



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

Métodos Tensoriais para Estimação de Canal em Sistemas MIMO-STBC

Dissertação de Mestrado

Gilderlan Tavares de Araújo

FORTALEZA – CEARÁ
MARÇO/2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

Métodos Tensoriais para Estimação de Canal em Sistemas MIMO-STBC

Autor

Gilderlan Tavares de Araújo

Orientador

Prof. Dr. André Lima Férrer de Almeida

*Dissertação apresentada à
Coordenação do Programa de
Pós-graduação em Engenharia de
Teleinformática da Universidade
Federal do Ceará como parte dos
requisitos para obtenção do grau
de **Mestre em Engenharia de
Teleinformática.***

FORTALEZA – CEARÁ

MARÇO/2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia - BPGE

-
- A689m Araújo, Gilderlan Tavares de.
 Métodos tensoriais para estimação de canal em sistemas MIMO-STBC / Gilderlan Tavares de Araújo. – 2014.
 67 f. : il. color. , enc. ; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2014.
 Área de concentração: Sinais e Sistemas.
 Orientação: Prof. Dr. André Lima Férrer de Almeida.
1. Teleinformática. 2. Sistemas – Desempenho. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
CAMPUS DO PICI, CAIXA POSTAL 6007 CEP 60.738-640
FORTALEZA - CEARÁ - BRASIL
FONE (+55) 85 3366-9467 - FAX (+55) 85 3366-9468

GILDERLAN TAVARES DE ARAÚJO

**MÉTODOS TENSORIAIS PARA ESTIMAÇÃO DE CANAL EM
SISTEMAS MIMO-STBC**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Teleinformática.

Área de concentração: Sinais e Sistemas.

Aprovada em: 14/03/2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. André Lima Férrer de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Walter da Cruz Freitas Jr.
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Taufik Abrão
Universidade Estadual de Londrina

Resumo

Neste trabalho, o desempenho de sistemas MIMO baseados em codificação espaço-temporal é investigado via álgebra multilinear, mais especificamente, por meio de decomposições tensoriais, afastando-se um pouco dos modelos matriciais comumente adotados. Assume-se um sistema composto de P antenas transmissoras e M receptoras, consistindo de uma combinação de um código espaço-temporal em bloco com um filtro formatador. Esse filtro é formado por uma matriz de pré-codificação e uma matriz que mapeia os sinais pré-codificados nas antenas transmissoras. Para o sistema considerado, duas contribuições são apresentadas para solucionar o problema de estimação de canal. Primeiro, é proposto um método tensorial de estimação de canal para STBCs ortogonais em sistemas MIMO, tomando-se como exemplo o esquema de Alamouti. Tal método faz uso de um modelo tensorial PARATUCK2 de terceira ordem para o sinal recebido, cuja terceira dimensão está associada à presença do filtro formatador. Aproveitando-se desse modelo tensorial, um método de estimação de canal baseado no algoritmo dos mínimos quadrados alternados é proposto. Como uma segunda contribuição, uma generalização desse modelo para um STBC não ortogonal arbitrário é feita, em que uma estrutura generalizada é proposta para o filtro formatador, introduzindo uma quarta dimensão no modelo tensorial de sinal. Neste caso, faz-se uso do modelo PARATUCK(2-4) seguido pela sua redução a um modelo PARAFAC estruturado, a partir do qual uma solução em forma fechada para o problema de estimação de canal é estabelecida. As métricas de desempenho consideradas para avaliação dos métodos de estimação de canal propostos são: (I) A qualidade da estimação do canal em termos de NMSE e (II) a confiabilidade do sistema em termos de Taxa de Erro de Bit.

Palavras-Chave: Sistemas MIMO, Estimação de Canal, Codificação espaço-tempo, Decomposições tensoriais.

Abstract

In this work, the performance of MIMO systems based on space-time coding is investigated through multilinear algebra, more specifically, by means of tensor decompositions, pulling away a bit from commonly used matrix models. We assume a system composed of P transmit and M receive antennas, consisting of a combination of a space-time block code (STBC) with a formatting filter. This filter is formed by a precoding matrix and a matrix that maps the precoded signal onto the transmit antennas. For the considered system, two contributions are presented to solve the problem of channel estimation. First, we propose a tensor-based channel estimation method for orthogonal STBCs in MIMO systems, by focusing on the specific case of the Alamouti scheme. We resort to a third order PARATUCK2 tensor model for the received signal, the third dimension of which is related to the presence of the formatting filter. By capitalizing on this tensor model, a channel estimation method based on the alternating least squares (ALS) algorithm is proposed. As a second contribution, a generalization of this method to an arbitrary nonorthogonal STBC is made, where a generalized structure is proposed for the formatting filter, introducing a fourth dimension into the tensor signal model. In this case, we make use of the PARATUCK(2-4) model followed by its reduction to a structured PARAFAC model, from which a closed-form solution to the channel estimation problem is established. The performance metrics considered for evaluating the proposed channel estimation method are: (I) the quality of the estimation in terms of NMSE and (II) the system reliability in terms of Bit Error Rate.

Key-words: MIMO System, Channel Estimation, Space-Time Coding, Tensor Decomposition.

...a minha mãe Maria Alice, minha companheira Mikaelle e aos amigos,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me dado sabedoria para tomar decisões durante toda a minha vida acadêmica. À minha família, em particular a minha mãe Maria Alice, pela força e apoio. À minha companheira Mikaelle Barboza, que sempre esteve ao meu lado nos últimos quatro anos e meio, com paciência e compreensão, principalmente nesses dois últimos anos.

Ao Professor Dr. André Lima Férrer de Almeida, por ter acreditado em mim e ter me orientado durante esse curso de mestrado.

Agradeço aos amigos Jordan Paiva, Paulo Gome, Emanuel Sena e Ítalo Victor, pela ajuda durante o desenvolvimento desse processo de aprendizagem, em especial durante as disciplinas cursadas.

E por fim agradeço A FUNCAP (Fundação Cearense de Apoio a Pesquisa), pelo apoio financeiro concedido.

Sumário

Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
2 Introdução à Modelagem Tensorial de Dados	5
2.1 Conceitos e operações básicas	5
2.2 Decomposições Tensoriais	9
2.2.1 PARAFAC	9
2.2.2 PARAFAC2	14
2.2.3 TUCKER	15
2.2.4 PARATUCK2	16
2.3 Resumo	22
3 Abordagem PARATUCK2 para Sistemas MIMO-STBC Ortogonais	23
3.1 Sistema MIMO	24
3.1.1 Codificação Espaço-Temporal	26
3.1.2 Codificação Espaço-Tempo em Blocos Ortogonais (OSTBC)	28
3.2 Modelo Tensorial Para Sistemas MIMO-OSTBC	29
3.3 Receptor PARATUCK2	31
3.3.1 Estimação do Canal via ALS-PARATUCK2	32
3.3.2 Decodificação	34
3.4 Avaliação de Desempenho	36
3.5 Resumo	40
4 Abordagem PARATUCK(2-4) para Sistemas MIMO-STBC Generalizados	41
4.1 Modelagem Tensorial Para Sistemas MIMO-STBC Generalizados .	42
4.2 Receptor Combinado PARATUCK(2-4)-PARAFAC	46
4.2.1 Pré-Filtragem Espaço-Tempo	47

4.2.2	Estimação de Canal Via Fatoração de Kronecker	49
4.2.3	Detecção e Decodificação dos Símbolos	52
4.3	Avaliação de Desempenho	53
4.4	Resumo	56
5	Conclusões e Perspectivas	58
	Referências Bibliográficas	61

Lista de Figuras

2.1	Representação de um tensor de ordem-3.	6
2.2	Representação de um tensor de ordem-3 fatiado em relação a cada um de seus modos.	8
2.3	Modelo PARAFAC como soma de tensores de <i>rank</i> -1.	10
2.4	Modelo PARAFAC como restrição do modelo TUCKER3.	10
2.5	Modelo Tensorial PARAFAC2.	14
2.6	Modelo Tensorial PARATUCK2	17
2.7	Modelo tensorial PARATUCK2 de quarta ordem	21
3.1	Sistema MIMO.	24
3.2	Multiplexação Espacial baseada em arquitetura V-BLAST com três antenas transmissoras.	26
3.3	Esquema de Alamouti.	27
3.4	Estrutura do sistema proposto.	29
3.5	Desempenho da estimação do canal.	37
3.6	Performance da estimação dos símbolos.	37
3.7	Comparação entre as técnicas empregadas na decodificação dos símbolos.	38
3.8	Comparação entre o canal estimado e o canal assumido conhecido no receptor.	38
3.9	Análise de convergência do ALS-PARATUCK2.	39
4.1	Esquematização do Sistema proposto	42
4.2	Diagrama em blocos das etapas de processamento do sistema	46
4.3	Desempenho da estimação do canal	54
4.4	BER vs. SNR	54
4.5	Confiabilidade do sistema com uma antena receptora	55
4.6	Comparação com outras soluções tensoriais	56
4.7	Comparação entre ZF(canal estimado) e ZF(canal conhecido)	56

Lista de Acrônimos

SVD	Singular Valuer Decomposition
ALS	Alternating Least Square
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
SIMO	Single-Input Multiple-Output
CDMA	Code Division Multiple Access
STC	Space Time Code
STTC	Space Time Trellis Code
STBC	Space Time Block Code
OSTBC	Orthogonal Space Time Block Code
3G	Terceira Geração
4G	Quarta Geração
NMSE	Normalized Mean Square Error
BER	Bit Erro Rate
SNR	Signal Noise Rate
BLAST	Bell Labs Layered Space-Time
V-BLAST	Vertical Bell Labs Layered Space-Time
ZF	Zero Forcing
KRST	Khatri Rao Space-Time Coding
PARAFAC	PARAllel FACtors

Lista de Publicações

- ▶ Congresso

Receptor Cego PARATUCK2 para Sistemas MIMO Baseados em Codificação Espaço-Temporal. Publicado no XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT2013, 1-4 de Setembro de 2013, Fortaleza, CE

- ▶ Em Preparação

Fourth Order PARATUCK2 Receiver for MIMO-STBC System

Notação

Neste trabalho é considerada as seguintes convenções: valores escalares são representados por letras minúsculas ($a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$), vetores são denotados por letras minúsculas em negrito ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dots$). Matrizes serão representadas por letras maiúsculas em negrito (\mathbf{A}, \mathbf{B}), ao passo que, tensores serão ilustrados por letras caligráficas (\mathcal{A}, \mathcal{B}). Além dessas notações iniciais têm-se as seguintes representações:

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
\mathbb{C}^I	Conjunto de vetores complexos de dimensão I
$\mathbb{C}^{I \times J}$	Conjunto de matrizes complexas de dimensão $I \times J$
$\mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$	Conjunto de tensores complexos de dimensão $I_1 \times \dots \times I_N$
$\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$	Produto externo entre \mathbf{x} e \mathbf{y}
a^*	Conjugado de $a \in \mathbb{C}$
$Re(a)$	Parte real de a
$Im(a)$	Parte imaginária de a
\mathbf{A}^T	Transposto de \mathbf{A}
\mathbf{A}^H	Conjugado transposto de \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Inversa de \mathbf{A}
\mathbf{A}^\dagger	Pseudo inversa de \mathbf{A}
$\ \mathbf{A}\ _F$ ($\ \mathcal{A}\ _F$)	Norma de Frobenius de \mathbf{A} (\mathcal{A})
\mathbf{I}_N	Matriz identidade de dimensão N
$[\mathbf{A}]_{i_1 i_2} = a_{i_1 i_2}$	(i_1, i_2) -ésimo elemento da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2}$
$[\mathcal{A}]_{i_1 \dots i_N} = a_{i_1 \dots i_N}$	(i_1, \dots, i_N) -ésimo elemento do tensor $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$
$\mathbf{A}_i \cdot (\mathbf{A}_j)$	i -ésima linha (j -ésima coluna) de \mathbf{A}
$\mathbf{A}_{i_1 \dots} \in \mathbb{C}^{I_2 \times I_3}$	i -ésimo <i>slice</i> matricial modo-1 do tensor \mathcal{A}
$\mathbf{A}_{\cdot i_2} \in \mathbb{C}^{I_3 \times I_1}$	i -ésimo <i>slice</i> matricial modo-2 do tensor \mathcal{A}
$\mathbf{A}_{\cdot \cdot i_3} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2}$	i -ésimo <i>slice</i> matricial modo-3 do tensor \mathcal{A}
\times_n	Produto modo- n

$[\mathcal{A}]_{(n)}$	Tensor \mathcal{A} matriciado ao longo do modo- n
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	O produto de Kronecker entre $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times J}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{K \times L}$, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1J}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2J}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}\mathbf{B} & a_{I2}\mathbf{B} & \dots & a_{IJ}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{IK \times JL} .$
$\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$	O produto de Khatri-Rao. Para $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times K}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{J \times K}$, $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{.1} \otimes \mathbf{B}_{.1} & \mathbf{A}_{.2} \otimes \mathbf{B}_{.2} & \dots & \mathbf{A}_{.K} \otimes \mathbf{B}_{.K} \end{bmatrix}$
$vec(\mathbf{A})$	Operador vetorização. Reorganiza a matriz em um vetor empilhando suas colunas. $\text{Para } \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times J}: vec(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{.1} \\ \mathbf{A}_{.2} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{.J} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{IJ}$
$unvec(\mathbf{A})$	Realiza a operação inversa da vetorização. Reconstrói a matriz \mathbf{A} a partir de $vec(\mathbf{A})$
$diag(\mathbf{a})$	Operador diagonal. Constrói uma matriz diagonal a partir de um vetor \mathbf{a}
$D_i(\mathbf{A})$	Corresponde a uma matriz diagonal formada pela i -ésima linha de \mathbf{A}
$unddiag(\mathbf{a})$	Recupera o vetor \mathbf{a} a partir da matriz diagonal
\sqcup_n	Operador concatenação em relação ao modo- n

Introdução

A troca de informações sempre foi crucial para o desenvolvimento das sociedades, seja para fins sociais ou para tomada de decisões em situações de conflitos, comumente vividas nas sociedades antigas. De acordo com a história das telecomunicações, uma das formas mais primitivas de transmitir informações, usadas por gregos, persas e romanos, baseava-se em combinações de sinais de fogo e fumaça [1].

Desde então, a trajetória das telecomunicações não deixou de sofrer modificações e transformações e como exemplo de processo evolutivo está a criação, em 1876, do telefone com fio por Alexander G. Bell. Em 1861 James C. Maxwell propôs a teoria das ondas eletromagnéticas, sendo provada por Heinrich R. Hertz cerca de duas décadas mais tarde. Esse evento deu início aos estudos sobre comunicação sem fio e culminou com a criação do telégrafo sem fio, desenvolvido por Guilherme Marconi em 1895 sendo patenteado no ano seguinte.

Na sociedade atual verifica-se que serviços de voz, dados e multimídia estão convergindo para este tipo de comunicação. Para acompanhar a evolução dos sistemas de comunicação sem fio foi preciso encontrar meios de tornar tais sistemas mais robustos e confiáveis. Uma das soluções encontradas foi o emprego de diversas antenas no transmissor e no receptor. Popularmente denominado por sistema MIMO, duas das principais técnicas de transmissão que são combinadas com esse tipo sistema são: *Codificação Espaço-Tempo*, fornecendo ganho de diversidade e *Multiplexação Espacial*, responsável pelo ganho de multiplexação. Alguns esquemas híbridos são fornecidos pela literatura como é o caso de esquemas STBCs [2], [3].

Diante do rápido avanço experimentado pelas comunicações sem fio, o processamento de sinais é uma das principais questões a ser tratada, devido aos graus de complexidade inerentes ao processo evolutivo dos sistemas. Dessa forma, o processamento de sinais para esse tipo de sistema de

comunicação é, geralmente, usado para suavizar os efeitos provocados pelas interferências co-canal e intersimbólica, e tirar proveito da diversidade espacial presente em canais sem fio, obtida empregando-se um conjunto de antenas na recepção e/ou transmissão. Espaço e Tempo são as dimensões comumente consideradas em processamento de sinais, então é comum serem adotados modelos matriciais para inúmeros problemas relacionados ao processamento de sinais em sistemas MIMO, em que, geralmente, a dimensão espacial varre as linhas da matriz de sinal recebido, enquanto a dimensão temporal varia ao longo das colunas dessa matriz.

A modelagem do sinal recebido via modelos matriciais tem como principal limitação a falta de unicidade inerente do modelo. Além disso, o *rank* dessa matriz é outro fator importante, pois sabe-se que o *rank* de uma matriz é definido como o mínimo entre as dimensões, com isso tais modelos podem tornar-se um pouco mais limitados, por exemplo, em problemas de identificação de fontes e/ou usuários. Diante desses fatos, nas últimas décadas diversos pesquisadores têm dado atenção às decomposições tensoriais, que vem sendo aplicada na modelagem de diversas aplicações de processamento de sinais para comunicação sem fio [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Isso é possível associando-se os diferentes domínios dos sinais transmitidos e/ou recebidos à múltiplas dimensões de um tensor de dados.

Alguns modelos tensoriais são caracterizados por sua simplicidade e unicidade inerente do modelo, por exemplo o modelo PARAFAC [11]. Em outros modelos, a unicidade é alcançada realizando leves alterações ou restrições aos modelos originais, como os modelos PARAFAC2 e PARATUCK2, respectivamente. Além disso, outra motivação para a utilização de modelos tensoriais em processamento de sinais para comunicação sem fio está relacionada ao *rank*, pois em um modelo PARAFAC, por exemplo, o *rank* desse tensor é dado pelo mínimo do produto dois a dois entre as dimensões do tensor, dessa forma uma maior quantidade de fontes e/ou usuários poderiam ser identificadas caso esses elementos estejam associados ao *rank*.

Note que, em um rápido paralelo entre modelos matriciais e tensoriais verifica-se que em diversos cenários, informações úteis podem ser tratadas como ruído em modelos matriciais, enquanto que, em modelos tensoriais ocorre uma varredura mais abrangente das dimensões dos dados e isso pode tornar mais precisa a análise dos dados. Outra característica importante dos tensores é a capacidade de atuar não apenas em problemas espaço-tempo, mas também em cenários espaço-frequência, ou em uma combinação espaço-tempo frequência [7], devido a natureza multidimensional dos dados. Nota-se que os modelos tensoriais são bem flexíveis, no sentido de que um

único problema pode ser modelado por meio de somente um modelo ou uma combinação deles. Nesta dissertação, especificamente, esta flexibilidade foi bem explorada, uma vez que se faz uso de uma combinação de modelos tensoriais para fornecer uma solução em forma fechada para o problema de estimação de canal e símbolos.

PARAFAC [11] é a decomposição tensorial mais popular em processamento de sinais. Em [4] o esquema de transmissão é caracterizado pelo uso da técnica de multiplexação espacial. Cada *stream* de dados é pré-codificada e então, um processo cego de estimação de canal e decodificação dos símbolos é realizado, modelando-se o tensor de sinal recebido através do modelo PARAFAC.

Menos comum em processamento de sinais, o modelo PARATUCK2 foi introduzido neste campo de pesquisa, segundo [6], por [5] em 2007. A partir de então, outros trabalhos baseados na decomposição PARATUCK2 foram desenvolvidos na área de processamento de sinais para comunicação sem fio, como por exemplo [7], [8], [6], [12]. Dentre esses trabalhos, destaca-se [8], pois diferentemente dos demais citados o tensor de sinal recebido representa um modelo PARATUCK2 de quarta ordem. Na abordagem empregada em [8] os símbolos transmitidos são espalhados e multiplexados nos domínios do tempo e do espaço. Além disso, a modelagem é caracterizada pela presença de duas matrizes de alocação, uma para alocar as antenas transmissoras e outra para alocar a *stream* de dados que será transmitida. Ainda menos popular que PARATUCK2, a família TUCKER possui aplicações em processamento de sinais para sistemas de comunicação sem fio. Em [10], por exemplo, é empregado na estimação de canal e símbolos de sistemas SIMO CDMA multiusuário.

Note que todas as decomposições estão direcionadas ao tratamento do mesmo problema: estimar canal e símbolos. Isso mostra a importância desse problema para as comunicações sem fio. Outra justificativa para o uso desta variedade de modelos é a diversidade de cenário explorado. Seguindo essa sistemática é empregada neste trabalho uma abordagem tensorial para solução de problemas de estimação de canal e dos símbolos transmitidos, cujo cenário é um sistema MIMO-STBC. Dentre os diversos modelos tensoriais existentes, esta pesquisa está direcionada, principalmente, às decomposições PARATUCK2, TUCKER e PARAFAC. Dessa forma, motivado pela flexibilidade na análise dos dados verificada nos modelos tensoriais, este estudo tem como objetivo apresentar técnicas tensoriais de estimação de canal para sistemas STBC generalizados, ou seja, esquemas STBCs ortogonais e não ortogonais.

Esta dissertação foi desenvolvida com base em referências bibliográficas

compostas por livros, artigos publicados em anais de eventos nacionais, internacionais, em periódicos dedicados a sistemas de comunicação sem fio e afins. Os resultados numéricos foram obtidos a partir de simulações computacionais realizadas com apoio do software MATLAB[®]. Os campos de pesquisa que serão abordados são:

- ▶ Álgebra Multilinear;
- ▶ Sistema MIMO baseado em esquemas STBCs;
- ▶ Estimação de Canal.

Esta dissertação está organizada de acordo com a seguinte estrutura:

Capítulo 2 – Neste capítulo é apresentada uma revisão de álgebra multilinear. São destacadas algumas propriedades importantes para o desenvolvimento do trabalho, bem como definições úteis. Também são abordadas diversas decomposições tensoriais e suas particularidades, por exemplo, questões envolvendo a unicidade dos modelos e algoritmos, quando julgado importante.

Capítulo 3 – Neste capítulo é adotado um sistema MIMO-OSTBC pré-codificado, em que o sinal recebido é modelado utilizando-se o modelo tensorial PARATUCK2, a partir do qual a matriz de canal é estimada. É empregado um algoritmo iterativo, denominado ALS PARATUCK2, para o procedimento de estimação do canal. Ainda neste capítulo, é feita a decodificação dos símbolos transmitidos por meio do decodificador linear que compõe o receptor.

Capítulo 4 – Neste capítulo é apresentado um esquema STBC generalizado, baseado em decomposição tensorial, diferentemente do Capítulo 3 que é restrito a casos em que a matriz de código é ortogonal. A proposta é reduzir um modelo tensorial PARATUCK2 de quarta ordem a um modelo de terceira ordem estruturado em produtos de Khatri-Rao, caracterizado pela decomposição em fatores paralelos (PARAFAC). Tanto o problema de estimação dos coeficientes do canal como o de detecção e decodificação dos símbolos transmitidos são modelados tensorialmente.

Capítulo 5 – Neste capítulo são apresentadas as conclusões gerais da dissertação. Além das conclusões do presente trabalho, algumas perspectivas de continuidade desta pesquisa são fornecidas.

Introdução à Modelagem Tensorial de Dados

As decomposições matriciais, tais como [SVD](#), [QR](#) e [Cholesky](#) [13], são importantíssimas ferramentas para extrair informações desejadas de um conjunto de dados. Porém, como matrizes são estruturas bidimensionais elas tornam limitadas em duas as formas de representação do problema [14]. Isso pode provocar uma perda de interpretação quando um conjunto de informações permite ser explorado por um número maior de domínios, ou dimensões. Estruturas tensoriais são poderosas ferramentas para analisar dados diante desse cenário. Neste capítulo será apresentada uma revisão da modelagem tensorial empregada na solução de problemas de natureza multidimensional, mais especificamente, serão fornecidos os conceitos básicos de álgebra multilinear e em seguida neste capítulo são discutidas as decomposições tensoriais, iniciando com o modelo PARAFAC, seguindo com o PARAFAC2 e encerrando o capítulo com as decomposições TUCKER, PARATUCK2 e a formalização do modelo PARATUCK2 de quarta ordem.

2.1 Conceitos e operações básicas

A definição do termo *tensor*, geralmente está associada ao campo de estudo do pesquisador que emprega essa abordagem. Em nosso contexto, tensor é usado para fazer referência a conjuntos de informações, ou dados, multidimensionais. A teoria dos tensores é um ramo da álgebra linear, conhecida hoje em dia como álgebra multilinear [15]. Pode-se dizer que álgebra multilinear é a álgebra dos tensores de ordem maiores que dois e suas decomposições podem ser vistas como uma generalização das decomposições matriciais [15]. Então, $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times \dots \times I_N}$ representa um tensor de ordem N , em que, I_n é a n -ésima dimensão ou modo- I_n de \mathcal{X} . Dessa maneira, matrizes, vetores e escalares, são tratados como tensores de ordem 2, ordem 1 e ordem

0, respectivamente. Tem-se na Figura 2.1 uma ilustração de uma estrutura tensorial de terceira ordem.

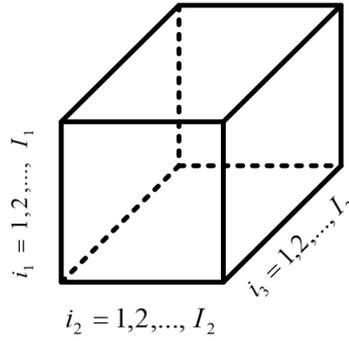


Figura 2.1: Representação de um tensor de ordem-3.

As operações empregadas sobre tensores de ordem superior podem ser, na verdade, vistas como versões estendidas das operações lineares comuns a matrizes. Por exemplo, a representação escalar do tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times \dots \times I_N}$ é dada por

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} = [\mathcal{X}]_{i_1 i_2 \dots i_N}, \quad (2.1)$$

em que i_n é o n -ésimo modo de \mathcal{X} . A seguir serão apresentadas outras importantes definições associadas aos tensores

Definição 1 *Sejam \mathcal{X} e \mathcal{Y} tensores de mesma ordem. O produto interno entre eles é definido como*

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1 i_2 \dots i_N} y_{i_1 i_2 \dots i_N}. \quad (2.2)$$

Definição 2 *Sejam $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times \dots \times I_N}$ e $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_m \times \dots \times J_M}$ dois tensores de ordem N e M , respectivamente. O produto externo entre \mathcal{X} e \mathcal{Y} é dado por:*

$$[\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}]_{i_1 i_2 \dots i_N j_1 j_2 \dots j_M} = x_{i_1 i_2 \dots i_N} y_{j_1 j_2 \dots j_M}. \quad (2.3)$$

Definição 3 *Um tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times \dots \times I_N}$ é dito tensor de rank-1, se ele for obtido a partir do produto externo entre N vetores.*

$$\mathcal{X} = \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2 \circ \dots \circ \mathbf{a}_N. \quad (2.4)$$

É importante salientar que o rank de um tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times \dots \times I_N}$ é definido como o menor número de tensores de rank-1 que são necessários para gerar \mathcal{X} por meio de uma combinação linear.

Definição 4 A norma de Frobenius de um tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times \dots \times I_N}$ é definida como:

$$\|\mathcal{X}\|_F = \sqrt{\langle \mathcal{X}, \mathcal{X} \rangle} = \left(\sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} |x_{i_1 i_2 \dots i_N}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

A norma de Frobenius é constantemente utilizada para averiguar a convergência dos algoritmos iterativos, empregados nas decomposições tensoriais.

Definição 5 O produto modo- n de um tensor, denotado por $(\mathcal{X} \times_n \mathbf{B})$, trata-se da multiplicação de um tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times \dots \times I_N}$ por uma matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{J \times I_n}$ em relação ao n -ésimo modo de \mathcal{X} , cujo resultado é um tensor \mathcal{Y} de dimensão $I_1 \times \dots \times I_{n-1} \times J \times I_{n+1} \times \dots \times I_N$, em que cada elemento de \mathcal{Y} é dado por:

$$(\mathcal{X} \times_n \mathbf{B})_{i_1 \times \dots \times i_{n-1} \times j \times i_{n+1} \times \dots \times i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} x_{i_1 i_2 \dots i_N} b_{j i_n}. \quad (2.6)$$

Seguindo a notação do produto modo- n , em [16] são introduzidos dois operadores multidimensionais que são eficientes formas de representações de multiplicação multi modal, conforme as definições a seguir:

Definição 6 (Operador Tucker) Dado um conjunto de matrizes $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n \times J_n}$ com $n = 1, \dots, N$ e $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_N}$, o operador Tucker é definido como

$$[\mathcal{Y}; \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}] \equiv \mathcal{Y} \times_1 \mathbf{A}^{(1)} \times_2 \mathbf{A}^{(2)} \dots \times_N \mathbf{A}^{(N)}. \quad (2.7)$$

Definição 7 (Operador de Kruskal) O operador de Kruskal é um caso particular do operador Tucker, em que $\mathcal{Y} = \mathcal{I}_{R,N}$ e todas as matrizes $\mathbf{A}^{(n)}$ possuem o mesmo número de colunas. $\mathcal{I}_{R,N}$ é um tensor identidade R -dimensional de tamanho $(N \times N \times \dots \times N)$, tal que:

$$[\mathcal{I}_{R,N}]_{i_1 i_2 \dots i_R} = \begin{cases} 1, & \text{se, } i_1 = i_2 = \dots = i_R, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De forma geral, os elementos de um tensor superdiagonal não necessariamente são iguais a 1. Sendo assim, o tensor identidade pode ser visto como uma restrição de um tensor superdiagonal.

Sabe-se que a modelagem tensorial é uma boa alternativa para trabalhar com dados multidimensionais. Porém, o tratamento matemático é melhor realizado, em termos computacionais, quando se reorganiza o tensor

em estruturas matriciais, agrupando-se todos os *slices* relativos a um determinado modo do tensor [17]. Esse processo é denominado *matriciação modo- n* , de maneira que para um tensor de ordem- N há N formas matriciadas. Isso significa que não se tem perda de informação, uma vez que são exploradas todas as dimensões do arranjo multilinear. Por exemplo, um tensor de ordem três pode ser fatiado de três formas, conforme ilustrado na Figura 2.2.

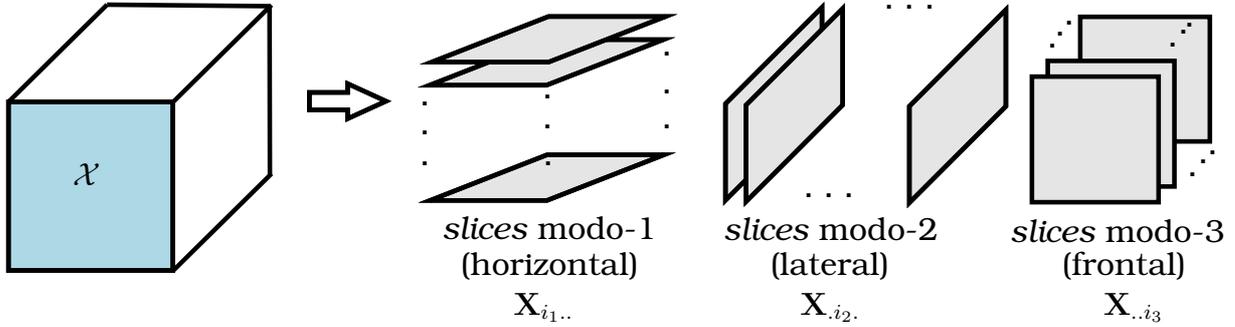


Figura 2.2: Representação de um tensor de ordem-3 fatiado em relação a cada um de seus modos.

Com base nas definições apresentadas anteriormente, a seguir são fornecidas algumas propriedades e/ou equivalências envolvendo as formas matriciadas de um tensor e sua representação sob a forma de produto modal.

Propriedade 1 (Equivalência) $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_n \mathbf{B} \Leftrightarrow [\mathcal{Y}]_{(n)} = \mathbf{B} [\mathcal{X}]_{(n)}$.

Propriedade 2 (Comutatividade) $\mathcal{X} \times_m \mathbf{A} \times_n \mathbf{B} = \mathcal{X} \times_n \mathbf{B} \times_m \mathbf{A}$, ($m \neq n$). Como consequência, se ($m = n$) tem-se:

$$\mathcal{X} \times_n \mathbf{A} \times_n \mathbf{B} = \mathcal{X} \times_n \mathbf{BA}. \quad (2.8)$$

A próxima propriedade é uma proposição do operador Tucker que relaciona a forma matriciada no modo- n com o produto de Kronecker.

Propriedade 3 Seja $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n \times \dots \times J_N}$ e $\mathbf{A}^{(n)}$ para $n = 1, \dots, N$, tal que

$$\mathcal{X} = \llbracket \mathcal{Y}; \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)} \rrbracket \Leftrightarrow \mathcal{X} = \mathcal{Y} \times_1 \mathbf{A}^{(1)} \times_2 \mathbf{A}^{(2)} \dots \times_N \mathbf{A}^{(N)}. \quad (2.9)$$

Então, para algum n tem-se

$$[\mathcal{X}]_{(n)} = \mathbf{A}^{(n)} [\mathcal{Y}]_{(n)} (\mathbf{A}^{(N)} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}^{(n+1)} \otimes \mathbf{A}^{(n-1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}^{(1)})^T. \quad (2.10)$$

De maneira análoga à propriedade (3), o operador de Kruskal estabelece que

$$[\mathcal{X}]_{(n)} = \mathbf{A}^{(n)} (\mathbf{A}^{(N)} \odot \dots \odot \mathbf{A}^{(n+1)} \odot \mathbf{A}^{(n-1)} \odot \dots \odot \mathbf{A}^{(1)})^T. \quad (2.11)$$

O produto modo- n permite expressar o efeito de uma mudança de base no tensor \mathcal{X} [18]. Essa notação facilita a analogia entre decomposições matriciais e tensoriais [15].

2.2 Decomposições Tensoriais

Segundo Kolda [19] e Cichocki [14] a ideia de decomposição tensorial foi iniciada em 1927 com Hitchcock [20] e desenvolvida posteriormente por Cattell [21] e Tucker [22] em 1944 e 1966, respectivamente. Porém, esses conceitos tiveram maior atenção na literatura *Psychometrika* com o modelo desenvolvido por Carroll & Chang [23], denominado CANDECOMP (*Canonical Decomposition*) e com Harshman [11], que de forma independente propôs um modelo semelhante ao proposto por [23], denominado PARAFAC.

As propriedades de unicidade das decomposições tensoriais, as quais nem sempre são observadas nas decomposições matriciais [19], são de extrema importância em aplicações que objetivam determinar conjuntos de dados que não permitem dualidade. Nesta dissertação, por exemplo, deseja-se realizar a estimação de canal e decodificação do sinal transmitido em um sistema de comunicação sem fio. Note que, nesse e em diversos outros problemas em processamento de sinais, em que é possível utilizar uma abordagem tensorial, a unicidade se faz necessária. Dentre os modelos tensoriais existentes, o mais simples que possui seus critérios de unicidade bem definidos é o modelo PARAFAC [11], [23].

2.2.1 PARAFAC

A decomposição PARAFAC de um tensor de ordem superior é uma poderosa ferramenta em álgebra multilinear e é cada vez mais frequente em diversas áreas do conhecimento [24], [25]. Seu avanço está diretamente associado, primeiramente, a semelhança observada com modelos físicos e segundo, a sua propriedade intrínseca de unicidade [26], muitas vezes requerida em diversas aplicações, por exemplo em problemas de processamento de sinais, área na qual o modelo PARAFAC tem sido explorado constantemente.

Para facilitar a compreensão, as ilustrações são baseadas em tensores de terceira ordem, seguindo o que é apresentado em diversas literaturas, [19], [14], [15], [27]. Nessa perspectiva, decomposição PARAFAC significa que um conjunto de dados representado por um tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ pode ser equivalentemente escrito como uma soma de tensores de *rank*-1, conforme ilustrado na Figura 2.3, cuja forma escalar é dada a seguir:

$$x_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{r=1}^R a_{i_1 r} b_{i_2 r} c_{i_3 r} \quad (2.12)$$

em que, $a_{i_1 r} = [\mathbf{A}]_{i_1 r}$, $b_{i_2 r} = [\mathbf{B}]_{i_2 r}$ e $c_{i_3 r} = [\mathbf{C}]_{i_3 r}$ são as entradas das chamadas matrizes fatores $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times R}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{I_2 \times R}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{I_3 \times R}$, respectivamente. A quantidade de fatores R determina o número de tensores de *rank*-1 que são utilizados para reconstruir \mathcal{X} . Então, de acordo com a definição 3, R é o *rank* de \mathcal{X} . Outra notação frequentemente encontrada na literatura é baseada no produto externo, como mostrado na equação (2.13)

$$\mathcal{X} = \sum_{r=1}^R \mathbf{A}_{.r} \circ \mathbf{B}_{.r} \circ \mathbf{C}_{.r} \quad (2.13)$$

em que, $\mathbf{A}_{.r}$, $\mathbf{B}_{.r}$ e $\mathbf{C}_{.r}$ são a r -ésima coluna das respectivas matrizes fatores.

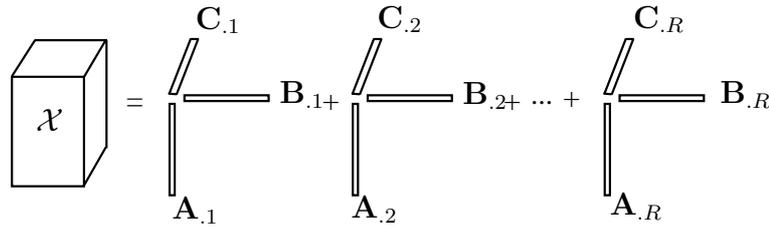


Figura 2.3: Modelo PARAFAC como soma de tensores de *rank*-1.

Alternativamente, o modelo PARAFAC pode ser denotado em termos de produto modo- n , conforme a equação (2.14)

$$\mathcal{X} = \mathcal{I}_{3,R} \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{B} \times_3 \mathbf{C}. \quad (2.14)$$

Note que (2.14) sugere a presença de um tensor núcleo identidade. Isso caracteriza o modelo PARAFAC como uma restrição do modelo TUCKER3 que será apresentado posteriormente. A Figura 2.4 ilustra a notação apresentada em (2.14), enquanto isso, na Figura 2.3 o modelo PARAFAC é visualizado como uma soma de tensores de *rank*-1.

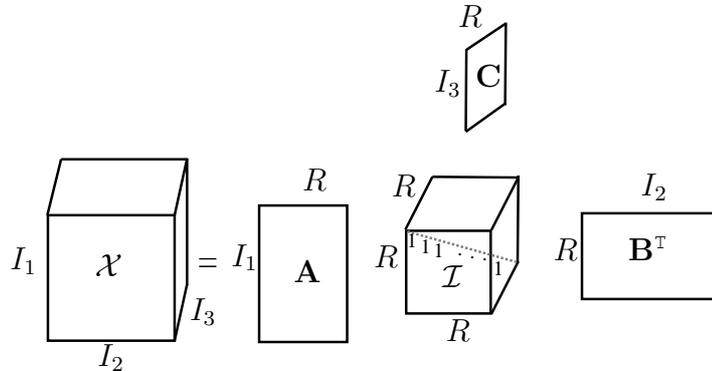


Figura 2.4: Modelo PARAFAC como restrição do modelo TUCKER3.

Como mencionado anteriormente, a reorganização de um tensor em uma estrutura matricial torna o tratamento matemático mais confortável em

termos computacionais. A concatenação dos *slices* permite representar um tensor de ordem-3 nas seguintes formas matriciadas, tal como encontrado em [17], [15]. Então seja

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i_1..} &= \mathbf{B}D_{i_1}(\mathbf{A})\mathbf{C}^\top \\ \mathbf{X}_{.i_2.} &= \mathbf{C}D_{i_2}(\mathbf{B})\mathbf{A}^\top \\ \mathbf{X}_{..i_3} &= \mathbf{A}D_{i_3}(\mathbf{C})\mathbf{B}^\top \end{aligned} \quad (2.15)$$

os *slices* que representam todas as possíveis formas de fatiar um dado tensor, em que $D_i(\mathbf{A})$ é uma matriz diagonal formada pela i -ésima linha da matriz \mathbf{A} . Existem algumas formas de organização do *slices* mostrados na equação (2.15) e uma delas segue abaixo.

$$\begin{aligned} [\mathcal{X}]_{(1)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1..} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{I_1..} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}D_1(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{B}D_{I_1}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \mathbf{C}^\top = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})\mathbf{C}^\top \\ [\mathcal{X}]_{(2)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{.1.} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{.I_2.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}D_1(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ \mathbf{C}D_{I_2}(\mathbf{B}) \end{bmatrix} \mathbf{A}^\top = (\mathbf{B} \odot \mathbf{C})\mathbf{A}^\top \\ [\mathcal{X}]_{(3)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{..1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{..I_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}D_1(\mathbf{C}) \\ \vdots \\ \mathbf{A}D_{I_3}(\mathbf{C}) \end{bmatrix} \mathbf{B}^\top = (\mathbf{C} \odot \mathbf{A})\mathbf{B}^\top \end{aligned} \quad (2.16)$$

Observe que as equações em (2.16), intuitivamente, revelam a importância do desdobramento do tensor em formas matriciadas para solucionar o problema de estimação das matrizes fatores, cujo procedimento é realizado por meio de um algoritmo de Mínimos Quadrados Alternados (ALS), do inglês *Alternating Least Squares*. Por se tratar de um algoritmo iterativo, o ALS é sensível à questão de inicialização, isso significa que uma boa inicialização pode tornar o algoritmo mais rápido e mais preciso, além de provocar uma rápida convergência para um mínimo local melhorado. Por simplicidade, utiliza-se o método de inicialização aleatório das matrizes fatores que necessitam ser inicializadas. Outra forma de organização, não menos importante, das formas matriciadas $[\mathcal{X}]_{(1)}$, $[\mathcal{X}]_{(2)}$ e $[\mathcal{X}]_{(3)}$ pode ser vista em [19].

As questões relacionadas a unicidade do modelo PARAFAC já estão bem definidas. Iniciado primeiramente por Harshman [28], [11], o estudo a respeito da unicidade do modelo foi ampliado por Kruskal [29]. O autor estabeleceu uma condição suficiente para o critério de unicidade. Porém, a condição apresentada por ele era limitada a tensores formados por elementos reais. Apenas mais tarde, cerca de duas décadas, Sidiropoulos [30] *et al* aprimorou

os estudos de Kruskal e estendeu sua condição de unicidade para tensores com valores complexos.

Antes de apresentar a condição dada por Kruskal é importante definir o k -rank (“Kruskal-rank”) de uma dada matriz A . Denotado por k_A , o Kruskal-rank de A é definido por:

Definição 8 *Seja $A \in \mathbb{C}^{I_1 \times R}$, o k_A de A é o menor valor de k para o qual todo conjunto formado por k colunas de A é linearmente independente. Isso implica que*

$$k_A \leq r_A \leq \min(I_1, R) \quad (2.17)$$

em que r_A é o rank de A . Se,

$$k_A + k_B + k_C \geq 2R + 2 \quad (2.18)$$

então, as matrizes fatores A , B e C são únicas a menos de um fator de escala e uma ambiguidade de permutação, de modo que existem matrizes \tilde{A} , \tilde{B} e \tilde{C} relacionadas com A , B e C por

$$\tilde{A} = A\Pi\Delta_1, \quad \tilde{B} = B\Pi\Delta_2, \quad \tilde{C} = C\Pi\Delta_3 \quad (2.19)$$

em que Π é uma matriz de permutação e os Δ_i são matrizes diagonais que satisfazem a relação

$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3 = I_Q.$$

A unicidade explanada significa que, se houver uma ambiguidade de rotação nas matrizes fatores não será possível reconstruir o tensor de dados, diferentemente do que ocorre nas decomposições matriciais. Além disso, as condições identificabilidade do modelo no sentido dos mínimos quadrados devem ser satisfeitas, para que se tenha uma solução única para o problema de mínimos quadrados. Em relação ao modelo tensorial PARAFAC, os critérios de identificabilidade podem ser estabelecidos a partir das equações em (2.16), pois a partir delas obtêm-se as funções custos utilizadas no ALS-PARAFAC. Então, assumindo que $A \in \mathbb{C}^{I_1 \times R}$, $B \in \mathbb{C}^{I_2 \times R}$ e $C \in \mathbb{C}^{I_3 \times R}$ são matrizes rank coluna completo tem-se pelo teorema de Khatri-Rao que $(A \odot B) \in \mathbb{C}^{I_1 I_2 \times R}$, $(B \odot C) \in \mathbb{C}^{I_2 I_3 \times R}$ e $(C \odot A) \in \mathbb{C}^{I_1 I_3 \times R}$, também, são rank coluna completo, dessa forma tem-se que: $I_1 I_2 \geq R$, $I_2 I_3 \geq R$ e $I_1 I_3 \geq R$ são os critérios de identificabilidade à serem atendidos para a identificação das matrizes C , A e B respectivamente.

O algoritmo de estimação ALS é comumente empregado para estimar as matrizes fatores em uma decomposição PARAFAC, [31], [27]. Essa estimação

é geralmente realizada por meio da minimização da seguinte função custo:

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \left\| \mathcal{Y} - \sum_{r=1}^R \mathbf{A}_{\cdot p} \circ \mathbf{B}_{\cdot p} \circ \mathbf{C}_{\cdot p} \right\|_F^2 . \quad (2.20)$$

Dessa forma, baseado nas formas matriciadas descritas em (2.16), o algoritmo pode ser sumarizado da seguinte forma:

Algoritmo ALS-PARAFAC

1. Defina $i = 0$;
Inicialize aleatoriamente $\hat{\mathbf{B}}_{(i=0)}$ e $\hat{\mathbf{C}}_{(i=0)}$;
2. $i = i + 1$;
3. A partir de $[\mathcal{X}]_{(2)}$ e usando $\hat{\mathbf{B}}_{(i-1)}$ e $\hat{\mathbf{C}}_{(i-1)}$, estime \mathbf{A} solucionando o seguinte problema LS:

$$\hat{\mathbf{A}}_{(i)} = \arg \min_{\mathbf{A}} \left\| [\mathcal{X}]_{(2)} - (\mathbf{B}_{(i-1)} \odot \mathbf{C}_{(i-1)}) \mathbf{A}^T \right\|_F^2,$$
 cuja solução é dada por:

$$\hat{\mathbf{A}}_{(i)}^T = (\hat{\mathbf{B}}_{(i-1)} \odot \hat{\mathbf{C}}_{(i-1)})^\dagger [\mathcal{X}]_{(2)}$$
4. A partir de $[\mathcal{X}]_{(3)}$ e usando $\hat{\mathbf{A}}_{(i)}$ e $\hat{\mathbf{C}}_{(i-1)}$, estime \mathbf{B} solucionando o seguinte problema LS:

$$\hat{\mathbf{B}}_{(i)} = \arg \min_{\mathbf{B}} \left\| [\mathcal{X}]_{(3)} - (\mathbf{C}_{(i-1)} \odot \mathbf{A}_{(i)}) \mathbf{B}^T \right\|_F^2,$$
 cuja solução é dada por:

$$\hat{\mathbf{B}}_{(i)}^T = (\hat{\mathbf{C}}_{(i-1)} \odot \hat{\mathbf{A}}_{(i)})^\dagger [\mathcal{X}]_{(3)}$$
5. A partir de $[\mathcal{X}]_{(1)}$ e usando $\hat{\mathbf{A}}_{(i)}$ e $\hat{\mathbf{B}}_{(i)}$, estime \mathbf{C} solucionando o seguinte problema LS:

$$\hat{\mathbf{C}}_{(i)} = \arg \min_{\mathbf{C}} \left\| [\mathcal{X}]_{(1)} - (\mathbf{A}_{(i)} \odot \mathbf{B}_{(i)}) \mathbf{C}^T \right\|_F^2,$$
 cuja solução é dada por:

$$\hat{\mathbf{C}}_{(i)}^T = (\hat{\mathbf{A}}_{(i)} \odot \hat{\mathbf{B}}_{(i)})^\dagger [\mathcal{X}]_{(1)}$$
6. Repita os passos 2-4 até o algoritmo atingir a convergência.

É dito que o algoritmo convergiu, se $\|e(i) - e(i-1)\| \leq \epsilon$, em que ϵ é o erro aceitável e $e(i)$ é o erro na i -ésima iteração. Esse erro pode ser definido como:

$$e(i) = \left\| [\mathcal{X}]_{(1)} - (\mathbf{A}_{(i)} \odot \mathbf{B}_{(i)}) \mathbf{C}_{(i)}^T \right\|_F .$$

De maneira geral, o ALS possui os passos do algoritmo descrito acima, porém em algumas literaturas a estrutura das equações de estimação das

etapas 3-5 podem aparecer com leves modificações. Isso se deve ao fato de existir diferentes formas de concatenar os *slices* ao se desdobrar um tensor. Entretanto, a essência do algoritmo não é alterada.

A próxima decomposição tensorial a ser explorada é denominada PARAFAC2. Diferente do modelo PARAFAC, esse modelo se caracteriza por apresentar duas de suas matrizes fatores variando no mesmo instante em função de uma mesma variável, entre outras características próprias.

2.2.2 PARAFAC2

É notável que o modelo PARAFAC se assemelha a diversas situações problemas que envolvem análises de dados multidimensionais. Porém, muitos problemas físicos não podem ser modelados em uma estrutura tensorial regular como é proposto pelo modelo PARAFAC. Introduzido por [32], o modelo PARAFAC2 tem sido a solução para casos em que o tensor pode ser construído de maneira irregular, conforme mostrado na Figura 2.5.

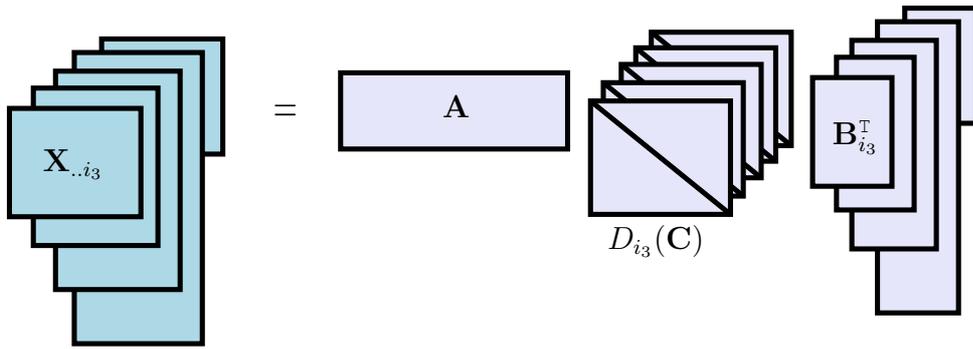


Figura 2.5: Modelo Tensorial PARAFAC2.

Observe na Figura 2.5 que a irregularidade do tensor ocorre devido a anormalidade de uma das matrizes fatores, em que é mantida a mesma quantidade de colunas, mas com diferentes números de linhas (a situação contrária também pode ocorrer). Além disso, outra característica do PARAFAC2 que pode ser observada é a variação concomitante de duas das matrizes fatores, em que uma delas é o bloco responsável pela irregularidade do tensor. Em termos matriciais o i_3 -ésimo *slice* frontal de um tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ é dado por:

$$\mathbf{X}_{..i_3} = \mathbf{A} \mathbf{D}_{i_3}(\mathbf{C}) \mathbf{B}_{i_3}^T. \quad (2.21)$$

É importante citar que o modelo PARAFAC2 também pode apresentar uma estrutura regular, mas mantém a variação simultânea de duas das matrizes fatores. Portanto, PARAFAC2 está bem relacionado ao modelo PARAFAC [33], [34], [19]. Sendo considerado por [19] como uma variação do PARAFAC e não como uma decomposição tensorial propriamente dita.

Embora seja um modelo de visíveis vantagens, a decomposição PARAFAC2 não apresenta unicidade na estimação das suas componentes quando definido somente através da equação (2.21) [34]. Então, faz-se necessário introduzir uma restrição na definição do modelo. Tal restrição requer que o produto $\mathbf{B}_{i_3}^\top \mathbf{B}_{i_3}$ seja constante para $i_3 = 1, \dots, I_3$, em que $\mathbf{B}_{i_3} = \mathbf{P}_{i_3} \mathbf{B}$ e \mathbf{P}_{i_3} é uma matriz ortogonal. Então, reescrevendo (2.21) tem-se

$$\mathbf{X}_{..i_3} = \mathbf{A} D_{i_3}(\mathbf{C})(\mathbf{P}_{i_3} \mathbf{B})^\top. \quad (2.22)$$

A restrição apresentada leva à unicidade do modelo (2.22) sobre uma ligeira restrição [35].

Nos modelos tensoriais apresentados até aqui, a análise dos dados é feita de forma independente, no sentido de que não é observado se há ou não algum tipo de relação entre os fatores. Nas próximas subseções serão abordadas as decomposições, cujos princípios se afastam um pouco daqueles mostrados até o momento.

2.2.3 TUCKER

Os modelos tensoriais TUCKER [22] são bem vistos em situações nas quais a análise é realizada sobre uma base de dados muito grande. A decomposição TUCKER consiste em fatorar um tensor de dados em um outro tensor multiplicado ou transformado por uma matriz ao longo de cada um de seus modos. Geralmente é empregada a notação produto modo- n para representar a decomposição TUCKER, como é mostrado a seguir para o caso em que se tem um tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, denotado por TUCKER3

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{B} \times_3 \mathbf{C} \quad (2.23)$$

em que, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times P}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{I_2 \times Q}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{I_3 \times R}$ são as matrizes fatores que multiplicam o tensor núcleo $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{P \times Q \times R}$. Se as dimensões de \mathcal{G} forem menores que as de \mathcal{X} , o tensor núcleo pode ser visto como uma versão comprimida do tensor de dados original facilitando, portanto, o tratamento no caso de arranjos multidimensionais de dimensões muito elevadas.

A decomposição TUCKER3 pode também ser representada pela sua forma escalar, tal que

$$x_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \sum_{r=1}^R g_{pqr} a_{i_1 p} b_{i_2 q} c_{i_3 r}. \quad (2.24)$$

Observe que, se \mathcal{G} for um tensor identidade e $P = Q = R$, o modelo TUCKER3 se reduz ao modelo PARAFAC convencional. E por isso, pode-se dizer que a decomposição PARAFAC é na realidade uma versão restrita da decomposição

TUCKER3 [19].

Assim como nos modelos anteriores, TUCKER3 pode ser representada pelas suas versões matriciadas. Retomando a equação (2.23) e aplicando a propriedade (3) tem-se:

$$\begin{aligned} [\mathcal{X}]_{(1)} &= \mathbf{A} [\mathcal{G}]_{(1)} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{B})^\top \\ [\mathcal{X}]_{(2)} &= \mathbf{B} [\mathcal{G}]_{(2)} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A})^\top \\ [\mathcal{X}]_{(3)} &= \mathbf{C} [\mathcal{G}]_{(3)} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})^\top. \end{aligned} \quad (2.25)$$

A representação matriciada mostrada em (2.25) está de acordo com [19], porém uma outra forma de reestruturação matricial pode ser encontrada em [15] e com isso poderá ser utilizado a notação que melhor se adequar ao problema. Como variação do modelo TUCKER3 tem-se os modelos TUCKER2 e TUCKER1, em que na primeira variação uma das matrizes fatores é igual a identidade, enquanto que na segunda duas delas correspondem à matriz identidade.

Em um modelo TUCKER, o tensor núcleo pode sofrer várias modificações ou transformação sem prejudicar as matrizes fatores, desde que seja aplicado a transformação inversa nessas matrizes [19], [27]. Tal liberdade faz com que, em geral, a família TUCKER não possua unicidade, ao contrário do modelo PARAFAC. Porém, sob certas restrições é possível fornecer unicidade parcial ou total ao modelo [10], [9]. Pois, devido a essa liberdade pode ser aplicado em \mathcal{G} uma transformação que leve parte de suas entradas a zero, eliminando a interação entre as componentes correspondentes. A esses tensores com várias entradas nulas é dado a denominação tensores esparsos [36].

2.2.4 PARATUCK2

É comum em determinadas ocasiões buscar o comportamento entre dois conjuntos distintos de informações, ou seja, deseja-se saber como um conjunto se comporta na presença de um outro. Introduzido por [37], PARATUCK2 é uma decomposição tensorial que incorpora a interação entre as dimensões, diferentemente do que ocorre com os modelos PARAFAC e PARAFAC2. PARATUCK2 é assim chamado por ser uma combinação dos modelos PARAFAC e TUCKER2, pois tal modelo é caracterizado por apresentar algumas das flexibilidades do modelo TUCKER e manter algumas propriedades do modelo PARAFAC. Na Figura 2.6 é ilustrado um perfil da decomposição PARATUCK2. O modelo tensorial PARATUCK2 foi proposto na literatura *psychometric*. Porém, tal estrutura tem encontrado aplicações em outras áreas como em processamento de sinais, especificamente em

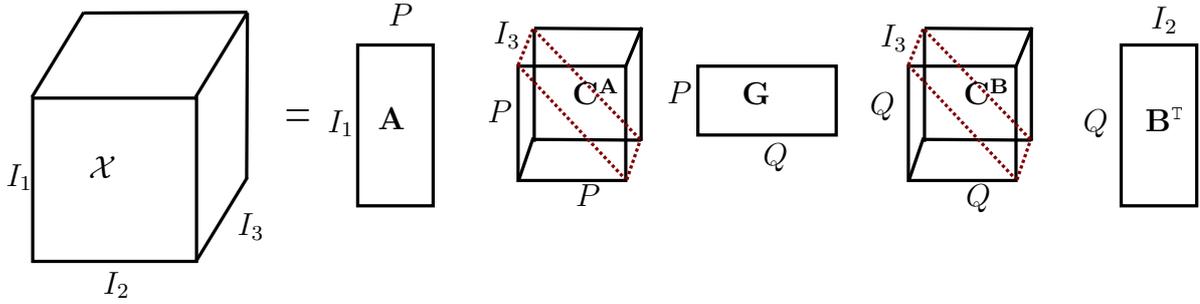


Figura 2.6: Modelo Tensorial PARATUCK2

comunicações sem fio. Nesse sentido, é importante que o modelo PARATUCK2 possua representações que sejam suficiente para realizar a modelagem física dos sistemas via álgebra tensorial. Então, dado um tensor de terceira ordem $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ sua representação escalar é dada por:

$$x_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{i_1 p} b_{i_2 q} c_{i_3 p}^{\mathbf{A}} c_{i_3 q}^{\mathbf{B}} r_{pq} \quad (2.26)$$

em que, $a_{i_1 p}$, $b_{i_2 q}$, r_{pq} , $c_{i_3 p}^{\mathbf{A}}$, $c_{i_3 q}^{\mathbf{B}}$ são as entradas das matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times P}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{I_2 \times Q}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{P \times Q}$, $\mathbf{C}^{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{I_3 \times P}$ e $\mathbf{C}^{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}^{I_3 \times Q}$, respectivamente. Assim como nas demais decomposições apresentadas nesse trabalho, é bastante comum representar o modelo PARATUCK2 sob a forma de *slices* matriciais, conforme mostrado a seguir:

$$\mathbf{X}_{..i_3} = \mathbf{A} D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{A}}) \mathbf{G} D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{B}}) \mathbf{B}^{\mathbf{T}}. \quad (2.27)$$

Na equação (2.27), $\mathbf{X}_{..i_3}$ representa o i_3 -ésimo *slice* frontal do tensor \mathcal{X} , obtido mantendo fixa a terceira dimensão de índice i_3 . \mathbf{A} e \mathbf{B} são as matrizes fatores, as quais guardam as entradas dos conjuntos de dados analisados. Já $D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{A}}) \in \mathbb{C}^{P \times P}$ e $D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{B}}) \in \mathbb{C}^{Q \times Q}$ são matrizes diagonais, cuja diagonal é formada pela i_3 -ésima linha das matrizes $\mathbf{C}^{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$, respectivamente. Essas matrizes diagonais fornecem informações acerca do grau de participação das componentes latentes (colunas) de \mathbf{A} e \mathbf{B} na terceira dimensão. Já a matriz núcleo \mathbf{R} , chamada também de matriz de interação, define o nível de interação entre as componentes de \mathbf{A} e \mathbf{B} . Em resumo, no modelo PARATUCK2 cada coluna de \mathbf{A} e \mathbf{B} são ponderadas por diferentes valores ao longo da terceira dimensão e a interação entre elas é guardada pela matriz núcleo.

Ao contrário do que ocorre na decomposição em fatores paralelos, a decomposição PARATUCK2 não apresenta um critério de unicidade bem estabelecido. Embora haja indícios da unicidade do modelo para situações em que $P \neq Q$, Hashman & Lundy [37] estabeleceram a unicidade apenas para casos em que $P = Q$. Para essa restrição a decomposição será única se o

tensor obtido a partir das matrizes diagonais forem iguais, isto é, $\mathcal{D}^A = \mathcal{D}^B$ e a matriz núcleo não possuir elementos nulos.

Bro apresenta em [27] um algoritmo de estimação baseado no método dos Mínimos Quadrados Alternados (ALS). O princípio do ALS é separar os parâmetros em vários conjuntos [27] e então, cada um desses conjuntos é estimado em relação aos outros. O processo de estimação só é cessado quando é atingida a convergência dos parâmetros para valores próximos dos dados originais. O erro permitido cabe a quem está fazendo uso do algoritmo decidir, uma vez que isso pode variar de acordo com aplicação.

Para esta dissertação, em particular, é interessante estabelecer a condição de identificabilidade, no sentido dos mínimos quadrados, das matrizes fatores A e B, pois é proposto um modelo PARATUCK2 restrito, em que é admitido o conhecimento das matrizes núcleo e diagonais. Esta questão está associada à existência e unicidade da solução de mínimos quadrados, que por vez é de extrema importância para diversas aplicações em processamento de sinais para comunicação sem fio. Nesse sentido, a matriz A é identificável quanto ao critério dos mínimos quadrados, se a matriz F descrita na equação (2.29) for *rank* linha completo, isso implica em $I_2 I_3 \geq P$. Enquanto isso, a matriz B será identificável quanto ao critério dos mínimos quadrados, se a matriz \bar{F} descrita na equação (2.36) for *rank* coluna completo, logo a condição $I_1 I_3 \geq Q$ deve ser atendida. Porém, em casos gerais nos quais deseja-se estimar todas as matrizes presentes no modelo, tem-se que Z deve ser *rank* coluna completo, ou seja, $I_1 I_2 \geq P Q I_3$. A partir da equações (2.32) e (2.39) verifica-se que $I_1 I_2 \geq P$ e $I_1 I_2 \geq Q$ são as condições necessárias de identificabilidade das matrizes C^A e C^B , respectivamente. Lembrando que a estimação dessas matrizes são realizadas linha por linha, conforme descrito no algoritmo.

2.2.4.1 ALS PARATUCK2

Considerando a equação (2.27), a função custo a ser otimizada é dada por:

$$f(\mathbf{A}, D_{i_3}(\mathbf{C}^A), \mathbf{R}, D_{i_3}(\mathbf{C}^B), \mathbf{B}) = \min_{\mathbf{A}, D_{i_3}(\mathbf{C}^A), \mathbf{R}, D_{i_3}(\mathbf{C}^B), \mathbf{B}} \sum_{i_3}^{I_3} \|\mathbf{X}_{..i_3} - \mathbf{A} D_{i_3}(\mathbf{C}^A) \mathbf{R} D_{i_3}(\mathbf{C}^B) \mathbf{B}^T\|_F^2. \quad (2.28)$$

Para estimar A em relação aos outros fatores, primeiramente, $\mathbf{X}_{..i_3}$ é reescrito como sendo

$$\mathbf{X}_{..i_3} = \mathbf{A} \mathbf{F}_{..i_3}, \quad i_3 = 1, \dots, I_3,$$

em que $\mathbf{F}_{..i_3} = D_{i_3}(\mathbf{C}^A)\mathbf{R}D_{i_3}(\mathbf{C}^B)\mathbf{B}^\top$. Agora, agrupando horizontalmente todos os $\mathbf{X}_{..i_3}$ tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{..1} & \mathbf{X}_{..2} & \dots & \mathbf{X}_{..I_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{..1} & \mathbf{F}_{..2} & \dots & \mathbf{F}_{..I_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \quad (2.29)$$

logo, a partir de (2.29) obtém-se

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{F}^\dagger. \quad (2.30)$$

A estimação de \mathbf{C}^A é realizada linha por linha. Então, para estimar a i_3 -ésima linha de \mathbf{C}^A define-se

$$\mathbf{X}_{..i_3} = \mathbf{A}D_{i_3}(\mathbf{C}^A)\tilde{\mathbf{F}}_{..i_3}^\top, \quad (2.31)$$

em que $\tilde{\mathbf{F}}_{..i_3} = \mathbf{B}D_{i_3}(\mathbf{C}^B)\mathbf{R}^\top$. Aplicando o operador $vec()$ na equação (2.31) tem-se

$$\begin{aligned} vec(\mathbf{X}_{..i_3}) &= (\tilde{\mathbf{F}}_{..i_3} \odot \mathbf{A})(\mathbf{C}_{i_3}^A)^\top \\ \mathbf{C}_{i_3}^A &= ((\tilde{\mathbf{F}}_{..i_3} \odot \mathbf{A})^\dagger vec(\mathbf{X}_{..i_3}))^\top. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Para estimar a matriz de interação \mathbf{R} , retorna-se à definição do modelo disposta na equação (2.27) e aplica-se novamente o operador $vec()$. Dessa forma, se $\mathbf{X}_{..i_3} = \mathbf{A}D_{i_3}(\mathbf{C}^A)\mathbf{R}D_{i_3}(\mathbf{C}^B)\mathbf{B}^\top$ então,

$$\begin{aligned} vec(\mathbf{X}_{..i_3}) &= vec(\mathbf{A}D_{i_3}(\mathbf{C}^A)\mathbf{R}D_{i_3}(\mathbf{C}^B)\mathbf{B}^\top) \\ vec(\mathbf{X}_{..i_3}) &= (\mathbf{B}D_{i_3}(\mathbf{C}^B) \otimes \mathbf{A}D_{i_3}(\mathbf{C}^A))vec(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Concatenando verticalmente todos os vetores obtidos em (2.33) tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} vec(\mathbf{X}_{..1}) \\ \vdots \\ vec(\mathbf{X}_{..I_3}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{B}D_1(\mathbf{C}^B) \otimes \mathbf{A}D_1(\mathbf{C}^A)) \\ \vdots \\ (\mathbf{B}D_{I_3}(\mathbf{C}^B) \otimes \mathbf{A}D_{I_3}(\mathbf{C}^A)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 I_2 \times P Q I_3}} vec(\mathbf{R}) \quad (2.34)$$

logo,

$$vec(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}^\dagger \mathbf{x}.$$

Para determinar \mathbf{C}^B e \mathbf{B} emprega-se um procedimento simétrico ao utilizado anteriormente. Dessa forma, define-se $\bar{\mathbf{F}}_{..i_3} = \mathbf{A}D_{i_3}(\mathbf{C}^A)\mathbf{R}D_{i_3}(\mathbf{C}^B)$. A partir dessa definição a equação (2.27) pode ser reescrita, tal que:

$$\mathbf{X}_{..i_3} = \bar{\mathbf{F}}_{..i_3}\mathbf{B}^\top, i_3 = 1, \dots, I_3. \quad (2.35)$$

Agora, concatenando verticalmente todos os *slices* descritos na equação (2.35) tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{..1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{..I_3} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{X}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{..1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{F}}_{..I_3} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{F}}} \mathbf{B}^T \quad (2.36)$$

logo, uma estimativa de \mathbf{B} é dada por:

$$\mathbf{B} = (\bar{\mathbf{F}}^\dagger \bar{\mathbf{X}})^T. \quad (2.37)$$

Para estimar a i_3 -ésima linha da matriz $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ define-se $\check{\mathbf{F}}_{..i_3} = \mathbf{A} D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{A}}) \mathbf{R}$, de modo que:

$$\mathbf{X}_{..i_3} = \check{\mathbf{F}} D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{B}}) \mathbf{B}^T. \quad (2.38)$$

Vetorizando a equação (2.38), obtém-se a estimativa de $\mathbf{C}_{i_3}^{\mathbf{B}}$, conforme descrito a seguir:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{X}_{..i_3}) &= (\mathbf{B} \odot \check{\mathbf{F}})(\mathbf{C}_{i_3}^{\mathbf{B}})^T \\ \mathbf{C}_{i_3}^{\mathbf{B}} &= [(\mathbf{B} \odot \check{\mathbf{F}})^\dagger \text{vec}(\mathbf{X}_{..i_3})]^T. \end{aligned} \quad (2.39)$$

A fim de melhorar a compreensão do ALS PARATUCK2, é apresentada a sumarização desse algoritmo através do pseudo-código a seguir.

Algoritmo ALS-PARATUCK2

1. Defina $i = 0$;
Inicialize aleatoriamente $\hat{\mathbf{B}}_{(i=0)}$, $\hat{\mathbf{R}}_{(i=0)}$, $\hat{\mathbf{C}}_{(i=0)}^{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathbf{C}}_{(i=0)}^{\mathbf{B}}$;
2. $i = i + 1$;
3. Construa $\mathbf{F}_{..i_3} = D_{i_3}(\hat{\mathbf{C}}_{(i-1)}^{\mathbf{A}}) \hat{\mathbf{R}}_{(i-1)} D_{i_3}(\hat{\mathbf{C}}_{(i-1)}^{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{B}}_{(i-1)}^T$;
4. Encontre uma estimativa de \mathbf{A} , minimizando a função custo (2.28) pelo critério dos mínimos quadrados:

$$\hat{\mathbf{A}}_{(i)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{..1} & \mathbf{X}_{..2} & \dots & \mathbf{X}_{..I_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{..1} & \mathbf{F}_{..2} & \dots & \mathbf{F}_{..I_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^\dagger}^\dagger$$

5. A partir de $\hat{\mathbf{B}}_{(i-1)}$, $\hat{\mathbf{R}}_{(i-1)}$, $\hat{\mathbf{A}}_{(i)}$ e $\hat{\mathbf{C}}_{(i-1)}^{\mathbf{B}}$, encontre uma estimativa para $\mathbf{C}^{\mathbf{A}}$ estimando linha por linha. (ver equação (2.32));
6. Estime a matriz \mathbf{R} , a partir de $\hat{\mathbf{B}}_{(i-1)}$, $\hat{\mathbf{A}}_{(i)}$, $\hat{\mathbf{C}}_{(i)}^{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathbf{C}}_{(i-1)}^{\mathbf{B}}$ (Ver equação (2.34));
7. Construa $\bar{\mathbf{F}}_{..i_3} = \hat{\mathbf{A}}_{(i)} D_{i_3}(\hat{\mathbf{C}}_{(i)}^{\mathbf{A}}) \hat{\mathbf{R}}_{(i)} D_{i_3}(\hat{\mathbf{C}}_{(i-1)}^{\mathbf{B}})$;

8. Encontre uma estimativa de \mathbf{B} , minimizando a função custo (2.28) pelo critério dos mínimos quadrados:

$$\hat{\mathbf{B}}_{(i)}^{\top} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{..1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{F}}_{..I_3} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{F}}^{\dagger}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{..1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{..I_3} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{X}}} . \quad (2.40)$$

9. A partir de $\hat{\mathbf{B}}_{(i)}$, $\hat{\mathbf{R}}_{(i)}$, $\hat{\mathbf{A}}_{(i)}$ e $\hat{\mathbf{C}}_{(i)}^{\mathbf{A}}$, encontre uma estimativa para $\mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ estimando linha por linha. (ver equação (2.39));
10. Repita os passos 2-9 até o algoritmo atingir a convergência.

Sendo $e(i) = \sum_{i_3=1}^{I_3} \|\mathbf{X}_{..i_3} - \hat{\mathbf{X}}_{..i_3}\|_F^2$ o erro na i -ésima iteração, é dito que o algoritmo convergiu quando o valor absoluto da diferença entre $e(i)$ e $e(i-1)$ for menor que um dado ϵ , ou seja, $|e(i) - e(i-1)| \leq \epsilon$. Dessa forma, ϵ pode assumir valores arbitrariamente pequenos. Tais valores variam de acordo com a aplicação na qual está sendo empregado o modelo PARATUCK2.

2.2.4.2 PARATUCK2 de Quarta Ordem (PARATUCK(2-4))

Em algumas aplicações, o modelo PARATUCK2 não é suficiente para modelar a situação problema [7]. Uma alternativa interessante é fazer uso de tensores de ordem superior a três. Nesse sentido, trabalhos recentes propuseram modelos tensoriais PARATUCK2 de quarta ordem para a modelagem de sistemas MIMO com receptores semi-cegos [7], [8]. Nesta dissertação, destaca-se o modelo de quarta ordem conhecido como PARATUCK(2-4) [8], o qual é ilustrado na Figura 2.7.

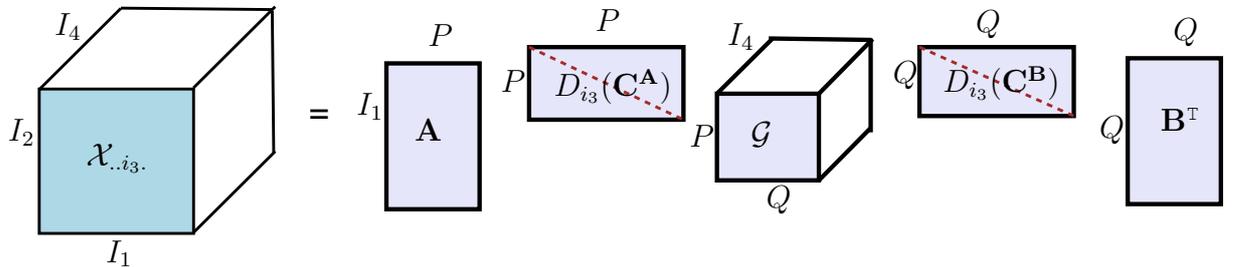


Figura 2.7: Modelo tensorial PARATUCK2 de quarta ordem

Então, dado um tensor $\mathcal{X}^{I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4}$ com entradas $x_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, em que cada i_i está associado com uma dimensão, a forma escalar de \mathcal{X} é definida pela seguinte expressão:

$$x_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{i_1 p} b_{i_2 q} c_{i_3 p}^{\mathbf{A}} c_{i_3 q}^{\mathbf{B}} g_{p q i_4} . \quad (2.41)$$

Além da notação escalar, é estabelecida para \mathcal{X} a representação em forma de *slices*, obtidos quando fixado o par de índices (i_3, i_4) . Nesse caso tem-se:

$$\mathbf{X}_{..i_3i_4} = \mathbf{A}D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{A}})\mathbf{G}_{..i_4}D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})\mathbf{B}^{\mathbf{T}}, \quad (2.42)$$

em que $\mathbf{G}_{..i_4}$ representa o i_4 -ésimo *slice* frontal do tensor núcleo \mathcal{G} . Note que a principal diferença observada entre os modelos PARATUCK2 de terceira e quarta ordem está na variação ou não da matriz núcleo. Observe que se a matriz núcleo é mantida fixa enquanto as matrizes diagonais são alteradas, é caracterizado um tensor tridimensional. Porém, se para cada valor da terceira dimensão a matriz núcleo sofrer variações, é dada origem a um tensor núcleo, neste caso, tem-se um tensor de ordem quatro. O algoritmo ALS-(PARATUCK(2-4)) é similar ao ALS-PARATUCK2, com diferença apenas na substituição da matriz núcleo por um tensor núcleo de terceira ordem.

2.3 Resumo

Este capítulo consiste de uma revisão de literatura que trata de alguns dos fundamentos de álgebra multilinear e Decomposições Tensoriais, que serão importantes para os demais capítulos desta dissertação. O capítulo foi dividido em duas etapas. Na primeira, foram apresentadas importantes definições, operações e propriedades relacionadas à álgebra dos tensores. Na segunda parte, apresentam-se as decomposições tensoriais, que para esse trabalho se configuram como as mais importantes. Busca-se mostrar as diversas representações possíveis, com destaque para as representações matriciais e escalares. A unicidade dos modelos foi outro importante fator discutido no decorrer do capítulo. Quanto à questão dos algoritmos foi dado ênfase ao ALS PARATUCK2 e ALS PARAFAC, por serem tais decomposições consideradas as mais importante no contexto desta dissertação.

No próximo capítulo o modelo PARATUCK2 será obtido a partir do modelo PARAFAC2. Em seguida esse modelo será aplicado para prover uma estimativa da matriz de canal em um sistema de comunicação sem fio com múltiplas antenas transmissoras e receptoras (MIMO), cujo esquema de transmissão é baseado em código OSTBC.

Abordagem PARATUCK2 para Sistemas MIMO-STBC Ortogonais

Nos últimos tempos, a evolução tecnológica na área das telecomunicações tem ocorrido de forma bastante acelerada. Dentro desta área destacam-se as comunicações sem fio como uma das principais responsáveis por esse avanço, em especial os sistemas móveis. O desenvolvimento e/ou aperfeiçoamento das tecnologias 3G e 4G tem ocasionado uma elevação na busca por serviços de multimídia de alta qualidade. Como consequência, é exigido que os sistemas de comunicação sem fio sejam cada vez mais robustos e que busquem um compromisso entre taxa de erro de bit e taxa de transmissão. Tal necessidade está diretamente ligada às questões como eficiência energética e principalmente à complexidade do receptor. Diante deste cenário, o emprego de múltiplas antenas no transmissor e no receptor, comumente chamado sistema MIMO, tornou-se uma excelente alternativa para atender as necessidades.

Neste capítulo, considera-se um sistema MIMO, em conjunto com um esquema de codificação espaço-temporal modificado. Tal esquema consiste na combinação de um código espaço-temporal em bloco ortogonal e um filtro formatador que mapeia o sinal codificado nas antenas transmissoras e em diversos blocos de tempo. Baseado em uma abordagem tensorial, que vem sendo utilizada por vários pesquisadores, propõe-se para esse sistema um receptor tensorial para estimação de canal e detecção de símbolos baseado no modelo PARATUCK2. Esse modelo foi introduzido em processamento de sinais por [5], [6]. O processamento no receptor é composto de duas etapas. Na primeira, utiliza-se o modelo tensorial PARATUCK2 para prover uma estimação cega do canal MIMO através de um algoritmo de mínimos quadrados alternados. Na segunda etapa, é aproveitada a ortogonalidade do

código para apresentar um decodificador linear na recuperação dos símbolos transmitidos, extraindo-se os máximos ganhos de diversidade espacial.

3.1 Sistema MIMO

Em um sistema de comunicação sem fio, o sinal de rádio no receptor é uma composição das diversas réplicas do sinal transmitido que percorrem diferentes percursos até atingir o receptor. Bastante acentuado em ambientes hostis, como em grandes cidades que apresentam uma forte adversidade para as comunicações sem fio, devido à numerosa presença de obstáculos, esse fenômeno é geralmente chamado de propagação multipercurso. A superposição das versões desse sinal podem ocorrer de forma construtiva ou destrutiva. Como consequência, o sinal transmitido poderá atingir um nível de energia tão crítico que poderá impossibilitar a correta detecção da informação enviada.

Uma alternativa para reduzir o efeito provocado pela propagação multipercurso é fazer uso de alguma técnica de diversidade [38]. Entre elas, evidenciam-se a *diversidade temporal*, *diversidade em frequência* e *diversidade espacial*. Dentre as técnicas citadas destaca-se a técnica de diversidade espacial que consiste na implantação de diversas antenas no transmissor e/ou no receptor. A Figura 3.1 ilustra um sistema MIMO. Além de minimizar os efeitos da propagação multipercurso, a utilização de diversidade espacial se justifica pela sua capacidade de oferecer ganhos de multiplexação, permitindo melhores taxas de transmissão e ganhos de diversidade, aumentando a confiabilidade do sistema em termos de taxa de erro de bit e isso sem a necessidade de modificar de forma significativa, caso seja necessário, a potência de transmissão [39], [8].

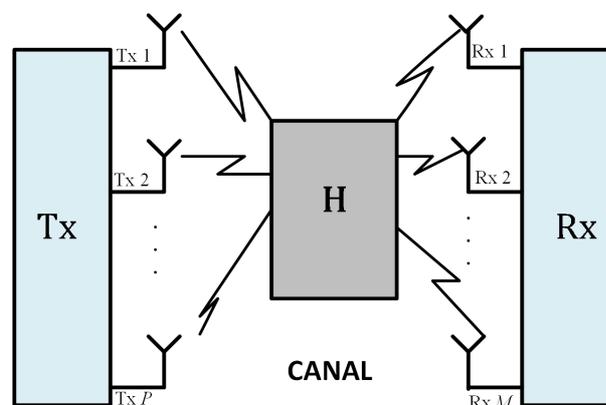


Figura 3.1: Sistema MIMO.

Para obter ganho de multiplexação, diferentes símbolos são enviados simultaneamente pelas diversas antenas transmissoras disponíveis. Já o

ganho de diversidade é alcançado utilizando todas as antenas transmissoras para enviar a mesma informação em um determinado intervalo de tempo. Isso torna a codificação e o processamento de sinal questões chaves para uma boa implementação de um sistema MIMO e o canal de comunicação como principal componente que determina a performance do sistema [40].

Considerando um sistema MIMO formado por M antenas receptoras e P antenas transmissoras, o sinal transmitido pela p -ésima antena e recebido pela m -ésima antena pode ser expresso por

$$y_m = \sum_{p=1}^P h_{mp}x_p + e_m \quad (3.1)$$

em que, h_{mp} corresponde ao coeficiente do canal entre as antenas m e p , e e_m é a componente de ruído. Os sinais podem ser organizados em estruturas matriciais tal como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (3.2)$$

em que, \mathbf{H} é chamada matriz de canal e é definida por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M1} & \dots & h_{MP} \end{bmatrix}.$$

Admitindo que são transmitidos, consecutivamente, vários vetores de dados, os sinais recebidos podem ser rearranjados tal que:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{E} \quad (3.3)$$

sendo,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \dots & \mathbf{y}_N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_N \end{bmatrix},$$

e \mathbf{E} a matriz de ruído aditivo, cujos elementos são variáveis complexas gaussianas aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média zero e variância σ_n^2 . Em sistemas de comunicação sem fio MIMO as técnicas de transmissão podem ser divididas em duas arquiteturas: Arquitetura em camadas, popularmente conhecida como **BLAST** [41] [42] e Codificação Espaço-Temporal [43]. Esses dois esquemas possuem objetivos distintos, enquanto o primeiro busca aumentar a taxa de transmissão o segundo é focado na confiabilidade do sistema, fornecendo ganho de diversidade.

Apresentada por Foschini em 1996, em uma publicação na *Bell Labs*

Technical Journal, BLAST é uma técnica de transmissão empregada em sistemas MIMO, cujo objetivo é alcançar máximo ganho de multiplexação. Uma das principais ramificações da arquitetura BLAST é o esquema V-BLAST [44] [45]. Esse é um esquema puramente de multiplexação espacial. Na Figura 3.2 é ilustrado como se comporta esse tipo de sistema na transmissão dos dados. Note que, nesse esquema um conjunto de símbolos, proveniente de uma *stream* de dados, são demultiplexados e transmitidos por meio das diversas antenas transmissoras disponíveis. Em resumo, na arquitetura V-BLAST cada antena transmissora transmite uma *substream* de forma independente das demais.

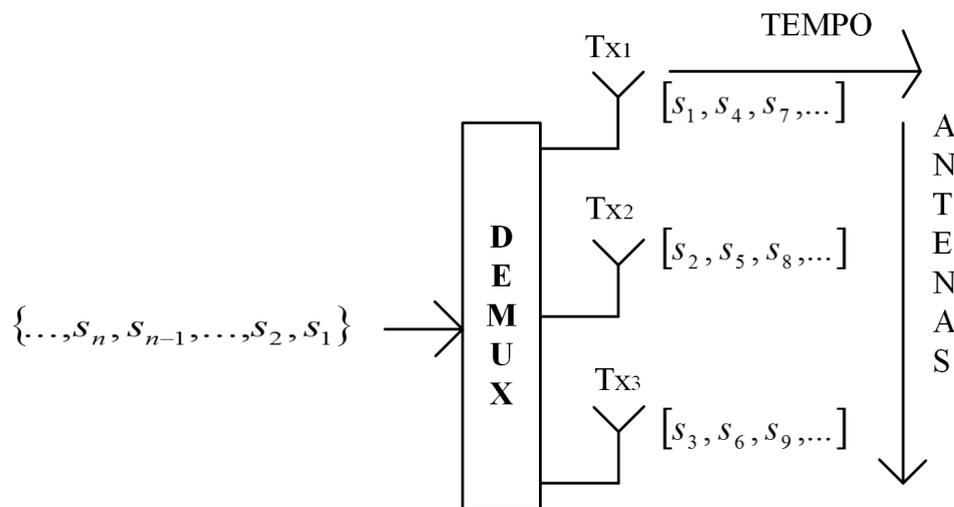


Figura 3.2: Multiplexação Espacial baseada em arquitetura V-BLAST com três antenas transmissoras.

Diversas aplicações em sistemas de comunicação sem fio, além de boas taxas de dados, requerem confiabilidade do sistema. Os esquemas de transmissão baseados em codificação espaço-tempo são fortemente empregados devido ao ganho de diversidade fornecido por essa estrutura.

3.1.1 Codificação Espaço-Temporal

Historicamente surgido para tentativas de alcançar diversidade na transmissão [46], a codificação espaço-tempo (STC) é uma das principais metodologias empregada em sistemas MIMO. Códigos de Treliça (STTC) foram os primeiros STCs a serem propostos [47]. Posteriormente, foi introduzido por Alamouti [3] uma estrutura de codificação baseada em blocos, denominada Codificação Espaço-Tempo em Bloco (STBC), muito embora essa denominação tenha sido dada por [2] quando realizou a generalização do esquema de Alamouti.

A proposta de Alamouti consistia em transferir a diversidade espacial comumente empregada no receptor para o transmissor. Seu esquema

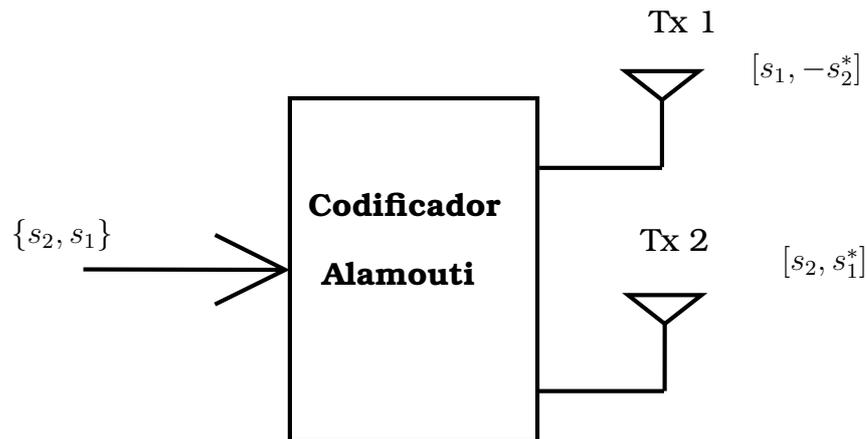


Figura 3.3: Esquema de Alamouti.

apresentava baixa complexidade computacional e não requeria o aumento da largura de banda. Na Figura 3.3 está caracterizado o modelo de transmissão proposto por [3]. Note que o modelo sugerido em [3] apresenta máximo ganho de diversidade e ganho de multiplexação igual a 1. Esse é o esquema propulsor dos códigos STBCs, que pode ser visto como uma forma híbrida de transmissão.

Ao longo do tempo diversos trabalhos direcionados ao desempenho de sistemas sem fio, que empregam codificação espaço temporal, têm sido apresentados. Devido à enorme quantidade de trabalhos relacionados com esse campo de estudo são citadas algumas contribuições que julga-se importante, principalmente os estudos pioneiros, como é o caso de [3] ao introduzir os estudos sobre STBC em 1998, conforme mencionado anteriormente. No ano seguinte [2] publica uma trabalho que generaliza [3]. Porém, tanto o trabalho de Alamouti como de Tarokh *et. al.* são destinados a modelos STBCs ortogonais. Isso deixou espaço para que novos modelos de códigos STBCs fossem sugeridos. Jafarkhani, em 2001, apresentou uma proposta de transmissão baseada em modelos STBCs quase ortogonais (QOSTBC) com meia diversidade [48]. Proposto por [49], *Linear Dispersion Codes* é uma outra classe de códigos que generaliza a ideia dos códigos espaço-temporais em blocos ortogonais e quase ortogonais [50]. Os esquemas STCs apresentados até aqui requerem uma detecção coerente, ou seja, o conhecimento do canal no receptor. Porém, uma detecção não coerente é possível graças aos códigos espaço-temporais unitários e aos códigos espaço-temporais diferenciais. Com o passar dos anos, pesquisadores vêm adequando os esquemas aqui citados e os empregando em diversos cenários de comunicação sem fio [51], [52], [53]. Uma maior riqueza de detalhes acerca da codificação para sistemas MIMO e códigos espaço temporais pode

ser encontrada em [50], [43].

A álgebra linear era a abordagem comumente adotada no tratamento dos problemas observados em sistemas MIMO, porém na primeira década dos anos 2000 e início da segunda, foi apresentada à comunidade científica uma nova metodologia para solucionar problemas em sistema MIMO baseado em codificação espaço-tempo ou espaço-tempo-frequência. Tal abordagem é baseada em álgebra multilinear, mais especificamente em decomposições tensoriais [54], [55], [56] [57], [4]. O interesse deste trabalho está, particularmente, em esquemas STBCs. Neste capítulo é direcionada atenção aos códigos espaço-temporais em blocos ortogonais (OSTBC).

3.1.2 Codificação Espaço-Tempo em Blocos Ortogonais (OSTBC)

STBC é um tipo de código espaço-tempo que explora a diversidade oferecida por sistemas MIMO [58]. De maneira geral, STBC pode ser tratado como uma forma de mapear um conjunto de N_s símbolos em uma matriz \mathbf{U}_t [38], denominada por matriz de código STBC ou palavra código

$$\{(s_t)_1, (s_t)_2, \dots, (s_t)_{N_s}\} \rightarrow \mathbf{U}_t.$$

Neste trabalho adota-se os esquemas STBCs lineares, em que a matriz de código \mathbf{U}_t é construída conforme abaixo [38]:

$$\mathbf{U}_t = \sum_{n=1}^{N_s} (\text{Re}\{(s_t)_n\} \mathbf{A}_n + \text{Im}\{(s_t)_n\} \mathbf{B}_n) \quad (3.4)$$

em que, $\{\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n\}$ é um conjunto fixo de matriz. OSTBC, são casos particulares nos quais a matriz de código STBC é ortogonal, isso significa que a partir da equação (3.4) tem-se

$$\mathbf{U}_t \mathbf{U}_t^H = \left(\sum_{n=1}^{N_s} |(s_t)_n|^2 \right) \mathbf{I}. \quad (3.5)$$

OSTBCs tornam-se interessantes por serem eficientes métodos de transmissão em comunicação sem fio e fornecerem menor grau de complexidade de decodificação no receptor, quando comparado como outros esquemas [59], [60], [8].

Apesar do bom desempenho do esquema MIMO-OSTBC, o seu sucesso depende da qualidade da informação sobre o estado do canal no receptor [59]. Nesse sentido, pesquisadores têm buscado novas ferramentas para realizar estimação de canal e, conseqüentemente, a decodificação dos símbolos. Sabe-se que diversas aplicações em processamento de sinais para comunicações sem fio possuem natureza multidimensional. Explorando uma

modelagem multidimensional dos sinais, recentemente, vários trabalhos têm apresentado soluções baseadas em decomposições tensoriais para problemas de estimação de canal e detecção cega em sistemas de comunicação sem fio, em específico para a modelagem de transceptores MIMO [61], [4], [6], [54], [62].

3.2 Modelo Tensorial Para Sistemas MIMO-OSTBC

Observando a viabilidade de um sistema MIMO combinado com um esquema OSTBC, é apresentada nesta seção a proposta de um sistema que visa uma certa flexibilidade na transmissão e simplicidade na recepção. Para isso é considerado um sistema MIMO composto por P antenas transmissoras e M antenas receptoras, em que adota-se um esquema OSTBC, em específico o código de Alamouti.

O modelo de sistema sugerido é, na realidade, um esquema modificado que consiste em um código OSTBC cascadeado com um filtro formatador que realiza o mapeamento dos sinais codificados nas P antenas transmissoras e em vários blocos de tempo. Na Figura 3.4 pode ser observado que no modelo de sistema proposto, o receptor é composto de duas etapas: (I) a estimação do canal de comunicação, realizada por meio do algoritmo ALS-PARATUCK2; (II) decodificação dos símbolos explorando-se a estrutura ortogonal do código.

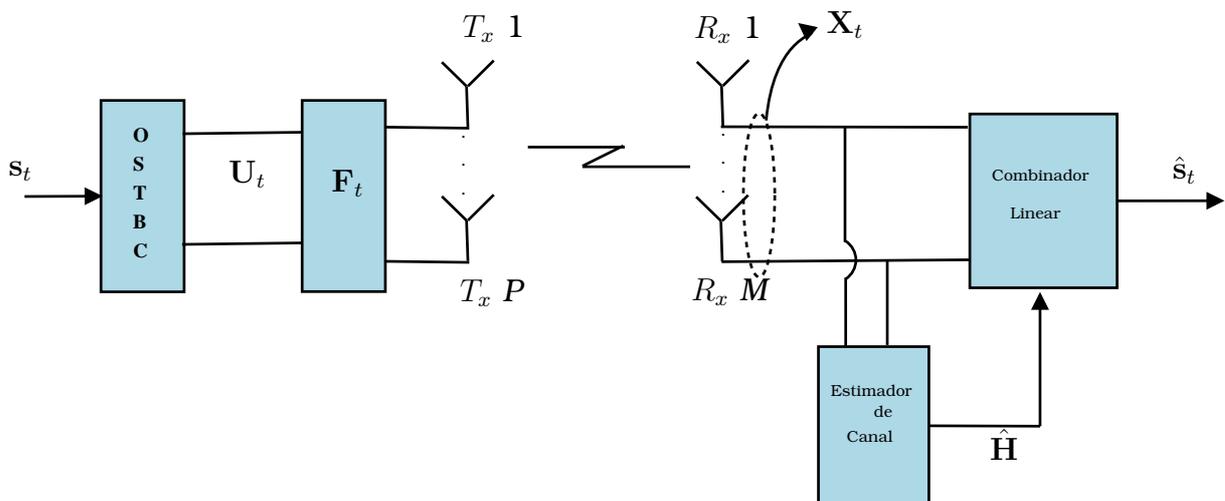


Figura 3.4: Estrutura do sistema proposto.

A utilização de esquemas STBCs modificados foi proposta em alguns trabalhos anteriores [63], [4]. Sindriopoulos *et al.* [4] faz uso de uma matriz de pré-codificação linear com o objetivo de obter ganhos de diversidade de transmissão em sistemas MIMO, cuja modelagem é baseada em um modelo PARAFAC. Sorensen *et al.* [63], também, modelou um esquema baseado em matrizes de pré-codificação, porém seu modelo de sistema corresponde a uma decomposição PARAFAC2.

Admitindo um canal com desvanecimento plano, o sinal recebido no t -ésimo bloco de tempo pode ser expresso por [63]:

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{H}\mathbf{F}_t\mathbf{U}_t \quad (3.6)$$

em que $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{M \times P}$ representa a matriz de canal, $\mathbf{F}_t \in \mathbb{C}^{P \times N}$ expressa o filtro formatador e $\mathbf{U}_t \in \mathbb{C}^{N \times N_s}$ é a matriz de código OSTBC, construída conforme a equação (3.4) sujeito à condição (3.5), exceto pela restrição de potência $\sum_{n=1}^{N_s} |(s_t)_n| = 1$, ou seja, $\mathbf{U}_t\mathbf{U}_t^H = \mathbf{I}$. N_s corresponde à varredura temporal do código, que denota o número de símbolos úteis transmitidos no t -ésimo bloco de tempo e N é a dimensão espacial do código.

O filtro formatador, \mathbf{F}_t , é formado pelo produto de uma matriz diagonal de pré-codificação ($\mathbf{\Lambda}_t \in \mathbb{C}^{P \times P}$) com a matriz de mapeamento ($\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{P \times N}$) dos sinais transmitidos nas antenas transmissoras, i.e.

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{\Lambda}_t\mathbf{C} . \quad (3.7)$$

Para este trabalho, a matriz $\mathbf{\Lambda}_t$ foi gerada aleatoriamente, assim como em [63] e a matriz \mathbf{C} foi escolhida como a seguinte matriz de Vandermonde:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & c & \dots & c^{(N-1)} \\ 1 & c^2 & \dots & c^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c^P & \dots & c^{P(N-1)} \end{bmatrix}, c = e^{j2\pi/NP} . \quad (3.8)$$

A fim de manter o perfil de potência aplicada na transmissão, é assumido que $\text{Tr}\{\mathbf{F}_t\mathbf{F}_t^H\} = P$ é a restrição de potência do filtro formatador. A estrutura da matriz \mathbf{C} em [63] é ortogonal, isto é, $\mathbf{C}\mathbf{C}^H = \mathbf{I}$. Como consequência, a matriz de mapeamento se comporta como uma matriz de compressão, considerando-se $P \leq N$. Contudo, em nosso sistema tal restrição não se faz necessária, permitindo uma diversidade de modelos para \mathbf{C} . A flexibilidade apresentada resulta da aplicação do modelo tensorial PARATUCK2. A partir dessas considerações, é possível explorar o caso de particular interesse neste trabalho em que é considerado $P > N$, situação na qual a matriz de mapeamento pode ser vista como uma matriz de expansão, em que a dimensão espacial do código é menor que a quantidade de antenas transmissoras. Isso significa que o sistema possui mais antenas para transmitir que *streams* de dados para serem transmitidas. Note que, nesse caso obtêm-se ganhos de diversidade, uma vez que a mesma *stream* de dados é enviada por mais de uma antena.

3.3 Receptor PARATUCK2

Nesta seção é formalizado o receptor cego descrito anteriormente. Em seguida será descrito o algoritmo de estimação do canal, baseado na decomposição tensorial PARATUCK2 e o processo de decodificação linear dos símbolos transmitidos. Para efeito de simplificação da notação matemática, é omitida a parcela do ruído aditivo no sinal recebido. Desse modo, combinando as equações (3.6) e (3.7) tem-se:

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{H}\Lambda_t\mathbf{C}\mathbf{U}_t. \quad (3.9)$$

A partir da equação (3.9) é definido \mathbf{Y}_t como:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{X}_t\mathbf{X}_t^H. \quad (3.10)$$

A matriz de correlação dos sinais recebidos, descrita pela equação (3.10), introduz uma simetria no modelo de sistema. Tal simetria pode ser aproveitada na modelagem tensorial, conforme apresentado a seguir. Agora, substituindo (3.9) em (3.10) tem-se

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{H}\Lambda_t\mathbf{C}\mathbf{U}_t\mathbf{U}_t^H\mathbf{C}^H\Lambda_t^H\mathbf{H}^H. \quad (3.11)$$

Sabendo que \mathbf{U}_t é a matriz de código OSTBC, sujeita à restrição de potência descrita anteriormente, a equação (3.11) se reduz a

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{H}\Lambda_t\mathbf{C}\mathbf{C}^H\Lambda_t^H\mathbf{H}^H. \quad (3.12)$$

Definindo $\mathbf{G} = \mathbf{C}\mathbf{C}^H$, (3.12) pode ser expressa como:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{H}\Lambda_t\mathbf{G}\Lambda_t^H\mathbf{H}^H. \quad (3.13)$$

Contrapondo as equações (3.13) com (2.27) é possível observar que o modelo proposto em (3.13) respeita a estrutura de organização de um modelo tensorial PARATUCK2. A partir dessa comparação é possível estabelecer as seguintes associações:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{G}, D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{A}}), D_{i_3}(\mathbf{C}^{\mathbf{B}})) &\leftrightarrow (\mathbf{H}, \mathbf{H}^*, \mathbf{G}, \Lambda_t, \Lambda_t^*) \\ (I_1, I_2, I_3, P, Q) &\leftrightarrow (M, M, T, P, P). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Essas associações revelam que a matriz \mathbf{Y}_t constitui o t -ésimo *slice* frontal

do tensor $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{M \times M \times T}$, implicando em $\mathbf{Y}_t = \mathbf{Y}_{..t}$ cuja forma escalar é dada por:

$$y_{mmt} = \sum_{p_1=1}^P \sum_{p_2=1}^P h_{mp_1} h_{mp_2}^* \psi_{tp_1}^{\mathbf{H}} \psi_{tp_2}^{\mathbf{H}*} g_{p_1 p_2} . \quad (3.15)$$

Analisando o caso em que \mathbf{C} é ortogonal como requerido em [63] tem-se $\mathbf{G} = \mathbf{I}_P$, o que levaria ao modelo PARAFAC padrão [37] representado a seguir:

$$\mathbf{Y}_{..t} = \mathbf{H} \bar{\mathbf{\Lambda}}_t \mathbf{H}^*, \quad \text{em que } \bar{\mathbf{\Lambda}}_t = \mathbf{\Lambda}_t \mathbf{\Lambda}_t^{\mathbf{H}} . \quad (3.16)$$

Note que, em decorrência do modelo PARATUCK2 não é necessário impor essas restrições de ortogonalidade. Isso reflete em um maior grau de liberdade para a construção da matriz \mathbf{C} . Com isso, até mesmo nos casos em que a matriz de mapeamento obedece às características de ortogonalidade podemos tratar essa situação como um caso particular, em que a matriz núcleo do modelo tensorial PARATUCK2 é igual a matriz identidade. Até o momento não é objetivo deste trabalho tratar da otimização do filtro formatador. Note que, a otimização do filtro formatador, sob a ótica do ganho de diversidade e de codificação, implicaria em otimizar \mathbf{C} e $\mathbf{\Lambda}_t$, para P e N fixos, de acordo com a modulação utilizada.

3.3.1 Estimação do Canal via ALS-PARATUCK2

O modelo proposto em (3.13) caracteriza a decomposição tensorial PARATUCK2. Então, assumindo que o filtro formatador é conhecido no receptor, a estimação da matriz de canal é realizada via ALS-PARATUCK2, um algoritmo iterativo de mínimos quadrados alternados descrito no Capítulo 2. O conhecimento do filtro formatador implica em uma redução nas etapas de execução do ALS-PARATUCK2. Isso tem um impacto bastante positivo, pois reduz os custos de processamento requerido pelo receptor.

Sendo (3.13) a representação do t -ésimo *slice* frontal do tensor $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{M \times M \times T}$, o objetivo é encontrar a solução de mínimos quadrados que minimiza a seguinte função custo:

$$f(\mathbf{H}, \mathbf{H}^*) = \min_{\mathbf{H}, \mathbf{H}^*} \sum_{t=1}^T \|\tilde{\mathbf{Y}}_{..t} - \mathbf{H} \mathbf{\Lambda}_t \mathbf{G} \mathbf{\Lambda}_t^* (\mathbf{H}^*)^{\mathbf{T}}\|_F^2 . \quad (3.17)$$

Em que, $\tilde{\mathbf{Y}}_{..t} = \mathbf{Y}_{..t} + \mathbf{V}_{..t}$ é a versão ruidosa de $\mathbf{Y}_{..t}$, cujo ruído foi definido no início desse capítulo. A estimação das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{H}^* é realizada alternadamente, de modo que, a i -ésima estimação de uma delas depende da $(i-1)$ -ésima estimação da outra. Esse processo continua até a convergência do algoritmo, alcançada quando $f(\mathbf{H}, \mathbf{H}^*)$ em (3.17) atinge um erro aceitável.

A seguir serão apresentadas as etapas de estimação do canal.

Algoritmo ALS-PARATUCK2

1. Defina $i = 0$;

Inicialize aleatoriamente $\hat{\mathbf{H}}_{(i=0)}$;

2. Construa $\Omega_{t(i-1)} = \Lambda_t \mathbf{G} \Lambda_t^* (\hat{\mathbf{H}}_{(i-1)}^*)^\top$, $t = 1, \dots, T$;

3. Atualize $\hat{\mathbf{H}}$ minimizando a função custo (3.17) pelo critério dos mínimos quadrados:

$$\hat{\mathbf{H}}_{(i)} = \underbrace{\left[\tilde{\mathbf{Y}}_{..1} \tilde{\mathbf{Y}}_{..2} \dots \tilde{\mathbf{Y}}_{..T} \right]}_{\mathbf{Y}} \underbrace{\left[\Omega_{1(i-1)}, \dots, \Omega_{T(i-1)} \right]}_{\Omega^\dagger}^\dagger$$

4. Construa $\Gamma_{t(i)} = \hat{\mathbf{H}}_{(i)} \Lambda_t \mathbf{G} \Lambda_t^*$, $t = 1, \dots, T$;

5. Atualize $\hat{\mathbf{H}}^*$ minimizando a função custo (3.17) pelo critério dos mínimos quadrados:

$$(\hat{\mathbf{H}}_{(i)}^*)^\top = \begin{bmatrix} \Gamma_{1(i)} \\ \Gamma_{2(i)} \\ \vdots \\ \Gamma_{T(i)} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_{..1} \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{..2} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{..T} \end{bmatrix}$$

6. Repita os passos 2-5 até convergir.

Quando a diferença entre o tensor de sinal recebido e o tensor de sinal estimado não sofre uma variação muito brusca de uma iteração para outra, é dito que a convergência foi alcançada. O cálculo do erro na i -ésima iteração é dado por: $e(i) = \sum_{t=1}^T \|\tilde{\mathbf{Y}}_{..t} - \hat{\mathbf{Y}}_{..t}\|_F^2$. Neste trabalho, quando $|e(i) - e(i-1)| \leq 10^{-6}$, é dito que o algoritmo convergiu.

A identificabilidade do modelo PARATUCK2, para o modelo de sinal em questão, possui um alto grau de relevância, uma vez que o interesse está na estimação cega do canal. A identificabilidade está ligada a garantia da existência de uma única solução para a função custo descrita em (3.17). Especificamente, a identificabilidade no sentido dos mínimos quadrados está associada à recuperação de \mathbf{H} na terceira etapa do algoritmo descrito acima. De acordo com o critério estabelecido no Capítulo 2, a condição necessária para a identificabilidade, nesse contexto, é que as matrizes Ω e Γ sejam *rank* linha completo e *rank* coluna completo, respectivamente. Por se tratar

de um modelo PARATUCK2 simétrico, a condição necessária que satisfaz o critério de identificabilidade para Ω e Γ é $TM \geq P$. Isso significa que o produto entre a quantidade de antenas receptoras pelo tamanho do bloco transmitido deve ser maior ou igual à quantidade de antenas transmissoras. A condição única de identificabilidade, neste caso especificamente, deve-se à simetria apresentada pelo modelo de sistema e o conhecimento do filtro formatador. Em casos mais gerais, em que não se disponha de modelos simétricos, pode-se estabelecer os diferentes critérios de identificabilidade de acordo com as condições estabelecidas no capítulo 2.

3.3.2 Decodificação

A segunda parte do processo de recepção é a decodificação dos símbolos que estão codificados segundo o esquema de Alamouti [3]. Então, após a estimação final da matriz de canal via ALS-PARATUCK2, (3.9) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{W}_t \mathbf{U}_t \quad (3.18)$$

em que,

$$\mathbf{W}_t = \hat{\mathbf{H}} \mathbf{\Lambda}_t \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times N}. \quad (3.19)$$

Considerando que é feito uso do esquema de Alamouti, a dimensão espacial do código possui valor igual a dois. Então, é possível expandir (3.18) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ \vdots & \vdots \\ w_{M1} & w_{M2} \end{bmatrix}_{M \times 2} \begin{bmatrix} s_1(t) & -s_2^*(t) \\ s_2(t) & s_1^*(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\ &= \begin{bmatrix} w_{11}s_1(t) + w_{12}s_2(t) & -w_{11}s_2^*(t) + w_{12}s_1^*(t) \\ w_{21}s_1(t) + w_{22}s_2(t) & -w_{21}s_2^*(t) + w_{22}s_1^*(t) \\ \vdots & \vdots \\ w_{M1}s_1(t) + w_{M2}s_2(t) & -w_{M1}s_2^*(t) + w_{M2}s_1^*(t) \end{bmatrix}_{M \times 2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Tomando $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{X}_{t(.1)}$ e $\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{X}_{t(.2)}$, define-se \mathbf{v}_t como:

$$\mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{v}_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}s_1(t) + w_{12}s_2(t) \\ w_{21}s_1(t) + w_{22}s_2(t) \\ \vdots \\ w_{M1}s_1(t) + w_{M2}s_2(t) \\ -w_{11}^*s_2(t) + w_{12}^*s_1(t) \\ -w_{21}^*s_2(t) + w_{22}^*s_1(t) \\ \vdots \\ -w_{M1}^*s_2(t) + w_{M2}^*s_1(t) \end{bmatrix}_{2M \times 1}. \quad (3.21)$$

Reescrevendo (3.21) tem-se:

$$\mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ \vdots & \vdots \\ w_{M1} & w_{M2} \\ w_{12}^* & -w_{11}^* \\ w_{22}^* & -w_{21}^* \\ \vdots & \vdots \\ w_{M2}^* & -w_{M1}^* \end{bmatrix}_{2M \times 2} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 1}. \quad (3.22)$$

Pode-se expressar (3.22) simplificadaamente como:

$$\mathbf{v}_t = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_{t(.1)} & \mathbf{w}_{t(.2)} \\ \mathbf{w}_{t(.2)}^* & -\mathbf{w}_{t(.1)}^* \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{W}}_t} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_t}. \quad (3.23)$$

Note que,

$$\overline{\mathbf{W}}_t^H \overline{\mathbf{W}}_t = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |w_{mn}|^2 \mathbf{I}.$$

Logo, a estimação dos símbolos transmitidos é dada por:

$$\hat{\mathbf{s}}_t = \left(\overline{\mathbf{W}}_t^H \overline{\mathbf{W}}_t \right)^{-1} \overline{\mathbf{W}}_t^H \mathbf{v}_t. \quad (3.24)$$

A metodologia de estimação empregada busca tirar proveito da ortogonalidade do código, porém a extração dos símbolos pode ser realizada diretamente a partir da equação (3.18) em que, a matriz de código pode ser estimada fazendo:

$$\hat{\mathbf{U}}_t = \mathbf{W}_t^\dagger \mathbf{X}_t. \quad (3.25)$$

Essa metodologia é denominada por *Método direto*. Esse método será utilizado para efeito de comparação a fim de corroborar com as vantagens obtidas ao explorar a ortogonalidade do código.

3.4 Avaliação de Desempenho

A fim de analisar a qualidade e a confiabilidade do sistema, é apresentado nesta seção alguns resultados que dizem respeito ao desempenho do sistema, em específico do receptor PARATUCK2 proposto. Para efeitos de comparação adota-se diferentes valores de M e P , além disso considera-se um bloco de comprimento $T = 15$. Por tratar-se do código de Alamouti, isso significa que são enviados 30 símbolos úteis, em que o canal é assumido quase estático durante a transmissão dessa sequência de dados. Os parâmetros avaliados são: (I) Erro Médio Quadrático Normalizado (NMSE). Esse responderá o quão eficiente é a estimação do canal. (II) Taxa de Erro de Bit, que fornecerá informações sobre o desempenho do sistema na estimação dos símbolos. Ambos os parâmetros são medidos para diferentes valores de SNR definido por: $\text{SNR} = \|\mathcal{X}_{(3)}\|_F^2 / \|\mathcal{V}_{(3)}\|_F^2$ para Todos os resultados expostos refletem o comportamento médio obtido a partir de 1000 simulações de Monte Carlo considerando vários cenários, em que é variada a quantidade de antenas transmissoras e/ou receptoras.

Na Figura 3.5 é mostrada a eficiência da estimação do canal em termos de NMSE, definida por:

$$\text{NMSE} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\|\hat{\mathbf{H}}(l) - \mathbf{H}\|_F^2}{\|\mathbf{H}\|_F^2} \quad (3.26)$$

sendo $\hat{\mathbf{H}}(l)$ a estimação de \mathbf{H} na l -ésima simulação de Monte Carlo e L indica a quantidade dessa simulações. Nessa figura é mostrada a curva de NMSE para várias situações envolvendo a variação da quantidade de antenas transmissoras e receptoras. Comparando as curvas, verifica-se que há uma semelhança no desempenho dos sistema, porém nota-se uma razoável diferença entre os cenários $M = P = 2$ e $M = P = 4$. Apesar de ambos apresentarem bons resultados, a primeira situação apresentou melhor comportamento.

Na Figura 3.6 é analisada algumas configurações de M e P para que possa ter uma ideia da confiabilidade do sistema em termo de taxa de erro de bit. É selecionado os dois casos destacados anteriormente e acrescentado o cenário $M = 2$ e $P = 4$. Note que, assim como na Figura 3.5, os cenários destacados apresentam desempenhos bem distintos. A situação adicional que foi introduzida apresentou um comportamento intermediário, posicionando a

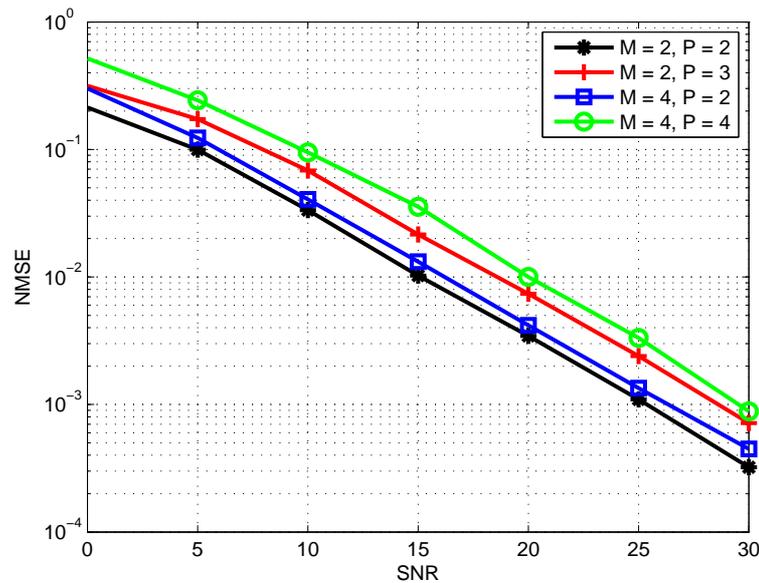


Figura 3.5: Desempenho da estimação do canal.

sua curva entre as curvas de $(M = P = 2)$ e $(M = P = 4)$.

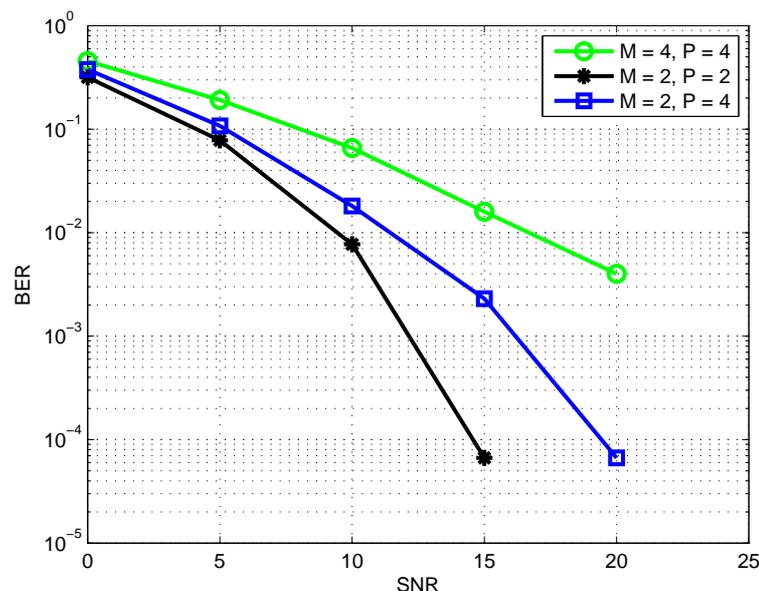


Figura 3.6: Performance da estimação dos símbolos.

Na etapa de decodificação verifica-se que os símbolos podem ser extraídos por: (I) explorando a ortogonalidade do código. (II) extrair os símbolos a partir da estimação da matriz de código OSTBC. Na Figura 3.7 é comparada as duas possibilidades, para isso adota-se o caso em que se dispõe de duas antenas transmissoras e duas receptoras. Sendo assim, pode-se verificar as vantagens da ortogonalidade do código, pois é possível observar, na figura em questão, que a decodificação proposta fornece maior confiabilidade para o sistema em termos de BER.

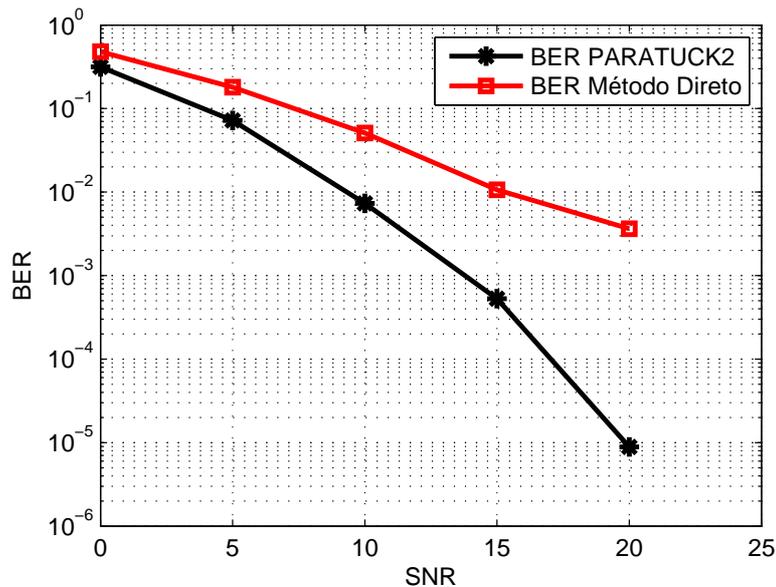


Figura 3.7: Comparação entre as técnicas empregadas na decodificação dos símbolos.

Na Figura 3.8 efetua-se uma comparação entre o receptor PARATUCK2 e o decodificador ótimo, situação na qual é admitido o perfeito conhecimento do estado do canal no receptor, admitindo-se $2T_x$ e $2R_x$. Esse tipo de comparação é relevante, pois ela fornece a distância entre os modelos propostos e o caso ideal. Neste trabalho, em específico, o receptor PARATUCK2 se distancia cerca de 3dB do modelo ideal para atingir uma BER desejada de 10^{-3} .

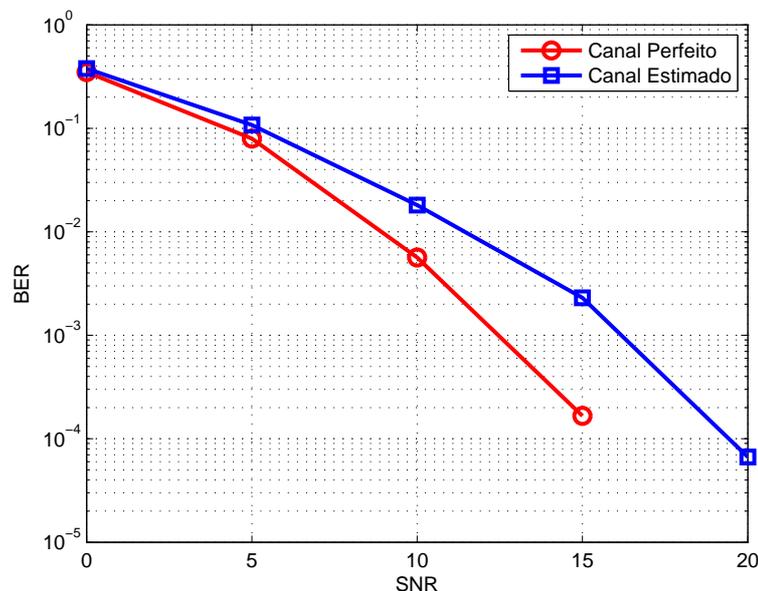
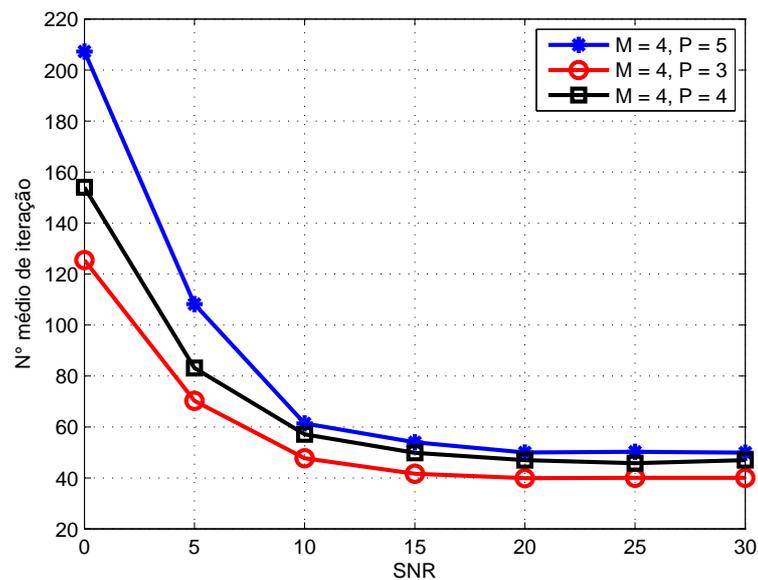


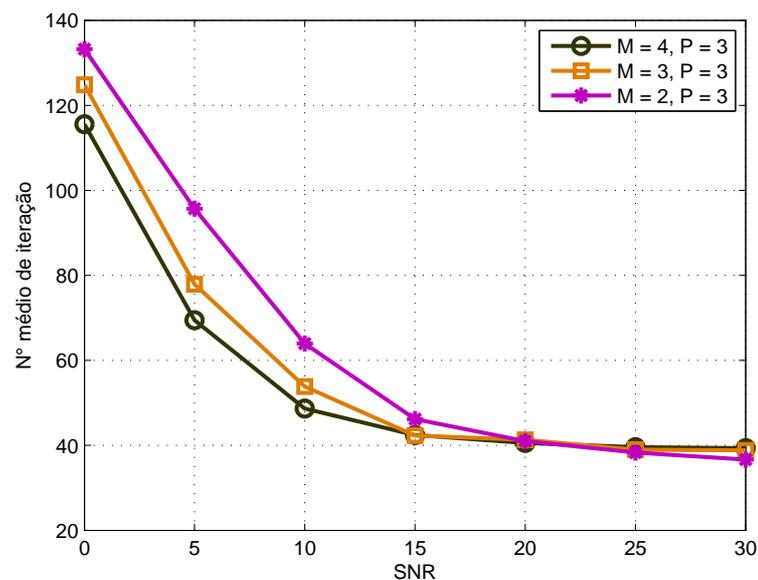
Figura 3.8: Comparação entre o canal estimado e o canal assumido conhecido no receptor.

Na Figura 3.9 é apresentado um gráfico que mostra a quantidade média de iterações *versus* a relação sinal ruído (SNR). Nessa figura, verifica-se a velocidade de convergência do algoritmo. A primeira observação notável é que

a quantidade de iteração diminui com o aumento da SNR. Na Figura 3.9(a) é fixado o número de antenas receptoras em 4 e varia-se o número de antenas transmissoras. Nesse caso, observa-se que quanto maior for o valor de P mais lenta será a convergência. Como pode ser notado, o algoritmo convergiu mais rapidamente no caso ($M = 4, P = 3$). Na Figura 3.9(b) é fixada a quantidade de antenas transmissoras em 3 e varia-se a quantidade de antenas receptoras. O comportamento das curvas mostrou que o aumento de M provoca uma diminuição do número médio de iterações necessárias para a convergência do algoritmo, conseqüentemente um menor tempo de processamento.



(a) Numero de iterações \times SNR para um valor fixo de M .



(b) Numero de iterações \times SNR para um valor fixo de P .

Figura 3.9: Análise de convergência do ALS-PARATUCK2.

3.5 Resumo

Neste Capítulo foi realizada uma rápida revisão acerca de sistemas MIMO e esquemas de transmissão baseados em codificação espaço-tempo, a fim de dar suporte, juntamente com os fundamentos de álgebra multilinear apresentados no Capítulo 2, à modelagem do sistema MIMO-STBC proposta nesse Capítulo. Sendo assim, foi proposta uma nova modelagem tensorial para o sinal recebido em um sistema de comunicação sem fio segundo [63]. Formulou-se um receptor cujo processamento ocorre em duas etapas. Na primeira, a estimação dos coeficientes do canal é baseada na decomposição tensorial PARATUCK2. Na segunda, os símbolos são decodificados por um decodificador linear. As questões de identificabilidade do modelo foram discutidas e o desempenho do sistema foi analisado.

Note que o modelo proposto neste capítulo é caracterizado pela restrição de ortogonalidade do código STBC. Tal restrição permitiu modelar parte do processamento no receptor conforme o modelo tensorial PARATUCK2. No próximo capítulo, será flexibilizada a condição de ortogonalidade da matriz de código, lançando mão do modelo PARATUCK(2-4) combinado como o modelo PARAFAC. Dessa forma, será apresentada a seguir uma solução que permitirá o uso de esquemas STBCs não ortogonais.

Abordagem PARATUCK(2-4) para Sistemas MIMO-STBC Generalizados

A literatura vem demonstrando que o emprego de esquemas STBCs ortogonais em sistemas MIMO tem alcançado bons resultados. OSTBCs são projetados para extrair máximo ganho de diversidade, porém isso implica na redução da taxa de multiplexação [64]. Com o aumento da quantidade de antenas transmissoras o problema fica mais evidente, pois, torna-se cada vez mais difícil determinar OSTBCs que forneçam boas taxas.

Para alcançar melhores taxas de multiplexação espacial, outros modelos de matriz de código têm sido sugerido, em especial os QOSTBC [64], [65]. A ideia básica desse tipo de esquema é construir a matriz de código QOSTBC a partir de esquemas OSTBCs de dimensão inferior ao QOSTBC. Um clássico exemplo é o ABBA, em que A e B são matrizes OSTBCs lineares e que podem tomar a forma do esquema de Alamouti. Por exemplo, para ser transmitido um conjunto de símbolos, $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ por meio de quatro antenas transmissoras disponíveis, pode ser construída a seguinte matriz de código QOSTBC:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* & s_3 & -s_4^* \\ s_2 & s_1^* & s_4 & s_3^* \\ s_3 & -s_4^* & s_1 & -s_2^* \\ s_4 & s_3^* & s_2 & s_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

em que,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} s_3 & -s_4^* \\ s_4 & s_3^* \end{bmatrix}.$$

A modelagem tensorial tal como descrita no capítulo anterior não permite

tratar esquemas STBCs não ortogonais. Neste capítulo, além da diversidade espacial será explorada a diversidade temporal por bloco. Para isso é necessário realizar uma ligeira modificação no filtro formatador do sistema proposto no Capítulo 3. Em decorrência dessa alteração, a modelagem do sistema requer um modelo tensorial PARATUCK2 de quarta ordem. Porém, o modelo PARATUCK(2-4), isoladamente, não torna simples o processo de estimação do canal, conforme é desejado nesta dissertação. Sendo assim, é derivado, a partir do referido modelo, uma estrutura que caracteriza o modelo PARAFAC padrão. Como reflexo dessa manipulação é proposta uma solução em forma fechada, baseada na decomposição em autovalores (EVD). Esse algoritmo evita a utilização de métodos iterativos, que comumente são empregado para obter estimativas das matrizes fatores. Como exemplo de uma solução iterativa pode ser citado o já referido ALS. Nesse algoritmo a atualização de uma matriz fator na i -ésima iteração depende da estimação das demais na $(i - 1)$ -ésima iteração.

4.1 Modelagem Tensorial Para Sistemas MIMO-STBC Generalizados

Admitindo um sistema formado por M antenas receptoras e P antenas transmissoras, é possível flexibilizar a ortogonalidade na construções da matriz de código STBC e generalizar o sistema para cenários em que seja mais interessante manter apenas parcialmente a ortogonalidade do código, como é o caso do esquema QOSTBC citado anteriormente e do chamado Alamouti Estendido.

A referida generalização é possível graças a presença da diversidade temporal por bloco introduzida no sistema. A diversidade temporal por bloco ocorre no sentido de que, para cada *Time Frame* é transmitido um conjunto de palavras códigos, $U_t \in \mathbb{C}^{N \times N_s}$, pré-codificadas por uma matriz diagonal, $\Lambda_k \in \mathbb{C}^{P \times P}$, durante T *Time Block*. Como ilustrado na Figura 4.1.

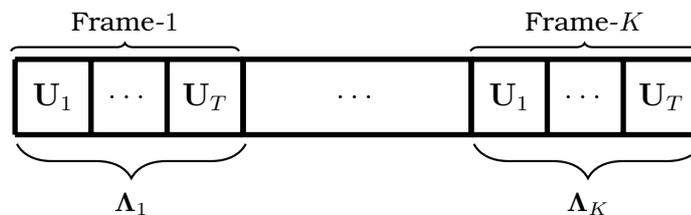


Figura 4.1: Esquemática do Sistema proposto

Note que, uma imediata consequência é a modificação na formulação do

filtro formatador, que passa a ser definido por:

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{K \times N}. \quad (4.1)$$

Desse modo, o sinal recebido é dado por:

$$\mathbf{X}_{..kt} = \mathbf{H} \mathbf{F}_k \mathbf{U}_t \in \mathbb{C}^{M \times N_s}. \quad (4.2)$$

Tomando a equação (4.2), se define a matriz $\bar{\mathbf{Y}}_{..kt}$ como:

$$\bar{\mathbf{Y}}_{..kt} = \mathbf{X}_{..kt} \mathbf{X}_{..kt}^H \quad (4.3)$$

tal que, substituindo (4.1) em (4.2) tem-se:

$$\bar{\mathbf{Y}}_{..kt} = \mathbf{H} \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{C} \mathbf{U}_t \mathbf{U}_t^H \mathbf{C}^H \mathbf{\Lambda}_k^H \mathbf{H}^H. \quad (4.4)$$

Pode-se simplificar (4.4) reescrevendo-a como:

$$\bar{\mathbf{Y}}_{..kt} = \mathbf{H} \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{G}_{..t} \mathbf{\Lambda}_k^H \mathbf{H}^H. \quad (4.5)$$

em que $\mathbf{G}_{..t}$ é o t -ésimo *slice* frontal do tensor núcleo definido por:

$$\mathbf{G}_{..t} = \mathbf{C} \mathbf{U}_t \mathbf{U}_t^H \mathbf{C}^H.$$

A partir da comparação entre as equações (4.5) e (2.42) observa-se que (4.5) satisfaz um modelo PARATUCK(2-4) [8], em que (4.5) representa o kt -ésimo *slice* matricial do tensor $\bar{\mathcal{Y}} \in \mathbb{C}^{M \times M \times K \times T}$, fixando o hiperplano formado pelo par de índices (k, t) . Com base nessa observação é estabelecida a seguinte associação:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}^A, \mathbf{C}^B, \mathcal{G}) &\leftrightarrow (\mathbf{H}, \mathbf{H}^*, \mathbf{\Psi}, \mathbf{\Psi}^*, \mathcal{G}) \\ (I_1, I_2, I_3, I_4, P, Q) &\leftrightarrow (M, M, K, T, P, P). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dessa forma, cada elemento de \mathcal{Y} é dado por:

$$\bar{y}_{mmkt} = \sum_{p_1=1}^P \sum_{p_2=1}^P h_{mp_1} h_{mp_2}^* \psi_{kp_1}^H \psi_{kp_2}^H g_{p_1 p_2 t}. \quad (4.7)$$

em que h_{mp_1} e $g_{p_1 p_2 t}$ são entradas da matriz de canal e do tensor núcleo, respectivamente. Já ψ_{kp_1} representa um elemento da matriz $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{C}^{K \times P}$, cuja k -ésima linha gera a matriz de pré-codificação diagonal $\mathbf{\Lambda}_k$. Isto implica em $\mathbf{\Lambda}_k = \text{diag}(\mathbf{\Psi}_k)$.

O operador $\text{vec}()$ é uma importante ferramenta no tratamento matemático

para a simplificação, ou até mesmo solução de problemas mais complexos, pois fazendo uso de suas propriedades se consegue manipular facilmente os modelos matemáticos dos sistemas. No contexto desta dissertação, destaca-se a seguinte propriedade:

$$\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}). \quad (4.8)$$

Essa propriedade permite o refino de diversas equações matemáticas. Então, aplicando a propriedade (4.8) em (4.5) vetoriza-se o referido modelo tal que:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\bar{\mathbf{Y}}_{..kt}) &= \text{vec}(\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}_k\mathbf{G}_{..t}\mathbf{\Lambda}_k^*\mathbf{H}^H) \\ &= (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H})\text{vec}(\mathbf{\Lambda}_k\mathbf{G}_{..t}\mathbf{\Lambda}_k^*). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Mais uma vez utilizando (4.8), tem-se:

$$\text{vec}(\bar{\mathbf{Y}}_{..kt}) = \underbrace{(\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H})}_{\text{(I)}} \underbrace{(\mathbf{\Lambda}_k^* \otimes \mathbf{\Lambda}_k)\text{vec}(\mathbf{G}_{..t})}_{\text{(II)}} \in \mathbb{C}^{M^2 \times 1}. \quad (4.10)$$

A equação (4.10) pode ser dividida como disposta acima. Note que, em (II) tem-se o produto de uma matriz diagonal com um vetor. Isso significa que a equação (4.10) pode ser reescrito como

$$\text{vec}(\bar{\mathbf{Y}}_{..kt}) = (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H})\text{diag}(\text{vec}(\mathbf{G}_{..t}))(\Psi_{k.}^H \otimes \Psi_{k.}^T), \quad (4.11)$$

uma vez que dados \mathbf{a} e \mathbf{b} vetores pertencentes a \mathbb{C}^N , vale a seguinte igualdade: $\text{diag}(\mathbf{a})\mathbf{b} = \text{diag}(\mathbf{b})\mathbf{a}$. Continuado o tratamento matemático, concatena-se todos os $\text{vec}(\bar{\mathbf{Y}}_{..kt})$ para $k = 1, \dots, K$ mantendo o índice t fixo. Com isso é obtido:

$$\mathbf{Y}_t = [\text{vec}(\bar{\mathbf{Y}}_{..1t})\text{vec}(\bar{\mathbf{Y}}_{..2t}) \dots \text{vec}(\bar{\mathbf{Y}}_{..Kt})] \in \mathbb{C}^{M^2 \times K} \quad (4.12)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= [(\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H})\text{diag}(\text{vec}(\mathbf{G}_{..t}))(\Psi_{1.}^H \otimes \Psi_{1.}^T) \dots \\ &\quad (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H})\text{diag}(\text{vec}(\mathbf{G}_{..t}))(\Psi_{2.}^H \otimes \Psi_{2.}^T) \dots \\ &\quad (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H})\text{diag}(\text{vec}(\mathbf{G}_{..t}))(\Psi_{K.}^H \otimes \Psi_{K.}^T)]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Verifica-se que para cada valor de t é determinado um \mathbf{Y}_t , tal que:

$$\mathbf{Y}_t = (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H})\text{diag}(\text{vec}(\mathbf{G}_{..t}))(\Psi^H \odot \Psi^T). \quad (4.14)$$

O agrupamento agora pode ser realizado em t , obtendo assim a matriz \mathbf{Y} , tal que:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2 \dots \mathbf{Y}_t \dots \mathbf{Y}_T] \in \mathbb{C}^{M^2 \times KT}. \quad (4.15)$$

Combinando (4.14) e (4.15), pode-se expandir (4.15) e reescreve-la como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = & [(\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H}) \text{diag}(\text{vec}(\mathbf{G}_{..1})) (\Psi^H \odot \Psi^T) \dots \\ & (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H}) \text{diag}(\text{vec}(\mathbf{G}_{..2})) (\Psi^H \odot \Psi^T) \dots \\ & (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H}) \text{diag}(\text{vec}(\mathbf{G}_{..T})) (\Psi^H \odot \Psi^T)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

A equação (4.16) é simplesmente uma forma mais adequada de representar \mathbf{Y} , a fim de analisar e verificar que

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H}) [\mathbf{G}^T \odot (\Psi^H \odot \Psi^T)^T]^T \quad (4.17)$$

em que,

$$\mathbf{G} = [\text{vec}(\mathbf{G}_{..1}) \text{vec}(\mathbf{G}_{..2}) \dots \text{vec}(\mathbf{G}_{..T})] . \quad (4.18)$$

Observe que $\text{vec}(\mathbf{G}_{..t}) = (\mathbf{C}^* \otimes \mathbf{C}) \text{vec}(\mathbf{R}_{u_t})$. Em que a matriz \mathbf{R}_{u_t} , definida como a correlação entre as palavra códigos, $\mathbf{R}_{u_t} \triangleq \mathbf{U}_t \mathbf{U}_t^H$, corresponde ao t -ésimo *slice* frontal do tensor \mathcal{R}_u , definido por:

$$\mathcal{R}_u = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{R}_{u_1} & \sqcup_3 & \mathbf{R}_{u_2} & \sqcup_3 & \dots & \sqcup_3 & \mathbf{R}_{u_T} \end{array} \right] ,$$

logo

$$\mathbf{G} = (\mathbf{C}^* \otimes \mathbf{C}) \underbrace{[\text{vec}(\mathbf{R}_{u_1}) \dots \text{vec}(\mathbf{R}_{u_T})]}_{[\mathcal{R}_u]_{(3)}^T} . \quad (4.19)$$

Então, a matriz \mathbf{G}^T corresponde ao tensor \mathcal{G} , o qual satisfaz um modelo TUCKER2 cujo tensor núcleo é \mathcal{R}_u , matriciado em relação ao seu terceiro modo conforme a equação a seguir:

$$\mathbf{G}^T = [\mathcal{R}_u]_{(3)} (\mathbf{C}^* \otimes \mathbf{C})^T = [\mathcal{G}]_{(3)} . \quad (4.20)$$

Observe que (4.17) foi obtida a partir de manipulações matemáticas sobre um modelo tensorial de quarta ordem. Porém, baseado nos operadores de Kruskal e Tucker [16], a equação (4.17) pode ser vista como a decomposição PARAFAC de um tensor $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{K \times T \times M^2}$ dado por:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{I}_{3, P^2} \times_1 [\mathcal{F}]_{(3)} \times_2 [\mathcal{G}]_{(3)} \times_3 [\mathcal{Q}]_{(3)}^T . \quad (4.21)$$

Note que (4.21) corresponde a um modelo PARAFAC, em que as matrizes fatores assumem uma estrutura particular. Cada uma delas, $[\mathcal{G}]_{(3)}$, $[\mathcal{F}]_{(3)}$ e $[\mathcal{Q}]_{(3)}$ são formas matriciadas, em relação ao terceiro modo, dos tensores

$\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{P \times P \times T}$, $\mathcal{F} \in \mathbb{C}^{P \times P \times K}$ e $\mathcal{Q} \in \mathbb{C}^{M \times M \times M^2}$, respectivamente, em que

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \mathcal{I}_{3,k} \times_1 \Psi^T \times_2 \Psi^H \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{R}_Q \times_1 \mathbf{H} \times_2 \mathbf{H}^* \quad , [\mathcal{R}_Q]_{(3)} = \mathbf{I}_{P^2} . \\ \mathcal{G} &= \mathcal{R}_u \times_1 \mathbf{C} \times_2 \mathbf{C}^* .\end{aligned}\tag{4.22}$$

A fim de reforçar o modelo PARAFAC derivado em (4.21) é fornecida uma correspondência entre (2.14) e (4.21), assim como foi realizada para os modelos PARATUCK2, no Capítulo 3, e PARATUCK(2-4), neste mesmo capítulo. Sendo assim tem-se:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) &\leftrightarrow ([\mathcal{F}]_{(3)}, [\mathcal{G}]_{(3)}, [\mathcal{Q}]_{(3)}^T) \\ (I_1, I_2, I_3, R) &\leftrightarrow (K, T, M^2, P^2) .\end{aligned}\tag{4.23}$$

4.2 Receptor Combinado PARATUCK(2-4)-PARAFAC

De acordo com o desenvolvimento apresentado, pode-se dizer que (4.17) configura uma alternativa para estimar as características do canal, porém isso implica no conhecimento da matriz \mathbf{G} . Sendo assim seria necessário o receptor ter o conhecimento das matrizes códigos transmitidas, provocando uma diminuição significativa da taxa de transmissão. Então, a solução é prover um método cego para estimação do canal de comunicação sem fio. Esse procedimento se dará em duas etapas: (I) nessa etapa é realizada uma pré-filtragem em (4.21). (II) nesta segunda etapa é realizada a estimação propriamente dita do canal por meio de um algoritmo não iterativo. A Figura 4.2 ilustra o diagrama de blocos das etapas de processamento efetuadas pelo sistema.

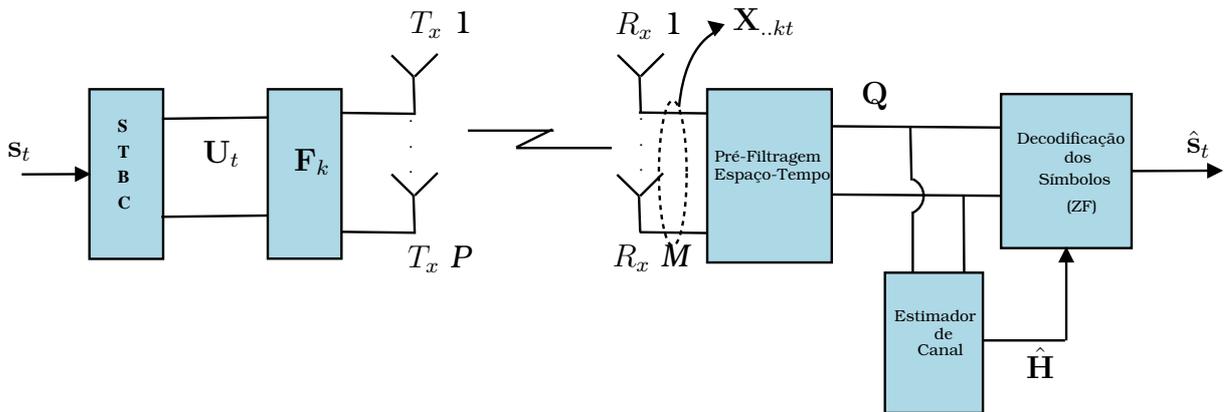


Figura 4.2: Diagrama em blocos das etapas de processamento do sistema

4.2.1 Pré-Filtragem Espaço-Tempo

A combinação entre os modelos PARATUCK(2-4) e PARAFAC não provoca apenas a redução na ordem do tensor. Além dessa redução, esta combinação permitiu ao sistema desfrutar de uma maior flexibilidade quanto à etapa de pré-filtragem. Tal flexibilidade está relacionada à escolha do algoritmo empregado nesta etapa. Nas próximas subseções são destacados dois procedimentos. No primeiro, um algoritmo denominado Fatoração de Khatri-Rao [66] [67] e abreviado por (KR-SVD) é empregado. Isso faz com que todo o processo de recepção seja baseado em uma solução em forma fechada. No segundo, o ALS-PARAFAC é apresentado, sendo utilizado posteriormente para efeitos de comparação, uma vez que, esse algoritmo faz com que se tenha um processamento híbrido no receptor, pois parte da etapa de estimação do canal ocorre de forma iterativa, enquanto que, as demais utilizam uma solução em forma fechada.

4.2.1.1 Pré-filtragem via Fatoração de Khatri-Rao

Em diversas situações, problemas e observações podem ser representados por meio dos produtos de Kronecker ou Khatri-Rao, como é o caso desta dissertação. Nesse sentido, o algoritmo KR-SVD é empregado a fim de fatorar um determinado produto de Khatri-Rao. O termo SVD é bem vindo devido ao algoritmo ser baseado na Decomposição em Valores Singulares. Dessa forma, assumindo $[\mathcal{F}]_{(3)}$ conhecido se define o tensor \mathcal{Z} como:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Y} \times_1 [\mathcal{F}]_{(3)}^\dagger \quad (4.24)$$

tal que,

$$\mathcal{Z} = \mathcal{I}_{3,P^2} \times_1 [\mathcal{F}]_{(3)} \times_1 [\mathcal{F}]_{(3)}^\dagger \times_2 [\mathcal{G}]_{(3)} \times_3 [\mathcal{Q}]_{(3)}^\top. \quad (4.25)$$

A fim de suavizar a notação matemática, faz-se: $[\mathcal{F}]_{(3)} = \mathbf{F}$, $[\mathcal{Q}]_{(3)}^\top = \mathbf{Q}$ e $[\mathcal{G}]_{(3)} = \mathbf{G}^\top$. Dessa forma, aplicando a propriedade (2) na equação (4.25), verifica-se que \mathcal{Z} pode ser reescrito como:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{I}_{3,P^2} \times_1 \underbrace{\mathbf{F}^\dagger \mathbf{F}}_{\mathbf{I}_{P^2}} \times_2 \mathbf{G}^\top \times_3 \mathbf{Q}. \quad (4.26)$$

Note que, de acordo com o operador de Kruskal tem-se:

$$[\mathcal{Z}]_{(1)}^\top = \mathbf{Q} \odot \mathbf{G}^\top. \quad (4.27)$$

A etapa de pré-filtragem é finalizada obtendo-se uma estimativa de \mathbf{Q} e \mathbf{G} . Para isso é utilizado o algoritmo descrito a seguir:

A p -ésima coluna de $[\mathcal{Z}]_{(1)}^T$, com $p = 1, \dots, P^2$, é dada por $(\mathbf{Q}_{.p} \otimes \mathbf{G}_{.p}^T)$. Porém, o produto de Kronecker entre dois vetores pode ser escrito em função do operador $vec()$ como:

$$[\mathcal{Z}]_{(1).p}^T \equiv \mathbf{Q}_{.p} \otimes \mathbf{G}_{.p}^T = vec(\mathbf{G}_{.p}^T \mathbf{Q}_{.p}^T). \quad (4.28)$$

Dessa forma, a função custo a ser minimizada é dada por

$$f_{\Phi_p}(\mathbf{Q}_{.p}, \mathbf{G}_{.p}) = \|\Phi_p - \mathbf{G}_{.p}^T \mathbf{Q}_{.p}^T\|_F \quad (4.29)$$

em que $\Phi_p \in \mathbb{C}^{T \times M^2}$ é obtida a partir da desvetorização de (4.28). Então, verifica-se que está sendo enfrentado um problema de aproximação de $rank-1$. Segundo [68], a SVD trucada fornece a melhor aproximação de $rank-1$, devido ao teorema de Eckart-Young. Portanto, aplicando a SVD em Φ_p tem-se

$$\Phi_p = \mathbf{U}_p \Sigma_p \mathbf{V}_p^H$$

logo, a melhor aproximação de $rank-1$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{.p}^T &= \sqrt{\sigma_1} \mathbf{U}_{.p} \\ \mathbf{G}_{.p}^T &= \sqrt{\sigma_1} \mathbf{V}_{.p}^* \end{aligned}$$

sendo σ_1 o maior valor singular. Além disso é evidente que o algoritmo descrito executa P^2 SVDs até que a estimativa das matrizes desejadas seja completada.

4.2.1.2 Pré-Filtragem via ALS-PARAFAC

Conforme descrito anteriormente, a equação (4.21) caracteriza o modelo tensorial PARAFAC. Para efeito de comparação, o algoritmo iterativo ALS-PARAFAC, que neste caso configura uma forma alternativa para a execução da etapa de pré-filtragem, é apresentado. Dessa forma a equação (4.21) pode ser desdobrada em três formas matriciadas. Sendo assim tem-se:

$$\begin{aligned} [\mathcal{Y}]_{(1)} &= \mathbf{F}(\mathbf{G}^T \odot \mathbf{Q})^T \\ [\mathcal{Y}]_{(2)} &= \mathbf{G}^T(\mathbf{Q} \odot \mathbf{F})^T \\ [\mathcal{Y}]_{(3)} &= \mathbf{Q}(\mathbf{F} \odot \mathbf{G}^T)^T. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Agora, admitindo o conhecimento do filtro formatador \mathbf{F} , tem-se a seguinte função custo a ser minimizada:

$$f(\mathbf{F}, \mathbf{G}^T, \mathbf{Q}) = \left\| \mathcal{Y} - \sum_{p=1}^{P^2} \mathbf{F}_{.p} \circ \mathbf{G}_{.p}^T \circ \mathbf{Q}_{.p} \right\|_F^2. \quad (4.31)$$

Em geral, o ALS é um algoritmo iterativo que alterna a estimação entre as matrizes fatores. Devido ao conhecimento de uma dessas matrizes a iteração acontece entre duas delas, em específico entre \mathbf{Q} e \mathbf{G} . Nesse caso, o ALS-PARAFAC, que soluciona o problema apresentado nessa seção, é mostrado a seguir.

Algoritmo ALS-PARAFAC

1. Defina $i = 0$;
Inicialize aleatoriamente $\hat{\mathbf{Q}}_{(i=0)}$;
2. $i = i + 1$;
3. A partir de $[\mathcal{Y}]_{(2)}$ e usando $\hat{\mathbf{Q}}_{(i-1)}$, encontre a solução para o seguinte problema LS:

$$\hat{\mathbf{G}}_{(i)}^T = \arg \min_{\mathbf{G}^T} \| [\mathcal{Y}]_{(2)} - \mathbf{G}^T (\mathbf{Q}_{(i-1)} \odot \mathbf{F})^T \|_F^2,$$
 cuja solução é dada por:

$$\hat{\mathbf{G}}_{(i)}^T = [\mathcal{Y}]_{(2)} [(\hat{\mathbf{Q}}_{(i-1)} \odot \mathbf{F})^T]^\dagger$$
4. A partir de $[\mathcal{Y}]_{(3)}$ e usando $\hat{\mathbf{G}}_{(i)}^T$, encontre a solução para o seguinte problema LS:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{(i)} = \arg \min_{\mathbf{Q}} \| [\mathcal{Y}]_{(3)} - \mathbf{Q} (\mathbf{F} \odot \hat{\mathbf{G}}_{(i)}^T)^T \|_F^2,$$
 cuja solução é dada por:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{(i)} = [\mathcal{Y}]_{(3)} [(\mathbf{F} \odot \hat{\mathbf{G}}_{(i)}^T)^T]^\dagger$$
5. Repita os passos 2-4 até o algoritmo atingir a convergência.

Assim como no ALS-PARATUCK2, a convergência é alcançada quando o erro entre o tensor de sinal recebido e o estimado não sofrer alterações significativas. Uma medida de erro pode ser dada por:

$$e(i) = \| [\mathcal{Y}]_{(1)} - \mathbf{F} (\hat{\mathbf{G}}_{(i)}^T \odot \hat{\mathbf{Q}}_{(i)})^T \|_F .$$

Quando $\| e(i) - e(i-1) \| \leq 10^{-6}$, é assumida a convergência do algoritmo. O objetivo real dessa etapa de pré-filtragem é obter o produto de Kronecker $\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H}$, pois a partir deste produto a estimação do canal será extraída. O algoritmo de estimação do canal será exposto na próxima subseção.

4.2.2 Estimação de Canal Via Fatoração de Kronecker

Conforme descrito na introdução deste trabalho, vários pesquisadores vêm empregando uma abordagem tensorial em processamento de sinais. É comum

encontrar o algoritmo ALS como sugestão para minimizar uma determinada função custo. Nesse capítulo, apesar de se utilizar da modelagem tensorial, propõe-se uma solução em forma fechada para estimação do canal.

A etapa de pré-filtragem forneceu $\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H}$. Em [69] é proposto um esquema de fatoração do produto de Kronecker, no qual é necessário apenas uma única SVD. Porém, no caso abordado nesta dissertação, em específico, é suficiente a aplicação de uma única EVD devido a simetria apresentada pelo modelo de sistema. Dessa forma, uma imediata consequência é a redução, aproximadamente pela metade, da complexidade do algoritmo de estimação do canal. Nesse caso, a função custo a ser minimizada é:

$$f_{\mathbf{Q}}(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}) = \|\mathbf{Q} - (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H})\|_F . \quad (4.32)$$

A matriz \mathbf{Q} pode ser particionada em blocos, de maneira que sua representação passa a ser

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(1,1) & \dots & \mathbf{Q}(1,P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}(M,1) & \dots & \mathbf{Q}(M,P) \end{bmatrix}, \mathbf{Q}(i,j) \in \mathbb{C}^{M \times P} \quad (4.33)$$

Observe que cada bloco é dado por: $\mathbf{Q}(i,j) = \mathbf{h}_{mp}^* \mathbf{H}$. É importante que haja clareza no processo de construção de cada bloco, e por isso é detalhado de forma intuitiva como pode ser obtida cada partição a partir de \mathbf{Q} .

$$\text{primeiro bloco-linha: } \begin{cases} \mathbf{Q}(1,1) = \mathbf{Q}((1:M), P) \\ \mathbf{Q}(2,1) = \mathbf{Q}((M+1:2M), P) \\ \mathbf{Q}(3,1) = \mathbf{Q}((2M+1:3M), P) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}(i,1) = \mathbf{Q}(((i-1)M+1:iM), P) \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\text{primeiro bloco-coluna: } \begin{cases} \mathbf{Q}(1,2) = \mathbf{Q}(M, (P+1:2P)) \\ \mathbf{Q}(1,3) = \mathbf{Q}(M, (2P+1:3P)) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}(1,j) = \mathbf{Q}(M, ((j-1)P+1:jP)) \end{cases} . \quad (4.35)$$

Comparando (4.34) com (4.35) verifica-se que

$$\mathbf{Q}(i,j) = \mathbf{Q}((i-1)M+1:iM, (j-1)P+1:jP) . \quad (4.36)$$

A sutileza na descrição da construção de $\mathbf{Q}(i,j)$ não ocorre por acaso, veja

a seguinte situação. Seja $\tilde{\mathbf{Q}}$ definida por:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{Q}(1, 1))^{\top} \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{Q}(M, 1))^{\top} \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{Q}(1, P))^{\top} \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{Q}(M, P))^{\top} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{MP \times MP}. \quad (4.37)$$

Se $\mathbf{h} = \text{vec}(\mathbf{H})$, a seguinte igualdade é verdadeira

$$\| \mathbf{Q} - (\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H}) \|_F = \| \tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{h}^* \mathbf{h}^{\top} \|_F. \quad (4.38)$$

Note que todo o processo de manipulação matemática levou novamente a um problema de aproximação de *rank*-1. Denominado por [69] como *SVD direta*, esse procedimento requer o cálculo de apenas uma SVD. Em nosso caso, aplica-se a EVD em $\tilde{\mathbf{Q}}$ tem-se:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^{\text{H}}. \quad (4.39)$$

Semelhante a subseção anterior

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^* &= \sqrt{\sigma_1} \mathbf{U}_{.1} \\ \mathbf{h} &= \sqrt{\sigma_1} \mathbf{U}_{.1}^*. \end{aligned} \quad (4.40)$$

A tabela a seguir traz um pseudo código do algoritmo descrito acima.

Algoritmo baseado em EVD

1. Encontre $\tilde{\mathbf{Q}}$ (veja equação (4.37))

2. Calcule a EVD de $\tilde{\mathbf{Q}}$:

$$[\mathbf{U} \ \mathbf{\Sigma}] = \text{svd}(\tilde{\mathbf{Q}})$$

3. Estime $\hat{\mathbf{h}}^*$ e $\hat{\mathbf{h}}$

$$\hat{\mathbf{h}}^* = \text{sqrt}(\sigma_1) \mathbf{U}_{.1}$$

$$\hat{\mathbf{h}} = \text{sqrt}(\sigma_1) \mathbf{U}_{.1}^*$$

4. Desvetorize \mathbf{h}^* e \mathbf{h} para estimar \mathbf{H}^* e \mathbf{H}

$$\mathbf{H}^* = \text{reshape}(\mathbf{h}^*, M, P)$$

$$\mathbf{H} = \text{reshape}(\mathbf{h}, M, P).$$

A condição necessária para a identificabilidade do modelo proposto no sentido dos mínimos quadrados, requer que \mathbf{Q} seja *rank* coluna completo. Isso é necessário para garantir a unicidade da solução de mínimos quadrados, sendo assim, o canal será identificável se $K \geq P^2$, ou seja, o número de *time frames* cresce com o quadrado da quantidade de antenas transmissoras.

4.2.3 Detecção e Decodificação dos Símbolos

O objetivo de alcançar a melhor estimacão possível para o canal decorre da necessidade de atingir menores taxas de erro de bit. Isso significa uma menor quantidade de erro na identificação e decodificação dos símbolos. Dessa forma, o sinal recebido, conforme descrito em (4.2), pode ser reescrito como:

$$\mathbf{X}_{..kt} = \hat{\mathbf{H}}\Lambda_k \mathbf{C}\mathbf{U}_t \in \mathbb{C}^{M \times N_s} \quad (4.41)$$

em que, $\hat{\mathbf{H}}$ é a matriz de canal estimada na etapa preliminar. Como pode ser observado, na modelagem do sistema, a mesma matriz de código STBC é transmitida k vezes. Note que, cada matriz \mathbf{U}_t pode ser estimada em relação a todos os valores de k . Para isso, apoia-se nas formas matriciadas de um tensor, em específico a matriciação modo-3, em que é agrupado verticalmente todos os *slices* frontais obtidos fixando-se o par de índices (k, t) . Dessa forma, tem-se

$$[\mathcal{X}]_{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{..1t} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{..Kt} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{KM \times N_s} \quad (4.42)$$

então,

$$[\mathcal{X}]_{(3)} = (\Psi \odot \hat{\mathbf{H}})\mathbf{C}\mathbf{U}_t. \quad (4.43)$$

Logo concluí-se, a partir de (4.43), que a estimacão da t -ésima matriz de símbolos é dada por:

$$\hat{\mathbf{U}}_t = \mathbf{C}^\dagger (\Psi \odot \hat{\mathbf{H}})^\dagger [\mathcal{X}]_{(3)} \in \mathbb{C}^{N \times N_s}, \quad (4.44)$$

em que, (4.44) representa um receptor **ZF**, que consiste de uma única etapa de estimacão para cada matriz \mathbf{U}_t . Note que o produto de Khatri-Rao, $\Psi \odot \hat{\mathbf{H}}$, deve ser *rank*-coluna completo, então a restrição $KM \geq P$ deve ser atendida.

Na etapa de decodificação do sinal não foi necessário reduzir a ordem do tensor, pois o processamento foi realizado considerando o modelo PARAFAC2 de quarta ordem. Na seção subsequente será discutido o desempenho do sistema.

4.3 Avaliação de Desempenho

Nesta seção será mostrado o efeito provocado pela retransmissão das T palavras códigos durante os K frames. Nesse capítulo, especificamente, adota-se $K = 9$ e $T = 15$, exceto na Figura 4.5, em que o valor de K é variado de modo a satisfazer a condição de identificabilidade do sistema e o tamanho de cada bloco, T , é igual a 8. Assim como no Capítulo 3, inicialmente são apresentados os gráficos referentes à qualidade de estimação do canal, medida em termos de NMSE e confiabilidade do sistema em termos de taxa de erro de bit. As Figuras 4.3 e 4.4 retratam os resultados após 8000 execuções de Monte Carlo. Nesse cenário, utiliza-se diferentes quantidades de antenas receptoras e é fixado em três o número de antenas transmissoras. Além disso, utiliza-se a seguinte matriz de código:

$$EA = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix}$$

Este código é também chamado por alguns autores como código de Alamouti estendido.

Na Figura 4.3, nota-se que as curvas de NMSE são praticamente coincidentes quando $M = 3$ e $M = 2$. Porém, quando observado o caso em que $M = 4$, a figura mostra que o canal é melhor estimado quando o sistema opera em valores de SNR mais elevados.

A Figura 4.4 mostra que o sistema fica mais robusto, em termos de confiabilidade, com o aumento do número de antenas receptoras. Note que pela Figura 4.3 é praticamente indiferente a escolha de duas, três ou quatro antenas na recepção, apesar da ligeira vantagem do cenário $P = 3, M = 4$ na região de alta SNR. Porém, a Figura 4.4 mostra que a melhor escolha seria usar quatro antenas receptoras para um número fixo de três antenas transmissoras.

O sistema proposto, como grande parte das propostas desta área, tem suas restrições. Em nossa proposta, percebe-se que a quantidade de retransmissão de frames está associada à quantidade de antenas transmissoras, de modo que o número mínimo de repetições é dado pelo quadrado do número de antenas transmissoras (P^2). Isto ocorre devido à condição de identificabilidade

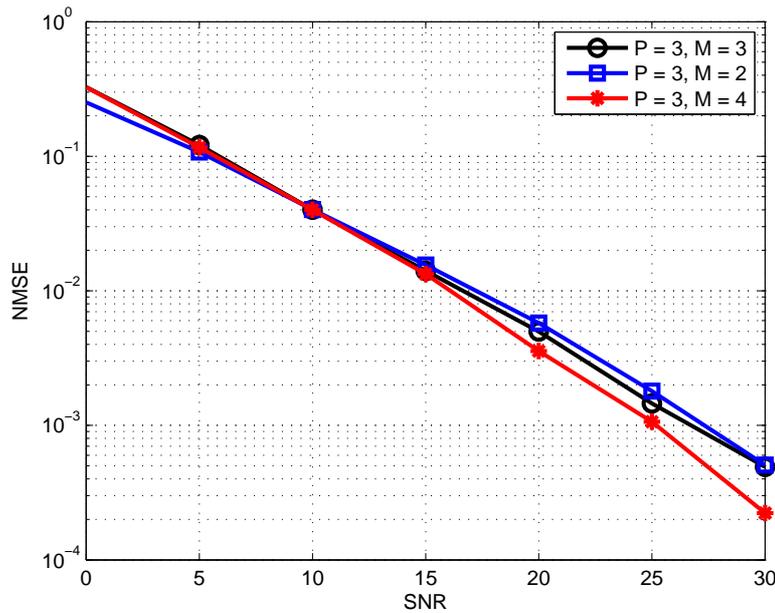


Figura 4.3: Desempenho da estimação do canal

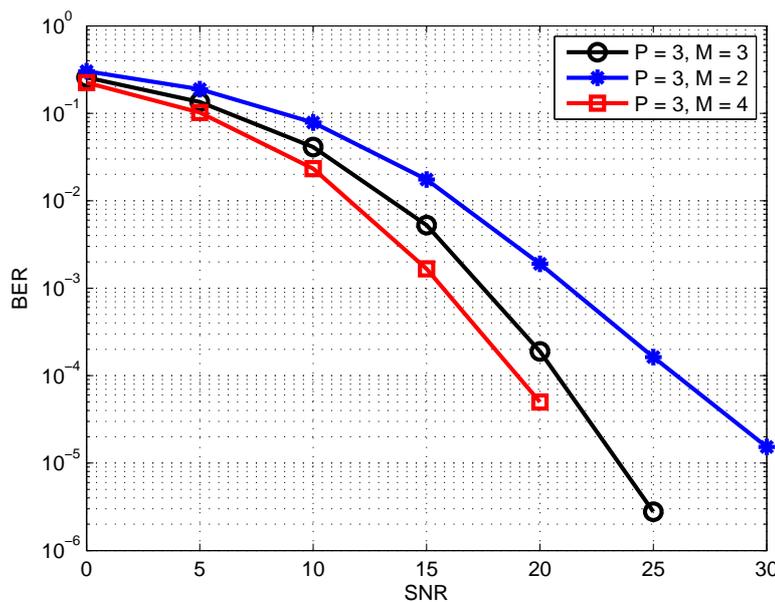


Figura 4.4: BER vs. SNR

imposta pela estrutura de transmissão proposta para o sistema. Porém, uma importante característica da nossa proposta é a capacidade de ser empregada em sistemas com apenas uma antena receptora, o que não é comum na maioria das técnicas de estimação de canal baseada em mínimos quadrados. O que se pretende salientar, é que a modelagem de sistema, aqui realizada para o caso MIMO pode, também ser estendida para sistemas MISO.

A Figura 4.5 descreve o comportamento do sistema quando é fixado em 1 a quantidade de antenas receptoras e variado o número de antenas

transmissoras. Em outras palavras, a Figura 4.5 ilustra a aplicação do modelo proposto em um sistema MISO, em que visivelmente apresenta menores taxas de erro de bit para a menor quantidade de antenas transmissoras.

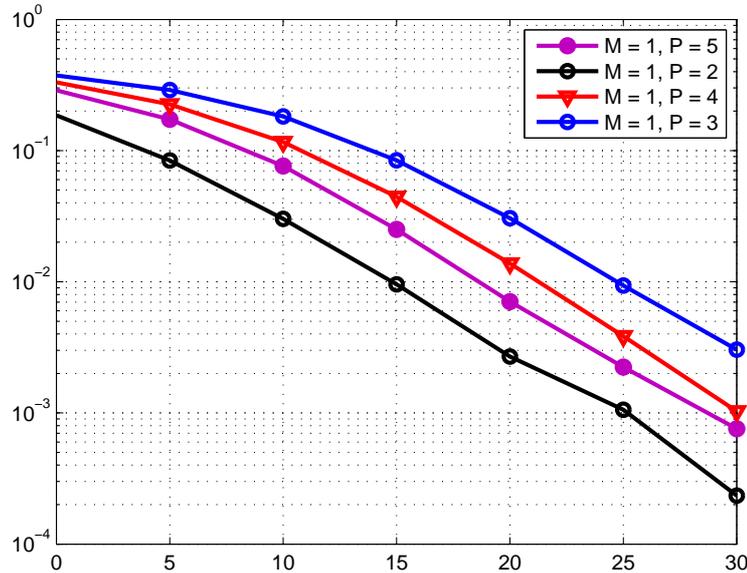


Figura 4.5: Confiabilidade do sistema com uma antena receptora

Na Figura 4.6 o modelo proposto nesta dissertação é comparado com a proposta de Sidiropoulos *et. al.* em [4] e com o receptor ALS-EVD, em que a etapa de pré-filtragem é realizada via o algoritmo iterativo ALS PARAFAC, diferentemente da proposta descrita na seção 4.2.1.1, em que a pré-filtragem e a estimação efetiva do canal são baseadas em uma solução em forma fechada. A principal característica de [4] é o processo de pré-codificação linear do vetor de símbolos s_t . Esse sistema é modelado através da decomposição PARAFAC e descreve um esquema puramente de multiplexação espacial. Nesta comparação, verifica-se que o receptor PARATUCK(2-4)-PARAFAC apresenta maior confiabilidade, em termos de taxa de erro bit, que o esquema KRST e o receptor ALS-EVD, que corresponde ao caso em que a pré-filtragem é realizada por meio do algoritmo iterativo descrito na seção 4.2.1.2.

A fim de fornecer uma curva como parâmetro de referência do modelo proposto, é mostrada na Figura 4.7 a curva de desempenho quando assume-se o conhecimento do canal no receptor ZF. Nesta comparação, pode ser percebida uma diferença entre o sistema ideal e o modelo proposto de cerca de 3 dB, em termos de SNR, para uma BER de 10^{-3} .

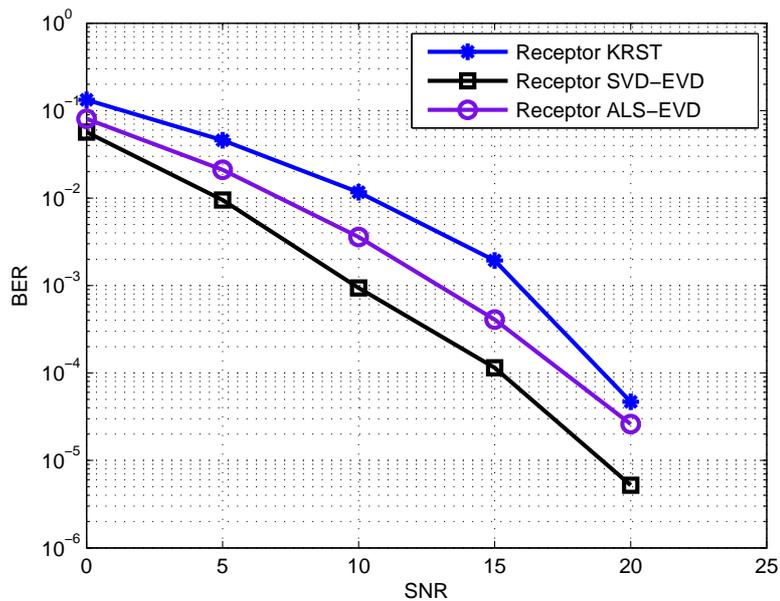


Figura 4.6: Comparação com outras soluções tensoriais

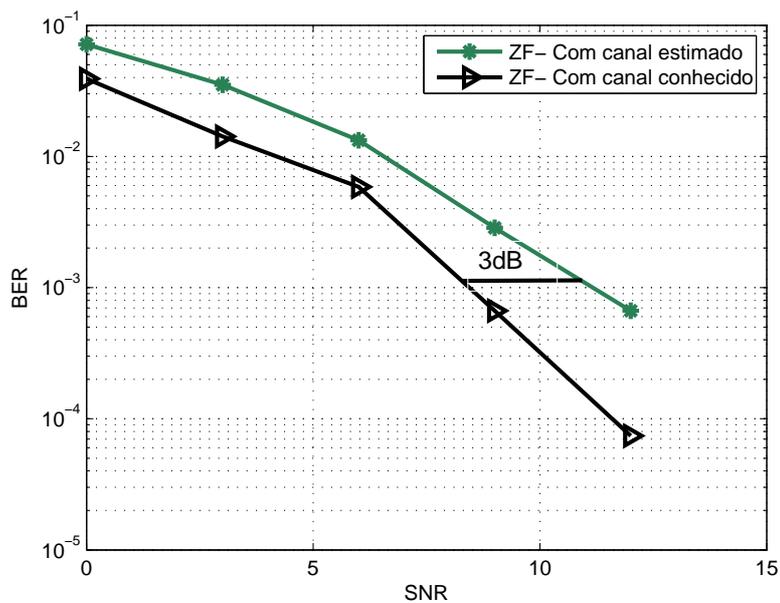


Figura 4.7: Comparação entre ZF(canal estimado) e ZF(canal conhecido)

4.4 Resumo

Neste capítulo foi elaborada uma generalização do modelo de sistema proposto no Capítulo 3. Uma combinação de modelos tensoriais foi empregada para tal finalidade. Primeiro obteve-se um modelo PARATUCK2 de quarta ordem, através de uma modificação na dimensão do filtro formatador, em seguida reduziu-se a um tensor de ordem três, representado por um modelo PARAFAC, cujas matrizes fatores apresentam estruturas especiais. O formalismo matemático que tornou possível a generalização do modelo

também permitiu que fosse determinada uma solução em forma fechada para o problema de estimação do canal e decodificação dos símbolos. Tais soluções são os algoritmos das fatorações de Khatri-Rao, aplicado na etapa de pré-filtragem, e de Kronecker, utilizado para realizar a estimação dos coeficientes do canal a partir do produto de Kronecker $\mathbf{H}^* \otimes \mathbf{H}$, obtido na pré-filtragem.

No próximo capítulo serão apresentadas as conclusões, bem como as perspectivas de avanços desta pesquisa.

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, investiga-se o desempenho de sistemas MIMO-STBCs diferenciado do modelo convencional devido a presença de um filtro formatador, em termos de estimação de canal e símbolos. Esse filtro foi composto por uma matriz diagonal de pré-codificação e uma matriz de mapeamento. Neste trabalho os sinais foram estruturados sobre as perspectivas da álgebra multilinear. Baseado em uma abordagem tensorial, algumas das decomposições tensoriais existentes foram empregadas na solução de problemas de estimação de canal e/ou símbolos em sistemas MIMO-STBCs.

No primeiro ponto importante desta dissertação, os esforços estiveram concentrados nos esquemas OSTBCs, em específico no código de Alamouti. Para esse sistema, o receptor foi constituído de duas etapas: Primeiro foi estimada a matriz de canal por meio de um algoritmo ALS-PARATUCK2. Em seguida foi determinada, de forma convencional, a estimação dos símbolos transmitidos. Observou-se que a modelagem tensorial proposta na estimação do canal, em específico a decomposição PARATUCK2, apresentou um bom desempenho, tendo em vista a identificabilidade satisfatória da matriz de canal. Ainda, verificou-se as taxas de erro de bit alcançadas pelo sistema. Para efeito de comparação, o decodificador linear foi confrontado com o método direto, e evidenciou-se que o receptor proposto, baseado na ortogonalidade do código, apresenta menores taxas de erro de bit.

Após o desenvolvimento desse sistema restrito à ortogonalidade da matriz de código STBC, buscou-se generalizar o sistema para qualquer esquema STBC. Para isso, associou-se duas dimensões de tempo, *time frame* e *time block*, ao sinal recebido. Como consequência, a modelagem tensorial do sistema para STBCs generalizados culminou no modelo PARATUCK2 de quarta ordem, porém, através de tratamentos matemáticos, reduziu-se o tensor de sinal recebido a um tensor de ordem três, representado pelo modelo

PARAFAC. A partir do modelo PARAFAC foi estabelecida uma solução em forma fechada para o processo de estimação da matriz de canal. Esta solução foi dividida em duas etapas: na primeira, uma pré-filtragem baseada na fatoração de Khatri-Rao foi empregada para obtenção do produto de Kronecker entre a matriz de canal com seu conjugado. Ainda na pré-filtragem foi apresentada uma forma alternativa baseada em um algoritmo iterativo. Em seguida foi aplicada a fatoração de Kronecker para a estimação efetiva dos coeficientes do canal. É importante observar que ambas as fatorações são baseadas na decomposição em valores singulares, porém neste trabalho, especificamente, a fatoração de Kronecker é realizada por meio de uma EVD devido a simetria apresentada pelo modelo. Os resultados apresentados por meio dos gráficos mostram que a modelagem proposta apresenta um resultado satisfatório. Isso fica mais evidente quando a proposta é comparada com o esquema KRST, cuja solução é baseada na solução iterativa ALS PARAFAC.

A modelagem tensorial de dados é uma excelente alternativa para conjuntos de dados multidimensionais. Em problema de estimação de canal para sistema de comunicação sem fio, essa abordagem torna-se atraente devido as questões de unicidade do modelo. Porém, grande parte dos modelos tensoriais disponíveis não apresentam um critério de unicidade bem definido, como é o caso da decomposição PARATUCK2 empregada nessa dissertação. Contudo, a unicidade pode ser alcançada a partir de restrições sobre o sistema a ser modelado. Esse compromisso entre unicidade necessária e restrições requeridas faz com que o sistema seja caracterizado por um único ou uma combinação desses modelos tensoriais.

A abordagem PARATUCK2 para sistemas MIMO-STBCs, tem como principal desvantagem a restrição de ortogonalidade da matriz de código. Porém, essa modelagem torna-se vantajosa devido à baixa complexidade do decodificador linear empregado. Além disso, a condição de identificabilidade, requerida pela estrutura de transmissão desse tipo sistema, não é um fator limitante dessa arquitetura. Já a abordagem PARATUCK(2-4), para sistemas MIMO-STBCs, tem como principal desvantagem a condição de identificabilidade, pois devido à estrutura de transmissão ser baseada na retransmissão de blocos de dados, a condição de identificabilidade relaciona a quantidade dessas retransmissões com o número de antenas transmissoras, tal que o número mínimo de retransmissões é igual ao quadrado da quantidade de antenas transmissoras. A abordagem PARATUCK(2-4) tem como principal vantagem a modelagem de sistemas MIMO-STBS, cuja matriz de código pode ser ortogonal, ou não ortogonal. Dessa forma, o modelo PARATUCK2 pode ser visto como uma restrição do modelo PARATUCK(2-4). O impacto de tais retransmissões é

refletido em um bom grau de confiabilidade, conforme mostrado nas análises dos resultados do Cap. 4.

Como perspectivas de avanços futuros deste trabalho, sugere-se a análise e tratamento dos seguintes casos:

- Estruturar o problema de otimização do filtro formatador explorando técnicas de otimização exatas, afim de maximizar os ganhos de diversidade e codificação;
- Estender a solução em forma fechada para o problema solucionado via PARATUCK2:
 - A partir, diretamente, do sinal recebido representado pela equação (3.6). O mesmo vale para o modelo PARATUCK(2-4);
 - A partir do modelo PARATUCK2 simétrico obtido a partir da matriz de correlação dos sinais recebidos;
 - Comparar as soluções fechadas e iterativas.
- Estender este e outros métodos tensoriais para sistemas de comunicações MIMO cooperativos.

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Huurdeman, *The worldwide history of telecommunications*. USA: John Wiley & Sons, 2003.
- [2] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. R. Calderbank, “Space-time block codes from orthogonal designs,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 5, pp. 1456–1467, 1999.
- [3] S. M. Alamouti, “A simple transmit diversity technique for wireless communications,” *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, vol. 16, pp. 1451–1458, Oct 1998.
- [4] N. D. Sidiropoulos and R. S. Budampati, “Khatri-Rao space-time codes,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, pp. 2396–2407, Oct 2002.
- [5] A. Y. Kibangou and G. Favier, “Blind joint identification and equalization of wiener-hammerstein communication channels using PARATUCK-2 tensor decomposition,” in *15th European Signal Processing Conference*, (Poznan, Poland), pp. 1516–1520, 2007.
- [6] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, “Space-time spreading-multiplexing for MIMO wireless communication systems using the PARATUCK-2 tensor model,” *Signal Processing*, vol. 89, no. 11, pp. 2103–2116, 2009.
- [7] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and L. R. Ximenes, “Space-time-frequency (STF) MIMO communication systems with blind receiver based on a generalized PARATUCK2 model,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, pp. 1895–1909, Apr 2013.
- [8] G. Favier, M. N. da Costa, A. L. F. de Almeida, and J. M. T. Romano, “Tensor space-time (TST) coding for MIMO wireless communication systems,” *Signal Processing*, vol. 92, 2012.

- [9] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, “Constrained Tucker-3 model for blind beamforming,” *Signal Processing*, vol. 89, pp. 1240–1244, Jun 2009.
- [10] G. Favier, T. Bouilloc, and A. L. F. de Almeida, “Blind constrained block-Tucker2 receiver for multiuser SIMO NL-CDMA communication systems,” *Signal Processing*, vol. 92, pp. 1624–1636, Jul 2012.
- [11] R. A. Harshman, “Foundations of the PARAFAC procedure models and conditions for an explanatory multimodal factor analysis,” *UCLA Working Papers in Phonetics*, vol. 16, pp. 1–84, Dez 1970.
- [12] G. T. de Araújo and A. L. F. de Almeida, “Receptor cego PARATUCK2 para sistemas MIMO baseados em codificação espaço-tempo,” in *Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, (Fortaleza), Set 2013.
- [13] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 4 ed., 2013.
- [14] A. Cichocki, R. Zdunek, A. H. Phan, and S. ichi Amari, *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations Applications to Exploratory Multi-Way Data Analysis and blind Source Separation*. Wiley, 2009.
- [15] A. L. F. de Almeida, *Tensor Modeling and Signal Processing for wireless communication Systems*. PhD thesis, Universidade de Nice-Sophia Antipolis, Nov 2007.
- [16] T. G. Kolda, “Multilinear operators for higher-order decompositions,” tech. rep., Sandia National Laboratories, New Mexico, Abr 2006.
- [17] R. L. de Lacerda Neto, “Receptores MIMO baseados em algoritmo de decomposição PARAFAC,” Master’s thesis, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ago 2005.
- [18] L. D. Lathauwer and B. D. Moor, “From matrix to tensor: Multilinear algebra and signal processing,” in *4th IMA Int. Conf. on Mathematics in Signal Processing*, Jun 1997.
- [19] T. G. Kolda and B. W. Bader, “Tensor decompositions and applications,” *Siam Review*, vol. 51, no. 3, pp. 455–500, 2009.
- [20] F. L. Hitchcock, “The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products,” *J. Math. Phys.*, vol. 6, pp. 164–189, 1927.

- [21] R. B. Cattell, "Parallel proportional profiles and other principles for determining the choice of factors by rotation," *Psychometrika*, vol. 9, no. 4, pp. 267–283, 1944.
- [22] L. R. Tucker, "Some mathematical notes on three-mode factor analysis," *Psychometrika*, vol. 31, no. 3, pp. 279–311, 1966.
- [23] J. D. Carroll and J. J. Chand, "Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "eckart-young" decomposition," *Psychometrika*, vol. 35, pp. 283–319, Set 1970.
- [24] D. Nion and N. D. Sidiropoulos, "Adaptive algorithms to track the PARAFAC decomposition of a third-order tensor," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, pp. 2299–2310, Jun 2009.
- [25] R. A. Harshman and M. E. Lundy, "PARAFAC: Parallel factor analysis," *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 18, pp. 39–72, 1994.
- [26] N. K. M. Faber, R. Bro, and P. K. Hopke, "Recent developments in CANDECOMP/PARAFAC algorithms: a critical review," *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 65, pp. 119–137, 2003.
- [27] R. Bro, *Multi-way Analysis in the Food Industry: Models, Algorithms and Applications*. PhD thesis, University Denmark, Nov 1998.
- [28] R. A. Harshman, "Determination and proof of minimum uniqueness conditions for PARAFAC1," in *UCLA Working Papers in Phonetics*, no. 22, pp. 111–117, 1972.
- [29] J. B. Kruskal, "Three-way arrays: rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 18, no. 2, pp. 95–138, 1977.
- [30] N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, and R. Bro, "Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, pp. 81–823, Mar 2000.
- [31] A. L. F. de Almeida and G. Favier, "Double khatri-rao space-time-frequency coding using semi-blind PARAFAC based receiver," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, pp. 471–474, Mai 2013.
- [32] R. A. Harshman, "PARAFAC2: Mathematical and technical notes," in *UCLA Working Papers in Phonetics*, vol. 22, (Michigan), pp. 30–40, 1972.

- [33] N. E. Helwig, “The special sign indeterminacy of the direct-fitting PARAFAC2 model: Some implications, cautions, and recommendations for simultaneous component analysis,” *Psychometrika*, vol. 78, pp. 725–739, Oct 2013.
- [34] M. H. Kamstrup-Nielsen, L. G. Johnsen, and R. Bro, “Core consistency diagnostic in PARAFAC2,” *Jornal Chemometrics*, vol. 27, pp. 99–105, 2013.
- [35] J. M. F. T. Berge and H. A. L. Kiers, “Some uniqueness results for PARAFAC2,” *Psychometrika*, vol. 31, pp. 123–132, Mar 1996.
- [36] B. W. Bader and T. G. Kolda, “Efficient MATLAB computations with sparse and factored tensors,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 30, pp. 205–231, December 2007.
- [37] R. A. Harshman and M. E. Lundy, “Uniqueness proof for a family of models sharing features of TUCKER’S three-mode factor analysis and PARAFAC/CANDECOMP,” *Psychometrika*, vol. 61, pp. 133–154, Mar 1996.
- [38] E. G. Larsson and P. Stoica, *Space-Time Block Coding for Wireless Communications*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1st ed., 2008.
- [39] L. Bai and J. Choi, *Low Complexity MIMO Detection*. Springer, 2012.
- [40] A. B. Gershman and N. D. Sidiropoulos, *Space-Time Processing for MIMO Communications*. John Wiley & Sons Ltd., 2005.
- [41] M. Sellathurai and S. Haykin, *Space-time layered information processing for wireless communications*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [42] F. R. P. Cavalcanti, A. L. F. de Almeida, C. E. R. Fernandes, and W. C. Freitas Jr., “BLAST/MIMO performance with space-time processing receivers,” in *The 13th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, vol. 2, (Lisboa), pp. 859–863, Sep 2002.
- [43] B. Vucetic and J. Yuan, *Space-Time Coding*. Inglaterra: John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [44] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*. New York, USA: Cambridge University Press, 2005.

- [45] V. Bhojak and A. Sharma, "MIMO wireless systems: V-BLAST architecture," in *Third International Conference on Advanced Computing & Communication Technologies*, (Rohtak), pp. 215–220, Abr 2013.
- [46] A. Sibille, C. Oestges, and A. Zanella, *MIMO: From Theory to Implementation*. USA: Elsevier, 2011.
- [47] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communication: Performance criterion and code construction," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 744–765, Mar 1998.
- [48] H. Jafarkhani, "A quasi-orthogonal space-time block code," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, pp. 1–4, Jan 2001.
- [49] B. Hassibi and B. Hochwald, "Linear dispersion codes," in *IEEE International Symposium on Information Theory*, (Washington), Jun 2001.
- [50] T. M. Duman and A. Ghrayeb, *Coding for MIMO Communication Systems*. England: John Wiley & Sons Ltd, 2007.
- [51] R. Chauhan, R. Singhal, N. S. Thakur, and S. S. Thakur, "Few more quasi-orthogonal space-time block codes with 3-time slots for wireless communication," in *IEEE 3rd International Advance Computing Conference (IACC)*, (Ghaziabad), pp. 431–434, 2013.
- [52] T. M. Syed and N. H. Tran, "Optimal 2×2 space-time block codes based on mutual information in rayleigh fading," in *26th Annual IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, (Regina, SK), pp. 1–4, 2013.
- [53] Y. Liang, W. Chen, and Y. She, "Space-time linear dispersion codes based on optimal algorithms," in *IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems*, (Shanghai), pp. 698–701, 2009.
- [54] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, "Space-time multiplexing codes: A tensor modeling approach," in *7th Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, (Canes, França), 2006.
- [55] D. Liu and A. G. Burr, "Space time codes based on tensor precoding model," in *7th International Symposium on Wireless Communication Systems*, (York), pp. 169–173, Set 2010.

- [56] F. Roemer, N. Sarmadi, B. Song, M. Haardt, M. Pesavento, and A. B. Gershman, "Tensor-based semi-blind channel estimation for MIMO OSTBC-coded systems," in *Conference Record of the Forty Fifth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, (Pacific Grove, CA), pp. 449–453, Nov 2011.
- [57] W. C. Freitas Jr., A. L. F. de Almeida, and J. P. C. L. da Costa, "Blind joint channel estimation and data detection for precoded multi-layered space-frequency MIMO schemes," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 1, pp. 1–15, 2013.
- [58] G. Tsoulos, *MIMO System Technology For Wireless Communications*. Taylor & Francis Group, 2006.
- [59] N. Ammar and Z. Ding, "On blind channel identifiability under space-time coded transmission," in *Conference Record of the Thirty-Sixth Asilomar Conference on*, vol. 1, (Pacific Grove, CA, USA), pp. 664–668, Nov 2002.
- [60] L. C. Tran, T. A. Wysocki, A. Mertins, and J. Seberry, *Complex Orthogonal Space-Time Processing in Wireless Communications*. Springer, 2006.
- [61] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, "Constrained tensor modeling approach to blind multiple-antenna CDMA schemes," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, pp. 2417–2428, jun 2008.
- [62] A. L. F. de Almeida, "Blind joint detection and channel estimation in space-frequency diversity systems using time-varying linear constellation precoding," in *Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, vol. 1, (Curitiba), pp. 1–5, 2011.
- [63] M. Sorensen, P. Comon, S. Icart, and L. Deneire, "PARAFAC2 receivers for orthogonal space-time block codes," *IEEE International Conference on Communications*, 2009.
- [64] C. Oestges and B. Clerckx, *MIMO Wireless Communications: From Real-World Propagation to Space-Time Code Design*. Orlando, FL, USA: Academic Press, Inc., 2007.
- [65] Y. Li, H. Wang, and X.-G. Xia, "On quasi-orthogonal space-time block codes for dual-polarized MIMO channels," *IEEE Transactions Wireless Communicatons*, vol. 11, pp. 397–407, Jan 2012.
- [66] F. Roemer and M. Haardt, "Tensor-based channel estimation and iterative refinements for two-way relaying with multiple antennas and spatial

- reuse,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, pp. 5720–5735, Nov 2010.
- [67] K. Liu, J. P. C. L. da costa, A. L. F. de Almeida, and H.-C. C. So, “A closed form solution to semi-blind joint symbol and channel estimation in MIMO-OFDM systems,” in *IEEE International Conference on Signal Processing, Communication and Computing (ICSPCC)*, (Hong Kong, China), pp. 191–196, Ago 2012.
- [68] F. Roemer, *Advanced Algebraic Concepts for Efficient Multi-Channel Signal Processing*. PhD thesis, Ilmenau University of Technology, 2013.
- [69] N. P. Pitsianis, *The Kronecker Product in Approximation and Fast Transform Generation*. PhD thesis, Cornell University, NY, United States, Jan 1997.