



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

WENDEL MACEDO MENDES

# LOCALIZAÇÃO DE FÉRMIONS EM D DIMENSÕES

FORTALEZA

2013

**WENDEL MACEDO MENDES**

# **LOCALIZAÇÃO DE FÉRMIONS EM D DIMENSÕES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho

Coorientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho

**FORTALEZA**

**2013**

WENDEL MACEDO MENDES

# LOCALIZAÇÃO DE FÉRMIONS EM D DIMENSÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 08/03/2013

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

840.404.673-53 - Dr. Geová Maciel de Alencar Filho  
(Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

---

Prof. Dr. Ozemar Souto Ventura  
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow  
da Fonseca (CEFET-RJ)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Física

---

M4921 Mendes, Wendel Macedo.  
Localização de Férmions em D Dimensões / Wendel Macedo Mendes. – Forta-  
leza, 2013.  
54 f.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Departamento de Física, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho

1. Férmions. 2. Relatividade (Física). 3. Teoria Quântica de Campos. I. Título.

CDD 539.721

---

*Dedico este trabalho  
à minha esposa  
Gislânia Mendes e  
aos meus pais  
Edson Mendes e  
Eleonita Macedo.*

# AGRADECIMENTOS

À Deus, o autor e consumidor da fé, que sempre está presente em todos os momentos da minha vida.

À minha esposa Gislânia Mendes, pelo amor, amizade e companheirismo. Ela sempre será meu porto seguro.

Aos meus pais Edson Mendes Filho e Eleonita Macedo Mendes, pelo apoio e carinho. Eles são responsáveis por eu chegar onde cheguei.

Ao professor Dr. Ricardo Renan pela orientação e pelo voto de confiança que teve em mim depositado.

Ao professor Dr. Geová Maciel pela paciência e pelas valiosas discussões acerca desse trabalho.

Aos professores Doutores Makarius Tahim e Ozemar Souto pela participação na banca examinadora dessa dissertação.

Ao professor Raimundo Nogueira pelo apoio e pelas discussões que ajudaram muito no enriquecimento do meu conhecimento.

Aos meus colegas de sala Anderson Magno, Samuel Façanha, Emanuel Wendell.

Aos meus colegas Ivan (Brother) e o professor Ms. Marcio Feijão.

Aos meus colegas “soldados da Física Teórica” do LASSCO José Euclides, Samuel Bastos, Júlio César, Davi Monteiro e Diego Veras.

À coordenação do Programa de Pós-graduação em Física pela logística no desenvolvimento desse trabalho.

Aos demais professores do Departamento da Física que participaram diretamente ou indiretamente de minha formação.

À Funcap pelo apoio financeiro.

# RESUMO

Nesse trabalho é analisado a localização de férmions de spin  $1/2$  em um bulk  $D$ -dimensional em um cenário de  $(D - 2)$ -branas. O modelo usado para tal é uma extensão para mais dimensões dos modelos Randall-Sundrum (RS) e de brana espessa. Ele é conhecido como modelo de codimensão 1. Os resultados obtidos são fundamentados em uma geometria não-fatorizável do tipo Anti-de Sitter. Durante o processo de localização do modo zero, usa-se tanto a métrica de Randall-Sundrum como uma métrica com fator de dobra suave que depende da coordenada da dimensão extra, frequentemente usada nos modelos de brana espessa. As representações de spin  $1/2$  variam com a dimensão do espaço-tempo, então o processo de localização deve levar em conta a dimensionalidade do bulk. Baseados nesses modelos, descobre-se que a localização de férmions em  $(D - 2)$ -branas muda quando o espaço-tempo é par ou ímpar. Eles não são localizados quando a dimensionalidade do bulk é par e somente uma das quiralidades pode ser localizada quando  $D$  é ímpar.

**Palavras-chave:** Férmions. Relatividade (Física). Teoria Quântica de Campos.

# ABSTRACT

In this work we analyzed the localization of fermions of spin-1/2 in a  $D$ -dimensional bulk in a  $(D-2)$ -branes scenario. The model used for this is a dimensional extension of models Randall-Sundrum (RS) and thick branes. It is known as co-dimension 1 model. The obtained results are based in no-factorizable geometry type Anti-de Sitter. During the zero mode localization process, it is used both the Randall-Sundrum metric as a metric with smooth warped factor that depends on the coordinate of extra dimension, frequently used in thick brane models. As the spin-1/2 representations change with dimension of spacetime, the localization process, somehow, must take into account the dimensionality of bulk. Based on these models, one finds that the localization fermions in  $(D-2)$ -branes changes when the spacetime is par or odd. They are not located when the dimensionality of bulk is par and only one of chiralities can be located when  $D$  is odd.

**Keywords:** Fermions. Relativity (Physics). Quantum Field Theory.



# LISTA DE FIGURAS

1	Orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ . Adaptado de [8]. . . . .	p. 29
2	Fatores de dobra suave $A(y)$ e de Randall-Sundrum. . . . .	p. 43
3	A localização do modo zero $\alpha(y)$ na brana de tensão negativa. . . . .	p. 46
4	O modo zero localizado referente à quiralidade direita para valores de $4\beta - fa/b$ iguais a -1 (vermelho), -2 (verde) e -3 (preto). . . . .	p. 47

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{AB}$	Métrica do espaço de Minkowski $D$ dimensional, ela é da forma $\text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ . Os índices $A, B, \dots, J = 0, 1, \dots, D - 1$ representam índices de Lorentz.
$g_{MN}$	Métrica do espaço curvo $D$ dimensional. Os índices $M, N, \dots$ representam índices de sistemas de coordenadas referentes à variedade curva.
$g$	Determinante da métrica do espaço curvo $D$ dimensional.
$\alpha, \beta, \dots, \kappa$	Índices de Lorentz. Eles variam de 0 a $D - 2$ .
$\lambda, \mu, \dots$	Índices relativos ao sistema de coordenadas na presença de gravidade. Possuem o mesmo range dos índices de Lorentz.
$[, ]$	Comutador.
$\{, \}$	Anti-comutador.
$\Gamma^A$	Matrizes de Dirac em $D$ dimensões.
$\gamma^A$	Matrizes de Dirac em $D - 2$ dimensões.
$\Gamma^+, \Gamma^-$	Operadores de levantamento e abaixamento de spin.
$\hat{N}$	Operador número de estados de spin.
$\zeta$	Espinor estado fundamental.
$\Sigma^{AB}$	Geradores do grupo $SO(1, D - 1)$ .
$S_j$	Os operadores de spin, com $j = 0, 1, 2, \dots, k$ onde $k$ é um inteiro relacionado com a dimensionalidade do espaço-tempo par por meio de $D = 2k + 2$ e com a dimensionalidade ímpar por $D = 2k + 3$ .
$s_j = \pm 1/2$	Autovalores de spin.
$\Gamma$	Matriz que relaciona as quiralidades.
$\prod$	Produtório.
$P_R, P_L$	Operadores de Projeção de quiralidades direita e esquerda, respectivamente.
$\Psi$	Espinor de Dirac em $D$ dimensões
$\psi$	Espinor de Dirac em 4 dimensões.
$\Psi_R, \Psi_L$	Espinores de Weyl relativo as quiralidades direita e esquerda, respectivamente.

$\sqrt{-g}d^Dx$	Elemento de Volume invariante por transformação geral de coordenadas.
$\Omega$	Variedade curva.
$\mathcal{L}_m$	Lagrangeana da matéria.
$T_{MN}$	Tensor energia-momento da matéria.
$R, R_{MN}, G_{MN}$	Escalar de Ricci e os tensores de Ricci e Einstein em $D$ dimensões, respectivamente.
$\Gamma^P_{MN}$	Coefficientes da conexão afim em $D$ dimensões.
$M^{D-2}$	Escala de energia gravitacional em $D$ dimensões
$M_{Pl}$	Escala de energia de Planck.
$x^M, \zeta^A$	Sistemas de coordenadas em $\Omega$ e no espaço tangente, respectivamente.
$e^A_M$	Vierbeins.
$\Lambda^A_B$	Transformações de Lorentz.
$S(x)$	Representação espinorial do grupo de Lorentz.
$D_A$	Derivada spin-covariante
$\omega_M$	Conexão de Spin.
$\phi, r_c$	Ângulo que parametriza a dimensão extra compacta do modelo Randall-Sundrum tipo I ou a solução de kink que modela a brana
$r_c$	Raio de Compactificação.
$\mathbb{Z}_2$	Grupo discreto $\{-1, 1\}$
$S^n$	Esfera $n$ dimensional.
$g_{\mu\nu}^{vis}, g_{\mu\nu}^{ocu}$	Métricas induzidas sobre as $D - 2$ branas visível e oculta, respectivamente.
$\Lambda$	Constante cosmológica $D$ dimensional.
$V_{vis}, V_{ocu}$	Tensões das branas visível e oculta, respectivamente.
$\bar{X}$	Indica que a quantidade $X$ não depende da dimensão extra em questão.
$h_{\mu\nu}(x, y)$	Excitações gravitacionais de spin 2 (gráviton).
$f$	Constante de acoplamento de Yukawa.
$\alpha(y), \eta(y)$	Fatores resultantes da separação de variáveis do espinor de Dirac $\Psi(x, y)$ para os casos caso Randall-Sundrum e brana espessa, respectivamente.
$\xi(y), \zeta(y)$	Espinores resultantes da separação de variáveis do espinor de Dirac para os casos caso Randall-Sundrum e brana espessa, quando a dimensionalidade do espaço tempo é par, respectivamente.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	p. 13
<b>2</b>	<b>REPRESENTAÇÕES DE SPIN 1/2</b>	p. 16
2.1	As Representações Espinoriais em $D$ Dimensões . . . . .	p. 16
2.1.1	As matrizes de Dirac . . . . .	p. 16
2.1.2	As equações de Dirac e Weyl . . . . .	p. 21
2.2	A Interação Gravitacional com o Spin 1/2 . . . . .	p. 23
2.2.1	A Relatividade Geral . . . . .	p. 23
2.2.2	Os vierbeins . . . . .	p. 25
2.2.3	Simetrias locais . . . . .	p. 27
<b>3</b>	<b>MODELOS RANDALL-SUNDRUM</b>	p. 28
3.1	O Modelo RS-I . . . . .	p. 28
3.1.1	A construção do modelo . . . . .	p. 28
3.1.2	A métrica . . . . .	p. 30
3.1.3	A solução das equações de Einstein . . . . .	p. 32
3.1.4	A Física do Modelo . . . . .	p. 33
3.2	O Modelo de RS-II . . . . .	p. 36
3.2.1	A construção . . . . .	p. 36
3.2.2	A equação tipo Schroedinger . . . . .	p. 37
3.2.3	O espectro gravitacional . . . . .	p. 39
3.3	A Brana como um Campo Escalar . . . . .	p. 41

<b>4 LOCALIZAÇÃO DE FÉRMIONS</b>	p. 44
4.1 Localização em $D = 5$ . . . . .	p. 44
4.1.1 No contexto do modelo Randall-Sundrum . . . . .	p. 44
4.1.2 No contexto da brana modeladas por kinks . . . . .	p. 46
4.2 Localização em $D$ Dimensões . . . . .	p. 48
4.2.1 Introdução . . . . .	p. 48
4.2.2 $D$ ímpar . . . . .	p. 48
4.2.3 $D$ par . . . . .	p. 50
<b>5 CONCLUSÃO</b>	p. 53
<b>REFERÊNCIAS</b>	p. 54

# 1 INTRODUÇÃO

O nosso mundo até o presente é descrito pelo Modelo Padrão de Partículas e a Teoria da Relatividade Geral, ambas descritas em quatro dimensões. Entretanto para muitos físicos essas teorias se mostraram incompletas, o que motivou o aparecimento de uma grande quantidade de trabalhos usando principalmente modelos de universo de dimensão superior.

Apesar de não existir nenhuma evidência experimental de que nosso universo possua mais do que quatro dimensões, é possível e bastante instrutivo construir teorias em modelos de universo com dimensão inferior ou superior ao padrão quadridimensional. Por outro lado, considerar a existência de dimensões extras tem sido uma importante ferramenta teórica para a solução de problemas em teorias em quatro dimensões. Em Física de Altas Energias, uma das motivações para o estudo desses tópicos resulta da procura por uma teoria capaz de unificar a gravidade com as outras forças fundamentais [14].

O primeiro esforço no contexto de se introduzir dimensões extras para unificar teorias ocorreu por volta de 1920 com Theodor Kaluza e Oscar Klein na tentativa de unificação da gravidade com o eletromagnetismo. A idéia adotada por eles foi considerar um espaço com cinco dimensões, sendo quatro espaciais e uma temporal. Para explicar o fato de não existir nenhum efeito detectado que revele a existência dessas dimensões extras, o modelo de Kaluza-klein (KK) considera a idéia de que as dimensões são completamente enroladas, ou seja, são representadas por uma esfera  $S^1$  de raio microscópico. Em outras palavras essas dimensões extras são *compactas*. Embora esse modelo fosse completamente inovador a teoria de Kaluza-Klein apresentava certos problemas. Um deles é que no processo de redução dimensional para quatro dimensões surgiu um campo escalar chamado de dilaton que entra em contradição com as equações de Maxwell [10].

Outra vertente de pesquisas considerando universos multidimensionais surgiu nos anos 60 a partir do estudo de espalhamento de hádrons. Nesse cenário, um modelo de ressonância dupla foi descrito, sendo que o espectro dos estados no modelo foi verificado

como sendo o espectro de uma corda vibrante. A motivação referente a dimensões extras é devido ao fato do modelo ser consistente com 26 dimensões se a teoria for bosônica, ou 10 dimensões se a teoria for supersimétrica. Conhecida atualmente como *teoria de cordas*, foi inicialmente estabelecida para descrever interações fortes tendo uma escala hadrônica da ordem de GeV definida pela tensão da corda. Nesse ponto a presença de um modo não massivo de spin 2, sem partícula hadrônica equivalente conhecida, mostrava-se inconsistente. Foi então que se procurou relacionar tal modo com o gráviton, substituindo então, a escala hadrônica pela escala de Planck gravitacional  $M_{Pl} = 10^{-19}\text{GeV}$ . A partir desta substituição, a teoria de cordas foi então a primeira fusão da teoria gravitacional com a mecânica quântica. As dimensões adicionais são regularmente microscópicas devido a escala natural de comprimento ser da ordem da escala de Planck, em torno de  $10^{-33}\text{cm}$ . Dessa forma as massas dos estados excitados são da ordem da escala de planck  $M_{Pl}$ , o que infelizmente impossibilita que a teoria seja testada experimentalmente [16].

Em outra linha de idéias, os modelos de dimensões extras surgiram em um contexto de quebra espontânea de simetria pelo campo de Higgs em teorias de gauge não abelianas. Nesse caso, a dependência espacial do valor esperado para o campo de Higgs demanda por defeitos topológicos para modelar partículas elementares. Tal motivação foi resultado do surgimento de modelos em que o universo quadrimensional é descrito por um defeito topológico chamado *parede de domínio* [21], que oculta a dimensão extra para as forças forte, fraca e eletromagnética. O mesmo não pode ser feito para a gravidade, o que nesse caso, restringe qualquer dimensão extra à uma escala microscópica. Esta é a idéia principal do que conhecemos sobre modelos de mundos em membranas ou “brane-worlds”. Posteriormente uma parede de domínio foi considerado em teorias de supercordas, sendo adotadas como o local onde terminam as cordas [3].

O conceito de dimensões extras microscópicas foi usado posteriormente por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) para calcular o tamanho permitido para dimensões extras., tendo como principal propósito solucionar o *problema da hierarquia*. Esse problema diz respeito à grande discrepância entre às escalas de massa gravitacional e eletrofraca,  $M_{Pl} = 10^{19}\text{ GeV}$  e  $M_{Ef} = 10^3\text{GeV}$ , respectivamente. A escala de Planck é definida pela equivalência entre a massa e energia a partir da massa de Planck, que por sua vez é representada pela unidade de massa no sistema natural de unidades. Mais precisamente o valor de massa é dado por  $m_p = \sqrt{\hbar c/G} \simeq 1,2209 \times 10^{19}\text{GeV}/c^2$ , onde  $c$  é velocidade da luz no vácuo,  $G$  a constante gravitacional e  $\hbar$  é a constante de Planck reduzida. A escala eletrofraca por sua vez é determinada por  $v = (G_F\sqrt{2})^{1/2}$ , onde  $G_F$  é a constante de Fermi.

Um modelo que resolve de maneira satisfatória o problema da hierarquia foi apresentado em 1999 por Lisa Randall e Raman Sundrum, conhecido como modelo *Randall-Sundrum* (RS). Ele explica como uma hierarquia exponencial entre as escalas da gravidade e eletrofraca pode ser gerada e como o padrão de gravidade em quatro dimensões emerge desse modelo no limite newtoniano.

No capítulo 2 introduz-se o conceito de representação de campos de spin  $1/2$  no espaço de Minkowski  $D$ -dimensional bem como a construção de tais representações de forma iterativa baseada em uma construção algébrica similar ao oscilador harmônico quântico. Em seguida é apresentado os principais aspectos conceituais da Teoria da Relatividade Geral (TRG) e as equações de campo de Einstein. Por fim é estabelecido a conexão entre espiniores no espaço de Minkowski e no espaço curvo na presença de gravidade.

No capítulo 3 é apresentado os modelos RS-I e RS-II, bem como seus principais aspectos. Nesse capítulo o modelo RS-I é usado para solucionar o problema da Hierarquia de Higgs, enquanto o modelo RS-II é usado para localizar os modos de Kaluza-Klein do campo gravitacional sobre uma 3-brana. Alternativamente introduz-se um modelo de brana espessa, suavizando o fator de dobra do modelo RS modelando a brana através de um campo escalar que possui a forma de um "kink".

No capítulo 4 usa-se os modelos RS e de brana espessa para localizar férmions em cinco dimensões. Em um segundo momento realiza-se a localização em  $D$  dimensões fazendo uso também das representações espinórias introduzidas no capítulo 2.



## 2 REPRESENTAÇÕES DE SPIN 1/2

### 2.1 As Representações Espinoriais em $D$ Dimensões

#### 2.1.1 As matrizes de Dirac

O estudo do comportamento das partículas relativísticas levaram os físicos teóricos a um entendimento profundo entre a teoria de grupos e as funções de onda que representam tais partículas [25]. Essas funções de onda interpretadas posteriormente como campos satisfazem equações de onda relativísticas que fornecem a dinâmica das partículas.

Em 1928, Paul A. M. Dirac formulou uma equação de onda que serviria para representar partículas de spin  $1/2$ , que corrigia o problema de densidade de probabilidade negativa apresentada pela equação de Klein-Gordon e ainda previa uma nova partícula elementar chamada positron [9]. Dirac notou que a equação da energia relativística de Einstein pode ser fatorada de forma que ela ficasse linear em relação aos operadores de momento e energia, o que deixaria a densidade de probabilidade positiva definida. No entanto o preço a pagar por essa simples manipulação matemática foi a introdução das chamadas matrizes de Dirac que satisfazem a álgebra de Clifford.

Existe uma forma bastante instrutiva para construir representações de spin  $1/2$  em dimensões superiores a quatro. Ela baseia-se em uma estreita relação entre as álgebras de Clifford e do oscilador harmônico quântico que é abordado em [17]. Inicialmente considera-se a álgebra de Clifford

$$\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB} \quad (2.1)$$

onde  $A = 0, 1, \dots, D - 1$ , representam índices do referencial de Lorentz (sistema de coordenadas plano), sendo que  $D$  representa o número de dimensões do espaço-tempo. Essa álgebra é satisfeita por matrizes  $n \times n$ , em que  $n$  deve ser par. Para mostrar isso toma-se

(2.1) para o caso em que  $A = 0$  e  $B = 1$ , e em seguida aplica-se o determinante em ambos os membros.

Para construir uma base para o espaço de estados considera-se inicialmente que a dimensão  $D$  do espaço-tempo sendo par, podendo ser escrita na forma  $D = 2k + 2$ . Dessa maneira se torna conveniente definir  $k + 1$  operadores

$$\Gamma^{0\pm} \equiv \frac{1}{2}(\pm\Gamma^0 + \Gamma^1) \quad (2.2)$$

$$\Gamma^{a\pm} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^{2a} \pm i\Gamma^{2a+1}), \quad a = 1, 2, \dots, \frac{D-2}{2}. \quad (2.3)$$

que satisfazem

$$\{\Gamma^{0+}, \Gamma^{0-}\} = 1 \quad (2.4)$$

$$\{\Gamma^{0+}, \Gamma^{0+}\} = \{\Gamma^{0-}, \Gamma^{0-}\} = 0 \quad (2.5)$$

$$\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b-}\} = \delta^{ab} \quad (2.6)$$

$$\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b+}\} = \{\Gamma^{a-}, \Gamma^{b-}\} = 0 \quad (2.7)$$

como também  $(\Gamma^{0\pm})^2 = (\Gamma^{a\pm})^2 = 0$ . Todas essas equações podem ser provadas mediante o uso de (2.1). Definindo os operadores número similares ao oscilador harmônico na mecânica quântica

$$\hat{N}_0 \equiv \Gamma^{0+}\Gamma^{0-} \quad (2.8)$$

$$\hat{N} \equiv \Gamma^{a+}\Gamma^{a-} \quad (2.9)$$

é fácil ver que eles formam um conjunto de observáveis compatíveis. Suas respectivas equações de autovalor são

$$\hat{N}_0|n_0, n_a\rangle = n_0|n_0, n_a\rangle \quad (2.10)$$

$$\hat{N}|n_0, n_a\rangle = n_a|n_0, n_a\rangle. \quad (2.11)$$

As relações de comutação desses operadores número com os operadores definidos em (2.2) e (2.3) são da forma

$$[\hat{N}_0, \Gamma^{0\pm}] = \pm\Gamma^{0\pm} \quad (2.12)$$

$$[\hat{N}, \Gamma^{a\pm}] = \pm\Gamma^{a\pm}. \quad (2.13)$$

Nota-se então que  $\Gamma^{0+}$  e  $\Gamma^{a+}$  fazem o papel de  $k + 1$  operadores de levantamento enquanto que  $\Gamma^{0-}$  e  $\Gamma^{a-}$  fazem o papel de  $k + 1$  operadores de abaixamento similares e ao oscilador

harmônico. Os autovalores  $n_0$  e  $n_a$  assumem somente os valores 0 ou 1.

Como existem  $k + 1$  operadores de criação, e cada operador tem a possibilidade de atuar ou não atuar em um estado, com base nisso, conclue-se que a dimensão do espaço de estados é  $2^{k+1} = 2^{D/2}$ . Definindo  $n = s + 1/2$ , na qual  $s = \pm 1/2$  formamos uma base  $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_k)$  na qual um estado generalizado  $|s_0, s_1, \dots, s_k\rangle$  pode ser construído por aplicações sucessivas dos operadores de levantamento sobre um estado fundamental onde todos os  $s$  assumem o valor  $-1/2$  tal que

$$\Gamma^{0-}\Gamma^{a-}|s_0 = -1/2, s_1 = -1/2, \dots, s_k = -1/2\rangle = \Gamma^{0-}\Gamma^{a-}\zeta = 0 \quad (2.14)$$

onde  $\zeta$  definido como o estado fundamental. Então um estado generalizado pode ser escrito como

$$|s_0, s_1, \dots, s_k\rangle \equiv (\Gamma^{k+})^{s_{k+1/2}} \dots (\Gamma^{1+})^{s_1+1/2} (\Gamma^{0+})^{s_0+1/2} \zeta. \quad (2.15)$$

Dessa forma as representações irredutíveis para as matrizes  $\Gamma$  podem ser construídas de forma indutiva. Para descrever como esse processo ocorre, considere  $D = 2$ . Nesse caso de acordo com (2.2) existem apenas os operadores de levantamento/abaixamento  $\Gamma^{0+}$  e  $\Gamma^{0-}$ , que atuam nos estados  $|s_0 = +1/2\rangle \equiv |+\rangle$  e  $|s_0 = -1/2\rangle \equiv |-\rangle$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma^{0-}|+\rangle &= |-\rangle \\ \Gamma^{0+}|-\rangle &= |+\rangle \\ \Gamma^{0+}|+\rangle &= \Gamma^{0-}|-\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

e pode-se construir as matrizes  $\Gamma^0$  e  $\Gamma^1$  por meio de

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \langle +|\Gamma|+\rangle & \langle +|\Gamma|-\rangle \\ \langle -|\Gamma|+\rangle & \langle -|\Gamma|-\rangle \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

na qual  $\Gamma^0$  e  $\Gamma^1$  ficam dadas por

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Para  $D = 4$  o espaço de estados é composto por  $\{|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle\}$  e existirão os operadores escada  $\Gamma^{0\pm}, \Gamma^{1\pm}$  cuja atuação é regida por (2.15). Então dessa forma as representações matriciais para as matrizes  $\Gamma$  podem ser escritas como

$$\Gamma = \langle s'_1, s'_0 | \Gamma | s_0, s_1 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle s'_1 | \otimes \langle s'_0 | \Gamma | s_0 \rangle \otimes | s_1 \rangle \\
&= \langle - | \otimes \langle - | (\Gamma^{0-})^a (\Gamma^{1-})^c \Gamma (\Gamma^{1+})^d (\Gamma^{0+})^b | - \rangle \otimes | - \rangle
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde  $a, b, c, d = 0, 1$ . Na equação anterior está implícito um produto direto de duas matrizes  $2 \times 2$ ; a primeira é dada pela combinação dos índices  $a$  (linha) e  $b$  (coluna) equanto que a segunda matriz que compõe esse produto é construída a partir dos índices  $c, d$ , e podemos escrever as duas primeiras matrizes de Dirac como  $\Gamma^A = \gamma^A \otimes X^{(A)}$ , onde somente aqui,  $A = 0, 1$ ,  $\gamma^A$  são as matrizes de Dirac em duas dimensões e  $X^{(A)}$  é uma matriz a ser determinada. Usando (2.19), encontra-se que

$$\Gamma^A = \gamma^A \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = 0, 1. \tag{2.20}$$

Para as matrizes  $\Gamma^2$  e  $\Gamma^3$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2,3)} &= \langle - | \otimes \langle - | (\Gamma^{0-})^a (\Gamma^{1-})^c \Gamma^{(2,3)} (\Gamma^{1+})^d (\Gamma^{0+})^b | - \rangle \otimes | - \rangle \\
&= \langle - | \otimes \langle \pm | (\Gamma^{1-})^c \Gamma^{(2,3)} (\Gamma^{1+})^d | \pm \rangle \otimes | - \rangle \\
&= \mathbf{1}_2 \otimes \langle - | (\Gamma^{1-})^c \Gamma^{(2,3)} (\Gamma^{1+})^d | - \rangle \\
&= \mathbf{1}_2 \otimes X^{(2,3)}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

e descobrindo as matrizes  $X^{(2,3)}$ , obtêm-se

$$\Gamma^2 = \mathbf{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3 = \mathbf{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

A generalização para  $D = 2k + 2$  ocorre de forma indutiva. Deve-se primeiro conhecer a representação das matrizes de Dirac em  $D - 2$  dimensões, as quais podem ser denotadas por  $\gamma^A$  e que possuem ordem  $2^k$ , e a partir delas constroi-se as matrizes de Dirac

$$\begin{aligned}
\Gamma^A &= \gamma^A \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = 0, 1, \dots, D - 3, \\
\Gamma^{D-2} &= \mathbf{1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{D-1} = \mathbf{1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Sabe-se que existe uma relação íntima entre o grupo grupo de rotações e o grupo de Lorentz. Basicamente a partir dessa relação intruduz-se a noção de spin no contexto relativístico, através dos geradores do grupo  $SO(1, D - 1)$

$$\Sigma^{AB} \equiv -\frac{i}{4} [\Gamma^A, \Gamma^B] \tag{2.24}$$

que satisfazem a álgebra de Lie

$$i[\Sigma^{AB}, \Sigma^{CD}] = \eta^{BC}\Sigma^{AD} + \eta^{AD}\Sigma^{BC} - \eta^{BD}\Sigma^{AC} - \eta^{AC}\Sigma^{BD}. \quad (2.25)$$

Dessa forma pode dizer que os geradores  $\Sigma^{01}$  e  $\Sigma^{2a,2a+1}$  comutam e podem ser diagonalizados simultâneamente. Definindo os operadores de spin

$$S_j = i^{\delta_{j,0}}\Sigma^{2j,2j+1} \quad (2.26)$$

com  $j = 0, 1, \dots, k$  pode-se mostrar que

$$S_j = \Gamma^{j+}\Gamma^{j-} - \frac{1}{2} \quad (2.27)$$

e portanto um estado  $|\zeta^s\rangle \equiv |s_0, s_1, \dots, s_k\rangle$  é um autoestado de (2.27) com autovalor  $s_j = \pm 1/2$ . Dessa forma temos uma representação de Dirac para o grupo  $SO(1, D-1)$ .

Por outro lado, pode-se definir a matriz

$$\Gamma \equiv i^{-k} \prod_{l=0}^{D-1} \Gamma^l = i^{-k} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{D-1} \quad (2.28)$$

cujas propriedades

$$(\Gamma)^2 = \mathbf{1}, \quad \{\Gamma, \Gamma^A\} = 0, \quad [\Gamma, \Sigma^{AB}] = 0 \quad (2.29)$$

são sempre satisfeitas. Os autovalores de  $\Gamma$  os quais serão chamados daqui para frente de quiralidades, são  $\pm 1$ . É possível escrever a matriz  $\Gamma$  em termos dos operadores de spin (2.27) da forma

$$\Gamma = 2^{k+1} S_0 S_1 \dots S_k = 2^{k+1} \prod_{a=1}^k S_a. \quad (2.30)$$

Antes na representação de Dirac, como já foi dito antes, a dimensão do espaço de estados é  $2^{k+1}$ . Agora tomando por referência os autovalores da matriz  $\Gamma$ , o espaço de estados fica dividido em duas partes independentes; os  $2^k$  estados com quiralidade  $+1$  formam uma representação de *Weyl* da álgebra de Lorentz, enquanto os outros  $2^k$  estados com quiralidade  $-1$  formam uma segunda representação independente de *Weyl*. Nessa representação se torna conveniente definir os operadores de projeção

$$P_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \Gamma), \quad P_L \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \Gamma) \quad (2.31)$$

os quais satisfazem as propriedades

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R + P_L = \mathbf{1}, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0. \quad (2.32)$$

Esses operadores devem ser invariantes por transformações de Lorentz. Atuando esses operadores em um espinor de Dirac  $\Psi$  obtêm-se novos espinores

$$\Psi_R \equiv P_R \Psi, \quad \Psi_L \equiv P_L \Psi \quad (2.33)$$

chamados espinores chirais ou de Weyl. Eles satisfazem vínculos covariantes de Lorentz

$$\Gamma \Psi_R = \Psi_R, \quad \Gamma \Psi_L = -\Psi_L. \quad (2.34)$$

Para  $D = 2k + 2$ , a relação entre as dimensionalidades das representações de Dirac e Weyl são

$$2_{Dirac}^{k+1} = 2_{Weyl}^k + 2_{Weyl}^k \quad (2.35)$$

onde o lado esquerdo da igualdade é a dimensionalidade da representação de Weyl. O “linha” significa quiralidade  $-1$ .

Para o caso em que o número de dimensões é ímpar, pode-se escrever  $D = 2k + 3$ . Mas como construir representações as espinoriais do  $SO(1, 2k + 2)$  nesse caso? Uma forma bastante simples de resolver esse aparente problema consiste em acrescentar uma nova matriz ao conjunto de matrizes  $\Gamma$  do caso em que a dimensionalidade do espaço-tempo é par de tal forma que a álgebra de Clifford continue sendo satisfeita [17]. Boas candidatas seriam as matrizes  $\Gamma^D = \Gamma$  ou  $\Gamma^D = -\Gamma$  isso por causa das duas primeiras equações de (2.29). Dessa forma resolve-se o problema e nota-se que a dimensão da representação nesse caso é a mesma do caso par.

## 2.1.2 As equações de Dirac e Weyl

A equação de Dirac em  $D$  dimensões pode ser facilmente determinada por meio de uma ação que pode ser construída baseada em alguns princípios. Ela deve possuir simetria por transformações de Lorentz (covariância) como também deve ser real. Para o caso de férmions massivos livres em  $D = 4$ , ela pode ser

$$S_{Dirac} = i \int d^4x (\bar{\psi} \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi - m \bar{\psi} \psi) \quad (2.36)$$

onde  $\psi$  é o espinor de Dirac. A dinâmica desse espinor é fornecida pela equação de Dirac

$$(\gamma^\alpha \partial_\alpha - m)\psi(x) = 0. \quad (2.37)$$

Para generalizar-se a equação de Dirac em  $D$  dimensões, se torna conveniente tratar primeiro o caso em que a *dimensão do espaço-tempo é ímpar*. Isso porque nesse caso não pode-se definir uma representação de Weyl uma vez que a matriz  $\Gamma$  satisfaz a álgebra de Clifford (2.1). Então a única representação possível seria a de Dirac, e portanto a ação para esse caso fica dada por

$$S_{Dirac}^{(D)} = i \int d^D x \bar{\Psi} (\Gamma^A \partial_A - M) \Psi \quad (2.38)$$

e a equação de Dirac resultante é idêntica ao caso quadrimensional

$$(\Gamma^A \partial_A - M) \Psi = 0. \quad (2.39)$$

Para o caso em que a *dimensão do espaço-tempo é par*, existe duas representações possíveis: a de Dirac (férmions de Dirac) e a de Weyl (férmions quirais). A escolha fica dependente da situação em questão. Na representação de Dirac, a equação que fornece a dinâmica do espinor permanece inalterada, o seja, a forma da equação de Dirac é mantida. No entanto para descrever férmions quirais deve-se inserir os espinores de Weyl na equação de Dirac. Ao fazer isso obtêm-se duas equações acopladas da forma

$$\Gamma^A \partial_A \Psi_R - M \Psi_L = 0 \quad (2.40)$$

$$\Gamma^A \partial_A \Psi_L - M \Psi_R = 0. \quad (2.41)$$

Quando  $M = 0$ , as quiralidades direita e esquerda não se misturam e os espinores  $\Psi_R$  e  $\Psi_L$  satisfazem equações independentes chamadas equações de Weyl

$$\Gamma^A \partial_A \Psi_q = 0. \quad (2.42)$$

onde aqui foi introduzida a notação  $q = R, L$ .

## 2.2 A Interação Gravitacional com o Spin 1/2

### 2.2.1 A Relatividade Geral

A interação gravitacional é de caráter universal, isto é, todos os corpos massivos estão sujeitos a ela. Albert Einstein (1879-1955) foi o primeiro a formular uma teoria para a gravitação compatível com a relatividade especial e que no limite da mecânica clássica a equação de Poisson é reproduzida.

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) é uma teoria relativística para o campo gravitacional formulada por Einstein por volta da segunda década do século XX. Essa teoria relaciona matéria-energia com a geometria do espaço-tempo de uma forma bastante peculiar. Ela permite determinar a métrica  $g_{\mu\nu}$  de onde se obtém a informação geométrica (campo gravitacional) produzida por uma distribuição de matéria-energia. Para construir tal teoria, Einstein baseou-se em uma observação, que posteriormente se tornou um princípio, chamado *princípio da equivalência*. Basicamente esse princípio diz que todas as leis da Física se reduzem localmente à relatividade especial, através de uma escolha adequada do sistema de referência [12].

Na TRG a geometria do espaço-tempo é modificada pela existência de matéria-energia gerada por campos que podem ser acoplados com a gravidade através do *Tensor Energia-Momento Métrico*. Dado uma ação que representa uma certa teoria de campo  $D$ -dimensional

$$S_m = \int_{\Omega} \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^D x \quad (2.43)$$

o tensor energia-momento fica definido como [15]

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{MN} \delta g^{MN} \sqrt{-g} d^D x \quad (2.44)$$

onde  $g$  e  $g^{MN}$  são o determinante da métrica e a inversa da mesma em  $D$  dimensões.

Uma simetria essencial para a ação da matéria é a invariância por difeomorfismo (transformações gerais de coordenadas)  $x^M \rightarrow x'^M$ . Considere a transformação infinitesimal

$$x'^M = x^M + \eta^M(x) \quad (2.45)$$

onde  $\eta^M$  é um parâmetro infinitesimal. Nas teorias físicas a lagrangeana da matéria possui dependência explícita da métrica  $g^{MN}$  e dos campos e de suas derivadas de primeira ordem



deles, ou seja,  $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g^{MN}, \phi, \partial_M \phi)$ . Essa simetria implica na conservação do tensor energia momento,

$$\nabla_N T^{MN} = 0 \quad (2.46)$$

Pode-se então dizer que a conservação do tensor energia-momento é uma consequência direta de exigência de que os sistemas físicos existam independente da escolha do sistema de coordenadas.

Uma vez dado uma teoria que descreve a matéria, como relacioná-la com a geometria do espaço-tempo? Nesse caso deve-se construir uma ação que possa ser acoplada com a matéria, que seja invariante por difeomorfismos, que forneça a informação geométrica do espaço e através do cálculo de variações obter a equação que descreve a dinâmica de geometria, ou seja, a dinâmica de  $g_{MN}$  [15]. A ação que descreve a dinâmica da métrica foi proposta por David Hilbert (1862-1943), conhecida como ação de *Einstein-Hilbert*. Se o espaço tempo em sua forma fundamental possuir  $D$  dimensões, tal ação é definida como

$$S_{EH} = M^{D-2} \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^D x \quad (2.47)$$

onde  $M$  fornece a escala de energia da gravitação em  $D$  dimensões. Para o caso quadrimensional a escala de energia é chamada de escala de Planck e têm-se que  $M^{D-2} = M_{Pl}^2 = 1/16\pi G$  sendo que  $G$  é a constante da gravitação universal de Newton.  $\Omega$  é a variedade que representa o espaço-tempo,  $\sqrt{-g} d^D x$  é o elemento de volume invariante e  $R$  é o escalar de Ricci que é dado por

$$R = g^{MN} R_{MN} \quad (2.48)$$

e  $R_{MN}$  é o tensor de Ricci, dado por [23]

$$R_{MN} = \partial_L \Gamma^L_{MN} - \partial_N \Gamma^L_{ML} + \Gamma^P_{MN} \Gamma^L_{LP} - \Gamma^P_{LM} \Gamma^L_{NP} \quad (2.49)$$

Dessa formas as equações tensoriais que descreve a dinâmica da geometria, são obtidas dada pela aplicação do princípio variacional na ação  $S_{EH} + S_m$ , resultando nas equações de campo de Einstein [7]

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \kappa^{(D)} T_{MN} \quad (2.50)$$

onde definiu-se  $\kappa^{(D)} = 1/2M^{D-2}$

## 2.2.2 Os vierbeins

Uma vez introduzidas as representações espinoriais no espaço de Minkowski, agora deseja-se construí-las na presença de gravidade. Uma forma relativamente simples de estabelecer uma conexão entre as representações do grupo de Lorentz (os campos presentes na natureza) no espaço de Minkowski e no espaço curvo é usando o formalismo de *vierbeins* [18].

Na ausência de gravidade as Leis da física são invariantes por transformações de Lorentz *globais*, isso é o que afirma o princípio da relatividade. Para incorporar gravidade nesse contexto é necessário recorrer ao *princípio da equivalência de Einstein*, no qual é sempre possível escolher um sistema de referência tal que a gravidade desapareça localmente, chamado de “referencial de queda livre”. Existe a necessidade de relacionar quantidades que estão em um referencial inercial com outras que estão no referencial do campo, ou em termos técnicos, como relacionar quantidades no espaço “flat” com as do espaço curvo (também chamado de espaço físico)?

A resposta para esse questionamento está na *transformação de coordenadas*. Seja  $\{x^M\}$  um sistema de coordenadas  $D$  dimensional curvo associada a variedade curvada  $\Omega$  e  $\{\xi^A\}$  são as coordenadas “flats” (locais) tangente à variedade. Aqui deve-se fazer uma distinção nos índices relacionados as coordenadas locais e globais: Quando forem  $L, M, N, \dots$ , se tratam do sistema de coordenadas curvo e quando forem  $A, B, C, \dots, J$  se tratam das coordenadas locais, e ambos variam de 0 a  $D-1$ . Quando as coordenadas forem quadrimensionais, usa-se os correspondentes gregos, isto é,  $\alpha, \beta, \dots$  para as coordenadas locais e  $\lambda, \mu, \dots$  para as coordenadas globais.

Esclarecido a notação dos índices, realiza-se uma transformação de coordenadas  $\{x^M\} \rightarrow \{\xi^A\}$  e com isso pode-se escrever  $\xi^A = \xi^A(x^M)$  ou de forma equivalente,

$$d\xi^A = \frac{\partial \xi^A}{\partial x^M} dx^M \quad (2.51)$$

onde as derivadas são avaliadas no ponto de interesse. Os elementos da matriz de transformação entre as coordenadas envolvidas são chamados de *vierbeins*, definidos como

$$e^A_M(x) \equiv \frac{\partial \xi^A}{\partial x^M} \quad (2.52)$$

sendo que os índices sobrescritos designam a linha e os subscritos a coluna da matriz.

Dessa forma (2.51) se torna

$$d\xi^A = e^A_M(x)dx^M \quad (2.53)$$

e os elementos da matriz da transformação inversa são os *vierbeins inversos*,

$$dx^M = \frac{\partial x^M}{\partial \xi^A} d\xi^A \equiv e_A^M(x) d\xi^A. \quad (2.54)$$

A relação entre esses vierbeins obtida de

$$d\xi^A = e^A_M dx^M = e^A_M e_B^M d\xi^B \Rightarrow e^A_M e_B^M = \delta_B^A \quad (2.55)$$

também

$$dx^M = e_A^M d\xi^A = e_A^M e_N^A dx^N \Rightarrow e_A^M e_N^A = \delta_N^M. \quad (2.56)$$

As derivadas parciais também sofrem influência dos vierbeins,

$$\begin{aligned} \partial_A &= \frac{\partial x^M}{\partial \xi^A} \partial_M = e_A^M \partial_M \\ \partial_M &= \frac{\partial \xi^A}{\partial x^M} \partial_A = e^A_M \partial_A. \end{aligned} \quad (2.57)$$

A métrica do sistema de coordenadas curvo pode ser escrita em termos da métrica “flat”, levando em conta que na transformação  $\{\xi^A\} \rightarrow \{x^M\}$  o tensor métrico pode ser escrito na forma

$$g_{MN}(x) = e^A_M(x) e^B_N(x) \eta_{AB}. \quad (2.58)$$

E de maneira análoga, a métrica inversa é escrita como  $g^{MN} = e_A^M(x) e_B^N(x) \eta^{AB}$ . Pode-se verificar facilmente, usando (2.58) e a inversa da métrica que  $g^{ML} g_{LN} = \delta_N^M$ . De maneira análoga  $\eta_{AB}$  pode ser escrita em termos das tetradas inversas da forma

$$\eta_{AB} = e_A^M e_B^N g_{MN} \quad (2.59)$$

e a inversa fica dada por  $\eta^{AB} = e^A_M e^B_N g^{MN}$ . A álgebra de Clifford (2.1) na presença de gravidade se torna

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2g^{MN} \quad (2.60)$$

onde se torna necessário definir a relação entre as matrizes de Dirac no espaço plano e no espaço curvo  $\Gamma^M = e_A^M \Gamma^A$ .

### 2.2.3 Simetrias locais

A lagrangeana de Dirac é invariante por transformações de Lorentz globais [22], como as que foram abordadas na seção 2.1. No entanto na presença de gravidade, as transformações de Lorentz dependem de cada posição do espaço tempo, ou seja, elas são locais. Isso faz com que a gravidade seja tratada como um campo de Gauge [18]. Dessa forma deve-se substituir a derivada parcial comum na lagrangeana de Dirac por uma derivada covariante do tipo,

$$D_A = e_A^M (\partial_M + \omega_M) \quad (2.61)$$

onde a introdução do campo (1-forma)  $\omega_M$  é o preço a pagar para que a simetria devido as transformações de Lorentz seja mantida. Essa derivada covariante deve obedecer a transformação

$$D_A \Psi \rightarrow \Lambda_A^B S(x) D_B \Psi \quad (2.62)$$

de onde conclui-se que o campo  $\omega_M$  satisfaz

$$\omega'_M = -\partial_M S(x) S^{-1}(x) + S(x) \omega_M S^{-1}(x) \quad (2.63)$$

o qual pode ser escrito em termos das matrizes geradoras da representação espinorial do grupo de Lorentz da forma

$$\omega_M(x) \equiv \frac{1}{2} \omega_M^{AB}(x) \Sigma_{AB} \quad (2.64)$$

De forma que a lagrangeana invariante por transformações de Lorentz locais fica escrita como

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi}(x) \left[ \Gamma^A e_A^M \left( \partial_M + \frac{1}{2} \omega_M^{AB} \Gamma_A \Gamma_B \right) - M \right] \Psi(x) \quad (2.65)$$

onde

$$\omega_M^{AB} \equiv e^A_L \partial_M e^{BL} + e^A_L e^{BN} \Gamma^L_{MN} \quad (2.66)$$

é a conexão de spin. Ela desempenha um papel similar ao da conexão afim para o caso de vetores e tensores. Aqui ela é introduzida para que a derivada de um espinor continue sendo um espinor.

# 3 MODELOS RANDALL-SUNDRUM

## 3.1 O Modelo RS-I

### 3.1.1 A construção do modelo

O fato de não ser possível (até agora) observar as dimensões extras não quer dizer que elas não existem. Pode-se pensar nelas como muito pequenas e enroladas, ou seja, *compactas*. Uma forma de justificar esse pensamento reside no fato de que a escala de compactificação teria que ser menor do que a escala eletrofraca que governa o *Modelo Padrão de Partículas* [20].

Lisa Randall e Raman Sundrum propuseram em 1999 um modelo que resolveu o *problema da hierarquia de Higgs*. Esse problema diz respeito a grande discrepância entre as escalas de energia do Modelo Padrão, que é da ordem de  $10^3\text{GeV}$  e a de Planck, que é a escala de energia na qual os fenômenos da gravidade quântica são predominantes, da ordem de  $10^{19}\text{GeV}$  [14].

O modelo Randall-Sundrum tipo I, que é chamado de forma abreviada de RS-I, é construído em  $D = 5$  onde só existe uma única dimensão extra compacta representada por uma circunferência parametrizada por um ângulo  $\phi$  definido no intervalo  $-\pi \leq \phi \leq \pi$  da forma  $r_c\phi$ , onde  $r_c$  é o chamado *raio de compactificação*. Exatamente em  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi$  existem duas hipersuperfícies quadrimensionais chamadas *3-branas* que modelam um defeito topológico no bulk. A dimensão extra é orientada por um grupo de simetria  $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$  transformando-a no que os matemáticos chamam de orbifold  $S^1/\mathbb{Z}_2$ , através da identificação  $(x^\mu, \phi) \sim (x^\mu, -\phi)$  como ilustrado na figura 1. Todo esse aparato fica imerso em um espaço 5-dimensional chamado de *bulk*.

As duas 3-branas representam dois mundos distintos, e sobre uma delas repousa o Modelo Padrão governado pela interação eletrofraca. As condições de contorno impostas

sobre a métrica de fundo do Bulk são

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0) = g_{\mu\nu}^{ocu}(x^\mu), g_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi) = g_{\mu\nu}^{vis}(x^\mu) \quad (3.1)$$

onde  $g_{\mu\nu}^{vis}(x^\mu)$  é a métrica especificada sobre a brana visível (onde se encontra o modelo padrão) e  $g_{\mu\nu}^{ocu}(x^\mu)$  é a métrica especificada sobre a outra brana, que está “oculta”, e  $g_{MN}$  com  $M, N = 0, 1, 2, 3, \phi$  é a métrica de fundo do bulk. Esse modelo parte da hipótese de que todos os campos do modelo padrão se encontram confinados sobre a brana visível, e somente a gravidade pode se propagar nas demais dimensões uma vez que ela é intrínseca ao espaço-tempo.

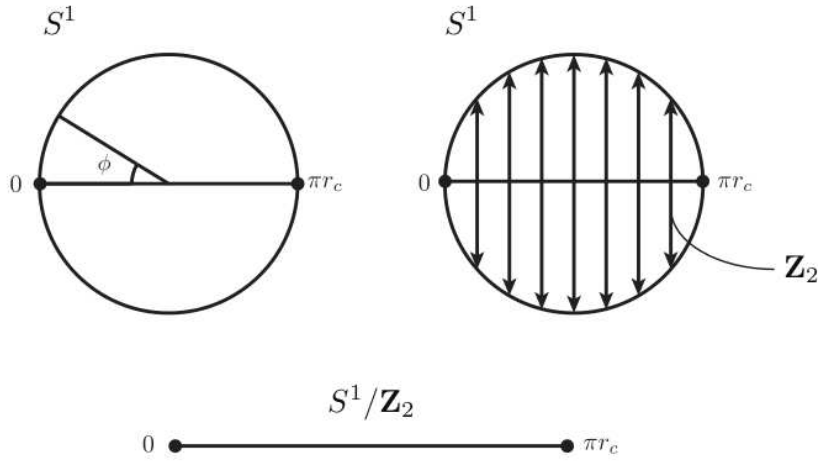


Figura 1: Orbifold  $S^1/\mathbb{Z}_2$ . Adaptado de [8].

A ação clássica que descreve o modelo deve conter a gravidade diluída no bulk, e a ação dos campos em cada brana. Primeiro escreve-se a ação da gravidade em cinco dimensões usando (2.47) acrescida de um termo com uma constante cosmológica 5-dimensional da forma

$$S_g = M^3 \int d^5x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) = M^3 \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (3.2)$$

onde  $M$  é a escala de fundamental de Planck e  $R$  é o escalar de Ricci, todos em cinco dimensões. As ações das branas visível e oculta são quadrimensionais, dadas respectivamente por

$$S_{vis} = -V_{vis} \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \quad (3.3)$$

$$S_{ocu} = -V_{ocu} \int d^4x \sqrt{-g_{ocu}} \quad (3.4)$$

onde  $g_{vis}$  e  $g_{ocu}$  são as métricas quadrimensionais induzidas sobre as branas visível e oculta, respectivamente. As quantidades  $V_{vis}$  e  $V_{ocu}$  são as constantes cosmológicas (tensões) nas branas. A ação do modelo RS-I é então

$$S = S_g + S_{ocu} + S_{vis} \quad (3.5)$$

A princípio o modelo foi construído especificamnte para a gravidade pura, dessa forma não acrescenta-se matéria nas branas ( $\mathcal{L}_{vis} = \mathcal{L}_{ocu} = 0$ ). A variação da ação gravitacional em relação a métrica do bulk se torna

$$\delta S_g = M^3 \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g} (G_{MN} + \Lambda g_{MN}) \delta g^{MN} \quad (3.6)$$

onde  $G_{MN}$  é o tensor de Einstein definido como [15]

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R. \quad (3.7)$$

A ação variada das branas com relação a mesma métrica do bulk, pode ser escrita como

$$\delta S_b = \frac{1}{2} \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi [V_{ocu} \sqrt{-g_{ocu}} \delta(\phi) g_{\mu\nu}^{ocu} + V_{vis} \sqrt{-g_{vis}} \delta(\phi - \pi) g_{\mu\nu}^{vis}] \delta_M^\mu \delta_N^\nu \quad (3.8)$$

que comparando com a definição padrão de tensor energia momento

$$T_{MN} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} [V_{ocu} \sqrt{-g_{ocu}} \delta(\phi) g_{\mu\nu}^{ocu} + V_{vis} \sqrt{-g_{vis}} \delta(\phi - \pi) g_{\mu\nu}^{vis}] \delta_M^\mu \delta_N^\nu. \quad (3.9)$$

Então as equações de Einstein se tornam

$$G_{MN} + \Lambda g_{MN} = -\frac{(-g)^{-1/2}}{2M^3} [V_{ocu} \sqrt{-g_{ocu}} \delta(\phi) g_{\mu\nu}^{ocu} + V_{vis} \sqrt{-g_{vis}} \delta(\phi - \pi) g_{\mu\nu}^{vis}] \delta_M^\mu \delta_N^\nu. \quad (3.10)$$

Uma interpretação física de cada termo em (3.10) se mostra bastante instrutiva. A constante cosmológica desenvolverá um papel extremamente importante na determinação do tipo de geometria do bulk. Embora não exista matéria sobre as branas, o tensor energia-momento possui energia de vácuo constante  $V_{ocu}$  e  $V_{vis}$  que atuam como fonte do campo gravitacional mesmo na ausência de matéria [24]. As funções delta de Dirac indicam as localizações de cada brana.

### 3.1.2 A métrica

Uma vez determinadas as equações de campo, deve-se determinar a métrica que as resolve. Geralmente em gravitação, a métrica quadrimensional  $g_{\mu\nu}$  é função das coordenadas

do espaço-tempo  $x^\mu$ . Quando acrescenta-se uma dimensão extra, a métrica 5-dimensional passa a depender dessa inclusão, ou seja, tem-se agora  $g_{MN} = g_{MN}(x, \phi)$ . Então o elemento de linha 5-dimensional pode ser escrito como

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N \\ &= \bar{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + 2g_{\phi\mu}(x, \phi) d\phi dx^\mu + g_{\phi\phi}(\phi) d\phi^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\bar{g}_{\mu\nu}$  é a métrica quadrimensional independente da dimensão extra. No entanto poderia-se pensar em uma métrica que fosse composta *separadamente* por um termo que só dependa das quatro coordenadas do espaço-tempo usuais e outro termo que só dependa somente da dimensão extra. Para isso deve-se impor que  $g_{\phi\mu}(x, \phi) = 0$  por conta da que a brana possui uma simetria de paridade ( $x^\mu \rightarrow -x^\mu$ ) de forma que

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + g_{\phi\phi}(\phi) d\phi^2. \quad (3.12)$$

Isso significa que a variedade 5-dimensional do modelo pode ser escrita como um produto direto entre a variedade do espaço-tempo quadrimensional  $M^{(4)}$  e o orbifold

$$M^{(5)} = M^{(4)} \otimes S^1/\mathbb{Z}_2. \quad (3.13)$$

Quando isso é possível o espaço em questão possui uma geometria *fatorizável*. Por outro lado se não for possível escrever a métrica de uma variedade como (3.13), então ela possui uma métrica *não-fatorizável*.

O ansatz proposto pelo modelo RS-I que resolve as equações de Einstein (3.10) deve preservar a invariância de Poincaré, ser estática e em cima da brana visível ela deve se tornar a métrica de Minkowski quadrimensional. A métrica proposta foi do tipo não-fatorizável da forma

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \quad (3.14)$$

Esse ansatz proposto por Lisa Randall e Raman Sundrum possui uma aspecto interessante; uma vez fixada a posição da brana, sua métrica é conformal a métrica de Minkowski [26], isso ocorre devido a presença do fator exponencial  $e^{-2\sigma(\phi)}$  chamado de *fator de warp* (do inglês “dobra”). Dessa forma a brana se torna apta a suportar o Modelo Padrão, o que está de acordo com a hipótese do modelo na seção anterior.



### 3.1.3 A solução das equações de Einstein

Para solucionarmos as equações de Einstein (3.10), escreve-se a

$$g_{MN}(\phi) = e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu} + r_c^2\delta_M^\phi\delta_\phi^N. \quad (3.15)$$

Mas a métrica inversa que é calculada mediante a relação constitutiva  $g_{MP}g^{PN} = \delta_N^M$  é dada por

$$g^{MN}(\phi) = e^{2\sigma(\phi)}\eta^{\mu\nu} - r_c^2\delta_\phi^M\delta_\phi^N. \quad (3.16)$$

Os coeficientes da conexão  $\Gamma^P_{MN}$ , compatível com a métrica, que são diferentes de zero são

$$\Gamma^\phi_{\mu\nu} = \frac{\sigma'(\phi)}{r_c}e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

$$\Gamma^\nu_{\mu\phi} = -\sigma'(\phi)\delta_\mu^\nu. \quad (3.18)$$

onde  $\sigma'(\phi)$  representa a derivada de  $\sigma(\phi)$  em relação a  $\phi$ . O trabalho agora será substituir a métrica do modelo RS-I em (3.10). Usando as equações (3.17) e (3.18), as componentes do tensor de Ricci  $R_{MN}$  dado por

$$R_{\mu\nu} = [\sigma''(\phi) - 4\sigma'^2(\phi)]\frac{e^{2\sigma(\phi)}}{r_c^2}\eta_{\mu\nu} \quad (3.19)$$

$$R_{\mu\phi} = 0 \quad (3.20)$$

$$R_{\phi\phi} = 4[\sigma''(\phi) - \sigma'^2(\phi)]. \quad (3.21)$$

E o escalar de Ricci fica dado por

$$R = \frac{4}{r_c^2}[2\sigma''(\phi) - 5\sigma'^2(\phi)]. \quad (3.22)$$

Os tensores de Einstein  $G_{\mu\nu}$  e  $G_{\phi\phi}$  são

$$G_{\mu\nu} = 3[-\sigma''(\phi) + 2\sigma'^2(\phi)]\frac{e^{-2\sigma(\phi)}}{r_c^2}\eta_{\mu\nu} \quad (3.23)$$

$$G_{\phi\phi} = 6\sigma'^2(\phi). \quad (3.24)$$

As métricas induzidas sobre as branas podem ser escritas como

$$g_{\mu\nu}^{ocu} = g_{\mu\nu}^{ocu} = e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu}. \quad (3.25)$$

As equações de Einstein do modelo são

$$6\sigma'^2(\phi) = -\Lambda r_c^2 \quad (3.26)$$

$$3\sigma''(\phi) = \frac{r_c}{2M^3}[V_{ocu}\delta(\phi) + V_{vis}\delta(\phi - \pi)]. \quad (3.27)$$

Levando em conta que a solução possui a mesma simetria do orbifold, a equação (3.26) pode ser integrada de maneira direta, resultando em

$$\sigma(\phi) = kr_c|\phi|. \quad (3.28)$$

onde  $k = \sqrt{-\Lambda/6}$ . A constante de integração foi desprezada pois, sua função é apenas reescalar as variáveis  $x^\mu$ . Note que para que o modelo seja auto consistente, a constante cosmológica deve satisfazer  $\Lambda < 0$ , ou seja, estamos lidando com uma geometria do tipo anti-de Sitter (AdS<sub>5</sub>).

A condição de periodicidade devido as duas branas permite que seja escrito

$$\sigma''(\phi) = 2kr_c[\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)]. \quad (3.29)$$

Então dessa maneira, comparando (3.27) com (3.29) e substituindo (3.28) em (3.26) obtemos  $V_{vis}$ ,  $V_{ocu}$  e  $\Lambda$  relacionados com em termos de uma única escala  $k$  através de um *fine-tuning* da forma,

$$V_{ocu} = -V_{vis} = 12M^3k \text{ e } \Lambda = -6k^2 \quad (3.30)$$

E então a solução final para a métrica do bulk é

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2 \quad (3.31)$$

### 3.1.4 A Física do Modelo

Uma vez construído o modelo, deve-se ver suas consequências físicas. Antes de tudo, deve-se tomar as constantes fundamentais  $G$ ,  $c$  e  $\hbar$  que no sistema S.I de unidades são dadas por

$$G = 6,67 \times 10^{-11} m^3/kg s^2, \quad c = 3 \times 10^8 m/s, \quad \hbar = 1,06 \times 10^{-34} kg m^2/s \quad (3.32)$$

E definir um sistema de unidades na qual possamos comparar as escalas de energia eletrofraca com a gravitacional, chamado sistema de unidades de planck. Nele as constantes fundamentais mencionadas anteriormente assumem o valor numérico igual a 1. Dessa

maneira, considerando [27]

$$G = 1 \frac{l_{Pl}^3}{m_{Pl} t_{Pl}^2}, \quad c = 1 \frac{l_{Pl}}{t_{Pl}}, \quad \hbar = 1 \frac{m_{Pl}^2 l_{Pl}}{t_{Pl}} \quad (3.33)$$

e resolvendo essas equações para  $l_{Pl}$ ,  $t_{Pl}$  e  $m_{Pl}$ , obtêm-se

$$l_{Pl} = 1,61 \times 10^{-33} \text{cm}, \quad m_{Pl} = 2,17 \times 10^{-5} g, \quad t_{Pl} = 5,4 \times 10^{-44} s \quad (3.34)$$

e a escala de energia equivalente à da massa de Planck é  $m_{pl} = 1,22 \times 10^{19} \text{GeV}$ . É a partir desse valor de energia que os efeitos quânticos da gravidade são dominantes, e nota-se que essa escala de energia está muito acima da escala eletrofraca, que é da ordem de  $10^3 \text{GeV}$ . A falta de explicação do porquê que essas escalas de energia são discrepantes ficou conhecido como *o problema da hierarquia de Higgs*.

Uma vez que as teorias de campo são formuladas em quatro dimensões, deve-se fazer uma redução dimensional, e formulá-las em termos dos parâmetros 5-dimensionais  $M$ ,  $k$  e  $r_c$  que foram introduzidos na seção anterior. Se quisermos saber o comportamento da gravidade sobre a brana que vivemos, devemos identificar as flutuações de massa zero (chamados de zero-modos) da ação clássica (3.5), o que fornecer os campos gravitacionais em quatro dimensões (Teoria efetiva) [20]. Para tal, fazemos uma perturbação na métrica da forma

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu} \quad (3.35)$$

De forma que a métrica de Randall-Sundrum se torne

$$g_{MN}(x, \phi) = e^{-2\sigma(\phi)} [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)] + r_c^2 \delta_M^5 \delta_N^5 \quad (3.36)$$

A teoria de campo efetiva é obtida substituindo (3.36) na ação de Einstein-Hilbert. O escalar de Ricci toma a forma

$$R = R^{(0)} + \tilde{R} - \frac{1}{2} e^{2kr_c|\phi|} \eta^{\mu\nu} \partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} \quad (3.37)$$

onde  $R^{(0)}$  é o escalar de Ricci sem o termo de perturbação, o qual é dado por (3.22). Define-se

$$\tilde{R} \equiv (\sigma'' - 4\sigma'^2) \frac{\eta^{\mu\nu}}{r_c^2} \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} e^{-2kr_c|\phi|} \partial_\lambda \partial_{(\mu} \bar{h}_{\nu)}^\lambda \quad (3.38)$$

e o jacobiano pode ser escrito como

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-g^{(0)}} (1 + \sqrt{-\bar{g}}) \quad (3.39)$$

De forma que

$$S_{ef} \supset M^3 \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{R} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi r_c e^{-2kr_c|\phi|} \quad (3.40)$$

Então comparando esse termo da ação efetiva com a ação de Einstein-Hilbert quadridimensional, observa-se que o valor efetivo da massa de Planck é

$$M_{Pl}^2 = M^3 r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr_c|\phi|} = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2kr_c\pi}) \quad (3.41)$$

Esse é o resultado mais importante do modelo, pois é a partir dele que é possível relacionar a escala de energia do modelo padrão com a escala de Planck. Com todos os campos de matéria confinados sobre a 3-brana, a ação da brana visível contém a ação de Higgs,

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} [g_{vis}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(|H|^2 - v_0^2)^2] \quad (3.42)$$

Onde  $H$  é o campo de Higgs,  $v_0$  é o valor esperado do campo no estado de vácuo,  $\lambda$  é uma constante de auto-acoplamento e  $D_\mu$  é a derivada covariante comum em teorias de Gauge, dada por  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  [5]. Substituindo a métrica induzida  $g_{vis}^{\mu\nu} = e^{2kr_c\pi} \bar{g}^{\mu\nu}$  em (3.42), temos

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{-4kr_c\pi} [e^{2kr_c\pi} \bar{g}_{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(|H|^2 - v_0^2)^2] \quad (3.43)$$

Normalizando o campo de Higgs,  $H \rightarrow e^{kr_c\pi} H$ , obtemos

$$S_{ef} \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} [\bar{g}_{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(|H|^2 - e^{-2kr_c\pi} v_0^2)^2] \quad (3.44)$$

E então vemos que (3.44) contém a ação de Higgs, com um detalhe: a escala física de massa fica dada pela escala de quebra espontânea de simetria definida por

$$v \equiv e^{-kr_c\pi} v_0 \quad (3.45)$$

Como o valor esperado  $v$  do campo de Higgs no estado de vácuo define todos os parâmetros de massa do Modelo Padrão, qualquer parâmetro de massa  $m_0$  sobre a brana visível irá corresponder a uma massa física

$$m \equiv e^{-kr_c\pi} m_0 \quad (3.46)$$

Olhando para (3.45), nota-se que a escala eletrofraca mediada pelo campo de Higgs, possui um fator exponencial que é muito pequeno na brana que onde repousa o Modelo Padrão, enquanto que a escala de Planck na brana onde se encontra o Modelo Padrão,

dada por (3.41) permanece quase da mesma forma, devido a presença de um termo muito pequeno que é somado ao invés de multiplicado, ficando  $M_{Pl} \sim M$ . Dessa forma o Modelo RS-I resolve o problema da hierarquia de Higgs.

## 3.2 O Modelo de RS-II

### 3.2.1 A construção

Fazendo uso do senso comum, as dimensões do mundo em que vivemos não são compactas. E mantendo a mesma hipótese do modelo RS-I, o Modelo Padrão não irá se propagar ao longo da dimensão extra. Dessa maneira, é preciso fazer uma pequena mudança no modelo proposto anteriormente, considerando que a quinta dimensão seja não-compacta. Dessa forma origina-se o *modelo Randall-Sundrum tipo II* (RS-II) [19].

Esse novo modelo é bastante similar ao primeiro, exceto pelo fato de tomarmos como dimensão extra, uma coordenada não-compacta  $y$ . A ação do modelo é [19]

$$S = M^3 \int d^4x \int_0^{\pi r_c} dy \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - V_{ocu} \int d^4x \sqrt{-g_{ocu}} - V_{vis} \int d^4x \sqrt{-g_{vis}}. \quad (3.47)$$

Realizando o mesmo procedimento do primeiro modelo, exeto pelo fato de trocarmos a posição das branas visível ( $y = 0$ ) e oculta ( $y_c = \pi r_c$ ), as equações de Einstein para esse modelo se tornam

$$G_{MN} + \Lambda g_{MN} = -\frac{(-g)^{-1/2}}{2M^3} [V_{vis} \sqrt{-g_{vis}} \delta(y) g_{vis}^{\mu\nu} + V_{ocu} \sqrt{-g_{ocu}} \delta(y - y_c) g_{ocu}^{\mu\nu}] \delta_M^\mu \delta_N^\nu. \quad (3.48)$$

Considerando também uma simetria de orbifold, mas agora com  $y \rightarrow -y$ , a solução para as equações de Einstein é

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.49)$$

De forma simples, basta substituir  $y = r_c \phi$  no modelo de forma que  $L = \pi r_c$  seja a distância entre as branas. A geometria continua sendo  $AdS_5$ , e as relações entre  $V_{vis}$  e  $V_{ocu}$  (o “*fine tuning*”) ficam invertidas,

$$V_{vis} = -V_{ocu} = 12M^3 k \text{ e } \Lambda = -6k^2. \quad (3.50)$$

Nesse modelo também é possível obter a escala de Planck efetiva quadrimensional, resolvendo também o problema da hierarquia. No entanto esse modelo será usado para

determinar os modos gravitacionais.

### 3.2.2 A equação tipo Schroedinger

Há uma necessidade de se determinar as excitações gravitacionais através de perturbações na métrica de fundo do Bulk por meio da linearização das equações de Einstein [?]. O motivo pelo qual isso se torna importante decorre do fato conhecer o comportamento de tais perturbações na dimensão extra e discutir a localização delas no contexto do modelo. Tais perturbações serão feitas somente na parte quadrimensional da métrica (afinal de contas as excitações gravitacionais físicas devem estar sobre a brana), ou seja,

$$g_{\mu\nu}(x, y) = e^{-2\sigma(y)}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, y), \quad |h_{\mu\nu}(x, y)| \ll 1 \quad (3.51)$$

onde  $\sigma(y) = k|y|$  e  $h(x, y)$  é a perturbação que recebe o nome de *gráviton* que será o responsável pelas excitações gravitacionais sobre a brana. gravitacional.

Levando em conta (3.51), os coeficientes da conexão de Riemman não nulos são

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h_\nu^\lambda + \partial_\nu h_\mu^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\nu}) \quad (3.52)$$

$$\Gamma^4_{\mu\nu} = \sigma' e^{2\sigma} \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_y h_{\mu\nu} \quad (3.53)$$

$$\Gamma^\nu_{\mu 4} = -\sigma' \delta_\mu^\nu + \frac{1}{2} \partial_y h_\mu^\nu. \quad (3.54)$$

O levantamento e abaixamento dos índices dos vetores e tensore foram feitos com a métrica de fundo ( $e^{-2\sigma}\eta_{\mu\nu}$  ou  $e^{2\sigma}\eta^{\mu\nu}$ ) e não com a métrica de Minkowski. As componentes  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  no Gauge  $\partial^\mu h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu = 0$  são

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2}(\partial_y^2 + \square)h_{\mu\nu} - 2\sigma'^2 h_{\mu\nu} \quad (3.55)$$

$$R_{44} = 4(\sigma'' - \sigma'^2) = R_{44}^{(0)} \quad (3.56)$$

onde  $\square = e^{2\sigma}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$  e

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = (\sigma'' - 4\sigma'^2)e^{-2\sigma}\eta_{\mu\nu} \quad (3.57)$$

é o tensor de Ricci que não contém a perturbação. O escalar de Ricci toma a forma

$$R = R^{(0)} - h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(0)} \quad (3.58)$$

onde

$$R^{(0)} = (2\sigma'' - 5\sigma'^2). \quad (3.59)$$

Impondo o Gauge, ele se torna

$$R = R^{(0)} \quad (3.60)$$

Então o tensor de Einstein se torna

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2}(\partial_y^2 + \square)h_{\mu\nu} - 4(\sigma'' - 2\sigma'^2)h_{\mu\nu}. \quad (3.61)$$

Também deve-se linearizar o tensor energia momento. Considerado que

$$g_{vis} = g_{ocu} = g \simeq -e^{-8\sigma} \quad (3.62)$$

então  $T_{\mu\nu}$  linearizado torna-se

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} - [V_{vis}\delta(y) + V_{vis}\delta(y - y_c)]h_{\mu\nu} \quad (3.63)$$

Substituindo essas três últimas equações nas equações de Einstein do modelo, levando em conta (3.50), temos

$$-\frac{1}{2}(\partial_y^2 + \square)h_{\mu\nu}(x, y) + 4k[k - \delta(y) + \delta(y - y_c)]h_{\mu\nu}(x, y) = 0 \quad (3.64)$$

O que nos interessa é somente a quinta dimensão, então usando a seguinte separação de variáveis

$$h_{\mu\nu}(x, y) = \bar{h}_{\mu\nu}(x)\varphi(y) \quad (3.65)$$

a equação diferencial em  $x$  resulta em

$$\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}(x) = c\bar{h}_{\mu\nu}(x) \quad (3.66)$$

onde  $\partial^2 = \partial_\alpha \partial^\alpha$  é o tradicional d'lembertiano quadrimensional e  $c$  é a constante de separação. Comparando essa equação com a equação de onda relativística de Klein-Gordon [15], vemos que  $c = m^2$ . Dessa maneira a equação diferencial em  $y$  se torna

$$-\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2} + 4k[k - \delta(y) + \delta(y - y_c)]\varphi(y) = m^2 e^{2k|y|}\varphi(y). \quad (3.67)$$

Tal equação diferencial nos possibilita determinar os modos das excitações gravitacionais na quinta dimensão. Entretanto ela ainda não está na forma adequada para esse

fim. Dessa maneira deve-se fazer uma mudança de variáveis para que ela tenha uma forma similar a equação de onda não-relativística de Schroedinger. De acordo com [13], o método geral para isso reside nas mudanças de variável

$$z = \frac{\text{sgn}(y)}{k}(e^{k|y|} - 1) \quad (3.68)$$

$$\varphi(y) = e^{-k|y|/2}\bar{\varphi}(z). \quad (3.69)$$

Estas transformações fazem com que seja obtida a equação diferencial

$$\left[ -\frac{d^2}{dz^2} + V(z) \right] \bar{\varphi}(z) = m^2 \bar{\varphi}(z) \quad (3.70)$$

onde o potencial é da forma

$$V(z) = \frac{15k^2}{4(k|z| + 1)^2} - 3k \left[ \delta(z) - \frac{\delta(z - z_c)}{k|z| + 1} \right] \quad (3.71)$$

onde  $z_c$  é dado por (3.68) quando  $y = y_c$ . Observe que na equação tipo Schroedinger (3.70)  $m^2$  faz o papel da energia na mecânica quântica, e então há uma necessidade de determinar os autovalores de massa (energia) do gráviton confinado (localizado) na brana.

Em analogia com a mecânica quântica, as condições de contorno devido a presença das funções delta de Dirac ficam escritas como

$$\Delta \frac{d\bar{\varphi}(0)}{dz} = -3k\bar{\varphi}(0) \quad (3.72)$$

$$\Delta \frac{d\bar{\varphi}(z_c)}{dz} = \frac{3k}{kz_c + 1} \bar{\varphi}(z_c) \quad (3.73)$$

### 3.2.3 O espectro gravitacional

Não há nada de errado em estender a dimensão extra até o infinito, mediante  $r_c \rightarrow \infty$ , pois agora existe um interesse no comportamento localizado ou não das excitações gravitacionais sobre a brana visível. Dessa forma o quando o raio de compactificação tende ao infinito o potencial (3.71) se torna

$$V(z) = \frac{15k^2}{4(k|z| + 1)^2} - 3k\delta(z). \quad (3.74)$$

Agora o trabalho é resolver (3.70), e a partir das soluções obtidas extrair informações físicas. Para  $z \neq 0$ , obtêm-se a equação diferencial

$$\frac{d^2\bar{\varphi}(z)}{dy^2} + \left[ m^2 - \frac{15k^2}{4(k|z| + 1)^2} \right] \bar{\varphi}(z) = 0. \quad (3.75)$$



Realizando a mudança de variável  $w = |z| + 1/k$ , a equação diferencial anterior toma a forma

$$\frac{d^2\bar{\varphi}(w)}{dw^2} + \left[ m^2 - \frac{15}{4w^2} \right] \bar{\varphi}(w) = 0 \quad (3.76)$$

O autovalor  $m = 0$  é chamado de *modo de massa zero*, ou simplesmente modo zero. O modo zero não é nada mais do que as excitações gravitacionais de energia mais baixa. Dessa forma a equação (3.76) se torna

$$\frac{d^2\bar{\varphi}(w)}{dy^2} - \frac{15k^2}{4w^2}\bar{\varphi}(w) = 0 \quad (3.77)$$

que facilmente pode ser resolvida usando o método de Fröbenius. Impondo a finitude da função de onda, obtêm-se que  $\bar{\varphi}(z)$  é

$$\bar{\varphi}(z) = k^{-1}(k|z| + 1)^{-3/2} \quad (3.78)$$

onde  $k^{-1}$  é uma constante obtida após uma normalização. Na variável  $y$  essa solução se torna

$$\varphi(y) = k^{-1}e^{-3k|y|/2} \quad (3.79)$$

e dessa forma nota-se que essa solução é localizada sobre a brana, diluindo-se a medida que a dimensão extra aumenta.

Para os modos massivos ( $m \neq 0$ ) do campo gravitacional, deve-se notar que mediante a mudança de variável

$$\bar{\varphi}(|z| + 1/k) = \sqrt{|z| + 1/k} \varphi(m(|z| + 1/k)) \quad (3.80)$$

transforma a equação diferencial (3.76) em uma equação diferencial de Bessel de ordem 2. E portanto a solução geral para os modos massivos é

$$\bar{\varphi}(z) = (|z| + 1/k)^{1/2} [aJ_2(m(|z| + 1/k)) + bY_2(m(|z| + 1/k))] \quad (3.81)$$

onde  $J_2(m(|z| + 1/k))$  e  $Y_2(m(|z| + 1/k))$  são as funções de Bessel de primeiro tipo e segundo tipo de ordem 2.

A partir da solução obtida para os modos massivos, é possível ver que quando existe apenas uma brana, os autovalores de massa possuem um espectro contínuo. Além disso, nota-se também que essa solução não é localizada, devido a presença de funções de Bessel. No entanto a presença das duas branas induz uma quantização desses modos [19]. Pode-

se mostrar isso aplicando a solução (3.81) nas condições de contorno (3.72) e (3.73). A derivada primeira de  $\bar{\varphi}(z)$  pode ser calculada usando as propriedades das funções de Bessel expressas em [1]. Isso resulta em

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(z) &= \text{sgn}(z)m(|z| + 1/k)^{1/2} [aJ_1(m(|z| + 1/k)) + bY_1(m(|z| + 1/k)) - \\ &- \frac{3}{2}\text{sgn}(z)m\left(\frac{k}{k|z| + 1}\right)^{1/2} [aJ_2(m(|z| + 1/k)) + bY_2(m(|z| + 1/k))] \end{aligned} \quad (3.82)$$

E quando aplica-se as condições de contorno

$$\begin{aligned} aJ_1(m/k) + bY_1(m/k) &= 0 \\ aJ_1(m(z_c + 1/k)) + bY_1(m(z_c + 1/k)) &= 0. \end{aligned}$$

O sistema possui solução única se

$$\begin{vmatrix} J_1(m/k) & Y_1(m/k) \\ J_1(m(z_c + 1/k)) & Y_1(m(z_c + 1/k)) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.83)$$

Na aproximação de pequenas massas ( $m/k \ll 1$ ), temos que  $-Y_1(m/k) \ll J_1(m/k)$ , e portanto escrevemos (3.83) como

$$m_n = ke^{-k\pi r_c} j_n \quad (3.84)$$

onde os  $j_n$  são as raízes das funções de Bessel de primeiro tipo, isto é,  $J(j_n) = 0$ .

Como o valor da constante  $k$  é da ordem da escala de Planck e o fator exponencial  $e^{-k\pi r_c}$  sobre a brana visível tem sido mandado fixo para resolver o problema da hierarquia. Uma vez que os autovalores de massa são da ordem dos TeV a observação de ressonâncias individuais dos primeiros modos em podem ser possíveis em aceleradores no futuro [6].

### 3.3 A Brana como um Campo Escalar

Até agora foi introduzido a idéia de brana como uma superfície hiperfina em relação a dimensão extra. No entanto muito antes que o modelo Randall-Sundrum fosse concebido, existia a proposta de que nosso universo poderia ser um defeito topológico tais como paredes de domínio ferromagnéticas. Essa parede de domínio pode ser representada por um campo escalar real que depende somente da dimensão extra, de forma que o modelo RS possa ser reestabelecido em um limite apropriado. Para descrever esse cenário, usa-se

um ansatz semelhante ao de randall-Sundrum

$$ds^2 = e^{-A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (3.85)$$

onde  $A(y)$  é uma função suave de  $y$  [11]. Bem como a ação

$$S = M^3 \int d^4x \int dy \sqrt{-g} R + S_\phi \quad (3.86)$$

onde  $S_\phi$  é responsável por formar a brana, e é dado por

$$S_\phi = - \int d^4x \int dy \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi) \right]. \quad (3.87)$$

O termo de interação  $V(\phi)$  introduz o defeito topológico tipo parede de domínio. As equações de Einstein resultantes de (3.86) são

$$G_{MN} = \frac{1}{2M^3} \left\{ \partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left[ \frac{1}{2} \partial_P \phi \partial^P \phi - V(\phi) \right] \right\} \quad (3.88)$$

e considerando que o campo escalar só depende da quinta dimensão, ou seja  $\phi = \phi(y)$  têm-se que as equações de campo tornam-se

$$A''(y) - 2A'^2(y) = \frac{1}{6M^3} \left[ \frac{1}{2} \phi'^2(y) + V(\phi) \right] \quad (3.89)$$

$$2A'^2(y) = \frac{1}{6M^3} \left[ \frac{1}{2} \phi'^2(y) - V(\phi) \right]. \quad (3.90)$$

e somando essas equações obtêm-se

$$A''(y) = \frac{1}{6M^3} \phi'^2(y). \quad (3.91)$$

É possível determinar a forma do fator de dobra da métrica (3.85) a partir da solução para o campo escalar. Na ausência de gravidade consegue-se uma solução tipo parede de domínio, deve-se considerar o potencial  $V(\phi)$  como sendo da forma

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - a^2)^2 \quad (3.92)$$

que suporta uma solução tipo kink

$$\phi(y) = a \tanh(by) \quad (3.93)$$

onde  $b = \lambda a^2/2$  com  $\lambda, a$  sendo constantes positivas. Substituindo então (3.93) em (3.91)

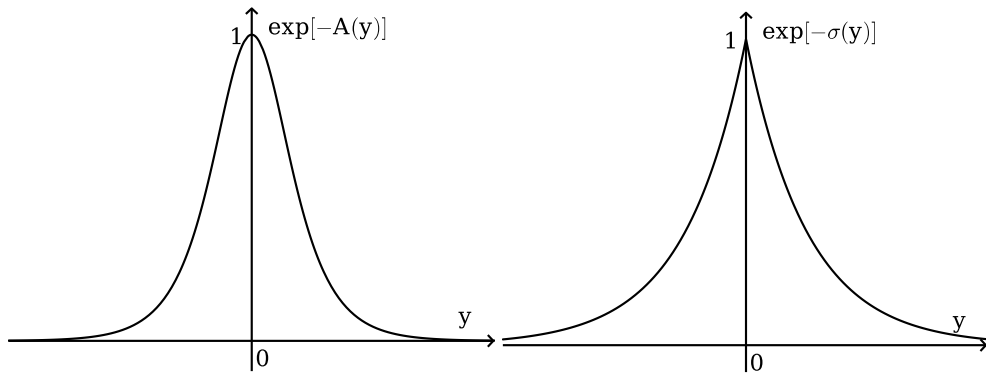


Figura 2: Fatores de dobra suave  $A(y)$  e de Randall-Sundrum.

usando  $A'(0) = A(0) = 0$ , obtêm-se

$$A(y) = \beta \left[ \ln \cosh^2(by) + \frac{1}{2} \tanh^2(by) \right] \quad (3.94)$$

onde  $\beta = a^2/18M^3$ . E portanto nota-se que a função  $A(y)$  representa um fator de dobra localizado, e possuindo a forma do fator de dobra do modelo Randall-Sundrum para grandes distâncias da brana figura 2.

# 4 LOCALIZAÇÃO DE FÉRMIONS

## 4.1 Localização em $D = 5$

### 4.1.1 No contexto do modelo Randall-Sundrum

Apesar do modelo Randall-Sundrum ser construído para resolver o problema da hierarquia entre as escalas da gravidade e eletrofraca e para a localização de excitações de spin 2, podemos usá-lo no para verificar se campos de spin 1/2 são localizados na brana visível. Basicamente o que tem que ser feito é um acoplamento entre férmions e o bulk, dado pela métrica (3.49) feito em [2].

A ação para férmions de Dirac sem massa de spin 1/2 na presença de gravidade em cinco dimensões é escrita como

$$S_D = i \int d^5x \sqrt{-g} \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi \quad (4.1)$$

onde  $\Psi = \Psi(x, y)$  e  $\Gamma^M$  são as matrizes de Dirac na variedade curva. A partir dessa ação obtêm-se a equação de Dirac

$$\Gamma^M D_M \Psi = (\Gamma^\mu D_\mu + \Gamma^y D_y) \Psi = 0. \quad (4.2)$$

Observando a métrica (3.49) em conjunto com (2.58), os vierbeis não nulos são

$$\begin{aligned} e^m{}_\mu &= e^{-\sigma(y)} \delta_\mu^m \\ e^{M'}{}_y &= \delta_y^{M'} \end{aligned} \quad (4.3)$$

com isso e as equações (3.17), (3.18), observa-se que os únicos coeficientes da conexão de spin diferentes de zero são

$$\omega_\mu{}^{ay} = -\sigma'(y) e^{-\sigma} \delta_\mu^a \quad (4.4)$$

consequentemente as derivadas covariantes se tornam

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - \frac{1}{2}\sigma'(y)e^{-\sigma(y)}\Gamma_\mu\Gamma_y \\ D_y &= \partial_y \end{aligned} \quad (4.5)$$

usando a separação de variáveis

$$\Psi(x, y) = \alpha(y)\psi(x) \quad (4.6)$$

onde  $\psi(x)$  é o espinor de Dirac em quatro dimensões, e  $\alpha(y)$  é uma função que depende somente da dimensão extra. Então a equação (4.2) para o modo zero ( $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$ ) se torna

$$\frac{d\alpha(y)}{dy} - 2\sigma'(y)\alpha(y) = 0 \quad (4.7)$$

a solução dessa equação diferencial é

$$\alpha(y) = Ce^{2k|y|} \quad (4.8)$$

a qual não é localizada sobre a brana de tensão positiva (brana visível ou de Randall-Sundrum), pelo fato de que ao substituir (4.8) em (4.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-3k|y|}\alpha^2(y) = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|y|} dy \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Dessa forma baseado em [4], partículas de spin 1/2 acopladas ao bulk de Randall-Sundrum não são localizadas em branas de tensão positivas. No entanto de acordo com o fine-tuning do próprio modelo, é possível localizar essas partículas na brana de tensão negativa, fazendo uma mudança do tipo  $k \rightarrow -k$ , obtendo assim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{3k|y|}\alpha^2(y) = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-k|y|} = \frac{2C^2}{k}. \quad (4.10)$$

Então a solução corretamente normalizada para o modo zero do campo espinorial em branas de tensão negativas fica dada por

$$\Psi_0(x, y) = \sqrt{\frac{k}{2}} e^{-k|y|}\psi(x). \quad (4.11)$$

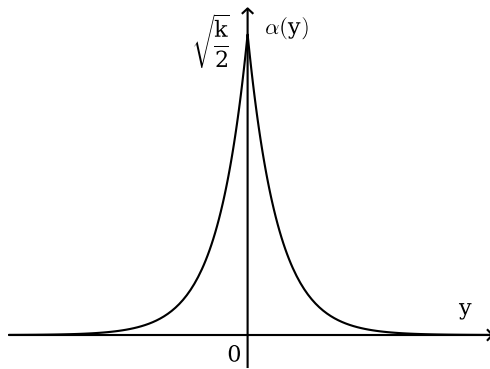


Figura 3: A localização do modo zero  $\alpha(y)$  na brana de tensão negativa.

### 4.1.2 No contexto da brana modeladas por kinks

Campos de spin  $1/2$  não são localizados em brana de tensão positiva (brana visível do modelo RS). De uma certa forma isso é um problema decorrente do fato de que uma brana de tensão negativa funciona como uma porção de um espaço Ads com flutuações de energia negativa [2]. Dessa forma uma proposta para localizar esses tipos de campos, consiste na introdução de um termo de interação com a própria brana gerada pela solução de kink [11]. Então a ação para férmions pode ser escrita como

$$S_D = i \int d^5x \sqrt{-g} \bar{\Psi} [\Gamma^M D_M - F(\phi)] \Psi \quad (4.12)$$

Aqui deve-se usar a métrica (3.85) de (3.49). Uma vez que a brana é gerada por um campo escalar, a interação mais simples entre os férmions do bulk e a própria brana é a de Yukawa, dada por  $F(\phi) = f\phi$ , onde  $f$  é uma constante de acoplamento real.

Nesse momento é conveniente examinar a localização do modo zero de férmions quirais nesse novo contexto de branas geradas por kink. A equação de Dirac gerada pela ação (4.1) é

$$\Gamma^M D_M \Psi - f\phi \Psi = 0. \quad (4.13)$$

Fazendo o mesmo processo da seção anterior, têm-se que a dinâmica do espinor em relação à dimensão extra  $y$  é regida pela equação diferencial

$$[\eta'(y) - 2A'(y)\eta(y)] \psi(x) - f\phi\eta(y)\Gamma^y \psi(x) = 0 \quad (4.14)$$

onde  $\eta(y)$  faz o papel de  $\alpha(y)$  da seção anterior. No entanto diferentemente do caso baseado no modelo Randall-Sundrum, o modo zero dependerá da quiralidade tomada. Então dessa maneira da equação (4.14) emergem outras duas

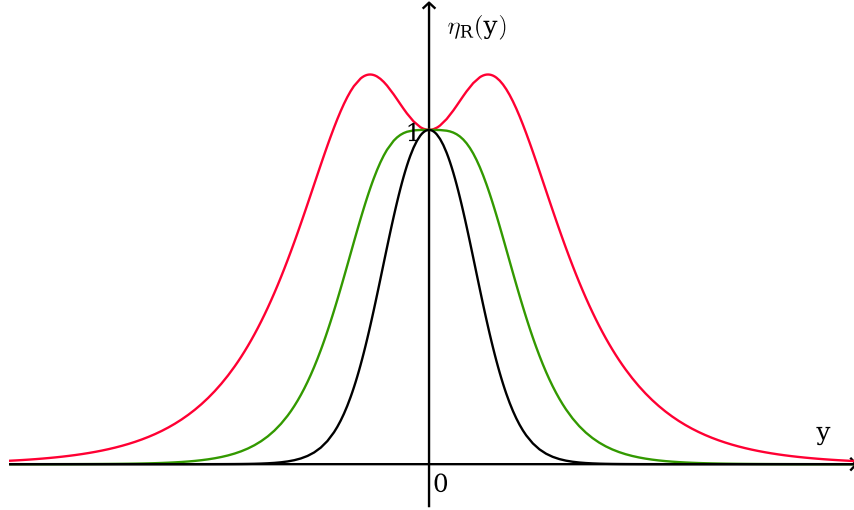


Figura 4: O modo zero localizado referente à quiralidade direita para valores de  $4\beta - fa/b$  iguais a -1 (vermelho), -2 (verde) e -3 (preto).

$$\eta'_R(y) - 2A'(y)\eta_R(y) - f\phi\eta_R(y) = 0 \quad (4.15)$$

$$\eta'_L(y) - 2A'(y)\eta_L(y) + f\phi\eta_L(y) = 0 \quad (4.16)$$

referentes às quiralidades direita  $\eta_R$  ( $\Gamma^y\psi_R = +\psi_R$ ) e esquerda  $\eta_L$  ( $\Gamma^y\psi_L = -\psi_L$ ). As soluções para as respectivas equações diferenciais são

$$\eta_R(y) = [\cosh(by)]^{4\beta-fa/b} e^{\beta \tanh^2(by)} \quad (4.17)$$

$$\eta_L(y) = [\cosh(by)]^{4\beta+fa/b} e^{\beta \tanh^2(by)} \quad (4.18)$$

Observando as equações acima, nota-se que a quiralidade direita (positiva) só pode ser localizada (figura 4) se a relação

$$f > 4\beta b/a \quad (4.19)$$

for satisfeita. Isso é uma imposição para que a férmions com quiralidade positiva possam existir em 4D. Matematicamente isso exige que a solução seja normalizável,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-3A(y)} \eta_R^2(y) < \infty. \quad (4.20)$$

Observe que o acoplamento de Yukawa desenvolve um papel vital nesse cenário, pois sem ele não é possível obter sucesso na localização uma vez que de acordo com as soluções obtidas, o expoente de  $\cosh(by)$  se torna sempre positivo. Em suma respeitada a relação (4.20) somente férmions com quiralidade positiva podem existir em estruturas de branas



modeladas por defeitos topológicos tipo parede de domínio.

## 4.2 Localização em $D$ Dimensões

### 4.2.1 Introdução

Até o presente momento foi feito a localização de campos espinoriais em  $D = 5$  baseado no modelo Randall-Sundrum, como para o caso em que a brana é gerada por um campo escalar. Para localizar esses campos (e a gravidade) foi assumido que o mundo quadrimensional fica confinado em uma 3-brana. Para generalizar esse raciocínio para  $D$  dimensões, adota-se a idéia de que o modelo padrão fica confinado em uma  $(D-2)$ -brana, de forma que quando resolve-se as equações de Einstein tanto para o modelo RS-II como para o contexto de defeitos topológicos tipo “kink”, obtêm-se as mesmas soluções. Como foi visto no capítulo 2 que as representações espinoriais variam quando a dimensão do espaço-tempo é par ou ímpar, então é interessante adotar a mesma metodologia para a localização.

### 4.2.2 $D$ ímpar

O primeiro aspecto relevante a ser mencionado é que a medida de integração muda de acordo com o número de dimensões em questão. Considerando que a métrica seja dada por

$$ds^2 = e^{-2A_u(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (4.21)$$

onde  $A_1(y) = \sigma(y)$ ,  $A_2(y) = A(y)$  pode-se facilmente determinar o determinante da métrica  $g$

$$g = -e^{-(D-1)2A_u(y)}. \quad (4.22)$$

No contexto do modelo Randall-Sundrum a equação que fornece a dinâmica da função dependente da dimensão extra nas  $D$  dimensões ímpares para o modo zero é

$$\alpha'(y) - \frac{D-1}{2} \sigma(y) \alpha(y) = 0 \quad (4.23)$$

cuja solução é dada por

$$\alpha(y) = C e^{(D-1)\sigma(y)/2} \quad (4.24)$$

e quando faz-se a localização substituindo na ação de Dirac

$$\begin{aligned} S_{Dirac}^{(D)} &= i \int d^{D-1}x \int dy \sqrt{-g} \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi \\ &= S_{Dirac}^{(D-1)} \int dy e^{-(D-2)\sigma(y)} \alpha^2(y) \end{aligned} \quad (4.25)$$

e portanto

$$\int dy e^{-(D-2)\sigma(y)} \alpha^2(y) = C^2 \int dy e^{\sigma(y)} \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

Dessa forma nota-se que férmions de Dirac em nunca podem ser localizados no contexto do modelo RS em  $D$  dimensões ímpares.

No entanto no cenário de branas geradas por um campo escalar o qual deixa o fator de dobra da métrica suave, a equação de Dirac resultante da ação  $D$ -dimensional é

$$\partial_D \Psi(x, y) - \frac{D-1}{2} A'(y) \Psi(x, y) + \Gamma^D \Gamma^m \partial_m \Psi(x, y) - F(\phi) \Gamma^D \Psi(x, y) = 0. \quad (4.27)$$

Considerando o mesmo tipo de acoplamento do caso  $D = 5$ , e decompondo o espinor em parte quirial e anti-quirial, a equação (4.27) dar origem a duas equações independentes para o modo zero

$$\eta'_R(y) - \frac{D-1}{2} A'(y) \eta_R(y) - f \phi \eta_R(y) = 0 \quad (4.28)$$

$$\eta'_L(y) - \frac{D-1}{2} A'(y) \eta_L(y) + f \phi \eta_L(y) = 0. \quad (4.29)$$

As soluções dessas equações diferenciais pode ser escritas da forma

$$\eta(y) = [\cosh(by)]^{(D-1)\beta \mp af/b} e^{\frac{(D-1)\beta}{4} \tanh^2(by)} \quad (4.30)$$

onde o sinal negativo representa a solução referente a quiralidade direita, enquanto que o sinal positivo representa a quiralidade esquerda. Ao substituir essa equação na ação de Dirac  $D$ -dimensional, conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-(D-2)A(y)} \eta^2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\cosh(by)]^{2\beta \mp af/b} e^{\frac{\beta}{2} \tanh^2(by)}. \quad (4.31)$$

Pode-se observar que embora a solução para a função dependente da dimensão extra dependa da dimensionalidade do espaço-tempo ímpar, a integral de localização diz que independente da dimensão só é possível localizar férmions com quiralidade positiva.

### 4.2.3 $D$ par

A ação de Dirac  $D$ -Dimensional para férmions sem massa é dada por

$$S_{Dirac}^{(D)} = i \int d^D x \sqrt{-g} \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi. \quad (4.32)$$

A equação de Dirac gerada por essa ação, tomando com base a métrica de Randall-Sundrum é

$$\partial_y \Psi(x, y) - \frac{(D-1)}{2} \sigma'(y) \Psi(x, y) + \Gamma^y \Gamma^m \partial_m \Psi(x, y) = 0. \quad (4.33)$$

Para solucionar essa equação diferencial não se pode simplesmente dizer que o espinor  $\Psi(x, y)$  é um produto de uma função que depende exclusivamente de  $y$  vezes um espinor  $\psi(x)$  como foi feito para o caso em que a dimensionalidade era ímpar. Isso porque quando deseja-se fazer uma redução dimensional de um espinor de uma dimensão  $D$  para uma  $D-1$  quando tal dimensionalidade é par a dimensão da representação do espinor também muda. Mas de acordo com a notação da seção 2.1, pode-se estabelecer uma relação entre as dimensões do espaço-tempo e da representação espinorial. Foi mostrado que se  $D = 2k + 2$  são o número de dimensões do espaço-tempo, a dimensão da representação espinorial seria  $2^{k+1}$ . Baseado nisso, para resolver (4.33) o espinor de Dirac  $\Psi(x, y)$  deve ser escrito da forma

$$\Psi(x, y) = \psi(x) \otimes \xi(y) \quad (4.34)$$

onde  $\psi(x)$  é uma matriz coluna de dimensão  $2^k$  enquanto  $\xi(y)$  é uma matriz coluna de ordem 2. Portanto a equação (4.33) para o modo zero se torna

$$\xi'(y) - \frac{(D-1)}{2} \sigma'(y) \xi(y) = 0 \quad (4.35)$$

cuja solução é

$$\xi(y) = C e^{(D-1)\sigma(y)/2}. \quad (4.36)$$

Substituindo na ação de Dirac (4.33), encontra-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-(D-2)\sigma(y)} \xi^\dagger(y) \xi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{\sigma(y)} \rightarrow \infty \quad (4.37)$$

portanto férmions no contexto do modelo Randall-Sundrum não são localizados em branas de tensão positiva quando a dimensionalidade do espaço-tempo é par.

Considerando agora o contexto de branas geradas pelo campo escalar  $\phi$  deve-se introduzir um termo de interação entre os férmions do bulk representada por  $F(\phi)$  na ação de Dirac,

$$S_{Dirac}^{(D)} = i \int d^D x \sqrt{-g} \bar{\Psi} [\Gamma^M D_M - F(\phi)] \Psi \quad (4.38)$$

A equação de Dirac se torna

$$\partial_y \Psi(x, y) - \frac{(D-1)}{2} A'(y) \Psi(x, y) + \Gamma^y \Gamma^m \partial_m \Psi(x, y) - F(\phi) \Gamma^y \Psi(x, y) = 0. \quad (4.39)$$

Usando a separação de variáveis tal qual (4.34) da forma

$$\Psi(x, y) = \psi(x) \otimes \zeta(y) \quad (4.40)$$

em conjunto com as relações  $\Gamma^m = \gamma^m \otimes (-\sigma^3)$ ,  $\Gamma^y = \mathbf{1} \otimes \sigma^2$ , a equação (4.39) para o modo zero toma a forma

$$\zeta'(y) - \frac{(D-1)}{2} \sigma'(y) \zeta(y) - i F(\phi) \sigma^2 \zeta(y) = 0. \quad (4.41)$$

Escrevendo o espinor  $\zeta(y)$  como

$$\zeta(y) = \begin{bmatrix} \zeta_1(y) \\ \zeta_2(y) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

a equação (4.41) dá origem a duas equações diferenciais acopladas

$$\zeta_1'(y) - \frac{(D-1)}{2} \sigma'(y) \zeta_1(y) - F(\phi) \zeta_2(y) = 0 \quad (4.43)$$

$$\zeta_2'(y) - \frac{(D-1)}{2} \sigma'(y) \zeta_2(y) + F(\phi) \zeta_1(y) = 0. \quad (4.44)$$

Usando a mudança

$$\zeta_j(y) = e^{(D-1)A(y)/2} \rho_j(y), \quad j = 1, 2. \quad (4.45)$$

as equações acopladas ficam mais simples, e se transformam em

$$\rho_1'(y) - F(\phi) \rho_2(y) = 0 \quad (4.46)$$

$$\rho_2'(y) + F(\phi) \rho_1(y) = 0. \quad (4.47)$$

Essas duas equações se reduzem a equação diferencial

$$\rho_1''(y) - \frac{F'(\phi)}{F(\phi)} \rho_1'(y) + F^2(\phi) \rho_1(y) = 0 \quad (4.48)$$

e quando a interação é do tipo Yukawa, a equação anterior pode ser convertida em uma equação diferencial tipo oscilador harmônico

$$\rho_1''(z) + \rho_1(z) = 0 \quad (4.49)$$

mediante a mudança de variável

$$z = \ln[\cosh(by)]^{af/b}. \quad (4.50)$$

Então a solução para  $\zeta_{(1,2)}(y)$  pode ser escrita como

$$\zeta_1(y) = \rho_0 e^{(D-1)A(y)/2} \text{sen}[\ln \cosh^{af/b}(by) + \theta_0] \quad (4.51)$$

$$\zeta_2(y) = \rho_0 e^{(D-1)A(y)/2} \text{cos}[\ln \cosh^{af/b}(by) + \theta_0]. \quad (4.52)$$

Para determinar se o modo zero de campos de spin 1/2 são localizados nesse contexto, deve-se usar o procedimento padrão de localização, ou seja, substituir a solução na ação de Dirac (4.38),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-(D-2)\sigma(y)} \zeta^\dagger(y) \zeta(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{A(y)} \rho^\dagger(y) \rho(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{A(y)} [\rho_1^2(y) + \rho_2^2(y)] \\ &= \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{A(y)} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Portanto pode-se constatar que férmions de Dirac não podem ser localizados em branas geradas por kinks quando a dimensionalidade do espaço tempo é par.

## 5 CONCLUSÃO

Durante a análise inicial do campo espinorial em  $D = 5$  verificou-se que seu modo zero nunca pode ser localizado com base no modelo Randall-Sundrum. Para resolver esse problema introduziu-se uma estrutura de brana espessa a qual é modelada por um campo escalar real que depende exclusivamente da dimensão extra. Isso exige a introdução de um termo de interação na ação de Dirac, que por simplicidade foi escolhida uma interação tipo Yukawa. Dessa maneira é possível localizar o modo zero de uma das chiralidades (a chiralidade direita nesse caso) para alguns valores da constante de acoplamento por meio de uma expressão analítica para  $f$ .

Para localizar férmions em um bulk  $D$ -dimensional, houve a necessidade de construir as representações espinoriais relativas a essas dimensões. Nessa construção observou-se que essas representações podem ser subdivididas quanto a dimensionalidade do espaço-tempo em dois conjuntos: um referente a dimensão par e outro quando ela é ímpar. Com base no modelo Randall-Sundrum, férmions não podem ser localizados sobre  $(D - 2)$ -branas de tensão positiva  $V_{vis} > 0$  pelo fato da solução obtida não deixar a ação de Dirac  $D$ -Dimensional finita. Uma alternativa para solução desse problema foi introduzir uma interação de Yukawa entre os férmions do bulk e a brana por meio de um “kink”. Quando a dimensionalidade do espaço-tempo é ímpar, os resultados obtidos reproduzem o caso  $D = 5$ . Entretanto quando a dimensionalidade é par, a redução dimensional da representação espinorial obriga que o espinor de Dirac seja escrito por meio de um produto direto de uma matriz coluna de ordem  $2^k$  por outra matriz coluna de ordem 2, e a solução da equação de movimento relativa à dimensão extra não torna a ação de Dirac finita. Portanto de uma maneira geral somente quando a dimensionalidade é ímpar, o modo zero de fermions de chiralidade direita podem ser localizados com a inserção de um acoplamento tipo Yukawa.

# REFERÊNCIAS

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1972.
- [2] B. Bajc and G. Gabadadze. Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti de sitter space. *Phys. Lett B*, 474:282–291, 2000.
- [3] W. T. Cruz. *Localização de Campos em Membranas Deformadas*. Tese-Universidade Federal do Ceará, 2009.
- [4] C. Csaki. lectures on extra dimensions and branes. In *Theoretical Advance Study Institute in Elementary Particle Physics*, 2004.
- [5] A. Das. *Lectures on Quantum Field Theory*. Word Scientific, 2008.
- [6] H. Davoudiasl, J. L. Hewett, and T. G. Rizzo. Phenomenology of the randall-sundrum gauge hierarchy model. *Phys. Rev. Lett*, 84:2080–2083, 2000.
- [7] R. d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford, 1992.
- [8] M. Gabella. The randall sundrum model. 2006.
- [9] W. Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics-wave equations*. Springer, 2000.
- [10] I. C. Jardim. *Modelo de Múltiplas Branas Esféricas como uma Descrição Cosmológica*. Tese-Universidade Federal do Ceará, 2012.
- [11] A. Kehagias and K. Tamvakis. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. *Phys. Lett*, B504:38–46, 2001.
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Teoria do Campo*. Hemus, 2004.
- [13] R. R. Landim, G. Alencar, M. O. Tahim, and R. N. Costa Filho. A transfer matrix method for resonances in randall-sundrum models. *JHEP*, 1301:71–96, 2011.
- [14] P. D. Mannheim. *Brane-Localized Gravity*. World Scientific, 2005.
- [15] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. New York, NY 2nd ed., 2003.
- [16] J. G. Polchinski. *String Theory*. Cambridge University Press, vol 1, 1999.
- [17] J. G. Polchinski. *String Theory*. Cambridge University Press, vol 2, 1999.
- [18] P. Ramond. *Field theory : a modern primer*. Addison-Wesley, 1990.
- [19] L. Randall and R. Sundrum. An alternative to compactification. *Phys.Rev.Lett.*, 83:4690–4693, 1999.

- [20] L. Randall and R. Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys.Rev.Lett.*, 83:3370–3373, 1999.
- [21] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov. Do we live inside a domain wall? *Phys. Rev. Lett.*, B 125:136–138, 1983.
- [22] L. H. Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [23] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge press, secon edition, 2009.
- [24] J. M. H. Silva. *Compactificação alternativa de dimensões extras em gravitação de Brans-Dicke*. Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista-IFT-UNESP, 2009.
- [25] Wu-Ki Tung. *Group Theory in physics*. Word Scientific, 1985.
- [26] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [27] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2005.