

Dissertação de Mestrado

Vórtices Não-Abelianos com Acoplamento
Não-Mínimo em um Background Gravitacional

Wilami Teixeira da Cruz

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Fortaleza, 11 de Julho de 2005

Dissertação de Mestrado

Wilami Teixeira da Cruz

Dissertação submetida ao Departamento de Física
como requisito para obtenção do grau
de Mestre em Física.

Orientador
Carlos Alberto Santos de Almeida

*Aos meus pais
Dedim e Teresinha*

Agradecimentos

Aos meus pais pelos longos anos de paciência e dedicação investidos em mim e por terem aceitado minhas decisões a respeito da minha profissão. Por terem lutado incansavelmente para me dar boas condições de vida e uma boa educação.

Ao meu tio Marcos Antônio (tônho) pelos conselhos, pelo exemplo de vida, pelos ótimos finais de semana em sua casa e por sempre acreditar no meu sucesso.

A minha tia Oneide (tioneide) pela confiança investida e por ter sempre me incentivado nos estudos.

Ao meu tio Edimilson por ter me acolhido em sua casa nos primeiros anos de graduação.

Ao meu tio Junior pelos ensinamentos passados desde criança e por ter me ajudado a lutar pelos meus objetivos. Também ao meu tio Erialdo (mascapêido) pelos livros fornecidos no início da graduação.

A todos meus outros familiares não citados aqui mas que de alguma forma contribuíram para minha formação.

A minha namorada Joelma (minha linda) pelos ótimos momentos vividos juntos e pela presença especial em minha vida.

Ao amigo e professor Marcony pela confiança depositada, pela ajuda financeira, pelos conhecimentos adquiridos e pelo exemplo de vida dado.

A todos os professores dos tempos de UECE pelos conhecimentos passados.

Aos colegas de iniciação científica Elias da Silva, Juliana, Rafael, Walber, Jonathan, Luís José, Samuel, João Paulo (copim) , Denise, Paulo e Rivânia pelas experiências trocadas, pela convivência diária e pelas ótimas festas nos tempos bons de torre.

Ao professor Carlos Alberto pela aceitação e orientação no mestrado, pela paciência, pela grande amizade pelos conselhos e conhecimentos passados.

Aos colegas de mestrado Wally(tio chico), Wilton e Welbert pela amizade e ajuda nas

disciplinas.

Aos colegas de pesquisa Luciana, Makarius, Luis Gonzaga, Abraão(quedaesguarda), Victor (vitorugo), Pablo, Aristeu , Euclides, Célio e pela ajuda na conclusão desta dissertação.

Ao colega Geová pelas idéias que constituíram parte dos temas abordados nessa dissertação.

Aos professores do Departamento de Física.

Ao coordenador do curso de Pós-Graduação em Física na pessoa do Prof. José Soares Andrade Júnior por fornecer condições para o bom andamento do mestrado.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo principal dessa dissertação é pesquisar, através de alguns modelos de Teoria de Campos, a influência de trabalharmos com uma simetria de gauge não-abeliana sobre as soluções das equações de movimento. Faremos isso tomando Teoria de Campos especificamente em três dimensões. Veremos que os sistemas planares nos trarão uma quantidade de informações suficientes para descrever a teoria em questão.

Faremos um estudo sobre defeitos topológicos com enfoque especial para os vórtices, que são o nosso principal objeto de estudo. Inicialmente faremos uma revisão sobre simetrias em física afim de chegar à simetria não-abeliana. Após termos descrito sob um ponto vista particular a teoria de Yang-Mills revisaremos os principais modelos que exibem soluções do tipo vórtices, como o modelo Maxwell-Higgs abeliano e o modelo Chern-Simons-Higgs.

Posteriormente faremos a inclusão do momento de dipolo magnético anômalo através do chamado acoplamento não-mínimo. Estudaremos então, detalhadamente, como poderemos incluir este tipo de acoplamento numa teoria de Yang-Mills. Apresentamos no fim desta dissertação como tópico novo, a adição de um background gravitacional a alguns modelos descritos anteriormente. Faremos isso ainda com o acoplamento não mínimo e simetria não-abeliana.

Abstract

The main purpose of this thesis is to investigate how the non-Abelian gauge symmetry affects the solutions of the equations of motion in some field theory models. We concern ourselves specifically with three dimensional field theories. We will note here that planar systems give us the needed informations about the theories approached here.

Topological defects were studied with special attention to the vortex solutions. We will do a general survey on physical symmetries, concerning mainly with the non-abelian symmetry. After describing in a particular view the Yang-Mills theory we will review mainly the models in which vortex solutions appear. For example the abelian Maxwell-Higgs model and the Chern-Simons-Higgs model.

The next step is to include the Anomalous Magnetic Dipole Moment(AMDM) with the so called non-minimal coupling. A deeper study envisaging how to implement the non-minimal coupling in a Yang-Mills theory is made. New results were found about the addition of a gravitational background in some of the models cited above. We will also study non minimal coupling and non-abelian symmetry in this gravitational background.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	1
Conteúdo	1
Introdução	2
1 Simetrias em Teoria de Campos	5
1.1 Simetrias abelianas	5
1.2 Teoria de Yang-Mills	9
1.3 Simetrias não-abelianas	11
2 Vórtices em sistemas planares	16
2.1 Introdução	17
2.2 Linhas de vórtices	17
2.3 Teoria de Chern-Simons	19
2.4 Vórtices no modelo Higgs abeliano	22
2.5 Vórtices no modelo Chern-Simons	26
2.6 Vórtices e o momento de dipolo magnético anômalo	28
3 Vórtices não-abelianos com acoplamento não-mínimo	31
3.1 O Termo de Chern-Simons Não-Abeliano	32

3.2	MDMA em teorias com simetria não abeliana	33
3.3	A influência do MDMA no tensor momento-energia.	35
3.4	Vórtices no Modelo Higgs Não-Abeliano com MDMA	36
3.5	Modelo Chern-Simons Não-Abeliano com MDMA	40
4	Vórtices Gravitacionais	45
4.1	Introdução	45
4.2	Métrica Pseudo-Riemanniana	47
4.3	Conexão	49
4.4	Equações de Campo de Einstein	51
4.5	A Ação Gravitacional	53
4.6	Gravidade em 3 dimensões	54
4.7	Modelo Chern-Simons Não-Abeliano com MDMA com Background Gra- vitational	55
	Conclusões e Perspectivas	60
	Apêndice	62
	A Apêndice	62
	Bibliografia	65

Introdução

As duas últimas décadas constituíram um período bastante rico para os físicos teóricos principalmente nas áreas relacionadas a geometria e aos métodos topológicos. Durante esse período novos campos em matemática foram criados para resolver problemas em Física. Uma nova tendência surgiu no final do século XX, a partir do surgimento de novas teorias em matemática independentemente dos anseios da comunidade de físicos. Topologia por exemplo, foi particularmente envolvida nesses desenvolvimentos que levaram ao estudo de novos tipos de teorias, agora conhecidas como teoria de campos topológica e teoria de cordas topológica.

A motivação para o estudo dessas teorias não é somente matemática. Existem razões que as tornam interessantes também sob o ponto de vista físico, principalmente por que são mais simples que aquelas descritas para o mundo real. Da mesma forma, elas constituem um excelente ambiente para testar argumentos não suportados num ponto de vista matemático.

Resultados em teoria de campos que usam argumentos baseados em integrais funcionais (origem quântica), não podem ser considerados como argumentos de um ponto de vista matemático, no entanto, podem ser considerados predições matemáticas feitas por físicos. Uma vez propostas, deve-se então providenciar provas matemáticas rigorosas. De uma forma geral podemos afirmar que os matemáticos constroem as regras da física experimental quando físicos teóricos fazem predições que devem ser testadas em laboratórios.

Atualmente a física de partículas está baseada na teoria quântica de campos e todas as partículas fundamentais, até então observadas, são descritas pelo Modelo Padrão. Esse modelo unifica os três tipos de interação entre as partículas, força forte, fraca e eletromagnética. Em teoria de campos a interação entre essas partículas é descrita através de partículas mediadoras, os fótons para o eletromagnetismo, os bósons W e Z para a interação fraca e os glúons para a forte.

Os glúons tem carga de cor e surgem de um grupo de gauge não abeliano, conseqüentemente sua dinâmica é não-trivial. A teoria de interação *apure gluon* é apresentada na forma da ação

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu}^{\alpha} \quad (1)$$

onde $F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + gf^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c$, os índices gregos representam espaço-tempo enquanto que os índices latinos derivam do grupo ¹ em questão.

Em 1954, Yang e Mills fizeram um estudo sobre invariância isotópica $SU(2)$ do sistema próton-nêutron [4], porém algumas propriedades matemáticas permaneciam incertas.

Em teoria de campos, as partículas são definidas pelos campos que as contém, porém, em algumas teorias podemos encontrar outros tipos de objetos. Soluções para as equações de movimento estáveis e com energia finita são chamadas sólitons. Nesta dissertação direcionamos nossa atenção a um tipo especial de sóliton, os vórtices de Nielsen-Olesen.

Vórtices são soluções topológicas que aparecem em sistemas tridimensionais, soluções das equações de movimento, caracterizados por uma densidade de energia localizada, uma massa finita e uma carga topológica. É possível introduzir nestas soluções uma corrente conservada com carga não-nula. Como já falamos, os vórtices são defeitos topológicos que surgem quando a simetria da teoria é quebrada espontaneamente.

Abrikosov [14] mostrou a existência de soluções localizadas do tipo vórtices, na

¹Adotamos neste trabalho o grupo $SU(2)$, invariância de gauge isotópica

presença de campo magnético, para a teoria macroscópica da supercondutividade de Ginzburg-Landau.

Vários trabalhos foram feitos com soluções de vórtices em modelos com termos de Yang-Mills e ou Chern-Simons, no entanto, nenhuma estrutura auto-dual de Bogomol'nyi, análoga a do modelo de Higgs abeliano, foi encontrada até que se escolheu um potencial de sexta ordem.

Modelos com a presença do acoplamento não mínimo já foram mostrados anteriormente [30]. No trabalho de [31] os modelos de Yang-Mills e Chern-Simons foram considerados com a presença do MDMA e um *background* gravitacional.

Nesta dissertação apresentamos como contribuição o estudo do modelo Chern-Simons nas mesmas condições que em [31], agora com simetria não-abeliana.

No capítulo 1 revisamos os principais aspectos das simetrias em física relevantes no contexto de teorias não-abelianas. Demonstramos como o fato de trabalharmos com o grupo $SU(2)$ modificará termos comuns na lagrangeana.

No capítulo 2 estudamos as principais abordagens feitas sobre o estudo dos vórtices. Analisamos também como é feita a inclusão do momento magnético anômalo nessa teoria.

No capítulo 3 iniciamos a descrição dos pontos ainda não abordados na literatura. Estudamos como será feita a inclusão do momento magnético anômalo em teorias não-abelianas. Posteriormente descrevemos os modelos Yang-Mills e Chern-Simons separadamente com simetria não-abeliana e acoplamento não-mínimo.

No ultimo capítulo descrevemos o modelo Chern-Simons não abeliano com a influência do MDMA e agora com a adição de um *background* gravitacioanl.

Capítulo 1

Simetrias em Teoria de Campos

Neste capítulo faremos uma revisão dos pontos fundamentais que serviram de base teórica para o desenvolvimento desta dissertação. Falaremos então sobre simetrias em física, sua fundamentação matemática e no que serviram para o desenvolvimento de teorias não-abelianas. Na primeira seção, discutiremos as simetrias abelianas num cenário de Teoria de Campos. Veremos que elas são características fundamentais, utilizadas para descrever importantes teorias físicas. O estudo dessas simetrias é feito observando sob que transformações as ações são invariantes. Posteriormente, passaremos a um caso mais geral que o da simetria de gauge afim de chegar às simetrias não-abelianas. Entraremos no estudo das teorias de Yang-Mills, que também estão baseadas numa forma de simetria mais geral.

1.1 Simetrias abelianas

Nesta seção descreveremos os aspectos da simetria abeliana e mostraremos como sua extensão local leva ao aparecimento de certas estruturas na Lagrangeana. Isto servirá para o entendimento da posterior generalização não-abeliana e como faremos para construir uma derivada covariante com acoplamento não mínimo neste cenário.

Inicialmente trabalharemos com a Eletrodinâmica Quântica (QED), essa teoria é dada pela seguinte lagrangeana ¹

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi. \quad (1.1)$$

Esta teoria será invariante sobre as seguintes transformações

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{-i\alpha} \phi \\ \phi^* &\rightarrow e^{i\alpha} \phi^*. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Se tivermos $\alpha \ll 1$,

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi - i\alpha\phi, \\ \delta\phi &= -i\alpha\phi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pelo teorema de Noether obtemos uma corrente conservada da forma

$$J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*). \quad (1.4)$$

As transformações (1.2) podem também ser reescritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \phi'_1 &= \phi_1 \cos \alpha + \phi_2 \sin \alpha, \\ \phi'_2 &= -\phi_1 \sin \alpha + \phi_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.5)$$

¹Sempre que falarmos de lagrangeana estaremos nos referindo a uma densidade lagrangeana

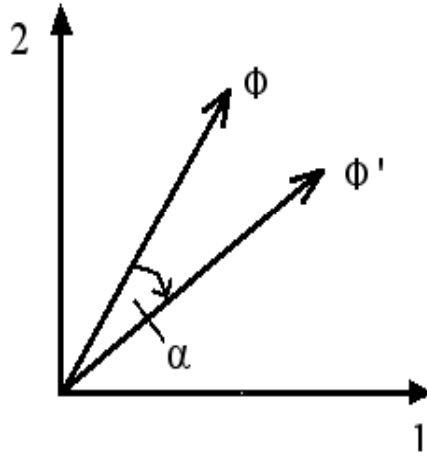


Figura 1-1: rotação do campo no espaço interno

Agora fica claro de ver que elas representam uma rotação do vetor ϕ no plano (1, 2) de um ângulo α , como mostrado na figura 1. Rotações em duas dimensões formam o grupo $SO(2)$. No entanto, estamos interessados nas transformações de gauge que geram o grupo $O(2) \approx U(1)$. Veja bem, cada elemento do grupo $O(2)$ é dado por um ângulo ϕ de rotação no plano. O espaço desse grupo é formado pelos valores de ϕ , ou seja, um círculo. O grupo $U(1)$ é formado por todos os números da forma $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ e, desde que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, teremos que seu espaço também será um círculo.

Voltando ao tema principal de nossa discussão, para tornar essa simetria local teremos que adicionar à teoria o campo de gauge A_μ da seguinte forma

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi. \quad (1.6)$$

A transformação do campo de gauge é

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (1.7)$$

A carga e aparece na derivada covariante como uma *constante de acoplamento*. O campo ϕ acoplará com o campo eletromagnético com intensidade e . A carga aparece tanto como uma quantidade conservada e também mede a intensidade com que as partículas interagem com os campos elétricos e magnéticos. Introduziremos agora a energia cinética para A_μ , assim, construiremos uma lagrangeana mais geral invariante local sobre $U(1)$. Onde o tensor intensidade de campo é

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.8)$$

Esse $F^{\mu\nu}$ é o tensor campo eletromagnético, onde de seis componentes três são do campo elétrico e as outras três do campo magnético. Tal tensor surge naturalmente da necessidade de se ter a ação invariante sob transformações no espaço interno do campo ϕ . O termo $\partial_\mu - ieA_\mu$ será a nossa derivada covariante simbolizado com D_μ .

Teremos agora que redefinir a nossa corrente conservada *covariante* na presença do campo eletromagnético, que ficará assim

$$\mathcal{J}^\mu = i(\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*). \quad (1.9)$$

Antes de concluirmos esses desenvolvimentos é interessante levantar a seguinte questão: se estamos interessados em construir uma lagrangeana consistente com as simetrias, qual a opção certa já que existe uma infinidade de termos respeitando essa simetria? Então, por que não existem muitas possibilidades? Afinal temos muitos termos com dimensão de massa arbitrária e que respeitam as simetrias. A resposta está no fato de que estes termos nos fornecem lagrangeanas não-renormalizáveis, isto por que operadores com dimensão maior que quatro geram constantes de acoplamento com dimensão de massa negativa. Finalmente, se desejamos renormalizabilidade, então devemos descartar os operadores de dimensões maiores. Sendo assim, a lagrangeana mais geral renormalizável, invariante

sobre as transformações (1.2) e sobre paridade fica.

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

1.2 Teoria de Yang-Mills

Em 1954, Yang e Mills publicaram [4] sobre invariância isotópica $SU(2)$ do sistema próton-nêutron. A idéia não foi reconhecida inteiramente, já que tinha algumas propriedades não satisfeitas e suas fundações matemáticas permaneciam incertas. Nos anos 60, estes problemas foram resolvidos quando a teoria de campos quantizada foi desenvolvida, hoje a teoria de Yang-Mills é uma das principais vertentes da física teórica.

A necessidade de se construir uma base matemática para esta teoria levou o *Clay Mathematics* institute a criar o prêmio para o problema do milênio.

Nos anos 50, quando as teorias de Yang-Mills nasceram, a eletrodinâmica quântica abordava o eletromagnetismo por meio de uma simetria de gauge local, porém, utilizando um grupo abeliano. Soube-se também que havia uma simetria global não-abeliana chamada simetria de isospin. Essa simetria atuava em prótons por meio de um dueto, e em píons, através de um tripleto. Foi sugerido então que uma versão local da simetria de isospin poderia gerar uma teoria de campos para a força forte, com píons sendo campos de gauge. O problema de tudo isso é que os píons são partículas massivas, enquanto que os campos de gauge não possuíam massa.

Prótons, nêutrons e píons não são partículas fundamentais, porém, são compostos de quarks, os quais possuem uma teoria de Yang-Mills quântica para força forte envolvendo campos de quarks e partículas de gauge chamadas glúons. Sabe-se agora que, se quisermos obter quebra de simetria de gauge não-abeliana, podemos introduzir um campo de uma partícula chamada bóson de Higgs. Estamos falando de parte do modelo desenvolvido por Weinberg e Salan, uma teoria de Yang-Mills para força eletrofraca, integrante do

Modelo Padrão, e que permite a inclusão de partículas de gauge massivas ou não.

Confinamento é um grande problema no Modelo Padrão de física de partículas. Isso devido ao fato de que os quarks e outras partículas com cor nunca foram observadas em isolamento. Os quarks somente foram observados em estados ligados neutros. Teorias de Yang-Mills descrevem interações fortes e possuem uma liberdade assintótica. Podemos dizer, grosseiramente, que seu comportamento quântico em distâncias curtas é similar ao comportamento clássico, porém a teoria clássica não é um bom guia para o comportamento quântico em distâncias longas.

No final dos anos 60 e início dos 70, uma série de experimentos trouxeram novas vertentes a essas teorias. Descobriu-se através de experimentos de colisão que os prótons possuem sub-estruturas. A partir daí foi possível provar que os campos de Yang-Mills possuem liberdade assintótica. Isto significa que o comportamento para altas energias dos campos de Yang-Mills incluem partículas com propriedades observadas experimentalmente, porém seu comportamento para baixas energias pode ser totalmente diferente.

A liberdade assintótica, junto com outras descobertas experimentais e teóricas feitas entre 1960 e 1970, tornaram possível descrever a força nuclear por uma teoria não-abeliana de calibre com $G = SU(3)$. Pode-se afirmar que essa teoria é perturbativa apenas para altas energias, porém, para se entender o confinamento dos quarks é necessário se conhecer o regime não-perturbativo.

Em baixas energias, onde nós vivemos, não existem quarks livres, já que a interação entre eles é forte para baixos regimes energéticos. Somente para altas energias o acoplamento entre eles torna-se fraco e os métodos perturbativos são aplicáveis. Resumindo, podemos afirmar que a interação é forte para pequenas escalas, e fraca para grandes. Se, por exemplo, tentássemos afastar dois quarks, teríamos que exercer uma força cada vez maior na medida que os afastássemos.

De fato, alguns problemas ainda existiam visto que o comportamento quântico não

pôde ser facilmente deduzido a partir da ação clássica. Como exemplo de problemas relacionados a este fato, temos o "mass gap" e o confinamento. A estrutura de quarks das partículas foi observada em experimentos de colisão mas, quarks livres nunca foram detectados. Em baixas energias, eles aparecem juntos, compondo partículas como prótons, nêutrons e píons num processo chamado confinamento. É possível observar este comportamento em simulações da teoria quântica de gauge para força forte, no entanto, não foi possível provar matematicamente que o confinamento é uma consequência da teoria. O mesmo podemos afirmar do "mass gap", partículas tem massa não nula, isto é observado em simulações, porém não existe um meio de derivar o *mass gap* matematicamente da teoria original[2].

As simetrias da teoria de Yang-Mills podem ser estendidas para incluir uma simetria global entre os campos bosônicos e fermiônicos, é a chamada supersimetria. Ainda não existem evidências físicas para essa supersimetria. Acredita-se que a teoria quântica de Yang-Mills em física de partículas representa um limite para uma teoria de cordas.

Em teoria de campos, as partículas são definidas pelos campos que as representam, porém, em algumas teorias podemos encontrar outros tipos de objetos. Soluções para as equações de movimento estáveis e com energia finita são chamadas sólitons. Dois tipos de soluções solitônicas são particularmente importantes para entender confinamento, os monopólos magnéticos e os vórtices de Nielsen-Olesen.

1.3 Simetrias não-abelianas

Faremos agora a generalização da seção de simetrias 1.1 passando a uma simetria maior do que $O(2)$ ou $U(1)$. O passo seguinte e lógico a ser dado é passar à simetria $SU(2)$, que foi considerada no trabalho original de Yang e Mills no contexto de simetrias de isospin de prótons e nêutrons. Este tipo de simetria é chamada simetria não-abeliana. O problema apresentado aqui é um caso particular da teoria, ou seja, os desenvolvimentos

feitos aqui são específicos ao tema fundamental da dissertação.

É importante notar também que faremos algumas considerações para tornar mais simples a resolução dos nossos problemas. Faremos isso seguindo os passos de autores que já trabalharam com questões semelhantes e adaptando aos nossos anseios.

Na seção anterior, consideramos o campo escalar com duas componentes, as quais eram relacionadas por rotações no plano. Trataremos agora o caso em que ϕ possui três componentes, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, num "espaço interno" sabendo que as transformações de gauge serão implementadas nesse plano.

Rotações no espaço de um ângulo α_3 , como mostra a figura 2, podem ser escritas como em 1.5

$$\begin{aligned}\phi'_1 &= \cos \alpha_3 \phi_1 + \sin \alpha_3 \phi_2, \\ \phi'_2 &= -\sin \alpha_3 \phi_1 + \cos \alpha_3 \phi_2, \\ \phi'_3 &= \phi_3.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Se tivermos um α infinitesimal podemos escrever essa rotação como

$$\begin{aligned}\phi'_1 &= \phi_1 + \alpha_3 \phi_2, \\ \phi'_2 &= -\alpha_3 \phi_1 + \phi_2, \\ \phi'_3 &= \phi_3.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Que se observarmos bem, são as três componentes da equação

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \alpha \times \phi\tag{1.13}$$

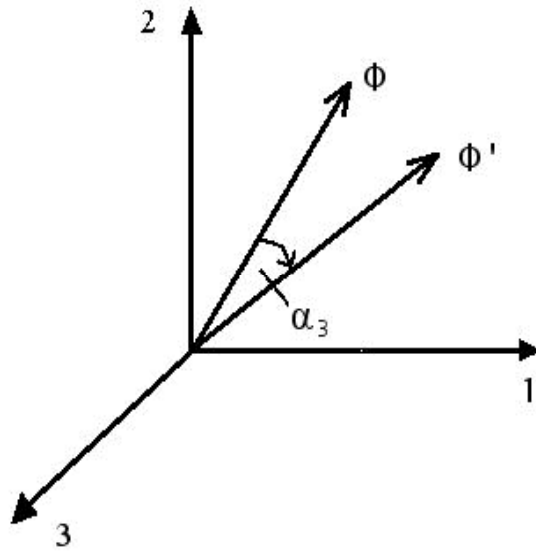


Figura 1-2: Rotação do campo no espaço interno

onde $|\alpha|$ é o ângulo de rotação, enquanto que $\alpha/|\alpha|$ é o eixo da rotação. O que faremos é tentar encontrar uma analogia como feito para o caso do eletromagnetismo. Isto será um pouco mais complicado, já que as rotações formam um grupo $O(3)$, o qual é não abeliano. Teremos que trabalhar com a não-comutatividade e observar suas conseqüências físicas.

Devemos encontrar uma nova derivada covariante², assim como em (1.6), de modo que a ação não-abeliana permaneça invariante. Faremos isso introduzindo um análogo a A_μ

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + g \mathbf{W}_\mu \times \phi, \quad (1.14)$$

sendo \mathbf{W}_μ o potencial de gauge análogo a \mathbf{A}_μ , que também representa um vetor num espaço interno. Analogamente a carga elétrica e , teremos a constante de acoplamento g . A derivada covariante deverá transformar-se de maneira análoga à mostrada em (1.3), ou seja

²Ainda com acoplamento mínimo

$$\delta(D_\mu\phi) = -\boldsymbol{\alpha} \times (D_\mu\phi). \quad (1.15)$$

Devemos atentar agora para dois pontos com relação à variação de \mathbf{W}_μ

1. Como ele é um vetor no espaço interno, então devemos adicionar um termo do tipo $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{W}_\mu$.
2. Da mesma forma que em (1.7), devemos ter um termo como $(1/e)\partial_\mu\alpha$.

Então escreveremos essa variação como

$$\delta\mathbf{W}_\mu = -\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}. \quad (1.16)$$

Sendo assim, quando fizermos a variação da derivada covariante, teremos

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu\phi) &= \delta(\partial_\mu\phi) + g(\delta\mathbf{W}_\mu) \times \phi + g\mathbf{W}_\mu \times (\delta\phi) \\ &= -\boldsymbol{\alpha} \times \partial_\mu\phi - g[(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{W}_\mu) \times \phi + \mathbf{W}_\mu \times (\boldsymbol{\alpha} \times \phi)], \end{aligned} \quad (1.17)$$

Usando a identidade vetorial

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \quad (1.18)$$

e reordenando os termos entre colchetes, teremos

$$\delta(D_\mu\phi) = -\boldsymbol{\alpha} \times (\partial_\mu\phi + g\mathbf{W}_\mu \times \phi) = -\boldsymbol{\alpha} \times D_\mu\phi \quad (1.19)$$

O que está de acordo com (1.15)

Se \mathbf{W}_μ é o análogo de A_μ , qual será então o análogo para o tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$? O chamaremos de $\mathbf{W}_{\mu\nu}$, e ele será, diferentemente de $F_{\mu\nu}$,

um vetor sob $O(3)$. Da mesma forma que ϕ , ele deverá transformar-se como

$$\delta(\mathbf{W}_{\mu\nu}) = -\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{W}_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

E isto só será possível se o escrevermos como

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu. \quad (1.21)$$

É interessante lembrarmos agora que, o que estamos fazendo, é o desenvolvimento da teoria não abeliana para um caso especial de simetria, $SU(2)$. Existem algumas peculiaridades neste caso. Podemos reescrever os termos com operações vetoriais da seguinte forma

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\ D_\mu \phi^a &= \partial_\mu \phi^a + g f^{abc} W_\mu^b \phi^c, \\ \delta W_\mu^a &= -f^{abc} W_\mu^b \alpha^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a. \end{aligned} \quad (1.22)$$

No caso em que estamos tratando podemos considerar o tensor f^{abc} como sendo o tensor de Levi-Civita ε^{abc} .

Capítulo 2

Vórtices em sistemas planares

Um ponto importantíssimo para o desenvolvimento dessa dissertação é o estudo dos defeitos topológicos. Faremos aqui uma breve explanação dessa teoria, dando prioridade a descrição dos vórtices, que são o nosso tema principal. A partir do problema básico, mostraremos as principais abordagens sobre o tema feitas até agora.

Na seção seguinte, falaremos da teoria de Chern-Simons, dando um breve histórico sobre suas origens matemáticas e, posteriormente, analisando suas características num espaço tridimensional. Fizemos isso em virtude de sua grande aplicabilidade no estudo dos vórtices.

Seguiremos com a descrição dos modelos Maxwell-Higgs e Chern-Simons-Higgs, ainda trabalhando com simetria de gauge abeliana.

No final do capítulo, discorreremos sobre o momento de dipolo magnético anômalo e sobre sua influência nas soluções de vórtices.

2.1 Introdução

Em sistemas bi e tridimensionais, obtemos soluções topológicas do tipo kinks e vórtices respectivamente, e que são soluções para as equações de movimento. Podemos também introduzir uma corrente conservada com carga diferente de zero.

Vórtices são soluções topológicas que aparecem em sistemas tridimensionais, como são soluções das equações de movimento. São caracterizados também por uma densidade de energia localizada e uma massa finita. É possível introduzir nestas soluções uma corrente conservada com carga não nula. Como já falamos, os vórtices são defeitos topológicos que surgem quando a simetria da teoria é quebrada espontaneamente.

O interesse no estudo dos vórtices em matéria condensada e física de partículas surgiu quando Abrikosov[14] mostrou a existência de soluções localizadas do tipo vórtices, na presença de campo magnético, para a teoria macroscópica da supercondutividade de Ginzburg-Landau. Tais vórtices consistem de filamentos que penetram o fluido supercondutor no qual o fluxo magnético está concentrado. Posteriormente, verificou-se experimentalmente a sua existência.

Faremos aqui uma breve revisão de dois modelos usados no estudo dos vórtices que servirão de base para maiores aprofundamentos e generalizações que faremos mais tarde. Os modelos Higgs-abeliano e de Chern-Simons são os mais simples entre aqueles que possuem soluções de vórtices.

2.2 Linhas de vórtices

Consideremos um campo escalar com duas dimensões de espaço e contorno no espaço, um círculo no infinito. Nesse contorno diremos que o campo será

$$\phi = ae^{in\theta} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (2.1)$$

Usamos aqui coordenadas polares no plano com n inteiro. Consideremos uma solução estática como

$$V(\phi) = [a^2 - \phi\phi^*]^2. \quad (2.2)$$

Dessa forma, temos $V = 0$ no contorno. Quando $r \rightarrow \infty$, a hamiltoniana do sistema será

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 = \frac{n^2 a^2}{2r^2}. \quad (2.3)$$

Se tentarmos obter a energia dessa configuração estática teremos

$$E = \int^\infty \mathcal{H} r d\theta = \pi n^2 a^2 \int^\infty \frac{1}{r} dr. \quad (2.4)$$

O que é logaritmicamente divergente.

Adicionamos então um campo de gauge através do acoplamento mínimo

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi. \quad (2.5)$$

Se escolhermos A_μ da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{e} \nabla(n\theta) \quad (r \rightarrow \infty) \\ A_r &\rightarrow 0, \quad A_\theta \rightarrow -\frac{n}{er} \quad (r \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (2.6)$$

encontraremos que em $r = \infty$, vale:

$$D_\theta\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + ieA_\theta\phi = 0, \quad D_r\phi = 0. \quad (2.7)$$

Encontramos então que, no contorno, temos $D_\theta\phi \rightarrow 0$. Com a lagrangeana da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi), \quad (2.8)$$

e considerando a hipótese de um puro gauge,

$$A_\mu \rightarrow \partial_\mu\chi \quad (r \rightarrow \infty), \quad (2.9)$$

então $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$. Como para uma configuração estática $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$, resultará que $\mathcal{H} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, tornando possível uma configuração de energia finita. A consequência de adicionarmos um campo de gauge é que daremos ao sóliton fluxo magnético. Observamos isso fazendo uma integral em torno do círculo no infinito que contorna o espaço. Pelo teorema de Stoke, $\int \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = \phi$, o fluxo será

$$\phi = \oint \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} = \oint A_\theta r d\theta = -\frac{2\pi n}{e}. \quad (2.10)$$

O que fizemos então foi construir uma configuração de campos bidimensional, composta pelos campos escalar e eletromagnético. Encontramos fluxo magnético e, desde que $D_\mu\phi \rightarrow 0$ e $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ no infinito, temos uma configuração finita de energia. Se adicionarmos então uma dimensão extra, da qual os campos não dependam, essa configuração será semelhante à linha de um vórtice.

2.3 Teoria de Chern-Simons

Teoria quântica de campos topológica correlaciona funções conhecidas como invariantes topológicos e pode se construída de dois modos, levando a duas novas teorias: Schwarz e Witten. No primeiro caso, a ação é manifestamente independente da métrica usada e será o objeto de nosso trabalho na forma da teoria de Chern-Simons.

O primeiro sinal de aplicação do termo Chern-Simons em física apareceu por volta

de 1978 quando a supergravidade com $D = 11$ foi construída. Havia a necessidade de se introduzir um termo que desse consistência a teoria, porém, deveria preservar a simetria local. A teoria necessitava de um potencial 3-forma A , o que foi feito adicionando um termo ${}_{11}I_{cs}[A] = k \int A \wedge F \wedge F, F \equiv dA$ ao usual termo cinético F^2 na ação. De um ponto de vista físico, este termo gera uma auto-interação cúbica essencial na construção dessa supersimetria. Essa aparição inicial do termo CS passou um pouco despercebida. Posteriormente, alguns autores [7, 3] sugeriram a introdução de um 1-forma CS num espaço tridimensional. Sobretudo, o interesse era devido ao fato que o CS aparece na forma quadrática, ${}_3I_{CS}[A] = \mu \int A \wedge F$, dessa maneira pode afetar o eletromagnetismo de campo livre (Maxwell), conduzindo a uma escala finita e mantendo a teoria invariante de gauge. Estas considerações geraram uma enorme contribuição à literatura em teoria de campos topológica.

O nome "Chern-Simons" veio dos nomes dos cientistas de S. S. Chern e J. Simons que estudavam a densidade de Pontryagin $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ em quatro dimensões. Eles notaram que esta densidade poderia ser escrita como

$$\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu F_{\rho\sigma}. \quad (2.11)$$

Para sistemas planares, o termo de Chern-Simons em $(2 + 1)D$ ficará

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} \quad (2.12)$$

Com este termo, podemos construir uma teoria de gauge alternativa à teoria de Maxwell e que obedece aos critérios usuais de uma teoria de gauge, ou seja, é invariante de Lorentz, invariante de gauge e local. Para isso, escreveremos a lagrangeana

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - A_\mu J^\mu. \quad (2.13)$$

Esta lagrangeana parece não ser invariante de gauge como tínhamos dito, porém, se fizermos sua variação encontraremos

$$\delta\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{\kappa}{2} \partial_\mu (\lambda \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho). \quad (2.14)$$

Este termo será descartado, já que é uma derivada total e a ação será invariante de gauge.

Um ponto interessante desta teoria é o fato de ela ser de primeira ordem no espaço de derivadas. Isto faz com que a estrutura canônica da teoria seja diferente da de Maxwell. A lagrangeana de Chern-Simons é específica para $(2+1)D$. Atualmente é possível escrever esta lagrangeana para outras dimensões ímpares, porém somente para $(2+1)D$ ela é quadrática.

Se adicionarmos o termo de Chern-Simons à lagrangeana de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\rho}, \quad (2.15)$$

encontraremos a seguinte equação de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \kappa \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.16)$$

Como sabemos, a ação é invariante de gauge sobre a transformação

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu \alpha. \quad (2.17)$$

A equação (2.16) pode ser escrita como

$$(\square + \mu^2) F_\beta = 0. \quad (2.18)$$

Temos uma equação na forma Klein-Gordon que claramente nos mostra campos massivos. A presença na ação de termos massivos invariantes de gauge é uma característica especial

para $2 + 1$ dimensões, em todas as outras temos que recorrer ao mecanismo de Higgs.

2.4 Vórtices no modelo Higgs abeliano

O estudo de vórtices em sistemas planares tem importância tanto no cenário de cordas cósmicas quanto em matéria condensada. Nielsen e Olesen foram os pioneiros nesta área, quando mostraram a existência de soluções clássicas do tipo vórtices no modelo Higgs abeliano. Este modelo é uma extensão relativística da teoria de Ginzburg-Landau da supercondutividade.

Considere a lagrangeana do modelo de Higgs abeliano

$$\mathcal{L}_{\text{AH}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v^2)^2, \quad (2.19)$$

que descreve um campo escalar carregado interagindo com um campo de gauge $U(1)$, e exibe soluções de vórtices com fluxo magnético, porém sem carga. A derivada covariante é $D_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi + ieA_{\mu}\phi$, e o potencial quadrático tem quebra espontânea de simetria padrão como na figura.

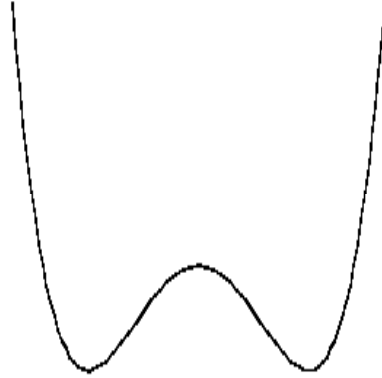


Figura 2-1: Potencial auto-dual quadrático $\frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2$ para o modelo de Higgs Abeli-ano. Variedade de vácuo $|\phi| = v$

Estamos interessados agora em encontrar a energia do sistema, que será dada por

$$E = \int T_{00} dv, \quad (2.20)$$

onde T_{00} é o tensor energia-momento dado por

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.21)$$

O funcional de energia para o caso estático será

$$\mathcal{E}_{\text{AH}} = \int d^2x \left[\frac{1}{2} B^2 + |D\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2 \right]. \quad (2.22)$$

Tomaremos as mesmas precauções de quando estudamos as linhas de vórtices, ou seja, para configurações de energia finita devemos considerar $\phi(\vec{x})$ tendendo a uma variedade de vácuo no infinito. Tais soluções são classificadas pelo seu *winding number* N de

vorticidade que representa o número de vezes que a fase de ϕ gira num círculo no infinito.

$$\phi(\vec{x})|_{|\vec{x}|=\infty} = v e^{iN\theta}. \quad (2.23)$$

Temos também que $|\vec{D}\phi| \rightarrow 0$ quando $|\vec{x}| \rightarrow \infty$.

O que pretendemos agora é encontrar configurações para mínimos de energia, faremos isso escrevendo o funcional de energia da forma descrita por Bogomol'nyi[15]. Este método consiste em escrever a energia de configurações de campos estáticos de forma mínima.

A partir do sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (2.24)$$

Podemos escrever a energia para configuração estática da forma

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.25)$$

Bogomol'nyi [15] escreveu a energia (2.25) na forma

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\theta}{dx} \pm \sqrt{2V} \right)^2 \mp \sqrt{2V} \frac{d\theta}{dx} \right] dx. \quad (2.26)$$

Como o primeiro termo desta integral não pode ser negativo, então pode ser negativo, então a energia mínima será dada por

$$E_B = \mp \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sqrt{2V} \frac{d\theta}{dx} \right] dx, \quad (2.27)$$

com a condição

$$\frac{d\theta}{dx} \pm \sqrt{2V} = 0. \quad (2.28)$$

Note que a equação (2.28) é de primeira ordem e as suas soluções são soluções da seguinte

equação de movimento

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.29)$$

O método de Bogomol'nyi, além de possibilitar a obtenção das equações diferenciais de primeira ordem, permite escrever a energia associada à configuração estática de forma fechada e mínima. Usaremos também a seguinte identidade

$$|D\phi|^2 = |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp eB|\phi|^2 \pm \epsilon^{ij}\partial_i J_j. \quad (2.30)$$

O funcional de energia (2.22) ficará então

$$\mathcal{E}_{\text{AH}} = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(B \mp e(|\phi|^2 - v^2))^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{e^2}{2} \right) (|\phi|^2 - v^2)^2 \mp ev^2 B \right]. \quad (2.31)$$

Pelo que observamos no ponto $\lambda = 2e^2$, a energia é limitada inferiormente por um múltiplo do fluxo magnético

$$\mathcal{E}_{\text{B}} = \int ev^2 B d^2x = v^2 |\Phi|. \quad (2.32)$$

Este limite será saturado por campos satisfazendo às equações auto-duais de Bogomol'nyi

$$\begin{aligned} D_{\pm}\phi &= 0 \\ B &= \pm e(|\phi|^2 - v^2). \end{aligned} \quad (2.33)$$

É interessante notar que, se considerarmos a componente temporal das equações de movimento para o campo A_{μ} (no caso estático), obteremos a lei de Gauss

$$\nabla^2 A_0 = 2e^2 |\phi|^2 A_0 \quad (2.34)$$

$$A_0(r) \propto e^{\alpha r} \quad (2.35)$$

que tem como solução assintótica

$$A_0 = 0. \quad (2.36)$$

A nossa carga será então

$$Q = \int J^0 d^2x = 0. \quad (2.37)$$

2.5 Vórtices no modelo Chern-Simons

Como uma generalização do modelo de Higgs abeliano, consideraremos agora o efeito de se usar o termo de Chern-Simons na lagrangeana, ao invés do termo de Maxwell. Este modelo adquire dinâmica através do acoplamento com outros campos. Existem soluções do tipo vórtices para esta teoria, semelhantes em alguns aspectos aos originais advindos da teoria de Ginzburg-Landau.

Vários trabalhos foram feitos com soluções de vórtices em modelos com termos de Maxwell e ou Chern-Simons, no entanto, nenhuma estrutura auto-dual de Bogomol'nyi análoga a do modelo de Higgs abeliano foi encontrada até que se escolheu um potencial de sexta ordem. Consideraremos então a seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|). \quad (2.38)$$

Procedendo como anteriormente, encontraremos o funcional de energia dado por

$$\mathcal{E}_{\text{CS}} = \int d^2x \left[|D_0 \phi|^2 + |\vec{D}\phi|^2 + V(|\phi|) \right]. \quad (2.39)$$

As equações de movimento para o campo A_μ serão

$$\frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} = -J^\mu. \quad (2.40)$$

Se considerarmos apenas a componente temporal, teremos a lei de Gauss

$$B = \frac{1}{\kappa} J_0 \quad (2.41)$$

e a carga elétrica do vórtice será então

$$Q = \int d^2x J^0 = \kappa \int d^2x B = \kappa \Phi. \quad (2.42)$$

Daí tiramos uma importante conclusão a respeito dos vórtices para este modelo; eles possuem fluxo magnético e são eletricamente carregados.

Para chegar às equações auto-duais de Bogomol'nyi, usaremos a identidade (2.30) e a lei de Gauss na forma (2.41). Então o funcional de energia será escrito como

$$\mathcal{E}_{\text{CS}} = \int d^2x \left[|D_0\phi \pm \frac{i}{\kappa}(|\phi|^2 - v^2)\phi|^2 + |D_{\pm}\phi|^2 + V(|\phi|) - \frac{1}{\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2 \mp v^2 B \right]. \quad (2.43)$$

Tivemos que escolher o potencial auto-dual da forma abaixo como ilustrado na figura 4.

$$V(|\phi|) = \frac{1}{\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2. \quad (2.44)$$

A energia será limitada inferiormente por

$$\mathcal{E}_{\text{CS}} \geq v^2 |\Phi| \quad (2.45)$$

Encontraremos as equações auto-duais, que combinadas à lei de Gauss (2.41), resultaram em

$$D_{\pm}\phi = 0$$

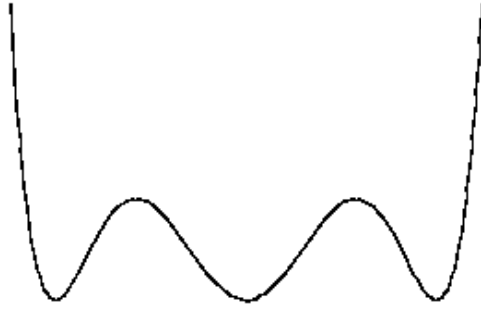


Figura 2-2: Potencial auto-dual $\frac{1}{\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2$. Note a existência de duas configurações de vácuo: $\phi = 0$ e $|\phi| = v$.

$$B = \pm \frac{2}{\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2) \quad (2.46)$$

2.6 Vórtices e o momento de dipolo magnético anômalo

Quando estudamos a equação de Dirac em Mecânica Quântica Relativística[9], o operador de momento magnético tem a seguinte forma

$$\boldsymbol{\mu} = h\mu_b\mathbf{S}, \quad (2.47)$$

sendo que μ_b é o magneton de Bohr, \mathbf{S} o operador de momento angular de spin e h é chamado razão giromagnética, normalmente tido como $h = 2$. Como visto na literatura[10], temos uma correção para este valor

$$h \rightarrow h + \frac{\alpha}{\pi}. \quad (2.48)$$

Conhecemos α como a constante de estrutura fina, valendo $\frac{1}{137}$, e que introduzirá um momento magnético adicional, conhecido como momento magnético anômalo.

Introduziremos a contribuição do momento magnético anômalo na Lagrangeana de Dirac[11], que ficará da seguinte forma

$$[(\partial_\mu + ieA_\mu)\sigma^\mu - \frac{g}{4}F_{\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu]\psi = im\psi, \quad (2.49)$$

onde σ^μ são as matrizes de Dirac, e g é a constante de acoplamento não-mínimo.

Em $(2 + 1)D$ [12], a interação do MMA apresenta as seguintes características com relação às matrizes de Dirac

$$\sigma^\mu\sigma^\nu = g^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\sigma_\lambda. \quad (2.50)$$

Se substituirmos em (2.49), teremos

$$\underbrace{(\partial_\mu + iA_\mu + i\frac{1}{4}g\varepsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda})}_{\mathcal{D}_\mu}\sigma^\mu\psi = im\psi, \quad (2.51)$$

sendo \mathcal{D}_μ agora a nossa nova derivada covariante. O resultado é que o termo cinético $\frac{1}{2}D_\mu\phi\overline{D^\mu\phi}$ trará um termo do tipo

$$eg|\phi^2|\varepsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda}A_\mu \quad (2.52)$$

Logo, se ϕ adquire um valor esperado não-nulo, geramos o termo de Chern-Simons. O resultado de uma teoria não-mínima tem alguns aspectos interessantes; com relação à constante de acoplamento g , ela é chamada "momento magnético crítico", e assume valores especiais [5, 6]. Particularmente, esta teoria nos fornece uma ação renormalizável a um *loop*[8].

A influência do acoplamento não-mínimo sobre as soluções mínimas de energia apa-

recerá através do termo $|D_\mu\phi|^2$. Este termo, com adição do termo de Pauli, aparecerá da seguinte forma no tensor energia-momento:

$$\left(\nabla_\mu\phi + i\frac{g}{4}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\phi\right)\left(\nabla_\nu\phi + i\frac{g}{4}\varepsilon_{\nu\gamma\theta}F^{\gamma\theta}\phi\right). \quad (2.53)$$

Teremos então termos da forma

$$i\frac{g}{4}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\bar{\phi}\nabla_\nu\phi \quad , \quad \text{sendo que} \\ \nabla_\mu = \partial_\mu + ieA^\mu. \quad (2.54)$$

Estes são termos topológicos; dessa forma, quando escrevermos a energia do sistema, eles não contribuirão. O termo que contribuirá para o tensor momento energia será

$$\frac{g}{16}|\phi|^2\varepsilon_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\varepsilon_{\nu\gamma\theta}F^{\gamma\theta} \quad (2.55)$$

Se usarmos a identidade

$$F^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (2.56)$$

o termo extra que aparecerá no tensor momento-energia será

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} = \frac{g^2}{4}|\phi|^2(2F_\mu F_\nu - g_{\mu\nu}F^\alpha F_\alpha) \quad (2.57)$$

Capítulo 3

Vórtices não-abelianos com acoplamento não-mínimo

Neste capítulo, iniciaremos a apresentação de tópicos ainda não existentes na literatura. Na seção seguinte, detalhamos como se dará o acoplamento não-mínimo na ação não-abeliana. O principal ponto desse estudo foi montar uma nova derivada covariante com termo de Pauli e invariante de gauge. No fim da seção, verificamos que influência terá o MDMA no funcional de energia.

Na penúltima seção, usaremos o modelo de Higgs, agora não-abeliano e com MDMA, encontraremos suas equações de movimento, o seu funcional de energia e, a partir daí, teremos as equações autoduais. Procedemos de forma equivalente na última seção com o modelo Chern-Simons não-abeliano e com MDMA.

Modelos com a presença do acoplamento não mínimo já foram mostrados anteriormente [30]. Faremos uma descrição diferenciada, analisando separadamente a inclusão dos termos de Maxwell ou Chern-Simons. Isto servirá de base para a inclusão do *background* gravitacional, que faremos no próximo capítulo. Iniciaremos este capítulo com uma descrição de como o termo de Chern-Simons aparecerá na lagrangeana, agora não-abeliana. Este termo será escrito agora obedecendo às regras de comutação do grupo de

simetria.

Como procuramos soluções do tipo vórtices, temos que encontrar o funcional de energia do sistema, e escrevê-lo na forma de Bogomol'nyi. Faremos isso escolhendo potenciais topológicos ou não, apropriados para cada situação, e não utilizaremos ansatz para as soluções.

3.1 O Termo de Chern-Simons Não-Abeliano

Podemos escrever facilmente, numa teoria de Yang-Mills, um termo cinético invariante dado por

$$\mathfrak{S}_{YM} = \int d^4 Tr(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}). \quad (3.1)$$

Se quisermos, podemos escolher outro termo invariante de Lorentz e de gauge em quatro dimensões

$$I = Tr\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}_{\rho\sigma} \quad (3.2)$$

Utilizando as propriedades do *traço*, podemos escrever este termo como

$$\begin{aligned} I &= 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Tr([\partial_\mu\mathbf{A}_\nu + i\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu][\partial_\rho\mathbf{A}_\sigma + i\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma]), \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Tr[\partial_\mu\mathbf{A}_\nu\partial_\rho\mathbf{A}_\sigma + 2i\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu\partial_\rho\mathbf{A}_\sigma], \\ &= 4\partial_\rho\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Tr[\mathbf{A}_\nu\partial_\mu\mathbf{A}_\sigma + \frac{2i}{3}\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A partir daí, visualizamos o nosso novo termo de Chern-Simons, que em $(2+1)D$ claramente fica

$$\mathcal{L}_{CS} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}Tr[\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{A}_\lambda - \frac{2}{3}\mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\lambda]. \quad (3.4)$$

O campo de gauge A_μ assume valores em uma representação da Álgebra de Lie $\mathcal{G} = SU(N)$.

Para uma teoria abeliana, os campos A_μ comutam e o termo trilinear em (3.4) desaparece devido à antissimetria de $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$. No caso não-abeliano, teremos $A_\mu = A_\mu^a T^a$ onde T^a são os geradores de \mathcal{G} [onde $a = 1, \dots, \dim \mathcal{G}$], satisfazendo às relações de comutação $[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$.

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c. \quad (3.5)$$

Como estamos trabalhando com o grupo $SU(2)$, podemos escrever o termo de Chern-Simons na forma vetorial

$$\mathcal{L}_{CS} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda} [\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{A}_\lambda - \frac{1}{3} \mathbf{A}_\mu \cdot (\mathbf{A}_\nu \times \mathbf{A}_\lambda)]. \quad (3.6)$$

3.2 MDMA em teorias com simetria não abeliana

Até agora, observamos que, para montar Lagrangeanas em modelos com simetria não-abeliana, temos que fazer modificações em seus termos obedecendo as novas regras impostas pela simetria do grupo. Como neste trabalho desejamos trabalhar com acoplamento não mínimo, devemos então procurar a nova forma da derivada covariante com acoplamento não mínimo e simetria não abeliana.

Antes de tudo é interessante atentar ao seguinte fato; qual será o significado do MMA em uma teoria com simetria não abeliana? Como foi mostrado na literatura [13], "em $(2+1)D$, uma partícula sem grau de liberdade para spin pode carregar propriedades de momento magnético. Isso mostra que para um valor particular do momento magnético, a eletrodinâmica de um sistema com N cargas pontuais reduz-se exatamente a uma ação à distância topologicamente invariante sobre a linha de mundo de uma partícula ". Uma característica especial do espaço com $(2+1)$ dimensões é que a constante de acoplamento do tipo Pauli pode ser incorporada à derivada covariante inclusive para partículas de spin nulo [23, 13, 6]. Então, no caso abeliano, é possível fazer o acoplamento com o campo

escalar através da adição de um termo magnético anômalo.

O que faremos então é seguir os mesmos passos de quando falamos do campo de Yang-Mills. Vimos que a derivada covariante ficou como

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + l \mathbf{W}_\mu \times \phi. \quad (3.7)$$

A dúvida é como ficará o termo extra para o momento anômalo

$$\frac{l}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}. \quad (3.8)$$

Obedecendo às novas regras de comutação do grupo de simetria, escreveremos este termo como

$$\frac{l}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \mathbf{W}_{\nu\lambda} \times . \quad (3.9)$$

Seguindo as mesmas precauções, adicionaremos o momento magnético anômalo a esta derivada, que assumirá a seguinte forma:

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi + e \mathbf{A}_\mu \times \phi + \frac{l}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \mathbf{W}^{\nu\lambda} \times \phi, \quad (3.10)$$

onde, por conveniência, chamamos W_μ de A_μ , e l é o momento magnético anômalo.

Através de cálculo vetorial simples, podemos demonstrar que esta nova derivada torna a ação invariante de gauge. Para isso, desejamos mostrar que $\delta(\nabla_\mu \phi) = -\boldsymbol{\alpha} \times (\nabla_\mu \phi)$, o que encontramos facilmente

$$\begin{aligned} \delta(\nabla_\mu \phi) &= -\boldsymbol{\alpha} \times (\partial_\mu \phi + e \mathbf{A}_\mu \times \phi) \\ &- \frac{l}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} [(-\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{W}^{\nu\lambda}) \times \phi + (-\boldsymbol{\alpha} \times \phi) \times \mathbf{W}^{\nu\lambda}]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usaremos novamente a identidade vetorial (1.18) no termo entre colchetes. Sendo assim,

a variação da nossa derivada será

$$\begin{aligned}\delta(\nabla_\mu\phi) &= -\boldsymbol{\alpha} \times (\partial_\mu\phi + e\mathbf{A}_\mu \times \phi + \frac{g}{4}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\mathbf{W}^{\nu\lambda} \times \phi) \\ &= -\boldsymbol{\alpha} \times (\nabla_\mu\phi)\end{aligned}\tag{3.12}$$

Como desejávamos, a derivada covariante não-abeliana, com acoplamento não-mínimo, deixa a ação invariante de gauge.

3.3 A influência do MDMA no tensor momento-energia.

Da mesma forma que o termo de acoplamento não-mínimo modificou a configuração de energia do sistema, sua versão não-abeliana também contribuirá para o aparecimento de um termo extra. Analogamente ao que foi descrito na seção 2.5, este termo extra aparecerá do produto $\frac{1}{2}\mathbf{D}_\mu\phi \cdot \mathbf{D}^\mu\phi$, que fica da seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi + e\mathbf{A}_\mu \times \phi + \frac{l}{4}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\mathbf{F}^{\nu\lambda} \times \phi) \\ \cdot (\partial^\mu\phi + e\mathbf{A}^\mu \times \phi + \frac{l}{4}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\mathbf{F}_{\nu\lambda} \times \phi)\end{aligned}\tag{3.13}$$

Dispensando os termos topológicos, teremos

$$\frac{1}{2}[\nabla_\mu\phi \cdot \nabla^\mu\phi + \frac{l^2}{4}(\mathbf{F}^\mu \times \phi) \cdot (\mathbf{F}_\mu \times \phi)],\tag{3.14}$$

onde

$$\nabla_\mu = (\partial_\mu + e\mathbf{A}_\mu \times)\tag{3.15}$$

Usaremos no segundo termo do colchete, a seguinte identidade vetorial

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\tag{3.16}$$

Este termo ficará

$$\frac{l^2}{4}[(\mathbf{F}^\mu \cdot \mathbf{F}_\mu)|\phi|^2 - (\mathbf{F}^\mu \cdot \phi)(\mathbf{F}_\mu \cdot \phi)] \quad (3.17)$$

Quando substituirmos no funcional de energia, teremos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{l^2}{4}[\mathbf{F}_\mu \cdot \mathbf{F}_\nu |\phi|^2 - (\mathbf{F}_\mu \cdot \phi)(\mathbf{F}_\nu \cdot \phi)] \\ -g_{\mu\nu} &\frac{l^2}{4}[(\mathbf{F}^\mu \cdot \mathbf{F}_\mu)|\phi|^2 - (\mathbf{F}^\mu \cdot \phi)(\mathbf{F}_\mu \cdot \phi)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Note que teremos dois termos a mais no funcional de energia.

3.4 Vórtices no Modelo Higgs Não-Abeliano com MDMA

Faremos agora a versão não-abeliana para um modelo com a presença de um termo análogo ao de Maxwell, dando cinética ao campo de gauge \mathbf{A}_μ . Procuramos então encontrar soluções de energia finita, com a ação influenciada pelo momento magnético anômalo. Estas soluções minimizam a energia do sistema quando saturamos o limite de Bogolmol'nyi, são as famosas equações autoduais de primeira ordem.

Este modelo foi estudado anteriormente, porém, sem a adição do momento magnético anômalo. Nossa descrição deste modelo será um tópico novo na literatura.

Consideramos então uma teoria de gauge SU(2) com a presença de dois campos de Higgs ϕ e ψ [19, 18, 17] afim de termos uma completa quebra de simetria.

Escrevemos nossa lagrangeana como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D_\mu\phi \cdot D^\mu\phi + \frac{1}{2}D_\mu\psi \cdot D^\mu\psi - \frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu} - V(\phi, \psi), \quad (3.19)$$

onde usamos a métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$, $\mu = (0, 1, 2)$ com

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{F}_\nu - \partial_\nu\mathbf{F}_\mu + e\mathbf{F}_\mu \times \mathbf{F}_\nu. \quad (3.20)$$

Os campos ϕ , ψ e A_μ são todos vetores no espaço interno; $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$, $A_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$. A influência do momento magnético anômalo aparece via derivada covariante, que é escrita como

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + e \mathbf{A}_\mu \times \phi + \frac{l}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \mathbf{W}^{\nu\lambda} \times \phi \quad (3.21)$$

g é o momento magnético anômalo como descrevemos na seção 3.2.

Encontramos as seguintes equações de movimento para os campos

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \phi &= -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \phi} \\ D_\mu D^\mu \psi &= -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \psi} \\ \nabla_\mu \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} + \frac{l}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu \mathbf{J}^\lambda &= e \mathbf{J}^\alpha \\ \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \nabla^\mu [\mathbf{F}^\lambda + \frac{l}{2e} \mathbf{J}^\lambda] &= \mathbf{J}^\nu; \\ \mathbf{J}_\mu &= e(D_\mu \phi \times \phi + D_\mu \psi \times \psi) \end{aligned}$$

Onde usamos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} F^\mu &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda} \\ F_{\nu\lambda} &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda} F^\mu \end{aligned} \quad (3.22)$$

No limite de Bogolmol'nyi, todas as equações de movimento são equações diferenciais de primeira ordem [15], as quais podem ser escritas como equações auto-duais. Teremos que escolher uma forma específica do potencial do potencial a fim de que esse limite exista, sendo assim, encontraremos o funcional de energia e, posteriormente, as equações de Bogolmol'nyi.

O tensor momento-energia será

$$T_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}^{\theta\beta} \cdot \mathbf{F}^{\mu\alpha} g_{\mu\theta} + D^\alpha \phi \cdot D^\beta \phi + D^\alpha \psi \cdot D^\beta \psi - g_{\alpha\beta} \left[-\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \phi \cdot D^\mu \phi + \frac{1}{2} D_\mu \psi \cdot D^\mu \psi - V(\phi, \psi) \right] \quad (3.23)$$

Como estamos procurando soluções de vórtices, que correspondem a configurações mínimas de energia, é comum como, em [20, 21, 18], assumir que qualquer configuração com ψ variável tenha uma energia tão grande quanto se fosse constante. Impomos então as seguintes condições para ψ em todo o espaço.

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= 0 \\ \psi^2 &= v^2 \\ \psi \cdot \phi &= 0 \\ \psi &\parallel \mathbf{A}_\mu \end{aligned} \quad (3.24)$$

Outra consideração importante a ser feita, é o fato de estarmos trabalhando num espaço não comutativo, o que não mudará a característica do vórtice de ser neutro. Como feito em [22], consideramos então

$$A_0 = 0. \quad (3.25)$$

Assim, para configurações estáticas o nosso funcional de energia ficará

$$E = \int d^2x \left[\frac{B^2}{4} - \frac{1}{2} |\nabla_i \phi|^2 + \frac{l^2}{4} (\mathbf{B} \times \phi)^2 - V(\phi, \psi) \right] \quad (3.26)$$

Para obtermos soluções com energia finita, os campos de gauge e de Higgs devem ter o

seguinte comportamento

$$\begin{aligned}
(a) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \nabla_\mu \phi &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \nabla_\mu \psi = 0 \\
(b) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \nabla_\mu \mathbf{F}_\mu &= 0 \\
(c) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\phi, \psi) &= 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Da equação (3.27b), temos que A_μ é de puro gauge no infinito.

Se usarmos a identidade

$$\begin{aligned}
|\nabla_i \phi|^2 &= |(\nabla_1 \pm \nabla_2) \phi|^2 \pm e[\mathbf{B}, \phi] \phi + D.T., \\
&= |(\nabla_1 \pm \nabla_2) \phi|^2 \pm eB^a \phi^b f^{abc} \phi^c, \\
&= |(\nabla_1 \pm \nabla_2) \phi|^2 \pm eB|\phi|^2,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

juntamente com a equação (3.16), o funcional de energia ficará

$$E = \int d^2x \left[xB^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{l^2}{4} \phi^2 \right) - \frac{1}{2} |\nabla \pm \phi|^2 - \frac{e}{2} B \phi^2 + V(\phi) \right]. \tag{3.29}$$

Escrevendo a energia do sistema na forma de Bogolmol'nyi teremos

$$\begin{aligned}
E = \int d^2x \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{l^2}{4} \phi^2 \right) \left[B \hat{\psi}_a \pm \frac{e}{4} \frac{(\phi^2 - v^2)}{\left(\frac{1}{4} - \frac{l^2}{4} \phi^2 \right)} \hat{\psi}_a \right]^2 \pm \frac{eBv^2}{2} \right. \\
\left. - \frac{1}{2} |(\nabla_1 \pm \nabla_2) \phi|^2 + \frac{e^2}{16} \frac{(\phi^2 - v^2)^2}{\left(\frac{1}{4} - \frac{l^2}{4} \phi^2 \right)} + V(\phi) \right].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Teremos que escolher um potencial da forma

$$V = -\frac{e^2}{16} \frac{(\phi^2 - v^2)^2}{\left(\frac{1}{4} - \frac{l^2}{4} \phi^2 \right)} \tag{3.31}$$

Teremos as equações autoduais

$$B\widehat{\psi}_a = \mp \frac{e(\phi^2 - v^2)}{4\left(\frac{1}{4} - \frac{l^2}{4}\phi^2\right)}\widehat{\psi}_a$$

$$\nabla_1\phi = \mp\nabla_2\phi \quad (3.32)$$

O *bound* de energia será

$$E_b = \int d^2x \frac{eBv^2}{2} \quad (3.33)$$

3.5 Modelo Chern-Simons Não-Abeliano com MDMA

Em (2+1) dimensões, a energia cinética para o campo de gauge pode vir tanto do termo de Maxwell, como do de Chern-Simons [24, 25]. O modelo de Chern-Simons permite a existência de vórtices com fluxo magnético assim como carga elétrica. Como foi mostrado em [26, 27], quando retiramos o termo de Maxwell da lagrangeana, o termo de Chern-Simons domina totalmente a dinâmica do campo de gauge, assim, com a escolha de um potencial de Higgs específico, o modelo permite uma redução do tipo Bogolmol'nyi.

Vários sistemas auto-duais foram encontrados e estudados para o presente modelo com simetria de gauge abeliana ou não-abeliana [16]. Existem equações de primeira ordem de Bogolmol'nyi para configurações saturando um limite no funcional de energia.

Faremos agora a generalização do modelo Chern-Simons para um modelo com acoplamento não mínimo e simetria não abeliana. Como já foi mostrado[16] existem soluções clássicas com energia finita para o modelo não abeliano. O que faremos agora é introduzir a influência do momento magnético anômalo na teoria.

Teremos então uma teoria com campos de gauge A_μ acoplados não minimamente a dois campos escalares ϕ e ψ . A lagrangeana para nosso modelo será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D_\mu\boldsymbol{\phi} \cdot D^\mu\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2}D_\mu\boldsymbol{\psi} \cdot D^\mu\boldsymbol{\psi} + \frac{k}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\left(\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{A}_\alpha, -\frac{2e}{3}\mathbf{A}_\mu \cdot (\mathbf{A}_\nu \times \mathbf{A}_\alpha)\right) - V(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) \quad (3.34)$$

onde usaremos a métrica $g_{\mu\nu}=\text{diag}(+1,-1,-1)$; $\mu = (0, 1, 2)$, com o tensor intensidade de campo dado por

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{F}_\nu - \partial_\nu\mathbf{F}_\mu + e\mathbf{F}_\mu \times \mathbf{F}_\nu. \quad (3.35)$$

Este tensor não representa mais o campo eletromagnético, já que foi redefinido para a simetria SU(2).

Os campos de Yang-Mills $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\psi}$ e \mathbf{A}_ν são triplêtos e representam vetores no espaço interno: $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, $\mathbf{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$.

A nossa derivada covariante com acoplamento não mínimo, como discutido na seção (3.2), assume a forma

$$D_\mu\boldsymbol{\phi} = \partial_\mu\boldsymbol{\phi} + e\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\phi} + \frac{l}{4}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\mathbf{W}^{\nu\lambda} \times \boldsymbol{\phi} \quad (3.36)$$

O termo extra do acoplamento não mínimo é invariante de gauge e de Lorentz. As equações de movimento para os campos $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\psi}$ e \mathbf{A}_μ são

$$D_\mu D^\mu\boldsymbol{\phi} = -\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\boldsymbol{\phi}},$$

$$D_\mu D^\mu\boldsymbol{\psi} = -\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\boldsymbol{\psi}},$$

$$\frac{l}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\nabla_\alpha\mathbf{J}^\mu - \frac{k}{2}\varepsilon^{\beta\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu} = -e\mathbf{J}^\beta.$$

Usaremos as mesmas condições (3.24) para o campo $\boldsymbol{\psi}$. Podemos fazer com que as

equações de movimento para o campo de gauge transformem-se de segunda para primeira ordem, observando uma relação entre a massa de Chern-Simons e o momento magnético anômalo. Procedendo assim como [30, 23], usaremos a seguinte relação

$$k = -\frac{2e}{l}, \quad (3.37)$$

teremos então que, qualquer solução para as equações do campo de gauge, podem ser escritas como

$$\mathbf{F}_\mu = \frac{1}{k}\mathbf{J}_\mu + \lambda\mathbf{G}_\mu, \quad (3.38)$$

onde λ é uma constante arbitrária e \mathbf{J}_μ é solução da equação

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\nabla^\mu\mathbf{J}^\lambda = -k\mathbf{G}_\nu. \quad (3.39)$$

Como foi considerado em [30], qualquer solução da equação (3.39) nos dará uma contribuição infinita para a energia do sistema. Como estamos procurando soluções de energia finita consideramos que a constante λ assume valor nulo. Sendo assim, quando a relação (3.37) é satisfeita, teremos a seguinte equação de movimento para o campo de gauge

$$\mathbf{F}_\mu = \frac{1}{k}\mathbf{J}_\mu. \quad (3.40)$$

onde

$$\mathbf{J}_\mu = e(D_\mu\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\phi} + D_\mu\boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\psi})$$

Como sabemos, a corrente \mathbf{J} difere da forma original [30], já que temos a contribuição do momento magnético anômalo e estamos trabalhando com uma teoria não-abeliana.

O funcional de energia será

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{1}{2} [|\nabla_0 \phi|^2 + \frac{g^2}{16} (\varepsilon_{0\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} \times \phi)(\varepsilon_{0\alpha\beta} \mathbf{F}^{\alpha\beta} \times \phi)] \\
&- [\frac{1}{2} [|\nabla_i \phi|^2 + \frac{g^2}{16} (\varepsilon_{i\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} \times \phi)(\varepsilon_{i\beta\alpha} \mathbf{F}^{\beta\alpha} \times \phi)] + V(\phi)]
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Usando a equação (3.40) juntamente com (3.24) teremos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_\mu &\parallel \mathbf{F}_\mu, \\
\mathbf{J}_\mu &\perp \phi, \\
\mathbf{F}^\mu \cdot \phi &= 0
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Substituindo no funcional de energia teremos

$$T_{00} = \frac{1}{2} |\nabla_0 \phi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_i \phi|^2 + \frac{g^2}{8} \mathbf{B}^2 \phi^2 + \frac{g^2}{8} \mathbf{E}^2 \phi^2 + V(\phi) \tag{3.43}$$

O próximo passo para encontrar as equações auto-duais é escrever a energia do sistema na forma de Bogomol'nyi [15].

Usaremos a seguinte característica do campo de gauge

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i + \frac{1}{e} \hat{\phi} \times \partial_i \hat{\phi}, \tag{3.44}$$

juntamente com a componente temporal da corrente \mathbf{J}_0 , poderemos então escrever

$$|\nabla_0 \phi|^2 = \frac{\mathbf{B}^2 \delta^2}{e^2 \phi^2}, \tag{3.45}$$

onde

$$\delta = \left(\frac{k^2 - e^2 \phi^2}{k} \right). \tag{3.46}$$

Usaremos agora as seguintes identidades analisadas no apêndice

$$|\nabla_i \phi|^2 = |\partial_i \phi|^2 + 2e \mathbf{A}_i (\phi \times \partial_i \phi) + e^2 [(\mathbf{A}_i \times \phi)^2]$$

$$\mathbf{F}_\mu = -\frac{ke^2 \phi^2}{(k^2 - e^2 \phi^2)} \overline{\mathbf{A}}_\mu^b (\delta_{ab} - \widehat{\phi}^a \widehat{\phi}^b)$$

Substituindo essas identidades no funcional de energia e agrupando os termos, teremos

$$T_{00} = \frac{\mathbf{B}^2}{2\alpha^2 \phi^2} \beta + |\partial_i \phi|^2 + \frac{\mathbf{A}_i^2 \phi^2}{2} \beta (\delta_{ab} - \widehat{\phi}^a \widehat{\phi}^b) - \frac{(\phi \times \partial_\mu \phi)^2}{\phi^2} + V(\phi) \quad (3.47)$$

onde

$$\beta = \left(\frac{2ke^2 + e^2 \alpha^2 \phi^4}{2k\alpha^2 \phi^4} \right) \quad (3.48)$$

e

$$\alpha = \frac{1}{\delta} e^2 \quad (3.49)$$

Com a escolha de um potencial do tipo ϕ^2 , após uma integração por partes, escreveremos a energia do sistema como

$$T_{00} = \frac{1}{2} \int d^2x \left[\frac{\beta}{\alpha^2 \phi^2} \left[B_{a\pm} \frac{\alpha \phi^2 \widehat{\phi}^a}{\sqrt{\beta}} \right]^2 + \left[\frac{\partial_\pm \phi^2}{2|\phi|} - \mathbf{A}_i^a |\phi| \beta (\delta_{ab} - \widehat{\phi}^a \widehat{\phi}^b) \right]^2 \right] \\ + \int d^2x \left[V(\phi) - \frac{1}{2} \phi^2 \right] \mp \int d^2x \widehat{\phi}^a \left[\frac{B_a \sqrt{\beta}}{\alpha} - \varepsilon_{ij} (\partial_i \phi^2) \overline{A}_j^a + |\partial_i \phi|^2 \right] \quad (3.50)$$

Encontramos então as seguintes equações autoduais

$$\mathbf{B}_a = \pm \frac{\alpha \phi^2}{\sqrt{\beta}} \widehat{\phi}^a$$

$$\partial_\pm \phi^2 = \mathbf{A}_i^a |\phi|^2 \beta (\delta_{ab} - \widehat{\phi}^a \widehat{\phi}^b) \quad (3.51)$$

Capítulo 4

Vórtices Gravitacionais

Neste capítulo, adicionaremos a influência do background gravitacional num modelo com a presença de MDMA e simetria de gauge não-abeliana. Como feito anteriormente, procuramos soluções do tipo vórtices. Inicialmente, desenvolveremos a teoria necessária para que possamos trabalhar com ações na presença de gravitação. Falaremos então do campo gravitacional através de uma breve explanação sobre gravidade geral. De posse desses conhecimentos, poderemos então construir nossa ação gravitacional não-abeliana. Inicialmente, consideramos o caso com a presença do termo de Chern-Simons dando dinâmica aos campos.

4.1 Introdução

Todas as partículas sofrem, de maneira equivalente, a ação do campo gravitacional, no entanto, partículas de massas diferentes experimentam diferentes forças gravitacionais e adquirem a mesma aceleração. Se tivermos as mesmas condições iniciais, essas partículas seguirão o mesmo caminho. Tais características são específicas da interação gravitacional não são observadas em outros tipos de interação na natureza.

A interação gravitacional pode ser descrita sem o uso do conceito de força, ao invés

disso, podemos representar a presença do campo gravitacional através de uma deformação no espaço-tempo. Uma partícula livre dentro desse espaço curvo seguirá, em seu movimento, uma geodésica, ou seja, uma curva mantendo a direção constante. De acordo com a Teoria Geral da Relatividade, essa deformação preserva a característica pseudo-reimanniana do espaço plano minkowskiano. A geometrização do espaço-tempo é a ferramenta utilizada para estudar a interação gravitacional, e isto só é possível em virtude de sua característica universal.

Como já havíamos dito, num campo gravitacional todas partículas seguem uma mesma trajetória. Essa afirmação nos leva a uma equação de movimento na qual nenhuma característica especial da partícula aparecerá. Podemos escrever a Segunda Lei de Newton para uma partícula como

$$\mathbf{F} = m_i \cdot \mathbf{a}, \quad (4.1)$$

e pela Lei da Gravitação, uma partícula sob a ação de uma aceleração \vec{g} produzida por um campo gravitacional, sofrerá a ação da força peso

$$\mathbf{F} = m_g \cdot \mathbf{g}. \quad (4.2)$$

A aceleração em um dado ponto será

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i} \mathbf{g}. \quad (4.3)$$

Muitos experimentos foram feitos para testar a diferença entre essas duas massas, e todos levaram a resultados negativos.

De maneira equivalente, todas as leis da física podem ser reduzidas localmente, às da Relatividade Especial, para uma apropriada escolha de referencial. As propriedades de

um referencial inercial na presença de um campo gravitacional, são as mesmas para um sistema de referência não-inercial, ou seja, um sistema de referência não-inercial equivale a um certo campo gravitacional. Isto é conhecido como princípio da equivalência. No entanto, os campos que tem por equivalentes sistemas de referência não-inerciais não são idênticos aos campos gravitacionais reais, já que no infinito os campos gravitacionais reais tendem a zero. Os campos, cujos sistemas não-inerciais são equivalentes, anulam-se quando passamos a um referencial inercial, do contrário, os campos gravitacionais reais¹ não podem ser eliminados por meio da escolha de um sistema de referência. O que pode ser feito é escolher um sistema de referência de modo que o campo gravitacional desapareça numa região do espaço suficientemente pequena, assim o campo pode ser considerado uniforme. Através da escolha de um determinado referencial, é possível fazer a gravitação desaparecer localmente. Para isso, necessitamos que, para cada partícula em um ponto x_0 , exista um referencial tal que

$$\ddot{x} = 0$$

A forma mais simples de mudar o espaço-tempo é modificando sua métrica, que por sua vez sofre variação quando observada de um referencial não-inercial. Se a gravitação é representada por um campo, este deve ser universal e influenciar igualmente todas as partículas. Se o campo gravitacional é representado pela métrica do espaço-tempo, na ausência de gravitação a métrica será a de Minkowski.

4.2 Métrica Pseudo-Riemanniana

Para cada espaço-tempo quadridimensional, temos uma métrica pseudo-reimanniana. Na relatividade especial, temos o espaço plano de Minkowski e sua métrica é chamada de

¹existem também num sistema de referência inercial

métrica de Lorentz, descrita por

$$\eta(x) = \eta_{ab} dx^a dx^b. \quad (4.4)$$

O espaço de Minkowski é um espaço pseudo-Euclidiano e é representado pelo sistema de coordenadas cartesianas. Nesse sistema η assume a seguinte forma

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

. O elemento de linha de Minkowski é escrito na forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ab} dx^a dx^b \\ &= dx^0 dx^0 - dx^1 dx^1 - dx^2 dx^2 - dx^3 dx^3 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A métrica do espaço pseudo-reimanniano será descrita por

$$g(x) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.6)$$

onde usamos os índices μ, ν, λ para o espaço pseudo-reimanniano, e a, b, c para o espaço de Minkowski.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +|g_{00}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|g_{11}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|g_{22}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -|g_{33}| \end{pmatrix}$$

4.3 Conexão

Num espaço pseudo-reimanniano geral, a derivada ordinária de um tensor não é covariante sob uma transformação geral de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$. Em coordenadas curvilíneas, as diferenciais dA_μ de um vetor não formam mais um vetor assim como suas derivadas parciais $\partial_\mu A_\nu$ não formam um tensor. Isto é devido ao fato de que dA_μ é a diferença de vetores que se encontram em pontos infinitamente vizinhos do espaço; conseqüentemente, em diferentes pontos do espaço, os vetores se transformam diferentemente.

Para definir uma nova derivada covariante é necessário introduzir uma conexão simbolizada por Γ .

A derivada covariante de uma função escalar ϕ é a derivada usual, ou seja:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi, \quad (4.7)$$

que é automaticamente covariante. Tomaremos agora o tensor contravariante A^μ , sua derivada covariante será

$$D_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu A^\lambda. \quad (4.8)$$

A derivada covariante do mesmo tensor (agora covariante) será

$$D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda A_\lambda. \quad (4.9)$$

Para a derivada covariante do tensor métrica teremos

$$D_\mu g_{\rho\sigma} = \partial_\mu g_{\rho\sigma} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda g_{\rho\lambda}. \quad (4.10)$$

A derivada covariante de um tensor de ordem 3 será

$$D_\mu \phi_{\rho\sigma}^\nu = \partial_\mu \phi_{\rho\sigma}^\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu \phi_{\rho\sigma}^\lambda - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \phi_{\lambda\sigma}^\nu - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \phi_{\rho\lambda}^\nu. \quad (4.11)$$

È interessante definirmos a seguintes convenções

$$\begin{aligned}
A^i_{;l} &= \partial_l A^i + \Gamma^i_{kl} A^k, \\
A_{i;l} &= \partial_l A_i - \Gamma^k_{il} A_k, \\
A^i_{k;l} &= \partial_l A^i_k - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k, \\
A^i_{k;l} &= \partial_l A_{ik} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

que serão usadas mais tarde. Para que sua derivada covariante tenha significado, a conexão Γ deverá ter transformações gerais de coordenadas da seguinte forma

$$\Gamma^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda} \Gamma^{\gamma\beta} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}. \tag{4.13}$$

A natureza não-covariante da conexão Γ faz da derivada covariante um objeto covariante. Quando a derivada covariante de um tensor é zero em um domínio, este tensor é dito "auto-paralelo".

Se a métrica é auto-paralela, teremos que

$$D_\mu g_{\rho\sigma} = 0 \tag{4.14}$$

e a equação acima nos leva à condição de metricidade

$$\partial_\mu g_{\rho\sigma} = \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} g_{\rho\lambda} = \Gamma_{\sigma\rho\mu} + \Gamma_{\rho\sigma\mu} = 2\Gamma_{(\rho\sigma)\mu}, \tag{4.15}$$

onde usamos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\rho\sigma\mu} &= g_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \\
\Gamma_{[\rho\sigma]\mu} &= \frac{1}{2} (\Gamma_{\rho\sigma\mu} + \Gamma_{\sigma\rho\mu}).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

A derivada covariante da conexão Γ nos dá o tensor curvatura de Riemann, definido como

$$R_{\lambda\rho\sigma}^{\kappa} = \partial_{\rho}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\kappa} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\lambda\rho}^{\kappa} + \Gamma_{\nu\rho}^{\kappa}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\kappa}\Gamma_{\lambda\rho}^{\nu}. \quad (4.17)$$

A partir da contração deste tensor, obtemos o tensor de Ricci

$$R_{\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\sigma}^{\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\lambda\rho}^{\nu}. \quad (4.18)$$

Podemos definir também o tensor torção da conexão dado por

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 2\Gamma_{[\nu\mu]}^{\lambda}. \quad (4.19)$$

4.4 Equações de Campo de Einstein

O tensor de Einstein possui a derivada covariante nula e é um tensor de segunda ordem puramente geométrico. De acordo com Einstein, algumas características físicas das fontes de campo gravitacional levam a deformações no espaço-tempo, isto é, em sua geometria. Sabemos que o espaço é descrito por uma métrica e que sua modificação leva a variações na forma do espaço-tempo. Conseqüentemente, a partir de uma modificação na métrica, podemos fazer surgir uma força real. Isto é descrito pela seguinte equação

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi GT^{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

Esta é a equação de Einstein, que nós dá a dinâmica de um campo gravitacional. O termo $T_{\mu\nu}$ é conhecido como tensor energia-momento de um campo de matéria, o qual é a fonte do campo gravitacional.

Contraindo (4.20) com $g^{\mu\nu}$ encontramos

$$R = -8\pi GT, \quad (4.21)$$

onde usamos

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

As equações de Einstein podem então ser escritas da forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T]. \quad (4.23)$$

Se considerarmos o caso sem fontes, no qual $T_{\mu\nu} = 0$, teremos que $R_{\mu\nu} = 0$ e conseqüentemente $R = 0$. Isto não implica que $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$, ou seja, o tensor de Riemann pode ser não-nulo na ausência de fontes.

A ação para um campo eletromagnético é escrita da seguinte forma

$$\int G\sqrt{-g}d\Omega \quad (4.24)$$

Consideremos então que assim como para as equações de campos eletromagnéticos as equações para o campo gravitacional não contenham derivadas dos potenciais do campo de ordem superior a dois.

Para variar a ação é preciso que G só contenha o tensor $g_{\mu\nu}$ e as quantidades $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$. Encontraremos então que

$$G = g^{ik}(\Gamma_{il}^m\Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lm}^m) \quad (4.25)$$

4.5 A Ação Gravitacional

Adicionaremos, à ação total do sistema, outra ação puramente gravitacional, que chamamos de S_G

$$S = S_M + S_G, \quad (4.26)$$

onde

$$S_G \equiv -\frac{1}{4\pi G} \int \sqrt{g(x)} R(x) d^4x. \quad (4.27)$$

Se fizermos variar essa, ação podemos chegar às equações de Einstein.

Como já sabemos, o escalar de curvatura R é definido como $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Fazendo então variar o termo integrado, teremos

$$\delta(\sqrt{g}R) = \sqrt{g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta\sqrt{g} + \sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \quad (4.28)$$

Temos que a variação do tensor de Ricci é dada por

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}. \quad (4.29)$$

O último termo de $\delta(\sqrt{g}R)$ é

$$\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g}[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}] \quad (4.30)$$

que também podemos escrever como

$$\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})) - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\sqrt{g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})) \quad (4.31)$$

O termo acima é nulo quando integramos em todo espaço. Temos também que

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{g} &= \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\ \delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma}\end{aligned}\tag{4.32}$$

Logo a variação da ação gravitacional será

$$\delta S_G = \frac{1}{4\pi G} \int \sqrt{g}[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R]\delta g_{\mu\nu}d^4x\tag{4.33}$$

4.6 Gravidade em 3 dimensões

Atualmente, muito se fala de gravidade para altas dimensões, acredita-se ser essa a chave necessária para construir uma teoria de unificação que descreva todos os processos naturais. Por outro lado, em $(2+1)D$ os tensores de curvatura e de Einstein são dinamicamente triviais e o espaço é plano fora das fontes.

Como foi descrito em [28], para $(2+1)D$, podemos escrever o tensor de curvatura $R_{\mu\nu\alpha\lambda}$ em função do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. De acordo com Weinberg [29], podemos escrever o tensor curvatura como

$$R_{\mu\nu\alpha\lambda} = g_{\mu\alpha}R_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}R_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha}R_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\alpha})g^{\beta\sigma}g^{\beta\sigma}R_{\beta\sigma}.\tag{4.34}$$

Se usarmos as equações de Einstein e o fato de que no vácuo $T^{\mu\nu} = 0$, obtemos que

$$R^{\mu\nu} = 0.\tag{4.35}$$

E se substituirmos em (4.34), obteremos

$$R_{\mu\nu\alpha\lambda} = 0.\tag{4.36}$$

Sendo assim o espaço é chato. Isso só é verificado para três dimensões, como discutimos anteriormente, para $(3+1)D$, se tivermos $R^{\mu\nu} = 0$, não necessariamente teremos $R_{\mu\nu\alpha\lambda} = 0$.

Outro ponto interessante a ser considerado é quando levamos esta teoria ao limite newtoniano. Faremos isso encontrando as equações de movimento da partícula. A partir da conservação do tensor energia-momento, temos que

$$T_{;0}^{00} = T^{00}\Gamma_{0\nu}^\nu + T^{00}\Gamma_{00}^\nu = T^{00}\Gamma_{00}^\nu = 0 \quad (4.37)$$

sendo assim, a partícula terá aceleração nula já que para corpos inicialmente estáticos teremos

$$\ddot{g}^j = -\Gamma_{00}^j = 0 \quad (4.38)$$

4.7 Modelo Chern-Simons Não-Abeliano com MDMA com Background Gravitacional

Nesta seção, faremos a inclusão do background gravitacional à lagrangeana do modelo Chern-Simons com acoplamento não mínimo. Veremos que será necessária a introdução de um ansatz para se obter uma análise da influência do momento magnético anômalo nas equações de movimento. Este modelo já foi estudado anteriormente, porém, sem a adição do acoplamento não-mínimo.

Apresentaremos a seguir uma descrição deste modelo, inédito na literatura. Consideramos um espaço tridimensional com as coordenadas $x^\mu = (\rho, t, \theta)$. Descrevemos o espaço cilíndrico e estacionário através de um elemento de linha

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -d\rho^2 + g_{ij}(\rho)dx^i dx^j, \quad \rho \geq 0, \\
0 &\leq \theta \leq 2\pi, \quad i, j = (t, \theta).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

No nosso sistema de coordenadas, teremos $x^t = t$, $x^\theta = \theta$. Nossa métrica será dada por

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} -g & 0 & 0 \\ 0 & g_{\theta\theta} & -g_{t\theta} \\ 0 & -g_{t\theta} & g_{tt} \end{pmatrix}$$

Para obtermos uma quebra de simetria máxima, consideramos uma teoria com a presença de dois multiplêtos de Higgs ϕ e ψ , com valores esperados no vácuo η e ξ , respectivamente.

Para obtermos soluções de energia finita, os campos de Higgs devem ter as seguintes características assintóticas:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_\mu \phi &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} D_\mu \psi = 0, \\
\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathbf{A}_\mu &= \frac{1}{i} g^{-1} \partial_\mu g.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

A ação que descreverá esse modelo será

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \int d^3x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R + \frac{1}{2} D_\mu \phi \cdot D_\nu \phi g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \psi \cdot D_\nu \psi g^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{k}{4\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} [\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{A}_\alpha - \frac{2e}{3} \mathbf{A}_\mu \cdot (\mathbf{A}_\nu \times \mathbf{A}_\alpha)] - V(\phi, \psi) \right).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

A derivada covariante, com acoplamento não-mínimo, é escrita como

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + e \mathbf{A}_\mu \times \phi + \frac{l}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \mathbf{F}^{\nu\lambda} \times \phi \tag{4.42}$$

O tensor intensidade de campo não-abeliano é

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{F}_\nu - \partial_\nu \mathbf{F}_\mu + g \mathbf{F}_\mu \times \mathbf{F}_\nu. \quad (4.43)$$

As equações de Einstein para o nosso modelo são

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.44)$$

Impondo as mesmas condições que em (3.24), teremos o tensor energia-momento da forma

$$T_{\mu\nu} = D_\mu \phi \cdot D_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D_\alpha \phi \cdot D_\beta \phi g^{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (4.45)$$

Encontramos as seguintes equações de movimento

$$D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu \phi) = -\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (4.46)$$

$$\frac{k}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \mathbf{F}_{\nu\lambda} = -e \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\mathbf{J}_\nu - \frac{l}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha \mathbf{J}_\nu], \quad (4.47)$$

onde definimos

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi + l \mathbf{W}_\mu \times \phi. \quad (4.48)$$

Usaremos aqui a mesma condição que em (3.40) e (3.37), logo teremos a seguinte equação de movimento, ao invés de (4.47),

$$\frac{k}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \mathbf{F}_{\mu\nu} = -e \sqrt{-g} g^{\nu\delta} (D_\delta \phi \times \phi) + g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (4.49)$$

Procuramos por soluções de vórtices com simetria cilíndrica da forma

$$\mathbf{A}_\rho = 0$$

$$\mathbf{A}_t = \frac{\epsilon \mathbf{W}(\rho)}{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_\theta = \frac{\mathbf{P}(\rho) - n}{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \mathbf{R}(\rho) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Devemos ter as seguintes condições de contorno para os campos na origem

$$P(0) = n, R(0) = 0 \tag{4.50}$$

de modo que os campos tenham valores singulares.

Para termos soluções de energia finita impomos as seguintes condições

$$P(\infty) = 0, R(\infty) = \eta, W(\infty) = 0. \tag{4.51}$$

Assumimos também que $g_{tt} = 1$. Substituindo o nosso *ansatz* no tensor intensidade de

campo teremos

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\epsilon}{e} \frac{dW}{d\rho} & \frac{1}{e} \frac{dp}{d\rho} \\ -\frac{\epsilon}{e} \frac{dW}{d\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{e} \frac{dP}{d\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Substituindo o *ansatz* na equação de movimento (4.49) obteremos

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \frac{R}{g} \left[P^2 g_{\theta\theta} + \epsilon^2 W^2 + \left(\frac{l}{2} \frac{\epsilon}{e} \frac{dW}{d\rho} \right)^2 R + l \frac{\epsilon}{e} \frac{dW}{d\rho} P R \right]$$

$$- \frac{g_{t\theta}}{g} \left[W R P \epsilon + W \frac{\epsilon^2}{e} \frac{l}{2} \frac{dW}{d\rho} R + \frac{l}{2} \frac{dp}{d\rho} \frac{1}{e} R P + R \left(\frac{l}{2} \frac{\epsilon}{e} \right)^2 \frac{dW}{d\rho} \frac{dP}{d\rho} \right]$$

$$\frac{1}{g} \left[\frac{l}{2} \frac{dP}{d\rho} \frac{\epsilon}{e} W + \frac{l}{2} \frac{dP}{d\rho} \frac{\epsilon}{e} W R + \left(\frac{l}{2} \frac{dP}{d\rho} \frac{1}{e} \right)^2 R \right] = \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi}$$

e da equação (4.46) obteremos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left[\frac{k e}{\sqrt{g}} \frac{dW}{d\rho} - \frac{e^2 R^2}{g} \left(P - \epsilon W g_{t\theta} - \frac{l}{2} \frac{dP}{d\rho} \frac{1}{e} g_{t\theta} + \frac{l}{2} \frac{\epsilon}{e} \frac{dW}{d\rho} \right) \right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left[\frac{k}{\sqrt{g}} \frac{dP}{d\rho} - \frac{e^2 R^2}{g} \left(W \epsilon g_{\theta\theta} - P g_{t\theta} - \frac{l}{2} \frac{\epsilon}{e} \frac{dW}{d\rho} + \frac{l}{2} \frac{dP}{d\rho} \frac{1}{e} g_{\theta\theta} \right) \right] = 0$$

Observamos que, se a constante de acoplamento não-mínimo, assumir valor nulo, voltaremos às mesmas equações consideradas em [19].

Conclusões e Perspectivas

Podemos citar como ponto central desta dissertação o estudo dos vórtices em teorias de Yang-Mills. Nosso principal objetivo, como o próprio tema já ilustra, foi procurar soluções para as equações de campo que satisfazem determinados padrões. Estas soluções chamadas do tipo vórtices, foram encontradas através de técnicas usadas anteriormente na literatura, essencialmente o formalismo de Bogomol'nyi.

No capítulo 3 iniciamos a análise de tópicos novos na literatura. Fizemos o estudo detalhado de como é feita a inclusão do MDMA em teorias não-Abelianas. Encontramos as equações auto-duais para o modelo de Yang-Mills com MDMA não-abeliano, utilizando um potencial topológico. Procedemos de forma semelhante para o modelo Chern-Simons considerando um potencial do tipo ϕ^2 . Para tornar nosso problema solucionável tivemos que fazer certas restrições sem limitar a abrangência de nossos resultados.

No último capítulo fizemos a inclusão do acoplamento não-mínimo no modelo Chern-Simons não-Abeliano em um *background* gravitacional. Este tema abre um caminho novo na literatura tratando modelos de gauge não-Abelianos com acoplamento não-mínimo envolvendo gravitação. Observamos que é possível encontrar equações de movimento consistentes mesmo após a inclusão do MDMA.

Como perspectivas de expansão dos conhecimentos e dos resultados desta dissertação, inclusive com vistas a um projeto de tese de doutorado, podemos citar:

- 1- Generalização para o caso do grupo não-abeliano $SU(3)$, o que pode levar à aplicações na QCD.

2-O estudo da influência do MDMA no modelo sigma não-linear com espaço alvo do tipo $O(3)$, com e sem gravidade.

3-Supersimetrização $N=1 - D=3$ dos modelos construídos.

4- O estudo numérico das soluções dos modelos construídos.

5-A busca pelas equações de primeira ordem para os campos de Einstein.

Apêndice A

Apêndice

Sempre que precisamos escrever a energia do sistema na forma de Bogomol'nyi [15] temos que analisar alguns termos do funcional de energia. Sendo assim, como estamos trabalhando com uma teoria não-abeliana torna-se necessário fazer um estudo de algumas identidades agora num cenário não comutativo (não abeliano).

Quando trabalhamos com acoplamento não-mínimo a derivada covariante fica escrita da seguinte forma

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + e\mathbf{A}_\mu \times \phi + \frac{l}{4}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\mathbf{W}^{\nu\lambda} \times \phi \quad (\text{A.1})$$

O termo cinético do campo ϕ terá agora a influência do MDMA. No funcional de energia após dispensarmos os termos topológicos teremos os objetos provenientes do MDMA da seguinte forma

$$\frac{1}{2}|\nabla_0\phi|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_i\phi|^2 + \frac{l^2}{8}[(\mathbf{B} \times \phi)^2 + (\mathbf{E} \times \phi)^2] \quad (\text{A.2})$$

onde definimos

$$\nabla_i\phi = \partial_i\phi + e\mathbf{A}_i \times \phi \quad (\text{A.3})$$

O termo $|\nabla_i \phi|^2$ poderá ser escrito como

$$\begin{aligned} |\nabla_i \phi|^2 &= |\partial_i \phi|^2 + 2e\mathbf{A}_i(\phi \times \partial_i \phi) + e^2[(\mathbf{A}_i \times \phi)^2] \\ &= |\partial_i \phi|^2 + 2e\mathbf{A}_i(\phi \times \partial_i \phi) + e^2[\mathbf{A}_i^2 \phi^2 (\delta_{ab} - \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b)] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Usaremos a seguinte propriedade do campo de gauge

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i + \frac{1}{e} \hat{\phi} \times \partial_i \hat{\phi} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_i^2 &= \mathbf{A}_i^2 + 2\frac{\mathbf{A}_i}{e} \cdot \hat{\phi} \times \partial_i \hat{\phi} + (\hat{\phi} \times \partial_i \hat{\phi})^2 \\ &= \mathbf{A}_i^2 + 2\frac{\mathbf{A}_i}{e} \cdot \frac{\phi \times \partial_i \phi}{\phi^2} + (\hat{\phi} \times \partial_i \hat{\phi})^2 \\ e^2 \bar{\mathbf{A}}_i^2 \phi^2 &= e^2 \mathbf{A}_i^2 \phi^2 (\delta_{ab} - \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b) + 2e\mathbf{A}_i \phi \times \partial_i \phi + (\hat{\phi} \times \partial_i \hat{\phi})^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo A.6 em A.4 teremos então

$$|\nabla_i \phi|^2 = |\partial_i \phi|^2 + e^2 \bar{\mathbf{A}}_i^2 \phi^2 - \frac{(\phi \times \partial_i \phi)^2}{\phi^2} \quad (\text{A.7})$$

Outra identidade bastante importante é obtida a partir da corrente, que é definida em teorias não-abelianas como

$$\mathbf{J}_\mu = e(\mathbf{D}_\mu \phi \times \phi) \quad (\text{A.8})$$

Após usarmos a equação

$$\mathbf{F}_\mu = \frac{\mathbf{J}_\mu}{k} \quad (\text{A.9})$$

veremos que é possível escrever o campo \mathbf{F}^μ em termos de campo de gauge \mathbf{A}_μ . Iniciaremos escrevendo a corrente da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_\mu &= e(\partial_\mu \phi^a \times \phi^b) + e^2(\mathbf{A}_\mu \times \phi^a) \times \phi^b + \frac{l}{2}(\mathbf{F}^\mu \times \phi^a) \times \phi^b \\
&= e(\partial_\mu \phi^a \times \phi^b) - e^2[\mathbf{A}_\mu(\phi^a \cdot \phi^b) - \phi^b(\phi^a \cdot \mathbf{A}_\mu)] \\
&\quad + \frac{el}{2}[\mathbf{F}^\mu(\phi^a \cdot \phi^b) - \phi^b \underbrace{(\phi^a \cdot \mathbf{F}^\mu)}_0] \\
\mathbf{J}_\mu &= e(\partial_\mu \phi^a \times \phi^b) - e^2[\mathbf{A}_\mu(\phi^2 \delta_{ab} - \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b \phi^2) + \frac{el}{2} \mathbf{F}^\mu(\phi^2)] \tag{A.10}
\end{aligned}$$

onde usamos

$$\mathbf{F}^\mu \cdot \phi = 0 \tag{A.11}$$

substituindo (A.10) em (A.9) teremos

$$\begin{aligned}
k\mathbf{F}^\mu &= e\partial_\mu \phi^a \times \phi^b - [e^2 \mathbf{A}_\mu \phi^2](\delta_{ab} - \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b) - \frac{el}{2} \mathbf{F}^\mu \phi^2 \\
\mathbf{F}_\mu k - \frac{e^2}{k} \mathbf{F}_\mu \phi^2 &= -e^2 \phi^2 \mathbf{A}_\mu (\delta_{ab} - \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b) + e\partial_\mu \phi^a \times \phi^b \\
\mathbf{F}_\mu &= -\frac{ke^2 \phi^2}{(k^2 - e^2 \phi^2)} \overline{\mathbf{A}}_\mu^b (\delta_{ab} - \hat{\phi}^a \hat{\phi}^b) \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] H. B. Nielsen e P. Olesen, Nucl. Phys. **B 61** (1973) 45.
- [2] [Clay,2002] Clay Mathematics Institute, Millennium Prize, [http://www.claymath.org/Millennium Prize Problems](http://www.claymath.org/Millennium%20Prize%20Problems), 2002. O Clay Institute oferece uma recompensa a quem formular uma teoria quântica de Yang-Mills na qual exista um "mass gap".
- [3] W. Siegel, Nucl. Phys. **B156** (1979) 135; R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. D **23** (1981) 2291; J. Schonfeld, Nucl. Phys. B **185** (1981).
- [4] C. N. Yang and R. Mills, Phys. Rev. 96, **191** (1954).
- [5] Y. Georgelin e J.C. Wallet, Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992) 1149.
- [6] J. Stern, Phys. Lett. **B 265** (1991) 119.
- [7] S. Deser, R. Jackiw, e S. Templeton, Ann. of Phys. **140** (1982) 372.
- [8] M.E. Carrington e G. Kunstatter, Phys. Lett. B 321 (1994) 223.
- [9] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics, Pergamon Press.
- [10] J. Schwinger, Phys.Rev. **73**, 416L(1948).
- [11] Influência do Momento Magnético Anômalo do Elétron em Átomos de Alto Número Atômico, Almeida, C.A.S., Dissertação de Mestrado - UFC(1984).

- [12] Pris'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53**, **4** (1991), 177.
- [13] S. K. Paul e A. Khare, Phys. Lett. B193, **253** (1987).
- [14] A.A. Abrikosov, Zh. Eksp. Teor. Fiz **32** (1957) 1442, Sov. Phys. **JETP5** (1957) 1174.
- [15] E. B. Bogomol'nyi, Sov, J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449.
- [16] K. Lee, Phys. Lett. B **255** (1991) 381.
- [17] A. Antillón, J. Escalona, G. Germán e M. Torres, Phys. Lett. B **359** (1995) 327.
- [18] L. F. Cugliandolo e G. Lozano, Phys. Rev. D **40**, 10 (1989) 3440.
- [19] M.E.X Guimarães e L.A.J. London, Phys. Rev. D **52** 10 (1995) 6057.
- [20] H.J. de Vega e F.A. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. **56**, 2564 (1986).
- [21] L. F. Cugliandolo, G. Lozano, M.V. Manías, e F.A. Schaposnik, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 479.
- [22] G.S. Lozano , E.F. Moreno e F.A. Schaposnik, Phys. Lett. **b 504** (2001) 117.
- [23] M. Torres, Phys. Rev. **D 46** (1992) R2295.
- [24] J. Schonfeld, Nulc. Phys. **B 185** (1991) 157.
- [25] C. Hagen, Ann. Phys. (NY) 157 (1984) 342; Phys. Rev. D 3 (1985) 2135.
- [26] J. Hong, Y. Kim e Y.P. Pac, Phys. Rev. Lett. **64**, 2230-2233 (1990).
- [27] R. Jackiw e E. J. Weinberg, Phys. Rev Lett. **64**,2234-2237 (1990).
- [28] Giddings, S., Abbott, J., e Kuchar, K. (1984). Gen. Rel. Grav., **16**, 751

- [29] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, MIT, 1972
- [30] A. Antillón, J. Escalona, M. Torres, *Phys. Rev. D* **55**, (1197) 6327.
- [31] Vórtices em modelos Planares com Acoplamento Não-Mínimo em um *Background* Gravitacional, G.M.Alencar, Dissertação de Mestrado-UFC(2004)