



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

BRENO RAFAEL PINHEIRO SAMPAIO

**SOBRE O NÚMERO DE MILNOR DE GERMES
DE FUNÇÕES HOLOMORFAS**

**FORTALEZA
2015**

BRENO RAFAEL PINHEIRO SAMPAIO

SOBRE O NÚMERO DE MILNOR DE GERMES
DE FUNÇÕES HOLOMORFAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gugel Fernandes

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S181s Sampaio, Breno Rafael Pinheiro
Sobre o número de Milnor de germes de funções holomorfas / Breno Rafael Pinheiro Sampaio. -
2015.
53 f. : il., enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.

Área de Concentração: Matemática

Orientação: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

1. Singularidades. 2. Número de Milnor. 3. Germes holomorfos. I. Título

CDD 510

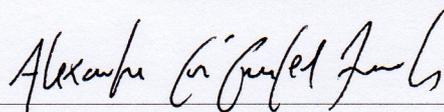
BRENO RAFAEL PINHEIRO SAMPAIO

SOBRE O NÚMERO DE MILNOR DE GERMES
DE FUNÇÕES HOLOMORFAS.

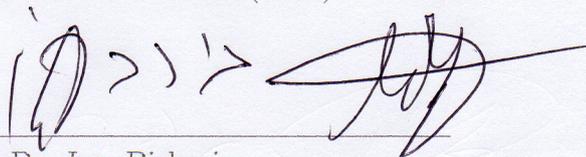
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Singularidades.

Aprovada em: 30/10/2013.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Alexandre César Gugel Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Lev Birbrair
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Vincent Jean Henri Grandjean
Université de Rennes 1 (Rennes 1)

Dedico este trabalho a minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me deixar ter uma vida normal sem limites físicos ou psíquicos e por me dar a mãe que tenho, pois sem ela não seria ninguém. Agradeço também a minha mãe por me apoiar sempre, as minhas irmãs por me deixarem estudar e sempre baixar o som quando eu pedia, aos meus amigos dentro e fora da instituição e aos membros da banca que por mais nervoso que eu tenha ficado acabaram por me aprovar.

Novamente, gostaria de agradecer a minha mãe por sozinha me educar, incentivar, cuidar, dar broncas... Por ser minha mãe. Por sempre estar ao meu lado, fossem os momentos bons ou ruins, por sempre fazer de tudo para eu ser sempre melhor.

Aos meus amigos da UFC Rui Eduardo e Eduardo Garcez por sempre deixar um clima agradável na nossa sala de estudo, ao Edson Sampaio pelas noites de sono perdidas em viradas de estudos, ao Marlon de Oliveira, Anderson Feitoza, Rodrigo Mendes, Leo Ivo, João Nunes, Roger Oliveira, Renan Santos, Rafael Diógenes e tantos outros que me ajudaram no que puderam nessa trajetória tão difícil.

Também não posso esquecer-me dos amigos da Silvio Cópias o próprio Sr. Silvio e ao Robson por sempre me passarem os pedidos no tempo certo, com uma ótima qualidade e sempre me atenderem como membro da família.

Um agradecimento especial aos meu amigos Eduardo Garcez, por ser meu amigo desde o início de nossa graduação, ao Marlon e ao Anderson por saber ouvir e passar bons conselhos quando necessário. Obrigado meus amigos.

Não posso esquecer também do meu orientador, e amigo, Prof. Dr. Alexandre Fernandes, por saber me ajudar a fazer as escolhas certas e sempre ter boas expectativas sobre minha pessoa. A Prof. Dr. Marina Sobolevsky e ao Prof. Me. Manoel Azevedo da UECE por me cederem suas cartas de recomendação e confiarem na minha capacidade. Ao Prof. Dr. Lev Birbrair e ao Prof. Dr. Vincent Grandjean pelas dúvidas tiradas e pela amizade construída.

A Todos que puderam me ajudar diretamente ou indiretamente nesse trabalho o meu muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo mostrar a forma algébrica do número de milnor, passando por diferentes áreas da matemática. Inicialmente mostraremos que o posto de $H_n(F_\theta)$, em que F_θ é a fibra de Milnor de f é igual ao grau da aplicação $\frac{\nabla f(z)}{\|\nabla f(z)\|}$, onde $f : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}_1^{2n+1}$. Em seguida, mostraremos que o grau da aplicação citada é igual ao número de pontos críticos em uma morsificação de f e por fim o número de pontos dessa morsificação é a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/\mathcal{O}_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right)$. Mostrando assim que o número de Milnor pode ser encontrado de diversas formas inclusive de uma forma algébrica.

Palavras-chave: Número de Milnor. Singularidades. Germes Holomorfos.

ABSTRACT

This work aims to show the algebraic form of the Milnor number, passing through different areas of mathematics. Initially we will show that the rank of $H_n(F_\theta)$, where F_θ is the fiber Milnor of f is equal to the degree of application $\frac{\nabla f(z)}{\|\nabla f(z)\|}$, where $f : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}_1^{2n+1}$. Then, we show that the degree of said application is equal to the number of critical points in a morsification of f and finally the number of critical points in a morsification is $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1} / \mathcal{O}_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right)$. showing that the number Milnor can be found in various forms including an algebraic manner.

Keywords: Number of Milnor. Singularities. Holomorphic germs.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	11
2.1	Regularidade de aplicações diferenciáveis	11
2.2	O grau de Brouwer	11
2.3	Teoria de Morse	12
2.3.1	Morsificação	14
3	A Primeira Igualdade: $\mu_1 = \mu_2$	16
3.1	O Teorema da Fibração de Milnor	18
3.2	Topologia da Fibra e de K	23
3.3	O caso de um ponto crítico isolado	27
3.4	A igualdade $\mu_1 = \mu_2$	28
4	Segunda Igualdade: $\mu_2 = \mu_3$	33
4.1	A igualdade $\mu_2 = \mu_3$	35
5	Terceira igualdade: $\mu_3 = \mu_4$	36
5.1	Os teoremas de Weierstrass	38
5.2	Conjuntos Analíticos	41
5.3	Germes de Conjuntos Analíticos	41
5.4	Germes de Aplicação e Homomorfismos de Álgebras Analíticas	42
5.5	O Teorema de Preparação de Weierstrass para Módulos	43
5.6	A dimensão de um Germe de Conjunto Analítico	46
5.7	Um pouco mais sobre pontos críticos isolados	47
5.8	A Igualdade $\mu_3 = \mu_4$	49
6	CONCLUSÃO	52

1 INTRODUÇÃO

Seja $f(z_1, \dots, z_m)$ uma função polinômial em m variáveis complexas. Considere $V = f^{-1}(0)$ e o link $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$, onde \mathbb{S}_ε é uma esfera com raio suficientemente pequeno.

Veremos que $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$, para um ε suficientemente pequeno, é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre \mathbb{S}^1 , com projeção

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus k &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}. \end{aligned}$$

Ou seja, para $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ existe uma vizinhança U_θ de z e um difeomorfismo

$$\psi : U_\theta \times F_\theta \rightarrow \phi^{-1}(U_\theta), \quad F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$$

tal que $\phi \circ \psi_\theta = \pi_1$, sendo π_1 a projeção da primeira coordenada. Este resultado é o Teorema da fibração de Milnor. F_θ é chamada a fibra de Milnor.

Nos anos Sessenta Milnor mostra no livro: "Singular Points of Complex Hypersurfaces." A igualdade entre o posto $H_n(F_\theta)$ e o número de pontos críticos de uma morsificação de f onde tal número recebe o nome de número de Milnor.

Já, P. Orlik em meados dos anos 80, mostra em: "The Multiplicity of a Holomorphic Map at an Isolate Critical Point." Uma outra igualdade sobre o número de Milnor, no caso número de pontos críticos de uma morsificação de f e igual a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1} / \mathcal{O}_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right)$, onde \mathcal{O}_{n+1} é o conjunto dos germes de funções holomorfas em 0, com $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e com isso, temos uma nova descrição para o número de Milnor.

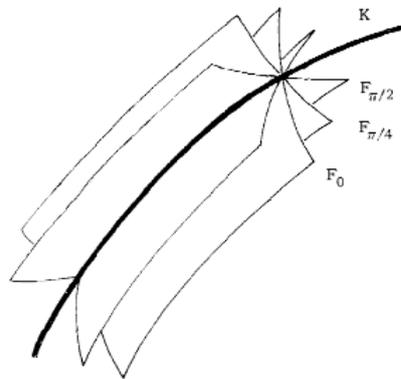
Nesse trabalho iremos mostrar as seguintes descrições para o número de Milnor:

- μ_1 – Posto de $H_n(F_\theta)$, em que F_θ é a fibra de Milnor de f ;
- μ_2 – Grau da aplicação $\frac{\nabla f(z)}{\|\nabla f(z)\|}$, onde $f : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}_1^{2n+1}$;
- μ_3 – Número de pontos críticos em uma morsificação de f ;
- $\mu_4 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1} / \mathcal{O}_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right)$.

Também temos uma outra descrição para o número de Milnor encontrada em (6) pelo seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Se z^0 é um ponto crítico isolado de f então cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia que um buquê $\mathbb{S}^n \vee \dots \vee \mathbb{S}^n$ de n -esferas, sendo o número de esferas nesse buquê estritamente positivo. Cada fibra pode ser considerada como o interior de uma variedade diferenciável compacta com bordo $\tilde{F}_\theta = F_\theta \cup K$, onde a fronteira comum K é uma variedade $(n - 2)$ -conexa.*

Assim, todas as fibras F_θ "cabem" em torno de sua fronteira comum k na forma ilustrada na figura abaixo.



E daí temos que o número de Milnor é definido como o número de esferas do buquet. Este resultado não será mostrado nesse trabalho, mas poder ser encontrado na referência citada.

Esse trabalho está dividido de forma que cada capítulo irá fazer uma prova das equivalências do número de Milnor. No Capítulo 2, faremos a equivalência existente ente μ_1 e μ_2 . No Capítulo 3, a prova da equivalência de μ_2 e μ_3 e por fim no Capítulo 4 a igualdade que leva o nome do trabalho, onde damos uma forma algébrica ao número de milnor, mostrando assim uma relação entre áreas distintas da matemática.

2 PRELIMINARES

2.1 Regularidade de aplicações diferenciáveis

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades de mesma dimensão.

Definição 2.1. Um ponto $x \in M$ é chamado um ponto regular de f , se a derivada df_x é não singular. Um ponto $y \in N$ é chamado um valor regular se $f^{-1}(y)$ contém somente pontos regulares ou é vazio. Se df_x é singular, x é chamado ponto crítico de f . A imagem $f(x)$ é chamado valor crítico de f .

Proposição 2.1. Se M é uma variedade compacta e $y \in N$ é um valor regular, então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.

Demonstração. Como $f^{-1}(y) \subset M$ é fechado com M compacto e de Hausdorff então $f^{-1}(y)$ é compacto. Agora seja $x \in f^{-1}(y)$. Então pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança $V_x \subset M$ de x tal que $f|_{V_x}$ é um difeomorfismo.

Como $(V_x)_{x \in f^{-1}(y)}$ é uma cobertura aberta para $f^{-1}(y)$ e acima vimos que $f^{-1}(y)$ é compacto, então tal cobertura admite uma subcobertura finita, ou seja, $f^{-1}(y) \subset \cup_{i=1}^n V_{x_i}$, onde $x_i \in f^{-1}(y)$. Já que $f|_{V_x}$ é um difeomorfismo, segue que V_x só contém x_i como ponto regular satisfazendo $f(x_i) = y$. Portanto $f^{-1}(y)$ é finito. \square

Teorema 2.1 (Teorema de Sard). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável, onde U é um aberto de \mathbb{R}^n . Se C é o conjunto dos pontos críticos de f , então $f(C) \subset \mathbb{R}^m$ tem medida de Lebesgue nula.*

Corolário 2.1 (A. B. Brown). *Sejam M e N variedades de dimensões finitas. Então o conjunto dos valores regulares de uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é denso em N .*

As provas desses teoremas são encontradas em (7)

Definição 2.2. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Duas aplicações diferenciáveis $f, g : M \rightarrow N$ são chamadas diferencialmente homotópicas (notação $f \sim g$), se existe uma aplicação diferenciável $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ com*

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in M.$$

A aplicação F é chamada homotopia diferenciável entre f e g .

2.2 O grau de Brouwer

Definiremos nessa seção o grau de uma aplicação entre variedades diferenciáveis

Definição 2.3. *A variedade é dita ser fechada se ela for compacta e não possuir pontos de bordo.*

Exemplo 1. *A esfera e o toro bidimensional são bons exemplos de variedades fechadas de dimensão 2.*

Temos algumas estruturas que poderiam ser exemplos também como o disco fechado de dimensão n que é uma variedade compacta, mas não é fechada, por possuir pontos de bordo, já o disco aberto de dimensão n é uma variedade sem pontos de bordo que não é fechada, por não ser compacta.

Para próxima definição, seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, com M e N n – variedades orientadas, com M compacta e N conexa e sem bordo. Considere também $x \in M$ um ponto regular de f . Assim

$$df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

é um isomorfismo linear entre espaços vetoriais orientados.

Definição 2.4 (Grau). *Seja $x \in M$ um ponto regular de f , e $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ um isomorfismo linear entre espaços vetoriais orientados. Definimos o sinal de df_x ($\text{sign}(df_x)$) para ser $+1$ ou -1 , de acordo com df_x preservar ou inverter orientação. Assim para qualquer valor regular de $y \in N$ temos*

$$\text{grau}(f, y) = \text{gr}(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(df_x)$$

Observação 1. *Note que a definição faz sentido já que cada função diferenciável $f : M \rightarrow N$ admite um valor regular (por 2.1)*

Observação 2. *A definição faz sentido mesmo que M não seja compacta, mas com f própria.*

Lembrando que uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é dita própria se a imagem inversa de cada subconjunto compacto de N for compacta.

Proposição 2.2. *O inteiro $\text{gr}(f, y)$ não depende da escolha do valor regular y .*

Com isso, usaremos a notação $\text{gr}(f)$ para representar o grau da aplicação f .

2.3 Teoria de Morse

Em qualquer caso abaixo f é uma função suave de valores reais sobre uma variedade M e $M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M; f(p) \leq a\}$.

Definição 2.5. *Um ponto $p \in M$ é chamado ponto crítico de f se $df(p) \equiv 0$*

Definição 2.6. *Um ponto crítico $p \in M$ de f chama-se não degenerado se a matriz $d^2 f(p)$ é não-singular. Caso contrário, dizemos que p é um ponto crítico degenerado.*

Definição 2.7. Se todos os pontos críticos de f são não degenerados, f é chamada função de Morse.

A cada $d^2f(p)$ temos associada uma forma quadrática $Q(x)$, onde $Q(x) = \langle d^2f(p)x, x \rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, que chama-se a Hessiana de f em p . Sendo $d^2f(p)$ simétrica a forma quadrática $Q(x)$, pode ser reduzida à forma canônica

$$\langle d^2f(p)x, x \rangle = -y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_h^2$$

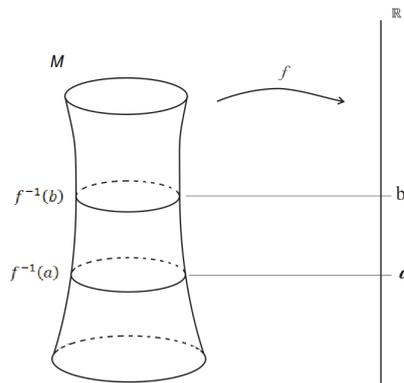
para uma escolha conveniente das coordenadas y_1, \dots, y_h onde $h \leq n$. Se a matriz $d^2f(p)$ é não-singular, então $h = n$. O número λ é chamado o índice de f em p , e o número $n - \lambda$ é chamado o grau de singularidade de f em p .

Lema 2.1 (Lema de Morse). Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado de f , então existe uma vizinhança U de $p \in M$ e um sistema de coordenadas locais (y_1, \dots, y_n) tal que $y_i(p) = 0, i = 1, \dots, n$ e a seguinte identidade se cumpre em U

$$f(q) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2,$$

onde (y_1, \dots, y_n) são as coordenadas de q , e λ é o índice de f em p .

Teorema 2.2. Seja f uma função suave de valores reais sobre uma variedade M . Seja $a < b$ e suponha que o conjunto $f^{-1}[a, b]$ formado por todos os pontos $p \in M$ com $a \leq f(p) \leq b$, é compacto, e não contém pontos críticos de f . Então M^a é difeomorfa a M^b . Além disso, M^a é transformação retrátil de M^b , De modo que a aplicação inclusão $M^a \rightarrow M^b$ é uma equivalência de homotopia.



Proposição 2.3. Se dois espaços topológicos são equivalentes homotópicos, então seus grupos de homologia são isomorfos.

Definição 2.8. Seja $e^k = \{x \in \mathbb{R}^k; \|x\| \leq 1\}$ a k -célula que consiste de todos os vectores no k -espaço Euclidiano com comprimento ≤ 1 . O bordo de uma k -célula é denotado por $\dot{e}^k = \{x \in \mathbb{R}^k; \|x\| = 1\}$.

Proposição 2.4. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, e seja p um ponto crítico não degenerado de índice λ . Fazendo $f(p) = c$, suponha que $f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ é compacto, e não contém pontos críticos de f além de p , para algum $\epsilon > 0$. Então, para todo ϵ suficientemente pequeno, o

conjunto $M^{c+\epsilon}$ tem o mesmo tipo de homotopia de $M^{c-\epsilon}$ com uma λ -célula anexada.

2.3.1 Morsificação

Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa. O conceito de germe de função será melhor desenvolvido no capítulo 3.

Definição 2.9. Um desdobramento de f é um germe de função holomorfa $F : (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ com $F(z, 0) = f(z)$.

Definição 2.10. Uma morsificação de $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é um representante $F : M \times U \rightarrow \mathbb{C}$ de um desdobramento

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^k, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (z, \lambda) &\mapsto f_\lambda(z) \end{aligned}$$

de f tal que para quase todo $\lambda \in U \setminus \{0\}$ (exeto num conjunto de medida nula) a função $f_\lambda : M \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de morse. As funções de morse f_λ que são chamadas morsificações de f .

Proposição 2.5. Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função com singularidade isolada no 0, então f tem uma morsificação.

Demonstração. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ um representante de f , com M uma vizinhança aberta de 0 em \mathbb{C}^{n+1} e consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \nabla f : M &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ z &\mapsto \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Sard, os valores críticos do ∇f forma um conjunto de medida nula em \mathbb{C}^{n+1} .

Seja $\lambda(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{n+1})$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor regular proximo do $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Escrevendo

$$f_\lambda(z) := f(z) - \lambda \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{a}_i z_i$$

temos que um ponto $p \in \mathbb{C}^{n+1}$ é um ponto crítico de f_λ se, e somente se, $\nabla f(p) = \lambda(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{n+1})$. Mas como $\lambda(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{n+1})$ não é um valor crítico do ∇f , temos pelo teorema da função inversa que ∇f é biholomorfa em p , onde

$$\det \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial z_i \partial z_j} (p) \right) \neq 0,$$

ou seja, p é ponto crítico não degenerado de f_λ . Portanto f_λ tem somente pontos críticos não degenerados. Já que o conjunto dos valores regulares da aplicação ∇f é aberto,

podemos substituir $\lambda(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{n+1})$ por uma vizinhança de valor regular $\lambda(a_1, \dots, a_{n+1})$ tal que a função $\tilde{f}_\lambda(z) := f(z) - \lambda \sum_{i=1}^{n+1} a_i z_i$ tenha somente pontos não degenerados com valores críticos distintos.

□

3 A Primeira Igualdade: $\mu_1 = \mu_2$

No que se segue referente a essa seção, apresentaremos dois resultados que serão importantes para o decorrer do capítulo.

Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio tal que $f(0) = 0$ e 0 é um ponto crítico isolado, isto é, existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{C}^{n+1} tal que $df(z) = 0, z \in U$ implica que $z = 0$. Denotemos $V = f^{-1}(0)$ e $\mathbb{S}_\varepsilon = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid \sum_{j=1}^m |z_j|^2 = \varepsilon^2\}$. Temos inicialmente

Proposição 3.1. *Para ε suficientemente pequeno, então $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ é uma subvariedade C^∞*

No caso temos que para $p \in K$, $T_p V + T_p \mathbb{S}_\varepsilon = T_p \mathbb{C}^{n+1}$, ou seja, V é transversal a \mathbb{S}_ε donde segue pelo teorema da função implícita que K é uma subvariedade real de dimensão $2n-1$. A prova dessa proposição pode ser encontrada em (6) Colorário 2.9 ou em (2) Proposição 2.1.

O próximo teorema estabelece a relação entre a topologia de K e a de V e mostra o conhecimento da topologia de K e do mergulho de K em \mathbb{S}_ε nos dá a topologia de V .

Teorema 3.1. *Sejam $\mathbb{B}_\varepsilon = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid \sum_{j=1}^m |z_j|^2 \leq \varepsilon^2\}$, $\mathbb{S}_\varepsilon = \partial \mathbb{B}_\varepsilon$ e $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $V \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ é homeomorfo ao cone $C(K) = \{tz, 0 \leq t \leq 1, z \in K\}$. De fato o par $(\mathbb{B}_\varepsilon, V \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ é homeomorfo ao par $(C(\mathbb{S}_\varepsilon), C(K))$.*

Demonstração. Iremos construir um aplicação

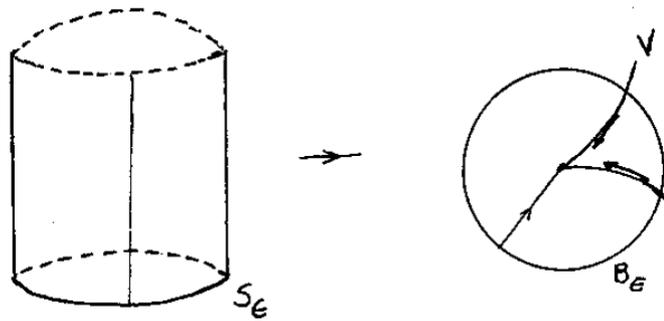
$$p : \mathbb{S}_\varepsilon \times (0, \varepsilon^2] \rightarrow \mathbb{B}_\varepsilon \setminus \{0\} \text{ com } p(a, \varepsilon^2) = a$$

de modo que para $a \in \mathbb{S}_\varepsilon$ fixo, a curva $p(a, t)$ satisfaz:

1. $\|p(a, t)\|^2 = t$
2. $a \in K \implies f(p(a, t)) = 0$ (a curva está contida em V)
3. $p(a, t)$ é definida andando o tempo $-t$ ao longo da trajetória α de um campo v definido em $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus \{0\}$ tal que $\alpha(\varepsilon^2) = a$.

Observe que se $r(z) = \|z\|^2$ então $\frac{d}{dt} r(\alpha(t)) \big|_{t=0} = 2 \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle$, portanto construiremos inicialmente um campo w em $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus \{0\}$ tal que $\langle w(z), z \rangle > 0$ e $v(z)$ é tangente a $V \setminus \{0\}$ se $z \in V \setminus \{0\}$. Temos duas situações:

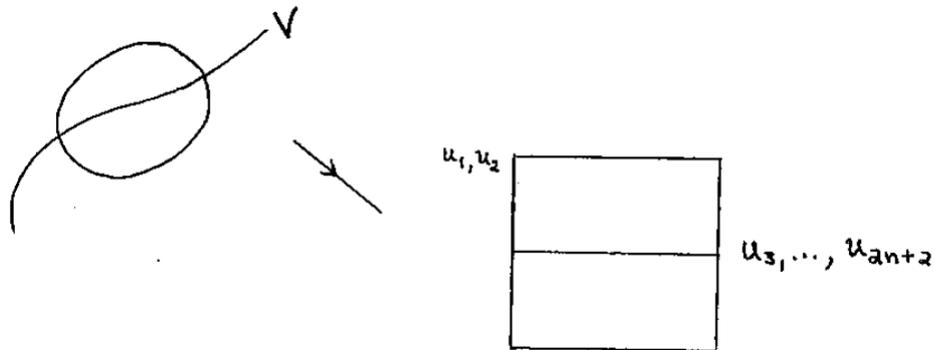
- (i) $z \notin V$, defina localmente $w(y) = y$ para $y \in U$ vizinhança de z disjunta de V (campo radial),



(ii) para $z \in V \setminus \{0\}$ como z não é ponto crítico de $r|_{V \setminus \{0\}}$ podemos escolher um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de z em \mathbb{C}^{n+1} de modo que $V \cap U = \{(u_1, \dots, u_{2n+2}); u_1 = u_2 = 0\}$ e $\frac{\partial r}{\partial u_k}(z) \neq 0$ para algum $k \in \{3, \dots, 2n+2\}$.

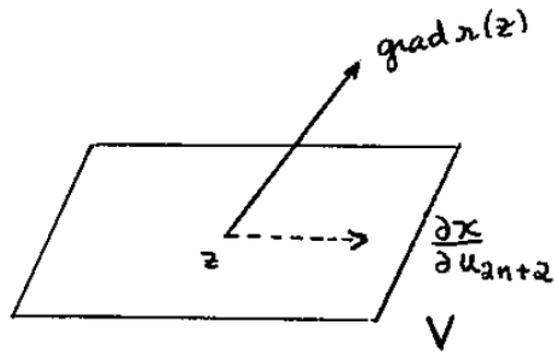
Suponhamos que $\frac{\partial r}{\partial u_{2n+2}}(z) \neq 0$.

Tomando uma vizinhança conexa U_z de z em \mathbb{C}^{n+1} onde $\frac{\partial r}{\partial u_{2n+2}}(z) \neq 0$ e observando que $\frac{\partial r}{\partial u_{2n+2}}(x(u)) = \nabla r(x(u)) \frac{\partial x}{\partial u_{2n+2}} = 2 \langle x(u), \frac{\partial x}{\partial u_{2n+2}}(u) \rangle$ podemos definir $w(x) = \pm \frac{\partial x}{\partial u_{2n+2}}$ de acordo com o sinal de $\frac{\partial r}{\partial u_{2n+2}}(u(x))$.



Tomando-se uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U\}$ de $\mathbb{B}_\epsilon \setminus \{0\}$ obtemos um campo $w \in C^\infty$ que pode ser normalizado por $v(z) = \frac{w(z)}{2 \langle z, w(z) \rangle}$ para que ao considerarmos uma curva integral $\alpha(t)$ de w temos $\frac{d}{dt} \|\alpha(t)\|^2 = 2 \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 2 \langle w(\alpha(t)), \alpha(t) \rangle = \frac{2 \langle w(\alpha(t)), \alpha(t) \rangle}{2 \langle w(\alpha(t)), \alpha(t) \rangle} = 1$ ou seja $r(\alpha(t)) = t$.

Observe que o intervalo maximal de definição de uma curva integral $\alpha(t)$ do campo v é $(0, \epsilon^2]$ (a prova desse fato leva fatos sobre Conjuntos algébricos por isso será



omitida, mas pode ser encontrada em (6), pag.: 20.) Definimos

$$P: \mathbb{S}_\varepsilon \times (0, \varepsilon^2] \rightarrow \mathbb{B}_\varepsilon \setminus \{0\}$$

$$(a, t) \mapsto P(a, t) = \alpha(a, t)$$

onde $\alpha(a, t)$ = curva integral do campo v tal que $\alpha(a, \varepsilon^2) = a$.

É claro que P é um difeomorfismo que restrito a $K \times (0, \varepsilon^2]$ possui imagem em $V \cap \mathbb{B}_\varepsilon \setminus \{0\}$. Finalmente definimos

$$\varphi: C(\mathbb{S}_{\varepsilon\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{B}_\varepsilon$$

$$tz \mapsto P(z, t\varepsilon^2)$$

homeomorfismo que leva $C(t_\varepsilon)$ em $V \cap \mathbb{B}_\varepsilon$.

□

3.1 O Teorema da Fibrção de Milnor

Seja $f(z_1, \dots, z_m)$ uma função analítica de m variáveis complexas. Definimos o gradiente de f por

$$\text{grad} f = (\overline{\partial f / \partial z_1}, \dots, \overline{\partial f / \partial z_m}).$$

Assim, se $z = p(t)$ for um caminho em \mathbb{C}^m , então

$$\frac{df(p(t))}{dt} = \left\langle \frac{dp}{dt}, \text{grad} f \right\rangle,$$

onde \langle, \rangle é o produto interno hermitiano, dado por

$$\langle a, b \rangle = \sum a_j \bar{b}_j,$$

com $a, b \in \mathbb{C}^m$.

Com isso, a derivada direcional de f na direção de um vetor v em um ponto z é dada por

$$df(z) \cdot v = \langle v, \text{grad} f(z) \rangle.$$

Agora, seja $\mathbb{S}_\varepsilon = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid \sum_{j=1}^m |z_j|^2 = \varepsilon^2\}$. Defina $K = f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ o link de f .

Definamos também $\phi : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$ dado por $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.

Lema 3.1. *Os pontos críticos de ϕ são exatamente os pontos $z \in \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$ para os quais o vetor $i \text{grad} \log f(z)$ é um múltiplo real do vetor z .*

Antes, observe que, localmente, o logaritmo pode ser definido como uma função e seu gradiente

$$\text{grad} \log f(z) = \frac{\text{grad} f(z)}{\overline{f(z)}}$$

é bem definido em todo domínio $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$.

Demonstração. Tome $\frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)}$, com $\theta : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K \rightarrow [0, 2\pi)$. Temos que

$$i\theta = \log \left(\frac{f}{|f|} \right) = \log f - \log |f|.$$

Multiplicando a igualdade acima por $-i$ e tomando a parte real dos dois lados, obtemos

$$\theta = \Re(-i \log f).$$

Diferenciando θ ao longo de uma curva $z = p(t)$, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt}(p(t)) &= \Re \left(\frac{d}{dt}(-i \log f) \right) \\ &= \Re \left\langle \frac{dp}{dt}, \text{grad}(-i \log f) \right\rangle \\ &= \Re \left\langle \frac{dp}{dt}, i \text{grad} \log f \right\rangle. \end{aligned}$$

Em outras palavras, a derivada da função $\theta(z)$ na direção $v = dp/dt$ é

$$\Re \langle v, i \text{grad} \log f \rangle.$$

Agora, observe que o espaço vetorial hermitiano \mathbb{C}^m também pode ser visto como um espaço vetorial euclidiano (de dimensão $2m$) sobre os reais, definindo o

produto interno usual de dois vetores a e b como a parte real

$$\Re \langle a, b \rangle = \Re \langle b, a \rangle.$$

Observe, por exemplo, que um vetor v é tangente a esfera \mathbb{S}_ε em z se, e somente se, o produto interno real $\Re \langle v, z \rangle$ é zero. Assim, se o vetor $\text{igrad} \log f(z)$ é um múltiplo real do z (isto é, se este vetor é normal a \mathbb{S}_ε em z), então para todo vetor v tangente a \mathbb{S}_ε em z , a derivada direcional $\Re \langle v, \text{igrad} \log f(z) \rangle$ de θ na direção v é igual a zero. Logo, z é um ponto crítico da aplicação $\phi(z) = e^{i\theta(z)}$.

Por outro lado, se os vetores $\text{igrad} \log f(z)$ e z são L.I. sobre \mathbb{R} , então existe um vetor v satisfazendo

$$\begin{cases} \Re \langle v, z \rangle & = 0 \\ \Re \langle v, \text{igrad} \log f(z) \rangle & = 1. \end{cases}$$

Logo v é tangente a \mathbb{S}_ε e a derivada direcional de θ na direção v é $1 \neq 0$, portanto, z não é ponto crítico de ϕ .

□

Assumindo que $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio tal que $f(0) = 0$ e $V = f^{-1}(0)$. segue o lema

Lema 3.2. *Para todo $z \in \mathbb{C}^m \setminus V$ suficientemente próximo da origem, os vetores z e $\text{igrad} \log f(z)$ são L.I. sobre \mathbb{R} .*

Onde, a prova deste Lema, segue direto do Lema abaixo

Lema 3.3. *Se f for um polinômio que se anula em 0, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}^m \setminus f^{-1}(0)$, $\|z\| \geq \varepsilon_0$ temos: z e $\text{grad}(\log f(z))$ são L.I. sobre \mathbb{C} ou $\text{grad} \log f(z) = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ e $|\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{4}$.*

Prova do Lema 3.2

Demonstração. Ora, pelo Lema 3.3, se tivermos $\text{grad} \log f(z) = \lambda z$, então $\Re(\lambda) > 0$ e, portanto, λ não pode ser imaginário puro. □

Com isso, por 3.1 e por 3.2 segue que

Corolário 3.1. *Se $\varepsilon < \varepsilon_0$, então a aplicação $\phi : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$ não possui pontos críticos.*

Segue por esse Corolário que para cada $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ a imagem inversa

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$$

é uma variedade suave de dimensão real $2m - 2$.

Definição 3.1. F_θ é chamada fibra de Milnor de f .

Observação 3. A definição acima faz sentido, já que todas as fibras F_θ são difeomorfas, como mostraremos.

Lema 3.4. Se $\varepsilon < \varepsilon_0$, existe um campo de vetores tangentes suave $v(z)$ definido em $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$ tal que, para todo $z \in \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$, o produto interno complexo $\langle v(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle$ é não-nulo e o módulo de seu argumento é menor que $\pi/4$.

Vamos construir tal campo localmente, na vizinhança de um ponto z_α .

Demonstração. Nossa prova será dividida em dois casos.

Caso 1: Se z_α e $\text{grad} \log f(z_\alpha)$ são L.I. sobre \mathbb{C} , então existe v tal que

$$\begin{cases} \Re \langle v, z_\alpha \rangle & = 0 \\ \Re \langle v, i\text{grad} \log f(z_\alpha) \rangle & = 1. \end{cases}$$

Logo, v é tangente a \mathbb{S}_ε em z_α .

Caso 2: Se $\text{grad} \log f(z_\alpha) = \lambda z_\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$, tome $v = iz_\alpha$. Então v é tangente a \mathbb{S}_ε em z_α , pois

$$\Re \langle v, z_\alpha \rangle = 0,$$

e pelo Lema 3.3, o número $\langle iz_\alpha, i\text{grad} \log f(z_\alpha) \rangle = \bar{\lambda} \|z_\alpha\|^2$ tem argumento menor que $\pi/4$ em módulo.

Em ambos os casos, pode-se escolher um campo de vetores tangentes local $v_\alpha(z)$ tal que $v_\alpha(z_\alpha) = v$. A condição

$$|\langle v_\alpha(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle| < \pi/4$$

certamente valerá em uma vizinhança de z_α . Usando uma partição da unidade, obtemos um campo de vetores global $v(z)$ com a mesma propriedade.

□

Agora defina o seguinte campo w em $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$:

$$w(z) = \frac{v(z)}{\Re \langle v(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
|\Re \langle w(z), \text{grad} \log f(z) \rangle| &= \left| \Re \left\langle \frac{v(z)}{\Re \langle v(z), i \text{grad} \log f(z) \rangle}, \text{grad} \log f(z) \right\rangle \right| \\
&= \frac{|\Re \langle v(z), \text{grad} \log f(z) \rangle|}{|\Re \langle v(z), i \text{grad} \log f(z) \rangle|} \\
&= \frac{|\Im \langle v(z), i \text{grad} \log f(z) \rangle|}{|\Re \langle v(z), i \text{grad} \log f(z) \rangle|} < 1.
\end{aligned}$$

Onde \Im é a parte imaginária.

Esta última inequação garante que o fluxo gerado pelo campo w está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Pois do contrário, se alguma curva integral $p(t)$ tende a K quando $t \rightarrow t_0 < \infty$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} f(p(t)) = 0$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow t_0} \Re(\log f(p(t))) = -\infty$. Mas isto não ocorre, pois $\frac{d}{dt} \Re(\log f(p(t))) = \Re \langle w(p(t)), \text{grad} \log f(p(t)) \rangle$, ou seja, $\Re \log f(p(t))$ tem derivada limitada.

Alem disso, colocando $\phi(z) = e^{i\theta(z)}$, note que

$$\frac{d\theta(p(t))}{dt} = \Re \left\langle \frac{dp}{dt}, i \text{grad} \log f(z) \right\rangle = 1.$$

Portanto,

$$\theta(p(t)) = t + \text{constante}.$$

Dessa forma, se h é o fluxo gerado por w , então $h_t : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$ é um difeomorfismo tal que $h_t(F_\theta) = F_{\theta+t}$. Portanto, dado $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, seja U_θ um intervalo aberto em \mathbb{S}^1 em torno de $e^{i\theta}$. Então a aplicação

$$\begin{aligned}
\psi : U_\theta \times F_\theta &\rightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \\
(e^{i\alpha}, z) &\mapsto h_{\alpha-\theta}(z)
\end{aligned}$$

é um difeomorfismo entre o produto $U_\theta \times F_\theta$ e $\phi^{-1}(U_\theta)$.

O que prova o Teorema da Fibrção de Milnor enunciado abaixo:

Teorema 3.2 (Teorema da fibrção de Milnor). *Para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, o espaço $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$ é um espaço fibrado suave sobre \mathbb{S}^1 , com aplicação projeção $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$*

Para conclusão dessa seção, apresentaremos um lema que será útil mais tarde. Seja D_ε o disco fechado, cuja fronteira é \mathbb{S}_ε .

Lema 3.5. *Existe um campo de vetores suave v em $D_\varepsilon \setminus V$ tal que o produto interno*

$$\langle v(z), \text{grad} \log f(z) \rangle$$

é real positivo, para todo $z \in D_\varepsilon \setminus V$, e portanto o produto interno $\langle v(z), z \rangle$ tem parte real positiva.

A prova desde Lema é similar à prova de 3.4. Agora, considere as soluções da equação diferencial

$$dp/dt = v(p(t))$$

em $D_\varepsilon \setminus V$. A condição de que

$$\langle dp/dt, \text{grad} \log f(p(t)) \rangle$$

é real e positivo nos diz que o argumento de $f(p(t))$ é constante e que $|f(p(t))|$ é estritamente crescente como função de t .

Portanto, a partir de um ponto interior $z \in D_\varepsilon \setminus V$ e seguindo o fato a trajetória da curva integral, caminhamos para fora da origem, em uma direção de aumento de $|f|$. Até alcançarmos um ponto $z' \in D_\varepsilon \setminus V$, o qual deve satisfazer

$$\frac{f(z')}{|f(z')|} = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

Usando esta correspondência $z \mapsto z'$, provaremos o seguinte Lema:

Lema 3.6. *Seja c uma constante complexa com $|c|$ suficientemente pequeno e $c/|c| = e^{i\theta}$. A interseção do hiperplano $f^{-1}(c)$ com a bola aberta \mathbb{B}_ε é difeomorfa à parte da fibra F_θ que intercepta o conjunto definido pela inequação $|f(z)| > |c|$.*

Demonstração. Tome $z \in (f^{-1}(c) \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$. Assim, $\frac{f(z')}{|f(z')|} = \frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{c}{|c|} = e^{i\theta}$. Portanto, $z' \in F_\theta$ e $|f(z')| > |f(z)| = |c|$. \square

3.2 Topologia da Fibra e de K

No que se segue, descreveremos alguns resultados sobre a topologia da fibra e de $K = \mathbb{S}_\varepsilon \cap V$, onde $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, é uma função polinômial. Tal estudo é baseado em métodos da teoria de Morse.

Agora, seja $m = n + 1$ inteiro positivo. Sabemos que cada fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ é uma variedade suave de dimensão $2n$. Defina as seguintes funções suaves:

$$\begin{array}{ll} a_\theta : F_\theta & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \mapsto \log |f(z)| \end{array} \quad \begin{array}{ll} a : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \mapsto \log |f(z)|. \end{array}$$

Estudaremos inicialmente a função a_θ . em seguida, aproximaremos a_θ por uma função de Morse satisfazendo certas propriedades que permitirão obter os resultados desejados.

Lema 3.7. Os pontos críticos da função a_θ são os pontos $z \in F_\theta$ tais que $\text{grad} \log f(z) = \lambda z$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Seguindo o mesmo procedimento da prova de 3.1, temos que a derivada direcional da função $\log |f(z)| = \Re \log f(z)$ em qualquer direção v é igual ao produto interno real

$$\Re \langle v, \text{grad} \log f(z) \rangle.$$

Assim, z é ponto crítico dessa função, se, e somente se, $\text{grad} \log f(z)$ é normal a F_θ em z (de acordo com o produto interno real).

Mas, pelo Lema 3.2, vemos que o espaço de vetores normais à subvariedade $F_\theta \subset \mathbb{C}^m$, de codimensão real 2, é gerado pelos vetores linearmente independentes de z e $i \text{grad} \log f(z)$. Logo, z é ponto crítico de a_θ se, e somente se, existir uma relação linear real entre os vetores $\text{grad} \log f(z)$, z e $i \text{grad} \log f(z)$.

□

Agora, daremos início ao estudo da Hessiana de a_θ em um ponto crítico, para calcular o índice de Morse. Dado um vetor tangente v em um ponto crítico z , tome um caminho suave $p : \mathbb{R} \rightarrow F_\theta$ tal que $\frac{dp}{dt} = v$ e $p(0) = z$. Então a segunda derivada

$$\ddot{a}_\theta = \frac{d^2 a_\theta}{dt^2}(p(t))$$

em $t = 0$ pode ser expressa com uma função quadrática de v , como mostra o seguinte Lema:

Lema 3.8. A segunda derivada de $a_\theta(p(t))$ em $t = 0$ é dada por uma expressão da forma

$$\ddot{a}_\theta = \sum \Re(b_{jk} v_j v_k) - c \|v\|^2,$$

onde (b_{jk}) é uma matriz de números complexos e c é um número real positivo.

Definição 3.2. Seja $H : T_z F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(v) = \Re \left(\sum b_{jk} v_j v_k \right) - c \|v\|^2.$$

Defina o índice de Morse de a_θ no ponto crítico z , denotado por I , como sendo a maior dimensão possível de um subespaço linear de $T_z F_\theta$ no qual H é definida negativamente. Respectivamente para o índice de Morse da função a .

Lema 3.9. O índice de Morse de $a_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto crítico é $\geq n$. Consequentemente, o índice de Morse de $a : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ em qualquer ponto crítico também é $\geq n$.

Demonstração. Se $H(v) \geq 0$ para todo $v \neq 0$, note que $H(iv) < 0$, pois o primeiro termo

da expressão de $H(v)$ muda de sinal, enquanto o segundo permanece negativo. Note também que $iv \in T_z F_\theta$. Agora, fature o espaço tangente em z como uma soma direta real $T_0 \oplus T_1$, onde a Hessiana H é definida negativa em T_0 e semi-definida positiva em T_1 . Claramente, a dimensão de T_0 é igual ao índice de Morse I . Mas H também é definida em iT_1 . Portanto, temos:

$$I \geq \dim(iT_1) = \dim(T_1) = 2n - I.$$

Logo, $I \geq n$. Além disso, como todo ponto crítico de a é também ponto crítico de a_θ , para θ apropriado, e como o índice de a em z é claramente maior ou igual ao índice de a_θ em z , concluímos a prova. \square

Para podermos aproximar a_θ por uma função de Morse, precisamos do Lema abaixo, o qual mostra que todos os pontos críticos de a_θ estão dentro de um subconjunto compacto de F_θ (ou de $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$, respectivamente):

Enunciaremos o Lema de Seleção da curva, que será utilizado na demonstração do lema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em (2).

Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto algébrico de real, e seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto definido por um número finito de desigualdades polinômiais,

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m; g_1(x) > 0, \dots, g_k(x) > 0\},$$

isto é, U é um conjunto semi-algébrico.

Lema 3.10 (Lema de Seleção da Curva). *Se $U \cap V$ contém pontos arbitrariamente próximos da origem, isto é, se 0 pertence ao fecho de $U \cap V$, então existe uma curva analítica real*

$$p : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

com $p(0) = 0$ e com $p(t) \in U \cap V$, para $t > 0$.

Lema 3.11. *Existe uma constante $\eta_\theta > 0$ tal que os pontos críticos de a_θ dentro do subconjunto compacto $\{z; |f(z)| \geq \eta_\theta\}$ de F_θ . De maneira similar, existe $\eta > 0$ tal que os pontos críticos z de a satisfazem $|f(z)| \geq \eta$.*

Faremos a prova apenas para o caso a_θ :

Demonstração. Se existir pontos críticos z de $a_\theta = \log |f|$ em F_θ com $|f(z)|$ arbitrariamente próximo do zero. Então esses pontos críticos tem um ponto limite z_0 no conjunto compacto \mathbb{S}_ε . Pelo Lema de Seleção da Curva 3.10, existe um caminho suave $p : (0, \delta) \rightarrow F_\theta$ constituído apenas de pontos críticos, com $p(t) \rightarrow z_0$ quando $t \rightarrow 0$. Claramente a função a_θ é constante ao longo desse caminho. Portanto $|f|$ é constante e então não

tende a $|f(z_0)| = 0$, uma contradição. \square

Lema 3.12. *Existe uma aplicação suave $s_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que todos os pontos críticos de s_θ são não-degenerados, com índice de Morse $I \geq n$ e tal que $s_\theta(z) = |f(z)|$ se $|f(z)|$ está suficientemente próximo de zero. Analogamente, existe uma aplicação suave $s : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{R}_+$ com todos os pontos críticos de s são não-degenerados, com índice de Morse $I \geq n$ e tal que $s(z) = |f(z)|$ se $|f(z)|$ está suficientemente próximo de zero.*

Demonstração. Inicialmente, observe que todos os pontos críticos de $a_\theta = \log |f|$ estão num compacto, e têm índice de Morse $I \geq n$, o mesmo ocorre em relação aos pontos críticos de $|f|$. Por outro lado, as funções de Morse formam um aberto denso em $C^\infty(F_\theta, \mathbb{R})$ (ver (5)) e portanto podemos escolher $s_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}_+$, de Morse, que coincide com $|f|$ fora de uma vizinhança compacta que contém os pontos críticos de $|f|$. Nesse compacto, s_θ aproxima $|f|$ uniformemente em classe C^∞ e como os pontos críticos de $|f|$ têm índice de Morse $I \geq n$, o mesmo é verificado para os pontos críticos de s_θ . \square

Observação 4. *Como todos os pontos críticos de s_θ são não degenerados, eles são isolados. Além disso, estão contidos em um compacto. Logo, s_θ tem somente um número finito de pontos críticos.*

Proposição 3.2. *Cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão n*

Para aplicarmos a teoria de Morse na sua forma usual, faz-se necessário o uso de uma aplicação $g_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade de que o conjunto dos z tais que $g_\theta(z) \leq c$ é compacto, para cada constante real c .

Demonstração. Claramente a função $g_\theta(z) = -\log s_\theta(z)$ satisfaz esta condição, ou seja, $g^{-1}(-\infty, c] = s_\theta^{-1}[e^{-c}, \infty)$ é compacto, para todo $c \in \mathbb{R}$. Como o índice de Morse de s_θ (ou de $\log s_\theta$) num ponto crítico z é $\geq n$, o índice de $-\log s_\theta$ é $\tilde{I}_\theta = \dim(T_z F_\theta) - I = 2n - I \leq n$.

Agora, de acordo com o teorema principal da teoria de Morse, a variedade F_θ tem mesmo tipo de homotopia que um complexo CW obtido pela adjunção de uma célula de dimensão $\tilde{I}_\theta \leq n$. Como existem finitos pontos críticos, o complexo CW é finito. \square

Para concluir essa seção, daremos uma descrição alternativa da fibra de Milnor, com base no Lema 3.6. Nas hipóteses daquele lema, tome $|c|$ suficientemente pequeno. Então, segue do lema 3.11 que a porção da fibra F_θ definida por $|f(z)| > |c|$ é difeomorfa a toda a fibra F_θ . Assim, acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Se o número complexo $c \neq 0$ está suficientemente próximo de zero, então a interseção da hipersuperfície complexa $f^{-1}(c)$ com a bola aberta \mathbb{B}_ε é uma variedade suave difeomorfa à fibra F_θ .*

3.3 O caso de um ponto crítico isolado

Agora, adicione a hipótese de que o polinômio $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ não tem pontos críticos em uma vizinhança da origem, exceto possivelmente na própria origem. Então, pelo Lema 2.5 de (6), segue que a origem é um ponto não-singular ou é um ponto singular isolado da hipersuperfície $V = f^{-1}(0)$. Suponha também que $n \geq 1$.

De acordo com 3.1 o link $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ é uma $(2n - 1)$ -variedade suave. Agora, para um ε suficientemente pequeno. Esta afirmação pode ser melhorada como segue.

Proposição 3.3. *Para ε suficientemente pequeno, o fecho de cada fibra F_θ em \mathbb{S}_ε é uma $2n -$ variedade suave com bordo, o interior dessa variedade sendo F_θ e o bordo sendo precisamente K .*

Proposição 3.4. *A variedade compacta com bordo \tilde{F}_θ está mergulhada em \mathbb{S}_ε de modo que $\pi_i(\tilde{F}_\theta) \simeq \pi_i(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta)$*

Demonstração. Ora, $\varphi_\varepsilon : \mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta \rightarrow \mathbb{S} - e^{i\theta}$ é uma fibração localmente trivial. Como $\mathbb{S} - e^{i\theta}$ é contrátil, então $\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta$ possui qualquer outra fibra de $F_{\theta'}$ com $\theta' \neq \theta$ como retrato por deformação. Portanto, $\pi_i(F'_\theta) \simeq \pi_i(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta)$, mas F'_θ é difeomorfa a F_θ , logo $\pi_i(F'_\theta) \simeq \pi_i(\tilde{F}_\theta) \simeq \pi_i(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta)$ \square

Vale observa que pela Proposição 3.2 $H_i(F_\theta) = 0$ para $i > n$.

Proposição 3.5. *A homologia de F_θ está concentrada nas dimensões 0 e n e $H_0(F_\theta) \simeq \mathbb{Z}$*

Demonstração. Já sabemos pela Proposição 3.4 que $H_i(F_\theta) \simeq H_i(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta)$, já que F_θ é difeomorfa a um retrato de deformação de $\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta$ basta considerar $H_i(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta)$. A dualidade de Alexander fornece um isomorfismo

$$\tilde{H}^{2n-1-k}(\tilde{F}_\theta) \simeq H_k(\mathbb{S}_\varepsilon, \mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta).$$

Agora, observe a sequência exata de homologia

$$\cdots \longrightarrow H_k(\mathbb{S}_\varepsilon) \longrightarrow H_k(\mathbb{S}_\varepsilon, \mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) \longrightarrow H_{k-1}(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) \longrightarrow H_{k-1}(\mathbb{S}_\varepsilon) \longrightarrow \cdots$$

Portanto, para $2 \leq k \leq n$ temos um isomorfismo

$$H_{k-1}(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) \simeq H_k(\mathbb{S}_\varepsilon, \mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) \simeq \tilde{H}^{2n-1-k}(\tilde{F}_\theta).$$

Lembrando que por 3.2 $\tilde{H}^{2n-1-k}(\tilde{F}_\theta) = 0$ quando $2n + 1 - k > n$, ou seja, $0 <$

$k - 1 < n$. Por outro lado também temos

$$\dots \longrightarrow H_{2n+1}(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) \longrightarrow H_{2n+1}(\mathbb{S}_\varepsilon) \longrightarrow H_{2n+1}(\mathbb{S}_\varepsilon, \mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) \longrightarrow H_{2n}(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) \longrightarrow \dots$$

Como $H_{2n+1}(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) = 0$, $H_{2n}(\mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) = 0$ e $H_{2n+1}(\mathbb{S}_\varepsilon) \simeq \mathbb{Z}$. Segue que $H_{2n+1}(\mathbb{S}_\varepsilon, \mathbb{S}_\varepsilon - \tilde{F}_\theta) \simeq \tilde{H}^0(\tilde{F}_\theta) \simeq \mathbb{Z}$, ou seja, F_θ é conexa.

□

3.4 A igualdade $\mu_1 = \mu_2$

Antes da prova vale lembrar que precisamos ter uma relação entre o grau de uma aplicação $v : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$ e a topologia de uma subvariedade de \mathbb{S}^k . Esta relação será encontrada no lema logo abaixo.

Inicialmente o número de Lefschetz de uma aplicação $g : N \rightarrow N$ é definido por

$$\Lambda(g) = \sum_j (-1)^j \cdot \text{traço}(g_* : H_j(N) \rightarrow H_j(N)).$$

De acordo com [Hopf] no caso de N ser uma subvariedade C^∞ orientada $\Lambda(g)$ é igual ao índice de interseção entre o gráfico de g ($\text{graf}(g) = \{(x, y) \in N \times N | y = g(x)\}$) e $\Delta(N) = \{(x, y) \in N \times N | y = x\}$. Observe que $\text{graf}(g) \cap \Delta(N) = \text{Fix}(g)$ e que podemos supor (fazendo homotopia) que $\text{graf}(g)$ é transversal a $\Delta(N)$. Isto significa que $dg(x) : T_x N \rightarrow T_x N$ é não singular, de maneira que nestas circunstâncias podemos definir o índice $i_g(x)$ de g em x como

$$i_g(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } dg(x) \text{ preservar orientação em } T_x N \\ -1 & \text{se } dg(x) \text{ inverte orientação em } T_x N \end{cases}$$

Isto é, $i_g(x)$ é o número de interseção de $\Delta(N)$ e $\text{graf}(g)$ no ponto (x, x) . Portanto temos

$$\sum_{x \in \text{Fix}(g)} i_x(g) = \Lambda(g) = \sum_j (-1)^j \cdot \text{traço}(g_* : H_j(N) \rightarrow H_j(N)).$$

Lema 3.13. *Seja $v : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$ uma aplicação C^∞ e $M \subset \mathbb{S}^k$ uma região compacta de \mathbb{S}^k com bordo suave. Suponhamos que*

1. *Se todo ponto fixo da aplicação $v : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$ está no interior de M ($\text{Fix}(v) \subset M$);*
2. *Se Nenhum ponto x de M é aplicado em seu antipoda $-x$ por v ($v(x) \neq -x, \quad \forall x \in M$);*
3. *Se o produto interno euclidiano $\langle v(x), n(x) \rangle$ (onde $n(x) \in T_x \mathbb{S}^k$ é um vetor normal a*

∂M que aponta para o interior de M) é positivo para todo $x \in \partial M$.

Então o número de Euler $\chi(M)$ está relacionado ao grau d de v pela igualdade

$$\chi(M) = 1 + (-1)^k d.$$

Demonstração. Para $v : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$ temos:

$$\Lambda(v) = \sum_j (-1)^j \cdot \text{traço}(v_* : H_j(\mathbb{S}^k) \rightarrow H_j(\mathbb{S}^k)) = 1 + (-1)^k \cdot gr(v).$$

Podemos supor que v tem pontos fixos isolados.

Como $v(x) \neq -x$ para todo $x \in M$, podemos definir $v_t : M \rightarrow \mathbb{S}^k$ por

$$v_t(x) = \frac{(1-t)x + tv(x)}{\|(1-t)x + tv(x)\|}.$$

A hipótese 3 nos garante que para t suficientemente pequeno $v_t(M) \subset M$. Logo, pela invariância do número de Lefschetz temos para $0 \leq t \leq \delta$

$$\Lambda(v_t) = \Lambda(v_0) = \Lambda(I_M) = \chi(M).$$

Novamente usando $v(x) \neq -x$ em M vemos que $Fix(v_t) = Fix(v)$ para todo t . Além disso $i_x(v_t) = i_x(v)$ se $x \in Fix(v)$, portanto pela fórmula de Lefschetz

$$1 + (-1)^k \cdot gr(v) = \Lambda(v) = \sum_{x \in Fix(v)} i_x(v) = \sum_{x \in Fix(v_t)} i_x(v_t) = \Lambda(v_t) = \chi(M).$$

□

Teorema 3.4. O número de Betti da fibra de Milnor F_θ (μ_1) é igual a multiplicidade μ_2 . Ou seja, o grupo de homologia $H_n(F_\theta)$ tem posto μ_2

Demonstração. Consideremos

$$M = \{z \in \mathbb{S}_\varepsilon \mid \Re f(z) \geq 0\},$$

onde \Re é a parte real de $f(x)$, no caso M é a união de fibras F_θ , onde θ varia ao longo do intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, juntamente com o bordo comum K , ou seja,

$$M = \left(\bigcup_{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} F_\theta \right) \cup K.$$

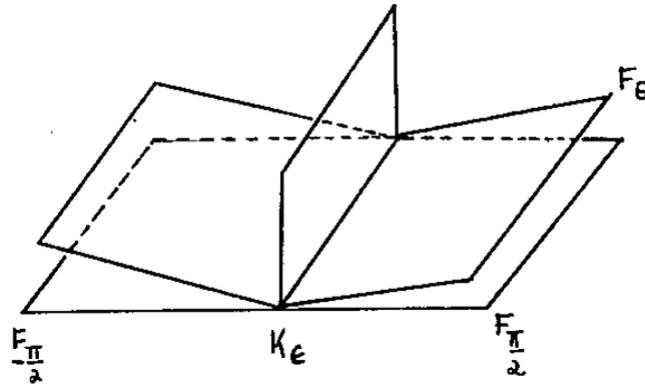
Com isso temos

$$\partial M = F_{-\frac{\pi}{2}} \cup K \cup F_{\frac{\pi}{2}}$$

que é uma variedade suave.

Observe também que $\varphi_\varepsilon : \text{int}(M) \rightarrow C$ onde C é o semi-circulo $C = \{e^{i\theta} \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ é uma fibração, cuja fibra típica é F_θ . Com isso e por 3.5, temos que

$$\chi(M) = \chi(F_\theta) = \sum_j (-1)^j \text{posto} H_j(F_\theta) = 1 + (-1)^n \text{posto} H^n(F_\theta). \quad (1)$$



Agora, seja $v : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}_\varepsilon$ tal que $v(z) = \varepsilon \frac{\text{grad } f(z)}{\|\text{grad } f(z)\|}$. Nosso objetivo é mostrar que v e M como definidos, satisfazem as hipóteses do lema 3.13.

Mas, antes disso, vale lembrar que

$$\text{grad } f = (\overline{\partial f / \partial z_1}, \dots, \overline{\partial f / \partial z_{n+1}})$$

o que não condiz com a definição de grau onde

$$\mu_2 = \text{gr} \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right),$$

com $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}$ e $\nabla f = (\partial f / \partial z_1, \dots, \partial f / \partial z_{n+1})$.

Assim para obter μ_2 referente a aplicação v , devemos compor v com a conjugação $g(z) = (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_{n+1}})$ e com isso

$$\mu_2 = \text{gr}(g \circ v) = \text{gr}(g) \cdot \text{gr}(v) = (-1)^{n+1} \text{gr}(v)$$

Com esse fato apresentado, vamos seguir com a prova.

Hipótese (1)

Seja z um ponto fixo de v , logo

$$v(z) = z = \varepsilon \frac{\text{grad } f(z)}{\|\text{grad } f(z)\|}$$

e com isso $\text{grad } f(z) = \lambda z$, com $\lambda > 0$. Já sabemos pela Proposição 3.1, que $f^{-1}(0)$ é transversal a \mathbb{S}_ε , com isso $z \in K$ e $\text{grad } f(z)$ são linearmente independentes. Assim se $\text{grad } f(z) = \lambda z$ então $f(z) \neq 0$. Dai, observe que

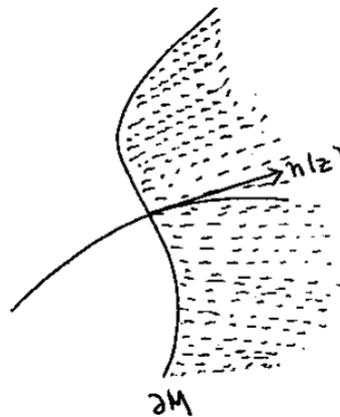
$$\text{grad } \log f(z) = \frac{1}{f(z)} \text{grad } f(z) = \frac{\lambda z}{f(z)},$$

donde segue pelo lema 3.3 que $\Re \frac{\lambda}{f(z)} > 0$ e como $\lambda > 0$ segue que $\Re f(z) > 0$ e assim $z \in \text{int}(M)$.

Hipótese (2) Sai de forma análoga a hipótese (1), so que nesse caso, $\lambda < 0$ vai nos dar que $\Re f(z) < 0$ e com isso esse pontos não estão em M .

Hipótese (3) Seja $z \in \partial M$ e seja $p(z)$ um caminho suave transversal ao ∂M de modo que $p(0) = z$ e $p'(0) = n(z)$, então

$$\left. \frac{d}{dt} \Re f(p(t)) \right|_{t=0} > 0$$



Mas,

$$\left. \frac{d}{dt} f(p(t)) \right|_{t=0} = \langle p'(t), \text{grad } f(p(t)) \rangle \Big|_{t=0} = \langle n(z), \text{grad } f(z) \rangle$$

donde vem que $\Re \langle n(z), \text{grad } f(z) \rangle > 0$ e pelo lema 3.13 segue que

$$\chi(M) = 1 + (-1)^{2n+1} gr(v) = 1 + (-1)^{2n+1} (-1)^{n+1} \mu_2 = 1 + (-1)^n \mu_2 \quad (2)$$

Portanto, pela igualdade das equações (2.1) e (2.2) segue que

$$\mu_1 = \text{Posto}(H_n(F\theta)) = \mu_2$$

□

4 Segunda Igualdade: $\mu_2 = \mu_3$

Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um polinômio com ponto crítico isolado em 0. Se \mathbb{S}_ε é uma esfera centrada em 0 de modo que 0 é o único ponto crítico na bola \mathbb{B}_ε podemos definir a aplicação $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}_1^{2n+1}$ por $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(z) = \frac{\nabla f(z)}{\|\nabla f(z)\|}$ onde $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right)$ e (z_1, \dots, z_{n+1}) são as coordenadas usuais de \mathbb{C}^{n+1} que desde modo possui uma orientação natural. Se \mathbb{S}_ε está orientada como o bordo de \mathbb{B}_ε de modo que $T\mathbb{S}_\varepsilon + u$ nos dá um referencial positivo em \mathbb{C}^{n+1} definimos a *multiplicidade gradiente* de f em 0 por

$$\mu_1(f) = gr\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right).$$

Proposição 4.1. *Seja M^{n+1} uma variedade orientada com bordo de modo que ∂M está orientada como bordo de M . Se $g : \partial M \rightarrow N^m$ se estende a uma aplicação $G : M \rightarrow N^m$ então $gr(g) = 0$. Segue então que se g e h são aplicações homotópicas, então $gr(g) = gr(h)$.*

As provas dessas duas proposições acima podem ser encontradas em (7).

Lema 4.1 (Princípio de Rouché). *Sejam $r, L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ duas aplicações holomorfas em uma vizinhança de z_0 tais que $\|r(z)\| < \|L(z)\|$ para todo $z \in \mathbb{S}_\varepsilon$ esfera de centro z_0 e raio ε . Então $gr\left(\frac{L+r}{\|L+r\|}\right) = gr\left(\frac{L}{\|L\|}\right)$ (ambas restritas à \mathbb{S}_ε).*

Demonstração. Para mostrar esse resultado, vamos fazer uso da Prop 4.1, ou seja, devemos mostrar que existe uma homotopia $H : \mathbb{S}_\varepsilon \times I \rightarrow \mathbb{C}^m$ tal que $H(z, 0) = H_0(z) = \frac{L(z)}{\|L(z)\|}$ e $H(z, 1) = H_1(z) = \frac{L(z)+r(z)}{\|L(z)+r(z)\|}$. Fazendo $H_\lambda(z) = \frac{L(z)+\lambda r(z)}{\|L(z)+\lambda r(z)\|}$ temos a homotopia desejada, já que $L(z) + \lambda r(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{S}_\varepsilon$ e $\lambda \in I$, pelo fato de termos $\|r(z)\| < \|L(z)\|$. Daí o resultado segue direto pela Proposição 4.1. \square

Proposição 4.2. *Se 0 é um ponto crítico não degenerado de f (isto é, a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\right)(0)$ é não singular), então $\mu_2 = 1$.*

Demonstração. Considere a expansão de Taylor com resto

$$\nabla f(z) = L \cdot z + r(z),$$

onde $L = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\right)(0)$ é uma transformação linear não singular por hipótese e $\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{r(z)}{|z|} = 0$. Temos que para um ε suficientemente pequeno, então $\|r(z)\| < \|L(z)\|$ para todo $z \in \mathbb{S}_\varepsilon$. Com isso, pelo Lema 4.1 obtemos

$$gr\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right)\Big|_{\mathbb{S}_\varepsilon} = gr\left(\frac{L+r}{\|L+r\|}\right)\Big|_{\mathbb{S}_\varepsilon} = gr\left(\frac{L}{\|L\|}\right)\Big|_{\mathbb{S}_\varepsilon}.$$

Agora, deformando L continuamente para a identidade dentro do grupo $GL(n+1, \mathbb{C})$, pois $GL(n+1, \mathbb{C})$ (grupo de todas as transformações lineares não singulares) é conexo por

caminhos. Daí, $gr\left(\frac{L}{\|L\|}\right) = gr\left(\frac{id}{\varepsilon}\right) = 1$. O que completa a prova. \square

Observação 5. Os fatos apresentados acima valem para um ponto crítico isolado qualquer.

Agora iremos estabelecer uma relação entre μ_2 e a multiplicidade. Para isso, usaremos o Lema abaixo.

Lema 4.2. Seja D uma região compacta em \mathbb{C}^{n+1} com bordo suave. Se $\nabla f^{-1}(0) \cap D$ e $\nabla f^{-1}(0) \cap \partial D = \emptyset$, então o número de zeros de ∇f em D (contados como multiplicidade) é igual a μ_2 . Isto é, se $\partial f^{-1}(0) \cap D = \{p_1, \dots, p_r\}$ e $\mu_2^i(f)$ é o grau de $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ restrita a uma pequena esfera em torno de p_i então

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^r \mu_2^i.$$

O lema acima quando citado para funções de uma variável complexa e conhecido como *Princípio do Argumento*.

A demonstração deste lema baseia-se na Proposição 4.2.

Demonstração. Seja D_i um disco fechado centrado em p_i para $i = 1, \dots, r$ com $D_i \subset D$ e $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e seja

$$D' = D - \bigcup_{i=1}^r D_i$$

, temos que $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ é contínua em D' (já que os zeros de ∇f com suas vizinhanças foram retirados).

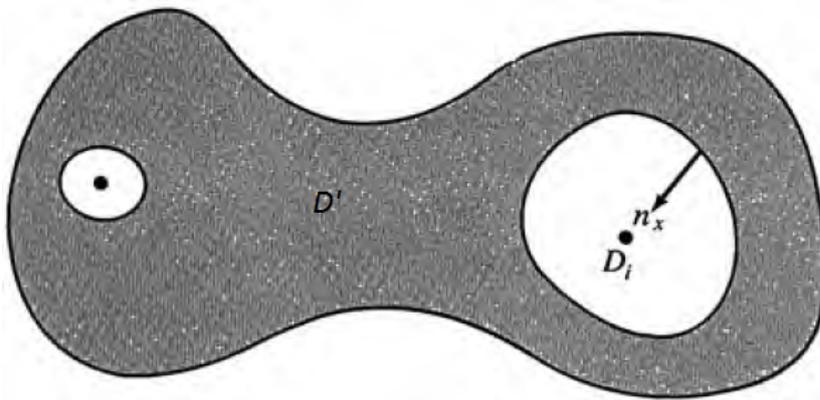


Figura 1:

Observe na Figura 1 que o bordo de cada D_i em D' tem orientação invertida (ou seja, o vetor normal aponta para dentro), logo

$$\partial D' = \partial D - \bigcup_{i=1}^r \partial D_i,$$

(onde $-\bigcup_{i=1}^r \partial D_i$ representa a orientação invertida dos bordos) e como o $\text{grau}_{\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}}|_{\partial D'} = 0$ concluímos que $\text{grau}_{\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}}|_{\partial D} = \text{grau}_{\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}}|_{\partial D_i}$. \square

Mais detalhes sobre essa prova podem ser encontradas em (4).

4.1 A igualdade $\mu_2 = \mu_3$

Proposição 4.3. *Seja $B_\varepsilon \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é uma bola fechada centrada em 0 que não contém outros zeros de ∇f e $\tilde{f}_\lambda(z) = f(z) - \lambda z$, para $\lambda \in \mathbb{C}$, uma morsificação de f , então para quase todo ponto $a = \lambda b \in \mathbb{C}^{n+1}$ em uma vizinhança de 0 a equação $\nabla \tilde{f}(z) = \nabla f(z) - a = 0$ possui exatamente μ_2 soluções em B_ε .*

Demonstração. Inicialmente vale observar que a é ponto crítico da aplicação $\nabla \tilde{f}$ se, e somente se, $\nabla f(z) - a = 0$. Assim, de acordo como Teorema de Sard (Teorema 2.1) o complementar do conjunto $\{a \in \mathbb{C}^n \text{ é um valor regular da aplicação } \nabla f\}$ possui medida de Lebesgue nula, a matrix $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\right)$ é não singular em todo ponto z na imagem inversa de $\nabla f^{-1}(a)$. Com isso, as soluções da equação $\nabla f(z) - a = 0$ são pontos isolados, e formam um subconjunto finito em \mathbb{B}_ε (2.1). E por 4.2 cada solução tem multiplicidade +1.

Tomando-se os valores regulares a de ∇f que satisfazem $\|a\| < \|\nabla f(z)\|$ para todo $z \in \mathbb{S}_\varepsilon$, então o número de soluções de $\nabla f(z) - a$ em \mathbb{B}_ε é igual a o grau de $\frac{\nabla f(z) - a}{\|\nabla f(z) - a\|}$ restrita a $\mathbb{S}_\varepsilon = \partial \mathbb{B}_\varepsilon$. Ora, mas por (4.1) temos que $\text{gr}\left(\frac{\nabla f(z) - a}{\|\nabla f(z) - a\|}\right)|_{\mathbb{S}_\varepsilon} = \text{gr}\left(\frac{\nabla f(z)}{\|\nabla f(z)\|}\right)|_{\mathbb{S}_\varepsilon} = \mu_2$. O que mostra $\mu_2 = \#\{\nabla f^{-1}(a) \cap D_\varepsilon | a \text{ é valor regular de } \nabla f \text{ proximo de } 0\} = \mu_3$. \square

5 Terceira igualdade: $\mu_3 = \mu_4$

Considere o conjunto solução do sistema de equações

$$f_1(z) = \dots f_m(z) = 0,$$

onde $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, são funções holomorfas. Iremos estudar as soluções desse conjunto localmente. Assim se $w \in \mathbb{C}^n$ e U, V são vizinhanças abertas de w temos

Definição 5.1. Duas funções $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ são chamadas equivalentes em um ponto w se, e somente se, existir uma vizinhança aberta W de w tal que $W \subset U \cap V$ e $f|_W = g|_W$. A classe de equivalência de tais funções é chamada **germes de funções** em w .

Se U é uma vizinhança aberta de w e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função, então f pertence a uma classe de equivalência chamada germes de função de f , denotada por \bar{f} .

Com isso, duas funções f e g equivalentes em w tem o mesmo valor $f(w) = g(w)$ em w ; este valor é chamado valor do germe de função \bar{f} em w .

Dado um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, fazendo

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}$$

Tal conjunto tem a estrutura de anel comutativo com unidade em relação às operações induzidas de adição e multiplicação de funções. Daí, escrevendo o conjunto dos germes de função holomorfa em $w \in U$ como \mathcal{O}_w , sendo $\mathcal{O}_w \subset \mathcal{O}(U)$ então \mathcal{O}_w é induzida a ser um anel comutativo com unidade pela operações de $\mathcal{O}(U)$.

O conjunto \mathcal{O}_0 será nosso veículo maior de estudo sendo representado por \mathcal{O} . Se $w \in U \subset \mathbb{C}^n$ então $\mathcal{O}_{n,w}$ representa o espaço dos germes de funções holomorfas em w , portanto $\mathcal{O}_{n,0}$ será \mathcal{O}_n .

Denotaremos o anel de uma serie de potências formal

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

nas incógnitas z_1, \dots, z_n por $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] = \mathbb{C}[[z]]$.

Definição 5.2. Seja $w \in \mathbb{C}^n$. Uma série de potências formal

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-w)^k \in \mathbb{C}[[z-w]]$$

em torno de w é dita convergente, se converge em algum polícilindro em torno de w

De maneira analoga as séries de potência formal, denotamos o anel de todas as series de potência convergentes

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-w)^k$$

em torno de w com coeficientes complexos por $\mathbb{C}\{z-w\} = \mathbb{C}\{z_1-w_1, \dots, z_n-w_n\}$.

Dessas definições, temos as seguintes proposições

Proposição 5.1. O anel \mathcal{O}_w de germes de funções holomorfas em $w \in \mathbb{C}^n$ é isomorfo ao anel $\mathbb{C}\{z-w\}$ de series de potência convergente em w .

Proposição 5.2. O anel \mathcal{O}_0 é um domínio de integridade, isto é, $\forall f, g \in \mathcal{O}_0$ em que $f \cdot g = 0$ segue que $f = 0$ ou $g = 0$.

Demonstração. Seja $f, g \in \mathcal{O}_0$ com $f \cdot g = 0$. Os germes f, g são representados por funções holomorfas $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ onde U é uma vizinhança aberta de 0. Por $f \cdot g = 0$ segue que $f(z) \cdot g(z) = 0$ para todo $z \in V \subset U$, onde V é uma vizinhança aberta conexa de 0 com $V \subset U$.

Se $f(w) \neq 0$ para algum $w \in V$, então $f(z) \neq 0$ para todo $z \in W$, com W uma vizinhança aberta de w . Então $g(z) = 0$ para todo $z \in W$. Segue então, pelo teorema de identidade para funções holomorfas que $g(z) = 0$ para todo $z \in V$, e portanto $g = 0$. \square

Seja R um anel. (Sempre comutativo com unidade) Um elemento $f \in R$ é chamado unidade se, e somente se, existir um elemento $g \in R$ com $f \cdot g = 1$.

Proposição 5.3. As unidades do anel \mathcal{O}_0 são os germes de função f com $f(0) \neq 0$.

Demonstração. a) Se $f \in \mathcal{O}_0$ é uma unidade, existe $g \in \mathcal{O}_0$ com $f \cdot g = 1$, em particular $f(0) \cdot g(0) = 1$, assim $f(0) \neq 0$.

b) Agora, reciprocamente, seja f um representante de um germe de função holomorfa de \mathcal{O}_0 com $f(0) \neq 0$. Então, por continuidade, $f(z) \neq 0$ para todo z em uma vizinhança aberta U de 0. Então $1/f$ é definida e contínua em U , onde $1/f \in \mathcal{O}_0$. \square

Seja R um anel. Um ideal I em R é um subconjunto $I \subset R$ para o qual

1. I é um subgrupo de um grupo aditivo sobre R ,
2. Para todo $f \in R$ e $g \in I$ $f \cdot g \in I$.

Um ideal \mathfrak{m} é chamado maximal se $\mathfrak{m} \neq R$ e se não existir ideal I com $\mathfrak{m} \subsetneq I \subsetneq R$. Um anel R é chamado local se tem um único ideal maximal \mathfrak{m} .

Observação 6. Um anel é local se, e somente se, suas não unidade formam um ideal I . Se R é local, então I é seu ideal maximal.

Proposição 5.4. O Anel \mathcal{O}_0 é um anel local.

Demonstração. Pela observação feita, basta mostrar que aqueles elementos de \mathcal{O}_0 que não são unidades formam um ideal em \mathcal{O}_0 . Pela proposição anterior, estes são apenas os germes de função holomorfa f com $f(0) = 0$. Se f é tal germe e $g \in \mathcal{O}_0$ é um germe de função holomorfa, então $f \cdot g(0) = f(0) \cdot g(0) = 0$. Então

$$\mathfrak{m} := \{f \in \mathcal{O}_0 \mid f(0) = 0\}$$

é um ideal em \mathcal{O}_0 . Portanto \mathcal{O}_0 é um anel local com ideal maximal \mathfrak{m} . □

5.1 Os teoremas de Weierstrass

As séries de potências convergente não nula

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$$

em uma variável complexa t tem uma única representação na forma $f(t) = t^k u(t)$, onde $u(t)$ é uma série de potência convergente com $u(0) \neq 0$, que é unidade em $\mathcal{O}_{1,0}$. O número k é chamado a ordem do $0 \in \mathbb{C}$.

Agora, seja $\mathbb{C}\{z\} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$ o anel de séries de potências convergente em $n + 1$ variáveis e seja

$$g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n+1}\}.$$

Temos que $g(z)$ tem uma representação única na forma $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z)$ em termos dos polinômios homogêneos $P_m(z) := \sum_{|v|=m} a_v z^v$ de grau m .

Definição 5.3. O número $\min\{|v|; a_v \neq 0\}$ é chamado ordem $o(g)$ da série de potências.

No caso este é o menor número m para que $p_m \neq 0$.

Definição 5.4. Uma série de potências $g(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ é chamada regular de ordem k em z_{n+1} se, e somente se, $g(0, \dots, 0, z_{n+1})$ é uma série de potências em z_{n+1} de ordem k .

Com isso vamos ao Lema abaixo.

Lema 5.1. Se $g(z) \in \mathbb{C}z$ é uma série de potências convergente de ordem $k < \infty$, então $g'(z)$, onde z'_1, \dots, z'_{n+1} são coordenadas apropriadas de \mathbb{C}^{n+1} obtidas por uma mudança linear de coordenadas a partir de z_1, \dots, z_{n+1} , é regular de ordem k em Z'_{n+1} .

Demonstração. Seja

$$g(z) = \sum_{m=k}^{\infty} p_m(z), \quad p_k \neq 0,$$

a expansão de $g(z)$ em polinômios homogêneos. Seja

$$p_k = \sum_{|v|=k} a_v z^v.$$

Escreveremos agora

$$\begin{aligned} z'_j &= z_j - w_j z_{n+1}, \quad j = 1, \dots, n, \\ z'_{n+1} &= z_{n+1}, \end{aligned}$$

com $w_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$. Então o coeficiente de z'^k_{n+1} em $p_k(z')$ é igual para

$$c = \sum_{v_1+v_2+\dots+v_{n+1}=k} a_{v_1, \dots, v_{n+1}} w_1^{v_1} \cdots w_n^{v_n}.$$

Já que $p_k \neq 0$, existem $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ tal que $c \neq 0$. Pela escolha desses w_1, \dots, w_n

$$g(0, \dots, 0, z'_{n+1}) = cz'_{n+1} + \text{termos de ordem alta.}$$

Assim, $g(z')$ é regular de ordem k em z'_{n+1} . □

Apartir de agora, adotaremos $t = z_{n+1}$ e com isso $\mathbb{C}\{z\} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ e $\mathbb{C}\{z, t\} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n, t\}$

Definição 5.5. Um Polinômio de Weierstrass de grau $k > 0$ é um polinômio $t^k + c_1(z)tk - 1 + \dots + c_k(z)$, onde $c_j \in \mathbb{C}\{z\}$, com $c_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, k$.

Observe que por definição um Polinômio de Weierstrass é mônico e está em $\mathbb{C}z[t]$ Com isso podemos apresentar os seguintes teoremas:

Teorema 5.1 (Teorema de Preparação de Weierstrass). Seja $g(z, t)$ uma série de potências convergente em $\mathbb{C}\{z, t\}$ que é regular de ordem k em t . Então existe um único polinômio de Weierstrass $h(z, t) \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ e uma única unidade $u(z, t) \in \mathbb{C}\{z, t\}$ tal que $g(z, t) = h(z, t)u(z, t)$.

Teorema 5.2 (Teorema de Divisão de Weierstrass). Seja $f, g \in \mathbb{C}\{z, t\}$ e seja g regular de ordem k em t . Então existe uma única série de potências $q \in \mathbb{C}\{z, t\}$ e um único polinômio r em $\mathbb{C}\{z\}[t]$ de grau $\leq k - 1$ com $f = q \cdot g + r$

Unicidade de q e r . Assumiremos que q e r não são únicos, ou seja, existem \tilde{q} e um \tilde{r} de

tal forma que

$$f = q \cdot g + r = \tilde{q} \cdot g + \tilde{r},$$

onde $q, \tilde{q} \in \mathbb{C}\{z, t\}$ e $r, \tilde{r} \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ são polinômios de grau $\leq k - 1$. Podemos assumir que $k > 0$, pois de outra maneira $r = \tilde{r} \equiv 0$ e $q = \tilde{q}$ e assim terminaríamos.

Agora, para $k > 0$ temos

$$r - \tilde{r} = (q - \tilde{q})g.$$

Fixando $z \in \mathbb{C}^n$ a função $(r - \tilde{r})(z, t)$ é um polinômio de grau $\leq k - 1$ em t e tem no máximo $k - 1$ zeros. Nosso objetivo agora é mostrar que existe uma viz. V de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que, para todo $z \in V$ a série de potências $g(z, t)$ como uma função em t , tem pelo menos k zeros. Com isso, o polinômio $(r - \tilde{r})(z, t)$ também terá k zeros, logo será o polinômio nulo, donde segue que $r = \tilde{r}$ e também $q = \tilde{q}$ desde que g não seja identicamente nulo em uma viz. de 0 .

Já tendo a idéia do que fazer vamos a prova.

Por hipótese, a série de potências $g(z, t)$ é regular de ordem k em t , ou seja, $g(0, t)$ tem um zero de ordem k em $t = 0 \in \mathbb{C}$. A série de potências $g(0, t)$ define uma função holomorfa em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ e seus zeros são isolados.

Portanto, existe um $\delta > 0$ com $g(0, t) \neq 0$ para todo t com $0 < |t| \leq \delta$. Colocando

$$\varepsilon := \inf_{|t|=\delta} |g(0, t)|.$$

Já que g é contínua, existe uma vizinhança V de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que para todo $z \in V$ a $t \in \mathbb{C}$ com $|t| = \delta$ temos

$$|g(z, t) - g(0, t)| < \varepsilon \leq |g(0, t)|.$$

Seja $z \in V$ fixo. Pelo Teorema de Rouché segue que $g(z, \cdot)$ e $g(0, \cdot)$ tem o mesmo número de zeros em um disco $|t| < \delta$. Então $g(z, \cdot)$ tem pelo menos k zeros para $z \in V$ o que mostra o resultado. □

Um anel R é dito Noetheriano quando todo ideal em R é finitamente gerado.

Proposição 5.5 (Teorema da Base de Rückert). *O anel $\mathcal{O}_{n,0} \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ é Noetheriano.*

Proposição 5.6 (Hensel's lemma). *Seja $p(z, t) = t^k + a_1(z)t^{k-1} + \dots + a_k(z) \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ um polinômio mônico com $k \geq 1$ e suponha que $p(0, t) = (t - c_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t - c_r)^{k_r}$ com pares $c_j \in \mathbb{C}$ distintos, $j = 1, \dots, r$. Então existem polinômios mônicos $p_1(z, t), \dots, p_r(z, t) \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ com $p(z, t) = p_1(z, t) \cdot \dots \cdot p_r(z, t)$, onde $p_j(z, t)$ tem grau k_j e $p_j(0, t) = (t - c_j)^{k_j}$ para $j = 1, \dots, r$.*

5.2 Conjuntos Analíticos

Definição 5.6. *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto, $X \subset U$ um conjunto. (i) Se $x \in U$, então X é chamado analítico em x se existir uma vizinhança $V \subset U$ de x e um número finito de funções holomorfas f_1, \dots, f_r sobre V tal que*

$$X \cap V = \{z \in V \mid f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\}.$$

(ii) O subconjunto X é chamado um subconjunto localmente analítico de U se X é analítico em todo $x \in X$. (iii) O subconjunto X é chamado subconjunto analítico de U se X é analítico em todo $x \in U$.

Exemplo 2. *Exemplos de subconjuntos analíticos de $U = \mathbb{C}^n$ são U , \emptyset e conjuntos de zeros de um número finito de polinômios (subconjuntos algébricos).*

Proposição 5.7. *Um subconjunto X de um de U é fechado em U .*

Demonstração. Seja $x \in U \setminus X$, com V como na definição. Então $X \cap V$ é fechado em V . Portanto, existe uma vizinhança aberta $W \subset V$ de x com $W \cap X = \emptyset$. Assim $U \setminus X$ é aberto. \square

5.3 Germes de Conjuntos Analíticos

Definição 5.7. *Sejam U e U' abertos em \mathbb{C}^n , e seja $X \subset U$, $X' \subset U'$ subconjuntos analíticos. Os subconjuntos analíticos X e X' definem os mesmos germes de conjunto analíticos em $x \in X \cap X'$ se existir uma viz. aberta $V \subset U \cap U'$ de x tal que $X \cap V = X' \cap V$.*

A notação (X, x) refere-se ao germe do conjunto X em x . O conjunto X também é chamado representante do germe do conjunto (X, x) .

Germes de conjuntos analíticos estão em correspondência com os ideais de $\mathcal{O}_{n,w}$, $w \in \mathbb{C}^n$. Seja $I \subset \mathcal{O}_w$ um ideal. Já que \mathcal{O}_w é Noetheriano 5.5, I é gerado por uma quantidade finita de germes de funções holomorfas f_1, \dots, f_r . Sejam $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r : U \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas, onde U é uma vizinhança aberta de w , que representam estes germes. Definimos

$$V(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r) := \{z \in U \mid \tilde{f}_1(z) = \dots = \tilde{f}_r(z) = 0\}.$$

Proposição 5.8. *O germe de conjunto analítico*

$$(V(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r), w)$$

não depende da escolha de $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r$.

Definição 5.8. O germe de conjunto analítico

$$V(I) := (V(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r), w)$$

é chamado germe de conjunto analítico definido pelo ideal I .

Definição 5.9. Seja (X, x) um germe de conjunto analítico. O conjunto $I(X)$ de todos os germes $f \in \mathcal{O}_x$ representado por funções holomorfas $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$, U uma vizinhança aberta de x , que se anula sobre um representante $\tilde{X} \subset U$ de X , é chamado o ideal do germe do conjunto X .

Seja R um anel e $I \subset R$ um ideal. então

$$\text{rad}(I) := \{f \in R \mid f^k \in I \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$$

é chamado o radical de I .

Proposição 5.9 (Zeros de Rückert's). Para o ideal de um conjunto germe analítico $V(I)$, temos $I(V(I)) = \text{rad } I$.

Definição 5.10. Uma álgebra analítica é uma álgebra sobre \mathbb{C} da forma

$$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n+1}\}/\mathbb{I},$$

onde \mathbb{I} é um ideal em $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$.

A álgebra A é chamada reduzida se, e somente se, A não contém nenhum elemento nilpotente não nulo, ou seja, A é reduzido se, e somente se, $\mathfrak{n}_A = 0$.

Observação 7. 1. $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}/\mathbb{I}$ é reduzido $\Leftrightarrow \mathbb{I}$ é um ideal radical.

2. Se (X, x) é um germe de conjunto analítico, então a álgebra $\mathcal{O}_{X,x}$ é uma álgebra analítica reduzida.

5.4 Germes de Aplicação e Homomorfismos de Álgebras Analíticas

Agora definiremos aplicações entre conjuntos analíticos

Definição 5.11. Seja $G \subset \mathbb{C}^n$, $G' \subset \mathbb{C}^m$ regiões, $X \subset G$ e $Y \subset G'$ subconjuntos analíticos, $x \in X$. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada holomorfa em $x \in X$ se existir uma vizinhança aberta U de x em G e uma aplicação holomorfa $F : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ com $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$.

Definição 5.12. Seja $X \subset \mathbb{C}^n$, $Y \subset \mathbb{C}^m$ subconjuntos analíticos, $x \in X$, $y \in Y$, e seja $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ aplicações holomorfas com $f(x) = g(x) = y$. Então f e g definem o mesmo germe de aplicação $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ se existir uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^n$ de x tal que $f|_{U \cap X} = g|_{U \cap X}$.

Vimos anteriormente que as álgebras analíticas reduzidas $\mathcal{O}_{X,x}$ e $\mathcal{O}_{Y,y}$ pertencem ao conjunto de germes analíticos (X, x) e (Y, y) . Um germe de aplicação $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$

induz um homomorfismo

$$\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

das álgebras analíticas correspondentes: φ^* é definida por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ para todo $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$.

No que segue, R é um anel local com ideal maximal \mathfrak{m} .

Lema 5.2 (Lema de Nakayama). *Se M é um A -módulo finitamente gerado com $M \subset \mathfrak{m}M$, então $M = 0$.*

Corolário 5.1. *Seja M um A -módulo finitamente gerado e N um submódulo de M . Se $M = N + \mathfrak{m}M$, então $M = N$*

Basta aplicar o Lema de Nakayama no módulo M/N

5.5 O Teorema de Preparação de Weierstrass para Módulos

Agora, seja M um A -módulo, se x é um elemento de M , o conjunto de todos os múltiplos ax ($a \in A$) é um submódulo de M , denotado por Ax ou (x) . Se $M = \sum_{i \in I} Ax_i$, o conjunto formado pelos x_i 's é chamado dos geradores de M , isto significa que cada elemento de M pode ser escrito (de forma não necessariamente única) como uma combinação linear finita de x_i 's com coeficientes em A .

Definição 5.13. *Um A -módulo M é dito ser finitamente gerado se tem um conjunto finito de geradores.*

Seja A uma álgebra analítica e M um A -módulo.

Definição 5.14. *Um A -módulo M é chamado finito sobre A se M é um A -módulo finitamente gerado.*

Agora seja B uma outra álgebra analítica e $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo entre álgebras. Se M é um B -módulo, então M torna-se um A -módulo pela ação

$$\begin{aligned} A \times M &\rightarrow M \\ (a, x) &\mapsto \varphi(a)x. \end{aligned}$$

Em particular, B é um A -módulo na forma canônica.

Definição 5.15. *O homomorfismo algébrico φ é chamado finito se B é finito sobre A .*

Observação 8. *Se $\varphi : A \rightarrow B$ e $\psi : B \rightarrow C$ são finitos, então $\psi \circ \varphi : A \rightarrow C$ também é finito.*

Teorema 5.3 (Teorema de Preparação de Weierstrass para Módulos). *Seja A, B álgebras analíticas, $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$ seus ideais maximais, $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo algébrico e M um B -Módulo finitamente gerado, então M é finito sobre A se, e somente se, $M/M\varphi(\mathfrak{m}_A)$ é finito sobre $A/\mathfrak{m}_A \cong \mathbb{C}$.*

Deste teorema temos o seguinte Corolário.

Corolário 5.2. *Seja A, B, φ, M como no teorema anterior e seja e_1, \dots, e_p elementos em M . Se as imagens de e_1, \dots, e_p em $M/M\varphi(\mathfrak{m}_A)$ geram este módulo sobre \mathbb{C} , então e_1, \dots, e_p geram M sobre A .*

Demonstração. Inicialmente, considere o A -submódulo N de M gerado pelos elementos e_1, \dots, e_p . Já que por hipótese $M/M\varphi(\mathfrak{m}_A)$ é gerado pelas imagens de e_1, \dots, e_p como um \mathbb{C} -espaço vetorial, temos

$$M = N + M\varphi(\mathfrak{m}_A)$$

como um A -módulo. Pelo Teorema 5.3, M é finito sobre A . Pelo Lema de Nakayama 5.1 segue que $M = N$ □

Definição 5.16. *Um germe de aplicação $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ é chamado finito se $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ é finito.*

Para a seguinte proposição lembramos ainda um outro conceito de álgebra. Seja S um anel e $R \subset S$ um subanel. Um elemento $s \in S$ é chamado inteiro sobre R se ele satisfaz uma equação

$$s^p + a_1 s^{p-1} + \dots + a_p = 0 \text{ com } a_j \in R.$$

Observação 9. *Se S é um R -módulo finitamente gerado, então todo $s \in S$ é inteiro sobre R .*

Proposição 5.10. *Seja $G \subset \mathbb{C}^n, G' \subset \mathbb{C}^m$ regiões e seja $X \subset G, Y \subset G'$ subconjuntos analíticos, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa, e $x \in X$. então $f^* : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ é finita se, e somente se, x é um ponto isolado de $f^{-1}(f(x))$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade tome $x = 0, f(x) = 0$.

" \Rightarrow ": Seja $f^* : \mathcal{O}_{Y,0} \rightarrow \mathcal{O}_{X,0}$ finita. Isto significa que $\mathcal{O}_{X,0}$ é um módulo finitamente gerado sobre $f^*(\mathcal{O}_{Y,0})$. Pela observação feita acima segue que cada elemento de $\mathcal{O}_{X,0}$ é inteiro sobre $f^*(\mathcal{O}_{Y,0})$. Se $g \in \mathcal{O}_{X,0}$, existe $a_1, \dots, a_r \in \mathcal{O}_{Y,0}$ com

$$g^r = f^*(a_1)g^{r-1} + \dots + f^*(a_r) = 0.$$

Se (z_1, \dots, z_n) são coordenadas de \mathbb{C}^n , então, em particular, para cada k com $1 \leq k \leq n$ existem elementos $a_{k1}, \dots, a_{kr} \in \mathcal{O}_{Y,0}$ com

$$z_k^r + f^*(a_{k1})z_k^{r-1} + \dots + f^*(a_{kr}) = 0$$

para $k = 1, \dots, n$ e para um r adequado. Agora seja U uma vizinhança aberta de 0 em G e $F : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação holomorfa com $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$. Além disso, seja V uma vizinhança aberta adequada de 0 em G' com $F(U) \subset V$, e seja $\tilde{a}_{kj} : V \rightarrow \mathbb{C}$ representantes

de a_{kj} , $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, r$. Diminuindo U , se necessário, para todo $z \in U$ temos

$$z_k^r + \tilde{a}_{k1}(F(z))z_k^{r-1} + \dots + \tilde{a}_{kr}(F(z)) = 0, k=1, \dots, n.$$

Assim, se $z \in X \cap U$ e $F(z) = f(z) = 0$, então z_k é uma raiz de um polinômio para $k = 1, \dots, n$. Portanto, pode haver no máximo um número finito de $z \in U$ com $f(z) = 0$. Então 0 é um ponto isolado de $f^{-1}f(0)$.

" \Leftarrow :" Seja 0 um ponto isolado de $f^{-1}f(0)$. Seja I o ideal de \mathcal{O}_n gerado por $I(X, 0)$ e $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$, onde \tilde{f}_j é o germe da função componente f_j , $j = 1, \dots, m$. Então $V(I) = \{0\}$. Já que $z_k \in I(0)$, existe, Pelo Teorema 5.9, um r_k com $z_k^{r_k} \in I$, para $k = 1, \dots, n$. Assim, para cada k existe um r_k e elementos $a_{k1}, \dots, a_{km} \in \mathcal{O}_{n,0}$ tal que

$$z_k^{r_k} \equiv \sum_{j=1}^m a_{kj} \tilde{f}_j(I(X, 0)).$$

Segue que existe um número natural $q > 0$ tal que

$$\mathfrak{m}_{X,0}^q \subset \mathcal{O}_{X,0} f^*(\mathfrak{m}_{Y,0}),$$

onde $\mathfrak{m}_{x,0}$, resp. $\mathfrak{m}_{y,0}$ é o ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,0}$, resp. $\mathcal{O}_{y,0}$. Esta inclusão induz um homomorfismo sobrejetivo

$$\mathcal{O}_{X,0}/\mathfrak{m}_{X,0}^q \rightarrow \mathcal{O}_{X,0}/\mathcal{O}_{x,0} f^*(\mathfrak{m}_{y,0}).$$

Mas $\mathcal{O}_{X,0}/\mathfrak{m}_{X,0}^q$ é um \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão finita: Pois se seus elementos x_1, \dots, x_n são geradores de $\mathfrak{m}_{X,0}$, então para cada $g \in \mathcal{O}_{X,0}$ existe um polinômio $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ de grau $\leq q - 1$ com

$$g - p \in \mathfrak{m}_{X,0}^q.$$

Assim, $\mathcal{O}_{X,0}/\mathfrak{m}_{X,0}^q$ é gerado por uma classe de resíduos de monômios em x_1, \dots, x_n de grau $\leq q - 1$. Portanto, $\mathcal{O}_{X,0}/\mathcal{O}_{x,0} f^*(\mathfrak{m}_{y,0})$ é também um \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão finita. Segue pelo Teorema 5.3 que f^* é finito. \square

Proposição 5.11. *Seja A uma álgebra analítica com ideal maximal \mathfrak{m}_A e suponha que $\mathbb{C}\{z\} \subset A$. Seja $g \in \mathfrak{m}_A$ integral sobre $\mathbb{C}\{z\}$ e seja*

$$p(z, t) = t^k + a_1(z)t^{k-1} + \dots + a_k(z) \in \mathbb{C}\{z\}[t]$$

um polinômio de grau pequeno, com $p(z, g) = 0$. Então $a_j(0) = 0$ para $j = 1, \dots, k$.

Demonstração. Já que $g \in \mathfrak{m}_A$, temos

$$a_k(z) = -g(g^{k-1} + a_1(z)g^{k-2} + \dots + a_{k-1}(z)) \in \mathfrak{m}_A \cap \mathbb{C}\{z\} \subset \mathfrak{m}_n,$$

onde \mathfrak{m}_n é o ideal maximal de $\mathbb{C}\{z\}$. Suponha que existe um j , $1 \leq j < k$, com $a_j(0) \neq 0$. Seja l o maior índice com $a_l(0) \neq 0$. Então

$$p(0, t) = t^{k-l}(t^l + a_1(0)t^{l-1} + \dots + a_l(0)).$$

Pelo Lema de Hensel 5.6 existe dois polinômios mônicos $p_1(z, t), p_2(z, t) \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ com

$$p_1(0, t) = t^{k-l}, \quad p_2(0, t) = t^l + a_1(0)t^{l-1} + \dots + a_l(0).$$

Se temos $p_2(z, t) \in \mathfrak{m}_A$, então, já que $g \in \mathfrak{m}_A$, o termo constante $p_2(z, 0)$ de $p_2(z, t)$ também teria que estar em \mathfrak{m}_A ; e então $p_2(0, 0) = 0$. Mas isto não se verifica, pois $a_l(0) \neq 0$. Portanto $p_2(z, g)$ é uma unidade em A e para $p(z, g) = 0$ segue que $p_1(z, g) = 0$. Já que $p_1(z, g)$ é de grau $k - l < k$ em t , isto contradiz a suposição de que $p(z, t)$ é de grau pequeno. Portanto $a_j(0) = 0$ para $j = 1, \dots, k$. \square

5.6 A dimensão de um Germe de Conjunto Analítico

Definição 5.17. *Seja A uma álgebra analítica. A dimensão (de Weierstrass) de A , simbolicamente, $\dim A$, é o menor número $d \geq 0$ para que exista um homomorfismo algébrico finito $\varphi : \mathcal{O}_{d,0} \rightarrow A$.*

Proposição 5.12 (Dimensão de Weierstrass = Dimensão de Chevalley). *A dimensão de A é também o menor número $d \geq 0$ para que existam elementos $f_1, \dots, f_d \in \mathfrak{m}_A$ tal que*

$$\dim_{\mathbb{C}} A/A(f_1, \dots, f_d) < \infty.$$

Observação 10. *Esse número d é chamado dimensão de Chevalley de A e o sistema f_1, \dots, f_d é chamado um sistema de parâmetros de A .*

Definição 5.18. *Seja A uma álgebra analítica com ideal maximal \mathfrak{m}_A e nilradical \mathfrak{n}_A . Um elemento $f \in \mathfrak{m}_A$ é chamado ativo se para todo $g \in A$ tivermos $fg \in \mathfrak{n}_A \Rightarrow g \in \mathfrak{n}_A$.*

Proposição 5.13 (Lema Ativo). *Se $f \in \mathfrak{m}_A$ é ativo, então $\dim A/(f) = \dim A - 1$.*

Corolário 5.3. *$\dim \mathcal{O}_n = n$.*

Demonstração. Segue por indução em n

Para $n = 0$: A identidade $id : \mathcal{O}_{0,0} \rightarrow \mathcal{O}_{0,0}$ é um homomorfismo finito, então $\dim \mathcal{O}_{0,0} = 0$.

$n - 1 \rightarrow n$: Seja $n \geq 1$, $\mathcal{O}_{n,0} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Agora, tome $z_n \in \mathfrak{m}_n$ não divisor de zero em $\mathcal{O}_{n,0}$, assim z_n é ativo. E como $\mathcal{O}_{n,0}/(z_n) \simeq \mathcal{O}_{n-1,0}$ e supondo que $\dim \mathcal{O}_{n-1,0} = n - 1$, segue pela Proposição 5.13 que

$$n - 1 = \dim \mathcal{O}_{n-1,0} = \dim \mathcal{O}_{n,0}/(z_n) = \dim \mathcal{O}_{n,0} - 1.$$

□

Definição 5.19. Um conjunto de germes analíticos (X, x) é chamado uma interseção completa se $\mathcal{O}_{X,x}$ é isomorfo a $\mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{O}_{n,0}(f_1, \dots, f_m)$ com $n - m = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ e $f_1, \dots, f_m \in \mathfrak{m}_n$

Definição 5.20. Seja A uma álgebra analítica. Uma m -nupla (f_1, \dots, f_m) de elementos $f_j \in \mathfrak{m}_A$ é chamada sequência principal (ou A -sequência) se f_1 é um não divisor de zero em A e se para todo $j = 2, \dots, m$ a classe de resíduos f_j em $A/A(f_1, \dots, f_{j-1})$ é um não divisor do zero. o número m é chamado comprimento da sequência principal.

Proposição 5.14. Se (f_1, \dots, f_n) é uma sequência principal em A e se π é uma permutação do conjunto $\{1, \dots, m\}$, então $(f_{\pi(1)}, \dots, f_{\pi(m)})$ é também uma sequência principal em A .

Definição 5.21. Uma álgebra analítica A é dita um CM-anel, se A tem uma sequência principal de $\dim A$.

Exemplo 3. A álgebra $\mathcal{O}_{n,0} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ de germes de funções holomorfas é um CM-anel, pois (z_1, \dots, z_n) forma uma sequência principal em $\mathcal{O}_{n,0}$. De fato

$$\mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{O}_{n,0}(z_1, \dots, z_\mu) \simeq \mathbb{C}\{z_{\mu+1}, \dots, z_n\}$$

para $\mu = 1, \dots, n$.

Proposição 5.15. Seja A um CM-anel e seja f_1, \dots, f_m elementos de \mathfrak{m}_A tal que $\dim A/A(f_1, \dots, f_m) = \dim A - 1$. Então (f_1, \dots, f_m) é uma sequência principal e $A/A(f_1, \dots, f_m)$ é também um CM-anel.

Corolário 5.4. Cada sistema de parâmetros (f_1, \dots, f_m) de $\mathcal{O}_{n,0}$ é também uma sequência principal.

Demonstração. Pelo exemplo acima $\mathcal{O}_{n,0}$ é um CM-anel. Com isso, o resultado segue pela Proposição anterior. □

Proposição 5.16. Seja A um CM-anel de dimensão n e (f_1, \dots, f_m) uma sequência principal. Seja $R = \mathbb{C}\{f_1, \dots, f_n\} \subset A$ isomorfo a $\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_n\}$. Então A é um R -módulo livre.

5.7 Um pouco mais sobre pontos críticos isolados

Seja M uma $(n + 1)$ -dimensional variedade complexa e $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa.

Definição 5.22. Um ponto $p \in M$ é chamado ponto crítico isolado, ou singularidade isolada de f , se existir uma vizinhança U de p em M tal que nenhum ponto de $U \setminus p$ é crítico.

Lema 5.3. *Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ o germe de uma função holomorfa com um ponto crítico não degenerado no 0. Então as derivadas parciais $\partial f / \partial z_1, \dots, \partial f / \partial z_{n+1}$ gera o ideal maximal \mathfrak{m}_{n+1} de \mathcal{O}_{n+1} .*

Demonstração. Seja $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ uma vizinhança aberta de 0 e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ um representante de f . consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \text{grad} f : U &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ z &\mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(z) \right) \end{aligned}$$

já que 0 é um ponto crítico não degenerado de f , temos

$$\text{rank}(J_{\text{grad} f}(0)) = n + 1.$$

Pelo Teorema do Posto segue: Existem vizinhanças abertas V, V' de 0 em U e uma aplicação biholomorfa $\varphi : V \rightarrow V'$ tal que para todo $z \in V$,

$$\text{grad} f \circ \varphi(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1, \dots, z_{n+1}).$$

Já que z_1, \dots, z_{n+1} gera o ideal maximal \mathfrak{m}_{n+1} de \mathcal{O}_{n+1} , o resultado segue. \square

Proposição 5.17. *Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com singularidade isolada no 0. Então*

$$\mathcal{O}_{n+1} / \mathcal{O}_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right)$$

è um \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão finita.

Demonstração. Seja $f_i := \partial f / \partial z_j, j = 1, \dots, n + 1$, as derivadas parciais de f e seja J_f o ideal gerado por f_1, \dots, f_{n+1} . Agora f tem uma singularidade isolada em 0, assim 0 é solução única do sistema

$$f_1(z) = \dots = f_{n+1}(z) = 0$$

em uma vizinhança aberta M de 0. Então

$$V(J_f) = v(f_1, \dots, f_{n+1}) = (\{0\}, 0).$$

Segue que

$$I(V(J_f)) = \mathfrak{m},$$

onde \mathfrak{m} é o ideal maximal de \mathcal{O}_{n+1} . Por 5.9

$$I(V(J_f)) = \text{rad} J_f.$$

Portanto existe um número natural $q > 0$ tal que $\mathfrak{m}^q \subset J_f$. mas $\mathcal{O}_{n+1}/\mathfrak{m}^q$ é \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão finita (pela prova de 5.10). Portanto \mathcal{O}_{n+1}/J_f é também um \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão finita. O que completa a prova. \square

5.8 A Igualdade $\mu_3 = \mu_4$

Já sabemos pela Proposição 5.17 que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/\mathcal{O}_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right)$ é finita, com isso seja

$$\mu_4 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/\mathcal{O}_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right).$$

Também já sabemos que μ_3 é o número de pontos da pré-imagem de um valor regular proximo do 0 da aplicação holomorfa finita

$$\nabla f : M \rightarrow \mathbb{C}^{n+1},$$

onde M é uma viz. aberta adequada do 0 em \mathbb{C}^{n+1} sendo $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} \right)$

O teorema abaixo irá mostrar a relação de igualdade que existe entre esses dois números.

Proposição 5.18. *Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa com uma singularidade isolada no 0. Então $\mu_3 = \mu_4$.*

Demonstração. Seja $f_i := \partial f / \partial z_i$ para $i = 1, \dots, n+1$ as funções componentes da aplicação ∇f . Como 0 é uma singularidade isolada de f por hipótese, então 0 é um ponto isolado da $\nabla f^{-1}(0)$. Com isso, pela Proposição 5.10 segue que o homomorfismo induzido $(\nabla f)^* : \mathcal{O}_{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{n+1}$ é finito e como \mathcal{O}_{n+1} tem dimensão $n+1$, Corolário 5.3, podemos afirmar que o homomorfismo $(\nabla f)^* : \mathcal{O}_{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{n+1}$ é injetivo.

Caso não fosse, suponha que o $h \in \ker(\nabla f)^*$, $f \neq 0$. Pelo Lema 5.1 existem coordenadas z_1, \dots, z_{n+1} tal que f é regular de ordem k em z_{n+1} . Agora seja $g \in \mathcal{O}_{n+1}$. Pelo Teorema 5.2 existem $q \in \mathcal{O}_{n+1}$ e elementos $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{O}_n$ com

$$g = qh + \sum_{j=1}^k a_j z_{n+1}^{k-j},$$

isso mostra que $\mathcal{O}_{n+1}/(h)$ é gerado por uma classe de resíduo $1, z_{n+1}, \dots, z_{n+1}^{k-1}$ módulo (h) . Portanto $\mathcal{O}_{n+1}/(h)$ é finito sobre \mathcal{O}_n . em outras palavras, temos que se $h \in \ker(\nabla f)^*$ então \mathcal{O}_{n+1} é finito sobre \mathcal{O}_n . O que contradiz a minimalidade de $n+1$ mostrando a injetividade de $(\nabla f)^*$. Para distinguir, denotaremos as coordenadas do espaço imagem

do ∇f por y_1, \dots, y_{n+1} . Além disso, colocaremos $A = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$, $R = \mathbb{C}\{f_1, \dots, f_{n+1}\} \subset A$ e como $(\nabla f)^* : \mathbb{C}\{y_1, \dots, y_{n+1}\} \rightarrow A$ é injetivo, segue que R é isomorfo a $\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$.

Agora, como μ_4 é finito, segue pela observação feita na Proposição 5.12 que (f_1, \dots, f_{n+1}) é um sistema de parâmetros para A a pelo Colorário 5.4 é também uma sequência principal em A . Pela Proposição 5.16 segue também que A é um R -módulo livre. Assim pelo Colorário 5.2, A é gerado como um R -módulo por μ_4 elementos e μ_4 é o número mínimo de geradores. Então A tem uma R -base de μ_4 elementos.

Seja K_A e K_R os respectivos corpos de fração de A e R . Então K_A é um corpo de extensão de K_R de grau μ_4 . Como todos os elementos de K_A são algébricos sobre K_R , temos $K_A = K_R(z_1, \dots, z_{n+1})$. Pelo teorema do elemento primitivo, existe um $\xi \in K_A$, $\xi = \sum_{i=1}^{n+1} c_i z_i$ com $c_i \in K_R$, com $K_A = K_R(\xi)$. Multiplicando o polinômio minimal de ξ pelo denominador comum dos coeficientes, já que estamos num corpo de frações, podemos assumir que ξ satisfaz uma equação

$$b_0 \xi^{\mu_4} + b_1 \xi^{\mu_4-1} + \dots + b_{\mu_4} = 0$$

com $b_j \in R$, $j = 1, \dots, \mu_4$, e $b_0 \neq 0$. Agora multiplicando essa equação por $b_0^{\mu_4-1}$ obtemos a equação

$$(b_0 \xi)^{\mu_4} + b_1 (b_0 \xi)^{\mu_4-1} + \dots + b_0^{\mu_4-1} b_{\mu_4} = 0.$$

Como esta equação mostra que $b_0 \xi$ é raiz de um polinômio mônico, então $b_0 \xi$ é integral sobre R . Mudando as coordenadas, podemos assumir que $b_0 \xi = z_1$ com z_1 satisfazendo a equação $p(f_1, \dots, f_{n+1})(z_1) = 0$, onde

$$p(f_1, \dots, f_{n+1})(t) = t^{\mu_4} + a_1(f_1, \dots, f_{n+1})t^{\mu_4-1} + \dots + a_{\mu_4}(f_1, \dots, f_{n+1})$$

e $a_i(f_1, \dots, f_{n+1})$, para $i = 1, \dots, \mu_4$, sendo uma série de potências em f_1, \dots, f_{n+1} que converge em uma vizinhança $U \subset M$ de 0. Pela Proposição 5.11, $a_i(0) = 0$ para $i = 1, \dots, \mu_4$.

Considere agora a Hipersuperfície

$$V = \{(f_1, \dots, f_{n+1}, z_1) \in U \times \mathbb{C} \mid p(f_1, \dots, f_{n+1})(z_1) = 0\} \subset U \times \mathbb{C}$$

com a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \quad V &\rightarrow U \\ (f_1, \dots, f_{n+1}, z_1) &\mapsto (f_1, \dots, f_{n+1}) \end{aligned}$$

Seja $\Delta(f_1, \dots, f_{n+1})$ o discriminante do polinômio $p(f_1, \dots, f_{n+1})(t)$. Este é um polinômio nos coeficientes $a_i(f_1, \dots, f_{n+1})$ do polinômio $p(f_1, \dots, f_{n+1})(t)$.

Seja

$$D = \{(f_1, \dots, f_{n+1}) \in U \mid \Delta(f_1, \dots, f_{n+1}) = 0\} \subset U.$$

O conjunto D é um Hipersuperfície em U . Já é sabido da teoria de corpos que os valores em D fazem o polinômio $p(f_1, \dots, f_{n+1})(t)$ ter raízes múltiplas, assim para valores fora do conjunto D a equação $p(f_1, \dots, f_{n+1})(z_1) = 0$ tem apenas raízes distintas, no caso terá μ_4 raízes distintas na vizinhança de z_1 .

Com isso, seja $C = \pi^{-1}(D)$ e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : \quad M &\rightarrow M \times \mathbb{C} \\ (z_1, \dots, z_{n+1}) &\mapsto (f_1(z), \dots, f_{n+1}(z), z_1) \end{aligned}$$

Assim seja, $W = \tilde{\sigma}^{-1}(V)$. Então W é uma vizinhança de 0 em M . Colocando $\sigma = \tilde{\sigma}|_W$, $B = \sigma^{-1}(C)$. Escolhendo U e V , se necessário, podemos garantir que a aplicação $\sigma : W \setminus B \rightarrow V \setminus C$ é um homeomorfismo. A composição $\sigma \circ \pi : W \rightarrow U$ coincide com a aplicação $\nabla f : W \rightarrow U$. Já que $\sigma \circ \pi$ tem exatamente μ_4 pontos na pré-imagens fora de D , isto é verdade para a aplicação ∇f também.

O que prova que $\mu_3 = \mu_4$

□

6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho observamos que as formas que tínhamos antes para encontrar o número que Milnor eram bastante trabalhosas e pelo μ_4 temos uma forma mais rápida de encontrar tal número. Não apenas como uma forma de encontrar tal número, esse trabalho também vem com a missão de ser uma leitura inicial sobre o assunto fazendo essa diagonal, no caso, passando pela definições de número de Milnor conhecidas até o momento.

Referências

- [1] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1969.
- [2] Carneiro, M. J. D.; Soares, M. G. *Introdução a Topologia de Singularidades Complexas*. 15º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro: IMPA, 1985.
- [3] Ebeling, W. *Functions of Several Complex variables and Their Singularities*. American Mathematical Society, 2007.
- [4] Guillemin, V, Pollack. *A Differential Topology*. New Jersey: Massachusetts Institute of Technology, 1974.
- [5] Milnor, J. *Morse Theory*. Annals of Mathematics, New Jersey: Princeton University Press, 1963.
- [6] Milnor, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Annals of Mathematics, New Jersey: Princeton University Press, 1968.
- [7] Milnor, J. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. New Jersey: Virginia University, 1965.