

**XXI CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA  
SÃO PEDRO, ESTADO DE SÃO PAULO, BRASIL, OCTUBRE, 2004.**

**DESVIOS NAS ESTIMATIVAS DE VAZÕES REGULARIZADAS  
RESULTANTES DA REPRESENTAÇÃO DAS RELAÇÕES COTA X ÁREA  
VOLUME POR EQUAÇÕES MATEMÁTICAS**

José Nilson B. Campos<sup>1</sup>, Luiz Sérgio V. Nascimento<sup>2</sup>, Ticiana M. de Carvalho Studart<sup>1</sup> e Dyego Galdino Barcelos<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental - Universidade Federal do Ceará – Campus do Pici – Bloco 713 – Fortaleza, Ceará – Brasil – CEP 60.451-970 –

Fone: (85) 288.9623. Fax: (85) 288.9627 – e-mails: nilson@ufc.br, ticiana@ufc.br e dyegogaldino@hotmail.com

<sup>2</sup>Programa de Pós-Graduação em Hidráulica e Saneamento – Escola de Engenharia de São Carlos/USP –

Av. Trabalhador Sãocarlense, 400 – Centro – São Carlos, São Paulo – Brasil – CEP 13.566-590 –

Fone: (16) 273.9571. Fax: (16) 273.9550 – e-mail: lsergio@sc.usp.br

**RESUMO:** O artigo avalia os erros cometidos nos cálculos de vazões regularizadas decorrentes da substituição das relações tabulares cota x área x volume por uma equação matemática do tipo  $V = ah^b$ , sendo  $V$  o volume armazenado na cota  $h$ ,  $h$  o nível da água no reservatório medido em relação ao ponto mais profundo e  $a$  e  $b$  parâmetros da equação. A amostra é formada por 45 reservatórios localizados na bacia do rio Jaguaribe, estado do Ceará, com capacidades variando de 6,43  $hm^3$  a 4.450,00  $hm^3$ . Partiu-se da equação geral  $V = ah^b$ , para a qual foram analisados cinco diferentes critérios para estimar os valores de  $a$  e  $b$ . A equação  $V = ah^3$ , com  $a$  calculado pela relação entre a capacidade do reservatório( $K$ ) e a altura da água( $h_{max}$ ), mostrou-se da mesma ordem de precisão que as demais equações apresentando duas vantagens relativas: a homogeneidade dimensional e simplicidade de cálculo.

**ABSTRACT:** The article evaluates the errors in the computation of reservoir yield resulting from the use of mathematical equations instead of depth x area x storage relations. The general equations  $V = ah^b$  where  $V$  is the storage,  $h$  is water depth,  $a$  and  $b$  are equations parameters. It was analyzed five different criteria to compute the parameters  $a$  and  $b$ . The sample was formed by 45 reservoirs located in Jaguaribe River Basin, in Ceará State, with capacities ranging from 6.43  $hm^3$  a 4,450.00  $hm^3$ . The equation  $V = ah^3$ , with  $a$  estimated from the ratio of reservoir capacity ( $K$ ) and the maximum depth ( $h_{max}$ ), showed good precision and relative advantages as homogeneous dimensionality and simplicity.

**PALAVRAS CHAVE:** Reservatório, vazão regularizada, cota x volume.

## 1 – INTRODUÇÃO

A avaliação das vazões regularizadas por reservatórios superficiais se apóia em dados climáticos da região do reservatório, em dados hidrológicos dos rios barrados e morfométricos. Ao dimensionar um reservatório, muitas vezes, o analista substitui as relações tabulares entre cota, área e volume por equações matemáticas. Nesse contexto, diversos pesquisadores desenvolveram estudos para representar essas relações por meio de equações matemáticas obtidas em levantamentos topográficos expeditos ou, modernamente, a partir de imagens de satélite. No entanto, a maior parte dos estudos realizados analisa erros cometidos nas estimativas dos *volumes* reais dos reservatórios, com uso da aproximação das curvas por equações (MOLLE & CADIER, 1992 e TORREÃO, 1997).

Nesta pesquisa, buscou-se uma abordagem diferente. Como, em última instância, as equações matemáticas são utilizadas na avaliação das disponibilidades hídricas dos reservatórios, estimaram-se os desvios entre as vazões regularizadas obtidas pela equação e pela sua real curva cota x volume. Campos *et al.* (2002), preliminarmente, avaliaram esses erros utilizando séries históricas de vazões para a simulação dos reservatórios e obtenção das respectivas vazões regularizadas, para uma amostra de 20 reservatórios. No presente artigo, ampliou-se a amostra e aprofundou-se a análise dos resultados em busca de apresentar resultados mais representativos.

## 2 – METODOLOGIA

No desenvolvimento da pesquisa, deparou-se com a falta de um banco de dados, sistematizado, de dados morfométricos e hidrométricos dos reservatórios. Decidiu-se restringir a análise, em um primeiro momento, ao vale do Jaguaribe, em virtude do mesmo ter sido recentemente objeto de um Plano de Gerenciamento de Recursos Hídricos. Após uma análise da qualidade dos dados chegou-se a uma amostra de 45 reservatórios com capacidades de armazenamento variando de 6,43 hm<sup>3</sup> a 4.450,00 hm<sup>3</sup> (Tabela 1).

Com a amostra foi feita uma análise de consistência dos dados de cota vs. volume porque, para reservatórios nordestinos, muitos destes dados apresentados na literatura encontram-se inconsistentes (NASCIMENTO *et al.*, 2003 b). Após a análise e verificação da inconsistência dos dados para vários reservatórios, os mesmos foram corrigidos através da substituição dos pontos discordantes, verificados graficamente, permitindo a inclusão do reservatório. Os reservatórios que tiveram seus dados corrigidos puderam ser utilizados no presente trabalho, pois o mesmo trata de uma comparação adimensional de resultados de vazões via simulação.

**Tabela 1.** Características dos 45 reservatórios analisados no vale do Jaguaribe..

Nº	Reservatório	Capacidade (hm <sup>3</sup> )	Altura Máxima (m)	Deflúvio Médio (hm <sup>3</sup> /ano)
1	<b>Arneiroz</b>	190,00	23,27	100,89
2	<b>Atalho II</b>	108,25	35,00	98,24
3	<b>Aurora</b>	873,00	35,00	243,80
4	<b>Bastiões</b>	136,70	32,00	69,45
5	<b>Boa Viagem</b>	47,00	25,00	28,88
6	<b>Broco</b>	17,60	14,00	4,59
7	<b>Cachoeira</b>	34,33	18,00	6,13
8	<b>Canafistula</b>	13,12	11,00	5,91
9	<b>Canoas</b>	69,25	43,00	19,31
10	<b>Castanhão</b>	4 450,00	45,00	1 463,50
11	<b>Castelo</b>	1 726,02	51,00	1 079,98
12	<b>Cipoada</b>	17,25	11,00	32,25
13	<b>Ema</b>	10,39	12,50	9,65
14	<b>Farias Brito</b>	197,60	49,60	42,50
15	<b>Favelas</b>	30,00	14,00	32,38
16	<b>Fogareiro</b>	118,81	28,70	262,98
17	<b>Goiatá</b>	51,90	25,00	75,68
18	<b>Ingazeiro</b>	11,32	16,00	11,57
19	<b>Joaquim Távora</b>	23,66	14,00	16,13
20	<b>Jucá</b>	34,17	9,00	73,20
21	<b>Lima Campos</b>	64,30	12,30	24,78
22	<b>Manoel Balbino</b>	37,18	30,00	0,87

<b>23</b>	<b>Monsenhor Tabosa</b>	12,10	21,10	242,01
<b>24</b>	<b>Munquéém</b>	47,64	21,82	54,52
<b>25</b>	<b>Nobre</b>	22,09	13,00	2,74
<b>26</b>	<b>Olho D'água</b>	21,00	22,82	5,49
<b>27</b>	<b>Orós</b>	1 956,26	37,50	1 029,05
<b>28</b>	<b>Pedras Brancas</b>	434,05	27,00	158,50
<b>29</b>	<b>Poço da Pedra</b>	50,00	22,00	46,09
<b>30</b>	<b>Pombas</b>	17,58	12,06	10,11
<b>31</b>	<b>Prazeres</b>	32,50	45,80	6,18
<b>32</b>	<b>Puiu</b>	24,50	13,00	37,41
<b>33</b>	<b>Quixeramobim</b>	54,00	15,50	133,35
<b>34</b>	<b>Riacho dos Carneiros</b>	37,18	34,00	3,15
<b>35</b>	<b>Riacho dos Tanques</b>	12,78	12,00	3,09
<b>36</b>	<b>Riacho Verde</b>	14,67	17,00	2,21
<b>37</b>	<b>Rivaldo de Carvalho</b>	6,43	7,56	12,34
<b>38</b>	<b>Rosário</b>	62,98	20,00	4,70
<b>39</b>	<b>Santo Antônio de Russas</b>	29,72	10,00	92,32
<b>40</b>	<b>São José II</b>	29,15	17,00	13,88
<b>41</b>	<b>Tomas Osterne</b>	28,10	25,00	6,34
<b>42</b>	<b>Trapiá II</b>	18,19	24,00	15,03
<b>43</b>	<b>Trici</b>	16,50	16,50	25,74
<b>44</b>	<b>Trussu</b>	263,00	32,00	73,28
<b>45</b>	<b>Várzea do Boi</b>	53,00	13,00	55,34

FONTE: CEARÁ (1992)

## 2.1 - EQUAÇÕES ANALISADAS

Para a substituição geral das relações de cota vs. volume, foram criadas cinco representações matemáticas, todas derivadas de uma equação do tipo  $V=a.h^b$  (equação geral). As representações matemáticas dos reservatórios serão apresentadas a seguir.

### 2.1.1 – Representação Matemática 1 (RM1)

A representação matemática 1 considera o valor de “b” igual a três passando a ser escrita na forma  $V=\alpha.h^3$ , na qual a constante  $\alpha$  – definida na literatura como fator de forma da bacia hidráulica – é calculada através da equação (1).

$$a = \frac{K}{h^3} \quad (1)$$

onde  $K$  representa a capacidade do reservatório e  $h$  a altura máxima, equação esta de representação mais simples.

### 2.1.2 – Representação Matemática 2 (RM2)

A segunda representação matemática (RM2) também considera o valor de “b” como igual a três. Porém, a constante  $\alpha$  é calculada por regressão linear, em que a reta de regressão é forçada a passar pela origem dos eixos. O cálculo é feito considerando  $\alpha$  como a inclinação da reta que tem, como valores do eixo das ordenadas, os volumes dos reservatórios em diferentes cotas e, para valores do eixo das abscissas, as diferentes alturas correspondentes, elevadas ao cubo. A equação de regressão linear utilizada é:

$$a = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (2)$$

Com esta representação, a curva cota vs. volume preserva o valor da capacidade (K) porém não preserva o valor da altura máxima (hmax).

#### 2.1.3 - Representação Matemática 3 (RM3)

A terceira representação matemática é análoga a RM2, no entanto preserva-se apenas o valor de hmax, o que resulta em uma capacidade diferente da capacidade real.

#### 2.1.4 - Representação Matemática 4 (RM4)

A representação matemática 4 procura o melhor valor para as constantes “a” e “b”, em conjunto na equação geral utilizando-se o método dos mínimos quadrados como a seguir:

$$\log V = \log a + b \cdot \log h \quad (3)$$

em que log a é a interceptação da reta de regressão no eixo das ordenadas (y) e “b” é a inclinação da reta. Assim tem-se que:

$$\log a = \bar{Y} - b \bar{X} \quad (4)$$

e

$$b = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (5)$$

A curva cota vs. volume não passa pelo ponto de altura máxima e capacidade. Nesta representação preserva-se a capacidade real do reservatório, resultando uma altura máxima diferente da real.

#### 2.1.5 - Representação Matemática 5 (RM5)

Da mesma forma que a RM3, para o cálculo dos parâmetros da equação, a quarta representação matemática utiliza a mesma metodologia da representação anterior. Nesta representação, fixou-se a altura máxima real do reservatório, resultando uma capacidade fictícia.

Um resumo das equações utilizadas é apresentado em forma de tabela (Tabela 2).

**Tabela 2.** Equações Tipo 1, 2 e 3.

Representação Matemática	Forma da Equação	Cálculo dos parâmetros	Observações
1	$V = a \cdot h^3$	$a = \frac{K}{(h_{\max})^3}$	$K = K_{\text{real}}$ $h_{\max} = h_{\max \text{ real}}$
2	$V = a \cdot h^3$	$a = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$	$K = K_{\text{real}}$ $h_{\max} \neq h_{\max \text{ real}}$
3	$V = a \cdot h^3$	$a = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$	$K \neq K_{\text{real}}$ $h_{\max} = h_{\max \text{ real}}$
4	$V = a \cdot h^b$	$\log a = \bar{Y} - b \bar{X}$ $b = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$	$K = K_{\text{real}}$ $h_{\max} \neq h_{\max \text{ real}}$

5

$$V = a \cdot h^b$$

$$b = \frac{\log a - \bar{Y} - b \bar{X}}{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)} \quad K \neq K_{real}$$

$$h_{max} = h_{max\_real}$$


---

## 2.2 – SIMULAÇÃO DOS RESERVATÓRIOS

Para a simulação dos reservatórios utilizaram-se duas séries de vazões. Uma obtida através de observações históricas e outra gerada sinteticamente.

Para a geração das séries sintéticas, consideraram-se as vazões como variáveis estocásticas seguindo uma distribuição de probabilidade Gama de dois parâmetros. A função densidade de probabilidade da distribuição gama é calculada pela equação (6), em que  $\alpha$  é um parâmetro de forma e  $\beta$  um parâmetro de escala.

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)}, \text{ para } x \geq 0$$

$$f(x) = 0, \text{ para } x < 0 \quad (6)$$

A função gama é apresentada na equação (7).

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx \quad (7)$$

Para a estimativa dos parâmetros da distribuição utilizou-se o método dos momentos, resultando nas equações (8) e (9):

$$\bar{X} = \hat{\alpha} \cdot \hat{\beta} \quad (8)$$

$$S^2 = \hat{\alpha} \cdot \hat{\beta}^2 \quad (9)$$

em que  $\bar{X}$  e  $S^2$  são, respectivamente, a média e a variância da série histórica observada.

Para obtenção da vazão de equilíbrio, via simulação, gerou-se uma série de 5.000 anos conforme recomendado por STUDART (2000).

De posse dos dados das relações cota vs. volume, das vazões históricas afluentes aos reservatórios e das séries geradas sinteticamente, foram estimadas as vazões regularizadas (histórica e sintética) de cada açude, através do programa SIMRES ®, por meio de uma simulação de Monte Carlo, considerados quatro níveis de garantia – 80 %, 90 %, 95 % e 98 % e conforme metodologia descrita em Campos et al. (2000).

As representações matemáticas, anteriormente descritas, foram utilizadas para cálculo de novas relações cota vs. volume para cada um dos açudes, resultando, após a simulação, em novas estimativas de vazões regularizadas.

Baseado nas vazões obtidas pelas representações matemáticas 1, 2, 3, 4 e 5 e suas variações obtidas com as séries históricas e sintéticas, foram calculados os erros das estimativas em relação à vazão do reservatório estimadas com os dados das curvas cota vs. volume originais.

## 2.3 - ERROS INDIVIDUAIS NAS ESTIMATIVAS DA VAZÃO REGULARIZADA COM USO DE DIFERENTES METODOLOGIAS DE SUBSTITUIÇÃO DA CURVA COTA VS. VOLUME.

Para a comparação das representações foi considerado como parâmetro de análise o erro calculado conforme formulação abaixo:

$$E = \left[ \left( \frac{Q_{equ}}{\mu} - 1 \right) - \left( \frac{Q_{real}}{\mu} - 1 \right) \right] \quad (10)$$

em que:

$Q_{equ}$  = Vazão regularizada obtida com os volumes calculados pela equação;

$Q_{res}$  = Vazão regularizada obtida com a curva cota vs. volume real;

$\mu$  = volume afluente médio anual

Optou-se por essa formulação para corrigir a escala das vazões, pois uma comparação direta implicaria em altos erros percentuais para pequenas diferenças, quando a vazão regularizada apresentasse um valor pequeno.

Para analisar o desempenho de cada representação matemática e possibilitar melhor comparação dos resultados obtidos, foi calculada a média dos erros individuais obtidos com cada representação, média esta calculada de duas formas distintas: na primeira, foi calculada a média aritmética dos valores dos erros, considerando os sinais positivos e negativos (erro relativo). Um erro com sinal negativo significa que a vazão regularizada com uso de uma dada equação é menor que a vazão regularizada com seus dados reais de curva cota vs. volume. Na segunda forma, calculou-se a média dos valores dos erros em módulo (erro modular).

### 3 – RESULTADOS

Os resultados obtidos na pesquisa foram expressos em forma de tabelas e gráficos, com vistas a sintetizar estas informações e simplificar as consultas.

Os gráficos apresentam os erros obtidos com as equações para a obtenção da vazão regularizada com a série histórica de vazões afluentes para garantir de 90% de regularização, conforme exigido na legislação estadual do Ceará.

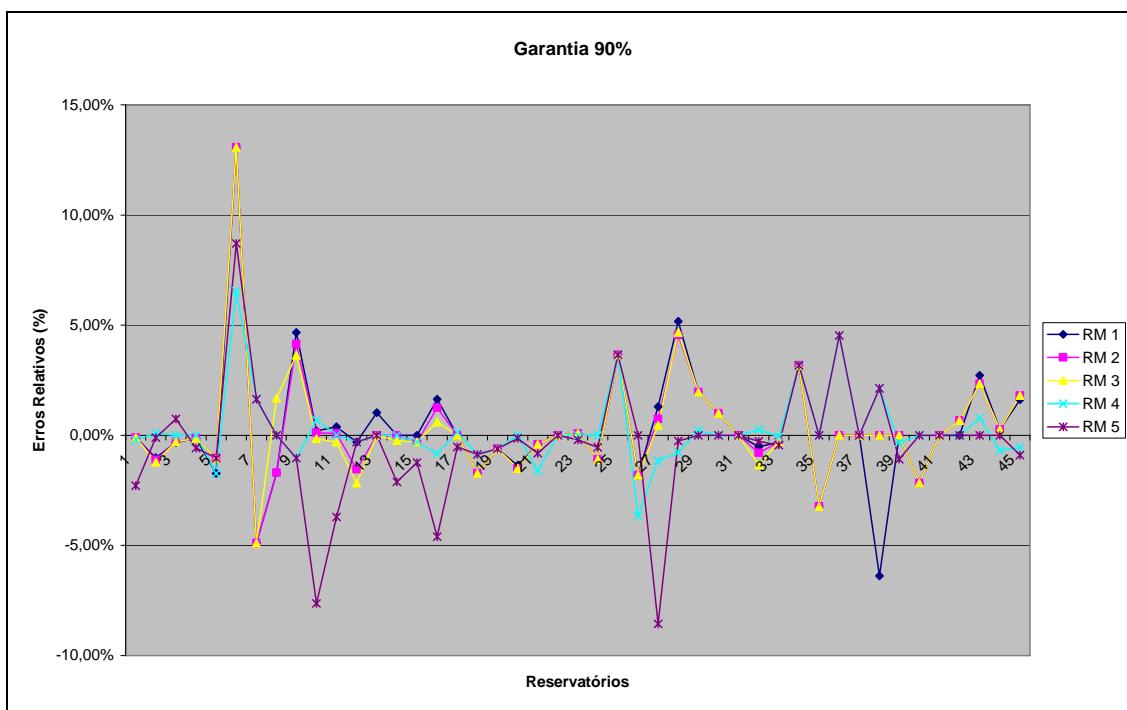


Gráfico 1 – Erros relativos por equação para garantir de 90 % de regularização utilizando-se série histórica.

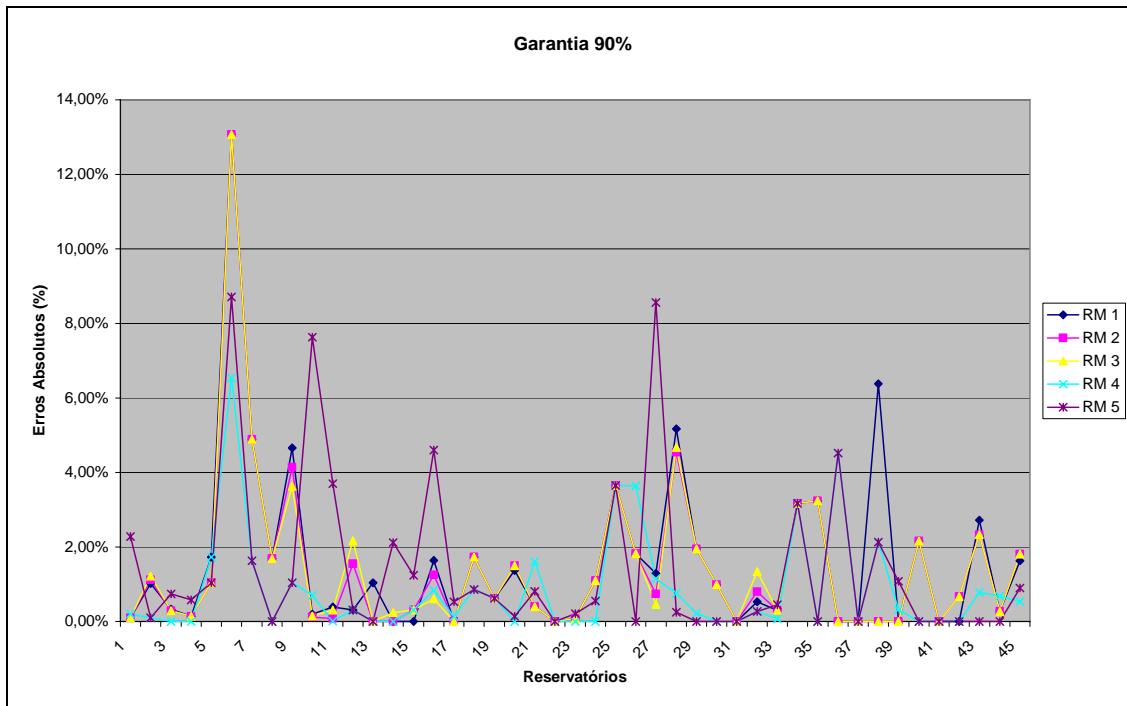


Gráfico 2 – Erros absolutos por equação para garantir de 90 % de regularização utilizando-se série histórica.

Os gráficos 3 e 4 apresentam os erros obtidos com as equações para a obtenção da vazão regularizada com a série sintética de vazões afluentes para a garantia de 90 % de regularização.

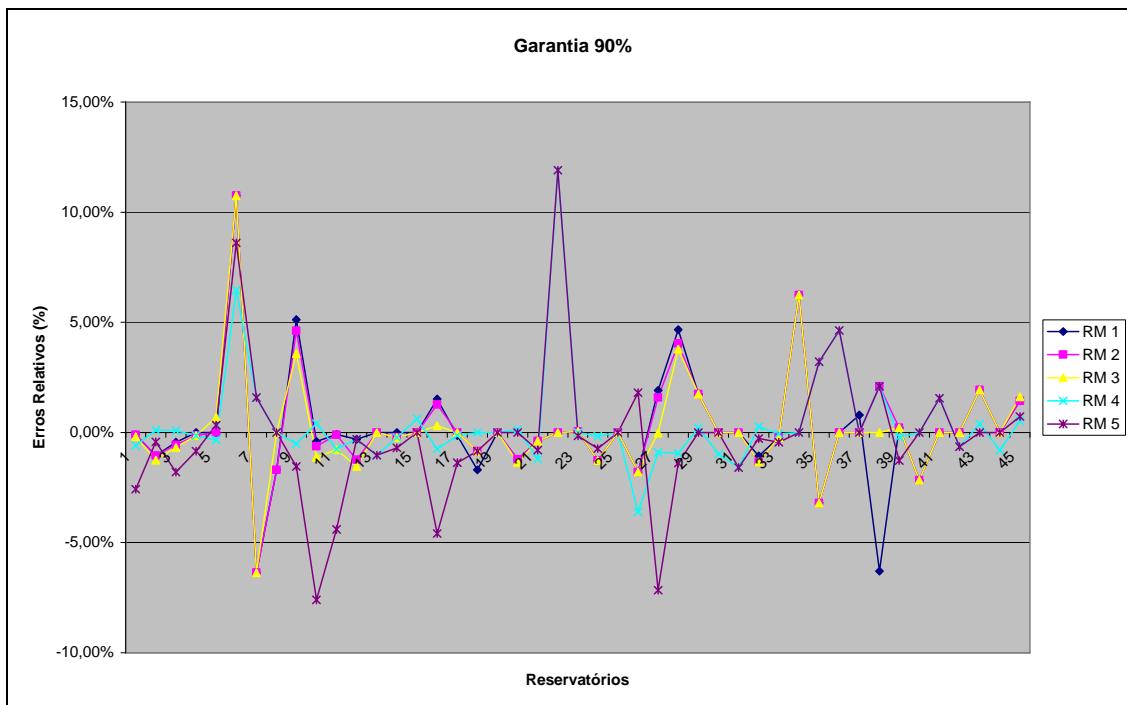


Gráfico 3 – Erros relativos por equação para garantir de 90 % de regularização utilizando série sintética.

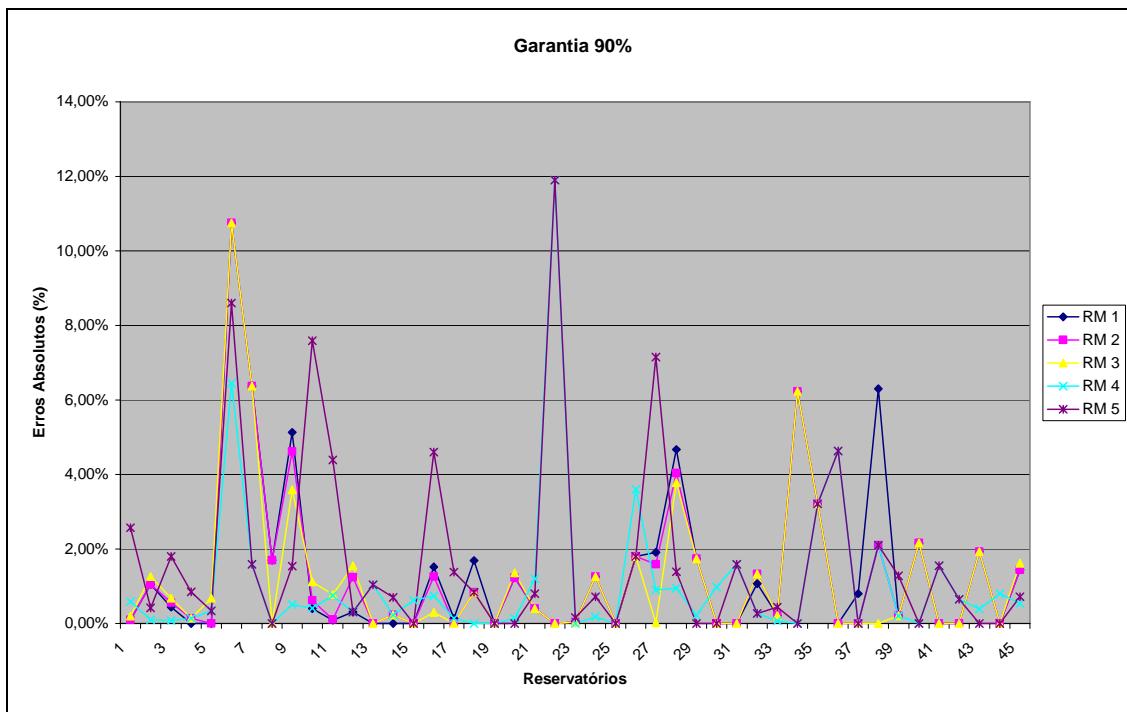


Gráfico 4 – Erros absolutos por equação para garantir de 90 % de regularização utilizando série sintética.

Os erros médios relativos, tanto para as vazões obtidas com a série histórica como os obtidos com a série gerada sinteticamente, são apresentados nas tabelas 3 e 4, respectivamente.

Estes valores não representam o valor médio real dos erros, pois, ao considerar os sinais, estes interferem no resultado. Porém, as médias podem ser tomadas como base para observar o comportamento de cada equação em um dado nível de garantia. Como os valores médios dos erros estão muito próximos de zero, pode-se dizer que não existe viés na substituição das relações de cota vs. volume, qualquer que tenha sido a equação utilizada para estimar esse parâmetro.

**Tabela 3.** Erro médio relativo das vazões geradas com a série histórica (em porcentagem)

Representação Matemática	Nível de Garantia			
	80 %	90 %	95 %	98 %
1	0,19	0,27	0,15	-0,08
2	0,29	0,31	0,14	-0,09
3	0,35	0,31	0,22	-0,03
4	0,54	0,20	0,18	0,15
5	-0,31	-0,34	-0,30	-0,36

**Tabela 4.** Erro médio relativo das vazões geradas com a série sintética (em porcentagem)

Representação Matemática	Nível de Garantia			
	80 %	90 %	95 %	98 %
1	-0,06	0,14	0,03	0,12
2	0,05	0,25	0,15	0,02
3	-0,11	0,13	0,10	-0,01
4	0,62	0,41	-0,30	0,20
5	-0,33	-0,13	-0,25	-0,02

Os erros médios modulares, tanto para as vazões obtidas com a série histórica como os obtidos com a série gerada sinteticamente, são apresentados nas tabelas 5 e 6, respectivamente. Essas tabelas mostram que independentemente da equação utilizada, os erros médios cometidos na estimativa da vazão regularizada são pequenos, da ordem de 2 %, o que implica que, em média, não se justifica o uso de metodologias sofisticadas para representação matemática das curvas.

**Tabela 5.** Erro médio absoluto das vazões geradas com a série histórica (em porcentagem)

Representação Matemática	Nível de Garantia			
	80 %	90 %	95 %	98 %
1	1,79	1,60	1,50	1,18
2	1,57	1,42	1,37	1,05
3	1,67	1,42	1,47	1,17
4	1,22	0,86	0,75	0,94
5	2,27	1,43	1,28	1,47

**Tabela 6.** Erro médio absoluto das vazões geradas com a série sintética (em porcentagem)

Representação Matemática	Nível de Garantia			
	80 %	90 %	95 %	98 %
1	1,67	1,47	1,54	1,39
2	1,57	1,35	1,33	1,53
3	1,54	1,24	1,34	1,53
4	1,28	1,11	1,20	0,77
5	2,36	1,75	1,21	1,09

## 4 – CONCLUSÕES

A análise feita indica que, qualquer que seja a equação utilizada, não existe viés nas estimativas das vazões regularizadas para a substituição das relações de cota vs. volume, uma vez que os erros médios relativos são muito próximos de zero.

Não conferiu ganho significativo em precisão (diminuição do erro em relação à utilização da curva cota vs. volume real do reservatório) com a complexidade da equação. A utilização da representação matemática 1, que oferece maior facilidade para a obtenção de seus parâmetros, pode ser utilizada sem grandes problemas.

Não parece haver tendência clara dos erros com relação à garantia, nada se podendo afirmar a respeito, embora em alguns casos esse erro tenha diminuído com o aumento da mesma.

A utilização de séries históricas ou sintéticas não parece causar alterações significativas nos resultados; portanto, as conclusões são válidas para os dois casos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAMPOS, J. N. B.; NASCIMENTO, L. S. V.; STUDART, T. M. C. (2002) *Avaliação de Erros na Estimativa de Vazões Regularizadas por Ajustamento da Tabela Cota vs. Volume por Equações Matemáticas*. In: VI SIMPÓSIO DE RECURSOS HÍDRICOS DO NORDESTE, 2002, Maceió. VI Simpósiuo de Recursos Hídricos do Nordeste. Porto Alegre: ABRH.
- CAMPOS, J.N.B., STUDART, T.M.C., FRANCO, S. and LUNA, R. (2000) *Hydrological Transformations in Jaguaribe River Basin during 20th Century* IN: Proceedings of the 20th Annual American Geophysical Union, Fort Collins Hydrology Days Publications, v. 1, n. 1
- CEARÁ. (1992). Engesoft *Plano Estadual de Recursos Hídricos*. Secretaria de Recursos Hídricos do Estado do Ceará.
- MOLLE, F. e CADIER, E. (1992). *Manual do Pequeno Açude*. SUDENE/ORSTOM, Recife, Pe.
- NASCIMENTO, L. S. V., CAMPOS, J. N. B., STUDART, T. M. C. (2003 a) *Análise da Eficiência dos Métodos dos Momentos e da Máxima Verossimilhança na Estimativa de Parâmetros da Distribuição Gama II: Uma Abordagem Probabilística*. In: XV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 2003, Curitiba. XV Simpósiuo Brasileiro de Recursos Hídricos. Curitiba: ABRH.
- NASCIMENTO, L. S. V., CAMPOS, J. N. B., STUDART, T. M. C. (2003 b) *Morfologia de Reservatórios e o Viés na Estimativa da Vazão Regularizada*. In: XV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 2003, Curitiba. XV Simpósiuo Brasileiro de Recursos Hídricos. Curitiba: ABRH.
- STUDART, T.M.C. 2000. *Análise de Incertezas na Determinação de Vazões Regularizadas em Climas Semi-Áridos*. Fortaleza, Universidade Federal do Ceará. Tese de Doutorado.
- TORREÃO, T. R. (1997). *Erros nas estimativas de volumes de reservatórios a partir de alturas e áreas máximas*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará, UFC, Fortaleza, Ceará.