência e da equalização adaptativa como um jogo e a utilização dos conceitos da teoria dos jogos podem levar a soluções mais apropriadas para as situações de conflito, soluções estas que possibilitam uma utilização mais eficiente dos recursos disponíveis.

1.2 Teoria dos Jogos: um Enfoque para Problemas de Sistemas de Comunicação Móvel

O conflito de interesses sempre teve uma posição de destaque na história da humanidade. Provavelmente, poucos assuntos foram alvo de atenção comparável. Já na Grécia antiga, o filósofo Platão, em sua obra *A República* [1], aborda a seguinte situação: considere um soldado na linha de frente de batalha, esperando com seus colegas para se defenderem contra um ataque do inimigo. Ele pode pensar que se a defesa está bem postada e provavelmente obterá sucesso, é improvável que sua contribuição pessoal seja essencial. Porém, se ele se mantiver na batalha, ele corre o risco de ser morto ou ferido. Por outro lado, se uma vitória do ataque estiver

por acontecer, então as suas chances de ser morto ou ferido são ainda maiores. Com base nestas idéias, pode parecer que, para o soldado, é melhor abandonar a batalha independentemente de quem irá vencê-la. Obviamente, se todos os soldados pensarem assim, como eles aparentemente deveriam, pois estão na mesma situação, isto levaria à derrota. Todos os soldados poderiam chegar a esta mesma conclusão. Porém, isto seria suficiente para manter os soldados em seus postos? Não. Quanto mais intenso fosse o presságio de derrota, mais forte seria a idéia de abandono da batalha. Da mesma forma, quanto maior fosse a crença na vitória, sem a necessidade de contribuições individuais, menores seriam os motivos para eles ficarem e lutarem.

O estudo científico de situações de conflito de interesses como esta começou a ser efetivamente desenvolvido apenas no século XX [2–4] e apresenta ainda um crescente número de publicações científicas. Atualmente, o conflito de interesses, tanto entre indivíduos quanto entre elementos de maneira geral, é um dos assuntos mais relevantes em diversas áreas do conhecimento, como a matemática aplicada, a economia, a engenharia, a sociologia e a ciência política [5–7].

É fácil caracterizar os principais aspectos de um problema de conflito de interesses. Um indivíduo deve tomar uma decisão e cada possível decisão corresponde a um acontecimento (ou resultado) diferente. Este indivíduo tem preferências pessoais. Entretanto, mesmo que ele tenha algum controle sobre as variáveis que determinam o acontecimento, ele pode não ter o controle pleno. Algumas vezes este indivíduo não é o único que tem poder de decisão com respeito a um acontecimento, ou seja, o acontecimento pode ser resultado da decisão de vários indivíduos. Se as preferências dos indivíduos não coincidem, a situação de conflito está configurada. Há ainda casos em que um indivíduo não tem controle pleno sobre as variáveis que determinam o acontecimento devido a eventos aleatórios (muitas vezes chamados de “ações da natureza”), que podem influenciar o acontecimento.

Neste contexto mais amplo, o comportamento dos acontecimentos ou resultados conseqüentes destas situações de conflito é analisado. O desafio consiste em explicar as observações do comportamento dos resultados e formular princípios que resultem em ações inteligentes.

A literatura sobre problemas de conflito de interesses é vasta e, em grande parte, especializada e detalhada. Entretanto, até a metade do século XX, somente uma pequena parte da literatura se destinava a abordar estes problemas de maneira sistemática, através de formulações matemáticas. A abordagem destes problemas através da matemática promoveu uma abstração das especificidades dos problemas,

tornando possível o desenvolvimento de estudos sobre classes de problemas de conflito de interesses.

O conjunto de conceitos, definições e desenvolvimentos matemáticos sobre o conflito de interesses foi nomeado **teoria dos jogos**. Este nome está diretamente relacionado aos jogos de salão, sendo, considerado inconveniente por muitos, já que ele sugere que a teoria é relativa somente a conflitos presentes em tais jogos, quando na verdade ela é bem mais geral do que isso [2–7]. Apesar disso, este é o nome adotado na maioria das publicações e aceito pela maior parte da comunidade científica.

A teoria dos jogos é um ramo da matemática dedicado à análise das interações entre elementos com objetivos conflitantes em um ambiente de competição por recursos limitados. O seu nascimento se deu na área da economia, com o objetivo de examinar as interações de agentes econômicos, tais como empresas em diversos tipos de mercado. Posteriormente, conflitos de interesses sob o ponto de vista das ciências políticas, das estratégias militares e da sociologia passaram a estar no centro das atenções.

O potencial de aplicação da teoria dos jogos em problemas de sistemas de comunicação móvel é considerável e somente começou a ser explorado recentemente. Alguns problemas que envolvem elementos com objetivos conflitantes já foram identificados e abordados segundo os conceitos da teoria dos jogos. Os problemas do controle de potência, do controle de admissão de chamadas e da alocação dinâmica de canais são exemplos de aplicação da teoria dos jogos em sistemas de telefonia celular [8–10]. Porém, acredita-se que esta teoria possa ser aplicável a vários outros problemas; ou ainda, que ela possa ser utilizada para a obtenção de soluções mais eficientes nestes problemas já identificados [11].

Além do aspecto do conflito de interesses ou objetivos, há um outro fator que motiva a utilização da teoria dos jogos em sistemas de comunicação móvel. Boa parte dos problemas nestes sistemas tem como característica a necessidade de respostas instantâneas ou quase instantâneas, ou seja, estes problemas exigem uma baixa complexidade computacional. O aumento da ordem de muitos destes problemas causam uma elevação da sua complexidade computacional, o que torna os seus algoritmos computacionalmente dispendiosos. Portanto, estes problemas praticamente exigem algoritmos distribuídos, que utilizem informações localmente disponíveis, o que é um forte motivo para a utilização da teoria dos jogos [12].

1.3 Metodologia

Após identificar como tema central de estudo a aplicação da teoria dos jogos em problemas de comunicação móvel, a metodologia para a condução das atividades de pesquisa mais apropriadas é selecionada. Nesta dissertação, dois problemas distintos são tratados: o controle de potência e a equalização de canal. Em ambos, conceitos de jogos não-cooperativos são empregados e, desta abordagem, algoritmos são desenvolvidos.

Uma rede celular, ambiente dinâmico e complexo em que os dois problemas estão inseridos, apresenta componentes e processos estocásticos, cuja natureza aleatória deve ser apropriadamente capturada nos modelos. Uma abordagem puramente analítica deste ambiente demandaria tantas simplificações que a descrição dos processos envolvidos ficaria comprometida. Por outro lado, a condução de experimentos com o sistema real, na maioria dos casos, é um procedimento dispendioso e, por vezes, inviável. Isto é válido para os problemas em questão.

Dessa forma, a avaliação qualitativa dos algoritmos desenvolvidos nesta dissertação será realizada com o uso de um simulador computacional sistêmico para o problema do controle de potência e de um simulador computacional de enlace para o caso da equalização de canal. Os dois simuladores são estáticos, apesar de emularem aspectos dinâmicos, como os efeitos da mobilidade relativa entre transmissor e receptor.

A simulação sistêmica compreende dois tipos de sistemas de telefonia celular: o sistema de acesso múltiplo por divisão do tempo (TDMA, do inglês *Time Division Multiple Access*) e o sistema de acesso múltiplo por divisão do código (CDMA, do inglês *Code Division Multiple Access*). Por isso, pode-se considerar que dois diferentes simuladores são usados. Entretanto, a estrutura da rede e os seus principais processos são implementados de maneira bastante simplificada em ambos, já que o objetivo destas ferramentas é viabilizar a obtenção de resultados qualitativos para a avaliação dos algoritmos de controle de potência. Enquanto isso, no simulador de enlace, a estrutura de transmissão/recepção em banda básica do sistema GSM (do inglês *Global System for Mobile Communications*) de telefonia celular móvel é implementada.

1.4 Produção Científica e Contribuições

Durante o período de atividades que resultaram na produção desta dissertação, alguns trabalhos nas áreas de pesquisa em foco, com publicação em congressos e revistas nacionais e internacionais, foram produzidos. As contribuições decorrentes destas atividades são apresentadas abaixo.

- ▶ **1ª Contribuição (C1):** Nova dedução do algoritmo clássico de controle de potência descentralizado, DPC (do inglês *Distributed Power Control*), através da utilização dos conceitos dos jogos estáticos não-cooperativos.
- ▶ **2ª Contribuição (C2):** Desenvolvimento de um novo algoritmo de controle de potência descentralizado para sistemas que oferecem serviços de melhor esforço. O novo algoritmo é uma forma generalizada do DPC e a sua convergência é assegurada conforme os conceitos dos jogos estáticos não-cooperativos.
- ▶ **3ª Contribuição (C3):** Desenvolvimento, com o uso dos conceitos dos jogos estáticos não-cooperativos, de um novo algoritmo de controle de potência descentralizado para sistemas que oferecem, simultaneamente, serviços de QoS (do inglês *Quality of Service*) garantido e serviços de melhor esforço. Os aspectos de convergência do algoritmo são discutidos de acordo com os conceitos dos jogos estáticos não-cooperativos.
- ▶ **4ª Contribuição (C4):** Conexão entre o problema de equalização adaptativa de canal e o problema minimax que, solucionado via teoria dos jogos dinâmicos, resulta no filtro H_∞ . Análise comparativa de desempenho quanto à robustez e à precisão de algoritmos de equalização adaptativa de canal baseados no filtro de Kalman e no filtro H_∞ para diferentes perfis de mobilidade do usuário.
- ▶ **5ª Contribuição (C5):** Análise comparativa de desempenho quanto à robustez e à precisão de algoritmos de equalização adaptativa de canal baseados no filtro de Kalman e no filtro H_∞ na presença de ruído impulsivo. Proposição de um algoritmo híbrido RLS- H_∞ de equalização adaptativa robusto ao ruído impulsivo.

A seguir, as publicações produzidas conforme a sua relação com as contribuições resultantes dos estudos nesta dissertação são listadas.

- ▶ Este trabalho foi publicado em congresso nacional e está relacionado com as contribuições C1, C2 e C3:
 - i. *An Energy Efficient Distributed Power Control Algorithm and its Convergence*, Fabiano de S. Chaves, Tarcisio F. Maciel, Raimundo A. de Oliveira N. e Francisco R. P. Cavalcanti, XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Belém, Brasil, Setembro, 2004.

- ▶ Este trabalho foi publicado em congresso nacional e está relacionado com a contribuição C4:
 - i. *H_2 and H_∞ Approaches for Time-Variant Multipath Channel Equalization*, Fabiano de S. Chaves, João C. M. Mota e José T. Costa F., XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Belém, Brasil, Setembro, 2004.

- ▶ Apesar de os resultados destes trabalhos não estarem explicitamente presentes nesta dissertação, eles fundamentaram os estudos das contribuições C1, C2 e C3, inclusive com o desenvolvimento das ferramentas computacionais. Por isso, encontram-se no contexto daquelas contribuições:
 - i. *New Distributed Power Control Algorithms for Mobile Communications*, Raimundo A. de Oliveira N., Fabiano de S. Chaves, Francisco R. P. Cavalcanti e Tarcisio F. Maciel, Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações, a ser publicado.
 - ii. *A New Distributed Power Control Algorithm Based on a Simple Prediction Method*, Raimundo A. de Oliveira N., Fabiano de S. Chaves, Francisco R. P. Cavalcanti e Tarcisio F. Maciel, Lecture Notes in Computer Science, v. 3124, p. 431-436, Agosto, 2004.
 - iii. *Distributed Power Control with Tracking of Fast Fading and Interference*, Raimundo A. de Oliveira N., Tarcisio F. Maciel, Francisco R. P. Cavalcanti e Fabiano de S. Chaves, IEEE Vehicular Technology Conference - VTC'04 Spring, Milão, Itália, Maio 2004.

1.5 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está estruturada da maneira descrita a seguir:

- ▶ Capítulo 2: neste capítulo, inicia-se o contato com a teoria dos jogos. Os elementos básicos de um jogo são apresentados de maneira sucinta e um exemplo simples de um jogo é trabalhado. As interrelações entre a teoria da otimização e a teoria dos jogos são comentadas, com ênfase para os jogos não-cooperativos, que são os de interesse nesta dissertação. O equilíbrio de Nash e o equilíbrio minimax são abordados, desde os seus conceitos mais gerais até as suas questões de estabilidade.
- ▶ Capítulo 3: a interferência em sistemas de comunicação é colocada como questão central de estudo. A diferença de natureza entre a interferência de acesso múltiplo e a interferência entre símbolos motiva a abordagem em separado de ambas, através dos processos de controle de potência e de equalização de canal, respectivamente. Os fenômenos de propagação do canal rádio-móvel são discutidos e os sistemas de telefonia celular, assim como os canais de propagação, são modelados. A formulação dos dois problemas retratados nesta dissertação e suas motivações são apresentadas neste capítulo.
- ▶ Capítulo 4: este capítulo é dedicado aos estudos sobre o controle de potência descentralizado. Os algoritmos desenvolvidos são potencialmente aplicáveis a qualquer sistema de comunicação multiusuário, porém, o ambiente de estudo escolhido é uma rede celular. Os usuários desta rede são classificados em dois grupos: os usuários de serviços de QoS garantido e os usuários de serviços de melhor esforço. A partir desta classificação, surgem diferentes cenários em que o controle de potência deve atuar. Inicialmente, as atenções são voltadas para sistemas de serviço único, nas quais o problema é formulado como um jogo tanto para o caso dos serviços de QoS garantido quanto para o caso dos serviços de melhor esforço. Finalmente, o cenário de um sistema que oferece simultaneamente ambos os tipos de serviço é considerado. O jogo que representa este cenário resulta em um novo algoritmo. Todos os algoritmos têm seu desempenho avaliado por meio de simulações computacionais.
- ▶ Capítulo 5: a equalização adaptativa de canal é o objeto de estudo deste capítulo. Inicialmente, uma breve apresentação dos estudos referentes

à robustez na área do processamento de sinais é realizada. O filtro de Kalman tem seus aspectos principais discutidos e suas equações são resumidamente apresentadas, assim como sua relação direta com o algoritmo RLS convencional. Na continuação dos estudos sobre robustez, os conceitos gerais do filtro H_∞ são apresentados. A solução do problema minimax que corresponde ao filtro H_∞ é desenvolvida através da formulação do problema como um jogo. Análises comparativas entre o filtro de Kalman e o filtro H_∞ quanto aos aspectos de robustez e precisão nos cenários de alto nível de mobilidade do usuário e de presença de ruído impulsivo são conduzidas no final deste capítulo por meio de simulações computacionais. Um algoritmo híbrido RLS- H_∞ , robusto ao ruído impulsivo, é proposto.

- Capítulo 6: este último capítulo fornece um resumo das conclusões e contribuições obtidas dos estudos e análises realizadas nesta dissertação. Além disso, perspectivas para a continuação de tais estudos são apresentadas.

Teoria dos Jogos

A teoria dos jogos é um ramo da matemática dedicado ao estudo de situações em que agentes de decisão são dependentes entre si e uns reagem às ações dos outros. Problemas em que múltiplos objetivos conflitantes estão presentes são o alvo desta teoria.

O conjunto de modernos conceitos matemáticos que constituem a teoria dos jogos é geralmente atribuído ao matemático húngaro John von Neumann, em seu artigo [13] e em seu livro [14], este último escrito juntamente com o economista austríaco Oskar Morgenstern. O nascimento da teoria dos jogos se deu na área da economia, com o objetivo de examinar as interações de agentes econômicos, tais como empresas em um mercado. Posteriormente, conflitos de interesses do ponto de vista das ciências políticas, das estratégias militares e da sociologia passaram a estar no centro das atenções.

As referências citadas acima sugerem o critério “minimax”, um conceito de solução com uma longa tradição na teoria das decisões. Este conceito está claramente relacionado a situações de pior caso, nas quais um agente de decisão age assumindo que as ações dos outros agentes de decisão serão as mais danosas possíveis para ele.

Um dos grandes nomes da teoria dos jogos é o matemático inglês John Nash. Em 1950 e 1951, ele concebeu suas maiores contribuições [15, 16]. O seu trabalho veio explicitar um dos fatores mais atrativos da teoria dos jogos: a coexistência entre competição e cooperação.

Este capítulo contém os aspectos gerais mais importantes da teoria dos jogos, além do desenvolvimento matemático das soluções de equilíbrio aplicadas posteriormente aos problemas do controle de potência e da equalização adaptativa. A Seção 2.1 apresenta os elementos básicos de um jogo e, além disso, as diversas

classificações às quais um jogo pode ser submetido. Na Seção 2.2, a teoria dos jogos é situada no contexto da otimização, com ênfase nos jogos não-cooperativos. A Subseção 2.2.1 traz discussões sobre uma solução de equilíbrio para jogos estáticos, enquanto que os jogos dinâmicos têm atenção na Subseção 2.2.2.

2.1 Elementos Básicos de um Jogo

O jogo é a unidade básica da teoria dos jogos. Ele representa uma situação de conflito de interesses e as suas diferentes componentes. Os elementos básicos do jogo são: o conjunto de jogadores; o conjunto de possíveis ações de cada jogador; e o conjunto de funções utilidade, funções custo, ou, de maneira mais geral, de funções objetivo dos jogadores.

O conjunto de **jogadores ou agentes de decisão** é formado pelos elementos que se encontram em situação de conflito. Os jogadores têm poder de decisão ou pelo menos têm influência no resultado do jogo, ou seja, eles são responsáveis pelas escolhas que determinam o resultado do jogo. Admite-se que os jogadores são racionais, o que significa que cada jogador decide pela estratégia que lhe proporciona o melhor resultado do jogo, de acordo com as informações que ele possui.

O conjunto de possíveis ações dos jogadores é mais conhecido como **espaço das estratégias**. É importante destacar a diferença entre estratégia e decisão. As estratégias são as regras de decisão, ou seja, a decisão de um jogador é resultante da escolha de uma ou mais estratégias. As estratégias são classificadas como **estratégias puras** ou **estratégias mistas**, sendo as primeiras determinísticas, enquanto que as últimas são estocásticas [7]. As ações ou decisões dos jogadores estão limitadas ao seu espaço de estratégias. Nesta dissertação, as atenções estão voltadas apenas para as estratégias puras.

A satisfação de cada jogador é representada pela função objetivo. A **função objetivo** é um elemento muito importante em um jogo, pois ela deve retratar bem o interesse de cada jogador com respeito ao processo de otimização a ser realizado. Ela envolve parâmetros importantes para a situação de conflito, como as variáveis de decisão dos jogadores. Quando o critério de otimização é maximizar a função objetivo, ela pode ser chamada de **função utilidade**. Caso o critério seja a minimização da função objetivo, ela pode ser denominada **função custo**. Abaixo, uma definição formal para a função custo é apresentada.

Definição 1 *Uma função J_1 (do jogador 1) que relaciona um valor numérico ao conjunto de possíveis decisões $U_1(J_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R})$ é uma função custo se, para todo*

$\zeta_1, \zeta_2 \in U_1$, ζ_1 é preferível a ζ_2 se, e somente se, $J_1(\zeta_1) \leq J_1(\zeta_2)$.

Para ilustrar os conceitos básicos de um jogo, um exemplo é considerado. Neste jogo de 2-jogadores, ambos têm como critério de otimização a minimização de suas funções custo. A Tabela 2.1 mostra a configuração do jogo.

Tabela 2.1: Configuração de um jogo de 2-jogadores.

Jogador	Espaço das Estratégias	Função Objetivo
1	$u_1 \in [0, \infty)$	$J_1(u_1, u_2) = u_1^2 + u_1 u_2 - u_1$
2	$u_2 \in [0, \infty)$	$J_2(u_1, u_2) = u_2^2 + u_1 u_2 - u_2$

Da Tabela 2.1, percebe-se o conflito de interesses dos dois jogadores. A minimização de cada função custo é dependente de ambos, ou seja, não é possível promover uma otimização unilateral.

Um jogo pode ser classificado com respeito a diversos aspectos. Alguns deles são discutidos a seguir. Com o objetivo de facilitar o entendimento das definições, um jogo de 2-jogadores volta a ser considerado, porém, todos os conceitos e discussões subsequentes são válidos também para jogos de N -jogadores.

Jogos de Soma-Zero versus Jogos de Soma-Não-Zero

As características da competição em um jogo determinam se este é um **jogo de soma-zero** ou se é um **jogo de soma-não-zero**. Esta classificação é referente ao grau de competição do jogo. Em ambos os tipos de jogo há competição entre os jogadores, porém, no jogo de soma-zero, ganhos de um jogador correspondem a perdas do outro jogador. Nestes jogos, a soma das funções objetivo dos jogadores é nula ($J_1 = -J_2$), o que justifica a denominação jogo de soma-zero. O jogo apresentado na Tabela 2.1 é um jogo de soma-não-zero. Jogos em que a soma das funções custo é constante, mas diferente de zero, também podem ser tratados como jogos de soma-zero, pois apresentam as mesmas características.

Jogos Contínuos no Tempo versus Jogos Discretos no Tempo

Quanto ao jogo ser contínuo ou discreto no tempo, esta é uma definição referente aos níveis ou estágios do jogo. Um estágio de um jogo corresponde a uma rodada de decisões dos jogadores. Um **jogo discreto** possui um número “contável” de estágios, enquanto em um **jogo contínuo** o processo de tomada de decisão é contínuo no tempo.

Jogos Finitos versus Jogos Infinitos

Em um **jogo finito**, cada jogador tem à sua disposição um número finito de possíveis decisões, isto é, seu espaço de estratégias é finito. O jogo definido na Tabela 2.1 é, portanto, um **jogo infinito**.

Jogos Estáticos versus Jogos Dinâmicos

Um jogo no qual os jogadores agem somente uma vez e de maneira independente entre eles, isto é, simultaneamente, é definitivamente chamado de **jogo estático**. Um jogo pode ser classificado como **jogo dinâmico** se pelo menos um jogador pode usar uma estratégia que depende de decisões anteriores dele e/ou de outro jogador, ou seja, se as estratégias dos jogadores dependem da memória das decisões tomadas. Entretanto, por um abuso de linguagem, jogos em que os jogadores articulam simultaneamente, porém mais de uma vez, ou seja, jogos de múltiplos estágios, são muitas vezes considerados dinâmicos [7].

2.2 Jogos Cooperativos e Não-Cooperativos

Problemas de múltiplos objetivos podem ser abordados com estratégias de cooperação. Tais problemas de otimização permitem a negociação entre os agentes de decisão e costumam ser formulados, por exemplo, como problemas de objetivo único através da combinação linear das funções objetivo ou do tratamento de algumas delas como restrições. Para o problema exposto na Tabela 2.1, isto seria o equivalente a:

$$\min_{u_1, u_2} \{J_{multi} = \kappa J_1(u_1, u_2) + (1 - \kappa) J_2(u_1, u_2)\}, \quad (2.1)$$

sendo $0 \leq \kappa \leq 1$ e a minimização de J_{multi} o único critério de otimização. A cooperação acontece através da negociação do valor da variável κ .

A teoria dos jogos, por outro lado, analisa tais situações de interação entre agentes de decisão de maneira que os seus interesses individuais são preservados ou satisfatoriamente preservados. Em outras palavras, a teoria dos jogos trata tais problemas realmente como problemas de conflito de interesses, como o problema apresentado na Tabela 2.1, representado na equação a seguir:

$$\begin{aligned} \min_{u_1} \{ J_1(u_1, u_2) = u_1^2 + u_1 u_2 - u_1 \} \\ \min_{u_2} \{ J_2(u_1, u_2) = u_2^2 + u_1 u_2 - u_2 \}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

É importante enfatizar que as funções objetivo são tratadas independentemente e devem ser minimizadas simultaneamente. Elas não são combinadas para a formação de um objetivo escalar através de uma combinação linear (como um somatório ponderado), nem tratadas como restrições.

De maneira geral, a teoria dos jogos se concentra em modelos de competição e de cooperação [17]. Assim, ela pode ser dividida em duas grandes classes: a teoria dos jogos não-cooperativos e a teoria dos jogos cooperativos. A teoria dos jogos não-cooperativos estuda situações em que os jogadores interagem, ou seja, a comunicação entre eles é permitida, porém acordos não são possíveis. Na teoria dos jogos cooperativos, estes acordos são possíveis. A ferramenta matemática de interesse nesta dissertação é a teoria dos jogos não-cooperativos e, por isso, ela será o foco das atenções.

A Tabela 2.2 expõe a interrelação entre a otimização e a teoria dos jogos não-cooperativos. Um jogo estático não-cooperativo consiste em um conjunto de problemas de programação matemática. Da mesma forma, um jogo dinâmico não-cooperativo equivale a múltiplos problemas de filtragem ótima.

Tabela 2.2: Interrelação entre a otimização e a teoria dos jogos não-cooperativos.

Otimização	Teoria dos Jogos
Programação Matemática	Teoria dos Jogos Estáticos
Filtragem Ótima	Teoria dos Jogos Dinâmicos

Ao contrário dos problemas de filtragem ótima (jogos de um 1-jogador), nos quais a otimalidade tem um significado preciso, em problemas de múltiplos objetivos, a otimalidade não é um conceito bem definido. Nestes problemas, formas específicas de otimalidade são consideradas: as soluções de equilíbrio. Nesta dissertação, dois tipos de equilíbrio para jogos não-cooperativos são usados: a solução de equilíbrio de Nash [15, 16] e a solução de equilíbrio minimax, que, na verdade, é um caso especial da solução de equilíbrio de Nash. A primeira é aplicada a jogos de soma-não-zero, a última, a jogos de soma-zero.

A solução de equilíbrio de Nash em jogos estáticos e infinitos pode ser obtida através do ponto de interseção das curvas de reação dos jogadores, pois as respostas ótimas dos jogadores dado que se encontram neste ponto correspondem ao próprio ponto, o que justifica a denominação ponto ou solução de equilíbrio. As curvas de reação possuem algumas propriedades como continuidade e diferenciabilidade, dependendo da estrutura dos espaços de ação e das funções custo. A definição a seguir apresenta uma noção mais precisa das curvas de reação para um jogo de N -jogadores [7].

Definição 2 *Em um jogo de soma-não-zero com N -jogadores, considere que o mínimo de $J_1(u_1, \dots, u_N)$ com respeito a $u_1 \in U_1$ seja atingido para cada $u_{-1} \in U_{-1}$, sendo $u_{-1} \triangleq u_2, \dots, u_N$ e $U_{-1} \triangleq U_2 \times \dots \times U_N$. Então, o conjunto $\Sigma_1(u_{-1}) \subset U_1$ é chamado de conjunto de **resposta ótima** ou de **reação ótima**. Este conjunto é definido como:*

$$\Sigma_1(u_{-1}) = \{\zeta \in U_1 : J_1(\zeta, u_{-1}) \leq J_1(u_1, u_{-1}), \forall u_1 \in U_1\}. \quad (2.4)$$

Como o conjunto $\Sigma_1(u_{-1})$ é unidimensional, ele é chamado de curva de reação ou função de reação do jogador 1. As curvas de reação de cada jogador i , $i \in N_J$, são similarmente definidas.

Para ilustrar o papel das curvas de reação na determinação da solução de equilíbrio de Nash, observe a Figura 2.1. Nela, as curvas de reação dos jogadores 1 e 2 são traçadas, assim como as curvas de nível correspondentes às suas funções custo J_1 e J_2 para um determinado jogo de 2-jogadores com $U_1 = U_2 = \mathbb{R}$.

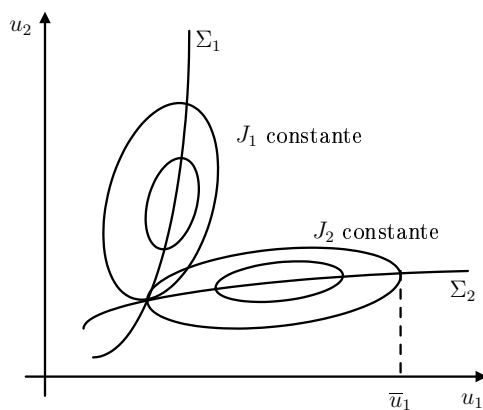


Figura 2.1: Curvas de reação de dois jogadores.

No contexto de um jogo entre dois jogadores, $u_1 = \bar{u}_1$ é considerada uma jogada do jogador 1, diante da qual o jogador 2 obterá a sua “melhor” jogada. Neste caso, o melhor que o jogador 2 pode fazer é minimizar J_2 ao longo de $u_1 = \bar{u}_1$. Assumindo que este problema de minimização admite uma única solução, a resposta ótima do jogador 2 é determinada, na figura, pelo ponto em que a linha $u_1 = \bar{u}_1$ é tangente à curva de nível J_2 . Para cada diferente \bar{u}_1 , uma resposta ótima única possivelmente diferente pode ser encontrada pelo jogador 2, indicada por Σ_2 na Figura 2.1. A curva de reação do jogador 1 é construída de maneira similar. Como anteriormente comentado, a solução de Nash deve estar em ambas as curvas de reação e, portanto, se essas curvas têm somente um ponto de interseção, como na Figura 2.1, a solução de Nash existe e é única. Nesta e em outras situações, é importante avaliar as condições de estabilidade.

Estabilidade do Equilíbrio de Nash

Uma característica importante para uma solução de equilíbrio é a estabilidade. Voltando a considerar um jogo de 2-jogadores, dada uma solução de equilíbrio de Nash, considere a seguinte seqüência de eventos:

- (i) O jogador 1 realiza uma jogada diferente, abdicando de sua estratégia de equilíbrio;
- (ii) O jogador 2 observa a situação e minimiza sua função custo de acordo com a nova estratégia do jogador 1;
- (iii) O jogador 1 agora reage ao evento anterior, minimizando sua função custo;
- (iv) O jogador 2 reage ao evento anterior, etc.

Se esta seqüência infinita de eventos converge para a solução de equilíbrio de Nash original, independentemente da variação com relação à estratégia ótima, esta solução de equilíbrio de Nash é estável.

Uma solução de equilíbrio de Nash estável e outra instável são mostradas, respectivamente, nas Figuras 2.2(a) e 2.2(b). Observa-se da Figura 2.2(a) que a partir de uma jogada do jogador 1, diferente da jogada que corresponde ao ponto de equilíbrio de Nash, estabelece-se um processo iterativo de jogadas baseadas nas condições ótimas oferecidas pelas curvas de reação de cada jogador. Este processo iterativo leva à convergência para a solução originalmente “satisfatória” para ambos (ponto de cruzamento das curvas de reação), que é a solução de equilíbrio de Nash. Já da Figura 2.2(b), esta solução de equilíbrio não é reencontrada a partir do processo iterativo decorrente de uma jogada diferente da jogada que corresponde ao ponto

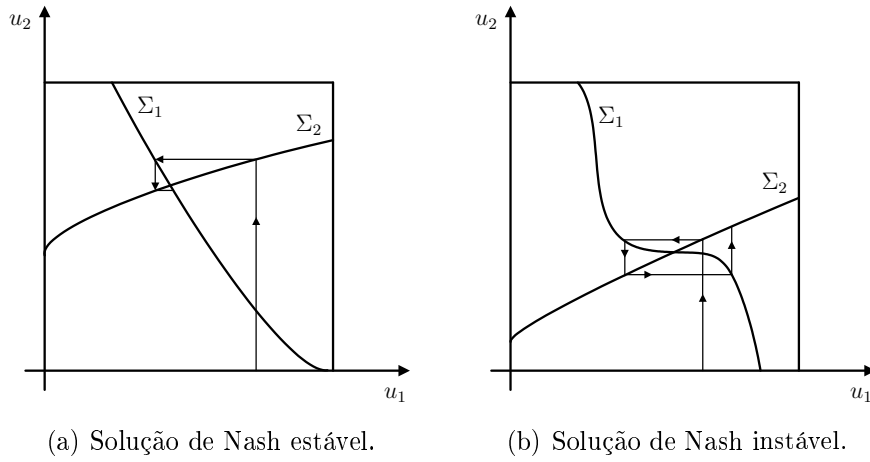


Figura 2.2: Convergência de soluções de equilíbrio de Nash.

de equilíbrio, pois a cada jogada há um distanciamento do ponto de cruzamento existente entre as curvas de reação dos jogadores.

A extensão da noção de estabilidade de um jogo de 2-jogadores para um jogo de N -jogadores exige a seguinte definição formal para uma solução de equilíbrio de Nash estável [7].

Definição 3 *Uma solução de equilíbrio de Nash $u_i^*, i \in N_J$ é estável com respeito a um esquema Υ de desvio da solução se pode ser obtida como o limite do processo iterativo:*

$$u_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} u_i(k), \quad (2.5)$$

$$u_i(k+1) = \arg \min_{u_i \in U_i} J_i(u_{-i}^{\Upsilon^k}, u_i), \quad u_i(0) \in U_i, i \in N_J. \quad (2.6)$$

Um possível esquema de desvio da solução é:

$$u_{-i}^{\Upsilon^k} = u_{-i}(k), \quad (2.7)$$

que corresponde à situação em que os jogadores reajustam suas ações simultaneamente em resposta às mais recentes ações dos outros jogadores. Se a iteração da Definição 3 converge sob qualquer esquema de desvio da solução, então a solução de equilíbrio de Nash é **globalmente estável**.

Existência do Equilíbrio de Nash

Conforme a discussão desenvolvida até o momento, a existência de um equilíbrio de Nash em jogos de N -jogadores com estratégias puras pode ser garantida através da prova de que as funções custo possuem um ponto de interseção. O teorema seguinte faz exatamente isso, estabelecendo um conjunto de condições suficientes, sob as quais jogos de soma-não-zero de N -jogadores admitem equilíbrios de Nash com estratégias puras.

Teorema 1 *Para todo $i \in N_J$ seja U_i um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço euclidiano de dimensão finita. Seja $J_i : U_1 \times \cdots \times U_N \rightarrow \mathbb{R}$ a função custo, para todo $i \in N_J$, conjuntamente contínua em todos os seus argumentos e estritamente convexa em u_i para todo $u_l \in U_l, l \neq i$. Então, o jogo de soma-não-zero associado admite uma solução de equilíbrio de Nash.*

Demonstração [7]: Considere $i = 1$. Da convexidade estrita, existe um único mapeamento $\Sigma_1 : U_{-1} \rightarrow U_1$ tal que $u_1 = \Sigma_1(u_2, \dots, u_N)$ minimiza $J_1(u_1, \dots, u_N)$ para qualquer conjunto $\{u_2, \dots, u_N\}$. O mapeamento Σ_1 é, na verdade, a função de reação do jogador 1 neste jogo de N -jogadores. De maneira similar, as funções de reação $\Sigma_i, i = 2, \dots, N$, podem ser definidas como os únicos mapeamentos de U_{-i} para U_i . Usando uma notação vetorial, estas relações podem ser escritas em uma forma compacta:

$$\mathbf{u} = \Sigma(\mathbf{u}), \quad (2.8)$$

com $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_N\} \in U \triangleq U_1 \times \cdots \times U_N$; $\Sigma = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_N)$.

Na seqüência, será mostrado que as curvas de reação individuais Σ_i são contínuas em seus argumentos e, por isso, Σ é um mapeamento contínuo. Já que Σ promove o mapeamento de um subconjunto fechado e limitado U de um espaço de dimensão finita no próprio subconjunto, pode-se afirmar, com base no teorema do ponto fixo de Brouwer, que existe um $\mathbf{u}^* \in U$ tal que $\mathbf{u}^* = \Sigma(\mathbf{u}^*)$. Dessa forma, \mathbf{u}^* é um ponto fixo de Σ e, obviamente, os elementos de \mathbf{u}^* constituem uma solução de equilíbrio de Nash. Existem muitas demonstrações do teorema do ponto fixo de Brouwer, sendo que sua versão original surgiu em 1910 [18].

Para completar a prova do Teorema 1, deve ser mostrada a continuidade de Σ_i . Considere $i = 1$ e assumamos que, ao contrário, Σ_1 é descontínua em $(u_2(0), \dots, u_N(0))$. Além disso, seja $\Sigma_1(u_2(0), \dots, u_N(0)) = u_1(0)$. Então, existe uma seqüência de

vetores $\{\bar{\mathbf{u}}(k) \triangleq (u_2(k), \dots, u_N(k)); k \in K^*\}$ tal que $(u_2(0), \dots, u_N(0))$ é o limite desta seqüência, mas $u_1(0)$ não é o limite de $\Sigma_1(u_2(k), \dots, u_N(k))$ quando $k \rightarrow \infty$. Pelo fato de os espaços das ações serem compactos, há uma subseqüência de $\{\bar{\mathbf{u}}(k)\}$, denominada $\{\tilde{\mathbf{u}}(k)\}$, tal que $\Sigma_1(\tilde{\mathbf{u}}(k))$ converge para um limite $\{\tilde{u}_1(0)\} \neq u_1(0)$ e, simultaneamente, a seguinte inequação é válida:

$$J_1(\tilde{u}_1(0), u_2(0), \dots, u_N(0)) < J_1(u_1(0), u_2(0), \dots, u_N(0)), \quad (2.9)$$

que, juntamente a $\{\tilde{u}_1(0)\} \neq u_1(0)$ constitui uma contradição com respeito à hipótese inicial de que $u_1(0)$ é o único u_1 que minimiza $J_1(u_1, u_2(0), \dots, u_N(0))$. Logo, Σ_1 é contínua. A continuidade de Σ_i , $i > 1$, pode ser provada de maneira análoga. ■

A título de exemplo e considerando novamente o jogo representado pela Eq. (2.2), a solução de equilíbrio de Nash é determinada através do Teorema 1. Neste jogo, o espaço das estratégias de ambos os jogadores é um subconjunto fechado, limitado e convexo do espaço euclidiano \mathbb{R} . Além disso, as funções custo são contínuas em seus argumentos u_1 e u_2 . Assim, para provar a existência de uma solução de equilíbrio de Nash, a convexidade das funções custo J_1 e J_2 com respeito, respectivamente, a u_1 e u_2 deve ser verificada. Portanto, como a condição necessária de otimalidade para uma função diferenciável é que sua derivada de primeira ordem seja igual a zero, as curvas de reação de ambos os jogadores são obtidas:

$$\frac{\partial J_1}{\partial u_1} = 2u_1 + u_2 - 1 = 0 \implies u_1 = \frac{1 - u_2}{2}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial u_2} = 2u_2 + u_1 - 1 = 0 \implies u_2 = \frac{1 - u_1}{2}, \quad (2.11)$$

cujo ponto de interseção é: $u_1^* = u_2^* = 1/3$.

Como as funções custo são quadráticas nas variáveis de decisão, a sua convexidade estrita é garantida:

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 J_2}{\partial u_2^2} = 2, \quad (2.12)$$

o que assegura que $u_1^* = u_2^* = 1/3$ é um ponto de equilíbrio de Nash e é único.

A estabilidade da solução de equilíbrio de Nash encontrada acima é agora avaliada. Pode-se mostrar que o processo iterativo descrito na Definição 3 converge para a solução de equilíbrio de Nash:

$$\begin{aligned} u_1^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_1(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - u_2(k)}{2} = \frac{1}{3} \\ u_2^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_2(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - u_1(k)}{2} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como as curvas de reação são únicas:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} u_1(k+1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - u_2(k+1)}{2} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} u_2(k+1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - u_1(k+1)}{2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Do desenvolvimento das expressões dos limites de $u_1(k+1)$ e $u_2(k+1)$, o seguinte resultado é obtido:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_1(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_2(k+1) = \frac{1}{3}. \quad (2.15)$$

Logo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_i(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_i(k) = u_i^*, \quad i = 1, 2. \quad (2.16)$$

Dessa forma, pode-se garantir que o único ponto de equilíbrio de Nash do exemplo considerado é globalmente estável, pois qualquer desvio da solução de equilíbrio resulta na convergência para a própria solução de equilíbrio, através do processo iterativo de jogadas baseadas nas condições ótimas oferecidas pelas curvas de reação de cada jogador.

2.2.2 Equilíbrio Minimax para Jogos Dinâmicos Discretos

Nesta subseção, os principais aspectos dos jogos dinâmicos de soma-zero infinitos são apresentados. A análise está confinada aos jogos definidos no tempo discreto e com um número finito de estágios. Técnicas classicamente usadas na solução de problemas do controle ótimo, como a programação dinâmica e o princípio de mínimo, são utilizadas na obtenção das soluções de equilíbrio e na análise de suas propriedades, tais como existência e unicidade.

Problemas de controle ótimo constituem uma classe especial de jogos dinâmicos infinitos: jogos de 1-jogador com um único critério de otimização. As ferramentas disponíveis para estes problemas podem ser usadas na teoria dos jogos dinâmicos,

especialmente se os jogadores adotam o conceito de solução de equilíbrio de Nash não-cooperativo. Neste caso, cada jogador está diante de um único critério de otimização, isto é, um problema de controle ótimo, com as estratégias dos outros jogadores assumidas fixas nos valores de equilíbrio. Assim, inevitavelmente as ferramentas da teoria do controle ótimo devem ser usadas para verificar se um conjunto de estratégias consiste em um equilíbrio de Nash. Portanto, com o intuito de introduzir a metodologia de desenvolvimento da solução para jogos dinâmicos de mais de um jogador, alguns resultados importantes no contexto de problemas de otimização dinâmica para 1-jogador são apresentados no Apêndice A.

Então, utilizando a mesma notação do Apêndice A, o sistema linear e variante no tempo em questão é representado pela equação abaixo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^1, \dots, \mathbf{u}_k^N), \quad \mathbf{u}_k^i \in U_i, k \in K^*, \quad (2.17)$$

em que $f : X \times U_1 \times \dots \times U_N \longrightarrow X$ é uma função linear determinada; $\mathbf{x}_k \in X$ é o vetor de estados do sistema; $\mathbf{u}_k^i \in U_i, k \in K^*$, é vetor de variáveis de decisão do jogador $i, i \in N_J$; e X e U_i são espaços vetoriais euclidianos de dimensões adequadas.

Cada jogador $i \in N_J$ tem como medida de desempenho a função custo definida a seguir:

$$J_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N) \triangleq h_0(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^K h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^1, \dots, \mathbf{u}_k^N), \quad (2.18)$$

em que $h_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : X \times U_1 \times \dots \times U_N \longrightarrow \mathbb{R}$.

Observe que, para todo jogador $i \in N_J$, a otimização de sua função custo de maneira individual não é possível, pois o jogador i tem controle apenas sobre a variável de decisão \mathbf{u}^i . O conjunto de estratégias $\{\mathbf{u}^{i*} \in U_i, i \in N_J\}$ consiste em um ponto de equilíbrio de Nash se, e somente se, a validade das inequações definidas em (2.3) é assegurada para todo $\mathbf{u}^i \in U_i$.

As condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução de equilíbrio de Nash são, então, analisadas a seguir. Os conceitos e a metodologia de desenvolvimento da solução ótima de problemas de otimização dinâmica apresentados no Apêndice A serão úteis para esta análise. De maneira resumida, supondo que a variável de controle do jogo de 1-jogador tratado no apêndice corresponde às variáveis de decisão dos N -jogadores do jogo definido pelas Eqs. (2.17) e (2.18), a mesma metodologia pode ser adotada para se chegar à solução de

equilíbrio de Nash.

Condições Necessárias de Otimalidade

As condições necessárias de otimalidade para o problema do jogo dinâmico, discreto, de N -jogadores podem, então, ser determinadas (ver Apêndice A):

Condição 1: Equações de Estado

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = f(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^{1*}, \dots, \mathbf{u}_k^{N*}), \quad (2.19)$$

com $\mathbf{x}_0^* = \bar{\mathbf{x}}$.

Condição 2: Condição do Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_k^{1*}, \dots, \mathbf{u}_k^{N*}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k^1} &= 0, \\ \frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_k^{1*}, \dots, \mathbf{u}_k^{N*}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k^2} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_k^{1*}, \dots, \mathbf{u}_k^{N*}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k^N} &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Condição 3: Equações Adjuntas ou de Co-Estados

$$\boldsymbol{\lambda}_k^* = \frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_k^{1*}, \dots, \mathbf{u}_k^{N*}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{x}_k}. \quad (2.21)$$

Condição 4: Condição de Contorno

$$\boldsymbol{\lambda}_0^* = \frac{\partial h_0(\mathbf{x}_0^*)}{\partial \mathbf{x}_0}. \quad (2.22)$$

Assim como em problemas de otimização dinâmica, a satisfação das condições acima são necessárias para que um conjunto de estratégias $\{\mathbf{u}^{i*} \in U_i, i \in N_J\}$ leve à minimização das funções custo $J_i, i \in N_J$, porém não são suficientes.

Condições Suficientes de Otimalidade

Os jogos quadráticos constituem uma classe especial de jogos, em que a função custo de cada jogador é quadrática em sua variável de decisão. Na prática, muitos problemas são formulados como jogos quadráticos, pois eles reúnem propriedades desejáveis, como a existência de uma única solução ótima.

Assim, considerando que a função custo de cada jogador i é quadrática em sua variável de decisão, \mathbf{u}^i , se a Eq. (2.20) é satisfeita e, além disso, a matriz

$$\frac{\partial^2 H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k^2} \quad (2.23)$$

é definida positiva, estas condições são suficientes para garantir que \mathbf{u}^* leva o hamiltoniano a um mínimo global [7].

Jogo Dinâmico de Soma-Zero

Após a análise das condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução de equilíbrio de Nash única, válida para jogos dinâmicos, discretos, não-cooperativos, de soma-não-zero, de N -jogadores, o jogo de interesse nesta subseção é finalmente abordado. O jogo de soma-zero de 2-jogadores constitui uma classe especial de jogos dinâmicos de soma-não-zero. A partir do jogo de N -jogadores definido pelas Eqs. (2.17) e (2.18), o jogo de soma-zero, de 2-jogadores pode ser definido ao assumir que o jogador 1 é o minimizador e que o jogador 2 é o maximizador, com suas respectivas funções objetivo assim definidas: $J_1 = -J_2 \triangleq J$. A definição do jogo de soma-zero, de 2-jogadores segue análoga à definição do jogo de N -jogadores, com a restrição de estados dada por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^1, \mathbf{u}_k^2), \quad \mathbf{u}_k^i \in U_i, k \in K^*, i = 1, 2. \quad (2.24)$$

A função custo do jogo de soma-zero é então representada por:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) \triangleq h_0(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^K h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^1, \mathbf{u}_k^2). \quad (2.25)$$

As inequações do equilíbrio de Nash, que para este tipo de jogo é chamado de **equilíbrio minimax** [7], são dadas por:

$$J(\mathbf{u}^{1*}, \mathbf{u}^2) \leq J(\mathbf{u}^{1*}, \mathbf{u}^{2*}) \leq J(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^{2*}), \quad \mathbf{u}^1 \in U_1, \mathbf{u}^2 \in U_2. \quad (2.26)$$

Estas inequações formalizam matematicamente o fato de que qualquer dos dois jogadores, o minimizador ou o maximizador, obtém um resultado desfavorável caso opte unilateralmente por uma estratégia diferente daquela que resulta no ponto de equilíbrio minimax.

Então, fazendo uso da análise desenvolvida anteriormente quanto às condições de otimalidade para jogos dinâmicos, discretos, não-cooperativos, de soma-não-zero, de N -jogadores, as seguintes condições necessárias de otimalidade são definidas:

Condição 1: Equações de Estado

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = f(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^{1*}, \mathbf{u}_k^{2*}), \quad (2.27)$$

com $\mathbf{x}_0^* = \bar{\mathbf{x}}$.

Condição 2: Condição do Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_k^{1*}, \mathbf{u}_k^{2*}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k^1} &= 0, \\ \frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_k^{1*}, \mathbf{u}_k^{2*}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Condição 3: Equações Adjuntas ou de Co-Estados

$$\boldsymbol{\lambda}_k^* = \frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_k^{1*}, \mathbf{u}_k^{2*}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{x}_k}. \quad (2.29)$$

Condição 4: Condição de Contorno

$$\boldsymbol{\lambda}_0^* = \frac{\partial h_0(\mathbf{x}_0^*)}{\partial \mathbf{x}_0}. \quad (2.30)$$

As condições suficientes de otimalidade para o caso em que a função custo é quadrática nas variáveis de decisão são diretamente obtidas da análise desenvolvida para jogos dinâmicos, de soma-não-zero. O jogo quadrático, de soma-zero, de 2-jogadores é posteriormente utilizado nesta dissertação.

Então, se a Eq. (2.28) é satisfeita e, além disso, a função custo $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$ é estritamente convexa na variável de decisão do minimizador, \mathbf{u}^1 , e estritamente côncava na variável de decisão do maximizador, \mathbf{u}^2 , o conjunto de estratégias $\{\mathbf{u}^{i*}, i = 1, 2\}$, leva o hamiltoniano a um mínimo global. Tais condições correspondem a:

$$\frac{\partial^2 H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^{1*}, \mathbf{u}^{2*}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k^{12}} > 0 \quad (2.31)$$

e

$$\frac{\partial^2 H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^{1*}, \mathbf{u}^{2*}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k^{22}} < 0. \quad (2.32)$$

Portanto, as condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução de equilíbrio minimax única para o jogo dinâmico, quadrático, de 2-jogadores estão definidas.

2.3 Sumário

Neste capítulo, os aspectos gerais mais importantes da teoria dos jogos foram discutidos. A teoria dos jogos foi situada no contexto da otimização, com ênfase nos jogos não-cooperativos. Além disso, as soluções de equilíbrio de Nash e minimax, que serão aplicadas posteriormente aos problemas do controle de potência e da equalização adaptativa, respectivamente, foram apresentadas.

A seguir, são abordados os conceitos básicos dos dois problemas estudados nesta dissertação. Os sistemas celulares, assim como as limitações no nível do enlace, são modelados. O problema de controle de potência é descrito, destacando a necessidade de um controle de potência eficiente. Uma descrição também é feita para o problema da equalização adaptativa.

Formulação dos Problemas e Caracterização dos Sistemas de Comunicação Digital

Os sistemas com os quais se depara a Engenharia dizem respeito a fenômenos físicos e processos. Dentre as principais características destes sistemas estão a interdependência entre processos, o grande número de variáveis, a interdependência entre elas e a falta de precisão em suas medidas. Dessa forma, é sempre difícil representá-los precisamente.

A modelagem matemática de fenômenos e processos é um procedimento comum e necessário à compreensão, à análise e à viabilidade da proposição de soluções para os problemas que os envolvem. Modelos matemáticos são simplificações do problema real. Logo, surge um conflito entre a simplicidade e a precisão dos modelos, que é, normalmente, um importante fator a ser considerado em qualquer modelagem matemática de sistemas reais.

O sistema de telefonia celular é um complexo sistema de comunicação móvel sem fio. Ele envolve muitos fenômenos físicos e processos interdependentes que, em alguns casos, são ainda simultâneos. Uma modelagem integralizada de todo o sistema é inviável. Dessa forma, faz-se necessária uma divisão deste sistema em subsistemas.

Pode-se considerar como a primeira e mais abrangente subdivisão do sistema de telefonia celular a classificação de seus fenômenos e processos nos seguintes níveis: o nível do enlace e o nível sistêmico. De maneira geral, no nível do enlace estão contidos os processos de transmissão de sinais, os fenômenos físicos de propagação

e os processos de recepção. Enquanto isso, o nível sistêmico é constituído por um grande número de procedimentos relacionados ao gerenciamento de recursos e à garantia da qualidade dos serviços oferecidos.

Porém, esta classificação é ainda muito abrangente. Os estudos e pesquisas em sistemas de telefonia celular são desenvolvidos tendo em vista os seus processos individuais. Nesta dissertação, dois processos de um sistema celular são abordados: o controle de potência de transmissão e a equalização adaptativa. O primeiro problema está inserido em um ambiente multiusuário no nível sistêmico, enquanto o segundo se encontra no nível do enlace.

Neste capítulo serão abordados conceitos básicos dos dois problemas. A Seção 3.1 é destinada à modelagem dos sistemas celulares, assim como à modelagem das limitações no nível do enlace. A Seção 3.2 descreve o problema de controle de potência, destacando a necessidade de um controle de potência eficiente. Na Seção 3.3, uma descrição também é feita para o problema da equalização adaptativa.

3.1 O Sistema Rádio-Móvel

Um canal rádio-móvel típico submete os sinais transmitidos através dele a uma série de distorções, que podem comprometer a informação contida nestes sinais. As mais relevantes distorções são de caráter multiplicativo e podem ser classificadas em três tipos: a perda de percurso, o desvanecimento de larga escala e o desvanecimento de pequena escala [19–21].

A perda de percurso representa a atenuação da potência média do sinal no receptor, que é conseqüência da distância relativa entre o transmissor e o receptor. Porém, a perda de percurso não considera o fato de que, para dois lugares distintos, mas correspondentes à mesma distância relativa entre transmissor e receptor, o ambiente entre eles pode ser completamente diferente.

As características do relevo (prédios, montanhas, florestas, etc.) levam a uma atenuação da potência diferente daquela estimada apenas pela perda de percurso. O desvanecimento de larga escala, também chamado de “sombreamento” (em inglês *shadowing*), representa a variação suave da potência em torno da potência média, estimada pela perda de percurso, devido às características do relevo [19, 20].

O desvanecimento de pequena escala refere-se à rápida oscilação da potência do sinal no receptor durante pequenos intervalos de tempo ou pequenas distâncias percorridas. Ele é provocado pela interferência entre duas ou mais versões do sinal transmitido, que chegam ao receptor em tempos diferentes devido aos múltiplos

percursos, provocando rápidas interferências construtivas e destrutivas sobre o sinal direto. A Figura 3.1 ilustra a propagação por múltiplos percursos.

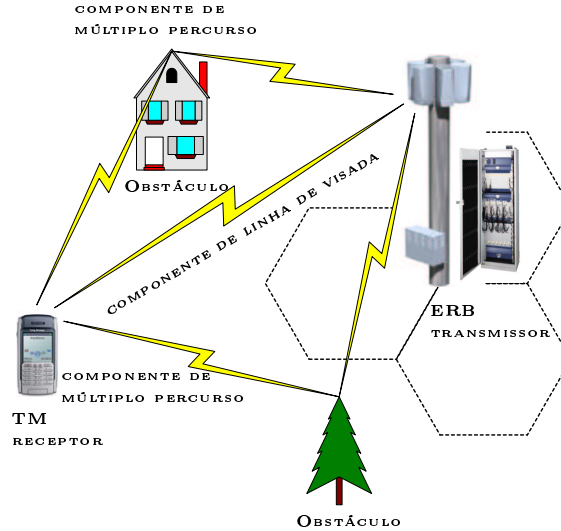


Figura 3.1: Propagação por múltiplos percursos.

Perda de Percurso e Desvanecimento de Larga Escala

As estatísticas da perda de percurso e do desvanecimento de larga escala proporcionam uma estimativa da atenuação da potência do sinal transmitido em função da distância. Esta dependência da distância é geralmente descrita através de uma perda de percurso média com uma variação que segue uma função de distribuição de probabilidade log-normal em torno desta média. Uma revisão detalhada de vários modelos de perda de percurso e de sombreamento pode ser encontrada em [19, 22].

O modelo adotado no decorrer desta dissertação para a perda de percurso, \overline{PL} , em decibéis (dB), é o mais simplificado modelo empírico [19, 22]:

$$\overline{PL}(\varepsilon) = \overline{PL}(\varepsilon_0) + 10a \log_{10}(\varepsilon/\varepsilon_0) \quad [\text{dB}], \quad (3.1)$$

sendo que ε é a distância entre o transmissor e o receptor, $\overline{PL}(\varepsilon_0)$ designa a perda de percurso a uma distância de referência ε_0 , e a o expoente de perda de percurso. O expoente de perda de percurso é um parâmetro determinado por medidas. Para propagação no espaço livre, o expoente de perda de percurso assume o valor 2.

Para contemplar o fenômeno do sombreamento na modelagem da atenuação da potência do sinal transmitido, uma variação em torno da média da atenuação, que

é a perda de percurso, é representada por uma variável aleatória com função de distribuição de probabilidade log-normal, X_S , de média zero e com determinado desvio-padrão.

Portanto, a atenuação da potência do sinal transmitido em função da distância, PL , é modelada da seguinte maneira:

$$PL(\varepsilon) = \overline{PL}(\varepsilon_0) + 10a \log_{10}(\varepsilon/\varepsilon_0) + X_S \quad [\text{dB}]. \quad (3.2)$$

Desvanecimento de Pequena Escala

Devido à natureza aleatória das múltiplas reflexões, o sinal que chega ao receptor é normalmente tratado estatisticamente. Um cenário simplificado relativo ao desvanecimento de pequena escala surge quando não há linha de visada entre transmissor e receptor, mas, mesmo assim, a transmissão da informação ocorre.

Conforme pesquisas realizadas no campo da propagação de ondas em uma faixa de frequências que inclui aquelas utilizadas nos sistemas celulares, a envoltória do sinal resultante da combinação dos raios dos múltiplos percursos segue uma função de distribuição de probabilidade de Rayleigh [23], cujo modelo de propagação mais comum é o modelo de Jakes [24].

Neste modelo, assume-se que as ondas chegam ao receptor com diferentes amplitudes, ângulos de chegada e fases, todos considerados variáveis aleatórias independentes. O modelo de Jakes utiliza o teorema central do limite [25] para mostrar que o sinal em banda básica resultante dos múltiplos percursos, $X_J(k)$, é aproximadamente um processo aleatório gaussiano complexo quando o número de percursos L_{perc} é grande. Então, o modelo do desvanecimento de pequena escala pode ser brevemente descrito como:

$$X_J(k) = \sum_{l=1}^{L_{perc}} E_l e^{j\phi_l(k)} \quad (3.3)$$

$$\phi_l(k) = 2\pi(f_m \cos \Phi_l - f_c \tau_l),$$

sendo f_m o deslocamento Doppler máximo; Φ o ângulo de chegada dos raios; f_c a frequência da portadora; e τ o atraso.

O ângulo de chegada do raio l , Φ_l , assim como a fase do sinal devido ao percurso l , representada pelo produto $f_c \tau_l$, são uniformemente distribuídos em $[0, 2\pi]$. A amplitude E é normalizada de maneira a se obter uma potência média total unitária

($E_l^2 = 1/L_{perc}$). Este modelo para desvanecimento de pequena escala foi utilizado nas simulações relativas ao controle de potência.

Algumas questões mais específicas dos fenômenos de propagação necessitam de uma abordagem mais detalhada para o problema da equalização de canal. Para isto, o canal rádio-móvel será abordado “microscopicamente”, pois os aspectos relacionados à atenuação da potência não são relevantes neste caso. Logo, as atenções podem ser concentradas nos efeitos do desvanecimento de pequena escala.

O desvanecimento de pequena escala pode ser diretamente relacionado à resposta ao impulso do canal rádio-móvel. O canal rádio-móvel pode ser modelado como um filtro linear com resposta ao impulso finita e variante no tempo, sendo a variação temporal resultante do movimento relativo entre transmissor e receptor. A discretização do atraso dos múltiplos percursos é comumente adotada para favorecer a representação de direções preferenciais para a propagação dos sinais.

O excesso de atraso (em inglês *Excess Delay*) é o atraso da i -ésima componente de atraso com relação à primeira componente e é dado por τ_i . O perfil de intensidade dos múltiplos percursos descreve a variação da potência média recebida como função do excesso de atraso temporal. Para um único impulso transmitido, o tempo τ_{max} entre a primeira e a última componente do sinal recebido representa o excesso de atraso máximo (em inglês, *Maximum Excess Delay*). No canal rádio-móvel, a relação entre o excesso de atraso máximo, τ_{max} , e o tempo de símbolo, T_s , pode ser vista em termos de duas diferentes categorias de degradação: o desvanecimento seletivo em frequência e o desvanecimento plano (ou não-seletivo em frequência). Um canal é dito seletivo em frequência se $\tau_{max} > T_s$ [19].

Com o intuito de comparar diferentes canais de múltiplos percursos, parâmetros qualitativos são usados. As propriedades de dispersão temporal destes canais são comumente quantificadas pelo seu excesso de atraso médio (em inglês, *Mean Excess Delay*), $\bar{\tau}$, e pelo seu espalhamento de atraso rms (em inglês, *rms Delay Spread*). O excesso de atraso médio é o primeiro momento do perfil de intensidade dos múltiplos percursos e é definido como:

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{l=1}^{L_{perc}} E_l^2 \tau_l}{\sum_{l=1}^{L_{perc}} E_l^2}, \quad (3.4)$$

sendo E_l a amplitude do l -ésimo percurso.

O espalhamento de atraso rms é a raiz quadrada do segundo momento central do perfil de intensidade dos múltiplos percursos, definido como:

$$\sigma_\tau = \sqrt{\overline{\tau^2} - (\overline{\tau})^2}, \quad (3.5)$$

com

$$\overline{\tau^2} = \frac{\sum_{l=1}^{L_{perc}} E_l^2 \tau_l^2}{\sum_{l=1}^{L_{perc}} E_l^2}. \quad (3.6)$$

Valores típicos de espalhamento de atraso rms se encontram na ordem dos microssegundos para canais rádio-móvel celulares.

Deve-se notar que o perfil de intensidade dos múltiplos percursos e a resposta espectral (magnitude da resposta em frequência) do canal rádio-móvel estão relacionados através da transformada de Fourier. Assim, é possível obter uma descrição equivalente do canal no domínio da frequência.

A largura de banda de coerência, B_c , é usada para caracterizar o canal no domínio da frequência, de maneira análoga aos parâmetros de espalhamento do atraso. Ela é uma medida estatística do conjunto de frequências nas quais o canal pode ser considerado plano, ou seja, todas as componentes espectrais apresentam aproximadamente o mesmo ganho e a mesma fase linear, pois apresentam alta correlação. Mais precisamente, ela é derivada do espalhamento de atraso rms e, se o valor da função de correlação da frequência vale 0,5, a largura de banda de coerência é aproximadamente:

$$B_c = \frac{1}{5\sigma_\tau}. \quad (3.7)$$

O espalhamento temporal e a largura de banda de coerência são parâmetros que descrevem a dispersão temporal do canal, porém, não oferecem informações quanto à natureza da variação temporal do canal, provocado pelo movimento relativo entre transmissor e receptor ou pelo movimento de objetos que fazem parte do ambiente de propagação. O espalhamento Doppler e o tempo de coerência são parâmetros que descrevem este fenômeno.

O espalhamento Doppler, B_D , é uma medida do espalhamento espectral causado pela variação temporal do canal rádio-móvel e é definida como o conjunto de frequências em que o espectro Doppler é diferente de zero. Sendo f_c a frequência central da portadora de um sinal e f_d o deslocamento Doppler, o sinal recebido terá componentes de frequência entre $f_c - f_d$ e $f_c + f_d$. Logo, o espalhamento Doppler depende de f_d , que, por sua vez, é uma função da velocidade relativa entre

transmissor e receptor, e do ângulo entre a direção do movimento e a direção de chegada dos múltiplos percursos.

O tempo de coerência, T_c , é uma medida estatística do intervalo de tempo em que a resposta ao impulso do canal pode ser considerada invariante, ou seja, é o intervalo no qual os sinais recebidos têm suas amplitudes altamente correlacionadas. Se o tempo de coerência é definido como o intervalo de tempo durante o qual o valor da função de correlação temporal é 0,5, então ele se aproxima de:

$$T_c \approx \frac{9}{16\pi f_m}, \quad (3.8)$$

sendo f_m o deslocamento Doppler máximo, dado por $f_m = v_w/\lambda_w$, com v_w representando a velocidade e λ_w o comprimento de onda. Entretanto, na prática, uma outra expressão é usada [19]:

$$T_c = \sqrt{\frac{9}{16\pi f_m^2}}. \quad (3.9)$$

Então, da definição de tempo de coerência, os canais cujos sinais recebidos são separados por um tempo maior do que o tempo de coerência apresentam efeitos da variação temporal dos canais.

Tabela 3.1: Classificação do desvanecimento de pequena escala.

Espalhamento Temporal do Atraso	
Desvanecimento plano	Preservação das características espectrais $B_s < B_c$ $\tau_{max} < T_s$
Desvanecimento seletivo em frequência	Distorção no domínio da frequência $B_s > B_c$ $\tau_{max} > T_s$
Espalhamento Doppler	
Desvanecimento rápido	Alto espalhamento Doppler $T_c < T_s$ Variações do canal mais rápidas que as do sinal
Desvanecimento lento	Baixo espalhamento Doppler $T_c > T_s$ Variações do canal mais lentas que as do sinal

A Tabela 3.1 resume os tópicos abordados nesta subseção, apresentando, ainda,

a classificação do desvanecimento de pequena escala de acordo com o espalhamento temporal do atraso e com o espalhamento Doppler.

3.1.1 Modelagem de Sistemas de Telefonia Celular

Os sistemas celulares são caracterizados por uma estrutura fixa das ERBs e pela mobilidade dos usuários, que acessam as ERBs através de enlaces de rádio. As ERBs fazem a conexão dos usuários entre eles ou com a rede de telefonia fixa.

As demandas nas diferentes redes celulares podem ser acomodadas em vários canais ortogonais (não-interferentes). Em um alto nível de abstração, os sistemas celulares podem ser modelados de uma mesma maneira, considerando a rede como uma coleção de enlaces de rádio interferentes utilizando o mesmo canal [26]. Esta abordagem é utilizada na formulação geral do problema do controle de potência, na Subseção 3.2.1.

Apesar da validade do modelo generalizado do problema, no momento em que se parte para a análise de desempenho dos algoritmos propostos através de simulações computacionais, surge a necessidade de implementar cenários mais representativos dos sistemas celulares reais. Os modelos de simulação utilizados nesta dissertação são relativos aos sistemas TDMA (do inglês *Time Division Multiple Access*) e CDMA (do inglês *Code Division Multiple Access*) para o controle de potência, e GSM (do inglês *Global System for Mobile Communications*) para a equalização adaptativa. Inicialmente os aspectos relevantes para os modelos de simulação que são comuns aos sistemas são apresentados. Em seguida, os aspectos particulares de cada sistema são discutidos.

Em qualquer modelo de sistema celular o posicionamento e a mobilidade dos usuários são fatores importantes. Os usuários, que são receptores no enlace direto e transmissores no reverso, são posicionados aleatoriamente sobre o *grid* celular através de uma função de distribuição de probabilidade uniforme. A mobilidade não é diretamente implementada, mas seus efeitos são emulados através do modelo de propagação adotado, que inclui o desvanecimento de pequena escala (modelo de Jakes), fazendo-se refletir no sinal recebido os efeitos da velocidade de deslocamento do usuário em relação à ERB.

O raio da célula é fixo, determinado de maneira a não transgredir o dimensionamento do enlace de rádio, de acordo com a potência de transmissão máxima adotada para cada sistema. Além disso, os fenômenos de propagação discutidos neste capítulo são independentes do sistema.

Sistema Celular TDMA

O método mais convencional de acesso múltiplo é o acesso por divisão da frequência (FDMA, do inglês *Frequency Division Multiple Access*). No FDMA, os sinais são transmitidos em portadoras que usam diferentes frequências centrais. Dessa forma, a transmissão é contínua, pois os canais, uma vez alocados, são usados até o final da conexão de maneira ininterrupta.

Os sistemas celulares TDMA são a mais direta alternativa aos antigos sistemas celulares analógicos (FDMA). Neles, uma portadora pode ser compartilhada por vários usuários, com cada um deles fazendo uso da portadora em não coincidentes intervalos de tempo (em inglês, *time slots*). Os usuários têm acesso a todas as frequências da célula e a todos os *time slots* das frequências. Portanto, este modo de acesso múltiplo é, de fato, uma combinação entre FDMA e TDMA [27]. A Figura 3.2 ilustra a estrutura de acesso múltiplo no TDMA.

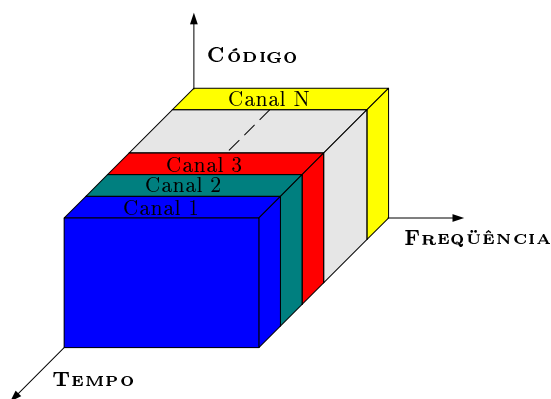


Figura 3.2: Ilustração da estrutura de acesso múltiplo em sistemas TDMA.

O enlace direto de um sistema celular TDMA caracterizado por macrocélulas é agora considerado. Cada célula da rede celular tem configuração tri-setorizada com setores hexagonais e com a ERB localizada no vértice comum aos três setores, como mostrado na Figura 3.3. O *grid* celular utilizado consiste em uma célula central com um anel de interferentes, totalizando 7 células e 21 setores.

O padrão de radiação da antena tri-setorizada é idealizado, com variação de radiação apenas na direção angular azimutal. O ganho da direção de maior radiação da antena é 0 dBi, enquanto o ganho fora do setor é aproximadamente -200 dBi, de acordo como a Figura 3.4.

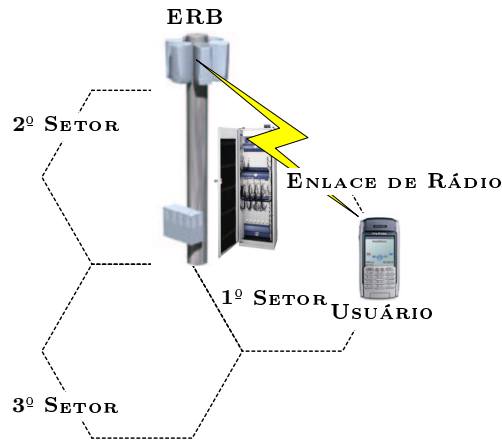


Figura 3.3: Ilustração da estrutura celular tri-setorizada.

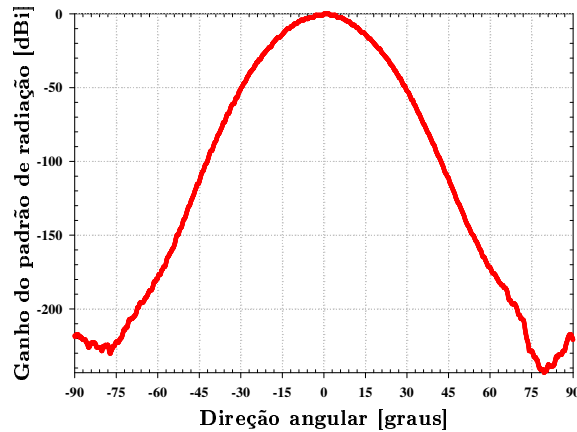


Figura 3.4: Padrão de radiação da antena tri-setorizada.

Sistema Celular CDMA

Os sistemas celulares CDMA surgem como uma alternativa aos sistemas TDMA através da técnica de espalhamento espectral (em inglês *Spread Spectrum*). Esta técnica consiste no espalhamento da largura de banda do sinal a ser transmitido com relação à largura de banda mínima necessária à sua transmissão. Este processo se dá por meio da utilização de códigos ortogonais, ou sinais de espalhamento, que permitem a identificação do sinal transmitido correspondente a cada usuário no receptor. A Figura 3.5 ilustra bem o acesso múltiplo no CDMA.

O CDMA é um método de acesso em que todos os usuários podem transmitir simultaneamente, na mesma frequência nominal e usando toda a largura de banda disponível do sistema. Não há um limite bem definido com respeito à capacidade

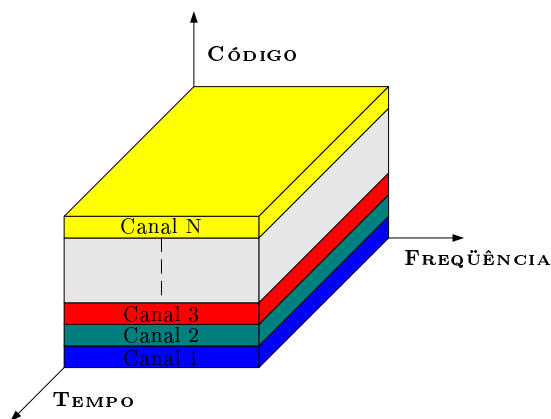


Figura 3.5: Ilustração da estrutura de acesso múltiplo em sistemas CDMA.

como nos sistemas FDMA e TDMA. No entanto, o aumento do número de usuários provoca uma degradação na qualidade dos enlaces devido à crescente interferência. Por isso, o controle de potência neste sistema assume um papel ainda mais importante.

Há ainda um importante efeito do espalhamento espectral que torna o CDMA um sistema que suporta maiores níveis de interferência: o ganho de processamento. O ganho de processamento representa o ganho alcançado pelo espalhamento espectral de um sinal com respeito à SINR percebida pelo receptor, ao permitir a redundância da informação de interesse em um intervalo de símbolo.

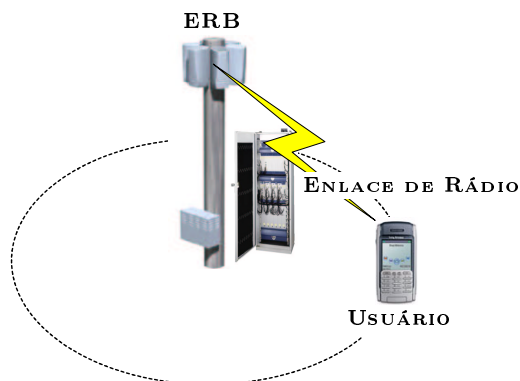


Figura 3.6: Ilustração da estrutura celular omnidirecional.

O enlace reverso de um sistema CDMA macrocelular é o outro cenário de simulação considerado nos estudos sobre controle de potência nesta dissertação. A estrutura celular consiste em uma única célula circular, com a ERB localizada no seu centro, como mostrado na Figura 3.6. A antena é omnidirecional.

Sistema Celular GSM

Nesta dissertação, as simulações computacionais relativas à equalização adaptativa emulam, de maneira simplificada, o processo de transmissão/recepção monousuária em um sistema GSM de telefonia celular. Como a descrição detalhada do sistema GSM não faz parte dos objetivos desta dissertação, as referências [19, 28, 29] são colocadas como opção de consulta. Além da descrição dos aspectos mais relevantes deste sistema com relação às simulações computacionais realizadas, o modelo de canal é definido. A estrutura de quadro e de *time slot* do GSM é apresentada a seguir.

No sistema GSM, os canais possuem largura de banda de 200 kHz. Cada canal é compartilhado no tempo por até 8 usuários usando TDMA. Para o caso de 8 usuários, cada um deles utiliza o mesmo canal e ocupa um único *time slot* por quadro. A Figura 3.7 ilustra a estrutura de quadro e de *time slot* do GSM.

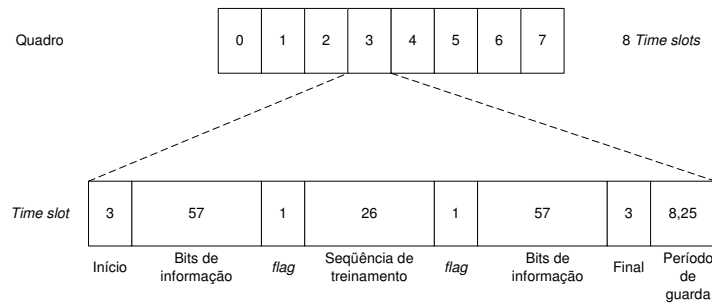


Figura 3.7: Estrutura de quadro e de *time slot* do sistema GSM.

As transmissões são realizadas a uma taxa de 270,833 kbps, usando a modulação GMSK (do inglês *Gaussian Minimum Shift Keying*). Dessa forma, o tempo de bit é $3,692 \mu\text{s}$ e a taxa efetiva de transmissão por usuário é de 33,854 kbps.

O *time slot* consiste em 148 bits, sendo que, ao final de cada *time slot*, um período de guarda equivalente a 8,25 bits não é usado para transmissão. Do total de 148 bits, 114 carregam informação e são transmitidos em duas seqüências de 57 bits, que têm entre elas uma seqüência de 26 bits, usada como seqüência de treinamento. A seqüência de treinamento permite ao equalizador adaptativo no receptor do usuário ou da ERB a análise das características do canal rádio-móvel antes de dar início à recuperação dos dados transmitidos. Imediatamente antes e logo depois da seqüência de treinamento há um bit de controle.

O modelo de canal considerado nesta dissertação é um dos modelos discretos no

tempo usados em [30]. A Figura 3.8 ilustra o seu perfil de potência.

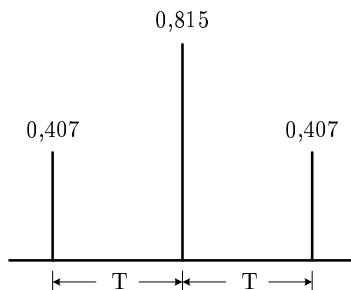


Figura 3.8: Características do modelo de canal.

As características espectrais do canal, mensuradas em termos da largura de banda de coerência, revelam o seu alto nível de dispersão temporal. A largura de banda de coerência do canal considerado é, aproximadamente, 76,63 kHz. De acordo com a Tabela 3.1, na transmissão de um sinal com largura de banda, B_s , maior do que a largura de banda de coerência do canal, B_c , o canal pode ser classificado como seletivo em frequência. Neste caso, a IES se faz presente, o que exige um processo de equalização do canal.

A descrição da estrutura de quadro e de *time slot* do GSM é suficiente para a realização das simulações computacionais no Capítulo 5. O modelo de canal escolhido exige o combate à IES, pois a largura de banda do sinal transmitido (200 kHz) é superior à largura de banda de coerência do canal (76,63 KHz). Alguns dos pontos acima apresentados são implementados de maneira simplificada, porém, preservando as principais características do processo de transmissão/recepção do sistema GSM.

3.2 O Problema do Controle de Potência de Transmissão

A demanda por acesso aos serviços das redes de telefonia celular cresce exponencialmente. Por isso, a utilização eficiente dos recursos disponíveis é uma necessidade. Uma consequência da limitada disponibilidade dos recursos de rádio é o compartilhamento destes recursos entre os usuários.

Nos sistemas celulares, os canais são usados simultaneamente no maior número de células possível, com a menor distância aceitável entre elas, com o intuito de aumentar o reuso de frequência. O aumento do reuso de frequência corresponde a uma maior eficiência do sistema com respeito à capacidade, pois, considerando-se uma determinada área de cobertura, mais canais estarão disponíveis nesta área

quanto maior for o reuso de frequência. Em contrapartida, há uma diminuição da distância de reuso de frequência, que implica maiores níveis de interferência co-canal [27]. A interferência é o maior fator limitante do desempenho dos sistemas celulares. Fontes de interferência incluem outros usuários na mesma célula, conexões em progresso em uma célula vizinha, outras ERBs (Estações Rádio-Base) operando na mesma faixa de frequência, ou ainda qualquer sistema que, inadvertidamente, esteja operando na mesma faixa de frequência [19, 31].

A disposição dos usuários no *grid* celular é aleatória. Dessa forma, há usuários que se encontram nas proximidades da ERB, assim como usuários próximos à borda da célula, distantes da ERB. Caso os usuários favorecidos utilizem potências bem superiores às utilizadas pelos usuários distantes da ERB, haverá comprometimento da conexão destes usuários. Este é o chamado problema “perto-longe” (em inglês *Near-Far Problem*). Neste caso, é necessária uma solução que assegure, para todos os usuários, o menor nível de sinal no receptor da ERB que satisfaça os requisitos de qualidade de enlace [19].

Um outro aspecto indiscutivelmente importante em uma rede celular é a eficiência energética. No enlace direto, assim como no enlace reverso, há limitações quanto à potência de transmissão. No enlace direto, o problema consiste na gerência eficiente da disponibilidade de potência de transmissão da ERB. Caso esta gerência não seja eficiente, a ERB pode ser levada rapidamente a uma indisponibilidade de recursos, impedindo novas conexões e afetando aquelas que já estão em curso. Enquanto isso, no enlace reverso, o uso da energia de maneira eficiente pode levar a uma economia de bateria dos terminais dos usuários, além de proporcionar a exposição dos usuários à uma radiação de menor intensidade.

O controle de potência de transmissão é o processo responsável pela redução de efeitos danosos ao sistema celular, como os altos níveis de interferência e o problema “perto-longe”. Além disso, uma maior eficiência energética pode ser alcançada com o controle de potência. Portanto, o controle de potência é um processo importante para o gerenciamento de recursos da rede celular, que tem como objetivo principal a garantia dos requisitos de QoS com a possibilidade de utilização de uma menor quantidade de recursos.

O controle de potência descentralizado ou distribuído é de especial interesse, pois a centralização de tal processo envolve estrutura, sinalização de controle, atrasos e vulnerabilidade adicionais para a rede [32–34]. A descentralização do controle de potência possibilita o uso apenas de medidas locais nos algoritmos de adaptação

da potência de transmissão, como o sinal recebido e a interferência devido aos outros transmissores, incluindo ainda o ruído no receptor. O controle de potência descentralizado é o objeto de estudo de parte da dissertação.

Dois dos mais significativos cenários no que diz respeito à gerência da potência de transmissão serão abordados nesta dissertação. Eles são o enlace direto de um sistema TDMA e, especialmente, o enlace reverso de um sistema que utiliza espalhamento espectral (em inglês *Spread Spectrum Systems*), como o CDMA (do inglês *Code Division Multiple Access*) e o WCDMA (do inglês *Wideband Code Division Multiple Access*). Em ambos os cenários, além da busca pela eficiência energética, procura-se promover o balanceamento da interferência.

3.2.1 Formulação do Problema

O objetivo geral de um sistema celular é proporcionar uma comunicação confiável aos usuários. Considere um sistema com N enlaces (pares transmissor-receptor) interferentes entre si, sendo a largura de banda utilizada B_s Hz em cada enlace e BW a largura de banda do canal. Seja $N_J = \{1, 2, \dots, N\}$ o conjunto destes pares. Como a atuação do controle de potência é discreta, denomina-se $K^* = \{1, 2, \dots, K\}$ o conjunto de seus instantes de atuação.

Assuma, inicialmente, a ausência de interferência. Dessa forma, o sinal recebido consiste no sinal transmitido e no ruído aditivo gaussiano branco (AWGN, do inglês *Additive White Gaussian Noise*), com potência média σ^2 . Além disso, a potência usada pelo i -ésimo transmissor no instante k é denominada $p_i(k)$, para todo $i \in N_J$ e $k \in K^*$.

A capacidade de cada enlace i é limitada. Um resultado fundamental [35] afirma que a taxa máxima de transmissão livre de erros em um canal AWGN, em bits por segundo, é dada por:

$$\text{taxa máxima} = BW \log_2 \left(\frac{p_i(k)}{\sigma^2} \right) \text{ bits/s.} \quad (3.10)$$

Se a largura de banda é fixa, então a capacidade depende da SNR (do inglês *Signal to Noise Ratio*) do enlace, $p_i(k)/\sigma^2$.

Porém, na prática, o canal é mais complexo. Normalmente, o nível da potência do sinal recebido depende da distância entre o transmissor e o receptor e dos efeitos de propagação, como os fenômenos de difração e reflexão. Então, um modelo mais apropriado associa cada canal (ou enlace) i a um ganho de potência multiplicativo e variante no tempo, $g_i(k)$, chamado de ganho de canal. Assim, a SNR no instante k

pode ser expressa como:

$$SNR(k) = \frac{p_i(k)g_i(k)}{\sigma^2}. \quad (3.11)$$

Então, uma solução intuitiva para a manutenção da capacidade de cada enlace i seria compensar as variações do canal através de uma adaptação da potência de transmissão $p_i(k)$, de tal maneira a se obter uma SNR fixa. A taxa de transmissão requerida poderia ser satisfeita através da garantia de uma SNR mínima [36].

Entretanto, até aqui, a interferência, fenômeno inerente aos sistemas celulares, não foi considerada. O ruído torna-se pouco importante quando a interferência faz parte da discussão. Nesta situação, a SINR (do inglês *Signal to Interference plus Noise Ratio*) passa a ter um papel similar ao da SNR quando a interferência é desconsiderada. Dessa forma, a SINR percebida pelo i -ésimo receptor no instante k , $\rho_i(k)$, é dada por:

$$\rho_i(k) = \frac{p_i(k)g_i(k)}{I_i(k)}, \quad (3.12)$$

sendo $I_i(k)$ a potência da interferência de acesso múltiplo mais o ruído percebida pelo receptor i no instante k , que, por sua vez, é representada como:

$$I_i(k) = \sum_{l=1}^N [p_l(k)g_l(k)] + \sigma^2, \quad l \neq i. \quad (3.13)$$

No restante da dissertação, por um abuso de linguagem, a denominação interferência servirá como referência à potência da interferência de acesso múltiplo.

Considerando a expressão da capacidade na Eq. (3.10) e a analogia entre SNR e SINR, a taxa de transmissão requerida está relacionada à SINR. Assim, assume-se que os requisitos de qualidade são representados por SINRs-alvo. Então, a SINR-alvo do i -ésimo receptor no instante k , para todo $i \in N_J$ e $k \in K^*$, é denominada $\rho_i^t(k)$.

Portanto, torna-se clara a necessidade de adaptação contínua da potência transmitida para um funcionamento eficiente, ou pelo menos satisfatório, de um sistema de comunicação sem fio. O algoritmo de controle de potência descentralizado, Ψ , pode ser definido de maneira geral. No instante k , cada transmissor i , $i \in N_J$, deve determinar a sua potência de transmissão a ser utilizada no próximo instante de atuação do controle de potência, $p_i(k+1)$, de tal maneira que a SINR percebida pelo receptor correspondente, $\rho_i(k+1)$, seja a mais próxima

possível da SINR-alvo naquele instante, $\rho_i^t(k+1)$. Logo:

$$p_i(k+1) = \Psi(p_i(k), \rho_i(k)), \quad (3.14)$$

de maneira que $\rho_i(k+1) \approx \rho_i^t(k+1)$.

Nos sistemas celulares, o controle de potência descrito pelo algoritmo Ψ é chamado de Controle de Potência de Laço Fechado (CPLF). Ele tem a função de ajustar dinamicamente a potência de transmissão em resposta à variação do canal rádio-móvel, visando proporcionar ao receptor a SINR-alvo. Por outro lado, a SINR-alvo é ajustada dinamicamente pelo Controle de Potência de Laço Externo (CPLF, em inglês, *Outer Loop Power Control*), que é mais lento que o CPLF, pois o valor da SINR-alvo é adaptado conforme o perfil de múltiplos percursos visto pelo receptor e a velocidade entre os terminais transmissor e receptor [37, 38].

Dessa forma, há dois níveis de atuação do controle de potência em malha fechada. Porém, nesta dissertação, apenas o CPLF, que a partir deste momento será mencionado simplesmente como controle de potência, será abordado. Portanto, uma atuação perfeita do CPLF é assumida.

3.3 O Problema da Equalização Adaptativa

As redes de comunicação atuais experimentam uma crescente demanda por serviços que apresentam requisitos de qualidade cada vez mais restritos. Em particular, nos sistemas celulares, a demanda por serviços com baixas taxas de erro e principalmente com altas taxas de transmissão de dados cresce exponencialmente. Nestes sistemas, um dos grandes desafios é sobrepor os obstáculos impostos pelo canal rádio-móvel à comunicação caracterizada por altas taxas de transmissão, pois ele possui peculiaridades que o tornam bastante hostil. Na verdade, a caracterização do canal é relativa, pois não resulta apenas dos fenômenos de propagação envolvidos, mas também das características do sinal, mais precisamente, da duração do tempo de símbolo (ou da taxa de transmissão).

Em um enlace típico de um canal rádio-móvel, um pulso transmitido chega ao receptor através da propagação por múltiplos percursos. Estes diferentes percursos provocam uma dispersão temporal no pulso recebido devido aos seus diferentes atrasos. A dispersão temporal corresponde, no domínio da frequência, à seletividade.

A seletividade em frequência resulta em um dos efeitos mais degradantes para um sistema de comunicação: a Interferência Entre Símbolos (IES). A IES consiste na interferência mútua entre pulsos transmitidos em instantes próximos. Ela está

presente, de maneira geral, quando o espalhamento temporal (atraso dos múltiplos percursos) do canal é superior ao tempo de símbolo. No domínio da frequência, isto equivale a dizer que a IES está presente quando a banda de coerência do canal é menor do que a banda do sinal.

Uma outra característica do canal rádio-móvel é a variação temporal da sua resposta ao impulso. O canal entre um transmissor e um receptor pode sofrer variações basicamente devido a dois fatores: mudanças no ambiente que os envolve e movimento relativo entre eles. As mudanças no ambiente são provocadas pelo movimento dos objetos responsáveis pela reflexão, pela refração e pelo espalhamento dos sinais transmitidos. Enquanto isso, o movimento relativo entre transmissor e receptor caracteriza o efeito Doppler, que corresponde a uma variação na frequência da portadora do sinal recebido.

Sistemas de comunicação digital projetados para realizar a transmissão em blocos de dados de curta duração podem prevenir a degradação do seu desempenho devido à variação temporal do canal. Blocos de dados com duração menor do que o tempo de coerência do canal estão livres dos efeitos do espalhamento Doppler. Entretanto, se o tempo de transmissão dos blocos de dados excede o tempo de coerência, o receptor deverá ser capaz de lidar com estes efeitos. Uma caracterização mais completa dos efeitos do canal rádio móvel pode ser encontrada na Seção 3.1 ou em [19–22, 24].

A equalização do canal é uma técnica clássica e eficiente de combate à IES. Mesmo quando usado para combater a IES em canais considerados invariantes no tempo, o equalizador é, comumente, um filtro transversal variante no tempo com resposta ao impulso finita representada por um conjunto de coeficientes, que devem ser constantemente adaptados.

O processo de adaptação dos coeficientes do equalizador é realizado através da minimização de uma função custo, que é uma função de segunda ordem dos coeficientes do filtro. Conseqüentemente, a dependência da função custo com relação aos coeficientes do filtro pode ser visualizada como uma superfície caracterizada por um único mínimo [39]. Por razões óbvias, esta superfície é chamada de superfície de desempenho do erro.

Para canais invariantes no tempo, a superfície de desempenho do erro é fixa e o objetivo essencial do equalizador é encontrar o ponto mínimo desta superfície, assegurando, desta forma, o desempenho ótimo ou quase-ótimo. Entretanto, canais variantes no tempo implicam superfícies de desempenho do erro também variantes no tempo. Neste caso, o equalizador tem ainda o objetivo de rastrear as variações

do ponto mínimo da superfície do erro [30, 39].

Os modos de operação de um equalizador adaptativo incluem o treinamento (ou aquisição) e o rastreamento das variações do canal. No modo de treinamento, uma seqüência de treinamento conhecida e de tamanho fixo é enviada pelo transmissor de tal maneira que o equalizador no receptor possa se ajustar às condições do canal através de um algoritmo recursivo. Imediatamente após a seqüência de treinamento, a seqüência de dados (informação efetiva) é transmitida e o equalizador passa a operar no modo de decisão dirigida (ou decisão direta), no qual ele também utiliza um algoritmo recursivo para avaliar as condições do canal e estimar os seus coeficientes com o objetivo de combater os efeitos nocivos do canal. Porém, no modo de decisão dirigida, o equalizador utiliza a seqüência de dados decidida no lugar da seqüência de treinamento.

Algoritmos adaptativos são os responsáveis pelo ajuste iterativo dos parâmetros do equalizador de acordo com algum critério que envolva os erros de estimação. A teoria de filtragem ótima de Wiener é a base das técnicas adaptativas. Ela é a referência para a filtragem de sinais estocásticos, assumindo um ambiente estacionário no sentido amplo (WSS, do inglês *Wide-Sense Stationary*). Através desta teoria, é possível projetar um filtro linear que minimize o erro quadrático médio entre a saída produzida pelo filtro e a resposta desejada. Tal filtro é o receptor ótimo no sentido estatístico, mas requer o conhecimento da resposta ao impulso do canal [39, 40].

Na prática, porém, não é possível um conhecimento pleno das características do canal *a priori*, além do que, em muitas situações, o ambiente não pode ser assumido WSS. Um outro aspecto prático importante é a complexidade (operações de inversão de matrizes) da solução de Wiener, que torna a sua implementação direta indesejável. Por causa destes fatores, algoritmos recursivos são desejáveis. Dentre os algoritmos adaptativos e recursivos mais usados para a equalização de canal está o *Recursive Least Squares* (RLS).

O RLS é um algoritmo adaptativo e recursivo que se constitui em uma alternativa à teoria do filtro de Wiener. Ele é o receptor ótimo no sentido do erro quadrático, sendo, portanto, ao contrário do filtro de Wiener, determinístico. O alto nível de precisão e a alta velocidade de convergência são características marcantes do RLS [39, 41, 42]. Entretanto, o modelo assumido no seu desenvolvimento tem uma relação estreita com o modelo do ambiente em que ele opera. Logo, para canais com variações temporais significativas, uma degradação do desempenho do RLS é

esperada [43–46].

Portanto, surge o conflito entre duas métricas de desempenho para algoritmos adaptativos: a precisão e a robustez. Alguns dos fatores que exigem robustez dos filtros são: o ruído de medida devido à imperfeição dos sensores; os erros de modelagem, como o uso de modelos FIR (do inglês *Finite Impulse Response*) para processos IIR (do inglês *Infinite Impulse Response*); e outros distúrbios originários de fontes desconhecidas. O conflito entre precisão e robustez se torna mais evidente quando o canal a ser equalizado apresenta variações significativas. Por isso, este é o ambiente a ser estudado com mais interesse nesta dissertação.

3.3.1 Formulação do Problema

A formulação do problema da equalização de canal em um modelo de espaço de estados proporciona uma relação estreita com a área da teoria do controle e estimação, que tem sido intensivamente estudada nas últimas décadas. Com isso, alguns dos mais aceitos algoritmos recursivos usados para a equalização de canal podem ser representados de uma maneira concisa, tornando claras suas características e interrelações, além de tornar possível a proposição de novos algoritmos [43, 47–49].

Considere o diagrama de blocos de um sistema de comunicação em banda básica ilustrado na Figura 3.9. Este sistema é composto pelo transmissor, pelo canal e pelo receptor.

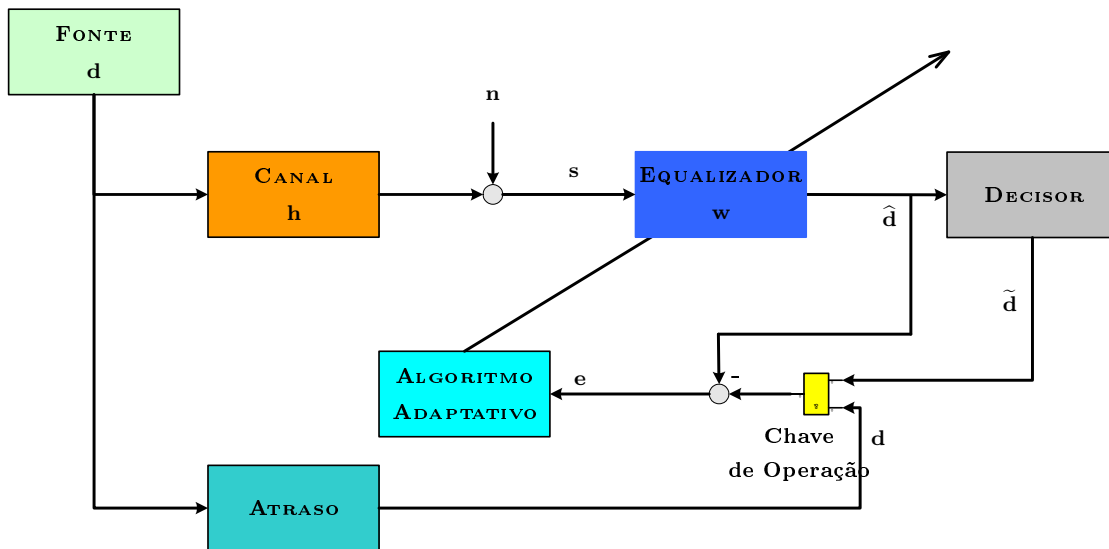


Figura 3.9: Sistema de comunicação em banda básica.

A inclusão da variação temporal no modelo é necessária. Para isso, k é definido como índice do tempo discreto. O canal é modelado por um filtro linear de memória finita. Logo, sua resposta ao impulso é representada por uma linha de N_c componentes atrasados, sendo cada componente um processo aleatório. Além disso, o equalizador linear considerado é composto por M coeficientes.

A fonte de informação é constituída por um conjunto finito de símbolos, sendo a seqüência transmitida composta por símbolos independentes. No instante k , a seqüência dos últimos N_c símbolos transmitidos é representada por $\mathbf{d}_k = [d_k, \dots, d_{k-N_c+2}, d_{k-N_c+1}]^T$. No mesmo instante de tempo, a resposta ao impulso do canal é modelada por $\mathbf{h}_k = [h_k^1, h_k^2, \dots, h_k^{N_c}]^T$. Quanto ao equalizador, sua representação no instante k é $\mathbf{w}_k = [w_k^1, w_k^2, \dots, w_k^M]^T$.

Após estas definições, pode-se construir a representação da entrada do equalizador no instante k , denominada $\mathbf{s}_k = [s_k, \dots, s_{k-M+2}, s_{k-M+1}]^T$. A entrada do equalizador é composta por uma seqüência de sinais. Cada elemento i da seqüência, com $i = k-M+1, \dots, k$, corresponde à convolução entre a seqüência de símbolos transmitidos \mathbf{d}_i e a resposta ao impulso do canal \mathbf{h}_i , contando ainda com a presença de uma amostra do ruído AWGN neste mesmo instante. Formalmente, pode-se escrever:

$$s_i = \mathbf{d}_i^T \mathbf{h}_i + n_i, \quad (3.15)$$

sendo n_i a amostra do ruído AWGN no instante i , com $i = k-M+1, \dots, k$. Agora, de maneira compacta, a entrada do equalizador no instante k pode ser expressa como:

$$\mathbf{s}_k = [\mathbf{d}_k^T \mathbf{h}_k, \dots, \mathbf{d}_{k-M+2}^T \mathbf{h}_{k-M+2}, \mathbf{d}_{k-M+1}^T \mathbf{h}_{k-M+1}]^T + \mathbf{n}_k^T, \quad (3.16)$$

com $\mathbf{n}_k = [n_k, \dots, n_{k-M+2}, n_{k-M+1}]^T$.

A saída do equalizador no instante k , \hat{d}_k , é a estimativa do sinal transmitido d_k antes do decisor. Ela resulta da convolução entre a seqüência de sinais na entrada do equalizador e os coeficientes do mesmo, podendo ser escrita como:

$$\hat{d}_k = \mathbf{s}_k^T \mathbf{w}_k. \quad (3.17)$$

A estimativa do sinal transmitido d_k após o decisor, que é um dispositivo não-linear, é denominada \tilde{d}_k .

Por fim, o erro de estimação, usado pelos algoritmos adaptativos para reajustar os coeficientes do equalizador, é denominado e_k . Ele consiste na diferença entre o

sinal desejado, ou seja, aquele transmitido no instante k , e a saída do equalizador naquele instante. Aqui, com o objetivo de tornar mais fácil a compreensão, o atraso é desconsiderado. Porém, é importante enfatizar que, para o cálculo do erro de estimação, deve haver a sincronização entre o sinal desejado e a saída do equalizador.

A modelagem do problema da equalização em espaço de estados exige, de início, a definição do vetor de estados a ser estimado. A estimação do vetor de coeficientes do equalizador de forma recursiva no tempo, segundo algum critério de otimização que leve a saída do equalizador a se aproximar do símbolo transmitido correspondente, é o objetivo a ser alcançado. Logo, o vetor de coeficientes do equalizador é o vetor de estados a ser estimado.

Considerando a situação mais geral, pode-se escrever o vetor de coeficientes do equalizador em um instante k em função do vetor de coeficientes do equalizador ótimo, \mathbf{w}_k^o , derivado da teoria de filtragem ótima de Wiener:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_k^o + \Delta\mathbf{w}_k^o, \quad (3.18)$$

sendo $\Delta\mathbf{w}_k^o$ a variação do vetor de coeficientes do equalizador em torno do vetor ótimo no mesmo instante.

Assim, usando a Eq. (3.16) na Eq. (3.17), esta pode ser rearranjada de maneira a expressar mais claramente a saída do equalizador, \hat{d}_k :

$$\hat{d}_k = d_k + \mathbf{n}_k^T \mathbf{w}_k^o + \mathbf{s}_k^T \Delta\mathbf{w}_k^o. \quad (3.19)$$

Observe que a saída do equalizador contém dois termos além do sinal transmitido. O termo $\mathbf{n}_k^T \mathbf{w}_k^o$ está sempre presente, pois consiste no ruído térmico AWGN filtrado no receptor. Porém, o outro termo, $\mathbf{s}_k^T \Delta\mathbf{w}_k^o$, está presente apenas quando os coeficientes do equalizador não são equivalentes aos do equalizador ótimo.

Para a formulação em espaço de estados, é necessária a modelagem da evolução temporal do vetor de estados. A teoria de filtragem ótima de Wiener oferece uma solução ótima e única para o problema de equalização de canal com relação à IES, desde que o ambiente seja WSS, pois neste caso a superfície de desempenho do erro é fixa. Porém, a suposição de variação no tempo do canal pode resultar em um ambiente não-estacionário, fazendo com que a solução ótima de Wiener passe a ser também variante no tempo. Assim, o modelo adotado para a resposta ao impulso do equalizador ótimo é um processo de Markov de primeira ordem. A escolha deste modelo tem como objetivo o não favorecimento de qualquer direção de variação do

vetor de coeficientes ótimos [39]:

$$\mathbf{w}_{k+1}^o = \mathbf{w}_k^o + \mathbf{q}_k, \quad (3.20)$$

em que \mathbf{q}_k é o ruído ou a perturbação do processo.

O vetor \mathbf{q}_k representa a não-estacionaridade do ambiente, neste caso, devido à incerteza relativa à variação temporal do canal. A Eq. (3.20) é chamada, nos termos da teoria do controle e estimação, de equação do processo, pelo fato de modelar o processo real a ser estimado. Por enquanto, nenhuma consideração é feita a respeito das características estatísticas do ruído de processo \mathbf{q}_k .

Admitindo que os coeficientes do equalizador atingem valores muito próximos dos coeficientes do equalizador ótimo, o termo $\mathbf{s}_k^T \Delta \mathbf{w}_k^o$ na Eq. (3.19) torna-se desprezível. Logo, o sinal desejado (ou sinal transmitido) pode ser expresso como:

$$d_k = \hat{d}_k + \nu_k, \quad (3.21)$$

sendo $\nu_k = -\mathbf{n}_k^T \mathbf{w}_k^o$ o ruído de medida, que, para o caso do equalizador ótimo, consiste em um somatório de M variáveis aleatórias, que são versões ponderadas do ruído AWGN no receptor. A Eq. (3.21) é chamada de equação de medida.

O teorema central do limite afirma que a densidade de probabilidade de uma variável aleatória composta por uma soma de M variáveis aleatórias, independentemente de suas características estatísticas individuais, tende a uma curva normal quando a quantidade de variáveis, M , aumenta. Se as densidades de probabilidade estão razoavelmente concentradas, então uma curva normal é uma boa aproximação para a densidade de probabilidade mesmo para valores pequenos de M [25].

Portanto, o ruído de medida, pode ser considerado uma variável aleatória gaussiana. Além disso, já que n_i é uma amostra de um ruído AWGN e é independente de w_k^{k-i+1} , para todo $i = k-M+1, \dots, k$, cada uma das M variáveis aleatórias que somadas resultam no ruído de medida é uma variável aleatória branca, gaussiana e de média zero. Logo, o ruído de medida pode ser considerado uma variável aleatória branca, gaussiana e de média zero mesmo para um equalizador constituído por um pequeno número de coeficientes.

As Eqs. (3.20) e (3.21) constituem, então, o modelo do problema da equalização de canal em espaço de estados. Entretanto, observe que as equações do processo e de medida, e conseqüentemente a aproximação do ruído de medida por uma variável

aleatória branca, gaussiana e de média zero, foram definidas sob a suposição de que o algoritmo adaptativo consegue levar os coeficientes do equalizador a valores muito próximos dos valores ótimos. Porém, esta suposição pode não ser válida, pois na própria modelagem do problema estão inseridos erros devido, por exemplo, à utilização de modelos FIR representando processos IIR, e à incerteza quanto à variação temporal do canal. Dessa forma, soluções baseadas nestas suposições podem ser sensíveis a mudanças nas condições consideradas em seu desenvolvimento.

Esta dificuldade pode ser mais relevante em sistemas celulares, devido ao caráter variante no tempo do canal rádio-móvel. A equalização adaptativa tem como função principal o combate à IES. Entretanto, as incertezas do canal rádio-móvel fazem surgir uma dificuldade adicional para o equalizador adaptativo: a necessidade de rastrear as variações rápidas do canal. Esta é, portanto, a motivação para um estudo sobre o desempenho com respeito à precisão e à robustez de algoritmos adaptativos para a equalização de canais variantes no tempo nesta dissertação.

3.4 Sumário

Neste capítulo, conceitos básicos dos dois problemas estudados nesta dissertação foram abordados e os sistemas celulares considerados foram modelados. A descrição do problema de controle de potência, destacando as limitações às quais os sistemas celulares estão submetidos, assim como a necessidade de um controle de potência eficiente foram apresentadas. Uma descrição também foi feita para o problema da equalização adaptativa.

Então, com os problemas formulados e após a discussão dos principais aspectos da ferramenta matemática usada nesta dissertação, realizada no capítulo anterior, a aplicação da teoria dos jogos nos problemas de controle de potência e de equalização adaptativa torna-se possível. No próximo capítulo, o problema de controle de potência é abordado via teoria dos jogos.

Controle de Potência Eficiente em Sistemas de Comunicação Móvel: Aplicação da Teoria dos Jogos

A eficiência energética pode ser vista como um sinônimo de alocação eficiente dos recursos de potência nos sistemas de comunicação multiusuário. Ela promove um menor nível de interferência total nos sistemas, o que significa um aumento de sua capacidade, sendo, portanto, um fator importante e atualmente bastante valorizado para a avaliação do desempenho de algoritmos de controle de potência em sistemas de comunicação móvel [8, 50, 51].

Um algoritmo de controle de potência é eficiente em energia quando utiliza os recursos de potência de maneira oportuna. Em um sistema celular, há enlaces favorecidos e enlaces desfavorecidos em termos de qualidade. O tratamento de ambos os tipos de enlace de maneira igualitária é uma estratégia ineficiente energeticamente.

Para uma determinada quantidade de informação a ser transmitida, um algoritmo de controle de potência que determina um maior nível de potência de transmissão para um enlace que se encontra em situação favorável promoverá uma alta taxa de transmissão com baixa taxa de erro. Por outro lado, altas taxas de transmissão em enlaces desfavorecidos são um desperdício de potência, pois as altas taxas de erro obrigam o sistema celular a recorrer a retransmissões.

Há algum tempo muitos estudos vêm demonstrando que os conceitos da teoria dos jogos se aplicam bem ao problema do controle de potência em redes celulares [8, 52–59]. A preferência, ou necessidade, da descentralização e da auto-otimização do problema vão ao encontro destes conceitos, tornando a sua formulação através

da teoria dos jogos atraente e poderosa no que diz respeito às soluções.

No contexto da abordagem do problema do controle de potência como um problema de múltiplos objetivos, há pelo menos um trabalho que não faz uso da teoria dos jogos. Em [60], o problema da otimização de múltiplos objetivos é transformado em um problema de objetivo único, representado por uma combinação linear das funções objetivo do problema apresentado inicialmente, levando a uma ponderação sobre cada objetivo que compõe o problema.

A grande maioria dos estudos do controle de potência como um jogo limitou-se a apresentar soluções para cenários de serviço único (serviço de dados). Destacam-se dois tipos de função custo nestes trabalhos: as funções dependentes apenas das propriedades intrínsecas do canal (SINR, potência de transmissão), como em [8, 52, 53]; e as funções que dependem, também, de decisões de baixo nível (codificação, modulação), como em [54–57].

Outros trabalhos foram dedicados a cenários de múltiplas taxas, como [58, 59, 61]. Porém, poucos trabalhos publicados com enfoque nos cenários de múltiplos serviços estão disponíveis. Em [62], os autores propõem um esquema de controle de potência para sistemas DS-CDMA (do inglês *Direct-Sequence-CDMA*), os quais comportam serviços de voz e de dados, sendo o serviço de voz sujeito ao controle de potência convencional, enquanto ao serviço de dados é imposta uma restrição quanto à potência de transmissão. Em [63, 64], os ambientes considerados são o enlace direto e o enlace reverso de um sistema CDMA. Os autores desenvolvem algoritmos iterativos que realizam a alocação e a correção da potência no sistema, considerando que cada usuário pode ser associado a uma qualidade de serviço diferente.

Nesta dissertação, os tipos de serviço são abordados de uma maneira diferenciada e que pode ser considerada mais geral. Os sistemas celulares atuais são caracterizados pela oferta de serviços com diferentes taxas de transmissão e taxas de erro, requisitos de qualidade que estão diretamente relacionados à SINR percebida pelo receptor, como discutido na formulação do problema do controle de potência na Subseção 3.2.1. No lugar de classificar tais serviços como serviços de voz e serviços de dados, ou de estipular vários níveis de qualidade que correspondam a diferentes serviços, eles são classificados em dois grupos: os serviços de QoS garantido e os serviços de “melhor esforço” (em inglês, *Best Effort Services*).

O primeiro grupo de serviços tem como principal característica a necessidade de satisfação de um critério mínimo de qualidade. Além disso, estes serviços são insensíveis a níveis de QoS mais altos do que o critério mínimo. É neste grupo que se

insere, dentre outros, o serviço de voz. Por outro lado, os serviços de melhor esforço caracterizam-se por admitirem uma alocação de recursos flexível. A flexibilidade dos serviços de melhor esforço com relação a seus requerimentos de QoS e a sua sensibilidade com respeito ao nível de qualidade do enlace, os tornam candidatos naturais a experimentarem algoritmos não-convencionais de controle de potência que promovam uma maior eficiência energética.

A classificação dos serviços nestes dois grupos tão diferenciados parece ser mais adequada à realidade das redes celulares do que a divisão dos serviços em serviço de voz e serviços de dados. Quanto às funções custo, a não dependência de parâmetros do sistema, tais como codificação e modulação, foi adotada com o objetivo de não condicionar os algoritmos a uma determinada configuração de um sistema, favorecendo a um emprego diverso e à simplicidade. Finalmente, dois grandes cenários têm a atenção nesta dissertação: o cenário de serviço único e o cenário de múltiplos serviços.

Neste capítulo, o problema do controle de potência será formulado com base na teoria dos jogos e através de um jogo estático não-cooperativo de múltiplos estágios. A Seção 4.1 retrata os cenários de serviço único, estudando, em separado, os dois tipos de serviço. Na Subseção 4.1.1 os estudos estão concentrados em um sistema que oferece apenas serviços de QoS garantido. Um sistema que oferece apenas serviços de melhor esforço é abordado na Subseção 4.1.2. O cenário de múltiplos serviços é contemplado na Seção 4.2, no qual tanto os serviços de QoS garantido quanto os serviços de melhor esforço são oferecidos pelo sistema celular. Resultados de simulações computacionais são apresentados e analisados nas Subseções 4.1.3 e 4.2.2, relativos, respectivamente, aos cenários de serviço único e de múltiplos serviços. As considerações finais sobre os estudos de controle de potência baseado na teoria dos jogos estão na Seção 4.3.

4.1 Jogo de Controle de Potência em Sistema de Serviço Único

Nesta seção, o problema do controle de potência é abordado apenas no contexto de um sistema de serviço único. Na Subseção 4.1.1, sob a ótica da teoria dos jogos, a abordagem do problema do controle de potência para sistemas que oferecem apenas serviços de QoS garantido resulta no algoritmo clássico de controle de potência DPC (do inglês *Distributed Power Control*). Para os sistemas que oferecem apenas serviços de melhor esforço, um novo algoritmo de controle de potência baseado na teoria dos jogos, adequado às características destes serviços, é desenvolvido e

tem suas propriedades de convergência demonstradas na Subseção 4.1.2. O novo algoritmo consiste em uma generalização do DPC, sendo, por isso, denominado GT-DPC (do inglês *Game-Theoretic Distributed Power Control*).

A modelagem apresentada na formulação do problema de controle de potência na Subseção 3.2.1 será agora utilizada, a qual o leitor pode sempre se referenciar.

4.1.1 Algoritmo Convencional de Controle de Potência

Seja $G_K = [N_J, \{\Gamma_i\}, \{c_i\}]$ um jogo estático não-cooperativo de soma-não-zero do controle de potência de um sistema celular que oferece apenas serviços de QoS garantido. A adoção da estratégia baseada neste tipo de jogo se justifica pelo fato de que os usuários (jogadores) do sistema não cooperam entre si, além do que, ganhos de um usuário não correspondem necessariamente a perdas de outros usuários. O jogo é composto por K estágios (ou instantes de atuação do controle de potência). Os transmissores constituem o conjunto $N_J = \{1, \dots, N\}$ de jogadores; o conjunto contínuo de potências $\Gamma_i = [p_{i_{min}}, p_{i_{max}}]$ é o espaço de estratégias do jogador i , para todo $i \in N_J$; e c_i é a função custo do jogador i , para todo $i \in N_J$. De maneira a simplificar o desenvolvimento matemático, mas sem qualquer perda de generalidade, um único espaço de estratégias é considerado para todos os jogadores: $\Gamma_i = [p_{min}, p_{max}]$, para todo $i \in N_J$. Isto corresponde a definir os mesmos valores de potência mínima e máxima para todos os transmissores, suposição razoável para os sistemas celulares.

É importante enfatizar que o i -ésimo jogador tem controle apenas sobre a sua própria potência p_i , que é selecionada entre as potências do espaço de estratégias Γ_i . O vetor de potências $\mathbf{p}(k) = [p_1(k), \dots, p_N(k)]^T \in \Gamma$ é o resultado do k -ésimo estágio do jogo em termos dos níveis de potência selecionados por todos os jogadores, sendo $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_N$. Define-se ainda um vetor cujos elementos são os elementos de $\mathbf{p}(k)$, com exceção do i -ésimo elemento, denominado $\mathbf{p}_{-i}(k)$, o qual será de importância na seqüência.

O serviço de QoS garantido exige a satisfação de um critério mínimo de qualidade, além de não se beneficiar de níveis mais altos de qualidade. Como é assumido que os requisitos de qualidade são representados por valores de SINR como alvos, para os serviços de QoS garantido a SINR-alvo do i -ésimo enlace, ρ_i^t , é fixa e representa o nível mínimo de qualidade requerida.

O objetivo do controle de potência deve ser bem representado através da função custo. A função custo utilizada neste jogo, além de representar bem o objetivo do

controle de potência, apresenta propriedades matemáticas interessantes ao processo de otimização. O erro quadrático entre a SINR-alvo e a SINR atingida para cada jogador i , $i \in N_J$, é uma função quadrática em relação à potência de transmissão deste jogador. Dessa forma, pode-se garantir a existência de um único ponto extremo desta função custo, o que corresponde a uma única solução em cada estágio k do jogo, para cada usuário. Além disso, esta função custo formaliza matematicamente o rastreamento da SINR-alvo através das decisões quanto à potência de transmissão para cada jogador i . No restante da dissertação, referências à SINR do jogador i dizem respeito à SINR percebida no receptor correspondente ao transmissor i .

Note que, através da função custo adotada, é imposta uma penalidade (alto custo) ao jogador que obtiver como SINR valores distantes da SINR-alvo. É interessante observar que não apenas valores inferiores à SINR-alvo sofrem penalizações, mas valores de SINR acima da SINR-alvo são aqui considerados prejudiciais, pois exigem recursos de rádio adicionais e não correspondem a benefícios para o jogador que os experimenta. Assim, a estratégia de cada jogador i em qualquer estágio k do jogo G_K é definida abaixo:

$$\min_{p_i(k+1) \in \Gamma_i} \{c_i(p_i(k+1), \mathbf{p}_{-i}(k+1)) = |\rho_i^t - \rho_i(k+1)|^2\}. \quad (4.1)$$

Portanto, no instante k , cada jogador tem o objetivo de determinar o seu próprio nível de potência a ser transmitida no próximo instante, de tal maneira que o erro quadrático entre a SINR-alvo e a SINR atingida seja minimizado. Observe que a potência de transmissão que otimiza a função custo de um jogador depende da potência transmitida por todos os outros jogadores. Portanto, é necessário determinar um conjunto de potências com o qual cada jogador “se sinta satisfeito” no que diz respeito ao seu custo individual, dada a seleção de potências dos outros jogadores. Este ponto de operação é chamado de **ponto de equilíbrio**.

Uma solução adequada para este problema é a solução de equilíbrio de Nash. Os conceitos do equilíbrio de Nash, discutidos em maiores detalhes na Subseção 2.2.1, oferecem um resultado estável para um jogo em que múltiplos agentes com interesses conflitantes competem através de uma auto-otimização e chegam a uma solução que nenhum deles deseja modificar, sob pena de alcançar piores resultados. Formalmente, um vetor de potências $\mathbf{p}^*(k) = [p_1^*(k), \dots, p_N^*(k)]^T$ é um ponto de Equilíbrio de Nash do estágio k do jogo G_K se:

$$c_i(p_i^*(k+1), \mathbf{p}_{-i}^*(k+1)) \leq c_i(p_i(k+1), \mathbf{p}_{-i}^*(k+1)), \quad \forall i \in N_J, k \in K^*. \quad (4.2)$$

Condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução de equilíbrio de Nash são dadas pelo Teorema 1, enunciado abaixo:

Para todo $i \in N_J$ seja Γ_i um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço euclidiano de dimensão finita. Seja $c_i : \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$ a função custo, para todo $i \in N_J$, conjuntamente contínua em todos os seus argumentos e estritamente convexa em p_i para todo $p_l \in \Gamma_l, l \neq i$. Então, o jogo de soma-não-zero associado admite uma Solução de Equilíbrio de Nash.

A demonstração deste teorema, assim como os principais conceitos do equilíbrio de Nash em jogos estáticos não-cooperativos de soma-não-zero podem ser encontrados na Subseção 2.2.1.

No jogo G_K , o espaço de estratégias $\Gamma_i = [p_{min}, p_{max}]$ é um subconjunto fechado, limitado e convexo do espaço euclidiano \mathbb{R} , para todo $i \in N_J$. Logo, para provar a existência de uma solução de equilíbrio de Nash é necessário verificar a continuidade da função custo c_i com respeito a todos os seus argumentos, para todo $i \in N_J$. Além disso, c_i deve ser estritamente convexa em p_i para todo $p_l \in \Gamma_l, l \in N_J, l \neq i$. Então, das expressões da SINR e da definição do jogo G_K , respectivamente, Eqs. (3.12) e (4.1), a expressão da função custo do jogador j em termos da sua potência de transmissão é obtida:

$$c_i = \rho_i^{t^2} - 2\rho_i^t \left[\frac{g_i(k+1)}{I_i(k+1)} \right] p_i(k+1) + \left[\frac{g_i(k+1)}{I_i(k+1)} \right]^2 p_i^2(k+1). \quad (4.3)$$

Observando a Eq. (3.13), percebe-se que a interferência-mais-ruído é contínua e positiva para todo $i \in N_J$. Como o ganho do canal também é contínuo e positivo, a função custo c_i na Eq. (4.3) é contínua com respeito a todos os seus argumentos, pois os valores de potência pertencem ao conjunto contínuo do espaço das estratégias Γ_i , para todo $i \in N_J$. A estrita convexidade da função custo será considerada em seguida.

Ponto de Equilíbrio de Nash do Jogo G_K

A condição necessária de otimalidade para uma função diferenciável é que sua derivada de primeira ordem seja igual a zero. A derivada parcial da função custo c_i com respeito à potência de transmissão p_i é desenvolvida abaixo:

$$\frac{\partial c_i}{\partial p_i(k+1)} = -2\rho_i^t \left[\frac{g_i(k+1)}{I_i(k+1)} \right] + 2 \left[\frac{g_i(k+1)}{I_i(k+1)} \right]^2 p_i(k+1) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial p_i(k+1)} = 0 \implies p_i(k+1) = \rho_i^t \frac{I_i(k+1)}{g_i(k+1)}. \quad (4.5)$$

A condição suficiente de otimalidade para uma função duas vezes diferenciável é que sua derivada de segunda ordem seja diferente de zero. A derivada parcial de segunda ordem da função custo c_i com respeito à potência de transmissão p_i é, como mostrado abaixo, estritamente positiva. Logo, a estrita convexidade de c_i , para todo $i \in N_J$, é formalmente garantida:

$$\frac{\partial^2 c_i}{\partial p_i^2(k+1)} = 2 \left[\frac{g_i(k+1)}{I_i(k+1)} \right]^2 > 0. \quad (4.6)$$

Portanto, o jogo G_K admite uma única solução de equilíbrio de Nash, dada pela Eq. (4.5). Além disso, a Eq. (4.6) assegura que a função custo c_i , para todo $i \in N_J$, é convexa.

Entretanto, na prática, valores do ganho do canal e da potência da interferência-mais-ruído no instante $k+1$ não estão disponíveis no instante k . Observe que a definição do algoritmo do controle de potência Ψ , formalizada pela Eq. (3.14), apresenta a atualização da potência de transmissão através do uso dos valores de potência de transmissão e de SINR do instante anterior. Então, se a frequência de atuação do controle de potência for considerada alta em comparação à variação do canal e da interferência, a seguinte aproximação pode ser assumida:

$$\frac{g_i(k+1)}{I_i(k+1)} \approx \frac{g_i(k)}{I_i(k)}. \quad (4.7)$$

Logo, usando a aproximação da Eq. (4.7) na Eq. (4.5) e manipulando o numerador e o denominador resultantes através da multiplicação por $p_i(k)$, o algoritmo de controle de potência para um sistema que oferece apenas serviços de QoS garantido é obtido, em escala logarítmica:

$$p_i(k+1)_{dBm} = p_i(k)_{dBm} + \rho_i^t_{dB} - \rho_i(k)_{dB}. \quad (4.8)$$

Portanto, a formulação do controle de potência descentralizado como um jogo estático não-cooperativo de soma-não-zero, no qual cada jogador tem como objetivo a minimização do erro quadrático entre a SINR-alvo e a SINR atingida, apresenta como solução de equilíbrio de Nash o algoritmo DPC (Eq. (4.8)). O DPC tem como origem uma equação diferencial e é um dos mais utilizados algoritmos de controle de potência. Uma de suas versões clássicas é apresentada em [32].

Análise de Convergência do Algoritmo Convencional

Apesar de a convergência do DPC ter sido demonstrada em vários outros trabalhos, como em [32], sua análise a partir da solução de equilíbrio de Nash é considerada importante e inovadora. De acordo com os conceitos apresentados na Subseção 2.2.1 e, de maneira simplificada, na Figura 2.2, uma determinada solução de equilíbrio de Nash é globalmente estável se, independentemente da natureza da variação inicial com relação à estratégia ótima, ela converge para aquela solução original. Mais precisamente, através da Definição 3, na Subseção 2.2.1, a solução de equilíbrio de Nash $p_i^*, i \in N_J$ é estável com respeito a um esquema Υ de desvio da solução se pode ser obtida como um processo de limite:

$$p_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} p_i(k), \quad (4.9)$$

$$p_i(k+1) = \arg \min_{p_i \in U_i} c_i(p_{-i}^{\Upsilon_k}, p_i), \quad p_i(0) \in \Gamma_i, i \in N_J, \quad (4.10)$$

sendo que $p_{-i}^{\Upsilon_k}$ representa um vetor de potências de todos os jogadores (com exceção do i -ésimo jogador) cujos valores diferem dos elementos do vetor de potências dado pela solução de equilíbrio de Nash.

Então, após usar a expressão da interferência-mais-ruído na expressão do ponto de equilíbrio de Nash, respectivamente, Eqs. (3.13) e (4.5), o seguinte resultado é obtido:

$$p_i(k) = \rho_i^t \frac{\sum_{l=1}^N [p_l(k)g_l] + \sigma^2}{g_i}, \quad (4.11)$$

sendo $l \neq i$ e g_i o ganho de canal do jogador i , $i \in N_J$. Aplicando o limite nesta última equação e considerando a Eq. (4.9):

$$p_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_i^t \frac{\sum_{l=1}^N [p_l(k)g_l] + \sigma^2}{g_i}. \quad (4.12)$$

Retornando à discussão com respeito à Eq. (4.7), conclui-se que o desvio da solução de equilíbrio de Nash no instante $k + 1$ corresponde à situação em que os jogadores reajustam suas ações simultaneamente em resposta às mais recentes ações dos outros jogadores, ou seja, $p_{-i}^{\mathbf{Y}_k} = p_{-i}(k)$ na Eq. (4.10). Assim:

$$p_i(k + 1) = \rho_i^t \frac{\sum_{l=1}^N [p_l(k)g_l] + \sigma^2}{g_i}, \quad l \neq i. \quad (4.13)$$

Logo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_i(k + 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_i(k) = p_i^*, \quad \forall i \in N_J. \quad (4.14)$$

Portanto, as condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução de equilíbrio de Nash para o jogo de controle de potência distribuído foram satisfeitas e esta solução consiste em uma nova dedução do algoritmo DPC. A solução foi mostrada ser única e, além disso, estável, garantindo assim a convergência do algoritmo.

4.1.2 Algoritmo de Controle de Potência Proposto para Serviços de Melhor Esforço

Nesta subseção, o problema do controle de potência para sistemas que oferecem apenas serviços de melhor esforço será abordado através da teoria dos jogos. Assim como na subseção anterior, a modelagem apresentada na formulação do problema de controle de potência na Subseção 3.2.1 será utilizada.

O DPC clássico é originalmente um algoritmo de controle de potência que rastreia a SINR-alvo, como pode-se comprovar pela sua função custo na Subseção 4.1.1. Dessa forma, não são consideradas situações individuais dos enlaces com relação aos recursos de rádio entre duas atualizações do CPLE, ou seja, não há flexibilidade com respeito à SINR-alvo. Este não é, portanto, um algoritmo adequado de adaptação de potência de transmissão para serviços de melhor esforço. Por isso, um novo algoritmo distribuído de controle de potência para tais serviços é proposto.

O algoritmo proposto, denominado GT-DPC (do inglês *Game-Theoretic Distributed Power Control*) leva em consideração as condições individuais de cada enlace, determinando para cada um deles, em cada atuação do controle de potência, uma SINR-alvo adequada. Simultaneamente, este algoritmo promove o rastreamento

da SINR-alvo, como fazem os algoritmos convencionais de controle de potência. É importante enfatizar que o GT-DPC exige exatamente a mesma informação que os algoritmos convencionais, não demandando qualquer recurso extra.

O jogo estático não-cooperativo de soma-não-zero do controle de potência de um sistema celular que oferece apenas serviços de melhor esforço é, então, denominado $H_K = [N_J, \{\Gamma_j\}, \{c_j\}]$. O jogo H_K é análogo ao anteriormente apresentado G_K , diferenciando-se deste com relação ao tipo de serviço oferecido pelo sistema celular e, por conseqüência, com relação à SINR-alvo. Abaixo, a definição da estratégia de cada jogador em qualquer instante k do jogo H_K , no qual os jogadores têm j como índice:

$$\min_{p_j(k+1) \in \Gamma_j} \{c_j(p_j(k+1), \mathbf{p}_{-j}(k+1)) = |\rho_j^t(k+1) - \rho_j(k+1)|^2\}. \quad (4.15)$$

Veja que a SINR-alvo $\rho_j^t(k+1)$, para todo $j \in N_J$, é variante no tempo. Esta estratégia é adequada ao tipo de serviço oferecido pelo sistema, já que os serviços de melhor esforço admitem níveis de qualidade diferenciados, assumidamente representados por SINRs-alvo. A escolha destas SINRs-alvo é um aspecto importante, pois ela pode levar o sistema a um ponto de operação mais eficiente em termos de energia, além de mantê-lo estável.

Um critério adequado de determinação da SINR-alvo deve levar em consideração o nível de potência requerida para alcançar tal nível de SINR. Em [65], tal procedimento é realizado. Quando um transmissor aumenta sua potência, em resposta a um aumento da interferência ou a uma diminuição do ganho de canal, sua SINR-alvo é reduzida. Como a SINR-alvo do transmissor diminui gradualmente com a elevação da sua potência de transmissão, esta abordagem é chamada de *soft dropping*. Imprimindo uma simplificação na função de mapeamento da potência de transmissão na SINR-alvo apresentada em [65], a SINR-alvo como uma função contínua e linear da potência de transmissão, ambas em escala logarítmica, é definida:

$$\rho_j^t(k+1)_{dB} = \alpha - \beta p_j(k+1)_{dBm}. \quad (4.16)$$

Teoricamente, outras funções que realizem o *soft dropping* podem ser usadas como mapeamento da potência de transmissão na SINR-alvo.

Os parâmetros α e β são positivos e definidos através dos seguintes pontos

extremos da reta: $(p_{min}^{dBm}, \rho_{max}^{t \text{ dB}})$ e $(p_{max}^{dBm}, \rho_{min}^{t \text{ dB}})$. Logo, suas expressões são:

$$\alpha = \rho_{min}^{t \text{ dB}} + \left(\frac{\rho_{max}^{t \text{ dB}} - \rho_{min}^{t \text{ dB}}}{1 - \frac{p_{min}^{dBm}}{p_{max}^{dBm}}} \right), \quad (4.17)$$

$$\beta = \frac{\rho_{max}^{t \text{ dB}} - \rho_{min}^{t \text{ dB}}}{p_{max}^{dBm} - p_{min}^{dBm}}. \quad (4.18)$$

A Figura 4.1 ilustra o critério de escolha da SINR-alvo para cada jogador j , com $j \in N_J$ e $k \in K^*$.

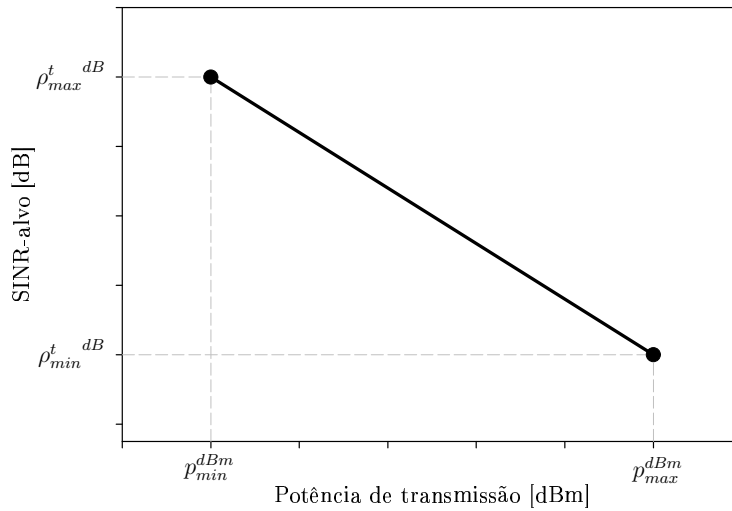


Figura 4.1: SINR-alvo em função da potência de transmissão.

Esta regra de determinação da SINR-alvo em função do nível de potência necessária para alcançá-la possui características desejáveis. Jogadores em situação favorável utilizam poucos recursos de potência. Assim, através do critério de escolha da SINR-alvo, estes jogadores buscam altos níveis de SINR, já que isto representa benefícios para eles e não resulta em degradação do desempenho dos outros jogadores, pois os níveis de potência utilizados são baixos. À medida que os níveis de potência destes jogadores passam a ser insuficientes para alcançar tais SINRs, eles são elevados e, ao mesmo tempo, a SINR-alvo sofre uma diminuição. Assim, é possível se chegar a um ponto de operação estável e eficiente em energia, de acordo com a relação estabelecida entre SINR-alvo e potência de transmissão. Esta conclusão é análoga para o caso dos jogadores em situação desfavorável. É importante observar que a escolha do nível de SINR a ser buscado no instante $k + 1$ é função da potência de transmissão também no instante $k + 1$, e não da potência

de transmissão do instante k , como em [65]. Esta diferença é fundamental e, por isso, pode-se dizer que a SINR-alvo e a potência de transmissão, neste caso, estão acopladas e são conjuntamente determinadas. Portanto, no instante k , cada jogador tem como objetivo determinar, simultaneamente, sua SINR-alvo no próximo instante e o nível de potência necessária para alcançá-la.

A função custo utilizada neste jogo, o erro quadrático entre a SINR-alvo e a SINR atingida, além de representar bem o objetivo do controle de potência, pode proporcionar uma evolução segura da SINR para todos os jogadores, pois os valores extremos de SINR-alvo nas Eqs. (4.17) e (4.18) podem ser definidos maiores do que o limiar de SINR que corresponde ao critério mínimo de qualidade requerida. Esta função custo formaliza matematicamente o rastreamento da SINR-alvo através das decisões quanto à potência de transmissão para cada jogador j .

Note que, assim como no jogo G_K , apresentado na Subseção 4.1.1, através da função custo adotada é imposta uma penalidade (alto custo) ao jogador que obtiver como SINR valores distantes da SINR-alvo. Tanto valores inferiores à SINR-alvo quanto superiores sofrem penalizações, caracterizando o objetivo de rastrear a SINR definida como alvo.

A solução de equilíbrio de Nash é uma solução adequada para o jogo H_K , segundo os conceitos do equilíbrio de Nash em jogos estáticos não-cooperativos de soma-não-zero, encontrados na Subseção 2.2.1. As condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução de equilíbrio de Nash são descritas no Teorema 1, cuja demonstração se encontra na mesma subseção.

Como o espaço de estratégias é o mesmo considerado anteriormente, $\Gamma_j = [p_{min}, p_{max}]$, para todo $j \in N_J$ e $k \in K^*$, sendo ele um subconjunto fechado, limitado e convexo do espaço euclidiano \mathbb{R} , a existência de uma solução de equilíbrio de Nash depende da continuidade da função custo c_j com respeito a todos os seus argumentos e da estrita convexidade em p_j para todo $p_l \in \Gamma_l$, $l \in N_J$, $l \neq j$.

Para a obtenção da expressão da função custo c_j explicitamente em função da potência de transmissão do jogador j , $j \in N_J$, a Eq. (4.16) é usada para relacionar a SINR-alvo à potência de transmissão em escala linear:

$$\rho_j^t(k+1) = (10^{\alpha/10}) p_j^{-\beta}(k+1). \quad (4.19)$$

Em seguida, esta expressão linear é usada juntamente com a Eq. (4.15). Logo, a função custo do jogador j torna-se:

$$c_j = \theta p_j^{-2\beta}(k+1) - \xi p_j^{-\beta+1}(k+1) + \delta p_j^2(k+1), \quad (4.20)$$

com:

$$\theta = 10^{2\alpha/10}; \quad \xi = 2(10^{\alpha/10}) \left[\frac{g_j(k+1)}{I_j(k+1)} \right]; \quad \delta = \left[\frac{g_j(k+1)}{I_j(k+1)} \right]^2. \quad (4.21)$$

Sabendo que θ é constante e ξ e δ são contínuos, então, da Eq. (4.20), pode-se garantir que a função custo c_j é contínua com respeito a todos os seus argumentos se, e somente se, $p_j(k+1) \neq 0$, para todo $j \in N_J$ e $k \in K^*$. Logo, assumindo $p_{min} > 0$ a continuidade da função custo é garantida. Esta suposição é perfeitamente adequada ao problema real, pois valores negativos de potência são irrealizáveis.

Diferentemente do jogo G_K , em que a função custo de cada jogador é quadrática na sua variável de decisão, no jogo H_K a função custo c_j não é quadrática em p_j . A Figura 4.2 mostra a forma genérica da função custo c_j para uma interferência fixa.

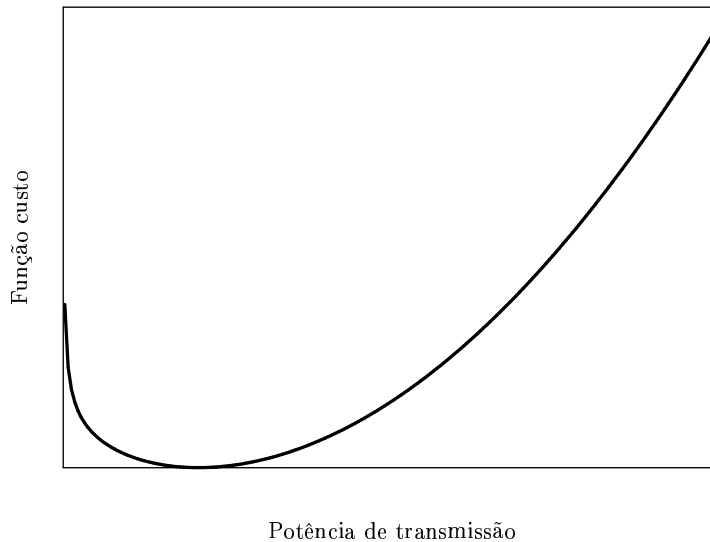


Figura 4.2: Forma genérica da função custo para serviços de melhor esforço.

Apesar de a forma genérica da função custo apresentar apenas um ponto extremo, não se pode assegurar o mesmo comportamento para qualquer configuração dos parâmetros que compõem a função. As condições para a estrita convexidade da função custo são discutidas em seguida.

Ponto de Equilíbrio de Nash do Jogo H_K

Condição Necessária

A condição necessária de otimalidade para uma função diferenciável é que sua derivada de primeira ordem seja igual a zero. A derivada parcial da função custo c_j com respeito à potência de transmissão p_j é dada abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_j}{\partial p_j(k+1)} = 0 \implies \\ -2\beta\theta p_j^{-2\beta-1}(k+1) - \xi(-\beta+1)p_j^{-\beta}(k+1) + 2\delta p_j(k+1) = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Após alguma manipulação matemática:

$$p_j(k+1)\{-2\beta\theta p_j^{-2(\beta+1)}(k+1) + [-\xi(-\beta+1)]p_j^{-(\beta+1)}(k+1) + 2\delta\} = 0. \quad (4.23)$$

Como $p_j(k+1) = 0$ não é realizável devido à condição para a continuidade da função custo ($p_{min} > 0$), a equação anterior torna-se:

$$[-2\beta\theta]p_j^{-2(\beta+1)}(k+1) + [-\xi(-\beta+1)]p_j^{-(\beta+1)}(k+1) + 2\delta = 0. \quad (4.24)$$

A Eq. (4.24) após a seguinte mudança de variável pode ser reescrita:

$$p_j^{-(\beta+1)}(k+1) = F. \quad (4.25)$$

Logo, uma função quadrática da variável F é obtida:

$$[-2\beta\theta]F^2 + [-\xi(-\beta+1)]F + 2\delta = 0. \quad (4.26)$$

Solucionando a Eq. (4.26) em F e retornando para a variável $p_j(k+1)$ através da Eq. (4.25), obtém-se o ponto de equilíbrio de Nash, considerando $p_j(k+1) > 0$ para todo $j \in N_J$ e $k \in K^*$. Em escala logarítmica, ele é expresso como:

$$p_j(k+1)_{dBm} = \frac{1}{\beta+1} [\alpha + I_j(k+1)_{dBm} - g_j(k+1)_{dB}]. \quad (4.27)$$

Condição Suficiente

A condição suficiente de otimalidade para uma função duas vezes diferenciável é que sua derivada de segunda ordem seja diferente de zero. A derivada parcial de segunda ordem da função custo c_j com respeito à potência de transmissão p_j é expressa abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_j}{\partial p_j^2 (k+1)} &= [4\beta^2\theta + 2\beta\theta] p_j^{-2(\beta+1)} (k+1) \\ &+ [\xi\beta(1-\beta)] p_j^{-(\beta+1)} (k+1) + 2\delta, \end{aligned} \quad (4.28)$$

sendo $\theta, \xi, \delta, \beta > 0$.

Usando mais uma vez a Eq. (4.25) para efetuar uma mudança de variável, a Eq. (4.28) pode ser reescrita como uma função quadrática da variável F :

$$\frac{\partial^2 c_j}{\partial p_j^2 (k+1)} = [4\beta^2\theta + 2\beta\theta] F^2 + [\xi\beta(1-\beta)] F + 2\delta. \quad (4.29)$$

Se a derivada de segunda ordem da função custo c_j é estritamente positiva, c_j é estritamente convexa. Assim, denomina-se ϵ o valor mínimo da Eq. (4.29):

$$\epsilon = -\frac{[\xi\beta(1-\beta)]^2 - 4[4\beta^2\theta + 2\beta\theta]2\delta}{4[4\beta^2\theta + 2\beta\theta]}. \quad (4.30)$$

Fazendo $\epsilon > 0$, garante-se que a derivada de segunda ordem da função custo c_j é estritamente positiva, e a seguinte desigualdade é obtida:

$$\beta^3 < 2\beta^2 + 7\beta + 4 \implies \beta < 4. \quad (4.31)$$

Assim, a restrição imposta pela desigualdade (4.31) ao parâmetro β , juntamente com a restrição de positividade da definição deste parâmetro, asseguram a estrita convexidade da função custo c_j , definida no subconjunto $[p_{min}, p_{max}] \in \mathbb{R}$, com $p_{min} > 0$. Além disso, elas correspondem às seguintes restrições práticas com respeito aos valores extremos de potência de transmissão e de SINR-alvo:

$$0 < \rho_{max}^{t \text{ dB}} - \rho_{min}^{t \text{ dB}} < 4 [p_{max}^{dBm} - p_{min}^{dBm}]. \quad (4.32)$$

Dessa forma, o jogo H_K admite uma única solução de equilíbrio de Nash, dada pela Eq. (4.27). A continuidade da função custo c_j , para todo $j \in N_J$, é garantida com a restrição $p_{min} > 0$, enquanto que a sua minimização é garantida se as restrições da desigualdade (4.32) são satisfeitas.

Entretanto, como discutido na Subseção 4.1.1, uma rápida atuação do controle de potência é assumida, o que permite a utilização da aproximação definida pela Eq. (4.7). Isto significa que a Eq. (4.27) pode ser reescrita como:

$$p_j(k+1)_{dBm} = \frac{1}{\beta+1} [\alpha + I_j(k)_{dBm} - g_j(k)_{dB}]. \quad (4.33)$$

Se $p_j(k)_{dBm}$ é adicionado e subtraído no lado direito desta equação, ela não sofre alterações e, finalmente, o algoritmo de controle de potência GT-DPC, proposto para um sistema que oferece apenas serviços de melhor esforço, pode ser apresentado:

$$p_j(k+1)_{dBm} = \frac{1}{\beta+1} [\alpha + p_j(k)_{dBm} - \rho_j(k)_{dB}], \quad (4.34)$$

sendo que os parâmetros α e β são definidos, respectivamente, nas Eqs. (4.17) e (4.18). A Tabela 4.1 apresenta o resumo do algoritmo.

Tabela 4.1: Resumo do algoritmo GT-DPC.

Algoritmo GT-DPC	
$p_j(k+1)_{dBm} = \frac{1}{\beta+1} [\alpha + p_j(k)_{dBm} - \rho_j(k)_{dB}]$	
$\alpha = \rho_{min}^{t\ dB} + \left(\frac{\rho_{max}^{t\ dB} - \rho_{min}^{t\ dB}}{1 - \frac{p_{min}^{dBm}}{p_{max}^{dBm}}} \right); \quad \beta = \frac{\rho_{max}^{t\ dB} - \rho_{min}^{t\ dB}}{p_{max}^{dBm} - p_{min}^{dBm}}$	
Se $\rho_{max}^{t\ dB}$ e $\rho_{min}^{t\ dB}$ tendem para $\rho^{t\ dB}$:	
$p_j(k+1)_{dBm} = p_j(k)_{dBm} + \rho_{j\ dB}^t - \rho_j(k)_{dB}$	

Portanto, a formulação do controle de potência descentralizado como um jogo estático não-cooperativo de soma-não-zero, no qual cada jogador tem como objetivo a definição de uma SINR-alvo e a simultânea minimização do erro quadrático entre a SINR-alvo e a SINR atingida, apresenta como solução de equilíbrio de Nash uma forma generalizada do algoritmo DPC, apresentado na Eq. (4.8). Pode-se observar nas equações que definem os parâmetros α e β que, se os níveis máximo e mínimo da SINR-alvo, $\rho_{max}^{t\ dB}$ e $\rho_{min}^{t\ dB}$, tendem para um único valor $\rho^{t\ dB}$, os parâmetros α e β tendem, respectivamente, a $\rho^{t\ dB}$ e 0. Com isso, pode-se observar pela Eq. (4.34) que o GT-DPC aproxima-se do DPC clássico. Restrições à existência e à unicidade

do ponto de equilíbrio de Nash do jogo H_K são dadas pela desigualdade (4.32), além de a potência de transmissão ser estritamente positiva, $p_{min} > 0$.

Análise de Convergência do Algoritmo GT-DPC

Quanto à análise da convergência do algoritmo GT-DPC, ela é similar àquela realizada na subseção anterior para o DPC. De acordo com os conceitos apresentados na Subseção 2.2.1, a unicidade da solução de equilíbrio de Nash não é garantia de sua estabilidade, ou seja, a convergência do algoritmo proposto não é garantida pelo fato de a solução de equilíbrio de Nash obtida para o jogo H_K ser única.

Logo, antes de seguir os passos usados na análise de convergência do DPC, a solução de equilíbrio de Nash é escrita em escala linear:

$$p_j(k+1) = 10^{\alpha/[10(\beta+1)]} \left[\frac{I_j(k+1)}{g_j(k+1)} \right]^{\left(\frac{1}{\beta+1}\right)}. \quad (4.35)$$

Após usar a expressão da interferência-mais-ruído (Eq. (3.13)) na última equação, obtém-se o seguinte resultado:

$$p_j(k) = 10^{\alpha/[10(\beta+1)]} \left[\frac{\sum_{l=1}^N [p_l(k)g_l] + \sigma^2}{g_j} \right]^{\left(\frac{1}{\beta+1}\right)}, \quad (4.36)$$

sendo $l \neq j$ e g_j o ganho de canal do jogador j , $j \in N_J$. Assumindo a validade da Eq. (4.9):

$$p_j^* = \lim_{k \rightarrow \infty} 10^{\alpha/[10(\beta+1)]} \left[\frac{\sum_{l=1}^N [p_l(k)g_l] + \sigma^2}{g_j} \right]^{\left(\frac{1}{\beta+1}\right)}. \quad (4.37)$$

Retornando à discussão com respeito à Eq. (4.7), conclui-se que o desvio da solução de equilíbrio de Nash no instante $k+1$ corresponde à situação em que os jogadores reajustam suas ações simultaneamente em resposta às mais recentes ações dos outros jogadores. Assim, usando a Eq. (4.10):

$$p_j(k+1) = 10^{\alpha/[10(\beta+1)]} \left[\frac{\sum_{l=1}^N [p_l(k)g_l] + \sigma^2}{g_j} \right]^{\left(\frac{1}{\beta+1}\right)}. \quad (4.38)$$

Logo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_j(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_j(k) = p_j^*, \quad \forall j \in N_J. \quad (4.39)$$

A solução de equilíbrio de Nash foi mostrada ser única e, além disso, estável.

Portanto, a convergência do algoritmo GT-DPC está assegurada.

4.1.3 Análise de Desempenho do Algoritmo GT-DPC

O algoritmo de controle de potência proposto na Subseção 4.1.2 está inserido no contexto de sistemas que oferecem apenas serviços de melhor esforço. Para avaliar o desempenho deste algoritmo, o DPC é escolhido como referência e simulações computacionais em um ambiente de enlace direto de um sistema TDMA são realizadas. Apesar de o DPC não contemplar características importantes dos serviços de melhor esforço (conforme as análises das duas subseções anteriores), as comparações entre os algoritmos são realizadas de maneira justa. A estrutura celular e o padrão de radiação das antenas do sistema estão descritos na Subseção 3.1.1.

Os modelos de perda de percurso, de sombreamento e de desvanecimento de pequena escala também são apresentados naquela subseção. No modelo simplificado de perda de percurso, o expoente de perda de percurso é definido igual a 4 e a perda de percurso na borda do setor, ou seja, a 1 km de distância da ERB, é assumida igual a 120 dB. O sombreamento é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade log-normal de média zero e desvio-padrão de 6 dB. O desvanecimento de pequena escala é implementado seguindo o modelo de Jakes, com frequência de espalhamento Doppler de 18,5 Hz, devido à frequência da portadora, de 2 GHz, e à velocidade dos usuários, de 10 km/h. A Figura 4.3 mostra a evolução temporal do ganho de canal para um usuário posicionado aleatoriamente no *grid* celular.

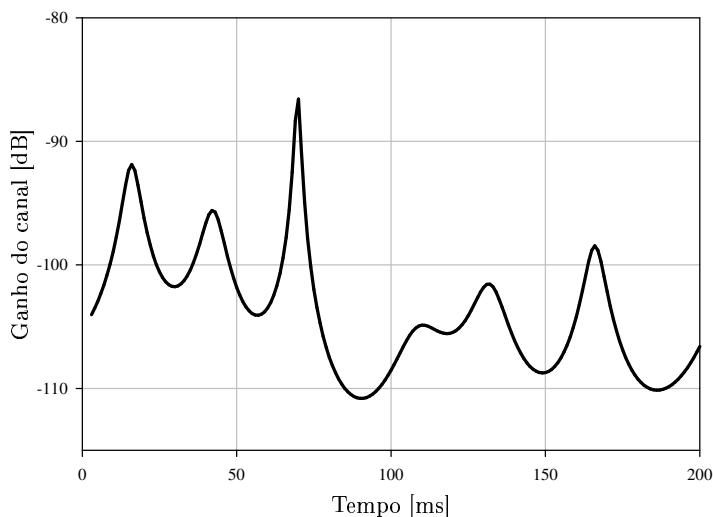


Figura 4.3: Amostra da evolução temporal do ganho de canal de um usuário.

O cenário de teste tem os seus principais parâmetros definidos na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Cenário de teste para sistemas de serviço único (melhor esforço).

Parâmetro	Valor
<i>Grid</i> Celular	Padrão de reuso 1/3 (uma camada de interferentes)
Raio da Célula	1 km
Padrão de Radiação da Antena	Ideal (ganho de -200 dBi fora do setor)
Frequência de operação	2 GHz
Mobilidade	Velocidade de 10 km/h
Perda de percurso	$PL(\varepsilon) = 120 + 40 \log_{10}(\varepsilon)$ dB
Desvanecimento de larga escala	Média zero, desvio-padrão 6 dB
Desvanecimento de pequena escala	Modelo de Jakes
Potência do ruído térmico	-110 dBm
Potência máxima de transmissão	35 dBm
Potência mínima de transmissão	-70 dBm
Frequência de atuação	1 kHz
Número de iterações	600

As simulações são estruturadas em *snapshots*. Durante um *snapshot*, uma amostra de perda de percurso e de sombreamento é usada, enquanto uma amostra do desvanecimento de pequena escala é considerada para cada iteração do controle de potência. A frequência de atuação do algoritmo de controle de potência é 1kHz e cada *snapshot* comporta até 600 iterações. Outros parâmetros de simulação importantes são a potência média do ruído térmico e as potências de transmissão mínima e máxima, respectivamente assumidas -110 dBm, -70 dBm e 35 dBm.

Dois diferentes cenários com respeito aos níveis mínimo e máximo da SINR-alvo foram considerados para a avaliação do algoritmo proposto para serviços de melhor esforço:

Cenário 1: $\rho^t \in [8, 30]$ dB,

Cenário 2: $\rho^t \in [8, 60]$ dB.

A Figura 4.4 apresenta uma amostra da evolução da SINR obtida por um usuário em um *snapshot* típico para o GT-DPC em ambos os cenários e para o DPC, com dois valores de SINR-alvo, 10 dB e 25 dB. Neste *snapshot*, três usuários de serviços de melhor esforço são posicionados aleatoriamente no *grid* celular. A mesma configuração do sistema e as mesmas amostras de desvanecimento são usadas para a obtenção de todas as curvas. Observa-se que o conjunto de parâmetros (potências de transmissão e SINRs-alvo) satisfaz as restrições para a existência de um ponto de equilíbrio de Nash.

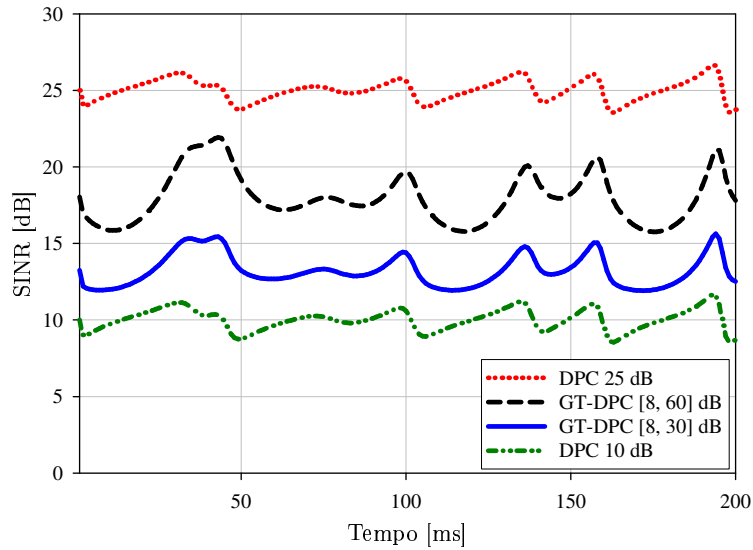


Figura 4.4: Amostra da evolução da SINR para os algoritmos de controle de potência DPC e GT-DPC.

Pode-se observar claramente que através do algoritmo GT-DPC o usuário obtém SINRs intermediárias com relação às SINRs-alvo do DPC (10 dB e 25 dB). A obtenção de níveis mais altos de SINR exige mais altos níveis de potência, o que significa maior consumo de energia. Entretanto, o valor absoluto do nível de potência, individualmente, não é um parâmetro adequado para a análise de desempenho de algoritmos de controle de potência.

A eficiência energética é uma das mais desejáveis características destes algoritmos. Para avaliar a eficiência em energia do algoritmo proposto em comparação ao DPC, um modelo simplificado de mapeamento de qualidade de enlace em taxa de transmissão, usado em [66] para sistemas EGPRS, é adotado. Este modelo relaciona, linearmente, a SINR à taxa de transmissão da seguinte maneira:

$$\overline{T}_x = 2\overline{\rho}, \quad (4.40)$$

sendo \overline{T}_x a taxa de transmissão média e $\overline{\rho}$ a SINR média.

Dessa forma, a eficiência energética, η_E , expressa em termos de quantidade de bits transmitidos por unidade de energia, pode ser calculada através da expressão abaixo:

$$\eta_E = \frac{[\text{bits}]}{[\text{Joule}]} \frac{[s]}{[s]} \implies \eta_E = \frac{\overline{T}_x}{\overline{\rho}} \left[\frac{\text{bits/s}}{W} \right], \quad (4.41)$$

sendo \bar{p} a potência média de transmissão.

A Tabela 4.3 contém os resultados referentes à eficiência em energia para o usuário cuja evolução da SINR em um *snapshot* típico é ilustrada na Figura 4.4. O algoritmo proposto apresenta maior eficiência do que o DPC tradicional.

Tabela 4.3: Eficiência energética do usuário cuja evolução da SINR é mostrada na Figura 4.4.

Algoritmo	Eficiência Energética
DPC $\rho^t = 10$ dB	2317 kbits/Joule
DPC $\rho^t = 25$ dB	2317 kbits/Joule
GT-DPC $\rho^t \in [8, 30]$ dB	2661 kbits/Joule
GT-DPC $\rho^t \in [8, 60]$ dB	3048 kbits/Joule

Porém, estes são resultados de apenas um *snapshot*. Com o propósito de demonstrar a superioridade do algoritmo GT-DPC com relação ao DPC para serviços de melhor esforço, 10.000 *snapshots* para cada carga do sistema foram simulados. Os dois cenários (Cenário 1 e Cenário 2) definidos anteriormente são considerados. A Figura 4.5 ilustra a taxa de transmissão média por usuário em ambos os cenários, obtida tanto com o GT-DPC quanto com o DPC.

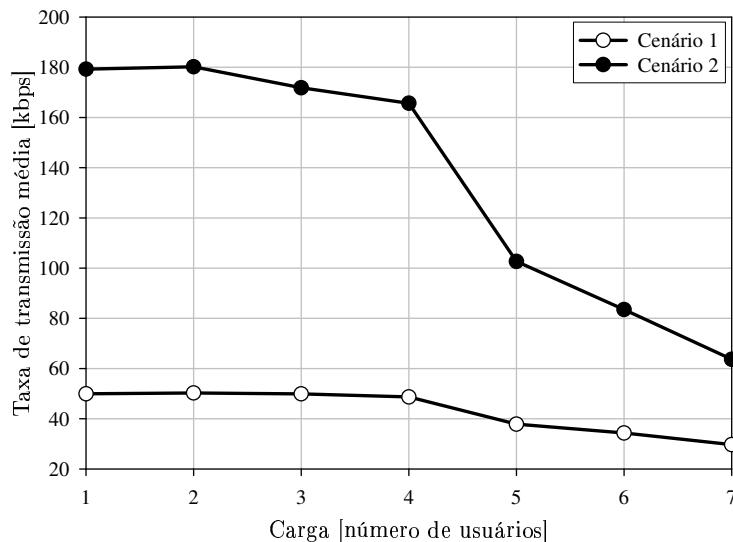


Figura 4.5: Taxa de transmissão média obtida pelos algoritmos em ambos os cenários e para todas as cargas.

O desempenho dos algoritmos em relação à eficiência energética é apresentado na Figura 4.6. Em ambos os cenários, o algoritmo GT-DPC proporciona maiores

níveis de eficiência em energia do que o DPC. Em conformidade com as expressões analíticas dos algoritmos, uma menor flexibilidade na escolha da SINR-alvo (inclinação menos acentuada da reta na Figura 4.1) implica uma aproximação entre eles. Pode-se verificar isto claramente na Figura 4.6, pois no Cenário 1, em que os valores extremos de SINR-alvo são mais próximos, as curvas dos algoritmos estão mais próximas uma da outra do que no Cenário 2.

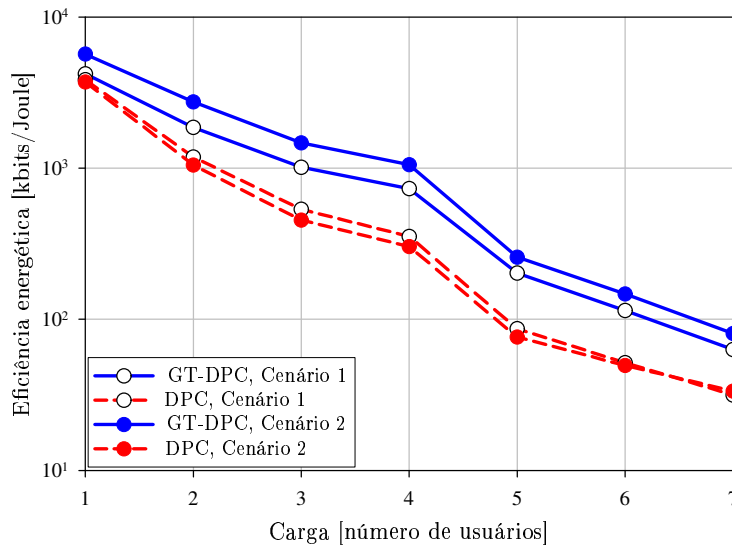


Figura 4.6: Eficiência energética proporcionada pelo DPC e pelo algoritmo proposto GT-DPC em ambos os cenários e para todas as cargas.

É importante observar o ganho em taxa de transmissão média obtido pelo algoritmo GT-DPC com relação ao DPC. A Figura 4.7 mostra que, para cargas altas (quatro ou mais usuários), o DPC no Cenário 1 e o GT-DPC no Cenário 2 operam com níveis comparáveis de potência de transmissão média. Porém, a taxa de transmissão média no Cenário 2 é consideravelmente mais alta do que a do Cenário 1, como mostrado na Figura 4.5.

Um outro resultado interessante, que enfatiza a superioridade do algoritmo GT-DPC com relação ao DPC, refere-se à capacidade de manter o nível de SINR igual ou superior ao nível que corresponde à mínima qualidade de enlace requerida. Nos sistemas celulares reais, manter o nível da SINR acima deste limiar é difícil, especialmente para cargas altas. Por isso, uma margem abaixo do limiar da SINR é prevista, na qual a qualidade de sinal é ainda assumida aceitável.

Então, a fração do tempo média em que a SINR está 1 dB abaixo da SINR limiar, que é considerada igual a 8 dB, é calculada. Esta diferença entre o limiar da SINR

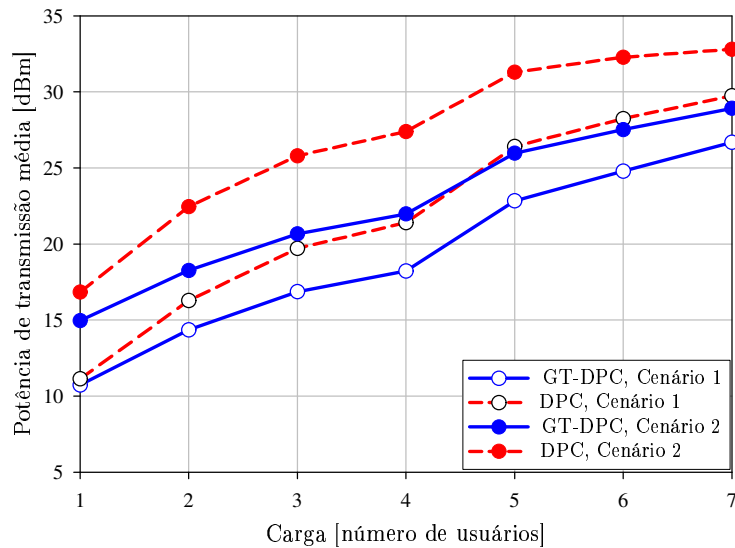


Figura 4.7: Potência de transmissão média exigida pelo DPC e pelo algoritmo proposto GT-DPC em ambos os cenários e para todas as cargas.

e a SINR que corresponde à qualidade mínima aceitável pode ser vista como uma margem de proteção.

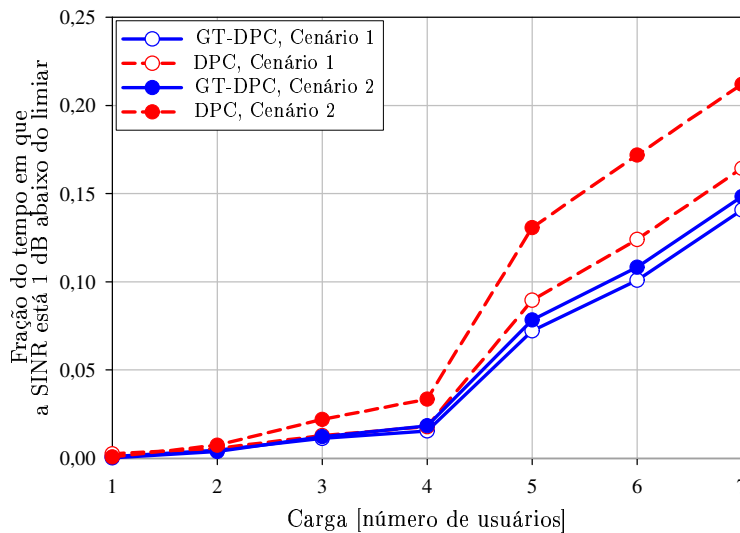


Figura 4.8: Fração do tempo em que a SINR está 1 dB abaixo da SINR limiar.

Esta capacidade é apresentada na Figura 4.8. A robustez do GT-DPC com respeito à garantia das exigências mínimas de operação para altas cargas e altas taxas de transmissão (Cenário 2) pode ser observada.

Portanto, o GT-DPC mostra-se mais eficiente em termos de energia do que o

DPC convencional para todas as cargas. Além disso, também apresenta uma maior robustez contra qualidade insuficiente de enlace, principalmente para altas cargas e altas taxas de transmissão média.

4.2 Jogo de Controle de Potência em Sistema de Múltiplos Serviços

O atendimento à crescente demanda por serviços multimídia é um dos grandes desafios dos sistemas celulares. Estes serviços podem ser agrupados, de acordo com a classificação apresentada no início do Capítulo 4, em serviços de QoS garantido e serviços de melhor esforço. Serviços dos dois tipos coexistem já nos sistemas celulares atuais.

Na Subseção 4.2.1, o problema do controle de potência é, então, formulado como um jogo no contexto de um sistema que oferece simultaneamente serviços de QoS garantido e serviços de melhor esforço. Um novo algoritmo, que leva em consideração as características de cada tipo de serviço, é desenvolvido e suas propriedades de convergência são demonstradas. Este algoritmo é denominado GT-MSDPC (do inglês *Game-Theoretic Multi-Service Distributed Power Control*).

Mais uma vez, a modelagem apresentada na formulação do problema de controle de potência na Subseção 3.2.1 será utilizada. As Subseções 4.1.1 e 4.1.2, tratam do cenário de serviço único, mas contêm muitas informações comuns ao cenário de serviços múltiplos agora em questão.

4.2.1 Algoritmo de Controle de Potência Proposto para Múltiplos Serviços

Seja $GH_K = [N_J, \{\Gamma_m\}, \{c_m\}]$ o jogo estático não-cooperativo de soma-não-zero do controle de potência de um sistema celular que oferece, simultaneamente, serviços de QoS garantido e serviços de melhor esforço. O jogo é composto por K estágios (ou atuações do controle de potência). Os transmissores constituem o conjunto $N_J = \{1, \dots, N\}$ de jogadores; o conjunto contínuo de potências $\Gamma_m = [p_{m_{min}}, p_{m_{max}}]$ é o espaço de estratégias do jogador m , para todo $m \in N_J$; finalmente, c_m é a função custo do jogador m , para todo $m \in N_J$. Novamente, de maneira a simplificar o desenvolvimento matemático, mas sem qualquer perda de generalidade, um único espaço de estratégias é considerado para todos os jogadores: $\Gamma_m = [p_{min}, p_{max}]$, para todo $m \in N_J$.

Há duas classes de jogadores: aqueles cujos serviços têm QoS garantido e aqueles

cujos serviços são de melhor esforço. Elas são associadas, respectivamente, aos índices i e j , e suas funções custo são denotadas por c_i e c_j .

O vetor de potências $\mathbf{p}(k) = [p_1(k), \dots, p_N(k)]^T$ é definido no instante k do jogo em termos das potências selecionadas por todos os jogadores. O vetor constituído pelos elementos de $\mathbf{p}(k)$, exceto o m -ésimo elemento é denominado $\mathbf{p}_{-m}(k)$. As estratégias dos jogadores no jogo GH_K são definidas abaixo:

$$\min_{p_i(k+1) \in \Gamma_m} \{c_i(p_i(k+1), \mathbf{p}_{-i}(k+1)) = |\rho_i^t - \rho_i(k+1)|^2\} \quad (4.42)$$

e

$$\min_{p_j(k+1) \in \Gamma_m} \{c_j(p_j(k+1), \mathbf{p}_{-j}(k+1)) = |\rho_j^t(k+1) - \rho_j(k+1)|^2\}, \quad (4.43)$$

sendo ρ_i^t a SINR-alvo fixa para o jogador i , $i \in N_J$, $\rho_j^t(k+1)$ a SINR-alvo ajustável para o jogador j , $j \in N_J$, e $\rho_m(k+1)$ a SINR percebida por qualquer jogador m no instante $k+1$, para todo $m \in N_J$ e $k \in K^*$.

Logo, no instante k , cada jogador i tem o objetivo de determinar o seu próprio nível de potência para o próximo instante, de tal maneira a atingir a SINR-alvo. Por outro lado, o objetivo de cada jogador j é, simultaneamente, determinar uma SINR-alvo apropriada e a potência de transmissão necessária para alcançá-la na próxima atuação do controle de potência. As funções custo c_i e c_j são adequadas, pois para serviços de QoS garantido os altos níveis de SINR não resultam em ganhos de desempenho, enquanto que, no caso dos serviços de melhor esforço, altos níveis de SINR implicam altas taxas de transmissão. Contudo, para ambos os tipos de serviço, a utilização de níveis de potência impróprios, ou seja, que resultem em SINR muito distante (mais alta ou mais baixa) da SINR-alvo, é penalizada com um alto custo. Esta é uma das importantes características da formulação proposta, pois se leva a um ponto de operação que satisfaz os critérios de qualidade de maneira eficiente em termos de energia.

O critério de escolha da SINR-alvo para os serviços de melhor esforço, em função da potência necessária para atingí-la, é o mesmo apresentado na Subseção 4.1.2. Ele é representado pela Eq. (4.16), reproduzida abaixo, e pela Figura 4.1. Os parâmetros α e β são descritos pelas Eqs. (4.17) e (4.18).

$$\rho_j^t(k+1)_{dB} = \alpha - \beta p_j(k+1)_{dBm}.$$

Então, é necessário determinar um conjunto de potências de transmissão com o qual todos os jogadores fiquem satisfeitos com o seu próprio custo, dadas as potências escolhidas pelos outros jogadores. Este conjunto corresponde a um ponto de equilíbrio. O ponto de equilíbrio de Nash é, mais uma vez, uma solução adequada para o problema. Formalmente, o vetor de potências de transmissão $\mathbf{p}^*(k) = [p_1^*(k), \dots, p_N^*(k)]$ é um ponto de equilíbrio de Nash do jogo GH_K se, para todo $m \in N_J$, a expressão abaixo é válida:

$$c_m(p_m^*(k+1), \mathbf{p}_{-m}^*(k+1)) \leq c_m(p_m(k+1), \mathbf{p}_{-m}^*(k+1)). \quad (4.44)$$

O Teorema 1, enunciado e demonstrado na Subseção 2.2.1, é mais uma vez utilizado na definição das condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução de equilíbrio de Nash.

O espaço de estratégias $\Gamma_m = [p_{min}, p_{max}]$ do jogo de controle de potência GH_K é um subconjunto fechado, limitado e convexo do espaço euclidiano \mathbb{R} , para todo $m \in N_J$. A seguir, são apresentadas as demais condições para a existência de uma solução de equilíbrio de Nash.

Continuidade da Função Custo

Para provar a existência de uma solução de equilíbrio de Nash para o jogo GH_K , é necessário garantir a continuidade da função custo c_m , para todo $m \in N_J$, com respeito a todos os seus argumentos. Para isso, as funções custo de ambos os tipos de serviço em termos das potências de transmissão são apresentadas. A Eq. (4.45) descreve a função custo para os serviços de QoS garantido:

$$c_i = \rho^{t^2} - 2\rho^t \left[\frac{g_i(k+1)}{I_i(k+1)} \right] p_i(k+1) + \left[\frac{g_i(k+1)}{I_i(k+1)} \right]^2 p_i^2(k+1). \quad (4.45)$$

Ela é contínua com respeito a todos os seus argumentos, como discutido na Subseção 4.1.1.

A função custo do jogador j é a mesma descrita pela Eq. (4.20), reproduzida abaixo:

$$c_j = \theta p_j^{-2\beta}(k+1) - \xi p_j^{-\beta+1}(k+1) + \delta p_j^2(k+1),$$

com θ , ξ e δ definidos na Eq. (4.21).

Na Subseção 4.1.2 a continuidade da função custo c_j com respeito a todos os seus argumentos é discutida. Uma restrição é encontrada para a continuidade da função custo c_j : $p_j(k+1) \neq 0$, $j \in N_J$. Logo, a definição de $p_{min} > 0$ se mostra razoável e assegura a continuidade de ambas as funções custo.

Resta, no entanto, garantir a estrita convexidade, para todo $m \in N_J$, da função custo c_m na variável p_m para todo $p_l \in \Gamma_l$, $l \in N_J$, $l \neq m$, para provar a existência de uma solução única de equilíbrio de Nash única para o jogo GH_K .

Ponto de Equilíbrio de Nash do Jogo GH_K

A condição necessária de otimalidade para uma função diferenciável é que sua derivada de primeira ordem seja igual a zero. Considerando os serviços de QoS garantido, obtém-se:

$$\frac{\partial c_i}{\partial p_i(k+1)} = 0 \implies p_i(k+1) = \rho^t \frac{I_i(k+1)}{g_i(k+1)}. \quad (4.46)$$

Todo o desenvolvimento desta mesma condição de otimalidade para os serviços de melhor esforço está presente na Subseção 4.1.2, tendo como resultado importante a seguinte expressão:

$$p_j(k+1)_{dBm} = \frac{1}{\beta+1} [\alpha + I_j(k+1)_{dBm} - g_j(k+1)_{dB}]. \quad (4.47)$$

A condição suficiente de otimalidade para uma função duas vezes diferenciável é que sua derivada de segunda ordem seja diferente de zero. A derivada parcial de segunda ordem da função custo para serviços de QoS garantido, c_i , com respeito à potência de transmissão p_i , $i \in N_J$, é estritamente positiva. Logo, a convexidade estrita da função custo c_i é formalmente assegurada (ver Subseção 4.1.1).

Por outro lado, considerando a derivada parcial de segunda ordem da função custo para serviços de melhor esforço, c_j , com respeito à potência de transmissão p_j , $j \in N_J$, foram obtidas, na Subseção 4.1.2, as seguintes restrições para a convexidade estrita da função custo c_j :

$$0 < \rho_{max}^t \frac{dB}{dB} - \rho_{min}^t \frac{dB}{dB} < 4 [p_{max}^{dBm} - p_{min}^{dBm}]. \quad (4.48)$$

A suposição de uma rápida atuação do controle de potência permite o uso da aproximação descrita pela Eq. (4.7). Logo, o algoritmo GT-MSDPC (do inglês *Game-Theoretic Multi-Service Distributed Power Control*), em escala logarítmica, é definido abaixo.

Serviços de QoS garantido:

$$p_i(k+1)_{dBm} = p_i(k)_{dBm} + \rho_{dB}^t - \rho_i(k)_{dB}. \quad (4.49)$$

Serviços de melhor esforço:

$$p_j(k+1)_{dBm} = \frac{1}{\beta+1} [\alpha + p_j(k)_{dBm} - \rho_j(k)_{dB}], \quad (4.50)$$

sendo α e β parâmetros descritos pelas Eqs. (4.17) e (4.18), respectivamente.

Em resumo, o problema do controle de potência descentralizado para sistemas que oferecem múltiplos serviços foi modelado como um jogo estático não-cooperativo de soma-não-zero. Neste jogo, dois tipos de serviço coexistem, sendo que as características individuais de cada tipo de serviço estão refletidas na formulação do jogo. Através dos conceitos da solução de equilíbrio de Nash, obtém-se como resultado do jogo uma generalização do algoritmo clássico de controle de potência DPC, como discutido nas Subseções 4.1.1 e 4.1.2.

As únicas restrições para a existência e a unicidade do ponto de equilíbrio de Nash do jogo GH_K são a positividade da potência de transmissão, $p_{min} > 0$, e as desigualdades refletidas na Eq. (4.48). Quanto à convergência do algoritmo GT-MSDPC, as análises de convergência das Subseções 4.1.1 e 4.1.2, que trataram, respectivamente, dos algoritmos DPC e GT-DPC para o cenário de serviço único, são suficientes para o caso de sistemas que oferecem múltiplos serviços, pois as expressões dos algoritmos para os serviços de QoS garantido e de melhor esforço neste cenário de múltiplos serviços são as mesmas do cenário de serviço único.

4.2.2 Análise de Desempenho do Algoritmo GT-MSDPC

O algoritmo de controle de potência GT-MSDPC (do inglês *Game-Theoretic Multi-Service Distributed Power Control*), proposto na Subseção 4.2.1, está inserido no contexto de sistemas que oferecem simultaneamente serviços de QoS garantido e serviços de melhor esforço. A avaliação do desempenho deste algoritmo tem como foco a observação da capacidade de garantir os requisitos de qualidade destes dois diferenciados tipos de serviço em um sistema que os integra. Esta avaliação é aqui

realizada através de simulações computacionais em um ambiente de enlace reverso de um sistema CDMA. A estrutura celular do sistema adotado, bem como os modelos de perda de percurso, de sombreamento e de desvanecimento de pequena escala, estão descritos na Subseção 3.1.1.

No modelo simplificado de perda de percurso, o valor 4 para o seu expoente é assumido. A perda de percurso na borda do setor, ou seja, a 1,5 km de distância da ERB, é considerada igual a 120 dB. O sombreamento é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade log-normal de média zero e desvio-padrão de 6 dB. O desvanecimento de pequena escala é implementado seguindo o modelo de Jakes, com frequência de espalhamento Doppler de 18,5 Hz, devido à frequência da portadora de 2 GHz e à velocidade de deslocamento dos usuários de 10 km/h. O cenário de teste tem os seus principais parâmetros definidos na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Cenário de teste para sistemas de múltiplos serviços.

Parâmetro	Valor
Grid Celular	Célula única, padrão de reuso de frequência 1/1
Raio da Célula	1,5 km
Padrão de Radiação da Antena	Ideal (ganho de 0 dBi)
Frequência de operação	2 GHz
Mobilidade	Velocidade de 10 km/h
Perda de percurso	$PL(\varepsilon) = 120 + 40 \log_{10}(\varepsilon)$ dB
Desvanecimento de larga escala	Média zero, desvio-padrão 6 dB
Desvanecimento de pequena escala	Modelo de Jakes
Potência do ruído térmico	-110 dBm
Potência máxima de transmissão	21 dBm
Potência mínima de transmissão	-70 dBm
Ganho de processamento	21 dB
Frequência de atuação	1 kHz
Número de iterações	600

As simulações são estruturadas em *snapshots*. Durante um *snapshot*, uma amostra de perda de percurso e de sombreamento é usada, enquanto uma amostra do desvanecimento de pequena escala é considerada para cada iteração do controle de potência. A frequência de atuação do algoritmo de controle de potência é 1 kHz e cada *snapshot* comporta até 600 iterações. Outros parâmetros de simulação importantes são a potência média do ruído térmico e as potências de transmissão mínima e máxima, respectivamente assumidas -110 dBm, -70 dBm e 21 dBm. No sistema CDMA há ainda o ganho de processamento, comentado na Subseção 3.1.1,

considerado 21 dB na condução destas simulações.

Os serviços de melhor esforço têm como níveis mínimo e máximo de SINR-alvo (após o desespalhamento espectral) 8 dB e 15 dB, respectivamente. O nível de SINR que corresponde à mínima qualidade de enlace aceitável para os serviços de QoS garantido é assumido igual a 6 dB, sendo este, portanto, o valor da SINR-alvo para tais serviços. Observe que as condições necessárias e suficientes para a existência de um único ponto de equilíbrio de Nash são satisfeitas por este conjunto de parâmetros.

O seguinte cenário de carga mista do sistema é considerado como cenário de teste: 20 usuários de serviços de QoS garantido e 5 usuários de serviços de melhor esforço. Este é um cenário de carga alta, pois para o nível de SINR mínimo aceitável (6 dB) a capacidade de pólo (número máximo teórico de usuários simultaneamente conectados a uma ERB) é de 32 usuários, como descrito em [38].

Inicialmente, o desvanecimento de pequena escala é desconsiderado com o objetivo de avaliar a convergência do algoritmo de controle de potência proposto para múltiplos serviços e a sua capacidade de atender aos requisitos de qualidade dos diferentes tipos de serviço. Para esta análise, a evolução temporal da SINR dos usuários em um *snapshot* típico do cenário de teste é mostrada na Figura 4.9. Para não tornar difícil a visualização da figura, apenas 1 dos 20 usuários de QoS garantido e 2 dos 5 usuários de melhor esforço têm a evolução de sua SINR ilustrada na figura. Entretanto, os demais usuários obtiveram curvas semelhantes às dos usuários selecionados. Os valores extremos de potência de transmissão são usados como potência inicial e, em todos os casos, poucas iterações do algoritmo são necessárias para a convergência da SINR de cada usuário para aquela que corresponde ao nível de potência de transmissão determinado pelo ponto de equilíbrio de Nash.

Os resultados ilustrados na Figura 4.9 não são significativos para a avaliação do desempenho do algoritmo GT-MSDPC com relação à garantia dos requisitos de qualidade de ambos os tipos de serviço, pois retrata apenas aspectos de convergência e somente em um *snapshot*. Por isso, uma simulação de 10.000 *snapshots* é realizada. A Figura 4.10 apresenta as curvas da função de distribuição cumulativa (CDF, do inglês *Cumulative Distribution Function*) da SINR obtida pelo algoritmo GT-MSDPC para ambos os tipos de serviço no cenário de teste de carga mista. Além disso, esta figura também traz a curva da CDF da SINR para o cenário de serviço único (QoS garantido) correspondente, ou seja, para a mesma carga total de 25 usuários do cenário de teste.

Observe que, com respeito aos usuários de serviços de QoS garantido, o

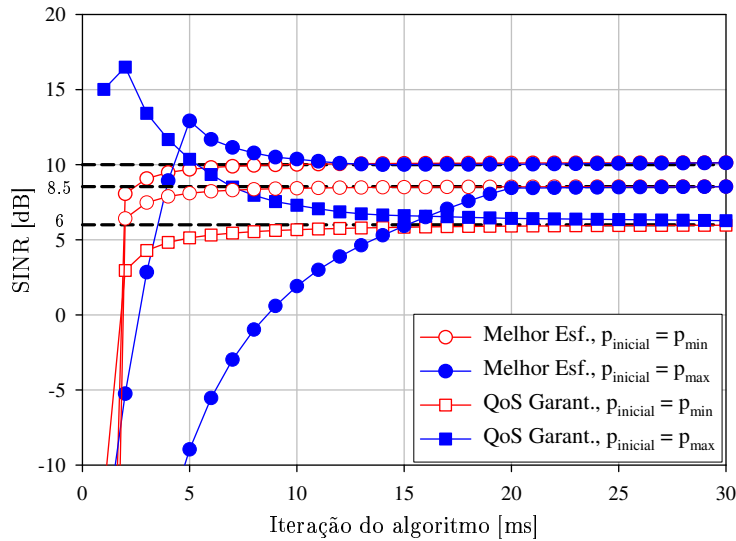


Figura 4.9: Curvas de convergência da SINR obtida pelo algoritmo GT-MSDPC para um cenário de múltiplos serviços com potência de transmissão inicial mínima e máxima.

desempenho do algoritmo GT-MSDPC no cenário de múltiplos serviços é comparável ao desempenho do DPC convencional no cenário de serviço único correspondente. Logo, pode-se concluir que o algoritmo proposto consegue absorver o impacto da presença de usuários de serviços de melhor esforço no sistema, que apresentam requisitos de qualidade superiores aos dos usuários de serviços de QoS garantido.

Além disso, ainda na Figura 4.10, os usuários dos serviços de melhor esforço experimentam níveis de SINR concordantes com os definidos nos parâmetros do algoritmo, entre 8 dB e 15 dB. Um outro resultado interessante com relação aos usuários dos serviços de melhor esforço é a alta probabilidade de seus níveis de SINR estarem acima do nível mínimo requisitado. No cenário considerado, esta probabilidade é de aproximadamente 93%.

É sempre interessante avaliar o comportamento de um algoritmo de controle de potência em um ambiente dinâmico, isto é, na presença do desvanecimento de pequena escala. Para isso, uma nova simulação de 10.000 *snapshots* foi realizada. A Figura 4.11 apresenta as mesmas curvas de CDF mostradas na Figura 4.10, mas agora considerando os efeitos do desvanecimento de pequena escala.

Observe nas Figuras 4.10 e 4.11 que do ambiente estático para o dinâmico há uma degradação em termos absolutos do desempenho dos algoritmos em todas as curvas de CDF. Porém, para os usuários de serviços de QoS garantido, a passagem do

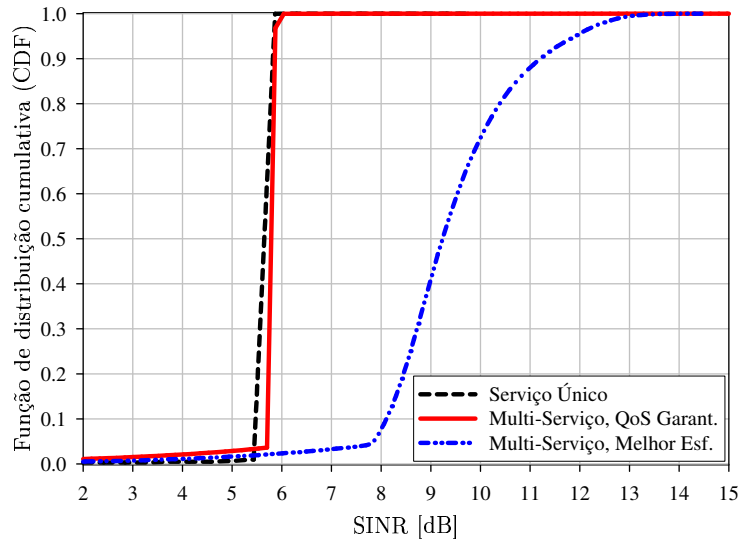


Figura 4.10: Curvas da CDF da SINR obtida pelo algoritmo DPC para cenários de serviço único e GT-MSDPC para cenários de múltiplos serviços.

cenário estático para o dinâmico indica uma degradação de desempenho do algoritmo GT-MSDPC maior do que a degradação de desempenho observada por usuários deste tipo de serviço em um sistema de serviço único.

Quanto aos usuários dos serviços de melhor esforço, a probabilidade dos níveis de SINR estarem abaixo do nível mínimo requisitado é de aproximadamente 13%. Portanto, há também neste caso uma degradação do desempenho do algoritmo GT-MSDPC no ambiente dinâmico, mas, apesar disso, pode-se considerar que um alto nível de satisfação é atingido pelos usuários de serviços de melhor esforço, já que estes valores são relativos a um cenário de carga alta.

Com o objetivo de observar o grau de precisão no rastreamento da SINR-alvo do algoritmo proposto para sistemas de múltiplos serviços, o valor médio das funções custo dos usuários no cenário de teste de carga mista é comparado ao valor médio das funções custo dos usuários no sistema de serviço único (QoS garantido) correspondente, com 25 usuários. Estes valores, expostos na Tabela 4.5, além de exprimirem o grau de precisão no rastreamento da SINR-alvo, comprovam a viabilidade do algoritmo GT-MSDPC para usuários de serviços de melhor esforço com relação ao ajuste da SINR-alvo.

Uma outra métrica de avaliação da capacidade de um algoritmo de controle de potência quanto ao atendimento dos requisitos de qualidade é a fração do tempo média em que o nível de SINR é igual ou superior ao nível que corresponde à mínima

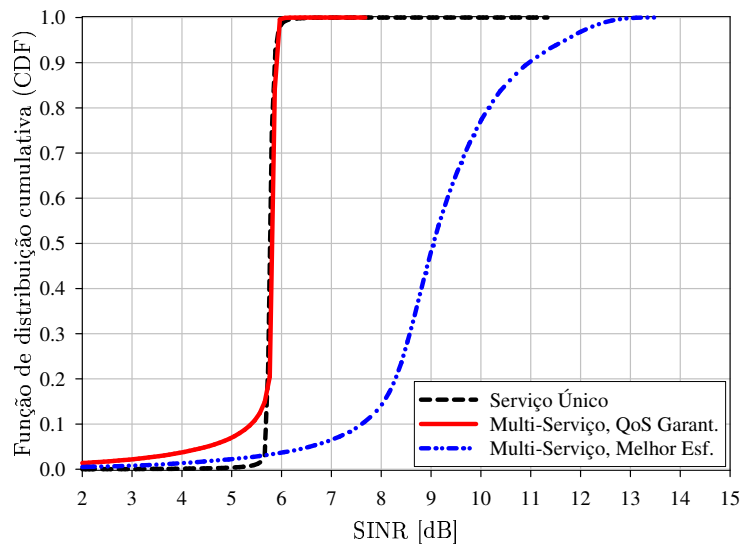


Figura 4.11: Curvas da CDF da SINR obtida pelo algoritmo DPC para cenários de serviço único e GT-MSDPC para cenários de múltiplos serviços com a presença de desvanecimento de pequena escala.

Tabela 4.5: Erro quadrático médio entre a SINR-alvo e a SINR atingida.

Algoritmo	Erro Quadrático Médio
DPC (serviço único)	-2.80 dB
GT-MSDPC (múltiplos serviços)	-1.26 dB

qualidade de enlace requerida. Nos sistemas celulares reais, manter o nível da SINR acima deste limiar é difícil, especialmente para cargas altas. Por isso, uma margem abaixo do limiar da SINR é adotada, na qual a qualidade de sinal é ainda assumida aceitável. A diferença entre o limiar da SINR e a SINR que corresponde à qualidade mínima aceitável pode ser vista como uma margem de proteção.

Então, a fração do tempo média em que a SINR está 1 dB abaixo da SINR limiar para cada tipo de serviço (6 dB para os serviços de QoS garantido e 8 dB para os serviços de melhor esforço) é apresentada na Tabela 4.6 para o cenário de teste (20 usuários de serviços de QoS garantido e 5 usuários de serviços de melhor esforço). Com o objetivo de analisar o impacto da inserção de usuários de serviços de melhor esforço em um sistema inicialmente de serviço único (somente QoS garantido), a Tabela 4.6 também fornece informações sobre este sistema de serviço único, com 25 usuários. Mais uma vez fica comprovada a capacidade do algoritmo GT-MSDPC de atender aos requisitos de qualidade de grande parte dos usuários em um cenário

de múltiplos serviços com carga alta.

Tabela 4.6: Fração do tempo média em que a SINR está 1 dB abaixo da SINR limiar no cenário de teste.

Cenário	Tipo de Serviço	
	QoS Garantido	Melhor Esforço
Serviço Único	0.1063	-
Múltiplos Serviços	0.1527	0.0768

Portanto, o algoritmo de controle de potência proposto para sistemas que oferecem múltiplos serviços mostra-se apto a realizar o compartilhamento dos recursos de potência do sistema entre todos os usuários, independentemente do seu tipo de serviço. O seu desempenho é satisfatório, pois, mesmo em um cenário de carga alta, é alta a probabilidade de ele ser capaz de assegurar os requisitos mínimos de qualidade de ambos os tipos de serviço.

4.3 Conclusões

Neste capítulo, o problema do controle de potência descentralizado em redes celulares foi abordado como um jogo estático não-cooperativo de soma-não-zero. Dois grandes cenários foram considerados: sistemas de serviço único e sistemas de múltiplos serviços.

Os serviços foram classificados em serviços de QoS garantido e serviços de melhor esforço. Com o intuito de representar bem as características de cada tipo de serviço e o objetivo de cada usuário, uma função custo foi associada a cada um dos tipos de serviço. A função custo dos usuários de serviços de QoS garantido é o erro quadrático entre a SINR-alvo fixa e a SINR atingida, enquanto que a dos usuários de serviços de melhor esforço é também o erro quadrático entre a SINR-alvo e a SINR atingida, porém a SINR-alvo é ajustável e acoplada à potência de transmissão necessária para atingí-la.

Os dois tipos de serviço foram estudados, em separado, no cenário de serviço único. Para o serviço de QoS garantido, a abordagem do problema do controle de potência através da teoria dos jogos na Subseção 4.1.1 revelou que o ponto de equilíbrio de Nash do jogo resulta na solução obtida pelo algoritmo DPC convencional. Enquanto isso, o cenário de serviço único que oferece apenas serviços de melhor esforço foi abordado na Subseção 4.1.2. Nele, o problema também foi formulado como um jogo e um novo algoritmo descentralizado de controle de

potência foi desenvolvido. Foi mostrado que o algoritmo proposto GT-DPC se constitui em uma forma generalizada do algoritmo DPC. Na Subseção 4.1.3, os resultados das simulações computacionais realizadas no cenário de único serviço foram apresentados. A superioridade do GT-DPC com relação ao algoritmo DPC convencional quanto à eficiência em energia e quanto à capacidade de preservar o nível mínimo de qualidade do enlace dos usuários foi demonstrada.

O foco principal deste capítulo foi sobre um cenário de múltiplos serviços, em especial, naquele que oferece serviços de QoS garantido e serviços de melhor esforço simultaneamente. O problema do controle de potência foi mais uma vez formulado como um jogo, que apresentou como solução de equilíbrio de Nash o algoritmo GT-MSDPC, que corresponde aos algoritmos propostos para o cenário de serviço único, para os dois tipos de serviço em separado. As simulações computacionais mostraram que o algoritmo proposto para este cenário de múltiplos serviços é capaz de proporcionar bons níveis de satisfação aos usuários de ambos os tipos de serviço.

No próximo capítulo, é dada continuidade à aplicação dos conceitos da teoria dos jogos a problemas em sistemas de comunicação. Desta vez, o problema em estudo é a equalização adaptativa de canal.

Equalização Adaptativa: Análise de Robustez

O objeto de estudo neste capítulo da dissertação é o combate à IES em sistemas de telefonia celular. O ambiente em questão pode ser muito hostil, como mostrado na Seção 3.1. As características do canal, como o espalhamento temporal do atraso, que provoca a IES, e o espalhamento Doppler, efeito causado pela velocidade relativa entre transmissor e receptor, imprimem degradações no sinal recebido que podem tornar impossível a sua recuperação, caso não haja um eficiente processamento do sinal. Além disso, sinais transmitidos nestes sistemas estão sujeitos à ação de ruídos impulsivos, que provocam intensos efeitos nocivos ao processo de transmissão/recepção. Tais ruídos são produzidos por máquinas e equipamentos externos aos sistemas, como fornos de microondas.

Modelos estatísticos são comuns na caracterização do processamento de sinais por causa da natureza aleatória da informação e do ruído. Além disso, o uso de modelos estatísticos para a definição de critérios de otimização tem se mostrado uma maneira eficaz de desenvolver procedimentos efetivos de processamento de sinais em vários problemas de sistemas de comunicação.

Para realizar o processamento ótimo de sinais com relação a um determinado critério de desempenho em uma dada aplicação, algumas suposições específicas quanto às entradas do processador de sinais são normalmente necessárias. Quando este processador desenvolvido para obter um desempenho ótimo sob condições específicas é usado em situações em que estas condições não são válidas, seu desempenho pode sofrer uma séria degradação. O desempenho de um processador de sinais pode ser muito sensível às variações das características reais encontradas

na sua aplicação com relação às aquelas consideradas na sua concepção. Infelizmente, a existência de um modelo estatístico preciso é raro na prática. Por isso, muitos estudos têm se concentrado no problema do desenvolvimento de sistemas que possam funcionar bem em ambientes em que as incertezas sejam significativas. Tais sistemas são chamados de sistemas robustos [67].

Na parte inicial da Seção 3.3, a equalização de canal é apontada como a técnica clássica de processamento de sinais para o combate à IES. A solução ótima de Wiener e o algoritmo RLS têm suas características brevemente apresentadas. Resumidamente, a solução de Wiener é ótima com relação ao critério do erro quadrático médio entre a resposta desejada e a saída do equalizador, mas requer o conhecimento da resposta ao impulso do canal. Como nos sistemas de telefonia celular o canal rádio-móvel pode ser considerado variante no tempo para muitas aplicações, a solução de Wiener adquire também esta característica de variação no tempo. Por isso, o rastreamento das variações do canal rádio-móvel é uma necessidade adicional.

Os procedimentos adaptativos, que permitem o aprendizado com o ambiente de aplicação e buscam a otimização de seu desempenho de acordo com este aprendizado constituem uma das abordagens destinadas a dotar os sistemas de uma maior robustez. Isto é válido para o processo de equalização adaptativa nos sistemas de telefonia celular. Porém, como discutido na Subseção 3.3.1, na qual o problema da equalização é formulado, mesmo a equalização adaptativa pode estar sujeita aos erros de modelagem.

A robustez à variação do ambiente passa, então, a ser um aspecto importante de avaliação do desempenho da equalização de canal. Os diversos estudos dedicados ao tema **equalização robusta** fazem uso da formulação em espaço de estados e das teorias do controle e estimação, para as quais o fator robustez é um tema bastante discutido. No contexto da estimação, dois caminhos podem ser seguidos: a estimação H_2 e a estimação H_∞ .

Os critérios de otimização da estimação H_2 são quadráticos. A estimação H_2 , ou estimação no sentido dos mínimos quadrados, na área da teoria do controle e estimação, tem como solução ótima o filtro de Kalman [68], que é um estimador recursivo e de variância mínima. Para o uso da teoria de filtragem de Kalman, bastante difundida na abordagem do problema de equalização de canal, assume-se que o receptor conhece as propriedades estatísticas do ruído AWGN e das incertezas do modelo. Tais suposições implicam uma dependência do modelo, o que

compromete a robustez dos algoritmos.

A filtragem de Kalman consiste em uma forma generalizada dos principais algoritmos de equalização de canal, como exposto em [69] para o LMS (do inglês *Least Mean Square*) e em vários trabalhos para o RLS, por exemplo [43, 47, 49, 70]. Em [71], uma abordagem diferente das convencionais é desenvolvida com o uso de uma rede de filtros de Kalman operando em paralelo para realizar a equalização de canal.

Nos últimos anos, alguns trabalhos foram dedicados à equalização robusta. Em [72], os estudos se concentram no emprego do filtro de Kalman em ambientes caracterizados por ruídos impulsivos. A estratégia consiste na determinação de um limite para o ganho do filtro de Kalman quando o sinal na entrada do equalizador apresenta amplitude acima de um determinado valor. No mesmo ambiente, porém através de uma rede de filtros de Kalman operando em paralelo, os autores de [73] procuram desenvolver processos de equalização menos vulneráveis às rápidas variações do canal. Em [74], uma representação estocástica dos erros de modelo e de decisão resultam na diminuição da sensibilidade do filtro com respeito a estes erros, porém, com o inconveniente de um pequeno aumento do erro de estimação quando não há erros de modelo.

Como alternativa às atuais ferramentas convencionais para a equalização adaptativa de canal, baseadas na estimação H_2 , surge uma abordagem distinta: a estimação H_∞ . Ela corresponde a uma otimização do desempenho de pior caso. Na estimação H_∞ , o objetivo é minimizar a máxima energia dos erros de estimação devido à modelagem imperfeita e ao ruído. Dessa forma, o estimador (ou equalizador) deve ser robusto contra a pior perturbação possível.

Na área do controle e estimação, a teoria da estimação H_∞ é um tema já bastante trabalhado e diretamente relacionado à robustez. Porém, sua aplicação no problema da equalização é ainda incipiente. São poucos os trabalhos que conectam esta teoria ao problema em questão. Em [75], os autores propõem um equalizador H_∞ para um canal invariante no tempo, fazendo uso da técnica de fatorização J -espectral. Buscando a solução do mesmo problema, mas através de uma nova formulação, os mesmos autores apresentam-no como um problema de programação semidefinida (SDP, do inglês *Semidefinite Programming Problem*) em [76]. Em ambos os trabalhos, as soluções são desenvolvidas no domínio da frequência, o que não contempla as propriedades de minimax do problema, pois ocorre apenas a minimização do máximo valor singular de uma determinada função

de transferência.

Finalmente, em [77], um algoritmo adaptativo de filtragem H_∞ é desenvolvido para um equalizador de decisão realimentada (DFE, do inglês *Decision Feedback Equalizer*). O cenário de interesse neste artigo consiste em um sistema de comunicação sem fio *indoor*, com altas taxas de transmissão. Além disso, uma complexidade adicional é inserida no algoritmo quando o autor desenvolve um processo de adaptação do parâmetro do filtro H_∞ relacionado ao grau de robustez.

Nesta dissertação, o problema minimax que resulta no filtro H_∞ é apresentado e solucionado através da aplicação da teoria dos jogos no domínio do tempo e as relações entre o filtro de Kalman e o filtro H_∞ são discutidas. Simulações computacionais são realizadas no contexto de um sistema de telefonia celular móvel com os objetivos de analisar o desempenho do filtro H_∞ e de realizar análises comparativas entre ele e o filtro de Kalman. Nestas simulações, optou-se pela simplicidade ao se considerar apenas os aspectos mais relevantes do processo de transmissão/recepção em um sistema de telefonia celular GSM, além da utilização de um equalizador linear, com modulação BPSK e sem codificação.

Uma discussão detalhada sobre os principais aspectos da conexão entre a estimação H_∞ e os jogos dinâmicos não-cooperativos pode ser encontrada em [78, 79]. Dentre os muitos estudos de comparação entre a filtragem de Kalman (estimação H_2) e a filtragem H_∞ , estão os artigos [80–82]. Abrangendo estes dois pontos, destaca-se o trabalho [83].

Neste capítulo, a Seção 5.1 refere-se aos aspectos gerais da teoria da filtragem de Kalman. Na Seção 5.2, os conceitos gerais do filtro H_∞ são discutidos e a sua dedução é apresentada. As discussões sobre robustez e análises comparativas entre o equalizador de Kalman e o equalizador H_∞ estão presentes na Seção 5.3. As considerações finais sobre o trabalho com relação à equalização adaptativa são colocadas na Seção 5.4.

5.1 Filtro de Kalman

Desde quando R. E. Kalman publicou o celebrado artigo [68], a teoria da filtragem de Kalman, baseada no critério dos mínimos quadrados (otimização no sentido H_2), tem sido profundamente explorada nas teorias do controle e de processamento de sinais em suas aplicações. O filtro de Kalman é considerado por muitos o grande avanço da teoria da estimação do século XX. A sua primeira aplicação se deu no projeto Apollo, da NASA, cujo objetivo era realizar a viagem de uma nave à Lua e

trazê-la de volta à Terra. Desde então, ele vem sendo parte integrante da maioria dos sistemas *onboard* de estimação de trajetória e controle em aeronaves [84].

O filtro de Kalman é um estimador para o problema gaussiano-linear-quadrático. Tal problema consiste na estimação dos estados instantâneos de um sistema linear dinâmico perturbado por ruído gaussiano branco por meio de medições linearmente relacionadas aos estados e também contaminadas por ruído branco. Na prática, o filtro de Kalman é um conjunto de equações que oferece uma solução computacional eficiente para o método dos mínimos quadrados.

Quando as características da perturbação e do ruído são condizentes com as suposições usadas no desenvolvimento do filtro de Kalman, ou seja, são variáveis aleatórias brancas e suas densidades espectrais são precisamente conhecidas, o filtro de Kalman consiste no processo ótimo de estimação de estados no sentido dos mínimos quadrados e da mínima variância. Entretanto, é difícil ter informações sobre as propriedades estocásticas das perturbações *a priori*. Neste caso, a estimação de estados baseada no critério dos mínimos quadrados pode sofrer uma degradação por causa das incertezas nas estatísticas das perturbações [83].

Muitos estudos em filtragem robusta têm sido desenvolvidos com o objetivo de enfrentar este problema da degradação da estimação baseada no critério dos mínimos quadrados. Na Seção 5.2 este assunto é retomado.

5.1.1 Formulação do Problema e Resumo do Algoritmo

Considere a descrição do sistema linear e variante no tempo exposta nas Eqs. (5.1) e (5.2). A definição de alguns dos parâmetros usados na formulação do problema se encontra na Tabela 5.1:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (5.2)$$

Assume-se que o ruído de processo, \mathbf{r}_k , e o ruído de medida, \mathbf{v}_k , são variáveis aleatórias independentes, brancas, de média zero e com distribuição de probabilidade gaussiana. Suas matrizes de correlação são assumidas conhecidas e são representadas por \mathbf{Q}_r e \mathbf{Q}_v , respectivamente. O vetor de estados a ser estimado é \mathbf{x}_k , enquanto que \mathbf{y}_k é o vetor de medidas. É importante lembrar que o ruído de processo é usado para descrever tanto os erros ocorridos no processo quanto as incertezas no modelo de estados. Abaixo, são feitas algumas suposições:

- (i) As matrizes \mathbf{A}_k , \mathbf{B}_k e \mathbf{C}_k possuem dimensões adequadas;
- (ii) A estimativa do estado inicial \mathbf{x}_0 é $\bar{\mathbf{x}}_0$, sem perda de generalidade.

Tabela 5.1: Definição de parâmetros da formulação do problema no espaço de estados.

Parâmetro	Descrição
$\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$	vetor de estados
$\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^n$	ruído do processo ou perturbação
$\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$	vetor de medida
$\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$	ruído de medida

Como já foi comentado, o filtro de Kalman é o processo ótimo de minimização do erro quadrático de estimação de estados. Já que o erro de estimação é causado pelas perturbações, constituídas pelas incertezas na estimativa inicial do vetor de estados e pelos ruídos de processo e de medida, o problema consiste em determinar a estimativa $\hat{\mathbf{x}}_k$ do vetor de estados através do seguinte processo de otimização [82]:

$$\min_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}} \left\{ J_{H_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \triangleq \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{\Pi}^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^K (\|\mathbf{r}_k\|^2 + \|\mathbf{v}_k\|^2) \right\}, \quad (5.3)$$

sujeito às Eqs. (5.1) e (5.2), e sendo $\mathbf{\Pi}$ uma matriz definida positiva que representa a incerteza do estado inicial.

O filtro de Kalman estima o vetor de estados de um processo através de um controle com realimentação de estados. Por isso, suas equações são recursivas, o que torna o processo de estimação de estados menos dispendioso em termos de esforço computacional.

Pelo fato de o filtro de Kalman ter sido vastamente estudado e aplicado em diversos problemas, o desenvolvimento matemático do processo de otimização anunciado na Eq. (5.3) é omitido. Um resumo das equações do filtro de Kalman é encontrado na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Resumo do algoritmo do filtro de Kalman discreto.

Equações Recursivas do Filtro de Kalman
$\mathbf{G}_k^{Kalm} = \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T [\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{Q}_v]^{-1}$
$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_k [\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}_k^{Kalm} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k)]$
$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{A}_k [\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_k^{Kalm} \mathbf{C}_k] \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k \mathbf{Q}_r \mathbf{B}_k^T$

Nesta tabela, $\hat{\mathbf{x}}_k$ é a estimativa de \mathbf{x}_k . Além disso, $\mathbf{P}_k = \mathbb{E}\{\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k\}$ é a estimativa

da covariância do erro de estimação, $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$. A variável \mathbf{G}_k^{Kalm} é chamada de ganho de Kalman e \mathbf{I}_n corresponde à matriz identidade.

Equalizador de Kalman

As equações do filtro de Kalman podem, então, ser usadas no contexto da equalização adaptativa de canal. A Tabela 5.3 ilustra o mapeamento das variáveis do problema da equalização adaptativa de canal, exposto na Subseção 3.3.1, nas variáveis do filtro de Kalman, cujas equações estão resumidas na Tabela 5.2.

Tabela 5.3: Resumo das correspondências entre as variáveis do filtro de Kalman e do equalizador.

Filtro de Kalman		Equalizador	
Descrição	Variável	Variável	Descrição
Variável de estado a ser estimada	\mathbf{x}_k	\mathbf{w}_k^o	Vetor de coeficientes do equalizador ótimo
Ruído de processo	\mathbf{r}_k	\mathbf{q}_k	Perturbação sobre a solução ótima
Covariância do ruído de processo	\mathbf{Q}_r	\mathbf{Q}_q	Covariância da perturbação (solução ótima)
Variável de medida	\mathbf{y}_k	d_k	Sinal desejado
Ruído de medida	\mathbf{v}_k	ν_k	Erro de medida
Covariância do ruído de medida	\mathbf{Q}_v	Q_ν	Variância do erro de medida
Estimativa da variável de estado	$\hat{\mathbf{x}}_k$	\mathbf{w}_k	Vetor de coeficientes do equalizador

O algoritmo RLS, uma particularização do filtro de Kalman, é o algoritmo de referência nesta dissertação. Importantes trabalhos foram dedicados a identificar a relação exata entre as diferentes versões do algoritmo RLS e o filtro de Kalman. Em [39, 43, 49], esta relação é apresentada de maneira clara. O algoritmo RLS convencional é um caso especial de aplicação do filtro de Kalman, no qual a covariância do ruído de processo é assumida zero e a covariância do ruído de medida corresponde a uma variância escalar igual a 1. Além disso, a matriz de transição de estados é assumida igual a $\mu^{-1/2}\mathbf{I}_M$. A variável $0 < \mu < 1$ é o fator de esquecimento do algoritmo RLS e \mathbf{I}_M é a matriz identidade de dimensão M , em concordância com as dimensões do equalizador apresentado na Subseção 3.3.1. Dessa forma, as equações de processo e de medida correspondentes ao RLS são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mu^{-1/2}\mathbf{w}_k, \quad (5.4)$$

$$d_k = \mathbf{s}_k^T \mathbf{w}_k + \nu_k, \quad (5.5)$$

em que, para todo $k \in [0, K]$, \mathbf{w}_k representa o vetor de coeficientes do equalizador, d_k é o sinal desejado, \mathbf{s}_k corresponde ao vetor de entradas do equalizador e $\nu_k = \mathbf{n}_k^T \mathbf{w}_k$ representa o ruído de medida, em que \mathbf{n} é o ruído térmico na entrada do equalizador.

Destaca-se mais uma vez que já na formulação do RLS a parcela $\mathbf{s}_k^T \Delta \mathbf{w}_k^o$ (ver Eq. (3.19)) do ruído de medida é desprezada, o que corresponde à suposição de que o ruído ν_k é gaussiano. Esta parcela do ruído, porém, pode ser dominante em algumas situações e o ruído ν pode não ser bem representado por esta distribuição de probabilidade, afetando o desempenho do RLS. O algoritmo RLS, uma particularização do filtro de Kalman, é adotado como algoritmo de referência nesta dissertação.

5.2 Filtro H_∞

Diferentemente do filtro de Kalman, que corresponde ao filtro ótimo para a estimação de estados de um sistema linear no sentido dos mínimos quadrados, o filtro H_∞ retrata o problema da minimização da máxima energia do erro de estimação devido a qualquer perturbação, sem a necessidade do conhecimento das características estatísticas dos ruídos. Assim, os filtros H_∞ são alternativas interessantes ao consagrado filtro de Kalman em problemas de estimação nos quais as incertezas quanto às estatísticas das perturbações são significativas.

A otimalidade do filtro de Kalman está fundamentada no conhecimento das estatísticas das perturbações (ruídos de processo e de medida). Entretanto, na maioria das aplicações, estas informações não estão disponíveis. Logo, não se pode garantir um determinado nível de desempenho para este filtro. Os filtros H_∞ , por outro lado, determinam limites superiores para os erros de estimação, independentemente das distribuições de probabilidade das perturbações [79].

Os estudos conduzidos nesta seção têm como objetivo inicial a apresentação das características do filtro H_∞ e a dedução de suas equações para sistemas variantes no tempo. Já que a norma H_∞ é a norma L_2 induzida, o problema da otimização H_∞ é um problema de otimização minimax [78, 79, 83]. Mais precisamente, ele consiste no problema de minimização da máxima energia dos erros de estimação devido a qualquer trajetória possível das perturbações. Posteriormente, análises comparativas entre o filtro H_∞ e o filtro de Kalman aplicados ao problema da equalização de canal são realizadas com o objetivo de identificar as situações em que o primeiro é preferível ao segundo.

Para considerar claramente o aspecto minimax da filtragem H_∞ , é enriquecedor

adotar uma abordagem no domínio do tempo por meio da teoria dos jogos [83]. Jogos dinâmicos, não-cooperativos, de soma-zero, especialmente os jogos quadráticos, se aplicam bem a este problema de desenvolvimento de um filtro de pior caso. Em tais problemas, o sistema linear possui dois tipos de entrada, a controlada e a perturbação, e dois tipos de saída, a regulada e a medida. O objetivo é obter um ganho de tal maneira que o efeito da perturbação sobre a saída regulada seja minimizado [7]. Apesar de as formulações serem possíveis tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo, a última opção é preferível, pois permite lidar com sistemas variantes no tempo de uma forma direta.

Nesta seção, uma formulação geral do problema da filtragem de pior caso é inicialmente apresentada. Em seguida, os conceitos dos jogos dinâmicos não-cooperativos de soma-zero, expostos na Subseção 2.2.2, são usados na construção do filtro minimax. Finalmente, as equações do equalizador H_∞ são apresentadas.

5.2.1 Formulação do Problema

Considere o sistema linear e variante no tempo descrito nas Eqs. (5.6)-(5.8). A Tabela 5.4 traz a definição de alguns dos parâmetros usados na formulação do problema:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{v}_k, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k. \quad (5.8)$$

Os valores do ruído de processo, ou perturbação, e do ruído de medida, respectivamente \mathbf{r}_k e \mathbf{v}_k , são desconhecidos, já que eles são sinais arbitrários em $L_2[0, K]$, e nenhuma suposição quanto às suas características estatísticas é feita. Neste sistema não há entrada controlada. Além de estimar o vetor de estados, \mathbf{x}_k , a sua combinação linear, que é a saída regulada do sistema, \mathbf{z}_k , também é estimada. Abaixo, algumas suposições:

- (i) As matrizes \mathbf{A}_k , \mathbf{B}_k , \mathbf{C}_k , \mathbf{D}_k e \mathbf{L}_k possuem dimensões adequadas;
- (ii) A matriz \mathbf{D}_k é não-singular, tal que $\mathbf{R}_k \triangleq \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^T > 0$;
- (iii) O vetor $\hat{\mathbf{z}}_k$ é a estimativa de \mathbf{z}_k , baseada em $\{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k\}$;
- (iv) A estimativa do estado inicial \mathbf{x}_0 é $\bar{\mathbf{x}}_0$, sem perda de generalidade.

Como já foi comentado, o problema da filtragem H_∞ é um problema de estimação de estados para a minimização da máxima energia do erro de estimação devido a

Tabela 5.4: Definição de parâmetros da formulação do problema no espaço de estados.

Parâmetro	Descrição
$\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$	vetor de estados
$\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^n$	ruído do processo ou perturbação
$\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$	vetor de medida
$\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$	ruído de medida
$\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^p$	vetor a ser estimado

qualquer perturbação. Este problema minimax corresponde a um jogo de soma-zero entre dois jogadores: o estimador, cuja variável de decisão é $\hat{\mathbf{z}}_k$; e o conjunto de perturbações, constituído pela incerteza do estado inicial, \mathbf{x}_0 , e pelos ruídos de processo e de medida, \mathbf{r}_k e \mathbf{v}_k , respectivamente. Uma formalização do problema encontra-se na equação abaixo:

$$\gamma_o^2 = \inf_{\hat{\mathbf{z}}_k} \sup_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}} \frac{\sum_{k=0}^K \|\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k\|^2}{\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{\Pi}^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^K (\|\mathbf{r}_k\|^2 + \|\mathbf{v}_k\|^2)}, \quad (5.9)$$

sendo $\mathbf{\Pi}$ uma matriz definida positiva que representa a incerteza do estado inicial.

O parâmetro γ_o^2 representa o limite superior do jogo. Logo, a Eq. (5.9) pode ser expressa como:

$$\max_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}} \frac{\sum_{k=0}^K \|\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k\|^2}{\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{\Pi}^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^K (\|\mathbf{r}_k\|^2 + \|\mathbf{v}_k\|^2)} \leq \gamma_o^2. \quad (5.10)$$

Assim, uma família de funções custo parametrizadas em γ pode ser introduzida:

$$J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \triangleq \sum_{k=0}^K \|\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k\|^2 - \gamma^2 \left\{ \sum_{k=0}^K \|\mathbf{r}_k\|^2 + \sum_{k=0}^K \|\mathbf{v}_k\|^2 \right\} - \gamma^2 \left\{ \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{\Pi}^{-1}}^2 \right\}, \quad (5.11)$$

sendo γ uma constante positiva.

Como observado na Eq. (5.9), neste problema há um conflito de interesses: o estimador $\hat{\mathbf{z}}_k$ tenta minimizar a energia do erro de estimação $\|\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k\|$ devido às perturbações \mathbf{x}_0 , \mathbf{r}_k , \mathbf{v}_k , enquanto que estas perturbações buscam a maximização da energia do erro de estimação. Então, um jogo pode ser constituído para este problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Jogador 1: } \min_{\hat{\mathbf{z}}_k} J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \\ \text{Jogador 2: } \max_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}} J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (5.12)$$

com $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ representando as funções custo de ambos os jogadores.

Portanto, o filtro H_∞ pode ser visto como resultante do seguinte problema minimax:

$$\min_{\hat{\mathbf{z}}} \max_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}} \left\{ J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^K \|\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k\|^2 - \gamma^2 \left\{ \sum_{k=0}^K \|\mathbf{r}_k\|^2 + \sum_{k=0}^K \|\mathbf{v}_k\|^2 \right\} - \gamma^2 \left\{ \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 \right\} \right\}, \quad (5.13)$$

no qual a constante positiva γ representa a magnitude de uma penalidade com relação à perturbação. Este problema equivale a determinar estimativas $\hat{\mathbf{x}}_k$ e $\hat{\mathbf{z}}_k$ que satisfaçam $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \leq 0$, $\forall (\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ sujeito a $\sum_{k=0}^K \|\mathbf{r}_k\|^2 + \sum_{k=0}^K \|\mathbf{v}_k\|^2 + \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 \neq 0$.

Neste momento, é importante observar a relação entre o filtro H_∞ e o filtro de Kalman. O filtro H_∞ é resultado do jogo de soma-zero entre dois jogadores caracterizado na Eq. (5.12), no qual os dois jogadores têm objetivos opostos em relação à mesma função custo $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$: o primeiro deseja minimizar $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, enquanto o segundo quer maximizar $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. O filtro de Kalman, por sua vez, resulta de um processo de otimização em que há apenas um objetivo, qual seja, aquele referente à Eq. (5.3).

Considere a Eq. (5.13), que retrata o processo de otimização do qual resulta o filtro H_∞ . Observe que a função custo utilizada no desenvolvimento do filtro de Kalman, $J_{H_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, exposta na Eq. (5.3), é parte da Eq. (5.13):

$$\min_{\hat{\mathbf{z}}} \max_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}} \left\{ J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^K \|\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k\|^2 - \gamma^2 \{J_{H_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})\} \right\}. \quad (5.14)$$

Dessa forma, quanto maior é o valor do parâmetro γ em comparação com a energia do erro de estimação, menor é a influência da minimização com respeito a $\hat{\mathbf{z}}$ no processo de otimização. Fazendo $\gamma \gg 1$, para erros de estimação de \mathbf{z}_k limitados, a

otimização consiste em:

$$\max_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}} \{J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\gamma^2 \{J_{H_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})\}\} \implies \min_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}} J_{H_2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (5.15)$$

Portanto, altos valores do parâmetro γ levam o filtro H_∞ a se aproximar do filtro de Kalman. Como este parâmetro indica o limite superior de energia dos erros de estimação devido às perturbações e incertezas, conclui-se que ele pode ser usado para determinar o grau de robustez do filtro, como ilustrado em graus de cinza na Figura 5.1.

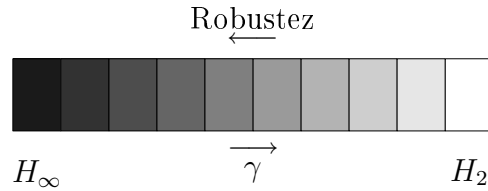


Figura 5.1: Relação entre o grau de robustez e o parâmetro γ .

De volta à formulação do problema da filtragem H_∞ , com o uso da Eq. (5.7), que relaciona o vetor de medida, \mathbf{y}_k , ao ruído de medida, \mathbf{v}_k , pode-se obter:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{D}_k^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k). \quad (5.16)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_k\|^2 &= \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k) \\ &\implies \|\mathbf{v}_k\|^2 = \|\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k\|_{\mathbf{R}_k^{-1}}^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Então, substituindo as Eqs. (5.8) e (5.17) na Eq. (5.11), a função custo $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \sum_{k=0}^K \|\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{z}}_k\|^2 \\ &- \gamma^2 \left\{ \sum_{k=0}^K \|\mathbf{r}_k\|^2 + \sum_{k=0}^K \|\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k\|_{\mathbf{R}_k^{-1}}^2 + \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{\Pi}^{-1}}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dessa forma, o problema minimax entre $\hat{\mathbf{z}}_k$ e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$ passa a ser entre $\hat{\mathbf{z}}_k$ e

$(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{y}_k)$.

As estimativas ótimas são denotadas, respectivamente, por $\widehat{\mathbf{z}}_k^*$ e $(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}_k^*, \mathbf{y}_k^*)$. O ruído de processo ou perturbação de pior caso é representado por \mathbf{r}_k^* . O ruído de medida de pior caso, \mathbf{v}_k^* , corresponde à medida \mathbf{y}_k^* . A solução ótima do problema minimax é, então, constituída por $(\widehat{\mathbf{z}}_k^*, \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}_k^*, \mathbf{v}_k^*)$.

5.2.2 Condições Necessárias de Otimalidade de $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$

Antes de verificar as condições necessárias de otimalidade da função custo $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, uma modificação nesta função é realizada: a multiplicação pela constante $\frac{1}{2}\gamma^{-2}$. Isto não altera as propriedades de otimalidade da função e tem como objetivo apenas facilitar a manipulação matemática. A função custo modificada, $\overline{J}_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, é expressa como [83]:

$$\begin{aligned} \overline{J}_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2}\gamma^{-2} \sum_{k=0}^K \|\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{z}}_k\|^2 \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^K \|\mathbf{r}_k\|^2 + \sum_{k=0}^K \|\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k\|_{\mathbf{R}_k}^2 + \|\mathbf{x}_0 - \overline{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{\Pi}^{-1}}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Agora, usando os conceitos desenvolvidos na Subseção 2.2.2 para jogos dinâmicos, não-cooperativos, de soma-zero, de 2-jogadores, seguem a verificação das condições necessárias de otimalidade da função custo $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ e, posteriormente, a verificação das suas condições suficientes de otimalidade.

Maximização de $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ com Respeito a \mathbf{x}_0 e \mathbf{r}_k

Para maximizar \overline{J}_{H_∞} com respeito a \mathbf{x}_0 e \mathbf{r}_k , o lagrangeano da função custo modificada é [83]:

$$\begin{aligned} L_G &= \frac{1}{2}\gamma^{-2} \sum_{k=0}^K \|\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{z}}_k\|^2 - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^K \|\mathbf{r}_k\|^2 + \sum_{k=0}^K \|\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k\|_{\mathbf{R}_k}^2 \right\} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \|\mathbf{x}_0 - \overline{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{\Pi}^{-1}}^2 \right\} + \sum_{k=0}^K \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T (\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k - \mathbf{x}_{k+1}), \end{aligned} \quad (5.20)$$

em que $\boldsymbol{\lambda}$ representa o vetor de co-estado. Após isso, o hamiltoniano da Eq. (5.20) é determinado:

$$Hm_k = \frac{1}{2}\gamma^{-2}\|\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{z}}_k\|^2 - \frac{1}{2}\left\{\|\mathbf{r}_k\|^2 + \|\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k\|_{\mathbf{R}_k^{-1}}^2\right\} - \frac{1}{2}\left\{\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\|_{\mathbf{\Pi}^{-1}}^2\right\} + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T(\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{r}_k). \quad (5.21)$$

Seja $(\mathbf{x}_k^*, \boldsymbol{\lambda}_k^*)$ a trajetória ótima de $(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)$ que corresponde à perturbação de pior caso \mathbf{r}_k^* . Então, de acordo com as discussões desenvolvidas na Subseção 2.2.2, as condições necessárias de otimalidade são verificadas a seguir:

Condição 1

$$\frac{\partial Hm_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}} = \mathbf{x}_{k+1}^* \implies \mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k^* + \mathbf{B}_k\mathbf{r}_k^*. \quad (5.22)$$

Condição 2

$$\frac{\partial Hm_k}{\partial \mathbf{r}_k} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \left\{ -\frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T\mathbf{B}_k\mathbf{r}_k \right\} = 0 \implies \mathbf{r}_k^* = \mathbf{B}_k^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1}^*. \quad (5.23)$$

Condição 3

$$\frac{\partial Hm_k}{\partial \mathbf{x}_k} = \boldsymbol{\lambda}_k^* \implies \boldsymbol{\lambda}_k^* = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left\{ \frac{1}{2}\gamma^{-2}(\mathbf{x}_k^T\mathbf{L}_k^T - \widehat{\mathbf{z}}_k^T)(\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{z}}_k) \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k^T - \mathbf{x}_k^T\mathbf{C}_k^T)\mathbf{R}_k^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k \right\}. \quad (5.24)$$

Logo:

$$\boldsymbol{\lambda}_k^* = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left\{ \frac{1}{2}\gamma^{-2} [\mathbf{x}_k^T\mathbf{L}_k^T\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^T\mathbf{L}_k^T\widehat{\mathbf{z}}_k - \widehat{\mathbf{z}}_k^T\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k + \widehat{\mathbf{z}}_k^T\widehat{\mathbf{z}}_k] + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{y}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^T\mathbf{C}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{x}_k^T\mathbf{C}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k] \right\}. \quad (5.25)$$

Assim, supondo $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k^T$:

$$\boldsymbol{\lambda}_k^* = \gamma^{-2}\mathbf{L}_k^T\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k^* - \gamma^{-2}\mathbf{L}_k^T\widehat{\mathbf{z}}_k + \mathbf{A}_k^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* + \mathbf{C}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k^*, \quad (5.26)$$

Portanto:

$$\mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* = \boldsymbol{\lambda}_k^* + (\mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k - \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k) \mathbf{x}_k^* + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T \widehat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k, \quad (5.27)$$

com $\boldsymbol{\lambda}_{N+1}^* = 0$.

Condição 4

$$\frac{\partial H m_0}{\partial \mathbf{x}_0} = \boldsymbol{\lambda}_0^* \implies \boldsymbol{\lambda}_0^* = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_0^T - \bar{\mathbf{x}}_0^T) \boldsymbol{\Pi}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0) \right\}. \quad (5.28)$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\lambda}_0^* = - [\boldsymbol{\Pi}^{-1} \mathbf{x}_0^* - \boldsymbol{\Pi}^{-1} \bar{\mathbf{x}}_0] \implies \mathbf{x}_0^* = \bar{\mathbf{x}}_0 - \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\lambda}_0^*. \quad (5.29)$$

As Eqs. (5.22), (5.23), (5.27) e (5.29) constituem um “problema de dois pontos de valores limite” (TPBVP, do inglês *Two Point Boundary Values Problem*) [78, 79, 83]. Já que o TPBVP é não-homogêneo e linear com respeito aos co-estados \mathbf{x}_k^* e $\boldsymbol{\lambda}_k^*$, \mathbf{x}_k^* pode ser expresso como:

$$\mathbf{x}_k^* = \widehat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{P}_k \boldsymbol{\lambda}_k^*, \quad (5.30)$$

em que \mathbf{P}_k é uma matriz definida positiva.

Então, substituindo as Eqs. (5.23) e (5.30) na Eq. (5.22), obtém-se uma expressão que relaciona $\widehat{\mathbf{x}}$ e $\boldsymbol{\lambda}^*$ nos instantes k e $k+1$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}_{k+1} + \mathbf{P}_{k+1} \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* &= \mathbf{A}_k (\widehat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{P}_k \boldsymbol{\lambda}_k^*) + \mathbf{B}_k (\mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^*) \\ \implies \widehat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{A}_k \widehat{\mathbf{x}}_k &= (\mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T - \mathbf{P}_{k+1}) \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* + \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\lambda}_k^*. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Das Eqs. (5.27) e (5.30), surge uma expressão que relaciona $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}^*$, $\boldsymbol{\lambda}_k^*$ e $\widehat{\mathbf{x}}_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* &= \mathbf{I}_n \boldsymbol{\lambda}_k^* + (\mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k - \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k) (\widehat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{P}_k \boldsymbol{\lambda}_k^*) \\ &\quad - \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T \widehat{\mathbf{z}}_k. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Com o intuito de facilitar a manipulação algébrica, assume-se que:

$$\mathbf{\Omega}_k = \mathbf{I}_n + (\mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k - \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k) \mathbf{P}_k. \quad (5.33)$$

Assim, a Eq. (5.32) assume a seguinte forma:

$$\mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* = \mathbf{\Omega}_k \boldsymbol{\lambda}_k^* - \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k) + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T (\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_k). \quad (5.34)$$

Antes de reestruturar a Eq. (5.34), é imposto que a matriz $\mathbf{\Omega}_k$ seja definida positiva, ou seja:

$$\mathbf{\Omega}_k > 0, \forall k \in [0, K]. \quad (5.35)$$

Com isso, a inversa de $\mathbf{\Omega}_k$ existe e a Eq. (5.34) pode ser reformulada como se segue:

$$\boldsymbol{\lambda}_k^* = \mathbf{\Omega}_k^{-1} [\mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k) - \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T (\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_k)]. \quad (5.36)$$

Substituindo a Eq. (5.36) na Eq. (5.31), uma relação somente entre $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}^*$, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ e $\hat{\mathbf{x}}_k$ é obtida:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k - (\mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T - \mathbf{P}_{k+1}) \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* - \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\lambda}_k^* &= 0 \implies \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k - (\mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T - \mathbf{P}_{k+1}) & \quad (5.37) \\ -\mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Omega}_k^{-1} [\mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k) - \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T (\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_k)] &= 0. \end{aligned}$$

Esta equação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k - [\mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T - \mathbf{P}_{k+1} + \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Omega}_k^{-1} \mathbf{A}_k^T] \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^* & \quad (5.38) \\ -\mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Omega}_k^{-1} [\mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k) - \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T (\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_k)] &= 0. \end{aligned}$$

A Eq. (5.38) deve ser válida para qualquer $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}^*$. Logo, a matriz que multiplica $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}^*$ é nula, produzindo as equações recursivas para \mathbf{x}_k e \mathbf{P}_k , esta última sendo conhecida como **equação discreta de Riccati** [81, 83]. A seguir são expostas ambas equações recursivas:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k) - \gamma^{-2} \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T (\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_k), \quad (5.39)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T. \quad (5.40)$$

As Eqs. (5.39) e (5.40) são resultantes da maximização da Eq. (5.20), formando as condições necessárias de otimalidade com respeito a \mathbf{x}_0 e \mathbf{r} .

Minimaxização de $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})$ com Respeito a $\hat{\mathbf{z}}$ e \mathbf{y}

Após uma longa manipulação algébrica a partir da Eq. (5.18), que expressa a função $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$, e das Eqs. (5.23) e (5.29), que definem \mathbf{r}^* e \mathbf{x}_0^* , a função $J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})$ pode ser escrita como mostrado abaixo:

$$J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^K \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}_k \\ \bar{\mathbf{y}}_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T & -\mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \\ -\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T & -\mathbf{R}_k^{-1} \gamma^2 (\mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T) \mathbf{R}_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}_k \\ \bar{\mathbf{y}}_k \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

sendo $\bar{\mathbf{z}}_k = (\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_k)$ e $\bar{\mathbf{y}}_k = (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k)$.

As condições necessárias de otimalidade com respeito a $\hat{\mathbf{z}}$ e \mathbf{y} , respectivamente, $\frac{\partial J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})}{\partial \hat{\mathbf{z}}_k} = 0$ e $\frac{\partial J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}_k} = 0$, são verificadas a seguir. Da regra da cadeia, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})}{\partial (\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_k)} \cdot \frac{\partial (\hat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{z}}_k} &= \frac{\partial J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})}{\partial \hat{\mathbf{z}}_k} \\ \implies \frac{\partial J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})}{\partial \hat{\mathbf{z}}_k} &= \frac{\partial J_{H_\infty}(\hat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})}{\partial \bar{\mathbf{z}}_k}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

expressão analogamente válida para a variável de decisão \mathbf{y} .

Então, as derivadas parciais de primeira ordem são dadas pelas duas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})}{\partial \widehat{\mathbf{z}}_k} &= 2(\mathbf{I}_n + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T)(\widehat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \widehat{\mathbf{x}}_k) \\ &- (\mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1})(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \widehat{\mathbf{x}}_k) - (\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T)^T (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \widehat{\mathbf{x}}_k), \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}_k} &= -2(\mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1})^T (\widehat{\mathbf{z}}_k - \mathbf{L}_k \widehat{\mathbf{x}}_k) \\ &- 2\gamma^2 \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T) \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \widehat{\mathbf{x}}_k). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ao ser igualada a zero, a Eq. (5.43) revela a condição necessária de otimalidade com respeito ao minimizador, cuja variável de decisão é $\widehat{\mathbf{z}}$. Esta condição necessária de otimalidade está definida na equação abaixo:

$$\widehat{\mathbf{z}}_k^* = [\mathbf{I}_n + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T]^{-1} (\mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1})(\mathbf{y}_k^* - \mathbf{C}_k \widehat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{L}_k \widehat{\mathbf{x}}_k. \quad (5.45)$$

Para o minimizador, a existência de uma solução ótima está sujeita à existência da inversa da matriz $\{\mathbf{I}_n + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T\}$. Isto equivale à suposição de que a matriz é definida positiva:

$$\{\mathbf{I}_n + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T\} > 0, \forall k \in [0, K]. \quad (5.46)$$

A condição necessária de otimalidade com respeito ao maximizador, cuja variável de decisão é \mathbf{y} , é encontrada ao se igualar a Eq. (5.44) a zero. A equação abaixo ilustra tal procedimento, após alguma manipulação algébrica:

$$\begin{aligned} &[\gamma^2 \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T) \mathbf{R}_k^{-1} \\ &+ (\mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1})^T \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} (\mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1})] (\mathbf{y}_k^* - \mathbf{C}_k \widehat{\mathbf{x}}_k) = 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Considere a expressão que multiplica $\mathbf{y}_k^* - \mathbf{C}_k \widehat{\mathbf{x}}_k$, no primeiro membro da equação. Observe que a sua segunda parcela é definida positiva. Aplicando o lema da inversão matricial, a primeira parcela pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\gamma^2 \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T) \mathbf{R}_k^{-1} = \gamma^2 (\mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T), \quad (5.48)$$

Então, uma única medida de pior caso, \mathbf{y}_k^* , existe se, e somente se a matriz $\gamma^2(\mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T)$ é semidefinida positiva:

$$\gamma^2(\mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T) \geq 0, \forall k \in [0, N], \quad (5.49)$$

já que, dessa forma, a expressão que multiplica $\mathbf{y}_k^* - \mathbf{C}_k \widehat{\mathbf{x}}_k$ é definida positiva e, necessariamente:

$$\mathbf{y}_k^* = \mathbf{C}_k \widehat{\mathbf{x}}_k. \quad (5.50)$$

Substituindo a Eq. (5.50) na Eq. (5.16), o ruído de medida de pior caso, \mathbf{v}_k^* , é definido como:

$$\mathbf{v}_k^* = -\mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k (\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{x}}_k). \quad (5.51)$$

A substituição da Eq. (5.50) na Eq. (5.45) leva à conclusão de que a estimativa ótima da combinação de estados é dada por:

$$\widehat{\mathbf{z}}_k^* = \mathbf{L}_k \widehat{\mathbf{x}}_k. \quad (5.52)$$

Considerando a Eq. (5.41), que expressa a função $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})$, a substituição de $\widehat{\mathbf{z}}$ por $\widehat{\mathbf{z}}^*$ e de \mathbf{y} por \mathbf{y}^* resulta em $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}^*; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y}^*) = 0$, o que comprova que a solução $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}^*; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y}^*)$ é uma solução ótima do problema minimax.

Dessa forma, as Eqs. (5.50) e (5.52) constituem as condições necessárias de otimalidade do jogo dinâmico de soma-zero entre o estimador e as perturbações. Estas condições necessárias estão sujeitas às suposições definidas nas Eqs. (5.33), (5.39), (5.40), (5.46) e (5.49). Na subseção seguinte, as condições suficientes são consideradas.

5.2.3 Condições Suficientes de Otimalidade de $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$

Se $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ é uma função contínua e duas-vezes diferenciável com respeito às suas variáveis, a estrita convexidade de $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ quanto ao minimizador e a estrita concavidade de $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ em relação ao maximizador são condições suficientes de otimalidade. As condições suficientes de otimalidade já foram encontradas na subseção anterior, quando restrições à existência de uma única solução ótima foram definidas nas Eqs. (5.33), (5.39), (5.40), (5.46), (5.49), (5.50) e (5.52). Apesar disso, de maneira concisa, a análise destas condições é realizada a seguir.

As primeiras condições são referentes à continuidade e à diferenciabilidade da

função $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ com respeito às suas variáveis de decisão, $\widehat{\mathbf{z}}, \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y}$. Uma rápida inspeção na equação que expressa a função $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ (Eq. (5.11)) é suficiente para a conclusão de que J_{H_∞} é contínua e duas vezes diferenciável com relação a todas as suas variáveis de decisão.

O maximizador da função $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ é composto pela incerteza do estado inicial, \mathbf{x}_0 , pelo ruído de processo, \mathbf{r} , e pelo ruído de medida, \mathbf{y} . As condições para a estrita concavidade de $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0, \mathbf{r}, \mathbf{y})$ com relação a \mathbf{x}_0 e \mathbf{r} são inicialmente consideradas. O hamiltoniano Hm_k considerado na maximização com respeito a \mathbf{x}_0 e \mathbf{r}_k é dado pela Eq. (5.21). As derivadas parciais de segunda ordem do hamiltoniano são mostradas abaixo:

$$\frac{\partial^2 Hm_0}{\partial \mathbf{x}_0^2} = -\mathbf{\Pi}^{-1}, \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial^2 Hm_k}{\partial \mathbf{r}_k^2} = -\mathbf{I}_n. \quad (5.54)$$

A derivada parcial de segunda ordem do hamiltoniano em relação a \mathbf{x}_0 é igual a $-\mathbf{\Pi}^{-1}$. Como $\mathbf{\Pi}$ é uma matriz definida positiva, o hamiltoniano é estritamente côncavo com respeito a \mathbf{x}_0 . Analogamente, o hamiltoniano é estritamente côncavo com respeito a \mathbf{r} , pois a sua derivada parcial de segunda ordem com relação a \mathbf{r}_k é igual a $-\mathbf{I}_n$.

Para a análise da estrita convexidade da função custo com respeito a $\widehat{\mathbf{z}}$ e da sua estrita concavidade com relação a \mathbf{y} , a equação de $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})$, Eq. (5.41), é considerada. Para qualquer instante k , as derivadas parciais de segunda ordem da função $J_{H_\infty}(\widehat{\mathbf{z}}; \mathbf{x}_0^*, \mathbf{r}^*, \mathbf{y})$ são mostradas abaixo:

$$\frac{\partial^2 J_{H_\infty}}{\partial \widehat{\mathbf{z}}_k^2} = 2(\mathbf{I}_n + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T), \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial^2 J_{H_\infty}}{\partial \mathbf{y}_k^2} = -2\gamma^2 \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T) \mathbf{R}_k^{-1}. \quad (5.56)$$

As condições suficientes de otimalidade, $\frac{\partial^2 J_{H_\infty}}{\partial \widehat{\mathbf{z}}_k^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 J_{H_\infty}}{\partial \mathbf{y}_k^2} < 0$, são apresentadas abaixo:

$$\mathbf{I}_n + \gamma^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Omega}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T > 0, \quad (5.57)$$

$$\gamma^2(\mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{C}_k^T) > 0. \quad (5.58)$$

Elas correspondem, respectivamente, às Eqs. (5.46) e (5.49), que já haviam sido determinadas na subseção anterior como condições para a existência de uma única solução ótima para o problema minimax.

5.2.4 Resumo do Equalizador H_∞

As Subseções 5.2.2 e 5.2.3 trouxeram o desenvolvimento das condições necessárias e suficientes para a existência de uma única solução para o jogo de soma-zero entre o estimador e as perturbações. Estas condições levam às equações do filtro H_∞ , que se encontram na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Resumo do algoritmo do filtro H_∞ discreto.

Equações Recursivas do Filtro H_∞
$\hat{\mathbf{z}}_k^* = \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_k$
$\mathbf{G}_k^{H_\infty} = \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T [\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1}$
$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_k [\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}_k^{H_\infty} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k)]$
$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T$

Nesta tabela, $\mathbf{G}_k^{H_\infty}$ pode ser considerado o ganho do filtro H_∞ , em analogia ao ganho de Kalman no filtro de Kalman. As equações de processo e de medida são exatamente as mesmas do equalizador de Kalman (RLS), apresentadas nas Eqs. (5.4) e (5.5), respectivamente. Dessa forma, as matrizes da representação do problema da equalização de canal no espaço de estados (Subseção 3.3.1) assumem os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_k &= \mu^{-1/2} \mathbf{I}_M \\
 \mathbf{B}_k &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{C}_k &= \mathbf{s}_k^T \\
 \mathbf{D}_k &= 1 \\
 \mathbf{L}_k &= \mathbf{C}_k,
 \end{aligned} \quad (5.59)$$

sendo M o número de coeficientes do equalizador. Ao se determinar que $\mathbf{L}_k = \mathbf{C}_k$, o vetor a ser estimado, $\mathbf{z}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k$, passa a representar o sinal desejado, na saída do equalizador. Os demais parâmetros foram definidos durante a dedução das equações

do filtro.

Apesar da completa independência entre o filtro de Kalman e o filtro H_∞ desde a concepção de ambos, o primeiro no contexto dos mínimos quadrados, e o segundo considerando a situação de pior caso, uma comparação entre as Tabelas 5.2 e 5.5 revela a similaridade entre as suas equações. Assim como para o filtro de Kalman, uma conexão direta entre o problema da equalização de canal e a filtragem H_∞ pode ser feita.

Realizando o mapeamento das variáveis do problema da equalização adaptativa de canal nas variáveis do filtro H_∞ , um equalizador adaptativo de canal que satisfaz a norma- H_∞ , ou seja, um equalizador H_∞ , é obtido. As correspondências entre as variáveis do filtro H_∞ e do equalizador estão expostas na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Resumo das correspondências entre as variáveis do filtro H_∞ e do equalizador.

Filtro H_∞		Equalizador	
Descrição	Variável	Variável	Descrição
Variável de estado a ser estimada	\mathbf{x}_k	\mathbf{w}_k^o	Vetor de coeficientes do equalizador ótimo
Ruído de processo	\mathbf{r}_k	\mathbf{q}_k	Perturbação sobre a solução ótima
Variável de medida	\mathbf{y}_k	d_k	Sinal desejado
Ruído de medida	\mathbf{v}_k	ν_k	Erro de medida
Combinação linear de \mathbf{x}_k	\mathbf{z}_k	d_k	Sinal desejado
Estimativa da variável de estado	$\hat{\mathbf{x}}_k$	\mathbf{w}_k	Vetor de coeficientes do equalizador
Estimativa de \mathbf{z}_k	$\hat{\mathbf{z}}_k$	\hat{d}_k	Estimativa do sinal desejado

É importante destacar que a restrição dada pela Eq. (5.35), representada abaixo, corresponde a uma restrição ao parâmetro γ do equalizador H_∞ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_k &= \mathbf{I}_n + (\mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k - \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k) \mathbf{P}_k > 0 \\ &\implies \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k - \gamma^{-2} \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k \geq 0. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Como $\mathbf{R}_k \triangleq \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^T$, usando as expressões dadas pela Eq. (5.59) a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \gamma^{-2} \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k &\leq \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k \\ &\implies \gamma \geq 1. \end{aligned} \quad (5.61)$$

A restrição ao parâmetro γ do equalizador H_∞ , $\gamma \geq 1$, significa que o equalizador

mais robusto possível ($\gamma = 1$) é aquele que não apresenta amplificação da energia do erro de estimação devido às perturbações.

5.3 Análise Comparativa: Simulações e Resultados

Após a apresentação das principais características do filtro de Kalman e do filtro H_∞ , da dedução deste último e do resumo das equações de ambos nas seções anteriores, esta seção traz resultados de desempenho destes filtros em diferentes condições. Da concepção do filtro H_∞ , espera-se que sua aplicação ao problema da equalização de canal seja indicada em situações severas. Com o intuito de avaliar o desempenho do equalizador H_∞ apresentado na seção anterior no contexto de um sistema de telefonia celular móvel, simulações computacionais foram realizadas, com a consideração de duas situações realistas e difíceis para o processo de equalização: a variação temporal do canal devido à velocidade relativa entre transmissor/receptor e a variação brusca do canal devido ao ruído impulsivo. A robustez do equalizador H_∞ e do equalizador de Kalman (RLS convencional) nestes cenários é discutida.

O ambiente de simulação consiste em um modelo simplificado do sistema GSM, cujas estruturas de quadro e de *time slot* encontram-se descritas na Seção 3.1. Como mostrado na Figura 3.7 daquela seção, o *time slot* é formado por 148 bits, sendo que apenas 114 deles carregam informação. Além disso, uma seqüência de treinamento de 26 bits é encontrada na parte central do quadro do GSM. As simulações realizadas consistem, então, em *time slots* de um único usuário do sistema GSM. Porém, uma estrutura simplificada de *time slot* é adotada, na qual apenas 140 bits são transmitidos/recebidos, dentre os quais os primeiros 26 bits compõem a seqüência de treinamento e os demais 114 bits carregam informação. A simplificação promovida consiste na não transmissão dos bits de controle do *time slot*.

O modelo de canal considerado nas simulações está também descrito na Seção 3.1. A banda de coerência do canal é aproximadamente 76,63 kHz, o que indica presença de IES no receptor, já que a banda utilizada pelo sinal no sistema GSM é de 200 kHz.

Um equalizador linear (filtro transversal linear) com 11 coeficientes regularmente separados pelo tempo de bit é adotado. Embora os algoritmos em questão possam ser usados para equalizadores não-lineares, optou-se nesta dissertação, como etapa inicial de investigação, pela simplicidade do equalizador linear. Quanto a outros processos de transmissão/recepção, a modulação implementada nas simulações foi a BPSK, enquanto que a codificação é desconsiderada. A Tabela 5.7 reúne os principais parâmetros de simulação.

Tabela 5.7: Principais parâmetros das simulações computacionais.

Parâmetro	Valor
Tempo de bit	3,692 μ s
Número de bits por <i>time slot</i>	140 bits
Número de bits de aquisição	26 bits
Ordem do equalizador	11 coeficientes
Frequência da portadora	2 GHz
Modulação	BPSK

As simulações realizadas consistem, então, na transmissão/recepção de *time slots* de um único usuário do sistema GSM. Como mencionado anteriormente, são analisados dois cenários severos para a equalização de canal. No primeiro cenário, observa-se a robustez dos equalizadores com relação ao nível de mobilidade do usuário. No segundo cenário, os aspectos de reação ao ruído impulsivo são analisados.

As métricas de desempenho são o erro quadrático médio (EQM) entre o sinal desejado e a saída do equalizador e a taxa de erro de bit (TEB). Ambas são medidas sob 5.000 realizações (*time slots*) para os casos em que o canal é considerado invariante no tempo (usuário estático) e de 30.000 realizações quando o canal é variante no tempo.

5.3.1 Robustez à Mobilidade

O modelo de canal adotado é invariante no tempo. Os efeitos da variação temporal do canal devido à mobilidade do usuário são considerados com a aplicação do modelo de Jakes, cuja descrição pode ser encontrada na seção que trata dos fenômenos de propagação do canal rádio-móvel (Seção 3.1). Usando o modelo de Jakes, o efeito Doppler pode ser emulado em função da frequência da portadora do sinal transmitido e da velocidade do usuário.

Três diferentes cenários com relação à velocidade do usuário são considerados: velocidade igual a zero ($f_m = 0$); velocidade igual a 50 km/h ($f_m = 100$ kHz); e velocidade igual a 100 km/h ($f_m = 200$ kHz). O parâmetro f_m é o espalhamento Doppler máximo, diretamente relacionado à variação temporal do canal.

A Figura 5.2 ilustra a evolução do EQM obtido através do equalizador de Kalman (RLS) e do equalizador H_∞ durante um *time slot* para uma SNR de 40 dB. Cinco valores diferentes para o parâmetro γ do equalizador H_∞ são usados. O primeiro

destaque é a comprovação, via simulação, de que o filtro H_∞ tende para o filtro de Kalman para valores elevados do parâmetro γ com relação ao erro de estimação. Na Figura 5.2(a), a simulação apresenta uma situação menos severa de dinâmica do meio (canal invariante no tempo), e os equalizadores têm desempenho semelhante, porém, o RLS supera os demais. Além disso, quanto menor o valor do parâmetro γ mais distante é o desempenho do equalizador H_∞ em relação ao do RLS. Isto já era esperado, pois o equalizador robusto perde em precisão nas atuações em ambientes cuja dinâmica abrupta é inexistente ou fraca.

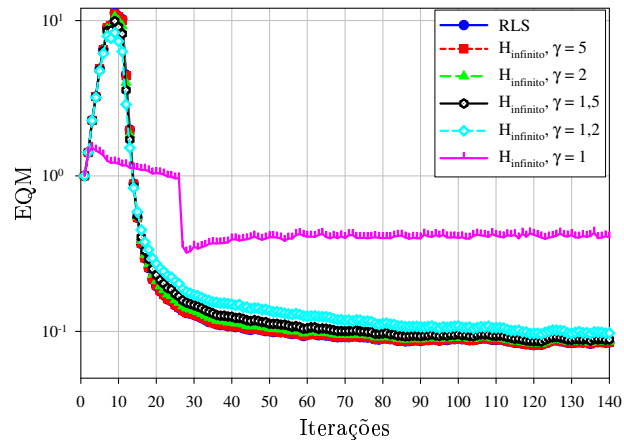
O efeito de degradação do desempenho dos equalizadores devido à maior variação temporal do canal para móveis em altas velocidades, 50 km/h e 100 km/h, é demonstrado pelas curvas das Figuras 5.2(b) e 5.2(c), respectivamente. Durante o *time slot*, a degradação de desempenho tem início mais rápido quanto maior é a velocidade do usuário, resultado previamente esperado.

Entretanto, a principal observação a ser feita nestas duas últimas curvas é sobre a robustez do equalizador H_∞ . Pode-se observar que ambos os equalizadores apresentam perda de desempenho, porém, o equalizador H_∞ é menos afetado, principalmente para baixos valores do parâmetro γ (maior robustez). É observado que para $\gamma = 1$, o EQM do equalizador H_∞ é o mesmo, independente da velocidade do usuário, comprovando sua robustez.

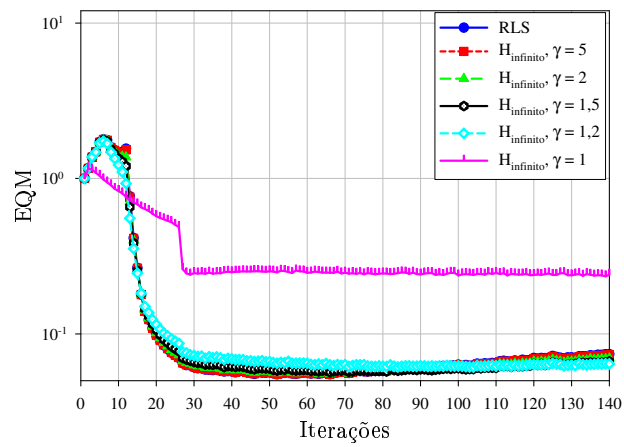
O equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$ se mostra robusto à velocidade do usuário (dinâmica do meio), porém, seu desempenho em termos de EQM é inferior ao do RLS e ao de outras configurações do parâmetro γ . Uma solução de compromisso entre precisão e robustez pode ser buscada com a adoção de valores pouco acima de 1 para o parâmetro γ do equalizador H_∞ . Como mostrado nas Figuras 5.2(b) e 5.2(c), o equalizador $H_\infty[\gamma = 1, 2]$, por exemplo, apresenta precisão ligeiramente superior à do RLS e ainda conserva razoavelmente características de robustez.

A Figura 5.3, que ilustra o desempenho do RLS e do equalizador H_∞ em termos de TEB, confirma as análises qualitativas desenvolvidas com o uso das curvas de EQM. Em ocasiões favoráveis (canal invariante no tempo, Figura 5.3(a)) o RLS se apresenta como a melhor opção para a equalização do canal. O equalizador H_∞ tende a se distanciar do RLS à medida que o parâmetro γ decresce. Assim como exposto nas curvas de EQM, a configuração do equalizador $H_\infty[\gamma = 5]$ praticamente corresponde ao RLS.

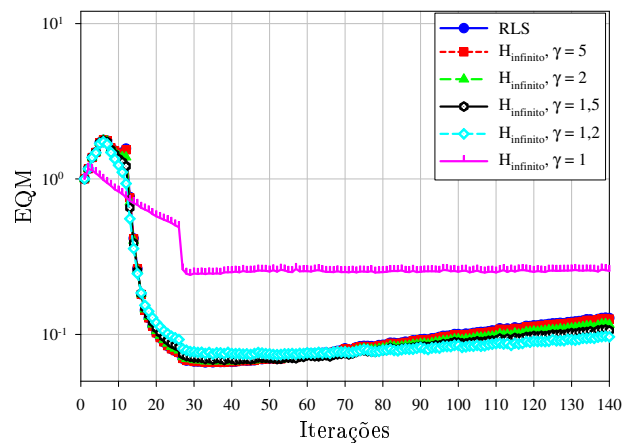
As Figuras 5.3(b) e 5.3(c), reproduzem os resultados anteriores com relação ao equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$, que tem praticamente o mesmo desempenho de TEB



(a) Velocidade do usuário: zero.

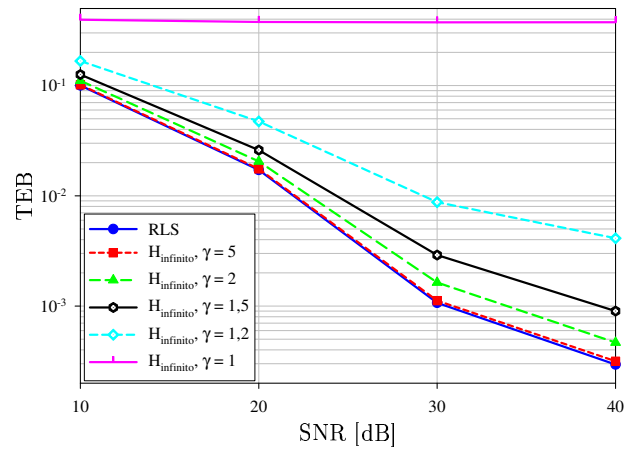


(b) Velocidade do usuário: 50 km/h.

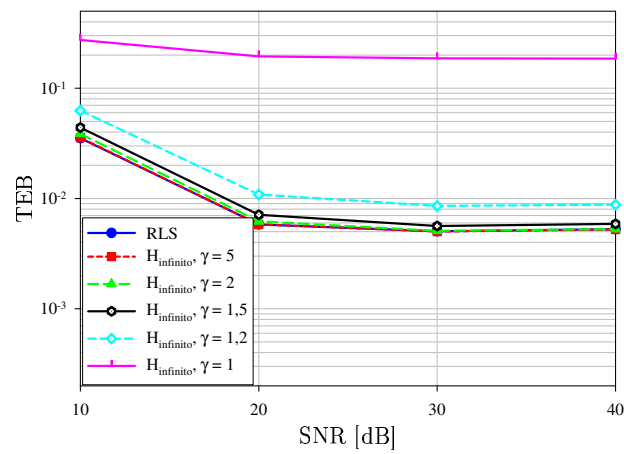


(c) Velocidade do usuário: 100 km/h.

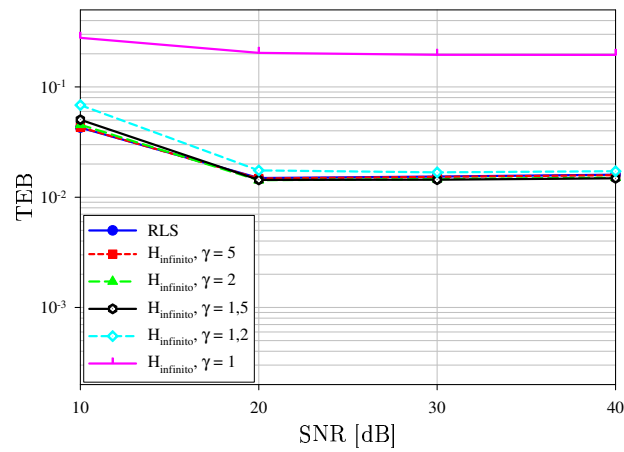
Figura 5.2: Evolução do EQM obtido pelo RLS e pelo equalizador H_∞ para diferentes níveis de mobilidade do usuário.



(a) Velocidade do usuário: zero.



(b) Velocidade do usuário: 50 km/h.



(c) Velocidade do usuário: 100 km/h.

Figura 5.3: TEB obtida pelo RLS e pelo equalizador H_∞ para diferentes níveis de mobilidade do usuário.

para qualquer velocidade do móvel. Quanto à solução de compromisso, percebe-se que para o caso do usuário com velocidade de 50 km/h, e a partir de $\gamma = 2$, o equalizador H_∞ tem o desempenho muito próximo do RLS para qualquer SNR. Enquanto isso, para a velocidade de 100 km/h, apesar de o desempenho dos equalizadores serem muito próximos, fica evidenciada uma tendência de o equalizador $H_\infty[\gamma = 1, 5]$ ser a melhor opção para o caso de SNRs elevadas (30 dB e 40 dB).

Estas observações apontam para uma necessidade de adaptação do parâmetro γ do equalizador H_∞ , com o objetivo de tornar a sua aplicação capaz de alcançar ganhos efetivos sobre o RLS no cenário em que a perturbação consiste na variação temporal do canal devido à velocidade do usuário. Uma estratégia de adaptação do parâmetro γ possibilita a reunião das melhores características do filtro de Kalman e do filtro H_∞ em um único algoritmo, o que pode resultar em uma equalização de canal robusta e com bom desempenho em termos de precisão. Em seguida, um outro cenário de dificuldade para a equalização de canal é colocado e uma estratégia simples e prática de adaptação do parâmetro γ é apresentada.

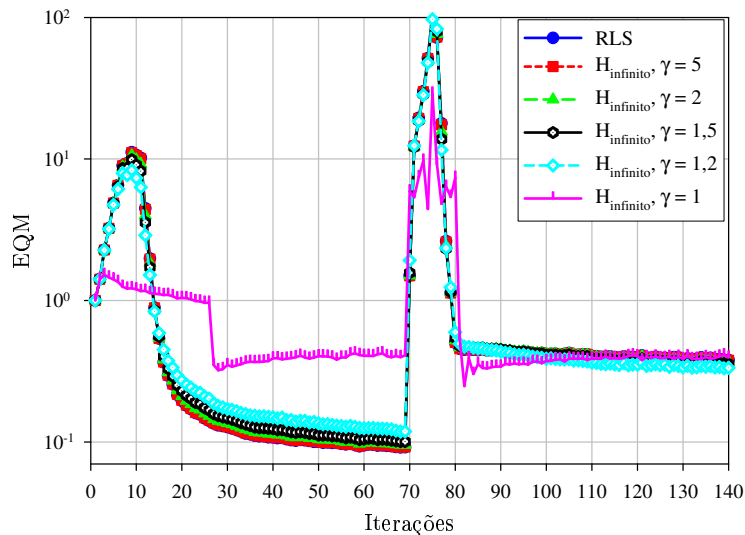
5.3.2 Robustez ao Ruído Impulsivo

Um número significativo de ruídos produzidos pelo homem tem característica impulsiva. Ruídos produzidos pela ignição de motores, por linhas de transmissão de energia, por fornos de microondas, entre outros, são ruídos impulsivos e, reconhecidamente, causam erros em comunicações digitais via rádio. A preocupação com o ruído impulsivo no contexto dos sistemas de telefonia celular é, portanto, justificada, principalmente para cenários *indoor*.

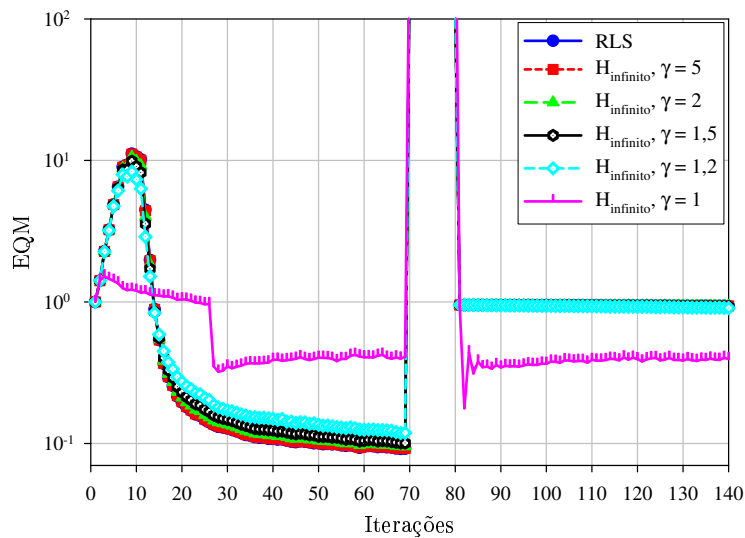
Usando o modelo de simulação do sistema GSM cujo resumo se encontra na Tabela 5.7, e o modelo de canal invariante no tempo descrito na Seção 3.1, o comportamento do RLS convencional e do equalizador H_∞ é observado na presença de um ruído impulsivo. Por questões de simplicidade e de verificação apenas, não foi adotado um modelo probabilístico para o ruído impulsivo. São considerados dois níveis de ruído: o ruído impulsivo com potência 10 vezes maior do que a potência média do sinal na entrada do equalizador; e o mesmo ruído com potência 100 vezes maior do que a potência média do sinal na entrada do equalizador. O instante de ocorrência do ruído impulsivo é fixo (iteração 70), com o objetivo de tornar clara a reação dos equalizadores ao fenômeno.

A Figura 5.4 ilustra a evolução do EQM obtido pelo equalizador de Kalman

(RLS) e pelo equalizador H_∞ durante um *time slot* com SNR de 40 dB. Cinco valores diferentes para o parâmetro γ foram usados no equalizador H_∞ . Nesta figura, também se percebe a presença de um ruído impulsivo na iteração de número 70.



(a) Razão entre as potências do ruído impulsivo e do sinal: 10.



(b) Razão entre as potências do ruído impulsivo e do sinal: 100.

Figura 5.4: EQM obtido pelo RLS e pelo equalizador H_∞ na presença de ruído impulsivo.

O desempenho em termos de EQM até a iteração 70 é exatamente o mesmo obtido na Figura 5.2(a), com vantagem para os equalizadores menos robustos. A ocorrência de um ruído impulsivo com potência 10 vezes maior do que a potência média do sinal na entrada do equalizador, mostrada na Figura 5.4(a), provoca elevados níveis de erro, principalmente para os equalizadores menos robustos. Veja

que o equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$ apresenta picos de erro menores do que os demais.

Ao final do efeito do ruído impulsivo no sinal de entrada do equalizador, percebe-se que o RLS e o equalizador H_∞ com parâmetros γ elevados (menos robustos) não retomam o seu desempenho anterior ao ruído. Por outro lado, passado o efeito do ruído impulsivo no sinal de entrada, o equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$ apresenta o mesmo nível de EQM, o que caracteriza a sua robustez. Apesar disso, para o caso da Figura 5.4(a), em que a razão entre as potências do ruído impulsivo e do sinal é 10, o nível de EQM após o ruído é praticamente o mesmo para todos os equalizadores. Isto pode levar à conclusão de que o RLS é a melhor opção para a equalização de canal, já que ele possui bom desempenho médio e, na presença de ruído impulsivo, o seu nível de EQM é comparável ao de filtros robustos.

Esta conclusão, no entanto, não é a mesma quando observamos, na Figura 5.4(b), um ruído impulsivo com potência 100 vezes maior do que a potência média do sinal na entrada do equalizador. Neste caso, ao final do efeito do ruído impulsivo no sinal de entrada do equalizador, percebe-se que, à exceção do equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$, os equalizadores, não apenas têm desempenho pior do que o anterior ao ruído, mas sofrem uma severa degradação de desempenho. Enquanto isso, a robustez do equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$ é mais uma vez comprovada. A atuação deste equalizador praticamente independe da intensidade do ruído.

A Figura 5.4(b) exibe um grande ganho do equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$ sobre os demais após o ruído impulsivo. Porém, esta figura também ilustra a superioridade do RLS e das versões menos robustas do equalizador H_∞ antes do ruído impulsivo. Novamente surge um quadro sugestivo de realizar a adaptação do parâmetro γ do equalizador H_∞ .

Equalizador Híbrido RLS- H_∞

Como o equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$ garante um mesmo nível de EQM antes e depois da ocorrência do ruído impulsivo, a adoção de um equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$ pode unir a precisão do RLS à robustez do equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$ para as situações de pior caso, como a ocorrência de um ruído impulsivo. Já que o ruído impulsivo é um fenômeno pontual, a operação de ajuste do parâmetro γ consiste, na verdade, em um chaveamento do “modo de operação RLS” para o “modo de operação $H_\infty[\gamma = 1]$ ”.

O funcionamento do equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$ proposto é simples. O chaveamento entre os modos de operação consiste apenas no ajuste do parâmetro γ do filtro H_∞ . Como pode ser observado em todas as figuras ilustrativas de EQM e

de TEB, o filtro $H_\infty[\gamma = 5]$ já apresenta um desempenho muito próximo do RLS. A decisão de realizar o chaveamento entre os modos de operação depende da análise da potência do sinal na entrada do equalizador. Uma regra simples de decisão é a adoção de um limite de potência, acima do qual considera-se que houve um ruído impulsivo. Detectado o ruído, o ajuste instantâneo do parâmetro γ do filtro H_∞ para o valor 1 é realizado e, até o final daquele *time slot*, no caso do sistema GSM, o modo de operação é o $H_\infty[\gamma = 1]$. O modo de operação inicial (novo *time slot*) é sempre o RLS.

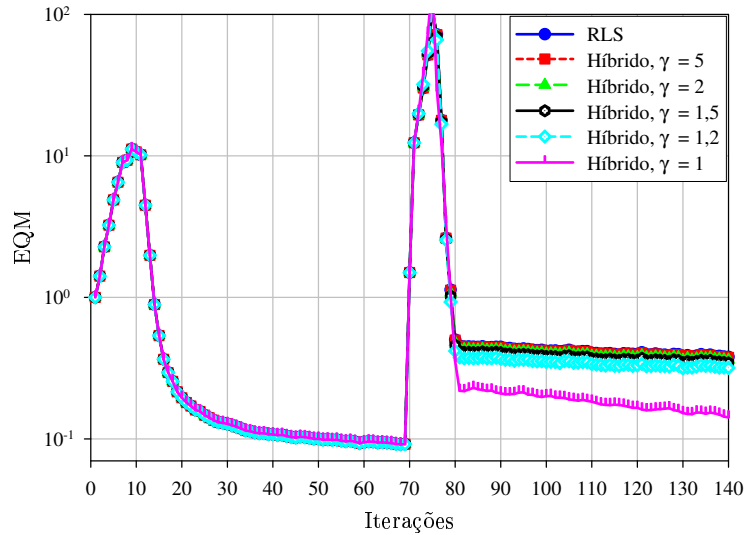
Os resultados das simulações computacionais do equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$ descrito são apresentados. Além deste equalizador híbrido, todas as outras formas híbridas com o parâmetro γ do equalizador H_∞ são avaliadas.

A Figura 5.5, apresenta as mesmas condições da Figura 5.4, mas para os equalizadores híbridos correspondentes. Inicialmente, já se pode verificar na Figura 5.5(a) que os equalizadores híbridos, com exceção do RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$, apresentam praticamente o mesmo comportamento dos equalizadores H_∞ correspondentes. O equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$, entretanto, experimenta uma melhora considerável de desempenho em comparação ao equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$ e aos demais híbridos. O nível de EQM obtido por este equalizador se mantém em queda até o final do *time slot*, indicando a tendência de retomada do nível de EQM anterior à ocorrência do ruído. Esta tendência pôde ser confirmada por meio de testes com seqüências mais longas de bits.

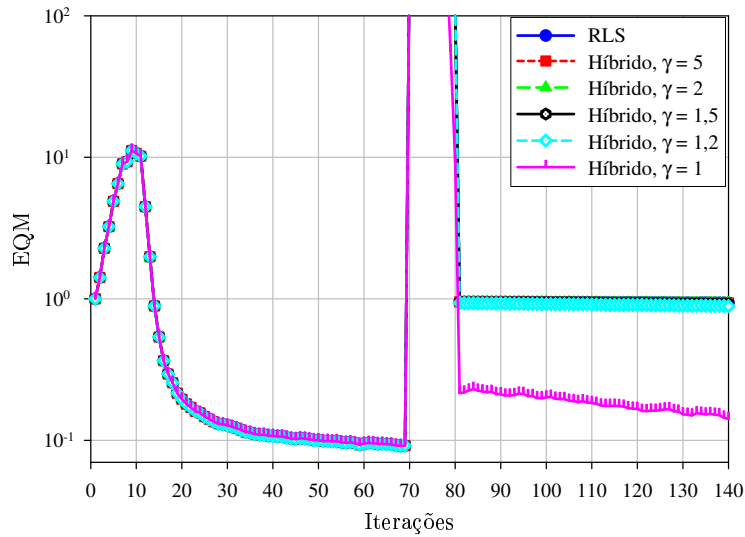
A situação em que a potência do ruído impulsivo é 100 vezes maior do que a potência média do sinal de entrada do equalizador é também considerada. A Figura 5.5(b) revela ganhos expressivos do equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$ sobre os demais equalizadores híbridos. É interessante atentar para o fato de que o híbrido contém as características favoráveis de precisão do RLS e, ao mesmo tempo, as características de robustez do equalizador $H_\infty[\gamma = 1]$, já que, assim como este último, o equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$ apresenta praticamente o mesmo desempenho, independentemente da intensidade do ruído impulsivo.

Os ganhos expressivos do equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$ sobre os demais híbridos em termos de EQM são traduzidos em ganhos também expressivos quanto à TEB. A Figura 5.6 ilustra estes ganhos.

Agora, percebe-se mais claramente que todos os equalizadores híbridos superam o RLS. Da observação das Figuras 5.6(a) e 5.6(b), é possível ter a confirmação de que o equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$ representa uma boa solução de compromisso



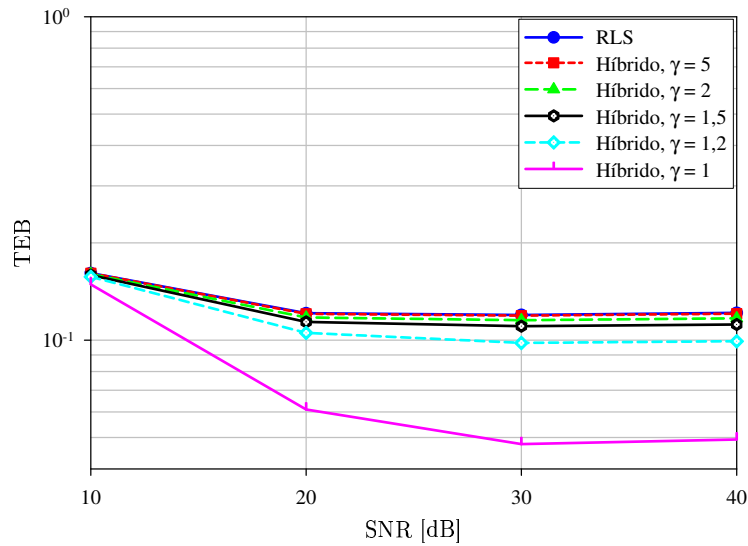
(a) Razão entre as potências do ruído impulsivo e do sinal: 10.



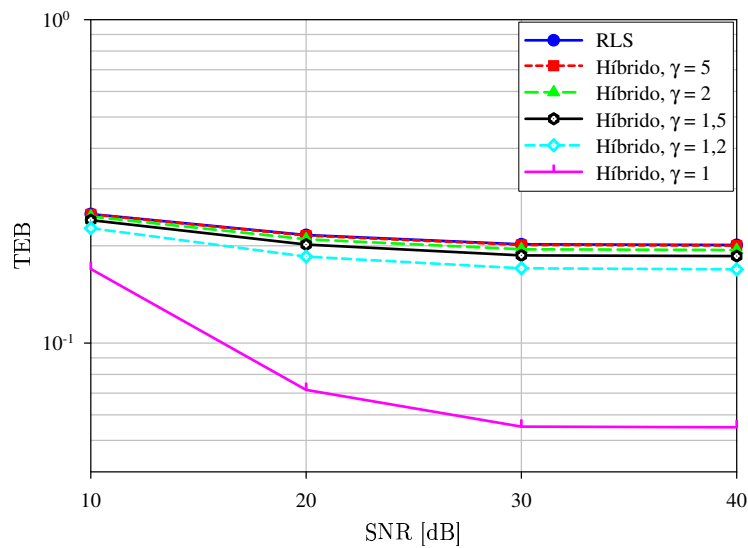
(b) Razão entre as potências do ruído impulsivo e do sinal: 100.

Figura 5.5: EQM obtido pelo RLS e pelo equalizador híbrido RLS- H_∞ na presença de ruído impulsivo.

entre precisão e robustez.



(a) Razão entre as potências do ruído impulsivo e do sinal: 10.



(b) Razão entre as potências do ruído impulsivo e do sinal: 100.

Figura 5.6: TEB obtida pelo RLS e pelo equalizador híbrido RLS- H_∞ na presença de ruído impulsivo.

5.4 Conclusões

Neste capítulo, os aspectos gerais do filtro de Kalman foram colocados de maneira resumida, assim como as suas equações foram apresentadas. Explorando a formulação do problema da equalização adaptativa de canal no espaço de estados, uma conexão direta entre o equalizador e o filtro H_∞ foi apresentada.

O problema minimax que resulta no filtro H_∞ foi apresentado como um jogo

dinâmico, não-cooperativo, de soma-zero e solucionado através da aplicação da teoria dos jogos no domínio do tempo. Além disso, as relações entre o filtro de Kalman e o filtro H_∞ foram discutidas.

Dois fatores que representam dificuldades para o processo de equalização de canal no contexto de uma rede de telefonia celular móvel foram considerados na análise de robustez dos equalizadores de Kalman e H_∞ : o alto nível de mobilidade dos usuários e a presença de ruído impulsivo. Simulações computacionais foram realizadas em um ambiente idealizado do sistema GSM, possibilitando a análise comparativa de desempenho dos dois equalizadores.

Os resultados das simulações computacionais com respeito à mobilidade do usuário revelaram que velocidades constantes dos móveis não constituem um grande problema para o algoritmo RLS. Este algoritmo, além de obter um bom desempenho em situações favoráveis sob este aspecto de mobilidade, é capaz de manter um funcionamento comparável ao dos filtros robustos em situações desfavoráveis, com uma pequena desvantagem nos índices de desempenho, que, porém é compensada pelo bom desempenho em situações favoráveis (baixas velocidades). Destaca-se, entretanto, a possibilidade da reunião, em um único equalizador, das características de precisão do filtro de Kalman (RLS) e de robustez do filtro H_∞ através de uma estratégia de ajuste do parâmetro γ do filtro H_∞ .

Os principais resultados obtidos neste capítulo referem-se à robustez da equalização ao ruído impulsivo. Inicialmente, a fragilidade do RLS e a robustez do filtro H_∞ na presença do ruído impulsivo ficaram demonstradas. Em um segundo momento, com o intuito de fazer uso das características desejáveis de ambos os equalizadores, um equalizador híbrido foi proposto. Este equalizador consiste em um filtro H_∞ com o parâmetro γ ajustado de acordo com a leitura das características do sinal na entrada do equalizador. Em situações favoráveis, com um alto valor do parâmetro γ , o equalizador obtém o desempenho do RLS. Ao ser detectado um ruído impulsivo, o chaveamento para o equalizador robusto é realizado através da determinação $\gamma = 1$. Os resultados das simulações mostram que o algoritmo híbrido proposto tem como características a precisão do RLS e a robustez do equalizador H_∞ em situações distintas. Ganhos expressivos deste algoritmo sobre o RLS, na presença do ruído impulsivo, são obtidos.

Conclusões e Perspectivas

A identificação de componentes concorrentes em problemas de sistemas de comunicação móvel permite a aplicação da teoria dos jogos a estes problemas. A teoria dos jogos tem se mostrado uma ferramenta adequada para a obtenção de soluções de compromisso que apresentam características desejáveis no contexto das comunicações móveis. A auto-configurabilidade, a descentralização do processo de obtenção das soluções e a robustez são algumas destas características. Nesta dissertação, o gerenciamento da interferência de acesso múltiplo e o combate à interferência entre símbolos através, respectivamente, do controle de potência e da equalização adaptativa, foram os problemas abordados com o uso dos conceitos da teoria dos jogos.

O controle de potência, problema que vem sendo abordado via teoria dos jogos há algum tempo, foi formulado também com o uso desta teoria, mas de uma maneira diferenciada. Inicialmente, os serviços oferecidos por sistemas de telefonia celular foram classificados em serviços de QoS garantido e serviços de melhor esforço. Além disso, dois diferenciados cenários foram considerados: sistemas que oferecem apenas um tipo de serviço (denominados sistemas de serviço único) e sistemas que oferecem ambos os tipos de serviço (sistemas de múltiplos serviços).

O cenário de serviço único foi considerado para ambos os tipos de serviço. Para sistemas de serviço único em que existem apenas serviços de QoS garantido, a aplicação da teoria dos jogos proposta resultou no algoritmo convencional de controle de potência, DPC, consistindo em uma nova maneira de deduzir este algoritmo. Para sistemas de serviço único apenas com serviços de melhor esforço, um novo algoritmo foi desenvolvido. O algoritmo proposto consiste em uma forma generalizada do algoritmo DPC e tem como características principais a auto-configurabilidade e a

eficiência em termos de energia. Este algoritmo é distribuído, o que proporciona vantagens de escalabilidade, e exige os mesmos recursos computacionais e de sinalização que os algoritmos convencionais como o DPC.

O algoritmo desenvolvido para o cenário de múltiplos serviços, ou seja, naquele em que o sistema oferece serviços de QoS garantido e serviços de melhor esforço simultaneamente, também resultou da formulação do problema como um jogo. Ficou demonstrado que os algoritmos desenvolvidos para ambos os tipos de serviço em sistemas de serviço único apresentam um funcionamento satisfatório em um sistema de múltiplos serviços.

Os algoritmos de controle de potência propostos fazem uso de uma função de mapeamento da potência de transmissão na SINR a ser atingida (SINR-alvo). Foi considerada uma função linear, o que coloca como primeira perspectiva de continuação dos estudos sobre controle de potência, um estudo de diferentes funções de mapeamento da potência de transmissão na SINR-alvo. Além disso, estes algoritmos exigem valores de parâmetros ainda não disponíveis no instante de tomada de decisão. Nesta dissertação, tais parâmetros foram aproximados pelos valores atuais. Métodos de predição podem ser aplicados para a obtenção de valores mais precisos para estes parâmetros. Finalmente, os estudos desenvolvidos nesta dissertação tiveram como ferramenta de simulação computacional um simulador estático e simplificado de sistemas TDMA e CDMA. A avaliação do desempenho destes algoritmos em simuladores dinâmicos deve revelar de maneira mais realista os seus ganhos sobre os algoritmos convencionais.

A aplicação da teoria dos jogos ao problema da equalização adaptativa merece ainda pesquisas e estudos mais avançados. Nesta dissertação, foi apresentada a aplicação da teoria dos jogos para a resolução do problema minimax que tem como solução o filtro H_∞ , que apresenta características de robustez. O filtro H_∞ foi, então, usado como equalizador robusto, denominado equalizador H_∞ . Análises comparativas de desempenho entre o equalizador de Kalman (RLS) e o equalizador H_∞ foram realizadas em dois cenários que apresentam dificuldades ao processo de equalização de canal.

No primeiro cenário, as dificuldades dizem respeito ao alto nível de mobilidade de um usuário de um sistema de telefonia celular. Neste caso, os equalizadores de Kalman e H_∞ apresentam desempenhos semelhantes, com pequena vantagem para o equalizador H_∞ em casos de altas velocidades e altas SNRs.

O segundo cenário consiste em um processo de transmissão/recepção de um

sistema de telefonia celular em que há a presença de ruído impulsivo. Os resultados das simulações computacionais demonstram a robustez do equalizador H_∞ e o expressivo ganho do equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$ proposto sobre o RLS, na presença do ruído impulsivo.

A análise de desempenho dos algoritmos através de simulações computacionais que emularam, de maneira simplificada, um sistema de telefonia celular GSM pode ser melhorada na continuação dos estudos aqui desenvolvidos. O uso de um simulador mais realista, que torne possível, por exemplo, capturar os efeitos da variação da velocidade do usuário em questão, pode revelar novos comportamentos dos algoritmos. Um outro caminho a ser seguido como continuação destes estudos é a consideração de outros tipos de sistema de comunicação, nos quais a questão da robustez seja também crítica. Finalmente, conclusões mais embasadas quanto ao desempenho do equalizador H_∞ na presença do ruído impulsivo podem ser obtidas com o uso de modelos probabilísticos para este ruído. O uso destes modelos corresponde a um cenário mais realista, no qual os ganhos obtidos pelo equalizador híbrido RLS- $H_\infty[\gamma = 1]$ sobre o RLS podem ser confirmados.

Abordagem Variacional para Problemas de Controle Ótimo

Este apêndice apresenta alguns resultados importantes do cálculo variacional aplicado a problemas de controle ótimo. Como tais problemas correspondem a jogos dinâmicos de 1-jogador, estes resultados são importantes como guia para a solução de problemas de otimização dinâmica para mais de 1-jogador, tal como feito no Capítulo 2.

A.1 Condições Necessárias para o Controle Ótimo

Considere o sistema linear e variante no tempo representado no espaço de estados pela equação abaixo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad \mathbf{u}_k \in U, k \in K^*, \quad (\text{A.1})$$

em que $f : X \times U \rightarrow X$ é uma função determinada; $\mathbf{x}_k \in X$ é o vetor de estados do sistema; $\mathbf{u}_k \in U, k \in K^*$, é o controle ou vetor de variáveis de decisão; e X e U são subconjuntos de um espaço vetorial euclidiano.

O desempenho do sistema deve ser otimizado através da minimização da seguinte função com respeito à variável \mathbf{u} [85]:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \triangleq h_0(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^K h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (\text{A.2})$$

em que $\mathbf{u}_k = \Sigma_k(\mathbf{x}_k)$, com Σ_k representando uma estratégia de controle no estágio $k \in K^*$, $h_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$.

As seqüências de estados e de variáveis de decisão que levam a função $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ao seu mínimo são as seqüências ótimas. O problema do controle ótimo consiste, então, em:

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \triangleq h_0(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^K h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \right\}, \quad (\text{A.3})$$

sujeito à Equação A.1 e a $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}$. A seguir, as condições necessárias e suficientes para a obtenção dos pontos de mínimo de $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ são consideradas.

Para incluir as restrições definidas pela Equação A.1, a função custo é modificada pela introdução de um vetor de multiplicadores de Lagrange, como mostrado abaixo:

$$L_G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = h_0(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^K h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T [f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \mathbf{x}_{k+1}], \quad (\text{A.4})$$

em que $\boldsymbol{\lambda}$ é chamado vetor de variável adjunta ou co-estado. Então, para a minimização da função custo $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, as seguintes expressões devem ser válidas:

$$\frac{\partial L_G(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{x}_k} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial L_G(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Antes de realizar as operações de derivação parcial, o hamiltoniano é introduzido, $Hm : X \times U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e definido como [85–87]:

$$Hm_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\lambda}) \triangleq h_0(\mathbf{x}_0) + h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T [f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)], \quad \forall k \in [0, K]. \quad (\text{A.7})$$

Assim, das Equações A.5 e A.6 e da derivada parcial do hamiltoniano, as seguintes relações são obtidas:

$$\frac{\partial L_G(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{x}_k} = \frac{\partial Hm_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{x}_k} - \boldsymbol{\lambda}_k^* = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial L_G(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial h_0(\mathbf{x}_0^*)}{\partial \mathbf{x}_0} - \boldsymbol{\lambda}_0^* = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial L_G(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k} = \frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Estas relações resultam nas quatro condições necessárias de otimalidade para o problema do controle ótimo em questão:

Condição 1: Equações de Estado

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = f(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^*), \quad (\text{A.11})$$

com $\mathbf{x}_0^* = \bar{\mathbf{x}}$.

Condição 2: Condição do Hamiltoniano

$$\frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Condição 3: Equações Adjuntas ou de Co-Estados

$$\boldsymbol{\lambda}_k^* = \frac{\partial H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{x}_k}. \quad (\text{A.13})$$

Condição 4: Condição de Contorno

$$\boldsymbol{\lambda}_0^* = \frac{\partial h_0(\mathbf{x}_0^*)}{\partial \mathbf{x}_0}. \quad (\text{A.14})$$

As condições necessárias para que \mathbf{u}^* seja uma estratégia de controle ótima foram desenvolvidas a partir do **Princípio de Mínimo de Pontryagin** [85–87], que foi inicialmente desenvolvido para os casos em que restrições quanto à variável de controle $\mathbf{u} \in U$ estão presentes, ou seja, U é um subconjunto de um espaço vetorial euclidiano. Entretanto, o princípio de mínimo também pode ser aplicado em problemas em que a variável de controle não sofre restrições (caso em que U é um espaço vetorial euclidiano).

A.2 Condições Suficientes para o Controle Ótimo

As condições necessárias de otimalidade da função custo desenvolvidas acima não são, em geral, suficientes. A minimização da função custo $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ com restrição corresponde à minimização do lagrangeano $L_G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$, que, por sua vez, é equivalente à minimização do hamiltoniano, como exposto na Equação A.10. Dessa

forma, para \mathbf{u}^* minimizar o hamiltoniano é necessário que a Equação A.10 seja válida, porém isto não é suficiente.

Entretanto, considerando uma função custo quadrática na variável de decisão, \mathbf{u} , se a Equação A.10 é satisfeita e, além disso, a matriz

$$\frac{\partial^2 H m_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \mathbf{u}_k^2} \quad (\text{A.15})$$

é definida positiva, estas condições são suficientes para garantir que \mathbf{u}^* leva o hamiltoniano a um mínimo global [7, 85–87].

Referências Bibliográficas

- [1] Platão, *A República*. Martin Claret, 2003.
- [2] R. D. Luce e H. Raiffa, *Games and Decisions*, 1ª edição. John Wiley & Sons, Maio 1957.
- [3] M. Shubic, *Game Theory and Related Approaches to Social Behavior: Selections*, 1ª edição. John Wiley & Sons, 1964.
- [4] R. Isaacs, *Differential Games: a Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*, 1ª edição. John Wiley & Sons, 1965.
- [5] J. W. Friedman, *Game Theory with Applications to Economics*, 1ª edição. Oxford University Press, 1986.
- [6] R. B. Myerson, *Game Theory: Analysis of Conflict*, 1ª edição. Harvard University Press, 1991.
- [7] T. Basar e G. J. Olsder, *Dynamic Noncooperative Game Theory*, 2ª edição. Academic Press, Janeiro 1995.
- [8] F. de S. Chaves, T. F. Maciel, R. A. de Oliveira N. e F. R. P. Cavalcanti, “An Energy Efficient Distributed Power Control Algorithm and its Convergence,” *XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Setembro 2004.
- [9] Z. Dziong e L. G. Mason, “Fair-Efficient Call Admission Control Policies for Broadband Networks - A Game Theoretic Framework,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 4, no. 1, pp. 123–136, Fevereiro 1996.

- [10] S. H. Wong e I. J. Wassel, “Application of Game Theory for Distributed Dynamic channel Allocation,” *IEEE Vehicular Technology Conference*, vol. 1, pp. 404–408, Maio 2002.
- [11] A. B. MacKenzie e S. B. Wicker, “Game Theory and the Design of Self-Configuring, Adaptive Wireless Networks,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 39, no. 11, pp. 126–131, Novembro 2001.
- [12] A. B. MacKenzie e S. B. Wicker, “Game Theory in Communications: Motivation, Explanation, and Application to Power Control,” *IEEE Global Telecommunications Conference*, vol. 2, pp. 821–826, Novembro 2001.
- [13] J. V. Neumann, “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele,” *Mathematische Annalen*, vol. 100, pp. 295–320, 1928.
- [14] J. V. Neumann e O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1ª edição. Princeton University Press, 1944.
- [15] J. Nash, “Equilibrium Points in N-Person Games,” *Proceedings of National Academy of Science*, vol. 36, pp. 48–49, 1950.
- [16] J. Nash, “Non-Cooperative Games,” *Annals of Mathematics*, vol. 54, pp. 286–295, 1951.
- [17] P. Borm, H. Hamers e R. Hendrickx, “Operations Research Games: A Survey,” *TOP*, vol. 9, no. 2, pp. 139–216, Dezembro 2001.
- [18] L. E. J. Brouwer, “Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten,” *Mathematische Annalen*, vol. 71, pp. 97–115, 1910.
- [19] T. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*, 2ª edição, ser. Communications Engineering and Emerging Technologies. Prentice Hall, Dezembro 2001.
- [20] B. Sklar, “Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication Systems Part I: Characterization,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, no. 7, pp. 90–100, Julho 1997.
- [21] B. Sklar, “Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication Systems Part II: Mitigation,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, no. 9, pp. 102–109, Julho 1997.

- [22] S. R. Saunders, *Antennas and Propagation for Wireless Communication Systems*, 1ª edição. John Wiley & Sons, Setembro 1999.
- [23] R. H. Clarke, “A Statistical Theory of Mobile-Radio Reception,” *The Bell System Technical Journal*, vol. 47, pp. 957–1000, Agosto 1968.
- [24] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, 1ª edição. Wiley-IEEE Computer Society Pr, Maio 1974.
- [25] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3ª edição. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, Fevereiro 1991.
- [26] R. S. L. Souza, “Controle de Potência em Sistemas de Comunicações Móveis Celulares,” Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Abril 2003.
- [27] M. D. Yacoub, *Foundations of Mobile Radio Engineering*, 1ª edição. CRC Pres, Fevereiro 1993.
- [28] M. Mouly e M. -B. Pautet, *The GSM System for Mobile Communications*, 1ª edição. Telecom Publishing, Junho 1992.
- [29] T. Halonen, J. Romero e J. Melero, *GSM, GPRS and EDGE Performance: Evolution Towards 3G/UMTS*, 2ª edição. John Wiley & Sons, Inc., Outubro 2003.
- [30] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4ª edição. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, Agosto 2000.
- [31] J. Zander, “Distributed Cochannel Interference Control in Cellular Radio Systems,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 41, no. 3, pp. 305–311, Agosto 1992.
- [32] G. J. Foschini e Z. Miljanic, “A Simple Distributed Autonomous Power Control Algorithm and its Convergence,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 42, no. 4, pp. 641–646, Novembro 1993.
- [33] M. Almgren, H. Andersson e K. Wallstedt, “Power Control in a Cellular Systems,” *IEEE 44th Vehicular Technology Conference*, vol. 2, pp. 833–837, Junho 1994.

- [34] R. A. de Oliveira N., “Novos Algoritmos de Controle de Potência para Sistemas de Comunicação Sem Fio,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Abril 2004.
- [35] C. E. Shannon, “The Zero Error Capacity of a Noisy Channel,” *IRE Transactions on Information Theory*, vol. 2, pp. S8–S19, Setembro 1956.
- [36] F. Gunnarsson, “Power Control in Cellular Systems: Analysis, Design and Estimation,” Tese de Doutorado, Linköpings University, Março 2000.
- [37] H. Holma e A. Toskala, *WCDMA for UMTS: Radio Access for Third Generation Mobile Communications*, 1ª edição, ser. Revised Edition. John Wiley & Sons, Ltd, Março 2001.
- [38] J. S. Lee e L. E. Miller, *CDMA Systems Engineering Handbook*, 1ª edição. Artech House, Outubro 1998.
- [39] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4ª edição. Prentice Hall, Setembro 2001.
- [40] F. R. P. Cavalcanti, “Equalização Adaptativa e Autodidata em Sistemas de Comunicação Digital com Ênfase em Técnicas Preditivas,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Julho 1996.
- [41] M. -L. Alberi, R. A. Casas, I. Fijalkow e C. R. Johnson Jr., “Looping LMS versus Fast Least Squares Algorithms: Who Gets There First?,” *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, pp. 296–299, Maio 1999.
- [42] A. F. C. Vliese, S. L. Netto, M. L. R. de Campos e P. S. R. Diniz, “Performance of Adaptation Algorithms in Multipath Channel Equalization for CDMA systems,” *Proceedings of IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, vol. 3, pp. 1289–1292, Setembro 1999.
- [43] S. Haykin, A. H. Sayed, J. R. Zeidler, P. Yee e P. C. Wei, “Adaptive Tracking of Linear Time-Variant Systems by Extended RLS Algorithms,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 5, pp. 1118–1128, Maio 1997.
- [44] R. Wang, N. Jindal, T. Bruns, A. R. S. Bahai e D. C. Cox, “Comparing RLS and LMS Adaptive Equalizers for Nonstationary Wireless Channels in Mobile

- Ad Hoc Networks,” *IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, vol. 3, pp. 1131–1135, Setembro 2002.
- [45] X. -Y. Hu e X. -H. Yu, “Hybrid Kalman/LMS Decision Feedback Equalization Strategy for Terrestrial HDTV Channels,” *IEEE Global Telecommunications Conference*, vol. 6, pp. 3497–3502, Novembro 1998.
- [46] J. F. Doherty e R. J. Mammone, “A New Method for Robust Fast Tracking Channel Equalization,” *IEEE Military Communications Conference*, vol. 1, pp. 284–288, Outubro 1989.
- [47] F. de S. Chaves, J. C. M. Mota e J. T. Costa F., “ H_2 and H_∞ Approaches for Time-Variant Multipath Channel Equalization,” *XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Setembro 2004.
- [48] A. H. Sayed e T. Kailath, “A State Space Approach to Adaptive Filtering,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 3, pp. 559–562, Abril 1993.
- [49] A. H. Sayed e T. Kailath, “A State Space Approach to Adaptive RLS Filtering,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 11, no. 3, pp. 18–60, Julho 1994.
- [50] X. Wenhui e G. Zhongmin, “Performance Comparison of Distributed Power Control Algorithms in Cellular Radio Systems,” *Proceedings of International Conference on Communication Technology*, v. 2, pp. 977–980, Abril 2003.
- [51] A. T. Chronopoulos, P. Cotae e S. Ponipireddy, “Efficient Power Control for Broadcast in Wireless Communication Systems,” *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, v. 3, pp. 1330–1334, Março 2004.
- [52] S. Gunturi e F. Paganini, “Game Theoretic Approach to Power Control in Cellular CDMA,” *IEEE Vehicular Technology Conference*, v. 4, pp. 2362–2366, Outubro 2003.
- [53] T. Alpcan, T. Basar, R. Srikant e E. Atman, “CDMA Uplink Power Control as a Noncooperative Game,” *IEEE Conference on Decision and Control*, v. 1, pp. 197–202, Dezembro 2001.
- [54] C. U. Saraydar, N. B. Mandayam e D. J. Goodman, “Efficient Power Control via Pricing in Wireless Data Networks,” *IEEE Transactions on Communications*, v. 50, no. 2, pp. 291–303, Fevereiro 2002.

- [55] C. U. Saraydar, N. B. Mandayam e D. J. Goodman, “Pricing and Power Control in a Multicell Wireless Data Network,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 19, no. 10, pp. 1883–1892, Outubro 2001.
- [56] D. Goodman e N. Mandayam, “Power Control for Wireless Data,” *IEEE Personal Communications*, v. 7, no. 2, pp. 48–54, Abril 2000.
- [57] V. Shah, D. Goodman e N. Mandayam, “Power Control for Wireless Data Based on Utility and Pricing,” *IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, v. 3, pp. 1427–1432, Setembro 1998.
- [58] C. W. Sung e W. S. Wong, “A Noncooperative Power Control Game for Multirate CDMA Data Networks,” *IEEE Transactions on Wireless Communications*, v. 2, no. 1, pp. 186–194, Janeiro 2003.
- [59] W. Teerapabkajorndet e P. Krishnamurthy, “A Game Theoretic Model for Power Control in Multi-Rate Mobile Data Networks,” *IEEE International Conference on Communications*, v. 1, pp. 56–60, Maio 2003.
- [60] M. Elmusrati e H. Koivo, “Multi-Objective Distributed Power Control Algorithm,” *IEEE Vehicular Technology Conference*, v. 2, pp. 812–816, Setembro 2002.
- [61] J. W. Lee, R. R. Mazumdar e N. B. Shroff, “Downlink Power Allocation for Multi-Class CDMA Wireless Networks,” *Proceedings of Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, v. 3, pp. 1480–1489, Junho 2002.
- [62] C. C. Chai, Y. H. Chew, Y. Zhao e K. Li, “Constrained Power Control Scheme to Increase Capacity of Multi-Service Systems,” *Proceedings of IEEE International Conference on Information, Communications and Signal Processing*, v. 1, pp. 329–333, Dezembro 2003.
- [63] G. V. Kotsakis e S. Papavassiliou, “An Iterative Approach to the Power Control Problem in Wireless Networks for Integrated Services,” *IEEE Vehicular Technology Conference*, v. 1, pp. 265–272, Setembro 2000.
- [64] G. V. Kotsakis, S. Papavassiliou e P. P. Demestichas, “Decentralized Power Control Algorithms for Multi-Service CDMA-based Cellular Systems,”

- Proceedings of IEEE Symposium on Computers and Communications*, pp. 700–704, Julho 2000.
- [65] R. D. Yates, S. Gupta, C. Rose e S. Sohn, “Soft Dropping Power Control,” *IEEE Vehicular Technology Conference*, v. 3, pp. 1694–1698, Maio 1997.
- [66] A. Simonsson, M. Almgren e M. Thurfjell, “A Power Control and Scheduling Concept for EGPRS,” *IEEE Vehicular Technology Conference*, v. 5, pp. 2219–2224, Setembro 2000.
- [67] S. A. Kassam e H. V. Poor, “Robust Signal Processing for Communication Systems,” *IEEE Communications Magazine*, v. 21, no. 1, pp. 20–28, Janeiro 1983.
- [68] R. E. Kalman, “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,” *Transactions of ASME - Journal on Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, Março 1960.
- [69] M. J. Omid, S. Gazor, P. G. Gulak e S. Pasupathy, “Differential Kalman Filtering for Tracking Rayleigh Fading Channels,” *IEEE Workshop on Signal Processing Systems*, pp. 376–385, Outubro 1998.
- [70] K. Murakami, K. Ueda, M. Takano e T. Fujino, “Design of an Adaptive Kalman Equalizer and its Performance over Fading Multipath Channels,” *IEEE Vehicular Technology Conference*, pp. 564–570, Maio 1990.
- [71] S. Marcos, “A Network of Adaptive Kalman Filters for Data Channel Equalization,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, no. 9, pp. 2620–2627, Setembro 2000.
- [72] C. Y. Fung e S. C. Chan, “Estimation of Fast Fading Channel in Impulse Noise Environment,” *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, v. 4, pp. 497–500, Maio 2002.
- [73] B. Sayadi e S. Marcos, “Robust Equalization Based on a Network of Kalman Filters in Impulsive Noise Environments,” *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 5, pp. 37–40, Abril 2003.

- [74] M. Sternad, A. Ahlen e E. Lindskog, “Robust Decision Feedback Equalizers,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 3, pp. 555–558, Abril 1993.
- [75] A. T. Erdogan, B. Hassibi e T. Kailath, “On Linear H_∞ Equalization of Communication Channels,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, no. 11, pp. 3227–3231, Novembro 2000.
- [76] A. T. Erdogan, B. Hassibi e T. Kailath, “FIR H_∞ Equalization,” *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 5, pp. 2729–2732, Junho 2000.
- [77] W. Zhuang, “Adaptive H_∞ Channel Equalization for Wireless Personal Communications,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 48, no. 1, pp. 126–136, Janeiro 1999.
- [78] U. Shaked e C. E. de Souza, “Continuous-Time Tracking Problems in an H_∞ Setting: A Game Theory Approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, no. 5, pp. 841–852, Maio 1995.
- [79] U. Shaked e Y. Theodor, “ H_∞ -Optimal Estimation: A Tutorial,” *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, v. 2, pp. 2278–2286, Dezembro 1992.
- [80] B. Hassibi e T. Kailath, “ H_∞ Adaptive Filtering,” *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 2, pp. 949–952, Maio 1995.
- [81] K. Takaba e T. Katayama, “On the Properties of Discrete-Time H_∞ Filter,” *Proceedings of First Asian Control Conference*, v. 2, pp. 661–665, 1994.
- [82] A. H. Sayed, “A Framework for State-Space Estimation with Uncertain Models,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, no. 7, pp. 998–1013, Julho 2001.
- [83] K. Takaba, “Studies on H_∞ Filtering Problems for Linear Discrete-Time Systems,” Tese de Doutorado, Kyoto University, Janeiro 1996.
- [84] B. A. Cipra, “Engineers Look to Kalman Filtering for Guidance,” *SIAM News*, vol. 26, no. 5, pp. 8–9, Agosto 1993.
- [85] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory*, 1ª edição. Dover Publications, Abril 2004.

-
- [86] R. F. Stengel, *Optimal Control and Estimation*, 2ª edição. Dover Publications, Setembro 1994.
- [87] A. E. Bryson, *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, Edição revisada. Hemisphere Publishing Co., Outubro 1981.