

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marco Antonio Lázaro Velásquez

Sobre a Geometria de Imersões Isométricas em  
Variedades de Lorentz Conformemente Estacionárias

Fortaleza  
2010

**Marco Antonio Lázaro Velásquez**

Sobre a Geometria de Imersões Isométricas em  
Variedades de Lorentz Conformemente Estacionárias

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

Co-orientador:

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima.

Fortaleza  
2010

V54s Velásquez, Marco Antonio Lázaro  
Sobre a Geometria de Imersões Isométricas em Variedades  
de Lorentz Conformemente Estacionárias / Marco Antonio  
Lázaro Velásquez. – Fortaleza: 2010.  
75 f.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muiz Neto.  
Co-orientador: Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima.  
Área de concentração: Matemática.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Ceará,  
Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza,  
2010.

1. Geometria Diferencial. I. Muniz Neto, Antonio Caminha  
(Orient.) II. Lima, Henrique Fernandes de (Co-orientador)

CDD 516.36

*Dedico este trabalho a minha esposa Yvonne, à memória de minha mãe Victorina, ao meu pai Alvaro, a minha tia Susana, e aos meus irmãos Julio César, Alvaro David e José Francisco.*

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus por ter me guiado e ter aberto muitas portas para chegar até aqui.

Agradeço a minha esposa Yvonne, pelo amor, carinho e compreensão em todos esses anos.

Agradeço enormemente a meu pai Alvaro Lázaro Paredes, a minha falecida mãe Victorina Velásquez Romero, a minha tia Susana Velásquez Contreras, e a meus falecidos tios-avós Jerónimo Alvarez Contreras e Margarita Arriaga de Jesús por sempre ter acreditado em mim. Não poderia esquecer a meus irmãos Julio César, Alvaro David, José Francisco e a minhas cunhadas Julisa e Milagros, pois eles sempre me motivaram a ir em frente. São adicionados aos já mencionados acima, meus sobrinhos Eduardo Fabrisio, Jennifer Nayely, Camila Ximena e Milagros Estrella. Todos eles me propiciaram momentos de satisfação e alegria, essenciais para continuar lutando.

Quero agradecer a meus amigos piauienses Antonio Luiz Soares Santos e Rafael Rodriguez Tavares, por me dar todo o apoio necessário durante meus primeiros dias aqui no Brasil. Sem eles não teria conseguido ficar, muito menos chegar onde estou agora.

Aparentemente o meu caminho aqui no Brasil foi marcado pela presença de piauienses, pois meu orientador do mestrado João Xavier da Cruz Neto, piauiense e professor da Universidade Federal do Piauí, motivou-me a seguir estudando e tentar um doutorado. Por seus ensinamentos e conselhos muito obrigado.

Durante a seleção para o doutorado teve o apoio dos colegas Cícero P. de Aquino, Maria S. Alcantara Costa, Ulisses Lima Parente e Henrique Fernandes de Lima. Muito obrigado a cada um deles.

Agradeço aos professores de pós-graduação de matemática na UFC que com suas aulas e palestras têm inspirado em mim o desejo de crescer em matemática. Em especial, exprimo o meu apreço aos professores Abdênago Alves de Barros, Antonio Caminha Muniz Neto, Antonio Gervásio Colares, Gregório Pacelli Feitosa Bessa, João Lucas Marques Barbosa e Jorge Herbert Soares de Lira.

Agradeço enormemente ao professor Antonio Caminha Muniz Neto por ter me dado o privilégio de ser seu primeiro orientando de doutorado. Agradeço sua dedicação, apoio e amizade, que foram cruciais tanto para a conclusão desta tese como para minha formação acadêmica. Espero ter cumprido as suas expectativas.

Também tenho que agradecer enormemente ao professor Henrique Fernandes de Lima por ter aceitado o convite para ser meu co-orientador. Meus primeiros resultados foram obtidos trabalhando junto com ele e também com a professora Fernanda Ester Camillo Camargo durante uma curta estadia na Universidade Federal de Campina Grande, no mês de Fevereiro de 2010.

Agradeço aos professores Abdênago Alves de Barros, Fernanda Ester Camillo Camargo, Henrique Fernandes de Lima e Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves por terem aceitado o convite de participar da banca examinadora e pelas contribuições dadas a este trabalho através de sugestões e correções.

Agradeço a todos meus colegas e ex-colegas da pós-graduação. Entre eles José Nazareno, Valber Marcio, Cícero, Jobson, Flávio, Gleydson, Jonatan, Ulisses, Tiago Alencar, Valeria, Tiago Caúla, João Francisco, João Vítor, Cícero Tiarlos, Francisco P. Chaves, Ernani, Edinaldo, Kelton, Damião Júnio, Feliciano, Sibério, Aurineide, Paulo Alexandre e Adam, pelas conversas sobre matemática e outros assuntos que com certeza ajudaram-me a tornar mais prazeroso a convivência da pós-graduação. De forma especial agradeço a meu amigo José Nazareno, pois ele se comportou como um irmão em muitos momentos difíceis; sempre teve as ações e palavras precisas para transformar as coisas impossíveis em acessíveis.

Agradeço ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz por me dar a oportunidade de trabalhar aqui no Brasil. Em particular, exprimo o meu apreço aos colegas Nestor F. Castañeda Centurión, Gérman I. Gomero Ferrer e Ricardo M. Bentin Zacarias. Foi um prazer trabalhar com vocês de Março até Junho de 2010.

Quero agradecer também a minha alma máter, a Escuela de Matemática da Universidad Nacional de Trujillo, em Perú, por me dar a formação em matemática necessária para continuar estudos aqui no Brasil. Posso destacar os ensinamentos dos professores Franco Rubio López, Wilson Maco Vásquez, Amado Méndez Cruz, Obidio Rubio Mercedes, Milthon Cortés, Edmundo Vergara Moreno, José Dias Leiva, Ronald León Navarro e Fernando Vargas.

Não poderia cometer a injustiça de deixar de agradecer a Andrea Costa Dantas, secretária da pós-graduação, pela delicadeza e paciência mesmo quando estava tão atarefada, sempre se mostrando disposta a ajudar.

Agradeço imensamente o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com a manutenção da bolsa de estudos durante os primeiros 37 meses de doutorado.

Finalmente quero agradecer aos colegas da Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Campina Grande, pois desde que chegue em Julho de 2010 sempre recebe palavras de incentivo para terminar o meu doutorado. Especialmente gostaria de agradecer ao meu colega e amigo José de Arimatéia Fernandes, pois a minha história aqui no Brasil começou em uma disciplina de Introdução ao Análise Real no verão do 2005, onde ele foi o professor.

*Hay golpes en la vida, tan fuertes ... ¡Yo no sé!  
Golpes como del odio de Dios; como si ante ellos,  
la resaca de todo lo sufrido  
se empozara en el alma... Yo no sé!*

*Son pocos; pero son... Abren zanjas oscuras  
en el rostro más fiero y en el lomo más fuerte.  
Serán talvez los potros de bárbaros atilas;  
o los heraldos negros que nos manda la Muerte.*

*Son las caídas hondas de los Cristos del alma,  
de alguna fe adorable que el Destino blasfema.  
Esos golpes sangrientos son las crepitaciones  
de algún pan que en la puerta del horno se nos quema.*

*Y el hombre... Pobre... pobre! Vuelve los ojos, como  
cuando por sobre el hombro nos llama una palmada;  
vuelve los ojos locos, y todo lo vivido  
se empoza, como charco de culpa, en la mirada.*

*Hay golpes en la vida, tan fuertes... Yo no sé!*

*César Vallejo,  
Los Heraldos Negros (1918).*



## RESUMO

Nesta tese estudamos vários aspectos da geometria de variedades de Lorentz conformemente estacionárias e, particularmente, de espaços generalizados de Robertson-Walker, sob a presença de um campo vetorial conforme fechado. Inicialmente, nós desenvolvemos um estudo sobre a  $r$ -estabilidade e a  $r$ -estabilidade forte de hipersuperfícies tipo-espaço fechadas em ambientes conformemente estacionários de curvatura seccional constante; mais precisamente, nós obtemos uma caracterização das hipersuperfícies  $r$ -estáveis pelo primeiro autovalor de um certo operador elíptico naturalmente associado à sua  $r$ -ésima curvatura, bem como classificamos as hipersuperfícies fortemente  $r$ -estáveis por meio de uma condição adequada sobre o fator conforme do campo conforme do ambiente. Em seguida, estabelecemos teoremas gerais tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço em variedades de Lorentz conformemente estacionárias, um dos quais não exige que a hipersuperfície possua curvatura média constante. Finalmente, estendemos para variedades de Lorentz conformemente estacionárias um resultado de J. Simons sobre a minimalidade de certos cones em espaços Euclidianos, e aplicamos este resultado para construir subvariedades mínimas completas e não-compactas no espaço de de Sitter e no espaço anti-de Sitter.

# ABSTRACT

In this thesis we study several aspects of the geometry of conformally stationary Lorentz manifolds and, more particularly, of generalized Robertson-Walker spaces, under the presence of a closed conformal vector field. We initiate by focusing our study on the  $r$ -stability and on the strong  $r$ -stability of closed spacelike hypersurfaces of conformally stationary ambient spaces of constant sectional curvature; more precisely, we obtain a characterization of the  $r$ -stable ones by means of the first eigenvalue of a suitable elliptic operator naturally associated to its  $r$ -th mean curvature, as well classify the strongly  $r$ -stable ones by means of an appropriate condition on the conformal factor of the conformal vector field on the ambient space. Following, we establish general Bernstein-type theorems for spacelike hypersurfaces of conformally stationary Lorentz manifolds, one of which does not require the hypersurface to be of constant mean curvature. We end by extending, to conformally stationary Lorentz manifolds, a result of J. Simons on the minimality of certain cones in Euclidean spaces, and apply this result to build complete, non-compact minimal submanifolds in the de Sitter space and in the anti-de Sitter space.

# Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1 Variedades semi-Riemannianas . . . . .	7
2.2 Hipersuperfícies tipo-espaço . . . . .	11
2.2.1 Curvaturas de ordem superior . . . . .	13
2.2.2 As transformações de Newton e o operador $L_r$ . . . . .	15
2.3 Campos conformes . . . . .	18
2.3.1 Variedades conformemente estacionárias . . . . .	22
<b>3 Resultados sobre <math>r</math>-estabilidade</b>	<b>25</b>
3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis . . . . .	26
3.2 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço $r$ -estáveis .	36
3.3 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço fortemente $r$ -estáveis . . . . .	40
<b>4 Resultados tipo-Bernstein</b>	<b>45</b>
4.1 Algumas funções suportes para hipersuperfícies tipo-espaço . .	46
4.2 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço . .	48
<b>5 Construindo imersões mínimas</b>	<b>54</b>
5.1 Cones generalizados . . . . .	55
5.2 Construindo imersões mínimas . . . . .	56
<b>Bibliografia</b>	<b>62</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Uma classe importante de variedades de Lorentz é aquela formada pelas chamadas variedades de Lorentz estacionárias. Seguindo o Capítulo 6 de [29], dizemos que uma variedade de Lorentz é estacionária se existe um grupo a um parâmetro de isometrias cujas órbitas são curvas tipo-tempo; para espaços-tempo, este grupo de isometrias expressa a simetria da translação segundo o parâmetro temporal. Do ponto de vista matemático, uma variedade de Lorentz estacionária é simplesmente uma variedade de Lorentz munida de um campo de Killing tipo-tempo, e uma generalização natural desse conceito é uma *variedade de Lorentz conformemente estacionária*, a saber, uma variedade de Lorentz munida de um campo vetorial tipo-tempo *conforme* (para mais detalhes deste conceito veja a Seção 2.3).

Nosso interesse em variedades de Lorentz conformemente estacionárias é devido ao seguinte fato: com uma mudança conforme adequada da métrica, o campo vetorial conforme transforma-se num campo de Killing, de modo que a nova variedade de Lorentz torna-se estacionária (uma prova deste resultado pode ser encontrada no Capítulo 1 de [18]).

O objetivo principal deste trabalho é estudar a geometria de subvariedades imersas em variedades de Lorentz conformemente estacionárias munidas de um campo vetorial conforme fechado, e isso é feito com base na análise de três diferentes problemas:

- *Como obter critérios de  $r$ -estabilidade para hipersuperfícies fechadas tipo-espaço?*
- *Como formular resultados gerais tipo-Bernstein?*

## 1 Introdução

---

- *Como construir subvariedades mínimas?*

A noção de estabilidade de hipersuperfícies de curvatura média constante em variedades Riemannianas foi apresentada inicialmente por J. L. M. Barbosa e M. do Carmo em [4], e J. L. M. Barbosa, M. do Carmo e J. Eschenburg, em [5], onde eles revelaram que as esferas são os únicos pontos críticos estáveis do funcional área para variações que preservam o volume.

No contexto Lorentziano, em 1993, J. L. M. Barbosa e V. Oliker, em [7], obtiveram um resultado semelhante, mostrando que hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante em variedades de Lorentz são também pontos críticos do funcional área de variações que mantêm o volume constante. Eles também obtiveram a fórmula da segunda variação e mostraram, para o espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , que as esferas maximizam o funcional área para variações que preservam o volume. Mais recentemente, L. Ximin e D. Junlei, em [32], caracterizaram hipersuperfícies tipo-espaço fechadas estáveis com curvatura escalar constante no espaço de Sitter.

A generalização natural das curvaturas média e escalar para uma hipersuperfície de dimensão  $n$  é a  $r$ -ésima curvatura  $H_r$ , para  $r \in \{1, \dots, n\}$ . Na verdade,  $H_1$  é justamente a curvatura média e  $H_2$  define uma quantidade geométrica relacionada com a curvatura escalar (para mais detalhes sobre as curvaturas de ordem superior veja a Subseção 2.2.1).

No contexto de  $r$ -ésimas curvaturas, J. L. M. Barbosa e A. G. Colares, em [6], estudaram hipersuperfícies compactas sem bordo em formas espaciais Riemannianas com  $r$ -ésima curvatura constante, caracterizando as mesmas como pontos críticos de um problema variacional. Além disso, eles formularam um conceito apropriado de  $r$ -estabilidade e mostraram que uma hipersuperfície é  $r$ -estável se, e somente se, é uma esfera geodésica, generalizando assim os resultados correspondentes ao caso de curvatura média constante.

Aqui, motivados por esses artigos, consideramos hipersuperfícies tipo-espaço fechadas com  $r$ -ésima curvatura constante em variedades de Lorentz conformemente estacionárias, a fim de obter uma relação entre a noção de  $r$ -estabilidade (veja Definição 3.7) e o espectro de um certo operador elíptico naturalmente ligado às  $r$ -ésimas curvaturas das hipersuperfícies. Nossa abordagem é baseada na utilização das transformações de Newton  $P_r$  e de seus operadores diferenciais de segunda ordem associados  $L_r$  (para mais detalhes veja a Subseção 2.2.2). Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

## 1 Introdução

---

**Teorema 1.1.** *Seja  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária de curvatura seccional constante  $c$  e munida de um campo vetorial conforme  $V$ . Suponha que  $\operatorname{div}_{\overline{M}} V$  não é identicamente nulo em  $M^n$  e, também, que existe um campo de Killing  $W$  definido em  $\overline{M}_c^{n+1}$ . Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante positiva  $H_{r+1}$  tal que*

$$\lambda = c(n-r) \binom{n}{r} H_r - nH_1 \binom{n}{r+1} H_{r+1} - (r+2) \binom{n}{r+2} H_{r+2}$$

*é constante. Então  $x$  é  $r$ -estável se, e somente se,  $\lambda$  é o primeiro autovalor de  $L_r$  em  $M^n$ .*

Como aplicação desse resultado, obtemos caracterizações de hipersuperfícies tipo-espaço fechadas  $r$ -estáveis quando a variedade ambiente é um espaço de Robertson-Walker generalizado (GRW) ou um espaço de Sitter (veja Corolário 3.15 e Corolário 3.18, respectivamente).

Seguindo ainda com a noção de estabilidade, em [8], A. Barros, A. Brasil e A. Caminha estudaram o problema da estabilidade forte (isto é, estabilidade com respeito a variações que não necessariamente preservam o volume) para hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante em um espaço GRW. Mais recentemente, F. Camargo, A. Caminha, M. da Silva e H. de Lima, em [13], estenderam tal estudo a hipersuperfícies tipo-espaço com  $r$ -ésima curvatura constante, no mesmo tipo de ambiente, obtendo uma caracterização de *slíces* tipo-espaço  $r$ -máximos, isto é, com  $(r+1)$ -ésima curvatura nula.

Aqui, obtemos um critério de  $r$ -estabilidade forte (veja Definição 3.9) para hipersuperfícies tipo-espaço fechadas com  $r$ -ésima curvatura constante em uma variedade de Lorentz conformemente estacionária e *temporalmente geodesicamente completa*, isto é, em uma variedade de Lorentz conformemente estacionária cujas geodésicas tipo-tempo estão definidas para todos os valores do parâmetro tempo (cf. Definição 6.3 de [10]). Mais precisamente, mostramos o seguinte resultado, que estende os resultados obtidos em [8] e em [13].

**Teorema 1.2.** *Seja  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, temporalmente geodesicamente completa e de curvatura seccional constante  $c$ , dotada de um campo vetorial conforme fechado  $V$  com fator*

## 1 Introdução

---

conforme  $\psi$ . Seja ainda  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada e fortemente  $r$ -estável. Suponha que  $\psi$  verifica a condição

$$\frac{H_r}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \geq \max\{H_{r+1}\psi, 0\},$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  denota o parâmetro do fluxo de  $V$  e  $H_j$  denota a  $j$ -ésima curvatura de  $M$ . Se o conjunto onde  $\psi = 0$  tem interior vazio em  $M^n$ , então ou  $M^n$  é  $r$ -máxima ou  $M^n$  é uma folha de  $V^\perp$ .

Neste último resultado,  $V^\perp$  denota a distribuição de campos ortogonais ao campo conforme fechado da variedade ambiente (para mais detalhes sobre esta distribuição veja a Seção 2.3).

No que se refere a resultados tipo-Bernstein, em [17], A. Caminha, P. Sousa e F. Camargo obtiveram em espaços Euclidianos um teorema tipo-Bernstein para gráficos cuja curvatura média não muda de sinal, mas pode ser não constante. Depois, em [16], A. Caminha estudou a geometria de campos conformes fechados em ambientes Riemannianos, obtendo, no caso em que os ambientes Riemannianos têm curvatura de Ricci não-negativa e possuem um campo vetorial *paralelo* e um campo vetorial *homotético* não paralelo (para uma definição destes conceitos veja a Seção 2.3), um conjunto de condições suficientes para que hipersuperfícies orientadas completas e com segunda forma fundamental limitada sejam totalmente geodésicas. Ainda neste trabalho, o autor estabeleceu, a partir de um conjunto adequado de hipóteses, a umbilicidade de hipersuperfícies orientadas completas de curvatura média constante e segunda forma fundamental limitada em variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não-negativa que possuem um único campo vetorial homotético.

Neste trabalho, estudamos o problema correspondente quando o ambiente é Lorentziano. Mais precisamente, consideramos hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas numa variedade de Lorentz conformemente estacionária com curvatura de Ricci não-negativa e munida com dois campos de vetores: um paralelo e outro homotético não-paralelo. Se, além disto, a segunda forma fundamental da hipersuperfície for limitada e o campo paralelo satisfizer uma condição apropriada, obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 1.3.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, com curvatura de Ricci não-negativa e munida com um campo vetorial paralelo  $V$  e um campo vetorial homotético e não-paralelo  $W$ . Considere*

## 1 Introdução

---

uma hipersuperfície tipo-espaço completa, conexa e orientada  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ . Se a norma da segunda forma fundamental de  $x$  for limitada, a norma da projeção ortogonal de  $V$  sobre  $M^n$  for integrável e a curvatura média de  $M^n$  não mudar de sinal, então:

- (a)  $M^n$  é totalmente geodésica e a curvatura de Ricci de  $\overline{M}^{n+1}$  na direção do campo normal unitário  $N$  de  $M^n$  é identicamente nula.
- (b) Se  $M^n$  for não-compacta e a curvatura de Ricci de  $M^n$  também for não-negativa, então  $x(M^n)$  está contida em uma folha de  $V^\perp$ .

É importante frisar que neste último resultado não exigimos que a hipersuperfície em questão tenha curvatura média constante.

Além disso, com o auxílio de um refinamento de um resultado de S. T. Yau, (c.f. [30], onde ele obteve uma versão do Teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas e não-compactas) encontrado na Proposição 2.1 de [16], obtemos, em variedades de Lorentz conformemente estacionárias com curvatura de Ricci não-negativa e munida de um campo homotético, o seguinte resultado.

**Teorema 1.4.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, com curvatura de Ricci não-negativa e munida de um campo vetorial homotético  $V$ . Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço orientada, completa e conexa. Se a norma da segunda forma fundamental de  $x$  for limitada, a norma da projeção ortogonal de  $V$  sobre  $M$  for integrável e a curvatura média de  $x$  for constante em  $M^n$ , então  $x$  é totalmente umbílica e a curvatura de Ricci de  $\overline{M}^{n+1}$  na direção de  $N$  é identicamente nula.*

Como caso particular, damos no Colorário 4.7 uma versão deste último resultado quando a variedade ambiente é um GRW, obtendo como aplicação uma classificação, em  $\mathbb{L}^{n+1}$ , de gráficos radiais tipo-espaço sobre  $\mathbb{H}^n$  (veja Corolário 4.8). Esta classificação estende um resultado de A. Barros e P. A. Sousa (dado em [9]) sobre gráficos radiais definidos em  $\mathbb{S}^n$ .

Continuando a descrição dos resultados deste trabalho, em [28], J. Simons mostrou como construir imersões isométricas com vetor curvatura média paralelo no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+k+1}$  partindo de imersões mínimas  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+k}$  na esfera.

Neste trabalho, estendemos esse resultado de J. Simons para uma variedade de Lorentz conformemente estacionária munida de um campo vetorial



## 1 Introdução

---

conforme fechado e aplicamos este fato para construir imersões Lorentzianas mínimas quando o espaço ambiente ou é de curvatura seccional constante ou tem curvatura de Ricci nula na direção do campo conforme fechado. Mais precisamente, mostramos o seguinte resultado.

**Teorema 1.5.** *Seja  $\overline{M}^{n+k+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária com campo vetorial conforme fechado  $V$  de fator conforme  $\psi$ . Seja  $\Sigma^{n+k}$  uma folha totalmente umbílica da distribuição ortogonal  $V^\perp$  e  $\varphi : M^n \rightarrow \Sigma^{n+k}$  uma imersão isométrica, onde  $M^n$  é uma variedade Riemanniana compacta. Suponha que  $\overline{M}^{n+k+1}$  tem curvatura seccional constante ou a curvatura de Ricci de  $\overline{M}^{n+k+1}$  satisfaz  $\text{Ric}_{\overline{M}}(V) = 0$ . Se  $\psi \neq 0$  em  $\varphi(M^n)$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *a imersão  $\varphi : M^n \rightarrow \Sigma^{n+k}$  tem vetor curvatura média zero;*
- (b) *se  $\mathcal{F}$  é o fluxo de  $V$  e  $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k+1}$  é definida por  $\Phi(t, q) = \mathcal{F}(t, \varphi(q))$ , então  $\Phi$  tem vetor curvatura média zero;*
- (c) *a imersão  $\Phi$  do item (b) tem vetor curvatura média paralelo.*

Damos uma versão deste último resultado quando a variedade ambiente é um espaço GRW no Corolário 5.3. Além disso, no Corolário 5.4 e no Corolário 5.5 utilizamo-lo para apresentar uma construção de imersões mínimas nos espaços de Sitter e anti-de Sitter.

Este trabalho apresenta-se com a seguinte organização. No Capítulo 2 estabelecemos as notações e fatos preliminares que serão utilizados no decorrer do texto. Destacamos a Seção 2.3, onde usamos o Lema 2.17 para construir campos conformes fechados nos espaços de Sitter e anti-de Sitter a partir de um campo vetorial homotético e um campo vetorial paralelo em espaços semi-Euclidianos  $\mathbb{R}_\mu^n$  de índice  $\mu$ . No Capítulo 3 estudamos e discutimos os resultados sobre  $r$ -estabilidade e  $r$ -estabilidade forte de hipersuperfícies tipo-espaço fechadas em variedades de Lorentz conformemente estacionárias. O Capítulo 4 é dedicado ao estudo de resultados tipo-Bernstein de hipersuperfícies tipo-espaço completas, não necessariamente de curvatura média constante, imersas numa variedade de Lorentz conformemente estacionária com curvatura de Ricci não-negativa. Por fim, no Capítulo 5 estendemos o teorema de J. Simons mencionado anteriormente para variedades de Lorentz conformemente estacionárias de curvatura seccional constante ou com curvatura de Ricci nula na direção do campo conforme fechado.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo temos como objetivo estabelecer as notações que serão utilizadas no demais capítulos deste trabalho, bem como os fatos básicos da teoria de imersões isométricas dos quais faremos uso posteriormente. Para maiores detalhes, indicamos como referências [14], [18], [19] e [26].

### 2.1 Variedades semi-Riemannianas

Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica  $b = \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é dita

- (a) *positiva definida*, se  $\langle v, v \rangle > 0$  para todo  $v \in V \setminus \{0\}$ .
- (b) *negativa definida*, se  $\langle v, v \rangle < 0$  para todo  $v \in V \setminus \{0\}$ .
- (c) *não-degenerada*, se  $\langle v, w \rangle = 0$  para todo  $w \in V$  implica em  $v = 0$ .

Se  $b$  é uma forma bilinear simétrica sobre  $V$ , um subespaço  $W \subset V$  é dito *não-degenerado* se  $b|_{W \times W} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  for não-degenerada.

O *índice* de uma forma bilinear simétrica  $b$  sobre  $V$  é a maior dimensão de um subespaço  $W \subset V$  tal que  $b|_{W \times W} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  seja definida negativa.

Dados uma forma bilinear simétrica  $b$  sobre  $V$  e um subespaço  $W$  de  $V$ , definimos o *complemento ortogonal*  $W^\perp$  de  $W$  em  $V$  por

$$W^\perp = \{v \in V ; \langle v, w \rangle = 0 \text{ para todo } w \in W\}.$$

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos relevantes sobre formas bilineares simétricas (cf. [26], Lema 2.19, Lema 2.22 e Lema 2.23).

## 2.1 Variedades semi-Riemannianas

---

**Lema 2.1.** *Seja  $b$  uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita  $V$ , e  $W$  um subespaço de  $V$ . Então:*

- (a)  *$b$  é não-degenerada se e só se sua matriz com respeito a uma (e então a toda) base de  $V$  for invertível.*
- (b) *Se  $W$  é não-degenerado então  $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$  e  $(W^\perp)^\perp = W$ .*
- (c)  *$W$  é não-degenerado se e só se  $V = W \oplus W^\perp$ . Em particular,  $W$  é não-degenerado se e só se  $W^\perp$  for não-degenerado.*

No que segue, supomos que  $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial real  $V$ . Em relação a  $b$ , dizemos que  $v \in V \setminus \{0\}$  é:

- (i) *tipo-tempo*, quando  $\langle v, v \rangle < 0$ ;
- (ii) *tipo-luz*, quando  $\langle v, v \rangle = 0$ ;
- (iii) *tipo-espaço*, quando  $\langle v, v \rangle > 0$ .

Analogamente, define-se o que significa para um subespaço não-degenerado  $W$  de  $V$  ser *tipo-tempo*, *tipo-luz* ou *tipo-espaço*. Se  $v \in V \setminus \{0\}$  não for tipo-luz, define-se o *sinal*  $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$  de  $v$  por

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v \rangle}{|\langle v, v \rangle|}.$$

A *norma* de  $v \in V$  é  $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v \rangle}$ , e  $v$  é *unitário* se  $|v| = 1$ . Temos que  $V$  admite uma base  $\{e_i\}$  ortonormal com respeito a  $b$ , isto é, tal que  $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$ , onde  $\epsilon_i$  denota o sinal de  $e_i$  (cf. [26], Lema 2.24). Desse modo, a expansão ortonormal de  $v \in V$  com respeito a  $\{e_i\}$  é dada por

$$v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i.$$

Seja  $V$  um espaço vetorial no qual uma forma bilinear simétrica e não-degenerada  $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$  de índice 1 está definida, e  $\mathcal{T} = \{u \in V; \langle u, u \rangle < 0\}$ . Para cada  $u \in \mathcal{T}$ , definimos o *cone tipo-tempo* (ou *cone temporal*) de  $V$  contendo  $u$  por  $C(u) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v \rangle < 0\}$ .

No seguinte resultado colecionamos alguns fatos sobre cones tipo-tempo (cf. Lema 1.2.1 de [18], ou ainda Lema 5.26 e Proposição 5.30 de [26]).

## 2.1 Variedades semi-Riemannianas

---

**Lema 2.2.** *Nas notações acima, se  $v, w \in \mathcal{T}$ , então:*

- (a) *O subespaço  $\{v\}^\perp$  é tipo-espaço e  $V = \text{span}\{v\} \oplus \text{span}\{v\}^\perp$ . Assim,  $\mathcal{T}$  é a união disjunta de  $C(v)$  e  $C(-v)$ .*
- (b) *Desigualdade de Cauchy-Schwarz:  $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$ , com igualdade se e só se  $v$  e  $w$  forem colineares.*
- (c) *Se  $v$  e  $w$  pertencem ao mesmo cone tipo-tempo de  $V$  então existe um único número  $\theta \geq 0$ , chamado ângulo hiperbólico entre  $v$  e  $w$ , tal que*

$$\langle v, w \rangle = -|v||w| \cosh \theta.$$

- (d) *Se  $v \in C(u)$  para algum  $u \in \mathcal{T}$ , então  $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0$ . Portanto,  $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$ .*

Voltando nossa atenção a partir de agora a variedades diferenciáveis, temos a seguinte

**Definição 2.3.** *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável  $\overline{M}$  é um 2-tensor covariante e simétrico  $\overline{g}$  sobre  $\overline{M}$ , tal que  $\overline{g}_p$  é não-degenerada para todo  $p \in \overline{M}$ . Uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}$  é um par  $(\overline{M}, \overline{g})$ , onde  $\overline{M}$  é uma variedade diferenciável e  $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  é um tensor métrico de índice constante sobre  $\overline{M}$ .*

Como o índice de  $\overline{g}$  é uma função semi-contínua inferiormente de  $\overline{M}$  em  $\mathbb{N}$ , temos que ele é constante em toda componente conexa de  $\overline{M}$ . No que segue, por simplificação de notação, escreveremos  $\overline{M}$  para o par  $(\overline{M}, \overline{g})$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para o tensor métrico  $\overline{g}$  de  $\overline{M}$  e  $\nu$  para o seu índice. Quando o índice  $\nu$  de  $\overline{M}$  é zero,  $\overline{M}$  é simplesmente uma *variedade Riemanniana*; quando  $\nu = 1$ ,  $\overline{M}$  é denominada uma *variedade de Lorentz*.

Denotemos, a partir de agora, por  $\mathfrak{X}(\overline{M})$  como sendo o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $\overline{M}$  e por  $C^\infty(\overline{M})$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $\overline{M}$ .

Da mesma forma, assim como ocorre em geometria Riemanniana, o teorema fundamental de Levi-Civita é válido para variedades semi-Riemannianas (cf. Teorema 3.11 de [26]), garantindo a existência, em uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}$ , de uma única conexão  $\overline{\nabla}$  (a *conexão de Levi-Civita*) simétrica e compatível com o tensor métrico de  $\overline{M}$ . Temos também o seguinte

## 2.1 Variedades semi-Riemannianas

---

**Lema 2.4** ([26], Lema 3.35). *Se  $\overline{M}$  é uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita  $\overline{\nabla}$ , então a aplicação  $R : \mathfrak{X}(\overline{M})^3 \rightarrow \mathfrak{X}(\overline{M})$ , dada para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  por*

$$R(X, Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z,$$

*é  $C^\infty(\overline{M})$ -trilinear, sendo denominada o tensor de curvatura de  $\overline{M}$ .*

Sempre que  $p \in \overline{M}$  e  $v, w \in T_p \overline{M}$  gerarem um subespaço de dimensão 2 não-degenerado de  $T_p \overline{M}$ , segue do item (a) do Lema 2.1 que  $\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 \neq 0$ . Faz sentido, portanto, a seguinte

**Definição 2.5.** *Sejam  $\overline{M}$  uma variedade semi-Riemanniana,  $p \in \overline{M}$  e  $\sigma \subset T_p \overline{M}$  um subespaço de dimensão 2 não-degenerado de  $T_p \overline{M}$ . O número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

*independe da base escolhida  $\{v, w\}$  de  $\sigma$ , e é denominado curvatura seccional de  $\overline{M}$  em  $p$ , segundo  $\sigma$ .*

Uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}$  tem *curvatura seccional constante* em  $p \in \overline{M}$  se os números  $K(\sigma)$  da definição acima independem do subespaço de dimensão não-degenerado  $\sigma$  de  $T_p \overline{M}$ . Se  $\dim(\overline{M}) \geq 3$  e  $\overline{M}$  tem curvatura seccional constante, o análogo do teorema de Schur para variedades semi-Riemannianas (cf. [26], exercício 21 do Capítulo 3) garante que o valor de  $K(\sigma)$  também independe do ponto  $p \in \overline{M}$  escolhido.

Aproximando subespaços de dimensão 2 degenerados  $\sigma$  de  $T_p \overline{M}$  através de subespaços não-degenerados, pode-se mostrar que o fato de  $\overline{M}$  ter curvatura seccional constante determina seu tensor curvatura  $\overline{R}$ . Mais precisamente (cf. [26], Corolário 3.43), se  $\overline{M}$  tiver curvatura seccional constante  $c$ , então

$$\overline{R}(X, Y)Z = c \{ \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X \}, \quad (2.1)$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ .

Para o que segue precisaremos também da seguinte

**Definição 2.6.** *Uma variedade de Lorentz  $\overline{M}$  é temporalmente orientável se existir uma aplicação  $\tau$  que associa a cada  $p \in \overline{M}$  um cone tipo-tempo  $\tau_p$  em  $T_p \overline{M}$ , a qual é suave no seguinte sentido: para cada  $p \in \overline{M}$  existem uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  e um campo  $V \in \mathfrak{X}(U)$  tais que  $V(q) \in \tau_q$  para todo  $q \in U$ .*

## 2.2 Hipersuperfícies tipo-espaço

---

O resultado a seguir torna operacional a definição anterior.

**Lema 2.7** ([26], Lema 5.32). *Uma variedade de Lorentz  $\overline{M}$  é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ .*

Sempre que uma variedade de Lorentz  $\overline{M}$  for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação  $\tau$  como na Definição 2.6, ou de um campo vetorial tipo-tempo  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  a ela correspondente, será denominada uma *orientação temporal* para  $\overline{M}$ .

Seja  $\tau$  uma orientação temporal para  $\overline{M}$  e  $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Se  $Y(q) \in \tau_q$  (respectivamente,  $-Y(q) \in \tau_q$ ) para todo  $q \in \overline{M}$ , dizemos que  $Y$  *aponta para o futuro* (respectivamente, *aponta para o passado*). Sendo  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  uma orientação temporal para  $\overline{M}$ , segue do item (c) do Lema 2.2 que um campo vetorial tipo-tempo  $Y$  sobre  $\overline{M}$  aponta para o futuro (respectivamente, para o passado) se, e somente se,  $\langle Y, V \rangle < 0$  (respectivamente,  $\langle Y, V \rangle > 0$ ).

## 2.2 Hipersuperfícies tipo-espaço

Ao longo desta seção,  $\overline{M}^{n+1}$  denota uma variedade de Lorentz de dimensão  $n + 1$  e com métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Seja  $M^n$  uma variedade suave e conexa de dimensão  $n$ . Uma imersão suave  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é dita uma *hipersuperfície tipo-espaço* de  $\overline{M}^{n+1}$  se a métrica induzida em  $M^n$  pela imersão  $x$  for Riemanniana. Neste caso, também denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a métrica de  $M^n$ . O resultado a seguir garante que se  $\overline{M}^{n+1}$  for temporalmente orientada, então suas hipersuperfícies tipo-espaço são necessariamente orientáveis.

**Proposição 2.8** ([14], Proposição 2.9). *Se  $M^n$  é uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada  $\overline{M}^{n+1}$ , então  $M^n$  admite um campo vetorial normal unitário  $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ , apontando para o futuro. Em particular,  $M^n$  é orientável.*

Se  $\overline{M}^{n+1}$  for uma variedade de Lorentz temporalmente orientada e  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  for uma hipersuperfície tipo-espaço, a escolha de um campo normal unitário  $N$  como na proposição anterior é dita uma *orientação temporal* para  $M$ . Diremos ainda que  $N$  é a *aplicação normal de Gauss* de  $M$  apontando para o futuro.

## 2.2 Hipersuperfícies tipo-espaço

---

Ainda em relação à situação do parágrafo anterior, exceto pela métrica, objetos *sem barra* se referirão a  $M^n$ , ao passo que objetos *com barra* se referirão a  $\overline{M}^{n+1}$ . Em particular,  $\nabla$  e  $\overline{\nabla}$  denotarão as conexões de Levi-Civita, e  $R$  e  $\overline{R}$  os tensores de curvatura de  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+1}$ , respectivamente.

Não é difícil mostrar que

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  (cf. [26], Lema 4.3), onde  $(\cdot)^\top$  denota a componente tangente a  $M$ . Assim, podemos escrever

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

onde  $\alpha(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$  é a componente normal a  $M$  em  $\overline{M}$ . Não é difícil provar que  $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M)$  é uma aplicação  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinear e simétrica (cf. [26], Lema 4.4), denominada a *segunda forma fundamental* da imersão  $x$ . Portanto, definindo  $A : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  pela igualdade

$$\langle AX, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), N \rangle,$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , obtemos um campo de operadores lineares auto-adjuntos  $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$ ,  $p \in M$ , denominado o *operador de forma* da imersão  $x$ . É imediato verificar que

$$AX = -\overline{\nabla}_X N \quad \text{e} \quad \alpha(X, Y) = -\langle AX, Y \rangle N,$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  (cf. [26], Lema 4.19).

Para referência futura, dado  $p \in M$ , dizemos que os autovalores de  $A_p$  são as *curvaturas principais* de  $x$  em  $p$  (em relação à orientação temporal escolhida para  $M$ ). Ademais, um ponto  $p \in M$  é *umbílico* se todas as curvaturas principais de  $x$  em  $p$  forem iguais.

A proposição a seguir estabelece as equações fundamentais que relacionam as geometrias de  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+1}$  por intermédio da segunda forma fundamental da imersão. Para uma demonstração da mesma, veja o Lema 1.3.1 de [18], ou ainda o Teorema 5 e a Proposição 33 de [26].

**Proposição 2.9.** *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz temporalmente orientada de dimensão  $n+1$ ,  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço orientada pela escolha de um campo normal unitário  $N$ , e  $A : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  o operador de forma correspondente. Para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , temos:*

## 2.2 Hipersuperfícies tipo-espaço

---

(a) (*Equação de Gauss*)

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + \langle AY, Z \rangle AX - \langle AX, Z \rangle AY.$$

(b) (*Equação de Codazzi*)

$$(\bar{R}(X, Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X.$$

Como uma consequência imediata deste último resultado temos, para ambientes de curvatura seccional constante, o seguinte

**Corolário 2.10.** *Nas hipóteses da proposição anterior, se  $\bar{M}^{n+1}$  tiver curvatura seccional constante  $c$  e  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ , então:*

(a) (*Equação de Gauss*)

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c \{ \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle \} \\ &\quad + \langle AX, W \rangle \langle AY, Z \rangle - \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

(b) (*Equação de Codazzi*)

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \quad (2.3)$$

### 2.2.1 Curvaturas de ordem superior

Em tudo o que segue,  $\bar{M}^{n+1}$  denota uma variedade de Lorentz temporalmente orientada de dimensão  $n + 1$  e  $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço conexa, orientada pela escolha de uma orientação temporal  $N$ . Denotamos ainda por  $A : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  o operador de forma correspondente.

Dados  $p \in M$  e  $1 \leq r \leq n$ , denote por  $S_r(p)$  a  $r$ -ésima função simétrica elementar dos autovalores de  $A_p$ , i.e.,

$$S_r = \sigma_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (2.4)$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de  $A_p$  e  $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  é o  $r$ -ésimo polinômio simétrico elementar nas indeterminadas  $X_1, \dots, X_n$ .

Pondo  $S_0 = 1$ , não é difícil verificar que

$$\det(tI - A) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k t^{n-k} \quad (2.5)$$



## 2.2 Hipersuperfícies tipo-espaço

---

em todo ponto de  $M$ , de sorte que obtemos  $n$  funções suaves  $S_r : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Para  $1 \leq r \leq n$ , definimos a  $r$ -ésima curvatura  $H_r$  de  $x$  por

$$\binom{n}{r} H_r = (-1)^r S_r = \sigma_r(-\lambda_1, \dots, -\lambda_n). \quad (2.6)$$

Em particular, para  $r = 1$  obtemos

$$H_1 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = -\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A) = H,$$

a curvatura média de  $M^n$ , a qual é a principal curvatura *extrínseca* da hipersuperfície.

A escolha do sinal  $(-1)^r$  em (2.6) é motivada pelo fato de que, definindo o vetor curvatura média por  $\mathbf{H} = HN$ , temos  $H(p) > 0$  em um ponto  $p \in M$  se, e somente se,  $\mathbf{H}(p)$  está na mesma orientação temporal de  $N(p)$ , i.e.,  $\langle \mathbf{H}, N \rangle_p < 0$ .

Vale observar que  $H_2$  define uma quantidade geométrica intimamente relacionada com a curvatura escalar  $R$  de  $M$ , a qual é um invariante geométrico *intrínseco*. Por exemplo, se  $\overline{M}^{n+1}$  tiver curvatura seccional constante  $c$ , segue facilmente da equação de Gauss (2.2) que

$$R = n(n-1)(c - H_2). \quad (2.7)$$

Em particular, se  $n = 2$  e denotarmos por  $K_M$  a curvatura Gaussiana da superfície tipo-espaço  $x : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$ , temos a partir da última igualdade acima que

$$K_M = c - H_2. \quad (2.8)$$

Para o que segue, precisamos da seguinte

**Definição 2.11.** *Em relação à hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , dizemos que um ponto  $p_0 \in M$  é elíptico se as curvaturas principais de  $x$  em  $p_0$  forem todas negativas com respeito a uma escolha apropriada da orientação temporal de  $M^n$ .*

Utilizando as clássicas desigualdades de L. Gårding (cf. [22]) e levando em conta o sinal em nossa definição das  $r$ -ésimas curvaturas, dado em (2.6), obtemos o resultado a seguir. Para uma prova do mesmo, veja o Lema 1 de [25] ou a Proposição 1 de [15].

## 2.2 Hipersuperfícies tipo-espço

---

**Lema 2.12.** *Se a hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  admite um ponto elíptico e  $H_r$  é positivo em  $M^n$ , então  $H_k > 0$  em  $M$ , para  $1 \leq k \leq r$ . Além disso,*

$$H_1 \geq H_2^{1/2} \geq \dots \geq H_{r-1}^{1/(r-1)} \geq H_r^{1/r}, \quad (2.9)$$

*ocorrendo a igualdade em uma qualquer das desigualdades acima somente nos pontos umbílicos de  $M$ .*

### 2.2.2 As transformações de Newton e o operador $L_r$

Continuando a discussão da subseção anterior, para  $0 \leq r \leq n$  definimos a  $r$ -ésima em transformação de Newton

$$P_r : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

de  $x$  pondo  $P_0 = I$ , o operador identidade de  $\mathfrak{X}(M)$ , e

$$P_r = \binom{n}{r} H_r I + \binom{n}{r-1} H_{r-1} A + \dots + \binom{n}{1} H_1 A^{r-1} + A^r \quad (2.10)$$

para  $1 \leq r \leq n$ . Uma fácil indução permite verificar que

$$P_r = \binom{n}{r} H_r I + A P_{r-1} \quad (2.11)$$

para  $1 \leq r \leq n$ . Também, segue prontamente de (2.5), (2.10) e do Teorema de Cayley-Hamilton que  $P_n = 0$ .

Desde que  $P_r$  é um polinômio em  $A$ , se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um referencial ortonormal local em  $M$ , o qual diagonaliza  $A$  em  $p \in M$ , com  $Ae_i = \lambda_i e_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , então  $\{e_1, \dots, e_n\}$  também diagonaliza  $P_r$  em  $p$ . Ademais, escrevendo  $P_r e_i = \lambda_{i,r} e_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , não é difícil verificar (veja a Proposição 2.2.1 de [18] ou a Seção 3 de [2]) que

$$\lambda_{i,r} = (-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_r, i_j \neq i} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} = \sum_{i_1 < \dots < i_r, i_j \neq i} (-\lambda_{i_1}) \dots (-\lambda_{i_r}),$$

e daí que

$$\lambda_{i,r} = (-1)^r S_r + \lambda_i \lambda_{i,r-1}$$

para  $1 \leq r \leq n$  (com  $\lambda_{i,0} = \lambda_i$ ).

## 2.2 Hipersuperfícies tipo-espço

---

Denotando por  $\text{tr}(\cdot)$  o traço do operador entre parênteses, a última igualdade acima e uma fácil indução nos permitem obter, para  $1 \leq r \leq n-1$ , a validade das fórmulas

$$\text{tr}(P_r) = (-1)^r(n-r)S_r = b_r H_r, \quad (2.12)$$

$$\text{tr}(AP_r) = (-1)^r(r+1)S_{r+1} = -b_r H_{r+1}, \quad (2.13)$$

com  $b_r = (n-r)\binom{n}{r}$ , e

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^2 P_r) &= (-1)^r(S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \\ &= \binom{n}{r+1}(nH_1 H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Além disso, se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base de  $T_p M$  que diagonaliza  $A$  e  $P_r$  em  $p$  então, denotando por  $A_i$  a restrição de  $A$  para  $\langle e_i \rangle^\perp \subset T_p M$ , temos

$$\det(tI - A_i) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k S_k(A_i) t^{n-1-k},$$

onde

$$S_k(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n \\ j_1, \dots, j_k \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k}.$$

Com estas notações obtemos a expressão

$$P_r e_i = (-1)^r S_r(A_i) e_i. \quad (2.15)$$

Para o material do Capítulo 3, lembramos o seguinte resultado de R. Reilly [27] (para uma prova, veja o Lema 3 de [15]).

**Lema 2.13.** *Se  $(a_{ij})$  denota a matriz de  $A$  com relação a uma certa base ortonormal  $\beta = \{e_k\}$  de  $T_p M$ , então a matriz  $(a_{ij}^r)$  de  $P_r$  com relação a mesma base é dada por*

$$a_{ij}^r = \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{i_k, j_k=1}^n \epsilon_{i_1 \dots i_r i}^{j_1 \dots j_r j} a_{j_1 i_1} \cdots a_{j_r i_r}, \quad (2.16)$$

onde

$$\epsilon_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} = \begin{cases} \text{sgn}(\sigma) & , \text{ se os } i_k \text{ são distintos dois a dois e} \\ & \sigma = (j_k) \text{ é uma permutação deles;} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

## 2.2 Hipersuperfícies tipo-espço

---

A fórmula do lema anterior nos permite provar (cf. Lema 5 de [15], por exemplo) a seguinte relação diferencial envolvendo os operadores  $P_r$ , a qual também nos será útil posteriormente: para cada  $V \in \mathfrak{X}(M)$  e  $1 \leq r \leq n-1$ , temos

$$\operatorname{tr}(P_r \nabla_V A) = - \binom{n}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, V \rangle. \quad (2.17)$$

De acordo com o Corolário 3.2 de [2], quando o ambiente tem curvatura seccional constante, as transformações de Newton  $P_r$  são *livres de divergência*, i.e.,

$$\operatorname{div}_M(P_r) := \operatorname{tr}(V \rightarrow (\nabla_V P_r) V) = 0. \quad (2.18)$$

Associado a cada transformação de Newton  $P_r$ , temos o operador diferencial linear de segunda ordem  $L_r : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ , dado por

$$L_r(f) = \operatorname{tr}(P_r \operatorname{Hess} f). \quad (2.19)$$

Assim, se  $r = 0$ ,  $L_r$  é simplesmente o operador Laplaciano, o qual é intrínseco, mas para  $1 \leq r \leq n-1$  o operador  $L_r$  é extrínseco. A partir das propriedades do Hessiano de funções, segue que

$$L_r(fg) = fL_r(g) + gL_r(f) + 2\langle P_r \nabla f, \nabla g \rangle,$$

para quaisquer  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Observe ainda que, sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal local em  $M^n$ , temos

$$\begin{aligned} L_r(f) &= \operatorname{tr}(P_r \operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i} \nabla f), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f, P_r(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{P_r(e_i)} \nabla f, e_i \rangle \\ &= \operatorname{tr}((\operatorname{Hess} f)P_r). \end{aligned}$$

Quando o ambiente tiver curvatura seccional constante, segue de (2.18) e da auto-adjunção do operador  $\nabla_V P_r$ ,  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P_r \nabla f) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_r)(\nabla f), e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i} \nabla f), e_i \rangle \\ &= \langle \operatorname{div} P_r, \nabla f \rangle + L_r(f) = L_r(f). \end{aligned}$$

## 2.3 Campos conformes

---

Conseqüentemente, concluímos que o operador  $L_r$  é elíptico se, e somente se,  $P_r$  for positivo definido (para uma escolha apropriada da orientação temporal  $N$  de  $M^n$ , se  $r$  for ímpar). Notemos que  $L_0 = \Delta$  é sempre elíptico.

Os lemas a seguir (cf. Lema 3.2 e Lema 3.3 de [3], respectivamente) fornecem condições geométricas suficientes para a elipticidade dos operadores  $L_r$ . Ambos são adaptações, para ambientes Lorentzianos, de resultados análogos de M. F. Elbert (cf. [21]) e L. Cafarelli, L. Nirenberg e J. Spruck (cf. [12]), e fornece condições suficientes para a elipticidade do operador  $L_r$  quando  $r \geq 2$ . Para uma demonstração acessível do segundo lema veja a Proposição 3.2 de [6].

**Lema 2.14.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço imersa numa variedade de Lorentz. Se  $H_2 > 0$  em  $M^n$ , então  $P_1$  é definido positivo para uma escolha apropriada da orientação temporal  $N$  de  $M^n$ . Em particular,  $L_1$  é elíptico.*

**Lema 2.15.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço imersa numa variedade de Lorentz e suponhamos que, com respeito a uma escolha apropriada de sua orientação temporal,  $M^n$  possua um ponto elíptico. Se  $H_{r+1} > 0$  em  $M$  para algum  $2 \leq r \leq n - 1$ , então  $P_k$  é positivo definido para  $1 \leq k \leq r$ . Em particular,  $L_k$  é elíptico para  $1 \leq k \leq r$ .*

## 2.3 Campos conformes

Se  $\overline{M}^{n+1}$  é uma variedade de Lorentz, dizemos que um  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  é *conforme* se

$$\mathcal{L}_V \langle \cdot, \cdot \rangle = 2\psi \langle \cdot, \cdot \rangle \quad (2.20)$$

para alguma função  $\psi \in C^\infty(\overline{M})$ , onde  $\mathcal{L}_V \langle \cdot, \cdot \rangle$  denota a derivada de Lie da métrica de  $\overline{M}^{n+1}$  na direção do campo  $V$  e a função  $\psi$  é o *fator conforme* de  $V$ .

Em tudo o que segue, supomos que  $\overline{M}^{n+1}$  é uma variedade de Lorentz munida de um campo conforme  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ , com fator conforme  $\psi$  e que não se anula na região de nosso interesse; nesse caso, denotamos

$$\epsilon = \frac{\langle V, V \rangle}{|\langle V, V \rangle|} \in \{-1, 1\}.$$

Uma vez que  $\mathcal{L}_V(X) = [V, X]$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ , o caráter tensorial de  $\mathcal{L}_V$  mostra que  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$  é conforme se, e somente se,

$$\langle \overline{\nabla}_X V, Y \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y V \rangle = 2\psi \langle X, Y \rangle, \quad (2.21)$$

### 2.3 Campos conformes

---

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Em particular,  $V$  é de Killing se e só se  $\psi \equiv 0$ . É imediato a partir de (2.21) que

$$\psi = \frac{1}{n+1} \operatorname{div}_{\overline{M}} V. \quad (2.22)$$

Um caso particular interessante é aquele em que

$$\overline{\nabla}_X V = \psi X \quad (2.23)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Neste caso dizemos que  $V$  é *fechado*, uma alusão ao fato de que a sua 1-forma dual é fechada. Mais particularmente, dizemos que um campo conforme fechado  $V$  é *paralelo* se  $\psi$  é identicamente nulo e *homotético* se  $\psi$  é constante.

Supondo ainda  $V$  fechado, segue prontamente de (2.23) que

$$\overline{\nabla} \langle V, V \rangle = 2\psi V. \quad (2.24)$$

Por outro lado, derivando covariantemente (2.24) obtemos

$$(\operatorname{Hess}_{\overline{M}} \langle V, V \rangle)(Y, Z) = 2Y(\psi) \langle V, Z \rangle + 2\psi^2 \langle Y, Z \rangle,$$

para todos  $Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Mas como ambos  $\operatorname{Hess}_{\overline{M}}$  e o tensor métrico são tensores simétricos, obtemos a partir daí a igualdade

$$Y(\psi) \langle V, Z \rangle = Z(\psi) \langle V, Y \rangle$$

para quaisquer  $Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Tomando  $Z = V$ , chegamos a

$$\overline{\nabla} \psi = \frac{V(\psi)}{\langle V, V \rangle} V = \epsilon \nu(\psi) \nu, \quad (2.25)$$

onde  $\nu = \frac{V}{\sqrt{\epsilon \langle V, V \rangle}}$ .

Seja  $V^\perp$  a distribuição  $n$ -dimensional suave em  $\overline{M}^{n+1}$  definida em  $p \in \overline{M}^{n+1}$  por

$$V^\perp(p) = \{w \in T_p \overline{M}; \langle V(p), w \rangle = 0\}.$$

Desde que

$$\langle [Y, Z], V \rangle = \langle \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Z Y, V \rangle = -\langle Z, \overline{\nabla}_Y V \rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_Z V \rangle = 0$$

## 2.3 Campos conformes

---

para todos os campos  $Y, Z \in V^\perp$ , o Teorema de Frobenius (cf. [23], Teorema 19.10) garante a integrabilidade de tal distribuição.

Seja  $\Sigma^n$  uma folha da folheação de codimensão 1 em  $\overline{M}^{n+1}$  definida por  $V^\perp$ , equipada com a métrica induzida e com conexão de Levi-Civita  $D$ . Se  $A_\Sigma$  denota o operador de forma de  $\Sigma^n$  em relação ao campo unitário  $\nu$  definido acima, obtemos a partir do caráter conforme fechado de  $V$  que

$$A_\Sigma(Y) = -\overline{\nabla}_Y \nu = -\frac{\epsilon Y(\langle V, V \rangle)}{2(\epsilon \langle V, V \rangle)^{3/2}} - \frac{\overline{\nabla}_Y V}{\sqrt{\epsilon \langle V, V \rangle}} = -\frac{\psi}{\sqrt{\epsilon \langle V, V \rangle}} Y, \quad (2.26)$$

para todo  $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , de maneira que  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica de  $\overline{M}^{n+1}$ .

Resumimos nossa discussão acima no seguinte resultado de S. Montiel (cf. Proposição 1 de [24]), o qual traz mais algumas informações relevantes e será utilizado várias vezes no restante deste trabalho.

**Proposição 2.16.** *Se  $(\overline{M}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é uma variedade de Lorentz munida de um campo conforme fechado  $V$  com fator conforme  $\psi$ , então:*

- (a) *A distribuição  $n$ -dimensional  $V^\perp$  em  $\overline{M}^{n+1}$ , definida em  $p \in \overline{M}^{n+1}$  por*

$$V^\perp(p) = \{w \in T_p \overline{M} ; \langle V(p), w \rangle = 0\},$$

*determina uma folheação tipo-espaço de codimensão 1 de  $\overline{M}^{n+1}$ , a qual é orientada por  $V$ . Além disso, as funções  $\langle V, V \rangle$ ,  $\operatorname{div}_{\overline{M}} V$  e  $V(\psi)$  são constantes nas folhas de  $V^\perp$ .*

- (b) *O campo unitário  $\nu = \frac{V}{\sqrt{\epsilon \langle V, V \rangle}}$  em  $\overline{M}^{n+1}$  satisfaz:*

(i)  $\overline{\nabla}_\nu \nu = 0$ ;

(ii)  $\overline{\nabla}_Y \nu = \frac{\psi}{\sqrt{\epsilon \langle V, V \rangle}} Y$ , se  $\langle Y, \nu \rangle = 0$ .

*Em particular, o fluxo do campo  $\nu$  é um fluxo geodésico normalizado, o qual aplica folhas de  $V^\perp$  homoteticamente em folhas de  $V^\perp$ , sendo cada folha de  $V^\perp$  totalmente umbílica e com curvatura média constante  $H = -\frac{\psi}{\sqrt{\epsilon \langle V, V \rangle}}$  em relação à orientação determinada por  $\nu$ .*

Precisamos agora do seguinte

## 2.3 Campos conformes

---

**Lema 2.17.** *Nas notações da discussão acima, se  $W$  é outro campo vetorial conforme fechado em  $\overline{M}^{n+1}$ , com fator conforme  $\psi_W$ , e*

$$U = W + \lambda \langle W, V \rangle V,$$

onde  $\lambda = -\frac{1}{\langle V, V \rangle}$ , então  $U$  é um campo conforme fechado em  $\Sigma^n$ , com fator conforme

$$\psi_U = \psi_W + \lambda \psi_V \langle W, V \rangle.$$

*Demonstração.* Note que realmente temos  $U \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , uma vez que

$$\langle U, V \rangle = \langle W, V \rangle + \lambda \langle W, V \rangle \langle V, V \rangle = 0.$$

Para o que falta, observe inicialmente que  $\lambda$  é constante em  $\Sigma$  pelo item (a) da proposição anterior. Portanto, dado  $Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , segue de  $\langle Z, V \rangle = 0$  e da relação entre as conexões de Levi-Civita de  $\Sigma^n$  e  $\overline{M}^{n+1}$  que

$$\begin{aligned} D_Z U &= (\overline{\nabla}_Z U)^\top = \overline{\nabla}_Z U + \lambda \langle \overline{\nabla}_Z U, V \rangle V \\ &= \overline{\nabla}_Z (W + \lambda \langle W, V \rangle V) + \lambda \langle \overline{\nabla}_Z (W + \lambda \langle W, V \rangle V), V \rangle V \\ &= \overline{\nabla}_Z W + \lambda Z \langle W, V \rangle V + \lambda \langle W, V \rangle \overline{\nabla}_Z V + \lambda \langle \overline{\nabla}_Z W, V \rangle V \\ &\quad + \lambda^2 Z \langle W, V \rangle \langle V, V \rangle V + \lambda^2 \langle W, V \rangle \langle \overline{\nabla}_Z V, V \rangle V \\ &= \psi_W Z + \lambda \langle W, V \rangle \psi_V Z + \lambda \langle \psi_W Z, V \rangle + \lambda^2 \langle W, V \rangle \langle \psi_V Z, V \rangle V \\ &= (\psi_W + \lambda \langle W, V \rangle \psi_V) Z. \end{aligned}$$

□

Especializemos a discussão acima às situações descritas nos dois exemplos a seguir.

**Exemplo 2.18.** *Seja  $\mathbb{L}^{n+1}$  o espaço de Lorentz  $(n+1)$ -dimensional com seu produto escalar usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , com relação a forma quadrática*

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{n+1}^2.$$

Para  $n > 2$ , o espaço de de Sitter  $n$ -dimensional é a hiperquádrica

$$\mathbb{S}_1^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$$



## 2.3 Campos conformes

---

de  $\mathbb{L}^{n+1}$ , a qual representa a forma espacial Lorentziana simplesmente conexa de curvatura seccional constante igual a 1. O lema anterior ensina como construir geometricamente um campo vetorial conforme fechado em  $\mathbb{S}_1^n$ ; de fato, como o campo  $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$  definido por  $V(x) = x$  é homotético, basta escolhermos um campo paralelo  $W \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$  e o projetarmos ortogonalmente sobre  $\mathbb{S}_1^n$ .

**Exemplo 2.19.** Seja  $\mathbb{R}_2^{n+1}$  o espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$ , munido com o produto escalar correspondente à forma quadrática

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 - x_{n+1}^2.$$

Para  $n > 1$ , o espaço anti-de Sitter  $n$ -dimensional é a hiperquádrica

$$\mathbb{H}_1^n = \{x \in \mathbb{R}_2^{n+1}; \langle x, x \rangle = -1\},$$

a qual representa a forma espacial Lorentziana simplesmente conexa de curvatura seccional constante e igual a  $-1$ . Seguindo a mesma construção feita no exemplo anterior para o espaço de Sitter, obtemos um campo conforme fechado em  $\mathbb{H}_1^n$ .

### 2.3.1 Variedades de Lorentz conformemente estacionárias

De posse do conceito de campo conforme, isolamos na definição a seguir a classe de variedades de Lorentz de nosso interesse.

**Definição 2.20.** Uma variedade de Lorentz  $\overline{M}^{n+1}$  é chamada conformemente estacionária se possuir um campo vetorial conforme tipo-tempo globalmente definido.

A fim de descrever uma classe importante de variedades de Lorentz conformemente estacionárias, sejam  $F^n$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ , conexa e orientada,  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e positiva. Na variedade produto  $\overline{M}^{n+1} = I \times F^n$ , denotemos por  $\pi_I$  e  $\pi_F$  as projeções canônicas de  $\overline{M}^{n+1}$  sobre os fatores  $I$  e  $F^n$ , respectivamente. Munindo  $\overline{M}^{n+1}$  com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dada para  $p \in \overline{M}^{n+1}$  e  $v, w \in T_p \overline{M}$  por

$$\langle v, w \rangle_p = -\langle (\pi_I)_* v, (\pi_I)_* w \rangle + (\phi \circ \pi_I)(p)^2 \langle (\pi_F)_* v, (\pi_F)_* w \rangle,$$

## 2.3 Campos conformes

---

obtemos um *espaço de Robertson-Walker Generalizado* (abreviamos GRW), o qual é claramente uma variedade de Lorentz. Nesse caso, pode-se provar (cf. Capítulo 7 de [26]) que

$$V = (\phi \circ \pi_I) \partial_t \quad (2.27)$$

é um campo conforme fechado, com fator conforme  $\psi = \phi' \circ \pi_I$ , onde  $'$  denota a derivação com respeito a  $t \in I$ . Doravante, denotaremos tal variedade de Lorentz escrevendo

$$\overline{M}^{n+1} = -I \times_{\phi} F^n.$$

Observamos ainda que se  $F^n$  tem curvatura seccional constante, então  $\overline{M}^{n+1} = -I \times_{\phi} F^n$  é denominado classicamente um *espaço de Robertson-Walker* (abreviamos RW).

Fixado  $t_0 \in I$ , segue da Proposição 2.16 que a folha  $\Sigma_{t_0}^n = \{t_0\} \times F^n$  é uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de  $\overline{M}^{n+1}$ , com fator de umbilicidade  $-\frac{\phi'(t_0)}{\phi(t_0)}$  com respeito ao campo vetorial normal unitário que aponta para o futuro.

Mais geralmente, seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão tipo-espaço. De acordo com [2], se  $M$  for completa e  $\phi \circ \pi_I$  for limitada em  $M^n$ , então  $\pi_F|_M : M^n \rightarrow F^n$  é necessariamente uma aplicação de recobrimento. Em particular, se  $M$  for fechada, então  $F^n$  é automaticamente fechada.

Para os dois exemplos a seguir, recordamos (cf. Capítulo 7 de [26]) que um GRW como acima tem curvatura seccional constante  $c$  se, e somente se,  $F$  tem curvatura seccional constante  $k$  e a função  $\phi$  satisfaz a EDO

$$\frac{\phi''}{\phi} = c = \frac{(\phi')^2 + k}{\phi^2}. \quad (2.28)$$

**Exemplo 2.21.** Para  $n \geq 2$ , o espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  é isométrico ao GRW

$$-\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n,$$

onde  $\mathbb{S}^n$  é a esfera unitária  $n$ -dimensional no espaço Euclidiano. De fato, de acordo com (2.28) tal GRW tem curvatura seccional constante e igual a 1, de sorte que o teorema de classificação das formas espaciais Lorentzianas simplesmente conexas (cf. [26], Proposição 8.26) garante que ele deve ser isométrico a  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Portanto, a discussão acima garante que o campo vetorial  $V = (\sinh t) \partial_t$  é conforme fechado e tipo-tempo. Para referência futura, definimos o equador de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  como sendo a folha  $\{0\} \times \mathbb{S}^n$ , e o passado

## 2.3 Campos conformes

---

cronológico (respectivamente o futuro cronológico) de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  como o conjunto

$$(-\infty, 0) \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n,$$

(respectivamente  $-(0, +\infty) \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n$ ).

**Exemplo 2.22.** Outro exemplo importante é fornecido pela estrutura GRW do espaço anti-de Sitter  $\mathbb{H}_1^{n+1}$ . De fato, invocando mais uma vez (2.28) e o teorema de classificação das formas espaciais Lorentzianas simplesmente conexas (cf. [26], Proposição 8.26), concluímos que uma das componentes conexas de  $\mathbb{H}_1^{n+1}$  é isométrica ao GRW

$$-\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times_{\cos t} \mathbb{H}^n,$$

onde  $\mathbb{H}^n$  é o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional. Portanto, o campo vetorial  $V = -(\sin t)\partial_t$  é conforme fechado e tipo-tempo em  $\mathbb{H}_1^{n+1}$ . Também, para referência futura, analogamente como acontece no espaço de Sitter, definimos o passado cronológico (respectivamente o futuro cronológico) de  $\mathbb{H}_1^{n+1}$  como

$$-\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \times_{\cos t} \mathbb{H}^n$$

(respectivamente  $-(0, \frac{\pi}{2}) \times_{\cos t} \mathbb{H}^n$ ).

Terminamos esta seção citando o resultado a seguir, o qual garante a existência de um ponto elíptico em uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz conformemente estacionária.

**Lema 2.23** ([2], Corolário 5.5). *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, com campo conforme fechado tipo-tempo  $V$ , e  $M^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, imersa em  $\overline{M}^{n+1}$ . Se  $\operatorname{div}_{\overline{M}} V$  não é identicamente nulo em  $M^n$ , então  $M^n$  admite um ponto elíptico.*

## Capítulo 3

# Resultados sobre $r$ -estabilidade

Em uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, hipersuperfícies tipo-espaço fechadas com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante são os pontos críticos do problema variacional de maximização da  $r$ -área, para variações que preservam o volume (cf. Proposição 3.5). Nosso propósito neste capítulo é estudar, dentre tais hipersuperfícies, primeiro aquelas que são  $r$ -estáveis, i.e., que são pontos de máximo local do funcional em questão para todas as variações suaves que preservam o volume, e depois as hipersuperfícies *fortemente  $r$ -estáveis*, i.e., que são pontos de máximo local do funcional  $r$ -área para todas as variações suaves possíveis.

Na primeira seção definimos os conceitos relevantes e provamos a fórmula da primeira variação do funcional  $r$ -área (cf. Proposição 3.4), bem como da primeira e segunda variações do funcional de Jacobi associado (veja equações 3.5 e 3.6, respectivamente). Observamos que é justamente a fórmula da segunda variação do funcional de Jacobi que motiva a noção de  $r$ -estabilidade (veja Definição 3.7) e de  $r$ -estabilidade forte (veja Definição 3.9).

Na Seção 3.2 obtemos um resultado de  $r$ -estabilidade para hipersuperfícies tipo-espaço em variedades de Lorentz conformemente estacionárias, com curvatura seccional constante e campo conforme tipo-tempo, em termos do primeiro autovalor do operador  $L_r$  (cf. Teorema 3.14). Apresentamos também uma versão deste resultado em GRW's (cf. Corolário 3.15) e, como caso particular, no espaço de Sitter (cf. Corolário 3.18).

Finalizamos o capítulo com a Seção 3.3, onde classificamos as hipersuperfícies tipo-espaço fortemente  $r$ -estáveis em variedades de Lorentz conformemente estacionárias temporalmente geodesicamente completas, com curvatura seccional constante e campo conforme tipo-tempo (cf. Teorema 3.21).

### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz temporalmente orientável, com métrica de Lorentz  $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , conexão semi-Riemanniana  $\overline{\nabla}$  e elemento de volume  $d\overline{M}$ . Consideremos hipersuperfícies tipo-espaço  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , isto é, imersões isométricas de uma variedade Riemanniana  $M^n$  de dimensão  $n$  orientável e conexa sobre  $\overline{M}^{n+1}$ . Seja  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita de  $M^n$ .

Uma *variação* de  $x$  é uma aplicação suave

$$X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}^{n+1}$$

verificando as seguintes condições:

- (i) para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , a aplicação  $X_t : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  dada por  $X_t(p) = X(p, t)$  é uma imersão tipo-espaço tal que  $X_0 = x$ ,
- (ii) Se  $\partial M \neq \emptyset$ , então  $X_t|_{\partial M} = x|_{\partial M}$ , para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Em tudo o que segue,  $dM_t$  denota o elemento de volume da métrica induzida em  $M^n$  por  $X_t$  e  $N_t$  o campo vetorial normal unitário ao longo de  $X_t$ .

O *campo variacional* associado à variação  $X$  é o campo  $\left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{t=0}$ .

Escrevendo  $f = -\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \rangle$ , temos que

$$\frac{\partial X}{\partial t} = fN_t + \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)^\top, \quad (3.1)$$

onde  $(\cdot)^\top$  é usado para denotar componentes tangenciais de  $M^n$ .

O *balanço de volume* de uma variação  $X$  é a função  $\mathcal{V} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\mathcal{V}(t) = \int_{M \times [0, t]} X^*(d\overline{M}),$$

e dizemos que  $X$  *preserva volume* se  $\mathcal{V}$  é constante.

A partir de agora, vamos considerar apenas hipersuperfícies tipo-espaço fechadas.

O seguinte resultado é uma adaptação do Lema 2.1 de [5] para variedades de Lorentz (veja também Seção 1.2 de [31]).

### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

---

**Lema 3.1.** *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz temporalmente orientável e  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada. Se  $X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é uma variação de  $x$  então*

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \int_M f dM_t.$$

*Em particular,  $X$  preserva o volume se, e somente se,  $\int_M f dM_t = 0$  para todo  $t$ .*

*Demonstração.* Fixemos  $p \in M^n$  e consideremos um referencial adaptado  $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N_t\}$  ao redor de  $x(p)$ . Logo

$$X^*(d\overline{M}) = a(t, p)dt \wedge dM,$$

onde

$$\begin{aligned} a(t, p) &= X^*(d\overline{M}) \left( \frac{\partial}{\partial t}, e_1, \dots, e_n \right) \\ &= d\overline{M} \left( \frac{\partial X}{\partial t}, dX_t(e_1), \dots, dX_t(e_n) \right) \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle d\overline{M} (N_t, dX_t(e_1), \dots, dX_t(e_n)) = - \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle = f. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \int_{[0, t] \times M} a(t, p) dt \wedge dM \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \int_0^t \left( \int_M a(t, p) dM \right) dt \right) = \int_M a(t, p) dM = \int_M f dM_t. \end{aligned}$$

□

Vale ressaltar que o Lema 2.2 de [5] permanece válido no contexto Lorentziano, isto é, podemos estabelecer o seguinte

**Lema 3.2.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada  $\overline{M}^{n+1}$ . Se  $f_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave tal que  $\int_M f_0 dM = 0$  então existe uma variação  $X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  de  $x$  que preserva o volume de  $M^n$  e cujo campo variacional é  $f_0 N$ .*

### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

---

A fim de adaptar os conceitos de estabilidade em ambientes Riemannianos (encontrados em [6]) para o cenário Lorentziano definimos o *funcional  $r$ -área*  $\mathcal{A}_r : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  associado à variação  $X$  como sendo

$$\mathcal{A}_r(t) = \int_M F_r(S_1, S_2, \dots, S_r) dM_t,$$

onde  $S_r = S_r(t)$  e  $F_r$  é definido recursivamente pondo  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = -S_1$  e, para  $2 \leq r \leq n-1$ ,

$$F_r = (-1)^r S_r - \frac{c(n-r+1)}{r-1} F_{r-2}.$$

Observemos que, se  $r = 0$ , o funcional  $\mathcal{A}_0$  é o funcional área clássico.

O próximo passo é estabelecer uma versão Lorentziana da Proposição 4.1 de [6], que é fundamental para o cálculo da variação do funcional  $r$ -área.

**Lema 3.3.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada  $\overline{M}_c^{n+1}$ , com curvatura seccional constante  $c$ , e seja  $X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma variação de  $x$ . Então,*

$$\frac{\partial S_{r+1}}{\partial t} = (-1)^{r+1} [L_r f + \text{ctr}(P_r) f - \text{tr}(A^2 P_r) f] + \left\langle \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)^\top, \nabla S_{r+1} \right\rangle. \quad (3.2)$$

*Demonstração.* Da fórmula (2.16) obtemos

$$(r+1)S_{r+1} = (-1)^r \text{tr}(A P_r) = (-1)^r \sum_{i,j} a_{ji} a_{ij}^r = \frac{1}{r!} \sum_{i,j,i_k,j_k} \epsilon_{i_1 \dots i_r i}^{j_1 \dots j_r j} a_{j_1 i_1} \dots a_{j_r i_r} a_{ji},$$

onde as funções  $S_{r+1}$  são vistas como funções de  $t$ . Logo, derivando com respeito a  $t$

$$\begin{aligned} (r+1)S'_{r+1} &= \frac{1}{r!} \sum_{i,j,i_k,j_k} \epsilon_{i_1 \dots i_r i}^{j_1 \dots j_r j} [a'_{j_1 i_1} \dots a_{j_r i_r} a_{ji} + \dots + a_{j_1 i_1} \dots a_{j_r i_r} a'_{ji}] \\ &= \frac{(r+1)}{r!} \sum_{i,j,i_k,j_k} \epsilon_{i_1 \dots i_r i}^{j_1 \dots j_r j} a'_{ji} a_{j_1 i_1} \dots a_{j_r i_r} \\ &= (r+1)(-1)^r \sum_{i,j} a'_{ji} a_{ij}^r = (r+1)(-1)^r \text{tr} \left( \frac{\partial A}{\partial t} P_r \right). \end{aligned}$$

### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

---

Agora, basta calcular  $(-1)^r \text{tr} \left( \frac{\partial A}{\partial t} P_r \right)$ .

$$\begin{aligned}
S'_{r+1} &= (-1)^r \text{tr} \left( \frac{\partial A}{\partial t} P_r \right) \\
&= (-1)^r \sum_k \langle \frac{\partial A}{\partial t} P_r e_k, e_k \rangle = \sum_k \langle S_r(A_k) \langle (\bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} A) e_k, e_k \rangle \rangle \\
&= \sum_k S_r(A_k) \left[ \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} A e_k, e_k \rangle - \langle A \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} e_k, e_k \rangle \right] \\
&= - \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} \bar{\nabla}_{e_k} N, e_k \rangle - \sum_k S_r(A_k) \langle A \bar{\nabla}_{e_k} \partial X / \partial t, e_k \rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos que  $[\partial X / \partial t, e_k] = 0$  no último termo.

Se  $\bar{R}$  denota o tensor curvatura de  $\bar{M}_c^{n+1}$  então

$$\bar{R}(e_k, \partial X / \partial t) N = \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} \bar{\nabla}_{e_k} N - \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N + \bar{\nabla}_{[e_k, \frac{\partial X}{\partial t}]} N.$$

Assim, usando (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}
S'_{r+1} &= - \sum_k S_r(A_k) \left[ \langle \bar{R}(e_k, \partial X / \partial t) N, e_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, e_k \rangle \right] \\
&\quad - \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{e_k} (f N + (\partial X / \partial t)^\top), A e_k \rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez que que o espaço ambiente é de curvatura seccional constante, segue do Corolário 2.10 que

$$\langle \bar{R}(X, Y) W, Z \rangle = c \{ \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \}.$$

Então

$$\begin{aligned}
S'_{r+1} &= - \sum_k S_r(A_k) c \left( \langle e_k, N \rangle \langle \partial X / \partial t, e_k \rangle - \langle e_k, e_k \rangle \langle \partial X / \partial t, N \rangle \right) \\
&\quad - \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, e_k \rangle - \sum_k S_r(A_k) \langle A e_k, \bar{\nabla}_{e_k} f N \rangle \\
&\quad - \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{e_k} (\partial X / \partial t)^\top, A e_k \rangle
\end{aligned}$$



### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

---

$$\begin{aligned}
&= -c \sum_k S_r(A_k) f - \sum_k S_r(A_k) e_k \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, e_k \rangle \\
&\quad + \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, \bar{\nabla}_{e_k} e_k \rangle - \sum_k S_r(A_k) \langle Ae_k, f \bar{\nabla}_{e_k} N \rangle \\
&\quad - \sum_k S_r(A_k) e_k \langle Ae_k, (\partial X / \partial t)^\top \rangle + \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{e_k} Ae_k, (\partial X / \partial t)^\top \rangle.
\end{aligned}$$

Usando a expressão (2.15) para calcular o traço do operador  $P_r$ , temos

$$\begin{aligned}
S'_{r+1} &= -(-1)^r \text{ctr}(P_r) f + \sum_k (-1)^r P_r e_k \langle N, \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} e_k \rangle \\
&\quad - \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial t}} N, N \rangle \langle N, \bar{\nabla}_{e_k} e_k \rangle + f \sum_k S_r(A_k) \langle Ae_k, Ae_k \rangle \\
&\quad - \sum_k (-1)^r P_r e_k \langle Ae_k, (\partial X / \partial t)^\top \rangle + \sum_k S_r(A_k) \langle \nabla_{e_k} Ae_k, (\partial X / \partial t)^\top \rangle \\
&= -(-1)^r \text{ctr}(P_r) f + \sum_k (-1)^r P_r e_k \langle N, \bar{\nabla}_{e_k} \partial X / \partial t \rangle + f \sum_k (-1)^r \langle AP_r e_k, Ae_k \rangle \\
&\quad - \sum_k (-1)^r P_r e_k \langle Ae_k, \partial X / \partial t \rangle + \sum_k (-1)^r \langle \nabla_{P_r e_k} Ae_k, (\partial X / \partial t)^\top \rangle \\
&= -(-1)^r \text{ctr}(P_r) f - \sum_k (-1)^r (P_r e_k e_k(f) + P_r e_k \langle \bar{\nabla}_{e_k} N, \partial X / \partial t \rangle) \\
&\quad + (-1)^r \text{tr}(A^2 P_r) f - \sum_k (-1)^r P_r e_k \langle Ae_k, \partial X / \partial t \rangle \\
&\quad + (-1)^r \langle \sum_k \nabla_{P_r e_k} Ae_k, (\partial X / \partial t)^\top \rangle.
\end{aligned}$$

Da equação de Codazzi,

$$\begin{aligned}
\sum_k \nabla_{P_r e_k} Ae_k &= \sum_k (\nabla_{e_k} AP_r e_k + A[P_r e_k, e_k]) \\
&= \sum_k \nabla_{e_k} ((-1)^r S_{r+1} I + P_{r+1}) e_k \\
&\quad + \sum_k A(\nabla_{P_r e_k} e_k - \nabla_{e_k} P_r e_k) \\
&= \sum_k (-1)^r e_k (S_{r+1}) e_k + \sum_k \nabla_{e_k} P_{r+1} e_k - A \nabla_{e_k} P_r e_k \\
&= (-1)^r \text{div} S_{r+1} + \text{div}(P_{r+1}) - A(\text{div} P_r) = \nabla S_{r+1},
\end{aligned}$$

### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

---

pois cada operador  $P_r$  é livre de divergência. Assim,

$$S'_{r+1} = (-1)^{r+1} (\text{ctr}(P_r)f + L_r f - \text{tr}(A^2 P_r)f) + \langle \nabla S_{r+1}, (\partial X/\partial t)^\top \rangle.$$

□

O lema anterior nos permite calcular a primeira variação do funcional  $r$ -área.

**Proposição 3.4.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada  $\overline{M}_c^{n+1}$ , com curvatura seccional constante  $c$ , e seja  $X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma variação de  $x$ . Então*

$$\mathcal{A}'_r(t) = \int_M \{(-1)^{r+1}(r+1)S_{r+1} + c_r\} f dM_t, \quad (3.3)$$

onde  $c_r = 0$ , se  $r$  é par, e  $c_r = -\frac{n(n-2)(n-4)\dots(n-r+1)}{(r-1)(r-3)\dots 2}(-c)^{(r+1)/2}$ , se  $r$  é ímpar.

*Demonstração.* Fazemos uso de um argumento indutivo. O caso  $r = 0$  é bem conhecido e, para o caso  $r = 1$ , usamos a fórmula clássica

$$\frac{\partial}{\partial t} dM_t = \{-S_1 f + \text{div}(\partial X/\partial t)^\top\} dM_t$$

para obter

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}'_1 &= \int_M F'_1 dM_t + \int_M F_1 \frac{\partial}{\partial t} dM_t \\ &= - \int_M S'_1 dM_t - \int_M F_1 [-S_1 f + \text{div}(\partial X/\partial t)^\top] dM_t \\ &= \int_M \{\Delta f - (S_1^2 - 2S_2)f + nc f - \langle (\partial X/\partial t)^\top, \nabla S_1 \rangle \\ &\quad + S_1^2 f - S_1 \text{div}(\partial X/\partial t)^\top\} dM_t \\ &= \int_M 2S_2 f dM_t + nc \int_M f dM_t - \int_M \text{div}(S_1(\partial X/\partial t)^\top) dM_t \\ &= \int_M (2S_2 + nc) f dM_t, \end{aligned}$$

onde usamos que  $M$  é fechada e  $X$  preserva o volume na última igualdade.

### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

---

Agora, se  $r \geq 2$ , a hipótese de indução e (3.2) garantem que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_r &= \int_M F'_r dM_t + \int_M F_r \frac{\partial}{\partial t} dM_t \\
&= \int_M \left[ (-1)^r S'_r - \frac{c(n-r+1)}{r-1} F'_{r-2} \right] dM_t \\
&\quad + \int_M \left( (-1)^r S_r - \frac{c(n-r+1)}{r-1} F_{r-2} \right) \frac{\partial}{\partial t} dM_t \\
&= \int_M (-1)^r \left\{ S'_r + S_r [-S_1 f + \operatorname{div}(\partial X / \partial t)^T] \right\} dM_t \\
&\quad - \frac{c(n-r+1)}{r-1} \left[ \int_M F'_{r-2} dM_t + \int_M F_{r-2} \frac{\partial}{\partial t} dM_t \right] \\
&= \int_M (-1)^r \left\{ S'_r - S_1 S_r f + S_r \operatorname{div}(\partial X / \partial t)^T \right\} dM_t - \frac{c(n-r+1)}{r-1} \mathcal{A}'_{r-2} \\
&= \int_M [\operatorname{ctr}(P_{r-1})f + L_{r-1}f - \operatorname{tr}(A^2 P_{r-1})f + (-1)^r \langle \nabla S_r, (\partial X / \partial t)^T \rangle] dM_t \\
&\quad + (-1)^r \int_M \left( -S_1 S_r f + S_r \operatorname{div}(\partial X / \partial t)^T \right) dM_t - \frac{c(n-r+1)}{r-1} \mathcal{A}'_{r-2} \\
&= \int_M [c(-1)^{r-1}(n-r+1)S_{r-1}f - (-1)^{r-1}(S_1 S_r - (r+1)S_{r+1})f] dM_t \\
&\quad + (-1)^r \int_M \langle \nabla S_r, (\partial X / \partial t)^T \rangle dM_t \\
&\quad + \int_M \left( (-1)^{r+1} S_1 S_r f + (-1)^r S_r \operatorname{div}(\partial X / \partial t)^T \right) dM_t \\
&\quad - \frac{c(n-r+1)}{r-1} \int_M [(-1)^{r-1}(r-1)S_{r-1} + c_{r-2}] f dM_t \\
&= \int_M [(-1)^{r+1}(r+1)S_{r+1} - \frac{c(n-r+1)}{r-1} c_{r-2}] f dM_t \\
&\quad + (-1)^r \int_M \operatorname{div}(S_r (\partial X / \partial t)^T) dM_t.
\end{aligned}$$

Basta agora aplicar o teorema de divergência e notar que  $c_r = -\frac{c(n-r+1)}{r-1} c_{r-2}$ .  $\square$

Com o intuito de obtermos uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante é usual considerarmos o *fun-*

### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

---

cional de Jacobi  $\mathcal{J}_r : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  associado à variação  $X$ , isto é,

$$\mathcal{J}_r(t) = \mathcal{A}_r(t) - \lambda \mathcal{V}(t), \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é uma constante a ser escolhida posteriormente.

Como uma consequência imediata de (3.3) obtemos

$$\mathcal{J}'_r(t) = \int_M [b_r H_{r+1} + c_r - \lambda] f dM_t,$$

onde  $b_r = (r+1) \binom{n}{r+1}$ . Logo, se tomarmos  $\lambda = c_r + b_r \bar{H}_{r+1}(0)$ , onde

$$\bar{H}_{r+1}(0) = \frac{1}{\mathcal{A}_0(0)} \int_M H_{r+1}(0) dM \quad (3.4)$$

é a média da  $(r+1)$ -ésima curvatura  $H_{r+1}(0)$  de  $M^n$ , temos que

$$\mathcal{J}'_r(t) = b_r \int_M [H_{r+1} - \bar{H}_{r+1}(0)] f dM_t, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (3.5)$$

Precisamos do seguinte resultado, que é uma extensão da Proposição 2.7 de [4].

**Proposição 3.5.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \bar{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de uma variedade de Lorentz temporalmente orientável  $\bar{M}_c^{n+1}$ , com curvatura seccional constante  $c$ . São equivalentes:*

- (i)  $M^n$  tem  $(r+1)$ -ésima curvatura constante  $\bar{H}_{r+1}(0)$ ;
- (ii) para toda variação  $X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \bar{M}_c^{n+1}$  que preserva o volume de  $x$  temos que  $\mathcal{A}'_r(0) = 0$ ;
- (iii) para toda variação  $X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \bar{M}_c^{n+1}$  de  $x$  temos que  $\mathcal{J}'_r(0) = 0$ .

*Demonstração.*

(i)  $\Rightarrow$  (iii): O resultado segue diretamente de (3.5), pois temos como hipótese que  $H_{r+1} = \bar{H}_{r+1}(0)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (ii): Temos que

$$0 = \mathcal{J}'_r(0) = \mathcal{A}'_r(0) + (c_r + b_r \bar{H}_{r+1}(0)) \mathcal{V}'(0).$$

### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

---

para toda variação  $X$  de  $x$ . Mas se a variação preserva o volume de  $x$  então  $\mathcal{V}'(0) = 0$ . Assim,  $A'_r(0) = 0$  para toda variação  $X$  que preserva o volume de  $x$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Suponha que existe  $p \in M^n$  tal que  $(H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0))(p) \neq 0$ , digamos  $(H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0))(p) > 0$ . Por definição de  $\overline{H}_{r+1}(0)$ , existe também um ponto  $\hat{p} \in M^n$  tal que  $(H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0))(\hat{p}) < 0$ . Logo os conjuntos

$$M^+ = \{q \in M^n / (H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0))(q) > 0\},$$

$$M^- = \{q \in M^n / (H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0))(q) < 0\}$$

estão bem definidos.

Consideremos funções suaves não negativas  $\varphi$  e  $\psi$  tais que

$$p \in \text{supp } \varphi \subset M^+, \text{ supp } \psi \subset M^-, \int_M (\varphi + \psi)(H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0)) dM = 0,$$

onde  $\text{supp } \varphi$  denota o suporte de  $\varphi$ . Como

$$\int_M (H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0)) dM = \int_M H_{r+1} dM - \left( \frac{1}{\mathcal{A}_0(0)} \int_M H_{r+1}(0) dM \right) \mathcal{A}_0(0) = 0,$$

tal escolha é sempre possível.

Se tomarmos  $f = (\varphi + \psi)(H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0))$  temos que  $\int_M f dM = 0$ . Segundo o Lema 3.2, existe variação  $X$  que preserva o volume de  $x$  e cujo campo variacional é  $fN$ . Por hipótese,

$$\begin{aligned} 0 &= A'_r(0) = \int_M \{(-1)^{r+1}(r+1)S_{r+1} + c_r\} f dM \\ &= \int_M (b_r H_{r+1} + c_r) f dM, \end{aligned}$$

onde  $b_r = (r+1)\binom{n}{r+1}$  e  $c_r$  é como na Proposição 3.4. Como  $\int_M f dM = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (b_r H_{r+1} + c_r) f dM - (b_r \overline{H}_{r+1}(0) + c_r) \int_M f dM \\ &= b_r \int_M (H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0)) f dM \\ &= b_r \int_M (\varphi + \psi)(H_{r+1} - \overline{H}_{r+1}(0))^2 dM > 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo,  $H_{r+1} = \overline{H}_{r+1}(0)$  em  $M^n$ . □

### 3.1 Hipersuperfícies tipo-espaço (fortemente) $r$ -estáveis

---

A Proposição 3.5 acima assegura que os problemas variacionais descritos em (ii) e (iii) são equivalentes, pois os pontos críticos para ambos problemas são as hipersuperfícies  $M^n$  de  $\overline{M}_c^{n+1}$  com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante.

**Definição 3.6.** Dizemos que a hipersuperfície  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é máxima se  $H = 0$ . Mais geralmente,  $x$  é  $r$ -máxima se  $H_{r+1} = 0$ .

Logo, podemos observar que hipersuperfícies  $r$ -máximas são pontos críticos para os problemas variacionais descritos na Proposição 3.5.

Uma vez que queremos estudar imersões tipo-espaço  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  que maximizam  $\mathcal{A}_r$  para toda variação  $X$  que preserva o volume de  $x$ , é natural calcularmos a segunda variação de  $\mathcal{A}_r$ . Além disto, a Proposição 3.5 garante que  $M^n$  deve ter  $(r+1)$ -ésima curvatura constante. Isto motiva a seguinte

**Definição 3.7.** Sejam  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade de Lorentz temporalmente orientável, com curvatura seccional constante  $c$ , e  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante. Dizemos que  $x$  é  $r$ -estável se  $\mathcal{A}_r''(0) \leq 0$ , para toda variação que preserva o volume de  $x$ .

**Observação 3.8.** Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante e denote por  $\mathcal{G}$  o conjunto de funções suaves  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\int_M f dM = 0$ . Da mesma maneira que [32] podemos estabelecer o seguinte critério de estabilidade:  $x$  é  $r$ -estável se, e somente se,  $\mathcal{J}_r''(0) \leq 0$ , para toda  $f \in \mathcal{G}$ .

Agora, se mudarmos o nosso objeto de estudo, considerando imersões tipo-espaço  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  que maximizam o funcional de Jacobi  $\mathcal{J}_r$  para toda variação  $X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  de  $x$ , temos da Proposição 3.5 que  $M^n$  é um ponto crítico de  $\mathcal{J}_r$  para toda variação de  $x$  se, e somente se,  $M^n$  tem  $(r+1)$ -ésima curvatura constante. Isto, por sua vez, motiva a seguinte

**Definição 3.9.** Sejam  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade de Lorentz temporalmente orientável, com curvatura seccional constante  $c$ , e  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante. Dizemos que  $x$  é fortemente  $r$ -estável se para toda função suave  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  temos  $\mathcal{J}_r''(0) \leq 0$ .

A fórmula para a segunda variação de  $\mathcal{J}_r$  a ser utilizada para obter resultados de  $r$ -estabilidade e também de  $r$ -estabilidade forte é uma consequência direta de Proposição 3.4.

### 3.2 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço $r$ -estáveis

**Proposição 3.10.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada de uma variedade de Lorentz temporalmente orientável  $\overline{M}_c^{n+1}$  de curvatura seccional constante  $c$ , com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante  $H_{r+1}$ . Se  $X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  é uma variação de  $x$  então  $\mathcal{J}_r''(0)$  é dado por*

$$\mathcal{J}_r''(0)(f) = (r+1) \int_M [L_r(f) + \{\text{ctr}(P_r) - \text{tr}(A^2 P_r)\}f] f dM, \quad (3.6)$$

para toda função suave  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 3.2 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço $r$ -estáveis

O seguinte resultado é uma versão Lorentziana do Teorema 2 de [9].

**Lema 3.11.** *Seja  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária tendo curvatura seccional constante  $c$  e um campo vetorial conforme  $V$ . Sejam também  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço e  $N$  a aplicação normal de Gauss apontando para o futuro de  $M^n$ . Se  $g = \langle V, N \rangle$  então*

$$\begin{aligned} L_r(g) &= \{\text{tr}(A^2 P_r) - c \text{tr}(P_r)\}g - b_r H_r N(\psi) \\ &\quad + b_r H_{r+1} \psi + \frac{b_r}{r+1} \langle V, \nabla H_{r+1} \rangle, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde  $\psi : \overline{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é o fator conforme de  $V$ ,  $H_j$  é a  $j$ -ésima curvatura de  $M^n$ ,  $\nabla H_j$  denota o gradiente de  $H_j$  em  $M^n$ , e  $b_r = (n-r) \binom{n}{r}$ .

Em particular, obtemos o seguinte

**Corolário 3.12.** *Sejam  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária tendo curvatura seccional constante  $c$  e  $W$  um campo de Killing em  $\overline{M}_c^{n+1}$ . Sejam também  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante  $H_{r+1}$ ,  $N$  a aplicação normal de Gauss apontando para o futuro de  $M^n$  e  $g = \langle W, N \rangle$ . Então*

$$L_r(g) + \{c \text{tr}(P_r) - \text{tr}(A^2 P_r)\}g = 0.$$

### 3.2 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço $r$ -estáveis

Em particular, se  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  é uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com  $(r + 1)$ -ésima curvatura constante tal que  $\lambda = c \operatorname{tr}(P_r) - \operatorname{tr}(A^2 P_r)$  é constante, então  $\lambda$  é um autovalor do operador  $L_r$  em  $M^n$  com autofunção  $g$ .

**Observação 3.13.** Supondo que  $M^n$  e o campo vetorial conforme  $V$  são fechados e que o  $\operatorname{div}_{\overline{M}} V$  não é identicamente nulo em  $M^n$  então, de acordo com o Lema 2.23, existe um ponto elíptico em  $M^n$ . Por outro lado, se  $M^n$  possui um ponto elíptico e  $H_{r+1} > 0$  em  $M^n$ , então o Lema 2.15 garante que o operador  $L_r$  é elíptico, para  $2 \leq r \leq n - 1$ . No caso  $r = 1$ , a hipótese  $H_2 > 0$  garante a elipticidade de  $L_1$  sem a hipótese adicional sobre a existência de um ponto elíptico (veja Lema 2.14).

Agora podemos estabelecer um dos resultados principais deste trabalho.

**Teorema 3.14.** Seja  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária de curvatura seccional constante  $c$  e munida de um campo vetorial conforme  $V$ . Suponha que  $\operatorname{div}_{\overline{M}} V$  não é identicamente nulo em  $M^n$  e, também, que existe um campo de Killing  $W$  definido em  $\overline{M}_c^{n+1}$ . Seja  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com  $(r + 1)$ -ésima curvatura constante positiva  $H_{r+1}$  tal que

$$\lambda = c(n - r) \binom{n}{r} H_r - n H_1 \binom{n}{r+1} H_{r+1} - (r + 2) \binom{n}{r+2} H_{r+2}$$

é constante. Então  $x$  é  $r$ -estável se, e somente se,  $\lambda$  é o primeiro autovalor de  $L_r$  em  $M^n$ .

*Demonstração.* Segue, da Observação 3.13, que o operador  $L_r$  é elíptico. Por outro lado, usando as fórmulas (2.12), (2.13) e (2.14), podemos observar que  $\lambda = c \operatorname{tr}(P_r) - \operatorname{tr}(A^2 P_r)$ . Assim, como  $\lambda$  é constante e  $W$  é um campo de Killing em  $\overline{M}_c^{n+1}$ , o Corolário 3.12 garante que  $\lambda$  pertence ao espectro de  $L_r$ .

Denote por  $\lambda_1$  o primeiro autovalor de  $L_r$  em  $M^n$ . Se  $\lambda = \lambda_1$ , então, da caracterização variacional de  $\lambda_1$  temos que

$$\lambda = \min_{f \in \mathcal{G} \setminus \{0\}} \frac{- \int_M f L_r(f) dM}{\int_M f^2 dM}.$$



### 3.2 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço $r$ -estáveis

Portanto, para qualquer  $f \in \mathcal{G}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_r''(0)(f) &= (r+1) \int_M \{fL_r(f) + \lambda f^2\} dM \\ &\leq (r+1)(-\lambda + \lambda) \int_M f^2 dM = 0, \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,  $x$  é  $r$ -estável.

Agora suponha que  $x$  é  $r$ -estável, de modo que  $\mathcal{J}_r''(0)(f) \leq 0$  para toda  $f \in \mathcal{G}$ . Seja  $f$  uma autofunção associada ao primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $L_r$ . Segundo o Lema 3.2, existe uma variação de  $x$  que preserva o volume de  $M^n$  cujo campo variacional é  $fN$ . Segue de (3.6) que

$$0 \geq \mathcal{J}_r''(0)(f) = (r+1)(-\lambda_1 + \lambda) \int_M f^2 dM \geq 0$$

e, portanto,  $\lambda_1 = \lambda$ , pois  $\lambda_1 \leq \lambda$ . □

Em particular, recordando que o fator conforme de um campo conforme  $V$  é dado por  $\psi = \frac{1}{n+1} \operatorname{div}_{\overline{M}} V$  (vide Equação 2.22) e, no caso em que  $\overline{M}^{n+1}$  é um GRW  $-I \times_{\phi} F^n$ , vale também que  $\psi = \phi'$  (veja Subseção 2.3.1), obtemos o seguinte

**Corolário 3.15.** *Seja  $x : M^n \rightarrow -I \times_{\phi} F^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante positiva  $H_{r+1}$ . Suponha que  $-I \times_{\phi} F^n$  tem curvatura seccional constante  $c$ , possui um campo de Killing e que  $\phi'$  não é identicamente nula em  $M^n$ . Se  $H_j$  denotam as  $j$ -ésimas curvaturas de  $M$ , para  $1 \leq j \leq n$ , e*

$$\lambda = c(n-r) \binom{n}{r} H_r - nH_1 \binom{n}{r+1} H_{r+1} - (r+2) \binom{n}{r+2} H_{r+2}$$

é constante, então  $x$  é  $r$ -estável se, e somente se,  $\lambda$  é o primeiro autovalor de  $L_r$  em  $M^n$ .

A fim de reescrever o Teorema 3.14 para o caso de hipersuperfícies tipo-espaço fechadas imersas no espaço de Sitter, é necessário lembrarmos alguns fatos que são dados nas seguintes observações.

**Observação 3.16.** *Campos de Killing no espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  podem ser construídos (cf. [20], Exemplo 1) da seguinte forma: fixemos uma constante*

### 3.2 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço $r$ -estáveis

não-nula  $k \in \mathbb{R}$  e dois vetores  $u$  e  $v$  no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+2}$  e defina o campo vetorial

$$W(x) = k\{\langle u, x \rangle v - \langle v, x \rangle u\},$$

para  $x \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ . Afirmamos que  $W$  é um campo de Killing em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . De fato, se  $\bar{\nabla}$  denota a conexão de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  então para  $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$  temos

$$\bar{\nabla}_Y W(x) = k\{\langle u, Y \rangle v - \langle v, Y \rangle u\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_Y W, Z \rangle + \langle \bar{\nabla}_Z W, Y \rangle &= k\{\langle u, Y \rangle \langle v, Z \rangle - \langle v, Y \rangle \langle u, Z \rangle\} \\ &\quad + k\{\langle u, Z \rangle \langle v, Y \rangle - \langle v, Z \rangle \langle u, Y \rangle\} = 0, \end{aligned}$$

para quaisquer  $Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$ . Assim, nossa afirmação fica mostrada. Geometricamente,  $W(x)$  determina uma direção que é ortogonal ao vetor posição  $x$  e está contida no subespaço gerado por  $u$  e  $v$ , pois

$$\langle W, x \rangle = k\{\langle u, x \rangle \langle v, x \rangle - \langle v, x \rangle \langle u, x \rangle\} = 0,$$

para todo  $x \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ .

**Observação 3.17.** Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante positiva. Assuma que  $M^n$  está contida no futuro cronológico (ou passado) de um equador de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , então  $\operatorname{div}_{\bar{M}} V$  não é identicamente nulo sobre  $M^n$ . Além disso, existe um ponto elíptico em  $M^n$  (cf. [1], Teorema 7) e, se  $H_{r+1} > 0$  em  $M$  para algum  $2 \leq r \leq n-1$ , então, para todo  $1 \leq j \leq r$ , o operador  $L_j$  é elíptico (vide Lema 2.15). No caso de  $L_1$ , é suficiente exigir que a curvatura escalar  $R$  satisfaça  $R < 1$  (vide Lema 2.14).

Agora, tendo em consideração as observações 3.16 e 3.17, podemos enunciar o seguinte corolário do Teorema 3.14.

**Corolário 3.18.** Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada, contida no futuro (ou no passado) cronológico de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , com  $(r+1)$ -ésima curvatura constante positiva tal que

$$\lambda = (n-r) \binom{n}{r} H_r - n H_1 \binom{n}{r+1} H_{r+1} - (r+2) \binom{n}{r+2} H_{r+2}$$

seja constante. Então  $x$  é  $r$ -estável se, e somente se,  $\lambda$  é o primeiro autovalor de  $L_r$  em  $M^n$ .

### 3.3 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço fortemente $r$ -estáveis

---

**Observação 3.19.** *É importante observar que as chamadas esferas do espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  são exemplos de hipersuperfícies  $r$ -estáveis (cf. Proposição 2 de [11]). A seguir, descrevemos estas esferas. Escolhendo um vetor tipo-tempo unitário  $v$  no espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^{n+2}$  temos que  $V(p) = v - \langle p, v \rangle p$ , com  $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ , é um campo vetorial conforme fechado (vide Exemplo 2.18). Este campo folheia  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  por meio de hipersuperfícies totalmente umbílicas (vide Proposição 2.16) da forma*

$$\mathbb{E}_\tau^n = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1} ; \langle v, p \rangle = \tau\}, \quad (3.8)$$

onde  $\tau \in \mathbb{R}$ . Para cada  $\tau$ , a curvatura média  $H$  de  $\mathbb{E}_\tau^n$  satisfaz

$$H^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2 + 1} \in [0, 1).$$

Pode ser mostrado que  $\mathbb{E}_\tau^n$  é isométrico a uma esfera Euclidiana de dimensão  $n$  com curvatura seccional constante  $\frac{1}{\tau^2 + 1}$ . Por esta razão os conjuntos definidos em (3.8) são chamados de esferas de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Se  $\tau = 0$  então  $H = 0$  e  $\mathbb{E}_0^n$  é totalmente geodésica. Neste contexto,  $\mathbb{E}_0^n$  é chamado equador de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  determinado por  $v$ . Este equador divide  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  em dois componentes conexas, o futuro cronológico dado por

$$\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle v, p \rangle < 0\},$$

e o passado cronológico, dado por

$$\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle v, p \rangle > 0\}.$$

### 3.3 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço fortemente $r$ -estáveis

Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária munida de um campo vetorial conforme fechado  $V$  com fator conforme  $\psi$ . Assumindo que  $V \neq 0$  em  $\overline{M}^{n+1}$  então segue, da Proposição 2.16, que a distribuição ortogonal  $V^\perp$  é integrável com folhas totalmente umbílicas. Assim, se  $\Sigma^n$  é uma folha desta distribuição, então  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de  $\overline{M}^{n+1}$  e  $\nu = \frac{V}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}}$  é um campo vetorial tipo-tempo normal unitário globalmente definido em  $\Sigma^n$ .

### 3.3 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço fortemente $r$ -estáveis

---

**Observação 3.20.** *Se  $p \in \overline{M}^{n+1}$  e  $\Sigma_p$  é a folha de  $V^\perp$  passando por  $p$ , então podemos encontrar uma vizinhança  $\mathcal{U}_p$  de  $p$  em  $\Sigma_p^n$  e um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  contendo 0 tal que o fluxo  $\mathcal{F}(t, \cdot)$  de  $V$  está definido em  $\mathcal{U}_p$  para qualquer  $t \in I$ . Além disto, quando  $\overline{M}^{n+1}$  é temporalmente geodesicamente completa, isto é, quando toda geodésica tipo-tempo de  $\overline{M}^{n+1}$  está definida para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$  (cf. [10], Definição 6.3), S. Montiel (em [24]) provou que a aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \Sigma_p^n &\longrightarrow \overline{M}^{n+1} \\ (t, q) &\longmapsto \mathcal{F}(t, q) \end{aligned} \quad (3.9)$$

é uma parametrização global sobre  $\overline{M}^{n+1}$ , tal que  $\overline{M}^{n+1}$  é isométrico ao espaço GRW  $-\mathbb{R} \times_\phi \Sigma_p^n$ , onde

$$\phi(t) = \sqrt{-\langle V(\mathcal{F}(t, q)), V(\mathcal{F}(t, q)) \rangle},$$

$t \in \mathbb{R}$ , e  $q \in \Sigma_p^n$  é um ponto arbitrário.

Estamos agora em condições de enunciar e provar mais um dos resultados principais deste trabalho, que estende os resultados obtidos em [8] e em [13].

**Teorema 3.21.** *Seja  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, temporalmente geodesicamente completa e de curvatura seccional constante  $c$ , dotada de um campo vetorial conforme fechado  $V$  com fator conforme  $\psi$ . Seja ainda  $x : M^n \rightarrow \overline{M}_c^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fechada e fortemente  $r$ -estável. Suponha que  $\psi$  verifica a condição*

$$\frac{H_r}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \geq \max\{H_{r+1}\psi, 0\}, \quad (3.10)$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  denota o parâmetro do fluxo de  $V$  e  $H_j$  denota a  $j$ -ésima curvatura de  $M$ . Se o conjunto onde  $\psi = 0$  tem interior vazio em  $M^n$ , então ou  $M^n$  é  $r$ -máxima ou  $M^n$  é uma folha de  $V^\perp$ .

*Demonstração.* Visto que  $\overline{M}_c^{n+1}$  é temporalmente geodesicamente completa, podemos considerar a parametrização global dada em (3.9).

Agora, uma vez que  $M^n$  é fortemente  $r$ -estável, segue de (3.6) que

$$(r+1) \int_M [L_r(f) + \text{ctr}(P_r)f - \text{tr}(A^2 P_r)f] f dM \leq 0, \quad (3.11)$$

### 3.3 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço fortemente $r$ -estáveis

---

para toda função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Em particular, como  $H_{r+1}$  é constante em  $M$ , tomando  $f = g = \langle V, N \rangle$  em (3.7) obtemos

$$L_r(g) + c \operatorname{tr}(P_r)g - \operatorname{tr}(A^2 P_r)g = -b_r H_r N(\psi) + b_r H_{r+1} \psi,$$

de modo que (3.11) nos fornece

$$\int_M [-H_r N(\psi) + H_{r+1} \psi] \langle V, N \rangle dM \leq 0. \quad (3.12)$$

No entanto, segue a partir de (2.25) que

$$\begin{aligned} N(\psi) &= \langle N, \bar{\nabla} \psi \rangle = \frac{V(\psi)}{\langle V, V \rangle} \langle N, V \rangle \\ &= \frac{-V(\psi)}{\sqrt{-\langle V, V \rangle} \sqrt{-\langle V, V \rangle}} \{-|N||V| \cosh \theta\} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\cosh \theta}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}}, \end{aligned}$$

onde  $\theta$  é o ângulo hiperbólico entre  $V$  e  $N$  (veja o item (c) do Lema 2.2). Substituindo esta última igualdade em (3.12) chegamos a

$$\int_M \left\{ H_r \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\cosh \theta}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}} - H_{r+1} \psi \right\} \sqrt{-\langle V, V \rangle} \cosh \theta dM \leq 0. \quad (3.13)$$

Agora, da hipótese (3.10) obtemos as desigualdades

$$\begin{cases} -H_{r+1} \psi & \geq -\frac{H_r}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ H_r \frac{\partial \psi}{\partial t} & \geq 0. \end{cases}$$

Logo, de (3.13) segue que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \left\{ H_r \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\cosh \theta}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}} - H_{r+1} \psi \right\} \sqrt{-\langle V, V \rangle} \cosh \theta dM \\ &\geq \int_M \left\{ H_r \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\cosh \theta}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}} - \frac{H_r}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} \sqrt{-\langle V, V \rangle} \cosh \theta dM \\ &\geq \int_M (\cosh \theta - 1) \left( H_r \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \cosh \theta dM \geq 0. \end{aligned}$$

### 3.3 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço fortemente $r$ -estáveis

---

Assim todas as desigualdades que foram utilizadas se tornam igualdades. Em particular, em  $M^n$  temos

$$\begin{cases} H_r \frac{\partial \psi}{\partial t} (\cosh \theta - 1) = 0, \\ \frac{H_r}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_{r+1} \psi. \end{cases}$$

Mas desde que  $H_{r+1}$  é constante em  $M^n$ , ou  $M^n$  é  $r$ -máxima ou  $H_{r+1} \neq 0$  em  $M^n$ . Se este último caso acontece, a hipótese sobre o conjunto onde  $\psi = 0$  em  $M^n$ , juntamente com o último resultado acima fornecem

$$H_r \frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0$$

em algum subconjunto denso de  $M^n$  e, portanto,  $\cosh \theta = 1$  sobre este conjunto. Por continuidade,  $\cosh \theta = 1$  em  $M^n$ , de modo que  $M^n$  é uma folha de  $V^\perp$ .  $\square$

Em particular temos o seguinte

**Corolário 3.22.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço fortemente  $r$ -estável tal que o conjunto de pontos da interseção de  $M^n$  com o equador de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  tem interior vazio em  $M^n$ . Se*

$$H_r \geq \max\{H_{r+1}(\sinh t), 0\},$$

*então ou  $M^n$  é  $r$ -máxima ou  $M^n$  é uma esfera de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ .*

*Demonstração.* Temos, do Exemplo 2.21, que  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  é isométrico ao GRW  $-\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n$  e

$$V = (\cosh t) \frac{\partial}{\partial t}$$

é um campo conforme fechado definido em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , com fator conforme

$$\psi = (\cosh t)' = \sinh t.$$

Daí,  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  é temporalmente geodesicamente completa.

Além disso, visto que em  $t = 0$  temos o equador de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  (vide novamente Exemplo 2.21), então dizer que o conjunto onde  $\psi = 0$  tem interior vazio em  $M^n$  equivale a dizer que conjunto de pontos da interseção de  $M^n$  com o equador de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  tem interior vazio em  $M^n$ .

### 3.3 Uma caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço fortemente $r$ -estáveis

---

Por outro lado, como

$$\frac{H_r}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{H_r(\cosh t)}{\sqrt{-(\cosh t)^2 \langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle}} = H_r,$$

então podemos escrever a condição (3.10) do Teorema 3.21 da forma

$$H_r \geq \max\{H_{r+1}(\sinh t), 0\}.$$

Agora, observando que as folhas de  $V^\perp$  são as esferas de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , o resultado segue como uma consequência imediata do último teorema.  $\square$

# Capítulo 4

## Resultados tipo-Bernstein

Neste capítulo, seguindo os passos dos resultados obtidos por A. Caminha, P. Sousa e F. Camargo em [17] e por A. Caminha em [16], estudamos hipersuperfícies completas tipo-espaço, não necessariamente de curvatura média constante, imersas em uma variedade de Lorentz conformemente estacionária de curvatura de Ricci não-negativa, obtendo dois resultados tipo-Bernstein.

No primeiro resultado tipo-Bernstein, desde que a variedade de Lorentz possua dois campos vetoriais, um paralelo e um homotético não paralelo (para uma definição destes conceitos veja a Seção 2.3), exigindo que a segunda forma fundamental da hipersuperfície seja limitada e sua curvatura média não mude de sinal, e também impondo uma restrição natural sobre o campo vetorial paralelo, obtemos uma classificação de tais hipersuperfícies, concluindo que são totalmente geodésicas e, no caso de hipersuperfícies não-compactas de curvatura de Ricci não-negativa concluímos que tais hipersuperfícies estão contidas em folhas da distribuição de campos ortogonais ao campo paralelo (cf. Teorema 4.4).

No segundo resultado tipo-Bernstein obtemos que tais hipersuperfícies são totalmente umbílicas desde que a variedade de Lorentz possua um campo vetorial homotético, exigindo que a segunda forma fundamental da hipersuperfície seja limitada e sua curvatura média seja constante, e também impondo uma restrição natural sobre o campo vetorial homotético (cf. Teorema 4.6).

Quando a variedade de Lorentz é um espaço GRW, uma versão deste último resultado é dado no Corolário 4.7. Logo aplicamos este resultado para classificar gráficos radiais tipo-espaço completos finitamente perfurados sobre  $\mathbb{L}^{n+1}$  (veja Corolário 4.8), estendendo assim um resultado de A. Ba-



## 4.1 Algumas funções suportes para hipersuperfícies tipo-espaço

---

rros e P. A. Sousa dado em [9]. Por gráficos finitamente perfurados nós entendemos que a imagem de um mergulho  $x : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$  é um gráfico radial tipo-espaço completo sobre  $\mathbb{H}^n$  menos  $k$  pontos.

Os resultados no Teorema 4.4 e no Teorema 4.6 são obtidos estudando dois funções suportes que estão relacionadas a um hipersuperfície tipo-espaço em variedades de Lorentz conformemente estacionária, cujos detalhes podem encontrados na Seção 4.1. Na Seção 4.2, além dos resultados principais estão presentes alguns resultados de S. T. Yau (veja Lema 4.2 e Lema 4.3) assim como também um refinamento de um destes, obtido por A. Caminha (veja Lema 4.5), que são importantes para provarmos nossos resultados.

## 4.1 Algumas funções suportes para hipersuperfícies tipo-espaço

Utilizando as notações fixadas nas últimas duas seções do capítulo anterior,  $\overline{M}^{n+1}$  denota uma variedade de Lorentz conformemente estacionária com campo conforme fechado  $V$ , de fator conforme  $\psi_V$ , e com conexão de Levi-Civita  $\overline{\nabla}$ .

Sejam  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço orientada, completa e conexa,  $N$  o campo vetorial normal unitário que orienta  $M^n$  na mesma orientação temporal de  $V$ ,  $A$  a segunda forma fundamental de  $M^n$  com respeito a  $N$ , e  $H$  a função curvatura média de  $M^n$  com relação a  $N$ .

No que se segue, vamos definir e estudar duas funções suporte naturalmente relacionadas a imersões espaciais em variedades de Lorentz conformemente estacionárias.

A primeira delas é  $f_V : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_V = \langle V, N \rangle$ . Do fato que  $V$  e  $N$  pertencem ao mesmo cone temporal, temos que  $f_V$  é negativa em  $M^n$ , e ainda

$$\nabla f_V = -A(V^\top), \quad (4.1)$$

onde o  $\top$  sobrescrito denota a componente tangente sobre  $M^n$ . Para verificar esta última igualdade, se  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  então

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_V, Y \rangle &= Y(f_V) = Y\langle V, N \rangle = \langle \overline{\nabla}_Y V, N \rangle + \langle V, \overline{\nabla}_Y N \rangle \\ &= \psi_V \langle Y, N \rangle - \langle V^\top, A(Y) \rangle = \langle -A(V^\top), Y \rangle, \end{aligned}$$

obtendo (4.1) como desejado.

## 4.1 Algumas funções suportes para hipersuperfícies tipo-espaço

Além disto, da Proposição 3.1 de [8], obtemos que

$$\Delta f_V = nV^\top(H) + \{\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2\} f_V + n \{H\psi_V + N(\psi_V)\}. \quad (4.2)$$

Se  $W$  é outro campo vetorial conforme fechado em  $\overline{M}^{n+1}$ , com fator conforme  $\psi_W$ , a segunda função que nos interessa é  $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g = \langle V, W \rangle$ . Temos que

$$\nabla g = \psi_V W^\top + \psi_W V^\top. \quad (4.3)$$

De fato, se  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , então

$$\langle \nabla g, Y \rangle = Y(g) = \langle \overline{\nabla}_Y V, W \rangle + \langle V, \overline{\nabla}_Y W \rangle = \psi_V \langle Y, W^\top \rangle + \psi_W \langle V^\top, Y \rangle.$$

O nosso próximo passo é calcular o Laplaciano de  $g$ .

**Lema 4.1.** *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, com campo conforme fechado  $V$  de fator conforme  $\psi_V$ , e  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço orientada, completa e conexa. Suponha que  $N$  é o campo vetorial normal unitário que orienta  $M^n$  na mesma orientação temporal de  $V$ ,  $A$  a segunda forma fundamental de  $M^n$  com respeito a  $N$  e  $H$  a função curvatura média de  $M^n$  com relação a  $N$ . Se  $W$  é outro campo vetorial conforme fechado em  $\overline{M}^{n+1}$ , com fator conforme  $\psi_W$ , e  $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $g = \langle V, W \rangle$  então*

$$\Delta g = W^\top(\psi_V) + V^\top(\psi_W) + nH(\psi_V f_W + \psi_W f_V) + 2n\psi_V \psi_W. \quad (4.4)$$

*Demonstração.* Seja  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita de  $M^n$ . Fixe  $p \in M^n$  e considere um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em uma vizinhança de  $p$  em  $M^n$ . Logo

$$\begin{aligned} \text{div}_M(V^\top) &= \sum_{k=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_k} (V + f_V N), e_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \{ \langle \overline{\nabla}_{e_k} V, e_k \rangle + e_k(f_V) \langle N, e_k \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_k} N, e_k \rangle \} \\ &= \psi_V \sum_{k=1}^n \langle e_k, e_k \rangle - f_V \sum_{k=1}^n \langle A(e_k), e_k \rangle \\ &= n\psi_V + nH f_V. \end{aligned} \quad (4.5)$$

## 4.2 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço

---

Assim, de (4.3) e (4.5) obtemos que

$$\begin{aligned}
\Delta g &= \operatorname{div}_M(\nabla g) = \operatorname{div}_M(\psi_V W^\top + \psi_W V^\top) \\
&= \psi_V \operatorname{div}_M(W^\top) + \langle \nabla \psi_V, W^\top \rangle + \psi_W \operatorname{div}_M(V^\top) + \langle \nabla \psi_W, V^\top \rangle \\
&= \psi_V (n\psi_W + nHf_W) + W^\top(\psi_V) + \psi_W (n\psi_V + nHf_V) + V^\top(\psi_W) \\
&= W^\top(\psi_V) + V^\top(\psi_W) + 2n\psi_V\psi_W + nH(\psi_V f_W + \psi_W f_V).
\end{aligned}$$

□

## 4.2 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço

No que se segue, o espaço de funções integráveis segundo Lebesgue sobre  $M^n$  é denotado por  $\mathcal{L}^1(M)$ .

Para obtermos nosso primeiro resultado tipo-Bernstein precisamos de dois resultados obtidos por S. T. Yau em [30]. O primeiro deles é um análogo do princípio do máximo de Hopf para variedades não compactas e completas.

**Lema 4.2.** *Se  $u$  é uma função subharmônica definida em uma variedade Riemanniana completa  $M^n$  tal que  $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(M)$  então  $u$  é harmônica.*

**Lema 4.3.** *Toda variedade Riemanniana não compacta e completa com curvatura de Ricci não negativa possui volume infinito.*

Estamos agora em condições de enunciar e provar o seguinte teorema tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço. É importante frisar que não exigimos que a hipersuperfície em questão tenha curvatura média constante.

**Teorema 4.4.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, com curvatura de Ricci não-negativa e munida com um campo vetorial paralelo  $V$  e um campo vetorial homotético e não-paralelo  $W$ . Considere uma hipersuperfície tipo-espaço, completa e conexa  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , orientada por um campo vetorial normal unitário  $N$  na mesma orientação temporal que  $V$ . Se a norma da segunda forma fundamental  $|A|$  é limitada, a componente tangencial de  $V$  satisfaz  $|V^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$  e a função curvatura média  $H$  de  $M^n$  não muda de sinal em  $M^n$ , então:*

- (a)  *$M^n$  é totalmente geodésica e a curvatura de Ricci de  $\overline{M}^{n+1}$  na direção de  $N$  é identicamente nula.*

## 4.2 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço

(b) Se  $M^n$  é não compacta e a curvatura de Ricci de  $M$  é também não negativa, então  $x(M^n)$  está contida em uma folha de  $V^\perp$ .

*Demonstração.*

(a) Desde que  $V$  é paralelo e  $W$  é homotético não paralelo, segue de (4.1), (4.3), (4.2) e (4.4) que  $\nabla f_V = -A(V^\top)$ ,  $\nabla g = \psi_W V^\top$ ,

$$\Delta f_V = nV^\top(H) + (\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2)f_V \quad (4.6)$$

e

$$\Delta g = nH\psi_W f_V,$$

com  $\psi_W$  uma constante não-nula.

Assim, a hipótese  $|V^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$  garante que  $|\nabla g| \in \mathcal{L}^1(M)$  e a condição sobre  $H$ , junto com o fato de que  $|f_V| > 0$  em  $M^n$  asseguram que, ou  $\Delta g$  é não negativo ou não positivo em  $M^n$ . Por conseguinte, o Lema 4.2 implica que  $\Delta g = 0$  em  $M^n$  e, portanto,  $H = 0$  em  $M^n$ .

A fórmula (4.6) torna-se

$$\Delta f_V = (\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2)f_V.$$

Logo,  $\Delta f_V$  também não muda de sinal em  $M^n$ . Por outro lado, da limitação de  $|A|$  em  $M^n$ , obtemos

$$|\nabla f_V| \leq |A||V^\top| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Aplicando novamente o Lema 4.2 temos que  $\Delta f_V = 0$  em  $M^n$ . Portanto

$$\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2 = 0$$

em  $M^n$ . Como  $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) \geq 0$ , então  $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$  e  $A = 0$  em  $M^n$ . Segue que  $M^n$  é totalmente geodésica.

(b)  $A = 0$  em  $M^n$  implica  $\nabla f_V = 0$  em  $M^n$ , logo  $f_V = \langle V, N \rangle$  é constante e não nulo em  $M^n$ . Uma vez que  $\langle V, V \rangle$  é constante em  $\overline{M}^{n+1}$ , pois  $V$  é paralelo, e

$$|V^\top|^2 = |V + \langle V, N \rangle N|^2 = \langle V, V \rangle + \langle V, N \rangle^2, \quad (4.7)$$

segue que  $|V^\top|$  é também constante em  $M^n$ . Portanto

$$+\infty > \int_M |V^\top| dM = |V^\top| \text{Vol}(M). \quad (4.8)$$

## 4.2 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço

Mas como  $M^n$  é não compacta e tem curvatura de Ricci não negativa, o Lema 4.3 garante que  $\text{Vol}(M) = +\infty$ .

Assim, a única possibilidade que temos para que a desigualdade (4.8) seja válida é  $|V^\top| = 0$ . Logo, de (4.7) segue que

$$|\langle V, N \rangle| = |V|.$$

Por fim, a desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja item (b) do Lema 2.2) garante que  $V$  é paralelo a  $N$ , e  $x(M^n)$  está contida em uma folha de  $V^\perp$ .  $\square$

Para provarmos o próximo resultado, precisamos do seguinte refinamento do resultado de Yau usado na demonstração do Teorema 4.4, obtido por A. Caminha em [16] (veja, também, [17]).

**Lema 4.5.** *Seja  $X$  um campo vetorial em uma variedade Riemanniana  $M^n$  orientável não compacta e completa, tal que  $\text{div}_M X$  não muda de sinal em  $M^n$ . Se  $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$  então  $\text{div} X = 0$  em  $M^n$ .*

**Teorema 4.6.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária, com curvatura de Ricci não-negativa e munida de um campo vetorial homotético  $V$ . Considere uma hipersuperfície tipo-espaço completa e conexa  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , orientada por um campo normal unitário  $N$ . Se a norma da segunda forma fundamental  $|A|$  é limitada, a componente tangencial de  $V$  satisfaz  $|V^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$  e a função curvatura média  $H$  é constante em  $M^n$ , então  $M^n$  é totalmente umbílica e a curvatura de Ricci de  $\overline{M}^{n+1}$  na direção de  $N$  é identicamente nula.*

*Demonstração.* Consideremos  $X = \nabla f_V - HV^\top \in \mathfrak{X}(M)$ , onde  $f_V = \langle V, N \rangle$ . De (4.1),

$$|X| = |\nabla f_V - HV^\top| = |-A(V^\top) - HV^\top| \leq (|A| + H)|V^\top| \in \mathcal{L}^1(M),$$

pois  $|A|$  é limitada,  $|V^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$  e  $H$  é constante em  $M^n$

Além disso, como  $\psi_V$  é constante em  $\overline{M}^{n+1}$  e  $H$  é constante em  $M^n$ , (4.2) reduz-se a

$$\Delta f_V = \{\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2\} f_V + nH\psi_V.$$

Logo, de (4.5) obtemos

$$\begin{aligned} \text{div}_M X &= \Delta f_V - H \text{div}_M(V^\top) \\ &= \Delta f_V - H(n\psi_V + nHf_V) \\ &= \{\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2 - nH^2\} f_V. \end{aligned} \quad (4.9)$$

## 4.2 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço

Afirmamos que  $|A|^2 - nH^2 \geq 0$ , com igualdade se, e somente se,  $M^n$  é totalmente umbílica.

De fato, fixemos  $p \in M^n$  e consideremos o operador  $T : T_p M \rightarrow T_p M$  definido por  $T = A + HI$ , onde  $I$  denota o operador identidade em  $T_p M$ . Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T^2) &= \operatorname{tr}(A^2) + 2H \operatorname{tr}(A) + H^2 \operatorname{tr}(I) \\ &= |A|^2 - 2nH^2 + nH^2 = |A|^2 - nH^2. \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{tr}(T^2) = \sum_{k=1}^n \langle T^2(e_k), e_k \rangle = \sum_{k=1}^n \langle T(e_k), T(e_k) \rangle = \sum_{k=1}^n |T(e_k)|^2 \geq 0.$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de  $T_p M$  que diagonaliza  $A$ . Assim,

$$|A|^2 - nH^2 \geq 0.$$

Alem disso,  $|A|^2 - nH^2 = 0$  se, e somente se,  $T(e_k) = 0$  para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$ , ou ainda,  $A(e_k) = -He_k$  para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Nossa afirmação fico mostrada.

Agora, como  $|f_V| > 0$  em  $M^n$ ,  $\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(N, N) \geq 0$  e  $|A|^2 - nH^2 \geq 0$ , então a expressão  $\operatorname{div}_M X$  em (4.9) não muda de sinal em  $M^n$ .

Assim, o Lema 4.5 fornece

$$\operatorname{div}_M X = 0$$

em  $M^n$ . Substituindo em (4.9), concluímos que

$$\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0 \quad \text{e} \quad |A|^2 - nH^2 = 0$$

e, portanto,  $M^n$  é totalmente umbílica.  $\square$

O resultado anterior produz o seguinte corolário em espaços GRW.

**Corolário 4.7.** *Sejam  $I \subset (0, +\infty)$  um intervalo aberto,  $F^n$  uma variedade Riemanniana orientada completa  $n$ -dimensional,  $\overline{M}^{n+1} = -I \times_t F^n$  um GRW de curvatura de Ricci não negativa e  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  como descrito acima. Se  $|A|$  é limitada,  $|(t\partial_t)^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$  e  $H$  é constante em  $M^n$ , então  $M^n$  é totalmente umbílica e a curvatura de Ricci de  $\overline{M}^{n+1}$  na direção de  $N$  é identicamente nula. Em particular, se  $F^n$  tem curvatura de Ricci não positiva então  $x(M^n) \subset \{t_0\} \times F$ , para algum  $t_0 \in I$ .*

## 4.2 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço

*Demonstração.* Temos que o campo conforme fechado em  $\overline{M}^{n+1}$  é dado por  $V = t\partial_t$  (veja Subseção 2.3.1). Afirmamos que este campo é homotético.

De fato, seja

$$Y = -y_0\partial_t + Y^F$$

um campo vetorial em  $\overline{M}^{n+1}$ , onde  $Y^F \in \mathfrak{X}(F)$ ,  $\partial_t$  é o campo tangente unitário ao intervalo  $I$  e  $y_0$  é uma função real suave definida em  $I$ . Logo, da Proposição 7.35 de [26] obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_Y V &= -y_0\overline{\nabla}_{\partial_t}(t\partial_t) + \overline{\nabla}_{Y^F}(t\partial_t) \\ &= -y_0\partial_t(t)\partial_t + y_0t\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \frac{t\partial_t(t)}{t}Y^F \\ &= -y_0\partial_t + Y^F = Y, \end{aligned}$$

como desejado. Agora, a primeira parte do corolário decorre do Teorema 4.6.

Para a segunda parte, escrevemos  $N = \rho V + N^F$ , para algum  $\rho \in \mathbb{R}$ , onde  $N^F \in \mathfrak{X}(F)$ . Logo, do Corolário 7.43 de [26] obtemos

$$0 \leq \text{Ric}_{\overline{M}}(N^F, N^F) = \text{Ric}_F(N^F, N^F) - \langle N^F, N^F \rangle \frac{(n-1)}{t^2} \leq 0,$$

pois  $\langle N^F, N^F \rangle \geq 0$  e por hipóteses temos que  $\text{Ric}_{\overline{M}} \geq 0$  e  $\text{Ric}_F \leq 0$ . Segue que  $\text{Ric}_F(N^F, N^F) = 0$  e  $0 = \langle N^F, N^F \rangle = |N^F|^2$ . Daí,  $N^F = 0$ . Logo,  $N$  é paralelo a  $V$ . Portanto, existe  $t_0 \in I$  tal que  $x(M^n) \subset \{t_0\} \times F$ .  $\square$

No que segue, considere

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} ; \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0\}.$$

Como caso especial do corolário anterior, obtemos o seguinte resultado de gráficos radiais tipo-espaço sobre  $\mathbb{H}^n$ , que estende um resultado de A. Barros e P. A. Sousa (dado em [9]) sobre gráficos radiais definidos em  $\mathbb{S}^n$ .

**Corolário 4.8.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$  um mergulho, tal que  $x(M^n)$  é um gráfico radial tipo-espaço completo sobre  $\mathbb{H}^n$  menos  $k$  pontos. Se  $|A|$  é limitada,  $H$  é constante e  $p \mapsto |x(p)^\top|$  é integrável em  $M^n$ , então  $k = 0$  e  $x(M^n)$  é uma translação de  $\mathbb{H}^n$ .*

*Demonstração.* Desde que  $x(M^n)$  é um gráfico radial tipo-espaço sobre  $\mathbb{H}^n$  então podemos supor, sem perda de generalidade, que  $x(M^n)$  está contido no cone temporal futuro de  $\mathbb{L}^{n+1}$ , o qual admite o seguinte modelo GRW

$$-(0, +\infty) \times_t \mathbb{H}^n.$$

## 4.2 Resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies tipo-espaço

---

Consequentemente, para cada  $p$  em  $\mathbb{H}^n$  menos  $k$  pontos, existe um único  $t \in (0, +\infty)$  tal que  $x(p) \in \{t\} \times \mathbb{H}^n$ . Logo,

$$x(p) = t\partial_t.$$

Portanto, o Corolário 4.7 garante que  $x(M^n)$  é uma translação de  $\mathbb{H}^n$  e  $k = 0$ . □



# Capítulo 5

## Construindo imersões mínimas

Neste capítulo, vamos estender para variedades de Lorentz conformemente estacionárias um teorema de J. Simons [28], que mostra como é possível construir imersões isométricas com vetor curvatura média paralelo em  $\mathbb{R}^{n+k+1}$  partindo de imersões mínimas  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+k}$ .

Para fazer isso, na Seção 5.1, definimos, com ajuda do fluxo do campo conforme, os chamados cones generalizados em variedades de Lorentz conformemente estacionárias, partindo de imersões isométricas compactas nas folhas da distribuição determinada pelo campo conforme. Esta noção estende a noção de cones em espaços Euclidianos que foram considerados por J. Simons, partindo de imersões isométricas em esferas Euclidianas. Nestas circunstâncias, em 1968, J. Simons estabelece o seguinte resultado: um cone no espaço Euclidiano é mínimo se, e somente se, a imersão na esfera é mínima (cf. [28]).

Logo, na Seção 5.2, estabelecemos a seguinte extensão do resultado de J. Simons: um cone generalizado em uma variedade de Lorentz conformemente estacionária é mínimo se, e somente se, a imersão na folha é mínima (veja Teorema 5.1 e Observação 5.2). No Corolário 5.3, uma versão deste resultado é dada quando o ambiente é um espaço GRW. Além disso, no Corolário 5.4 e no Corolário 5.5 utilizamo-lo para apresentar uma construção de imersões mínimas nos espaços de Sitter e anti-de Sitter.

## 5.1 Cones generalizados

Como na Seção 2.3, seja  $\overline{M}^{n+k+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária munida de um campo vetorial conforme fechado  $V$  com fator conforme  $\psi$ . Se  $V \neq 0$  em  $\overline{M}^{n+k+1}$ , vimos que a distribuição ortogonal  $V^\perp$  é integrável, com folhas totalmente umbílicas (vide Proposição 2.16). Assim, se  $\Sigma^{n+k}$  é uma tal folha, então ela é uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica de  $\overline{M}^{n+k+1}$  e o campo vetorial

$$\nu = \frac{V}{\sqrt{-\langle V, V \rangle}}$$

é normal a  $\Sigma^{n+k}$ , tipo-tempo, unitário, e globalmente definido em  $\Sigma^{n+k}$ .

Seja  $\varphi : M^n \rightarrow \Sigma^{n+k}$  uma imersão isométrica, onde  $M^n$  é uma variedade Riemanniana compacta. Se  $\mathcal{F}$  denota o fluxo de  $V$ , a compacidade de  $M^n$  garante a existência de  $\epsilon > 0$  tal que  $\mathcal{F}$  está definido em  $(-\epsilon, \epsilon) \times \varphi(M^n)$ , e a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n &\longrightarrow \overline{M}^{n+k+1} \\ (t, q) &\longmapsto \Phi(t, q) = \mathcal{F}(t, \varphi(q)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

é também uma imersão. Munindo  $(-\epsilon, \epsilon) \times M^n$  com a métrica induzida por  $\Phi$ , podemos transformar  $(-\epsilon, \epsilon) \times M^n$  numa variedade de Lorentz e  $\Phi$  numa imersão isométrica tal que  $\Phi|_{\{0\} \times M^n} = \varphi$ .

Observemos que o campo vetor posição no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+k+1}$  é homotético, suas curvas integrais são os raios que saem da origem e este campo determina uma foliação de  $\mathbb{R}^{n+k+1}$  por esferas Euclidianas  $\mathbb{S}^{n+k}$ . Nestas considerações, se  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+k}$  é uma imersão isométrica então nossa imersão  $\Phi$  fica da forma

$$\begin{aligned} (0, +\infty) \times M^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1} \\ (t, q) &\longmapsto t\varphi(q). \end{aligned}$$

Tradicionalmente, a imagem desta aplicação é chamada de *cone* em  $\mathbb{R}^{n+k+1}$  gerado por  $M^n$ . (cf. [28] ou [31], Seção 3).

Assim, seguindo este caminho, podemos dizer que a imagem da aplicação  $\Phi$  dada em (5.1) é um *cone generalizado* em  $\overline{M}^{n+k+1}$  gerado por  $M^n$ .

Denotemos a conexão de Levi-Civita de  $\overline{M}^{n+k+1}$  por  $\overline{\nabla}$ . Segundo o Lema 4.4 de [26], a aplicação

$$\alpha : \mathfrak{X}((-\epsilon, \epsilon) \times M^n) \times \mathfrak{X}((-\epsilon, \epsilon) \times M^n) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp((-\epsilon, \epsilon) \times M^n)$$

## 5.2 Construindo imersões mínimas

---

definida por

$$\alpha(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}((-\epsilon, \epsilon) \times M^n),$$

é  $\mathcal{C}^\infty((-\epsilon, \epsilon) \times M^n)$ -bilinear e simétrica, denominada a *segunda forma fundamental* da imersão  $\Phi$ . Logo,  $\alpha$  pode ser metricamente contraído para obter um campo vetorial normal em  $(-\epsilon, \epsilon) \times M^n$ . Assim obtemos o *vetor curvatura média*  $\mathbf{H}$  de  $(-\epsilon, \epsilon) \times M^n$  definido por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} \epsilon_l \alpha(E_l, E_l), \quad (5.2)$$

onde  $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$  é um referencial ortonormal local em  $(-\epsilon, \epsilon) \times M^n$  e  $\epsilon_l = \langle E_l, E_l \rangle$ , para todo  $l \in \{1, \dots, n\}$ .

Dizemos que  $\mathbf{H}$  é *paralelo* se

$$\bar{\nabla}_Y^\perp \mathbf{H} = 0$$

para todo  $Y \in \mathfrak{X}((-\epsilon, \epsilon) \times M^n)$  (cf. [26], pag. 115), onde  $\bar{\nabla}^\perp$  é a conexão normal de  $(-\epsilon, \epsilon) \times M^n$  dada por

$$\bar{\nabla}_Y^\perp Z = (\bar{\nabla}_Y Z)^\perp,$$

para todo  $Y \in \mathfrak{X}((-\epsilon, \epsilon) \times M^n)$ , e todo  $Z \in \mathfrak{X}^\perp((-\epsilon, \epsilon) \times M^n)$ .

Denotemos por  $\text{Ric}_{\bar{M}}$  o campo de operadores auto-adjuntos associados ao tensor de Ricci de  $\bar{M}^{n+k+1}$ , isto é,

$$\text{Ric}_{\bar{M}}(X) = \sum_{l=1}^{n+k+1} \epsilon_l \bar{R}(X, E_l)X$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ , onde  $\bar{R}$  denota o tensor de curvatura de  $\bar{M}^{n+k+1}$ ,  $\{E_1, \dots, E_{n+k+1}\}$  é um referencial ortonormal local em  $\bar{M}^{n+k+1}$  e  $\epsilon_l = \langle E_l, E_l \rangle$ , para cada  $l \in \{1, \dots, n\}$ .

## 5.2 Construindo imersões mínimas

Agora podemos estabelecer a extensão mencionada acima do resultado de J. Simons.

## 5.2 Construindo imersões mínimas

---

**Teorema 5.1.** *Seja  $\overline{M}^{n+k+1}$  uma variedade de Lorentz conformemente estacionária com campo vetorial conforme fechado  $V$  de fator conforme  $\psi$ . Seja  $\Sigma^{n+k}$  uma folha totalmente umbílica da distribuição ortogonal  $V^\perp$  e  $\varphi : M^n \rightarrow \Sigma^{n+k}$  uma imersão isométrica, onde  $M^n$  é uma variedade Riemanniana compacta. Suponha que  $\overline{M}^{n+k+1}$  tem curvatura seccional constante ou a curvatura de Ricci de  $\overline{M}^{n+k+1}$  satisfaz  $\text{Ric}_{\overline{M}}(V) = 0$ . Se  $\psi \neq 0$  em  $\varphi(M^n)$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) a imersão  $\varphi : M^n \rightarrow \Sigma^{n+k}$  tem vetor curvatura média zero;
- (b) se  $\mathcal{F}$  é o fluxo de  $V$  e  $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k+1}$  é definida por  $\Phi(t, q) = \mathcal{F}(t, \varphi(q))$ , então  $\Phi$  tem vetor curvatura média zero;
- (c) a imersão  $\Phi$  do item (b) tem vetor curvatura média paralelo.

*Demonstração.* Fixe  $p \in M^n$  e, em uma vizinhança  $\Omega$  de  $p$  em  $M^n$  escolha um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n, \eta_1, \dots, \eta_k\}$  adaptado a  $\varphi$ , tal que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é geodésico em  $p$ .

Se  $E_1, \dots, E_n, N_1, \dots, N_k$  são os campos em  $\mathcal{F}((-\epsilon, \epsilon) \times \Omega)$  obtidos, respectivamente, de  $e_1, \dots, e_n, \eta_1, \dots, \eta_k$  por transporte paralelo ao longo das curvas integrais de  $V$  que intersectam  $\Omega$ , então segue que

$$\{E_1, \dots, E_n, \nu, N_1, \dots, N_k\}$$

é um referencial ortonormal em  $\mathcal{F}((-\epsilon, \epsilon) \times \Omega)$ , adaptado à imersão (5.1).

Se  $\mathbf{H}$  é o vetor curvatura média de  $\Phi$ , decorre de (5.2) e do item (b) da Proposição 2.16, que

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=1}^n \overline{\nabla}_{E_i} E_i + \overline{\nabla}_\nu \nu \right)^\perp = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=1}^n \overline{\nabla}_{E_i} E_i \right)^\perp$$

onde  $(\cdot)^\perp$  denota a projecção ortogonal sobre  $T\Phi((-\epsilon, \epsilon) \times \Omega)^\perp$ .

Ao longo das curvas integrais de  $V$  que passam por  $p \in M^n$ , temos

$$\overline{\nabla}_{E_i} E_i = \sum_{l=1}^n \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle E_l + \sum_{\beta=1}^k \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle N_\beta - \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, \nu \rangle \nu$$

## 5.2 Construindo imersões mínimas

---

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle \right\} E_l \right)^\perp \\
&\quad + \frac{1}{n+1} \left( \sum_{\beta=1}^k \left\{ \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle \right\} N_\beta \right)^\perp \\
&\quad - \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, \nu \rangle \nu \right)^\perp. \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Novamente, do item (b) da Proposição 2.16 obtemos

$$-\frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, \nu \rangle \nu \right)^\perp = \frac{1}{n+1} \left( \frac{n\psi}{-\langle V, V \rangle} V \right)^\perp = 0. \tag{5.4}$$

Denotemos por  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  o parâmetro do fluxo  $\mathcal{F}$  de  $V$ . Como cada campo  $E_l$  paralelo ao longo das curvas integrais que passam por  $p \in M^n$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, \bar{\nabla}_V E_l \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(E_i, V) E_i, E_l \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_V E_i, E_l \rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{[E_i, V]} E_i, E_l \rangle \\
&= \langle \text{Ric}_{\bar{M}}(V), E_l \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{(\bar{\nabla}_{E_i} V - \bar{\nabla}_V E_i)} E_i, E_l \rangle \\
&= \langle \text{Ric}_{\bar{M}}(V), E_l \rangle - \psi \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle \\
&= -\psi \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle, \tag{5.5}
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que, ou  $\bar{M}^{n+k+1}$  tem curvatura seccional constante, ou  $\text{Ric}_{\bar{M}}(V) = 0$ , para concluirmos que  $\langle \text{Ric}_{\bar{M}}(V), E_l \rangle = 0$ .

## 5.2 Construindo imersões mínimas

---

Sejam  $D$  e  $\nabla$  as conexões de Levi-Civita de  $\Sigma^{n+k}$  e  $M^n$ , respectivamente. Desde que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é geodésico em  $p \in M^n$ , segue que

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle_p = \sum_{i=1}^n \langle D_{e_i} e_i, e_l \rangle_p = \sum_{i=1}^n \langle (D_{e_i} e_i)^\perp + \nabla_{e_i} e_i, e_l \rangle_p = 0. \quad (5.6)$$

Portanto, resolvendo o problema de Cauchy formado por (5.5) e (5.6), obtemos

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, E_l \rangle_{\mathcal{F}(t,p)} = 0, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (5.7)$$

Um cálculo análogo ao feito para obter (5.5) fornece

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle = -\psi \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle. \quad (5.8)$$

Por outro lado, denotando por  $A_\beta : T_p M \rightarrow T_p M$  o operador de forma de  $\varphi$  segundo a direção de  $\eta_\beta$  e escrevendo  $A_\beta e_i = \sum_{j=1}^n h_{ij}^\beta e_j$ , temos

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle_p = \sum_{i=1}^n \langle D_{e_i} e_i, \eta_\beta \rangle_p = \sum_{i=1}^n \langle A_\beta e_i, e_i \rangle_p = \sum_{i=1}^n h_{ii}^\beta. \quad (5.9)$$

Resolvendo o problema de Cauchy formado por (5.8) e (5.9), obtemos

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, N_\beta \rangle_{\mathcal{F}(t,p)} = \sum_{i=1}^n h_{ii}^\beta \exp\left(-\int_0^t \psi(s) ds\right), \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (5.10)$$

Finalmente, substituindo (5.4), (5.7) e (5.10) em (5.3) obtemos, no ponto  $(t, p)$ , a seguinte expressão para o vetor curvatura média

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n+1} \exp\left(-\int_0^t \psi(s) ds\right) \sum_{\beta=1}^k \sum_{i=1}^n h_{ii}^\beta N_\beta. \quad (5.11)$$

Agora, vamos estabelecer as equivalências de (a), (b) e (c), observando que a implicação (b)  $\Rightarrow$  (c) é sempre verdadeira.

(a)  $\Rightarrow$  (b): Se  $\varphi$  tem vetor curvatura média zero então  $\sum_{i=1}^n h_{ii}^\beta = 0$ , para todo  $1 \leq \beta \leq k$ , e decorre de (5.11) que  $\mathbf{H} = 0$ .

## 5.2 Construindo imersões mínimas

---

(c)  $\Rightarrow$  (a): Se  $\bar{\nabla}_V^\perp \mathbf{H} = 0$  então, novamente de (5.11) obtemos, ao longo da curva integral de  $V$  que passa por  $p \in M^n$ , que

$$0 = \bar{\nabla}_V^\perp \mathbf{H} = \left( \frac{D\mathbf{H}}{dt} \right)^\perp = -\frac{\psi(t)}{n+1} \exp\left(-\int_0^t \psi(s) ds\right) \sum_{\beta=1}^k \sum_{i=1}^n h_{ii}^\beta N_\beta.$$

No entanto, já que  $\psi \neq 0$  em  $\varphi(M)$  por hipótese, segue que  $\sum_{i=1}^n h_{ii}^\beta = 0$  em  $p \in M^n$  para todo  $1 \leq \beta \leq k$ , de modo que  $\varphi$  tem vetor curvatura média zero em  $p \in M^n$ .  $\square$

**Observação 5.2.** *No último teorema,  $M^n$  é uma variedade Riemanniana e  $\Sigma^{n+k}$  é uma hipersuperfície tipo-espaço de  $\bar{M}^{n+k+1}$ . Logo, o item (a) deste teorema afirma que  $\varphi(M^n)$  é mínima em  $\Sigma^{n+k}$ . Agora, observando que  $(-\epsilon, \epsilon) \times M^n$  e  $\bar{M}^{n+k+1}$  são ambientes tipo-tempo, o item (b) do mesmo teorema equivale a dizer que  $\Phi((-\epsilon, \epsilon) \times M^n)$  é mínima em  $\bar{M}^{n+k+1}$ . Portanto, no Teorema 5.1 temos a seguinte extensão do resultado de J. Simons: um cone generalizado em uma variedade de Lorentz conformemente estacionária é mínimo se, e somente se, a imersão na folha é mínima.*

Como aplicação do Teorema 5.1 obtemos as seguintes construções de imersões mínimas quando a variedade ambiente é o GRW  $-I \times_t F^{n+k}$ , o espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+k+1}$  e o espaço anti-de Sitter  $\mathbb{H}_1^{n+k+1}$ .

**Corolário 5.3.** *Seja  $I \subset (0, +\infty)$  e considere  $t_0 \in I$ . No espaço GRW  $-I \times_t F^{n+k}$ , se  $\varphi : M^n \rightarrow \{t_0\} \times F^{n+k}$  é uma imersão isométrica e  $\Phi$  é a imersão canônica de  $-I \times_t M^n$  em  $-I \times_t F^{n+k}$  então  $\varphi$  é mínima se, e somente se,  $\Phi$  é mínima.*

*Demonstração.* Uma vez que o campo conforme fechado em  $-I \times_t F^{n+k}$  é  $V = t\partial_t$  (veja Subseção 2.3.1) então  $\psi = (t)' = 1 \neq 0$ . Além disso,  $\text{Ric}_{\bar{M}}(V) = 0$  (cf. [26], Corolário 7.43). Logo, o resultado é uma aplicação direta do Teorema 5.1.  $\square$

Quando o ambiente é um espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+k+1} = -\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{S}^{n+k}$  (vide Exemplo 2.21), lembremos que o passado cronológico (respectivamente o futuro cronológico) de  $\mathbb{S}_1^{n+k+1}$  é definido como o conjunto dos pontos  $(t, p) \in \mathbb{S}_1^{n+k}$  tais que  $t < 0$  (respectivamente  $t > 0$ ).

## 5.2 Construindo imersões mínimas

---

**Corolário 5.4.** *Seja  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+k}$  uma subvariedade  $n$ -dimensional de uma esfera  $\mathbb{S}^{n+k}$  do espaço de Sitter  $(n+k+1)$ -dimensional  $\mathbb{S}_1^{n+k+1}$ . Se  $\varphi(M^n)$  está contida no passado cronológico (respectivamente no futuro cronológico) de  $\mathbb{S}_1^{n+k+1}$  então  $M^n$  é mínima em  $\mathbb{S}^{n+k}$  se, e somente se, a união dos segmentos das curvas integrais de  $\partial_t$  contidas no passado cronológico (respectivamente no futuro cronológico) de  $\mathbb{S}_1^{n+k+1}$  e que passa pelos pontos de  $\varphi(M^n)$  é mínima em  $\mathbb{S}_1^{n+k+1}$ .*

*Demonstração.* Temos que  $\mathbb{S}_1^{n+k+1}$  tem curvatura seccional constante igual a 1 (vide Exemplo 2.18). Além disso, do Exemplo 2.21 obtemos que  $\psi = (\cosh t)' = \sinh t \neq 0$  em  $\varphi(M^n)$ , pois  $\varphi(M^n)$  está contida ou no passado cronológico ou no futuro cronológico de  $\mathbb{S}_1^{n+k+1}$ . Logo, o resultado segue do Teorema 5.1.  $\square$

Para o próximo resultado, lembremos que na componente conexa do espaço anti-de Sitter  $\mathbb{H}_1^{n+k+1}$  que é isométrica ao GRW  $-(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times_{\cos t} \mathbb{H}^{n+k}$  (vide Exemplo 2.22) temos também um passado cronológico e um futuro cronológico, dados por  $-(-\frac{\pi}{2}, 0) \times_{\cos t} \mathbb{H}^{n+k}$  e  $-(0, \frac{\pi}{2}) \times_{\cos t} \mathbb{H}^{n+k}$ , respectivamente.

**Corolário 5.5.** *Seja  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+k}$  uma subvariedade  $n$ -dimensional de algum espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+k}$  do espaço anti-de Sitter  $(n+k+1)$ -dimensional  $\mathbb{H}_1^{n+k+1}$ . Suponha que  $\varphi(M^n)$  está contida no passado cronológico (respectivamente no futuro cronológico) de  $\mathbb{H}_1^{n+k+1}$ . Então  $M^n$  é mínima em  $\mathbb{H}^{n+k}$  se, e somente se, a união dos segmentos das curvas integrais de  $\partial_t$  contidas no passado cronológico (respectivamente no futuro cronológico) de  $\mathbb{H}_1^{n+k+1}$  e que passa pelos pontos de  $\varphi(M^n)$  é mínima em  $\mathbb{S}_1^{n+k+1}$ .*

*Demonstração.* Temos que  $\mathbb{H}_1^{n+k+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $-1$  (vide Exemplo 2.19). Além disso, do Exemplo 2.22 obtemos que  $\varphi = (\cos t)' = -\sin t \neq 0$  em  $\varphi(M^n)$ , pois  $\varphi(M^n)$  está contida ou no passado cronológico ou no futuro cronológico de  $\mathbb{H}_1^{n+k+1}$ . Novamente, o resultado segue do Teorema 5.1.  $\square$



## Referências Bibliográficas

- [1] J. A. Aledo, L. J. Alías and A. Romero, *Integral formulas for compact space-like hypersurfaces in de Sitter space: Applications to the case of constant higher order mean curvature*, J. of Geom. and Physics, **31** (1999), 195–208.
- [2] L. J. Alías, A. Brasil Jr. and A. G. Colares, *Integral Formulae for Space-like Hypersurfaces in Conformally Stationary Spacetimes and Applications*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **46** (2003), 465–488.
- [3] L. J. Alías and A. G. Colares. *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes*. Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc., **143** (2007), 703–729.
- [4] J. L. M. Barbosa and M. do Carmo, *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*, Math. Z., **185** (1984), 339–353.
- [5] J. L. M. Barbosa, M. do Carmo and J. Eschenburg, *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*, Math. Z., **197** (1988) 123–138.
- [6] J. L. M. Barbosa and A. G. Colares, *Stability of Hypersurfaces with Constant  $r$ -Mean Curvature*, Ann. Global Anal. Geom., **15** (1997), 277–297.
- [7] J. L. M. Barbosa and V. Oliker, *Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Lorentz Spaces*, Matem. Contemporânea, **4** (1993), 27–44.
- [8] A. Barros, A. Brasil and A. Caminha. *Stability of spacelike hypersurfaces in foliated spacetimes*. Diff. Geom. Appl., **26** (2008), 357-365.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [9] A. Barros and P. Sousa. *Compact graphs over a sphere of constant second order mean curvature*. Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), 3105–3114.
- [10] J. K. Beem, P. E. Ehrlich and K. L. Easley. *Global Lorentzian Geometry*. Second Edition. CRC Press, (1996).
- [11] A. Brasil Jr. and A. G. Colares. *Stability of spacelike hypersurfaces with constant  $r$ -mean curvature in de Sitter space*. Proceedings of the XII Fall Workshop on Geometry and Physics, Publ. R. Soc. Mat. Esp., **7** (2004), 139–145.
- [12] L. Cafarelli, L. Nirenberg e J. Spruck. *The Dirichlet problem for non-linear second order elliptic equations. III: Functions of the eigenvalues of the Hessian*. Acta Math., **155** (1985), 262-301.
- [13] F. Camargo, A. Caminha, M. da Silva, and H. de Lima. *On the  $r$ -stability of sapalike hypersurfaces*. Journal of Geometry and Physics, **60** (2010), 1402-1410.
- [14] A. Caminha. *Sobre Hipersuperfícies em Espaços de Curvatura Seccional Constante*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará (2004).
- [15] A. Caminha. *On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature Lorentz manifolds*. J. of Geom. and Physics, **56** (2006), 1144-1174.
- [16] A. Caminha. *The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces*. Preprint, (2009).
- [17] A. Caminha, P. Sousa and F. Camargo, *Complete Foliations of Space Forms by Hypersurfaces*, aceito para publicação no Bulletin of the Brazilian Mathematical Society.
- [18] H. F. de Lima. *Fórmulas Integrais Tipo-Minkowski para Hipersuperfícies Tipo-Espaço em Variedades de Lorentz Conformemente Estacionárias e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará (2002).
- [19] H. F. de Lima. *Hipersuperfícies Tipo-Espaço com Curvatura de Orem Superior Constante*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará (2007).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [20] H. F. de Lima. *Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in de Sitter space*. J. of Geom. and Physics, **57** (2007), 967–975.
- [21] M. F. Elbert. *Constant positive 2-mean curvature hypersurfaces*, Illinois. J. Math., **46** (2002), 247-267.
- [22] L. Gårding. *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech., **8** (1959), 957-965.
- [23] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematical **218**, Ed. Board, (2003).
- [24] S. Montiel. *Uniqueness of Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in foliated Spacetimes*, Math. Ann., **314** (1999), 529-553.
- [25] S. Montiel and A. Ros. *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*. In: Differential Geometry, A Symposium in Honour of Manfredo do Carmo, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **52** (1991), 278–296.
- [26] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity*. New York: Academic Press (1983).
- [27] R. Reilly. *Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms*. J. Diff. Geom., **8** (1973), 465–477.
- [28] J. Simons. *Minimal varieties in Riemannian manifolds*. Ann. of Math., **88** (1968), 62-105.
- [29] R. Wald. *General Relativity*. Univ of Chicago Press, Chicago (1984).
- [30] S. T. Yau. *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*. Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 659-670.
- [31] Y. Xin. *Minimal submanifolds and related topics*. World scientific publishing co., Singapore (2003).
- [32] L. Ximin and D. Junlei. *Stable space-like hypersurfaces in the de Sitter Space*. Arch. Mathematicum (BRNO), **40** (2004), 111–117.