Proposição do problema de dobragem e empacotamento

Bruno de Athayde Prata (UNIFOR) bprata@unifor.br

Francisco Regis Abreu Gomes (IFCE) regisgomes@ifce.edu.br

Resumo

Este artigo tem por objetivo reportar a proposição de um novo tipo de problema de corte e empacotamento, intitulado Problema de Dobragem e Empacotamento (PDE). Neste novo problema, um conjunto de itens tridimensionais deve ser armazenado em uma ou mais caixas; porém, tais itens possuem uma dimensão, denominada espessura, que é infinitamente inferior às outras duas dimensões, de forma que os itens podem ser dobrados para serem mais bem armazenados nas caixas. Para uma maior compreensão do problema proposto, o artigo ilustra um exemplo teórico com a construção de algumas soluções para o problema e a proposição de uma heurística para casos específicos do mesmo. Como consideração final do estudo, pode-se destacar a utilidade prática do problema proposto e sugerem-se novos estudos para uma melhor modelagem e resolução do PDE.
Palavras-chave: Problemas de Corte e Empacotamento, Problema de Dobragem e Empacotamento, Heurísticas.

1. Introdução

Os problemas de corte e empacotamento estão entre os problemas mais pesquisados na área de Otimização Combinatória, possuindo diversas aplicações no setor industrial, como, por exemplo, o corte de chapas e barras, o carregamento de paletes e contêineres, o seqüenciamento de tarefas e a alocação de recursos financeiros. De modo geral, os problemas de corte e empacotamento consistem em buscar a melhor maneira de armazenar objetos pequenos, denominados itens, em objetos grandes, denominados caixas ou *bins*.

As taxonomias existentes para os problemas de corte e empacotamento, como a proposta por Dyckhoff (1990), contemplam uma vasta gama de situações de possível ocorrência na prática; entretanto, casos específicos ainda podem fugir a tais classificações. Um exemplo deste fato é o problema proposto neste artigo, denominado Problema de Dobragem e Empacotamento (PDE).

O PDE consiste em empacotar um conjunto de itens tridimensionais em uma ou mais caixas. Os itens possuem uma dimensão, denominada espessura, que é infinitamente inferior às outras duas dimensões, de forma que os itens podem ser dobrados para serem melhor armazenados nos *bins*. Dentre as aplicações industriais do PDE, podem ser salientados os problemas de empacotamento de produtos têxteis, tais como toalhas e lençóis.

O objetivo do presente trabalho é apresentar o Problema de Dobragem e Empacotamento (PDE), com vistas a direcionar futuros esforços de pesquisa na sua formulação e resolução. O artigo é divido em cinco seções, apresentadas a seguir.

Na primeira seção é feita uma sucinta introdução ao tema abordado, evidenciando a relevância do estudo, assim como os objetivos e o escopo do trabalho. A segunda seção destina-se a apresentar a fundamentação teórica sobre problemas de corte e empacotamento. Na terceira seção descreve-se o Problema de Dobragem e Empacotamento. Na quarta seção é apresentada uma heurística para casos específicos do problema. Por fim, na quinta seção, são feitas as considerações finais acerca do tema abordado e, em seguida, apresentadas as referências bibliográficas que deram suporte ao trabalho.

2. Problemas de corte e empacotamento

Em problemas de corte e empacotamento, as unidades disponíveis em estoque para serem cortadas ou para armazenarem pacotes são denominadas objetos; já as unidades a serem produzidas ou empacotadas são denominadas itens. Como exemplos de critérios de otimização do corte e empacotamento, podem ser destacados: (i) maximizar o número de itens produzidos (cortados); (ii) maximizar o número de itens de itens empacotados; (iii) minimizar a perda de material; e (iv) minimizar o custo dos objetos utilizados.

Os problemas de corte e empacotamento, apesar de serem distintos sob o ponto de vista prático, possuem a mesma lógica de modelagem matemática. Dickhoff (1990) foi o primeiro autor a observar esta similaridade e, em seu artigo, propôs uma taxonomia que unificava os problemas de corte e empacotamento em uma mesma classe de problemas.

Através de uma tipologia formada por quatro caracteres ($\alpha/\beta/\gamma/\delta$), foi possível classificar 96 tipos de problemas de acordo com suas características. A descrição da tipologia de Dickhoff é apresentada a seguir.

- α: dimensão – (1) unidimensional; (2) bidimensional; (3) tridimensional; e (N) *n*-dimensional ($n > 3$).
- β: tipos de tarefa – (B) Todos os objetos devem ser usados e apenas uma seleção de itens será produzida; e (V) Todos os itens devem ser produzidos a partir de uma seleção de objetos.
- γ: variedade de objetos – (O) Um objeto; (I) Vários objetos idênticos; e (V) Vários objetos diferentes.
- δ: variedade de itens – (F) Baixa demanda de itens com formatos diferentes; (M) Alta demanda de itens com vários formatos; (R) Alta demanda de itens com pouca variação dos formatos; e (C) Itens com formatos congruentes.

Conforme Wäscher *et al.* (2006), a tipologia proposta por Dyckhoff, inicialmente, constituiu-se em um excelente instrumento para a organização e a categorização dos problemas existentes na literatura. Entretanto, com o passar dos anos, algumas deficiências da tipologia supracitada tornaram-se evidentes, causando problemas para a caracterização de novos problemas recentemente desenvolvidos.

Assim, Wäscher *et al.* (2006) propuseram uma nova tipologia para problemas de corte e empacotamento, baseada na tipologia concebida por Dyckhoff, a qual define novas categorias de problemas. A seguir, na Figura 1, são ilustrados os problemas básicos de corte e empacotamento de acordo com a nova classificação proposta.

Os problemas de corte e empacotamento, em geral, são do tipo NP – Difícil. Os problemas de empacotamento tridimensional são NP – difícil no sentido extremo, estando entre os mais difíceis problemas de Otimização Combinatória existentes até o momento (SILVA, 2002). Deste modo, para diversas instâncias, a utilização de abordagens exatas para tais problemas é inviabilizada, sendo requerido o emprego de métodos heurísticos, que propiciam soluções de boa qualidade em tempo computacional aceitável (SILVA e SOMA, 2003).

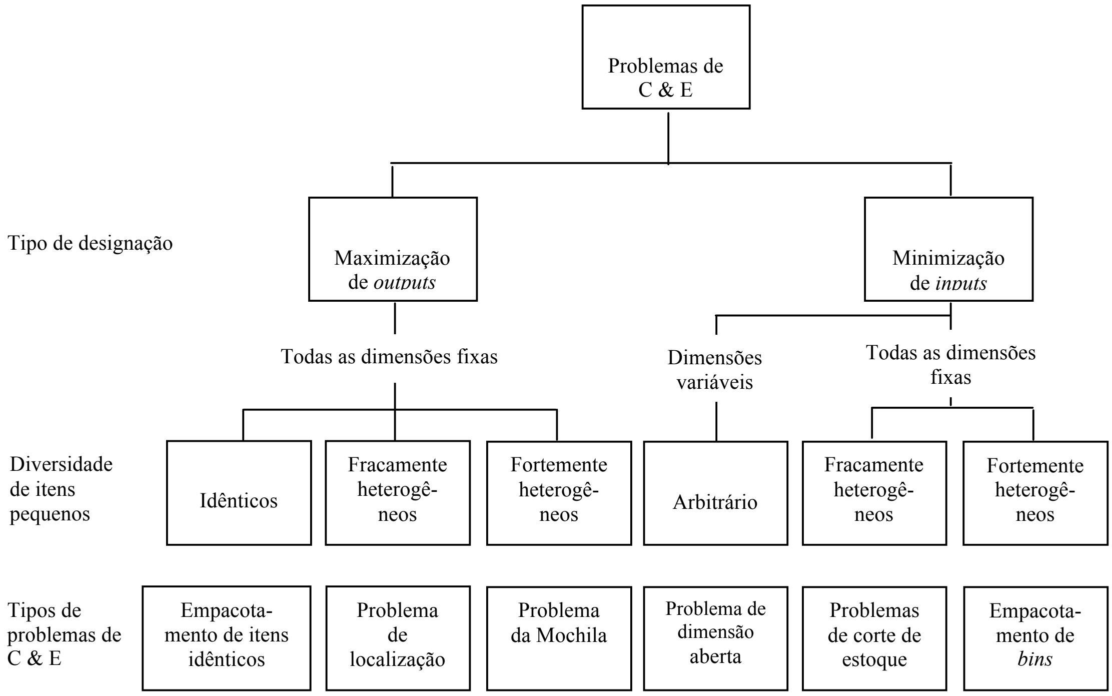

Figura 1 – Tipos de problemas básicos.
Fonte: Wäscher *et al.* (2006).

De acordo com Dowsland e Dowsland (1992), existem diversas funções objetivo para os problemas de empacotamento tridimensional, sendo que as mais usuais incluem: (i) Minimizar o comprimento de contêiner requerido para uma carga especificada; (ii) Minimizar o número de contêineres requeridos para movimentar uma quantidade de carga; e (iii) Maximizar o valor (freqüentemente igual ao volume) da carga a ser empacotada.

3. Problema de dobragem e empacotamento

Diante do exposto, percebe-se quão ampla é a tipologia dos problemas de corte e empacotamento. Entretanto, ainda existem problemas práticos que podem não ser contemplados em nenhumas das classificações correntes. Um exemplo de tal fato é o problema de Otimização Combinatória cuja proposição é reportada neste artigo: o Problema de Dobragem e Empacotamento (PDE).

Seja dado um conjunto de itens em que uma dimensão, denotada pela letra *e*, é infinitamente inferior às outras duas dimensões l_x e l_y, que possuem dimensões da mesma magnitude. O PDE consiste em determinar o plano de dobragem destes itens, de forma a maximizar a sua quantidade a ser empacotada em uma caixa de dimensões H, W e L. Uma visualização do problema encontra-se na Figura 2.

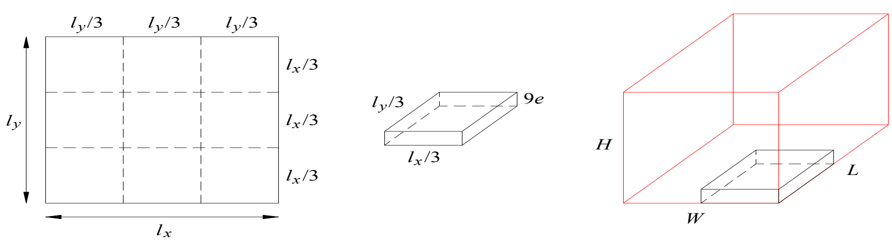

Figura 2 – Ilustração do Problema de Dobragem e Empacotamento.

As dimensões w, l e h do item dobrado podem ser obtidas pelas equações 1, 2 e 3 apresentadas a seguir:

$$w = \frac{l_x}{n_x} \tag{1}$$

$$l = \frac{l_y}{n_y} \tag{2}$$

$$h = (n_x . n_y) e \tag{3}$$

em que:

l_x : comprimento do item na direção x;
n_x : número de segmentos do item na direção x;
l_y : comprimento do item na direção y;
n_y : número de segmentos do item na direção y;
e : espessura do item.

No exemplo ilustrado na Figura 2, tem-se: duas dobras na direção x, que divide o comprimento l_x em três segmentos; duas dobras na direção y, que divide o comprimento l_y em três segmentos; e uma espessura e. As dimensões do item dobrado são $l_x/3$, $l_y/3$ e $9e$. Após a determinação do plano ótimo de dobragem dos itens, segue-se o clássico problema de empacotamento tridimensional.

É pertinente salientar que: (i) a restrição do tipo (3) implica em uma não-linearidade do PDE, já que se tem um produto entre variáveis do problema; (ii) conforme a tipologia apresentada por Dyckhoff (1990), trata-se de um problema 3 / V / O/ F; (iii) não são considerados os vazios entre as faces dobradas do item, sendo considerada apenas a espessura própria do mesmo no processo de dobragem; e (iv) uma premissa da modelagem utilizada é que os itens, ao serem dobrados, possuem a forma geométrica de um paralelepípedo.

O PDE pode ser aplicado em diversas situações práticas, dentre as quais podem ser destacadas a dobragem e o empacotamento de lençóis, toalhas e vestimentas. Portanto, o número máximo de dobras está sujeito às seguintes restrições:

- **Restrições relacionadas aos materiais:** determinados materiais são mais ou menos suscetíveis à flexão, podendo ser dobrados em diferentes quantidades de dobras.

- **Restrições relacionadas ao marketing:** as dimensões de um produto podem a vir a ser determinadas pelo marketing. Produtos pequenos ou estreitos, por mais que otimizem o seu empacotamento e, por conseguinte, sua distribuição física, podem não ser interessantes do ponto de vista de uma estratégia de mercado.

Para ilustrar o problema proposto, será apresentado um exemplo teórico para o problema. Seja um item de dimensões, em centímetros, equivalentes a 100 x 100 x 0,2, e um objeto dimensões, também em centímetros, equivalentes a 30 x 30 x 30, como dobrar e empacotar os itens na caixa de modo a maximizar a quantidades de peças no *bin*? Na Tabela 1 são ilustradas algumas soluções para o problema.

Soluções	n_x	n_y	w	l	h	Status da solução
1	1	2	100,0	50,0	0,4	inviável
2	1	3	100,0	33,3	0,6	inviável
3	1	4	100,0	25,0	0,8	inviável
4	1	5	100,0	20,0	1,0	inviável
5	2	2	50,0	50,0	0,8	inviável
6	2	3	50,0	33,3	1,2	inviável
7	2	4	50,0	25,0	1,6	inviável
8	2	5	50,0	20,0	2,0	inviável
9	3	3	33,3	33,3	1,8	inviável
10	3	4	33,3	25,0	2,4	inviável
11	3	5	33,3	20,0	3,0	inviável
12	4	4	25,0	25,0	3,2	viável
13	4	5	25,0	20,0	4,0	viável

Tabela 1 – Avaliação da viabilidade de algumas soluções para o problema.

Nota-se que existem diversas combinações de soluções para o problema, muitas delas inviáveis. Como o item possui dimensões duas de 100cm, ele deve ser dobrado de tal modo que suas novas dimensões sejam, pelo menos, inferiores ao tamanho da caixa, que é 30cm.

4. Uma heurística para a resolução do PDE

Na seção anterior foi definido o PDE em sua forma geral; entretanto, tendo em vista sua complexidade, serão feitas algumas simplificações para a concepção de uma heurística simples para casos específicos do problema.

É relevante destacar que o PDE é um problema que pode ser dividido em duas fases: uma fase de construção dos itens, composta pela otimização do dobramento dos mesmos, e uma fase de empacotamento, a qual consiste no problema de empacotamento tridimensional clássico.

O ideal é que estas duas fases sejam otimizadas conjuntamente, com vistas à obtenção de uma melhor solução para o problema; contudo, dado o caráter incipiente do PDE, esta primeira abordagem restringe-se a otimizar a fase de construção dos itens. Assim, segundo a tipologia de Dyckhoff (1990), o problema simplificado seria analisado como do tipo 2 / V / O/ F.

Admitiu-se que dois tipos de itens diferentes poderiam ser armazenados em um *bin* (i = 1,2) e que o produto entre o número de dobras nas duas direções não poderia ser superior a um valor k. Nos experimentos computacionais, os autores arbitraram esse valor como nove, mas existe liberdade na variação deste parâmetro. A seguir, é apresentado o modelo matemático que avalia o desempenho das soluções construídas com base nas premissas da heurística proposta, e, no Quadro 1, é ilustrada a heurística proposta.

maximizar $$f = \left\lfloor \frac{H}{n_{x1}.n_{y1}.e} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{H}{n_{x2}.n_{y2}.e} \right\rfloor \quad (4)$$

sujeito a:

$$nx_i \,.\, ny_i \leq k,\ i = 1{,}2 \quad (5)$$

$$\text{se } \frac{l_{x1}}{n_{x1}} + \frac{l_{x2}}{n_{x2}} \leq W \text{ então } \frac{l_{y1}}{n_{y1}} \leq L \text{ e } \frac{l_{y2}}{n_{y2}} \leq L \quad (6)$$

$$\text{se } \frac{l_{y1}}{n_{y1}} + \frac{l_{y2}}{n_{y2}} \leq L \text{ então } \frac{l_{x1}}{n_{x1}} \leq W \text{ e } \frac{l_{x2}}{n_{x2}} \leq W \quad (7)$$

$nx_i, ny_i \in \{1,2,3,...,k\}$, $i = 1,2$

A equação (4) corresponde à função objetivo do problema, que deve ser maximizada. Ela é composta da soma de dois truncamentos e representa o preenchimento da caixa, em camadas, na dimensão de sua altura H. O conjunto de restrições do tipo (5) impõe o produto do número de dobras nas duas direções não pode exceder um valor k. Os blocos de restrições do tipo (6) alocam os itens às dimensões L e W do *bin*, como em um problema de corte bidimensional. Por fim, as restrições do tipo (7) garantem que os números de dobras, nas duas direções, assumem valores discretos inferiores à k.

Quadro 1 – Heurística simples proposta para o PDE.

```
heurística PDE1
variáveis c1, c2, k, k1, k2, nx1, nx2, ny1, ny2, max, valor: inteiro
          lx1, lx2, ly1, ly2, e, H,W, L: real
início
  para c1←1 para k faça
     início
       k1←0
     repita
       k1← k1+1
       para c2←1 para k faça
          início
            k2←0
              repita
                k2← k2+1
                valor ← 0
                  se ((lx1/c)+(lx2/c2)<=W) e (ly1/k2<=L) e (ly2/k2<=L) então
                     valor ← ⌊(H/(c1*k1*e))⌋ + ⌊(H/(c2*k2*e))⌋
                  se valor>max então
                     início
                       max←valor
                       nx1←c1
                       ny1←k1
                       nx2←c2
                       ny2←k2
                  fim do se
              até k2 = ⌊(k/c2)⌋
         fim do para
     até k1= ⌊(k/c1)⌋
  fim do para
fim
```

Além de definir o número de objetos contidos dentro de um item, essa heurística pode ser útil para definir empiricamente o melhor tamanho de um item para conter o número máximo de objetos. De modo a avaliar o desempenho da heurística, foram desenvolvidos quatro grupos de instâncias teóricas para o PDE. Foi desenvolvido, em linguagem Pascal, um aplicativo computacional baseado na heurística proposta, com vistas a avaliar o procedimento supramencionado.

Cada grupo de instâncias contém três exemplos, nos quais as dimensões dos objetos são mantidas constantes, enquanto as dimensões dos itens variam. Na Tabela 2 são mostrados os dados das instâncias: as colunas lx_1, ly_1 lx_2, ly_2, W, L, H e e correspondem aos dados de entrada de cada problema; as colunas nx_1, ny_1, nx_2 e ny_2 correspondem aos números de dobras obtidos pela heurística e N_1 e N_2 são os números de itens, dos tipos 1 e 2, a serem empacotados.

	Instâncias								Resultados					
Problemas	lx_1	ly_1	lx_2	ly_2	W	L	H	e	nx_1	ny_1	nx_2	ny_2	N_1	N_2
1	60	120	50	100	50	50	100	0,5	1	3	2	2	22	50
	60	120	50	100	40	40	100	0,5	3	1	3	3	22	22
	60	120	50	100	60	60	100	0,5	2	2	2	2	50	50
2	90	30	40	55	60	30	70	0,5	5	1	1	2	28	70
	90	30	40	55	50	30	70	0,5	9	1	1	2	15	70
	90	30	40	55	45	50	70	0,5	4	1	2	2	35	35
3	100	20	30	70	50	20	50	0,5	3	1	2	4	33	12
	100	20	30	70	40	20	50	0,5	4	1	2	4	25	12
	100	20	30	70	50	30	50	0,5	5	1	1	3	20	33
4	50	100	80	40	40	40	40	0,5	3	3	4	1	8	20
	50	100	80	40	30	40	40	0,5	3	3	6	1	8	13
	50	100	80	40	50	50	40	0,5	2	2	4	1	20	20

Tabela 2 – Instâncias desenvolvidas e soluções obtidas pela heurística proposta.

Na Tabela 3 é mostrada a comparação dos três exemplos de cada grupo. A coluna Área apresenta a área do item, em seguida a coluna com o número de objetos, a diferença em relação à área do primeiro item do grupo e, por fim, a diferença entre o número de objetos comportados pelo primeiro item do grupo.

Por exemplo, para o primeiro grupo pode-se facilmente verificar que o terceiro exemplo é o que comportaria mais objetos em relação à área consumida.

Problemas	Área	Número de objetos	Dif. Área	Dif. Objetos
1	25000	72	-	-
	19200	44	-0,23	-0,39
	31200	100	0,25	0,39
2	16200	98	-	-
	14200	85	-0,12	-0,13
	17800	70	0,10	-0,29
3	9000	45	-	-
	7600	37	-0,16	-0,18
	11000	53	0,22	0,18
4	9600	28	-	-
	8000	21	-0,17	-0,25
	13000	40	0,35	0,43

Tabela 3 – Resultados dos experimentos computacionais.

5. Conclusões

O presente artigo reportou a proposição de um novo problema de otimização combinatória, pertencente à classe de problemas de corte e empacotamento, denominado Problema de Dobragem e Empacotamento (PDE). Avaliando a literatura existente sobre problemas de corte e empacotamento, desde os trabalhos de revisão bibliográfica clássicos (DYCKHOFF, 1990; DOWNSLAND e DOWNSLAND, 1992) até o que há de mais atual sobre o tema (WÄSCHER *et al.*, 2006), não foi encontrada nenhuma menção ao problema aqui proposto.

O problema tem promissoras aplicações na área industrial, sobretudo no setor têxtil. Com base na experiência dos autores, acredita-se que a aplicação do PDE pode reduzir substancialmente os custos de distribuição física de produtos com as características supramencionadas, o que incentiva esforços de pesquisa rumo a uma maior compreensão do problema proposto.

Como sugestões para aprofundamento da presente pesquisa, podem ser ressaltadas: (i) elaborar o modelo matemático para o problema em suas duas fases; (ii) desenvolver uma heurística para solucionar o problema em suas duas fases; (iii) aplicar o PDE em um caso prático.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, pelo apoio fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

DOWSLAND, K. A. & DOWSLAND, W. B. *Packing problems*. European Journal Operational Research, v.56, p. 2–14, 1992.

DYCKHOFF, H. *A typology of cutting and packing problems.* European Journal Operational Research, v.44, p. 145–159, 1990.

SILVA, J. L. C. *Algoritmos para o empacotamento de bins tridimensionais: uma abordagem distribuída.* Tese (Doutorado em Engenharia Eletrônica e Computação) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2002.

SILVA, J. L. C. & SOMA N. Y. *Um algoritmo polinomial para o problema de empacotamento de contêineres com estabilidade estática de carga.* Pesquisa Operacional, v. 23, n. 1, p. 79– 9,2003.

WÄSCHER, G.; HAUβNER, H.; SCHUMANN, H. *An improved typology of cutting and packing problems.* European Journal Operational Research, In Press, Corrected Proof, Available online 19 June 2006, 2006.