



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

SINARA DE AQUINO SOUSA

ALGORITMO GENÉTICO MODIFICADO APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE VIGAS
PROTENDIDAS

FORTALEZA

2025

SINARA DE AQUINO SOUSA

ALGORITMO GENÉTICO MODIFICADO APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE VIGAS
PROTENDIDAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Elias Saraiva Barroso.
Coorientador: Prof. Dr. Antônio Macário
Cartaxo de Melo.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S698a Sousa, Sinara de Aquino.
Algoritmo genético modificado aplicado à otimização de vigas protendidas / Sinara de Aquino Sousa. –
2025.
149 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Elias Saraiva Barroso.

Coorientação: Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo.

1. Otimização. 2. Algoritmo genético. 3. Novo operador de cruzamento. 4. Vigas protendidas.. I. Título.
CDD 624.1

SINARA DE AQUINO SOUSA

ALGORITMO GENÉTICO MODIFICADO APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE VIGAS
PROTENDIDAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em: 15/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Elias Saraiva Barroso (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Augusto Teixeira de Albuquerque
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves
Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

A Deus.

Aos meus pais, Natalício e Risomar.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo apoio em todas as etapas da minha vida.

Ao Prof. Elias Saraiva Barroso, pela excelente orientação e Prof. Antônio Macário Cartaxo de Melo, por todo o suporte. Ambos foram essenciais para que eu pudesse chegar até aqui. Agradeço por toda a assistência e conhecimento compartilhado.

Ao Prof. Dr. Evandro Parente Junior pelas valiosas colaborações, sugestões e pela ajuda quando necessitei.

Ao Prof. Dr. Augusto Teixeira de Albuquerque por aceitar o convite para fazer parte da banca examinadora mais uma vez.

Ao Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves pela disponibilidade.

Aos colegas, Felipe Melo, Mariana e Pedro Ygor por deixarem o ambiente mais alegre.

Ao Gabriel Braga, pela ajuda com programação, principalmente com C++.

Ao Gustavo Pinheiro e Felipe Alves por me ajudarem quando estava cursando as disciplinas pela manhã e trabalhando à tarde, ambos foram essenciais para que eu conseguisse finalizar o primeiro ano do mestrado.

Ao Yuri Girão, que me acompanhou em todos os momentos durante a dissertação, sendo meu porto seguro.

A todos que já foram meus professores desde quando iniciei minha vida escolar, pois todos contribuíram para que eu chegasse até aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Não me entrego sem lutar, tenho ainda coração. Não aprendi a me render, que caia o inimigo então.” Legião Urbana

RESUMO

A protensão tem se tornado cada vez mais atrativa, pois permite vãos maiores, maior flexibilidade arquitetônica, maior agilidade na execução e maior durabilidade. Todas essas vantagens são capazes de tornar as estruturas de concreto protendido soluções mais econômicas quando associadas a um sistema eficiente de cimbramento e fôrmas. O projetista pode definir adequadamente as dimensões das vigas e lajes, bem como parâmetros como a quantidade e o traçado dos cabos a partir de sua experiência. Porém, técnicas de otimização podem ser utilizadas em busca de uma solução ótima, onde parâmetros de projeto podem ser determinados de modo que a solução minimize, por exemplo, o custo, composto pelos custos dos materiais – que inclui o volume de concreto, peso dos cabos e da armadura passiva – e da execução dos serviços. Os Algoritmos Genéticos (AGs) têm sido amplamente utilizados para otimização de diversos tipos de problemas, possuindo parâmetros de controle e operadores que são, em geral, dependentes do problema, necessitando de calibrações em cada caso. Dessa forma, algumas variantes dos AGs têm sido propostas na literatura, mas com poucas aplicações a problemas de projeto de estruturas em concreto protendido. No presente trabalho, formulações existentes e novas formulações propostas para os AGs com relação ao operador de cruzamento são avaliadas quanto à eficiência e eficácia ao dimensionamento de vigas protendidas pós-tracionadas sem aderência. As análises estruturais foram realizadas com auxílio do *software* FAST (*Finite element AnalySis Tool*) e as novas formulações foram implementadas no algoritmo genético do *software* BIOS (*Biologically Inspired Optimization System*), ambos de código aberto e desenvolvidos em linguagem C++ pelo Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC). Os algoritmos propostos foram comparados com alternativas de cruzamentos da literatura, e testados utilizando-se *Benchmarks* matemáticos, após isso, foram aplicados a problemas de vigas protendidas de múltiplos vãos. Foi possível analisar o efeito da variação do f_{ck} no custo final da viga otimizada. Em suma, os resultados mostraram que os operadores propostos apresentam desempenho superior às alternativas da literatura.

Palavras-chave: otimização; algoritmo genético; novo operador de cruzamento; vigas protendidas.

ABSTRACT

Prestressing has become increasingly attractive, as it allows for larger spans, greater architectural flexibility, faster execution, and greater durability. All these advantages can make prestressed concrete structures more economical when combined with an efficient scaffolding system and formwork system. The designer can appropriately define the dimensions of beams and slabs, as well as parameters such as the quantity and layout of tendons based on their experience. However, optimization techniques can be used to find an optimal solution, where design parameters can be determined so that the solution minimizes, for example, the cost, composed of the cost of materials—which includes the volume of concrete, weight of cables, and passive reinforcement—and the cost-of-service execution. Genetic Algorithms (GAs) have been widely used to optimize various types of problems, possessing control parameters and operators that are generally problem-dependent, requiring calibrations in each case. Thus, some GA variants have been proposed in the literature, but with few applications to prestressed concrete structure design problems. In this work, existing and newly proposed GA formulations for the crossover operator are evaluated for their efficiency and effectiveness in the design of prestressed beams. Structural analyses were performed using the FAST (Finite Element Analysis Tool) software, and the new formulations were implemented in the genetic algorithm of the BIOS (Biologically Inspired Optimization System) software. Both open-source programs were developed in C++ by Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) at Universidade Federal do Ceará (UFC). The proposed algorithms were compared with crossover alternatives in the literature and tested using mathematical benchmarks. Afterward, they were applied to multi-span prestressed beam problems. The effect of varying the f_{ck} on the final cost of the optimized beam was analyzed. In summary, the results showed that the proposed operators outperform the alternatives in the literature.

Keywords: optimization; genetic algorithms; new crossover operator; prestressed beams.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comparação entre concreto armado e protendido.....	20
Figura 2 – Classificação normativa dos tipos de protensão quanto à aderência e execução	21
Figura 3 – Tipos de aço para protensão	25
Figura 4 – Método das cargas equivalentes para viga biapoiada	27
Figura 5 – Concordância parabólica.....	28
Figura 6 – Método das cargas equivalentes para viga contínua	29
Figura 7 – Raio de curvatura na região do apoio (Viga em corte).....	31
Figura 8 – Momento isostático de protensão.....	31
Figura 9 – Exemplo do efeito hiperestático de protensão	32
Figura 10 – Perdas imediatas de protensão	34
Figura 11 – Perdas de protensão ao longo do tempo	34
Figura 12 – Espaçamentos mínimos para as placas de ancoragem	36
Figura 13 – Viga protendida hiperestática com armadura ativa excêntrica.....	36
Figura 14 – Momentos e tensões atuantes nas seções da viga protendida	37
Figura 15 – Tensões e deformações no ELU em seção retangular protendida.....	46
Figura 16 – Mínimo e máximo de uma função $f(x)$	49
Figura 17 – Exemplos de variáveis discretas e contínuas	50
Figura 18 – Restrições em um espaço de projeto bidimensional hipotético.	51
Figura 19 – Classificação dos problemas de otimização.	52
Figura 20 – Etapas da otimização estrutural.....	55
Figura 21 – Tipos de otimização estrutural	57
Figura 22 – Algoritmo básico de AGs	58
Figura 23 – Métodos de amostragem para a população inicial	60
Figura 24 – Tipos de codificação para AGs.....	64
Figura 25 – Exemplo de esquema da codificação utilizada.....	65
Figura 26 – Tipos de seleção em AGs	66
Figura 27 – Exemplo de cruzamento de ponto único	67
Figura 28 – Exemplo de cruzamento de k-pontos	67
Figura 29 – Intervalo de busca para o método BLX- α	71
Figura 30 – Intervalo de busca para o método Mod <i>Blend</i>	72
Figura 31 – Exemplo de mutação utilizada	73
Figura 32 – Seção transversal típica com as variáveis de projeto	75

Figura 33 – Seção transversal otimizada	75
Figura 34 – <i>Layout</i> dos cabos	76
Figura 35 – Cortes da laje quadrada com protensão total otimizada.....	77
Figura 36 – Algoritmo de AG utilizado no BIOS	78
Figura 37 – Arquivos de entrada e saída do BIOS	79
Figura 38 – Arquivos de entrada e saída do FAST	81
Figura 39 – Integração do BIOS com o FAST	81
Figura 40 – Exemplos de vigas protendidas a serem otimizadas	82
Figura 41 – Corte transversal da viga protendida para uma seção S_i	84
Figura 42 – Elemento de viga Euler–Bernoulli de dois nós.....	87
Figura 43 – Modelo de discretização utilizado.....	87
Figura 44 – Substituição das cargas concentradas dos pilares centrais em cargas distribuídas.....	88
Figura 45 – Exemplo de substituição das cargas concentradas dos pilares centrais em cargas distribuídas para uma combinação de carga qualquer	89
Figura 46 – Esquema de entrada e saída para as combinações de carga no FAST.....	93
Figura 47 – Comprimentos das armaduras passivas de tração e compressão	95
Figura 48 – Taxas de mutação selecionadas	96
Figura 49 – Cruzamentos utilizados para <i>Benchmarks</i> e seus parâmetros	97
Figura 50 – Função <i>Branin</i>	98
Figura 51 – Função <i>Branin</i> modificada.....	100
Figura 52 – Função <i>Rastrigin</i>	102
Figura 53 – Viga em balanço com seção variável	104
Figura 54 – Configuração da viga protendida utilizada para calibração	109
Figura 55 – Modelo de laje utilizado para definição das cargas lineares na viga	110
Figura 56 – Configuração das placas de ancoragem para MOD <i>Blend</i> em centímetros	117
Figura 57 – Configuração da viga protendida com 5 vãos	124

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto.....	24
Gráfico 2 – Diagrama tensão-deformação idealizado de aços para armadura ativa.....	25
Gráfico 3 – Diagrama tensão-deformação idealizado para aços de armadura passiva.....	26
Gráfico 4 – Densidade de probabilidade ($n = 2$ e $n = 5$)	70
Gráfico 5 – Melhores resultados por cruzamento para a função <i>Branin</i> irrestrita	99
Gráfico 6 – Melhores resultados por cruzamento para a função <i>Branin</i> restrita.....	101
Gráfico 7 – Melhores resultados por cruzamento para a função <i>Rastrigin</i>	103
Gráfico 8 – Melhores resultados por cruzamento para a viga em balanço	106
Gráfico 9 – Estudo dos parâmetros de cruzamento para a viga em balanço	107
Gráfico 10 – Melhores resultados por cruzamento para o Estudo 2 de calibração	113
Gráfico 11 – Resultados por cruzamento para o estudo com 1000 gerações	115
Gráfico 12 – Resultados para as restrições para o estudo com 1000 gerações.....	116
Gráfico 13 – Resultados por cruzamento para o estudo do f_{ck} (SEINFRA)	118
Gráfico 14 – Resultados para as restrições para o estudo do f_{ck} (SEINFRA).....	119
Gráfico 15 – Valores da função objetivo por f_{ck} (SEINFRA)	120
Gráfico 16 – Valores da função objetivo por f_{ck} (Valores de usina).....	121
Gráfico 17 – Resultados por cruzamento para o estudo da viga com 5 vãos	127
Gráfico 18 – Resultados para as restrições (estudo da viga com 5 vãos).....	128
Gráfico 19 – Resultados para a função objetivo para o estudo da viga de 5 vãos.....	129

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação normativa dos tipos de protensão quanto à intensidade	22
Tabela 2 – Situação do momento hiperestático de protensão	33
Tabela 3 – Estimativa das perdas de protensão	35
Tabela 4 – Custos sem desoneração dos materiais utilizados (SEINFRA)	83
Tabela 5 – Valores comerciais para concreto coletados da Apodi	83
Tabela 6 – Restrições do problema da viga contínua protendida	85
Tabela 7 – Parâmetros da discretização para 3, 4 e 5 vãos.	90
Tabela 8 – Dados de entrada informados pelo usuário para a viga protendida	91
Tabela 9 – Parâmetros variáveis calculados para a viga protendida.....	91
Tabela 10 – Limites de tensões, deformações e do raio de curvatura.	92
Tabela 11 – Equações necessárias para o cálculo do aço passivo	94
Tabela 12 – Execuções para cada cruzamento por problema avaliado.....	97
Tabela 13 – Parâmetros do AG utilizados para a função <i>Branin</i>	98
Tabela 14 – Melhores resultados por cruzamento para a função <i>Branin</i> irrestrita	99
Tabela 15 – Melhores resultados por cruzamento para a função <i>Branin</i> restrita	100
Tabela 16 – Parâmetros do AG utilizados para a função <i>Rastrigin</i>	102
Tabela 17 – Melhores resultados por cruzamento para a função <i>Rastrigin</i>	102
Tabela 18 – Resultados obtidos por Vanderplaats para o problema da viga em balanço	105
Tabela 19 – Parâmetros do AG utilizados para a viga em balanço.....	105
Tabela 20 – Melhores resultados por cruzamento para a viga em balanço	106
Tabela 21 – Resultados para as variáveis para a viga em balanço	107
Tabela 22 – Resultados para as restrições para a viga em balanço.....	107
Tabela 23 – Resultados para o estudo do número de gerações e indivíduo pré-determinado para a viga de Vanderplaats	108
Tabela 24 – Dados do problema de calibração	109
Tabela 25 – Cargas lineares que atuam nas vigas.....	110
Tabela 26 – Parâmetros do AG para a viga protendida – Estudo 1	111
Tabela 27 – Melhores resultados por cruzamento para o Estudo 1 de calibração	112
Tabela 28 – Execuções para cada cruzamento variando-se a população e número de gerações	112
Tabela 29 – Resultados da diferença entre média dos melhores e melhor para o Estudo 2 de calibração.....	113

Tabela 30 – Resultados por cruzamento para o estudo com 1000 gerações.....	114
Tabela 31 – Resultados para as variáveis por cruzamento para o estudo com 1000 gerações	115
Tabela 32 – Composição do custo por cruzamento para o estudo com 1000 gerações	116
Tabela 33 – Resultados por cruzamento para o estudo do f_{ck} (SEINFRA).....	117
Tabela 34 – Resultados para as variáveis para o estudo do f_{ck} (SEINFRA)	118
Tabela 35 – Valores da função objetivo por f_{ck} (SEINFRA).....	119
Tabela 36 – Valores da função objetivo por f_{ck} (Valores de usina)	120
Tabela 37 – Resultados para 1000 e 5000 gerações para $f_{ck} = 40$ MPa (SEINFRA).....	122
Tabela 38 – Resultados para taxa de mutação de 0,4; 0,8 e 0,1 para $f_{ck} = 40$ MPa (SEINFRA)	122
Tabela 39 – Momentos característicos gerados no meio do primeiro vão.....	123
Tabela 40 – Dados do problema da viga de 5 vãos	125
Tabela 41 – Parâmetros do AG para a viga protendida com 5 vãos	125
Tabela 42 – Resultados por cruzamento para o estudo da viga de 5 vãos	126
Tabela 43 – Resultados para as variáveis por cruzamento para o estudo da viga de 5 vãos ..	126
Tabela 44 – Resultados para a função objetivo por cruzamento para o estudo da viga de 5 vãos	129

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivos	18
1.1.1	Objetivos Específicos	18
1.2	Organização do Texto	19
2	CONCRETO PROTENDIDO	20
2.1	Princípios básicos	20
2.2	Tipos de protensão	21
2.3	Propriedades dos materiais	22
2.3.1	<i>Concreto</i>	23
2.3.2	<i>Armadura Ativa</i>	24
2.3.3	<i>Armadura Passiva</i>	26
2.4	Representação dos efeitos de protensão	26
2.4.1	<i>Carga equivalente para elemento linear biapoado</i>	27
2.4.2	<i>Cargas equivalentes para elemento linear contínuo</i>	28
2.4.3	<i>Raio mínimo de curvatura</i>	30
2.4.4	<i>Hiperestáticos de protensão</i>	31
2.5	Perdas de protensão	33
2.6	Distribuição das placas de ancoragem nas extremidades da viga	35
2.7	Cálculo das tensões em uma seção protendida	36
2.8	Estados-Limites de Serviço (ELS)	38
2.8.1	<i>Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F)</i>	38
2.8.2	<i>Estado-Limite de Descompressão (ELS-D)</i>	39
2.8.3	<i>Estado-Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF)</i>	40
2.9	Estados-Limites Últimos (ELU)	41
2.9.1	<i>Hipóteses Básicas</i>	41
2.9.2	<i>Verificação do Estado-Limite Último no Ato da Protensão</i>	43
2.9.3	<i>Cálculo da tensão na armadura ativa</i>	44
2.9.4	<i>Cálculo do Momento Fletor Solicitante (M_{Sd})</i>	45
2.9.5	<i>Cálculo do Momento Fletor Último (M_{Rd}) e da armadura passiva (A_s e A_s')</i>	45
3	OTIMIZAÇÃO	49
3.1	Formulação de um problema de otimização	49
3.2	Classificação dos problemas de otimização	52
3.3	Técnicas de Otimização	53
3.4	Otimização estrutural	54

3.4.1	<i>Objetivos da otimização estrutural</i>	54
3.4.2	<i>Etapas da otimização estrutural</i>	55
3.4.3	<i>Classificação dos problemas de otimização estrutural</i>	57
4	ALGORITMOS GENÉTICOS	58
4.1	Terminologia biológica em AGs	58
4.2	População inicial	59
4.3	Função aptidão	61
4.4	Funções de penalização	61
4.4.1	<i>Penalidades estáticas</i>	61
4.4.2	<i>Método de penalidade DEB 2000</i>	62
4.5	Taxa de sucesso	63
4.6	Elitismo	63
4.7	Codificação	64
4.8	Seleção	65
4.9	Cruzamentos de código binário	66
4.10	Cruzamentos de código real	67
4.10.1	<i>Cruzamento Aritmético</i>	68
4.10.2	<i>Cruzamento Geométrico</i>	68
4.10.3	<i>Cruzamento Binário Simulado (SBX)</i>	69
4.10.4	<i>Cruzamento de Mistura</i>	71
4.10.5	<i>Mod Blend</i>	72
4.10.6	<i>Mod Geometric</i>	72
4.11	Mutação	73
4.12	Critérios de parada	73
4.13	Avanços de algoritmos genéticos aplicados à otimização de elementos protendidos nos últimos anos	74
4.14	BIOS (<i>Biologically-Inspired Optimization System</i>)	77
5	MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DE VIGAS PROTENDIDAS DE MÚLTIPLOS VÃOS	80
5.1	Integração da modelagem e otimização	80
5.2	Formulação do problema de otimização para uma viga contínua protendida com múltiplos vãos	81
5.2.1	<i>Variáveis de Projeto e Função Objetivo</i>	83
5.2.2	<i>Restrições</i>	85
5.3	Algoritmo para automatização do dimensionamento de uma viga contínua protendida com múltiplos vãos	86
5.3.1	<i>Metodologia adotada para discretização da viga</i>	86
5.3.2	<i>Inicialização do problema</i>	91

5.3.3	<i>Cálculo dos parâmetros variáveis</i>	91
5.3.4	<i>Limites de tensões e deformações</i>	92
5.3.5	<i>Cálculo dos momentos e tensões para cada combinação de carga</i>	93
5.3.6	<i>Cálculo da armadura passiva</i>	94
6	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	96
6.1	Estudo dos cruzamentos genéticos utilizados aplicados a <i>Benchmarks</i>	96
6.1.1	<i>Branin</i>	97
6.1.2	<i>Rastrigin</i>	101
6.1.3	<i>Viga em balanço com seção variável</i>	103
6.2	Calibração do algoritmo genético utilizado para otimização de vigas protendidas contínuas	109
6.2.1	<i>Variação dos parâmetros dos cruzamentos, número da população e gerações</i> ..	111
6.3	Estudos a partir da viga de calibração	114
6.3.1	<i>Análise das vigas otimizadas pela metodologia proposta</i>	114
6.3.2	<i>Efeito da variação do f_{ck} do concreto no custo da viga</i>	117
6.3.3	<i>Tentativa de determinação do ótimo global para $f_{ck} = 40$</i>	121
6.3.4	<i>Comparação com metodologia de projeto</i>	122
6.4	Viga de 5 vãos	124
7	CONCLUSÃO	130
	REFERÊNCIAS	133
	APÊNDICE A – OPERADORES DE CRUZAMENTO EM CÓDIGO BINÁRIO	137
	APÊNDICE B – OPERADORES DE MUTAÇÃO	139
	APÊNDICE C – VALIDAÇÃO DO PROBLEMA DA VIGA PROTENDIDA	141

1 INTRODUÇÃO

O concreto protendido é formado por concreto, armaduras ativas e armaduras passivas. O mecanismo de protensão consiste em tracionar a armadura ativa até que se atinja a força que foi determinada em projeto. Ao final do processo a armadura ativa é ancorada e tende a voltar para o seu estado relaxado, fazendo com que surjam tensões internas na peça de concreto. Desse modo, o concreto estará trabalhando no seu melhor estado, o de compressão. Portanto, a protensão permite que as peças consigam atingir maiores vãos e serem mais esbeltas.

Para estruturas em concreto protendido, diferentemente do concreto armado, em geral, os Estados-Limites de Serviço (ELS), relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade vêm em primeiro plano e, posteriormente, verifica-se o Estado-Limite Último (ELU), que está relacionado ao colapso e ruína estrutural, tendo em vista que as verificações de serviço são determinantes no dimensionamento desses elementos estruturais. Assim, a partir da experiência do projetista e da ferramenta por ele utilizada, tem-se uma estimativa inicial das dimensões e da quantidade de cabos (que pode ser calculada com base na carga a ser balanceada), e os limites de serviço são verificados, caso não sejam respeitados, a seção é redimensionada e verificada novamente. Também é no ELU que se verificam se armaduras passivas devem ser acrescentadas.

Por conseguinte, técnicas numéricas de otimização podem ser aplicadas a elementos protendidos fazendo com que o processo de dimensionamento estrutural seja mais eficiente, visto que não haverá necessidade de redimensionamento. Sendo as técnicas tradicionais de programação matemática ineficazes para variáveis discretas, podendo convergir para ótimos locais, os algoritmos genéticos (AGs), baseados na teoria evolucionista de Charles Darwin, se tornam uma excelente alternativa para resolver tais problemas, tendo em vista que os AGs podem encontrar a solução ótima global com alta probabilidade (RAO, 2009).

Algumas variantes dos AGs, desenvolvidas para problema com variáveis reais, têm sido propostas na literatura, mas ainda existem poucas aplicações a problemas de projetos de estruturas em concreto protendido. Há, dessa forma, uma demanda por verificações dessas variantes aplicadas a esses tipos de problemas estruturais. Assim, no presente trabalho, novos cruzamentos são desenvolvidos para otimização de custo de vigas protendidas de múltiplos vãos. O desempenho dos novos cruzamentos é comparado com o de outras alternativas da literatura. A comparação é realizada tanto em *Benchmarks* da literatura como na otimização

de vigas protendidas. Um procedimento de calibração dos parâmetros dos algoritmos é realizado para garantir uma comparação justa destes. Além disso, também é estudado o efeito do f_{ck} no custo obtido na otimização, e a solução otimizada pela metodologia proposta é comparada com o um resultado típico de pré-dimensionamento realizado pela metodologia tradicional de projeto de vigas protendidas.

A análise estrutural foi realizada no software de código aberto FAST (*Finite element AnalySis Tool*) e a otimização via algoritmo genético foi implementada no *software* de código aberto BIOS (*Biologically Inspired Optimization System*). Sendo esses programas desenvolvidos em linguagem C++ no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC).

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver variantes de algoritmo genético com relação ao operador de cruzamento, adaptando-o para a otimização de projetos estruturais de vigas de concreto protendido em um programa de otimização de código aberto.

1.1.1 Objetivos Específicos

- a) Descrever o estado da arte da aplicação da otimização ao projeto de estruturas em concreto protendido usando AG;
- b) Avaliar o desempenho de formulações de AG existentes usando o sistema de otimização BIOS;
- c) Propor formulações alternativas para operadores de cruzamento aplicadas ao AG e implementá-las no sistema BIOS;
- d) Calibrar os parâmetros do AG para problemas de projeto de estruturas protendidas usando modelos de otimização de custo;
- e) Aplicar as formulações desenvolvidas a problemas de projeto de vigas em concreto protendido;
- f) Estudar a sensibilidade da solução ótima com relação a parâmetros do modelo de otimização, tais como, parâmetros dos cruzamentos, taxa de mutação, tamanho da população, número de gerações e também do f_{ck} do concreto considerado.

1.2 Organização do Texto

Este trabalho está dividido em 7 capítulos. O Capítulo 2 trata do concreto protendido, abrangendo-se desde definições básicas até critérios de projeto baseados nos estados-limites. O Capítulo 3 traz conceitos básicos de otimização no geral e otimização de estruturas. O Capítulo 4 apresenta o conceito dos algoritmos genéticos, suas variantes e os novos operadores de cruzamento propostos neste trabalho. O Capítulo 5 discute o problema da viga protendida de múltiplos vãos explorado no trabalho, tanto no aspecto de análise como do processo de otimização. O Capítulo 6 trata dos operadores de cruzamento, inclusive os propostos, aplicados a *Benchmarks* e vigas protendidas de múltiplos vãos. Por fim, no Capítulo 7, tem-se a conclusão e propostas de trabalhos futuros.

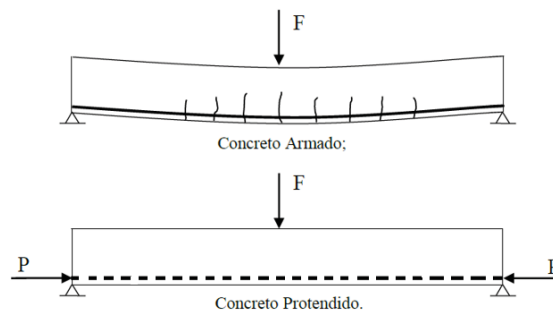
2 CONCRETO PROTENDIDO

2.1 Princípios básicos

O concreto simples é muito resistente à compressão, mas relativamente fraco quando submetido à tração, sendo assim, a armadura passiva utilizada no concreto armado tem a função de combater esses esforços, no entanto, uma seção central de uma viga de concreto armado bi-apoiada, por exemplo, suporta uma carga através de tensões de compressão desenvolvidas na sua parte superior e pode não resistir às tensões de tração na parte inferior, vindo a fissurar. Já elementos de concreto protendido têm fissuração limitada ou impedida na região de tração da peça, o que torna sua manutenção muito mais econômica que a manutenção de uma peça de concreto armado. Dentre os usos do concreto protendido estão vigas e lajes, pré-fabricadas ou moldadas em obra, por exemplo (BUCHAIM, 2007).

O mecanismo de protensão consiste em tracionar a armadura ativa, dentro do seu limite elástico, por meio de macacos hidráulicos, até que se atinja a força que foi determinada em projeto. Ao fim do processo a armadura ativa é ancorada, sendo impedida de voltar ao seu estado inicial, resultando em um sistema de forças auto-equilibradas que produzem tensões internas na peça de concreto. Deste modo, o concreto estará trabalhando no seu melhor estado, o de compressão. Na Figura 1, tem-se uma comparação ilustrativa entre o concreto armado e o concreto protendido.

Figura 1 – Comparação entre concreto armado e protendido



Fonte: Bastos (2024, p. 3) – Adaptado.

Conforme Buchaim (2007), a protensão das peças de concreto, principalmente aquelas sob flexão, traz diversas vantagens à estrutura, decorrentes do uso de aços de alta resistência e do fato de que as tensões de tração provocadas pelas cargas externas devem superar as tensões de compressão prévias para iniciar a fissuração do concreto após o limite

estabelecido. Além das vantagens na flexão, uma peça protendida também possui maior resistência às tensões tangenciais originadas por força cortante e torção, pois, de um lado, a protensão pode contribuir para diminuir esses esforços na seção de concreto e de outro, contribui com a compressão axial para diminuir o alongamento da peça.

2.2 Tipos de protensão

Segundo Carvalho (2017), o concreto protendido pode ser classificado quanto à sua aderência e execução, bem como quanto à intensidade da protensão aplicada ao elemento protendido.

Com relação à classificação quanto à aderência e ao processo executivo, a norma de projeto de estruturas de concreto, NBR 6118 (2023), classifica o concreto protendido em três tipos, conforme apresentados na Figura 2.

Figura 2 – Classificação normativa dos tipos de protensão quanto à aderência e execução

Concreto com armadura ativa pré-tracionada com aderência inicial	Concreto com armadura ativa pós-tracionada com aderência posterior	Concreto com armadura ativa pós-tracionada sem aderência
• O pré-alongamento da armadura ativa é feito utilizando-se apoios independentes do elemento estrutural, antes do lançamento do concreto; • A ligação da armadura de protensão com os referidos apoios é desfeita após o endurecimento do concreto; • A ancoragem no concreto realiza-se somente por aderência.	• O pré-alongamento da armadura ativa é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizadas, como apoios, partes do próprio elemento estrutural; • A aderência entre a armadura e o concreto é adquirida posteriormente, de modo permanente, através da injeção das pastas de cimento nas bainhas.	• O pré-alongamento da armadura ativa é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizadas, como apoios, partes do próprio elemento estrutural; • A aderência da armadura com o concreto está presente apenas em pontos localizados, como nas regiões de ancoragem, por exemplo.

Fonte: ABNT NBR 6118:2023 (2023, p. 3) – Adaptado.

Utilizou-se concreto com armadura ativa pós-tracionada sem aderência para todos os exemplos realizados no referente trabalho.

Segundo a NBR 6118 (2023), ainda se pode classificar a protensão quanto à sua intensidade que, quando associada à agressividade do meio ambiente, influencia diretamente na durabilidade das peças e aceitabilidade sensorial dos usuários. Os tipos de protensão para

essa classificação são: protensão completa, protensão limitada e protensão parcial. A intensidade é fator essencial na prevenção da corrosão da armadura, pois está relacionada ao controle da abertura de fissuras. No caso do concreto protendido, o risco de corrosão é maior devido à tensão atuante nas armaduras ativas, sendo assim, a NBR 6118 (2023) também estabelece limites para a abertura de fissuras e combinações de ações de serviço a serem utilizadas nas verificações para cada tipo de protensão, sendo os estados a serem respeitados: Estado limite de abertura de fissuras (ELS-W), Estado limite de formação de fissuras (ELS-F) e Estado limite de descompressão (ELS-D), as quais são explicitados na Tabela 1.

Tabela 1 – Classificação normativa dos tipos de protensão quanto à intensidade

Tipo de concreto estrutural	Tipo de protensão	Classe de agressividade ambiental (CAA)	Exigências relativas à fissuração	Combinação de ações em serviço a utilizar
Concreto protendido nível 1 (protensão parcial)	Pré-tração	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,2 \text{ mm}$	Combinação frequente
	Pós-tração	CAA I e CAA II		
Concreto protendido nível 2 (protensão limitada)	Pré-tração	CAA I e CAA II	Verificar as duas condições abaixo ELS-F	Combinação frequente
	Pós-tração	CAA I a CAA IV	ELS-D ^a	Combinação quase permanente
Concreto protendido nível 3 (protensão completa)	Pré-tração	CAA I a CAA IV	Verificar as duas condições abaixo ELS-F	Combinação rara
	Pós-tração	CAA I a CAA IV	ELS-D ^a	Combinação frequente

^a A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com $a_p=50 \text{ mm}$.

Fonte: ABNT NBR 6118:2023 (2023, p. 80) – Adaptado.

Em todas as aplicações dos próximos capítulos considerou-se protensão limitada (nível 2).

2.3 Propriedades dos materiais

Nos tópicos seguintes as características do concreto, armadura ativa e armadura passiva são apresentadas.

2.3.1 Concreto

No concreto protendido é necessário utilizar concretos de resistências à compressão mais elevadas do que no concreto armado, variando de 40 a 80 MPa, devido a solicitações prévias causadas pela força de protensão, para possibilitar a redução das dimensões dos elementos, diminuir a flecha e as perdas de protensão, além de aumentar a impermeabilidade das peças (BASTOS, 2024).

No projeto de estruturas de concreto, é especificada a resistência característica do concreto (f_{ck}) à compressão aos 28 dias em MPa, cujo o valor deve ser atingido para que os requisitos de segurança e durabilidade sejam satisfeitos.

De acordo com a NBR 6118 (2023), quando não forem realizados ensaios, pode-se estimar o valor do módulo de elasticidade inicial (E_{ci}) aos 28 dias em MPa usando as expressões a seguir.

$$\begin{cases} E_{ci} = \alpha_e \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \rightarrow \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_e \cdot \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \text{se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (1)$$

em que o valor de α_e varia conforme a composição do agregado graúdo, sendo igual a 1,0 para o granito e gnaiss, material considerado neste trabalho.

O módulo de elasticidade secante é obtido de

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (2)$$

onde:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (3)$$

Em estruturas protendidas pode-se utilizar o módulo de elasticidade inicial para cálculo das perdas de protensão em uma idade entre 7 dias e 28 dias fazendo-se:

$$\begin{cases} E_{ci}(t) = \left(\frac{f_{ckj}}{f_{ck}}\right)^{0,5} \rightarrow \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ E_{ci}(t) = \left(\frac{f_{ckj}}{f_{ck}}\right)^{0,3} \rightarrow \text{se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4)$$

onde o f_{ckj} (em MPa) é a resistência característica à compressão do concreto na idade em que se pretende estimar o módulo de elasticidade que, por sua vez, pode ser calculada por:

$$f_{ckj} = \beta_1 \cdot f_{ck} \quad (5)$$

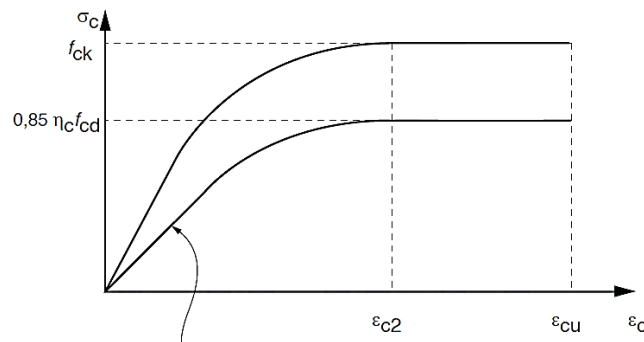
onde o β_1 é um parâmetro calculado como:

$$\beta_1 = e^{\{s \cdot [1 - (28/t)^{1/2}]\}} \quad (6)$$

em que t é a idade efetiva do concreto (em dias) e s varia de acordo com o cimento utilizado. No referente trabalho adotou-se uma estimativa para β_1 de 0,7.

Para análises no Estado-Limite Último pode-se utilizar o diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto apresentado no Gráfico 1, em que f_{cd} é resistência de cálculo à compressão do concreto e é expressa, para combinações normais, como $f_{ck}/1,4$.

Gráfico 1 – Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto



Fonte: ABNT NBR 6118:2023 (2023, p. 26) – Adaptado.

A tensão de compressão no concreto pode ser definida como:

$$\sigma_c = 0,85 \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (7)$$

em que

$$\begin{cases} \eta_c = 1,0 \rightarrow \text{se } f_{ck} \leq 40 \text{ MPa} \\ \eta_c = \left(\frac{40}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \text{se } f_{ck} > 40 \text{ MPa} \end{cases} \quad (8)$$

e

$$\begin{cases} n = 2 \rightarrow \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ n = 1,4 + 23,4 \cdot \left(\frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 \rightarrow \text{se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (9)$$

2.3.2 Armadura Ativa

Existem três tipos de aço para protensão: fios trefilados, cordoalhas (engraxadas ou não) e barras de alta resistência.

Figura 3 – Tipos de aço para protensão

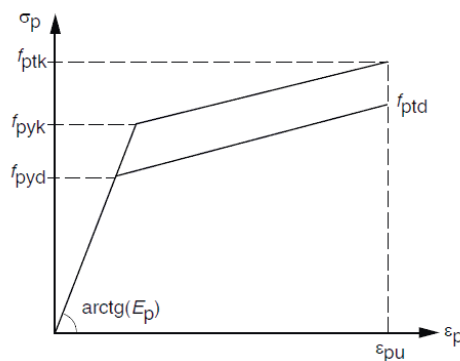


Fonte: Bastos (2024, p. 63 a 68) – Adaptado.

Os aços para protensão ainda podem ser classificados de acordo com a sua relaxação, os quais são: aços de relaxação baixa (RB) e aços de relaxação normal (RN). Para lajes com protensão não-aderente utilizam-se normalmente cordoalhas não-engravadas de baixa relaxação com sete fios de valor característico de resistência à ruptura (f_{ptk}) de 1900 MPa ou 2100 MPa. Salienta-se que no referente trabalho utilizaram-se cordoalhas engravadas de baixa relaxação com resistência à ruptura de 1900 MPa.

O diagrama tensão-deformação deve ser fornecido pelo fabricante ou obtido através de ensaios realizados de acordo com a ABNT NBR 6349, podendo-se utilizar, para cálculo nos estados-limites de serviço e último, o diagrama simplificado para a armadura ativa, mostrado no Gráfico 2, considerando-se para o módulo de elasticidade (E_p) o valor de 200 GPa para aços de baixa relaxação e 7850 kg/m³ para a massa específica de fios e cordoalhas (NBR 6118, 2023). A resistência ao escoamento de cálculo (f_{pyd}) é expressa, para combinações normais, como $f_{pyk}/1,15$, sendo f_{pyk} a resistência característica de escoamento convencional.

Gráfico 2 – Diagrama tensão-deformação idealizado de aços para armadura ativa



Fonte: ABNT NBR 6118:2023 – Adaptado (2023, p. 31).

Conforme a NBR (6118), a tensão da armadura de protensão na saída do aparelho deve ser 80% do valor de f_{ptk} , desse modo, a força de protensão inicial (P_0) para uma cordoalha pode ser calculada como:

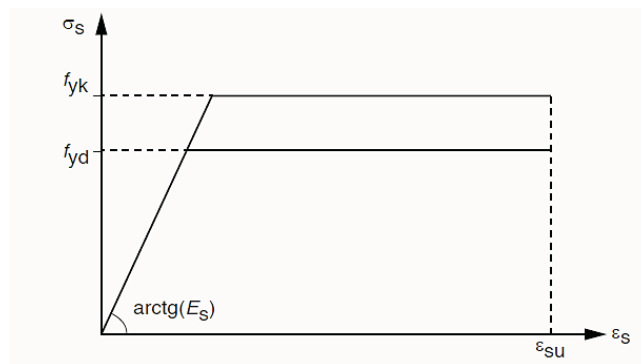
$$P_0 = 0,8 \cdot f_{ptk} \cdot A_{cp} \quad (10)$$

em que A_{cp} é a área da seção transversal da cordoalha.

2.3.3 Armadura Passiva

Para verificação nos estados-limites de serviço e último, a NBR 6118 (2023) permite utilizar o diagrama simplificado, apresentado no Gráfico 3, para aços de armadura passiva.

Gráfico 3 – Diagrama tensão-deformação idealizado para aços de armadura passiva



Fonte: ABNT NBR 6118:2023 (2023, p. 29) – Adaptado.

Para estruturas de concreto armado e protendido, os aços para armadura passiva mais utilizados são CA-50 e CA-60 com resistências características ao escoamento (f_{yk}) de 500 MPa e 600 MPa, respectivamente.

Ainda conforme a NBR 6118 (2023), pode-se adotar para aços de armadura passiva o valor de 210 GPa para o módulo de elasticidade e 7850 kg/m³ para a massa específica. A resistência ao escoamento de cálculo (f_{yd}) é calculada do mesmo modo para aços de armadura ativa, para combinações normais, fazendo-se $f_{yk}/1,15$.

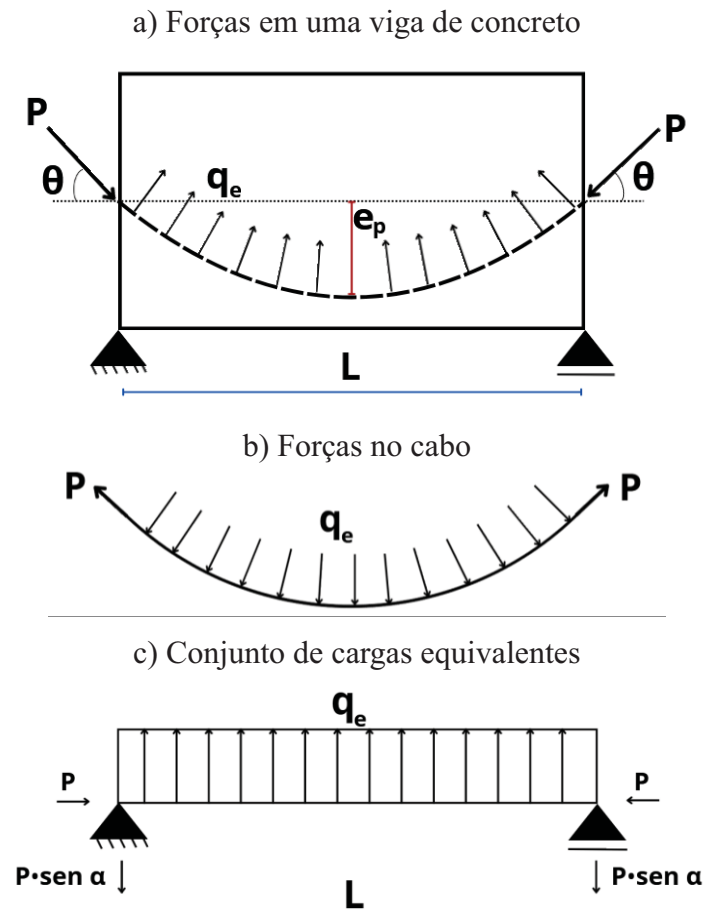
2.4 Representação dos efeitos de protensão

Conforme a NBR 6118 (2023), as ações da protensão devem ser consideradas em todas as estruturas protendidas e também em elementos sob ação indireta da protensão, como, por exemplo, os pilares, os quais estão sob influência dos esforços hiperestáticos de protensão. Um método para a consideração da carga de protensão e outro para o cálculo dos esforços hiperestáticos são apresentados nos tópicos seguintes.

2.4.1 Carga equivalente para elemento linear biapoiado

De acordo com Lin e Burns (1981), uma das formas de considerar as ações da protensão é através do Método das Cargas Equivalentes, o qual consiste na substituição das cargas provenientes do cabo por uma carga vertical uniformemente distribuída, conforme representado na Figura 4.

Figura 4 – Método das cargas equivalentes para viga biapoiada



Fonte: Loureiro (2006, p. 1749) – Adaptado.

Conforme a Figura 4, para uma viga protendida biapoiada com carregamento externo uniformemente distribuído, faz-se, considerando $\tan \theta \approx \sin \theta$, para o equilíbrio das forças verticais:

$$2 \cdot P \cdot \sin \theta = q_e \cdot L \quad (11)$$

em que: q_e é a carga equivalente de protensão, P é a força de protensão constante ao longo do cabo e L é comprimento do vão da peça.

A aproximação explicitada anteriormente pode ser utilizada devido ao fato de que o ângulo θ possui, usualmente, valores pequenos em elementos protendidos, abaixo de 10° .

O valor de $\text{sen } \theta$ é dado por:

$$\text{sen } \theta = \frac{2 \cdot e_p}{\sqrt{(2 \cdot e_p)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} \quad (12)$$

em que e_p é a distância do cabo até o centro de gravidade da seção chamada de excentricidade.

O valor de e_p é muito menor que L , portanto, a expressão anterior pode ser simplificada para:

$$\text{sen } \theta = \frac{2 \cdot e_p}{L/2} \quad (13)$$

Substituindo a Equação (13) em (11), tem-se:

$$q_e = \frac{8 \cdot P \cdot e_p}{L^2} \quad (14)$$

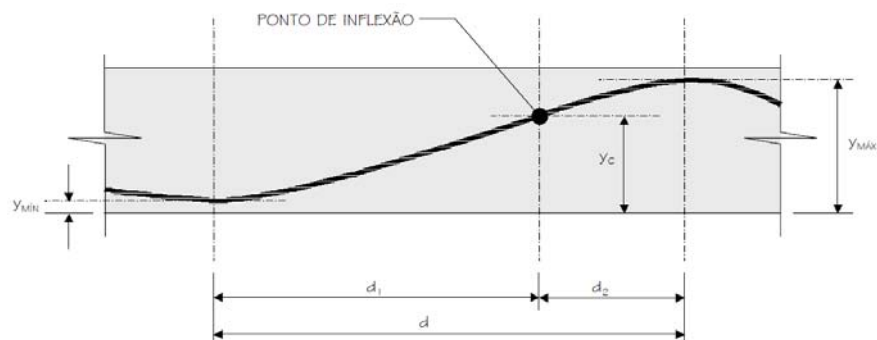
Na prática de projetos, é utilizado usualmente o maior valor possível para e_p , respeitando-se o cobrimento do cabo de protensão.

2.4.2 Cargas equivalentes para elemento linear contínuo

Estruturas hiperestáticas possuem momentos positivos e negativos devido à sua continuidade, por conseguinte, o traçado vertical dos cabos deve se adequar de modo que a protensão balanceie corretamente os esforços atuantes.

As cargas equivalentes de protensão são então calculadas para cada trecho do cabo entre vértices ou pontos de mudança de curvatura realizando-se a concordância parabólica (Figura 5), assumindo que $\tan \theta \approx \text{sen } \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$ para ângulos pequenos (MENEGATTI, 2004).

Figura 5 – Concordância parabólica



Fonte: Emerick (2002, p. 26) – Adaptado.

O valor de d representa a distância entre um ponto máximo e um mínimo e d_1 e d_2 as distâncias entre o ponto de inflexão e os pontos máximos e mínimos da curvatura do cabo.

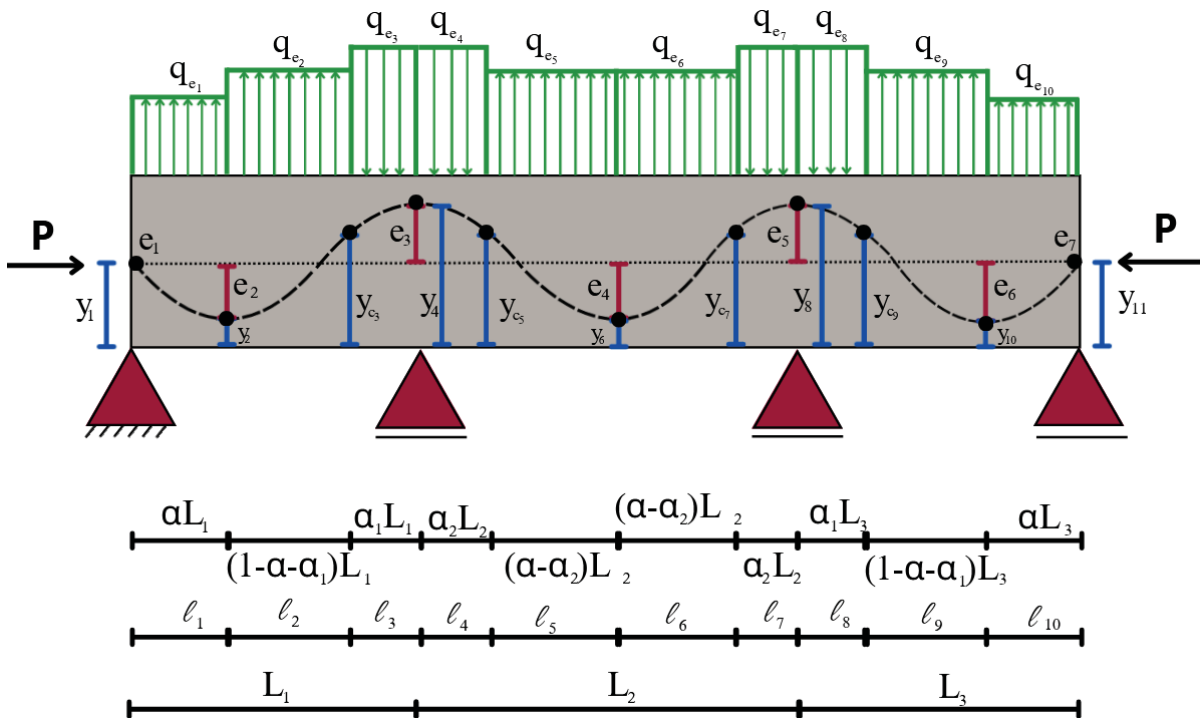
Assim, os pontos intermediários de mudança de curvatura (y_c) entre os pontos máximos (y_{max}) e mínimos (y_{min}), também chamados de pontos de inflexão, podem ser calculados como:

$$\begin{cases} y_c = y_{min} + \frac{d_2}{d} \cdot (y_{max} - y_{min}) \rightarrow \text{Em curvas com concavidade negativa} \\ y_c = y_{min} + \frac{d_1}{d} \cdot (y_{max} - y_{min}) \rightarrow \text{Em curvas com concavidade positiva} \end{cases} \quad (15)$$

A ordenada dos cabos (medida da face inferior da viga) nas extremidades inicial e final vai, em termos práticos de execução, até o centro de gravidade da seção. Além disso, os pontos de ordenada mínima do cabo normalmente se situam no meio do vão em questão e os pontos de ordenada máxima sobre os apoios internos.

O método das cargas equivalentes para uma viga contínua é apresentado na Figura 6.

Figura 6 – Método das cargas equivalentes para viga contínua



Fonte: Autoria própria.

Pode-se adotar a seguinte regra para localização dos pontos de inflexão, em relação aos apoios centrais, consideram-se os percentuais α_1 e α_2 dos respectivos vãos adjacentes ao apoio, no valor de 5% a 15%. No caso dos apoios de extremidade, pode-se

adotar que o ponto de inflexão está à uma distância de 50% do vão, sendo essa porcentagem representada por α (EMERICK, 2002). No referente trabalho utilizou-se 10% para os valores de α_1 e α_2 e 50% para α .

Para o cálculo das cargas equivalentes de protensão considera-se, para os trechos com concavidade para cima (positiva):

$$\begin{cases} \text{Regiões no vão} \rightarrow q_{e_i} = \frac{8 \cdot P \cdot (y_{i+1} - y_i)}{(2 \cdot l_i)^2} \\ \text{Regiões próximas aos pilares} \rightarrow q_{e_i} = -\frac{8 \cdot P \cdot (y_{i+1} - y_i)}{(2 \cdot l_i)^2} \end{cases} \quad (16)$$

E para os trechos com concavidade para baixo (negativa):

$$\begin{cases} \text{Regiões no vão} \rightarrow q_{e_i} = \frac{8 \cdot P \cdot (y_i - y_{i+1})}{(2 \cdot l_i)^2} \\ \text{Regiões próximas aos pilares} \rightarrow q_{e_i} = -\frac{8 \cdot P \cdot (y_i - y_{i+1})}{(2 \cdot l_i)^2} \end{cases} \quad (17)$$

sendo y_n as ordenadas do cabo contadas a partir da borda inferior da viga e l_n os comprimentos dos trechos definidos pelos pontos de máximo e mínimo de y e de mudança de curvatura dos cabos.

A partir da Figura 6 também se pode inferir que:

$$\begin{cases} \text{Regiões abaixo do CG} \rightarrow y_i = \frac{h}{2} - e_p \\ \text{Regiões acima do CG} \rightarrow y_i = \frac{h}{2} + e_p \end{cases} \quad (18)$$

em que h é a altura da seção e e_p a excentricidade do cabo no local avaliado.

2.4.3 Raio mínimo de curvatura

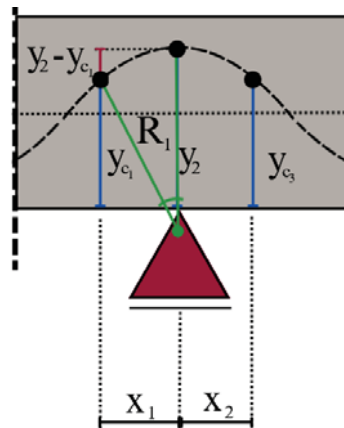
A NBR 6118 (2023) exige raios mínimos de curvatura para as cordoalhas em função de seus diâmetros, podendo ser determinados experimentalmente, desde que decorrente de investigação adequadamente realizada e documentada. Caso o raio mínimo seja superior a 12 m (no caso de cordoalhas) dispensa-se a justificativa do raio de curvatura adotado.

A verificação do raio de curvatura ocorre nas regiões dos pilares centrais como mostrado da Figura 7. O raio de curvatura pode ser então calculado como:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{x_1^2}{2 \cdot |y_2 - y_{c1}|} \rightarrow \text{lado esquerdo} \\ R_2 = \frac{x_2^2}{2 \cdot |y_2 - y_{c3}|} \rightarrow \text{lado direito} \end{cases} \quad (19)$$

o raio mínimo de curvatura para as cordoalhas engraxadas adotadas foi de 1 metro, retirado do “Manual de Boas Práticas do Sistema PavPlus” (MARQUES, 2021).

Figura 7 – Raio de curvatura na região do apoio (Viga em corte)



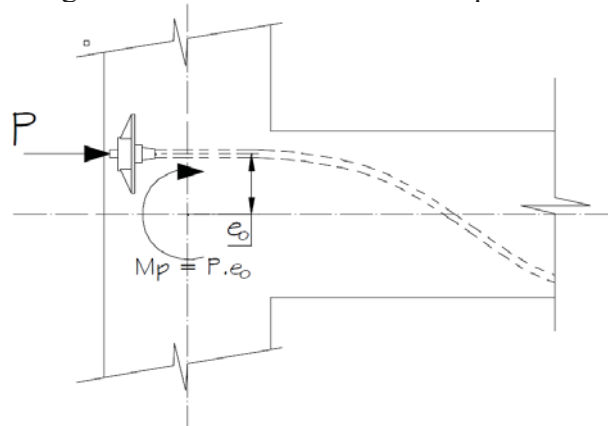
Fonte: Autoria própria.

2.4.4 Hiperestáticos de protensão

Conforme Emerick (2003), os esforços obtidos a partir do método das cargas equivalentes são compostos de duas parcelas: a primeira referente ao efeito isostático da protensão e a segunda referente ao efeito hiperestático.

O momento isostático (M_{ISO}) proveniente da protensão, apresentado na Figura 8, é necessário para manter o equilíbrio com as forças externas atuantes. Esse momento, também conhecido como momento primário, é dado por

Figura 8 – Momento isostático de protensão



Fonte: Emerick (2002, p. 48) – Adaptado.

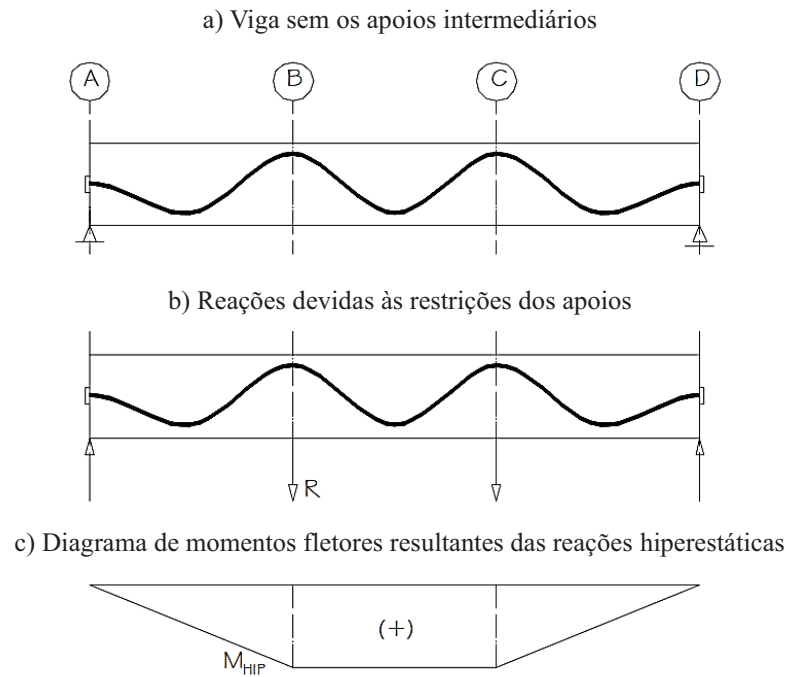
Assim,

$$M_{ISO} = P \cdot e_p \quad (20)$$

em que: P é a força de protensão constante ao longo do cabo e e_p é excentricidade dos cabos de protensão.

Supondo-se que os apoios intermediários de uma viga fossem retirados (Figura 9.a), após a protensão dos cabos a viga apresentaria um deslocamento vertical para cima. No entanto, devido à existência dos apoios intermediários a viga não poderá se deslocar, dessa forma surgem reações negativas nos apoios (Figura 9.b), chamadas de reações hiperestáticas ou secundárias (EMERICK, 2002). Têm-se então os momentos hiperestáticos (Figura 9.c).

Figura 9 – Exemplo do efeito hiperestático de protensão



Fonte: Emerick (2002, p. 52) – Adaptado.

O momento hiperestático, calculado em cada apoio, pode ser definido como:

$$M_{HIP} = M_{BAL} - M_{ISO} \quad (21)$$

em que M_{BAL} é o momento no apoio devido ao carregamento balanceado com a protensão, proveniente do cálculo das cargas equivalentes de protensão.

De acordo com Buchaim (2007), os esforços hiperestáticos são calculados para o Estado Limite Último da peça e são adicionados aos esforços solicitantes, podendo-se então determinar a armadura passiva adicional necessária. Os momentos hiperestáticos podem ser

tanto favoráveis como desfavoráveis, de acordo com as condições descritas na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Situação do momento hiperestático de protensão

Situação	Localização	Sinal do momento hiperestático	Sinal dos momentos externos atuantes
Favorável	Apoios	+	–
Desfavorável	Vãos	+	+

Fonte: Autoria própria.

No cálculo dos momentos hiperestáticos consideram-se as perdas da força de protensão iniciais e as que ocorrem ao longo do tempo, as quais são detalhadas no tópico a seguir.

2.5 Perdas de protensão

Conforme Bastos (2024), a tensão na armadura de protensão decresce ao longo do tempo, ocorrendo rapidamente no início, e depois mais lentamente ao longo da vida útil da peça. A redução da tensão se deve à diminuição do alongamento da armadura, ocasionada por diversos fatores, levando à redução da força de protensão. Todas as diferentes perdas – imediatas e progressivas (que ocorrem ao longo do tempo) – são somadas para configurar a chamada perda de protensão total. A perda de protensão inicial (somatório das perdas imediatas) deve ser calculada para se estimar a força de protensão inicial. Já a perda de protensão total (somatório das perdas imediatas e progressivas) é necessária para definição da força de protensão final.

A seguir, têm-se as causas das perdas imediatas de protensão (Figura 10) e (Figura 11) as causas das perdas progressivas de protensão. Para o cálculo do valor da protensão inicial após as perdas imediatas, faz-se:

$$P_i = [1 - (\% \Delta P_{enc} + \% \Delta P_{atr} + \% \Delta P_{anc})] \cdot P_0 \quad (22)$$

sendo $\% \Delta P_{enc}$, $\% \Delta P_{atr}$ e $\% \Delta P_{anc}$ as porcentagens de perdas descritas na Figura 10 e P_0 a força de protensão antes da ancoragem calculada conforme a Equação (10).

Figura 10 – Perdas imediatas de protensão

Encurtamento elástico inicial (ΔP_{enc})	Atrito (ΔP_{atr})	Escorregamento na ancoragem (ΔP_{anc})
• Quando a força de protensão é aplicada na peça, o concreto é comprimido, encurtando-se. • A armadura de protensão encurta simultaneamente, perdendo parte do alongamento inicial e, conseqüentemente, perdendo força de protensão.	• Quando a armadura é movimentada no estiramento, ocorre atrito entre a bainha e o aço de protensão, especialmente em cabos curvos, o que diminui a tensão aplicada no aço ao longo do comprimento da peça.	• Após a operação de estiramento da armadura de protensão, o cilindro hidráulico “solta” a armadura, que escorrega alguns milímetros e neste movimento arrasta a cunha para dentro do furo cônico da peça porta-cunha, até a sua completa cravação.

Fonte: Bastos (2024, p. 163) – Adaptado.

Figura 11 – Perdas de protensão ao longo do tempo

Retração (ΔP_{ret})	Fluência (ΔP_{flu})	Relaxação (ΔP_{rlx})
• A água livre no concreto, não consumida na reação de hidratação do cimento, evapora ao longo do tempo (entre outras causas de retração), o que diminui o volume do concreto e, conseqüentemente, ocasiona o encurtamento da peça e da armadura de protensão.	• A força de protensão e os carregamentos externos aplicam tensões de compressão no concreto, que causam deformações de encurtamento na peça ao longo do tempo, as quais diminuem a tensão na armadura de protensão.	• Após o estiramento, a armadura de protensão permanece alongada e tensionada, e, por uma propriedade natural do aço, perde tensão ao longo do tempo.

Fonte: Bastos (2024, p. 163) – Adaptado.

Para o cálculo do valor da protensão final, faz-se:

$$P_{\infty} = \left[1 - (\% \Delta P_{enc} + \% \Delta P_{atr} + \% \Delta P_{anc} + \% \Delta P_{ret} + \% \Delta P_{flu} + \% \Delta P_{rlx}) \right] \cdot P_0 \quad (23)$$

Todas as perdas devem ser calculadas de acordo com a NBR 6118 (2023), entretanto, como o foco do referente trabalho é a otimização, algumas estimativas de perdas foram utilizadas baseando-se em dados da literatura.

Conforme Lin e Burns (1981), é difícil generalizar os valores das perdas de protensão, visto que depende de muitos fatores como, por exemplo, as propriedades do concreto e do aço, condições de cura e umidade, magnitude e tempo de atuação das cargas e o

processo de aplicação da protensão. Considerando-se então propriedades médias de aço e concreto, sob condições médias de ar, podem ser tomadas as porcentagens da Tabela 3 como representativas das perdas médias de protensão.

Tabela 3 – Estimativa das perdas de protensão

Perdas	Armadura ativa pré-tracionada	Armadura ativa pós-tracionada
Encurtamento elástico inicial	4%	1%
Fluência do concreto	6%	5%
Retração do concreto	7%	6%
Relaxação do aço	8%	8%
Perda total =	25%	20%

Fonte: Lin e Burns (1981, p. 63) – Adaptado.

As estimativas acima pressupõem que a tensão adequada foi aplicada para superar as perdas por atrito e ancoragem. Buchaim (2007) estima que as perdas por atrito se situem em $\pm 5\%$ e qualquer perda por atrito não superada deve ser considerada adicionalmente. As perdas de protensão de 20% para pós-tração e 25% para pré-tração são próximas dos valores prováveis para vigas e longarinas protendidas.

No entanto, quando as condições se desviam da média, devem ser feitas concessões diferentes em conformidade. Por exemplo, quando a tensão média em um elemento é elevada (cerca de 6,9 MPa), essas perdas devem ser aumentadas para cerca de 30% para pré-tensionamento e 25% para pós-tensionamento. Já quando a tensão média é baixa (cerca de 1,7 MPa), as perdas devem ser reduzidas para 18% para pré-tensionamento e 15% para pós-tensionamento.

Emerick (2003) também utiliza, em seus exemplos, valores estimados para perdas de protensão de 6% para perdas imediatas e 12% para perdas totais.

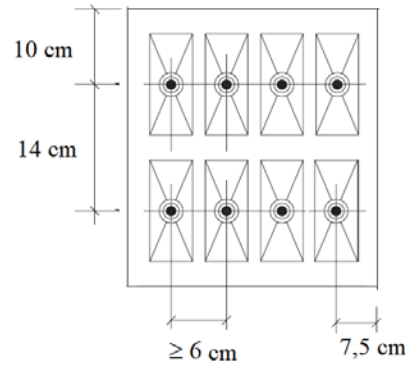
Isto posto, para o referente trabalho selecionaram-se perdas imediatas de 10% e perdas totais de 20%.

2.6 Distribuição das placas de ancoragem nas extremidades da viga

A quantidade máxima de cabos de protensão pode ser determinada pela quantidade de placas de ancoragem que cabem nas seções de extremidades da viga. Uma placa de ancoragem retangular mede, usualmente, 6 cm x 13 cm. Cauduro (2002) propõe, para feixes de cabos, que as placas fiquem afastadas horizontalmente 6 cm ou mais entre eixos e

possuam distância suficiente até a borda da seção. Os espaçamentos mínimos considerados para as placas de ancoragem são apresentados a seguir.

Figura 12 – Espaçamentos mínimos para as placas de ancoragem



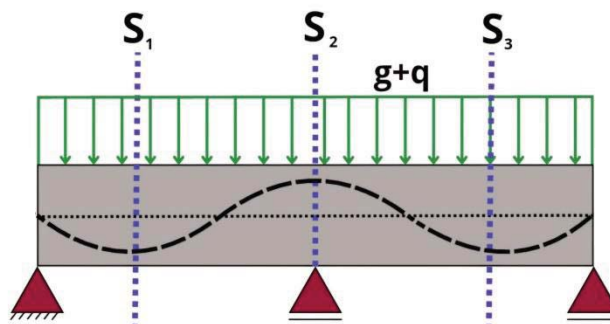
Fonte: Cauduro (2002, p. 49) – Adaptado.

2.7 Cálculo das tensões em uma seção protendida

As tensões normais que atuam em uma seção transversal de uma viga protendida, advindas da protensão, peso próprio e carregamentos externos atuantes (permanentes e variáveis), podem ser determinadas conforme a teoria clássica de vigas, assumindo comportamento elástico linear para o material.

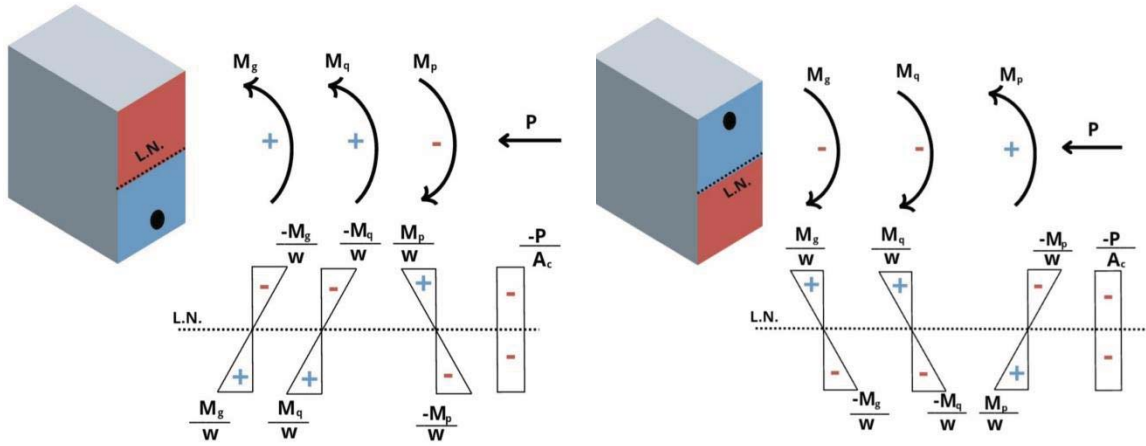
Na Figura 13, tem-se uma viga de concreto protendida com armadura ativa excêntrica e com carregamento externo uniformemente distribuído e a Figura 14 apresenta os momentos e tensões atuantes nas seções do vão e do apoio.

Figura 13 – Viga protendida hiperestática com armadura ativa excêntrica



Fonte: Autoria própria.

Figura 14 – Momentos e tensões atuantes nas seções da viga protendida



a) Momentos e tensões nos vãos da viga

b) Momentos e tensões nas regiões de apoio da viga

Fonte: Autoria própria.

Adotando sinal negativo para compressão e positivo para tração, tem-se que as tensões na fibra inferior (σ_i) e superior (σ_s) da seção nos vãos da viga são, respectivamente:

$$\sigma_i = -\left(\frac{P}{A_c}\right) - \left(\frac{M_p}{w_i}\right) + \left(\frac{M_{(g+q)}}{w_i}\right) \quad (24)$$

$$\sigma_s = -\left(\frac{P}{A_c}\right) + \left(\frac{M_p}{w_s}\right) - \left(\frac{M_{(g+q)}}{w_s}\right) \quad (25)$$

em que P é a força de protensão atuante, M_p é o momento isostático resultante da protensão, $M_{(g+q)}$ o momento resultante devido ao peso próprio, cargas permanentes e variáveis e A_c a área da seção. Sendo w_i e w_s os módulos de resistência elásticos inferior e superior extremos da seção, respectivamente, são calculados como:

$$\begin{cases} |w_i| = \frac{I_c}{y_{inf}} \\ |w_s| = \frac{I_c}{y_{sup}} \end{cases} \quad (26)$$

em que I_c é o momento de inércia da seção e y_{inf} e y_{sup} as distâncias da fibra analisada até o CG da seção.

Já para as regiões de apoio da viga têm-se as tensões nas fibras extremas inferior e superior da seção, respectivamente:

$$\sigma_i = -\left(\frac{P}{A_c}\right) + \left(\frac{M_p}{w_i}\right) - \left(\frac{M_{(g+q)}}{w_i}\right) \quad (27)$$

$$\sigma_s = -\left(\frac{P}{A_c}\right) - \left(\frac{M_p}{w_s}\right) + \left(\frac{M_{(g+q)}}{w_s}\right) \quad (28)$$

Pode-se concluir então que a tensão de compressão devido a protensão na fibra inferior da seção reduz a tensão de tração proveniente das cargas permanentes e variáveis, eliminando-as completamente ou permitindo uma tensão de tração menor que uma tensão limite.

2.8 Estados-Limites de Serviço (ELS)

“Estados-limites de serviço são aqueles relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas, seja em relação aos usuários, seja em relação às máquinas [...]” (ABNT NBR 6118, 2023, p.55).

A partir da estimativa inicial da quantidade de cabos, verificam-se se todos os limites de serviço são respeitados, caso não sejam, a seção é redimensionada e verificada novamente. Sendo assim, dimensiona-se pelos Estados-Limites de Serviço (ELS) e, posteriormente, verificam-se os Estado-Limites Últimos (ELU).

2.8.1 Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F)

O Estado Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) corresponde ao estado que se inicia a formação de fissuras. Nessa verificação, a Combinação Frequente (CF) de ações deve ser utilizada. Considerando-se uma seção de um elemento protendido, têm-se como limites de tração e compressão, respectivamente, os valores

$$\sigma_{t,lim(cf)} = 0,7 \cdot \alpha \cdot f_{ctm} \quad (29)$$

$$\sigma_{c,lim(cf)} = -0,6 \cdot (f_{ck}) \quad (30)$$

em que a resistência média à tração direta (f_{ctm}) varia conforme o f_{ck} do concreto:

$$\begin{cases} f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{\frac{2}{3}} \rightarrow \text{Para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln [1 + 0,1 \cdot (f_{ck} + 8)] \rightarrow \text{Para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (31)$$

O coeficiente α depende da seção transversal do elemento de concreto, sendo 1,5 para seções retangulares.

Pode-se realizar a combinação das cargas antes de calcular as tensões na seção, fazendo-se:

$$q_{cf} = q_e(f_{final}) - g - \psi_1 \cdot q \quad (32)$$

em que q_{cf} (em kN/m) é a carga resultante da combinação frequente, q_e (em kN/m) a carga equivalente após as perdas diferidas (a qual pode ser negativa ou positiva), g (em kN/m) o peso próprio e a carga permanente, q (em kN/m) a carga acidental e ψ_I o ponderador da carga acidental que depende do uso da edificação.

Após aplicar as cargas no elemento é possível obter o momento correspondente na seção M_{cf} (em kN.m). As tensões nas fibras inferior e superior da seção para a combinação frequente são, respectivamente

$$\sigma_{i(cf)} = -\left(\frac{P_\infty}{A_c}\right) + \left(\frac{M_{cf}}{w}\right) \quad (33)$$

$$\sigma_{s(cf)} = -\left(\frac{P_\infty}{A_c}\right) - \left(\frac{M_{cf}}{w}\right) \quad (34)$$

sendo P_∞ (kN) a força de protensão considerando-se as perdas no tempo infinito, A_c (m²) a área da seção e w (m³) o módulo de resistência elástica da seção (no caso da seção retangular). Salienta-se que q_{cf} e M_{cf} podem assumir valores negativos ou positivos a depender da região da análise.

2.8.2 Estado-Limite de Descompressão (ELS-D)

O Estado Limite de Descompressão (ELS-D) consiste em um estado no qual, em um ou mais pontos da seção transversal a tensão normal é nula, não havendo tração no restante da seção. Nesse estado, deve-se adotar a Combinação Quase Permanente (CQP) de serviço para verificação das tensões.

Realizando-se a combinação das cargas antes de calcular as tensões na seção, tem-se:

$$q_{cqp} = q_e(final) - g - \psi_2 \cdot q \quad (35)$$

em que q_{cqp} (em kN/m) é a carga resultante da combinação quase permanente a qual pode ser negativa ou positiva e ψ_2 é o ponderador da carga acidental que depende do uso da edificação.

Após a obtenção do momento M_{cqp} correspondente na seção (em kN.m), as tensões nas fibras inferior e superior da seção, para a combinação quase permanente são, respectivamente,

$$\sigma_{i(cqp)} = -\left(\frac{P_\infty}{A_c}\right) + \left(\frac{M_{cqp}}{w}\right) \quad (36)$$

$$\sigma_{s(cqp)} = -\left(\frac{P_\infty}{A_c}\right) - \left(\frac{M_{cqp}}{w}\right) \quad (37)$$

em que q_e , q_{cqp} , M_{cqp} podem assumir valores negativos ou positivos.

O limite de tensão de compressão no concreto, tanto na fibra inferior como na superior da seção, nessa combinação de carga, para a protensão completa e limitada, é dado por

$$\sigma_{c,lim(cqp)} = -0,45 \cdot (f_{ck}) \quad (38)$$

para o limite de tração, tem-se:

$$\sigma_{t,lim(cqp)} = 0 \quad (39)$$

Os coeficientes de ponderação de cargas encontram-se na Tabela 11.2 da NBR 6118:2023, sendo adotados neste trabalho os valores de 0,4 e 0,3 para ψ_1 e ψ_2 , respectivamente.

2.8.3 Estado-Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF)

O Estado-Limite de deformações excessivas (ELS-DEF) consiste no estado em que os deslocamentos atingem os limites estabelecidos pela ABNT NBR 6118 (2023) para a utilização normal. Existem quatro grupos de deslocamentos-limites, os quais são relacionados à aceitabilidade sensorial, efeitos específicos, efeitos em elementos não estruturais e efeitos em elementos estruturais. No presente trabalho será considerada a aceitabilidade sensorial em razão da limitação visual, cujo valor limite para o deslocamento total é de $L/250$, sendo L o vão do elemento estrutural.

Em elementos estruturais de concreto protendido, é suficiente considerar a rigidez integral da seção transversal para cálculo da flecha imediata (f_i), desde que não seja ultrapassado o ELS-F. Para considerar a deformação diferida no tempo (f_{dif}), faz-se:

$$f_{dif} = f_i \cdot (1 + \varphi) \quad (40)$$

em que φ é o coeficiente de fluência obtido na Tabela 8.1 da NBR 6118:2023. O deslocamento imediato f_i deve ser obtido a partir da combinação das ações características ponderadas na combinação quase permanente.

Para simplificação, considerou-se, no referente trabalho, uma umidade média ambiente de 75%, espessura fictícia de 20 cm e $t_0 = 5$ dias. Assim sendo, o valor de adotado para φ foi de 2,8 (para $f_{ck} \leq 45$ MPa) e 1,9 (para $f_{ck} > 45$ MPa), sendo, portanto, a favor da segurança.

2.9 Estados-Limites Últimos (ELU)

De acordo com a ABNT NBR 6118 (2023, p. 4), Estado-Limite Último (ELU) está “relacionado ao colapso, ou a qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralisação do uso da estrutura”. Dentre as causas que fazem o concreto, seja armado ou protendido, atingir um ELU, estão: a perda de equilíbrio, esgotamento da capacidade resistente, efeitos de segunda ordem, solicitações dinâmicas, colapso progressivo, exposição ao fogo e ações sísmicas.

Para o concreto protendido, em geral, a etapa de verificação de ELU se dá depois que a seção foi dimensionada a partir do ELS, ou seja, as dimensões da seção e a quantidade de cabos já foram definidas e o elemento estrutural respeita os limites dos Estados-Limites de Serviço.

Para a determinação da resistência de cálculo de uma seção transversal, consideram-se os domínios de deformação, os quais são definidos com relação à posição da linha neutra, representada pela distância x até a fibra extrema mais comprimida, e pode ser fixada, de modo adimensional como x/d , sendo d é a altura útil da seção transversal.

Conforme a ABNT NBR 6118 (2023), elementos como vigas e lajes com $f_{ck} \leq 50$ MPa estão limitados aos domínios 1, 2 e 3 com x/d limite de 0,45 para que a ductilidade da seção seja assegurada. Já para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ o limite de x/d é 0,35.

2.9.1 Hipóteses Básicas

A ABNT NBR 6118 (2023) estabelece algumas hipóteses básicas na análise dos esforços resistentes de uma seção de viga ou pilar, as quais são:

- a) As seções se mantêm planas após a deformação;
- b) A deformação das barras passivas aderentes ou o acréscimo de deformação das barras ativas aderentes deve ser a(o) mesma(o) do concreto em seu entorno;
- c) Para armaduras ativas não aderentes, os valores do acréscimo das tensões ($\Delta\sigma_p$) para estruturas usuais de edifícios estão apresentados a seguir, devendo ainda ser divididos pelos devidos coeficientes de ponderação:
 - Para elementos com relação vão/altura útil igual ou menor que 35 o valor de $\Delta\sigma_p$ não pode ultrapassar 420 MPa e é representado por:

$$\Delta\sigma_p = 70 + \frac{f_{ck}}{100 \cdot \rho_p} \quad (41)$$

- Para elementos com relação vão/altura útil maior que 35 o valor de $\Delta\sigma_p$ não pode ultrapassar 210 MPa e é representado por:

$$\Delta\sigma_p = 70 + \frac{f_{ck}}{300 \cdot \rho_p} \quad (42)$$

onde ρ_p é a taxa geométrica da armadura ativa, dada por:

$$\rho_p = \frac{A_p}{b_c \cdot d_p} \quad (43)$$

Em que $\Delta\sigma_p$ e f_{ck} são dados em megapascal (MPa), A_p é a área de aço da armadura ativa, b_c é a largura da mesa de compressão e d_p a altura útil referente à armadura ativa.

- d) As tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, devem ser desprezadas no ELU;
- e) A distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com o diagrama idealizado curvo e retangular, podendo ser substituído pelo retângulo de profundidade $y = \lambda \cdot x$, onde o valor do parâmetro λ pode ser tomado igual a:

$$\begin{cases} \lambda = 0,8 \rightarrow \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ \lambda = 0,8 - \left(\frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \rightarrow \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (44)$$

Onde a tensão constante atuante até a profundidade y pode ser tomada igual a:

- $\alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{ck}$, no caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida;
- $0,9 \cdot \alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{ck}$, no caso contrário.

Sendo η_c definido a partir da Equação (8) proveniente do diagrama tensão deformação idealizado do concreto. Já para α_c tem-se:

$$\begin{cases} \alpha_c = 0,85 \rightarrow \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ \alpha_c = 0,85 \cdot \left[1 - \frac{(f_{ck} - 50)}{200} \right] \rightarrow \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (45)$$

- f) A tensão nas armaduras deve ser obtida a partir dos diagramas tensão-deformação das armaduras ativas e passivas;
- g) O ELU é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios definidos anteriormente.

2.9.2 Verificação do Estado-Limite Último no Ato da Protensão

A ABNT NBR 6118 (2023) especifica limites de tensão no ato da protensão, os quais são apresentados a seguir e aplicados às seções do elemento a serem avaliadas.

A tensão máxima de compressão no ato da protensão na seção de concreto, obtida com as solicitações ponderadas ($\gamma_p = 1,1$ e $\gamma_f = 1,0$, para a protensão de pós-tração e peso próprio) não deve ultrapassar 70% da resistência característica (f_{ckj}) prevista à idade fictícia j (em dias) de aplicação da protensão, claramente especificada no projeto. A Equação (46) explicita o procedimento de cálculo do referente limite de compressão na seção.

$$\sigma_{c,lim(ato)} = \begin{cases} -0,7 \cdot (f_{ckj}) \rightarrow \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ -0,7 \cdot \left[1 - \frac{(f_{ckj}-50)}{200}\right] \cdot f_{ckj} \rightarrow \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (46)$$

Já a tensão máxima de tração do concreto, mostrado na Equação (47), não deve ultrapassar 1,2 vezes a resistência à tração f_{ctm} calculada conforme a Equação (31) substituindo-se f_{ck} pelo f_{ckj} especificado.

$$\sigma_{t,lim(ato)} = 1,2 \cdot (f_{ctm}) \quad (47)$$

Realizando-se a combinação das cargas antes de calcular as tensões na seção, tem-se:

$$q_{ato} = 1,1 \cdot q_e(inicial) - 1,0 \cdot g_i \quad (48)$$

em que q_{ato} (em kN/m) é a carga resultante da combinação no ato da protensão a qual pode ser negativa ou positiva, $q_e(inicial)$ (em kN/m) a carga equivalente com as perdas imediatas e g_i (em kN/m) o peso próprio da peça.

Após a obtenção do momento M_{ato} correspondente na seção (em kN.m). A tensões inferior e superior nas seções no ato da protensão tornam-se:

$$\sigma_{i(ato)} = -\left(\frac{P_i}{A_c}\right) + \left(\frac{M_{ato}}{w}\right) \quad (49)$$

$$\sigma_{s(ato)} = -\left(\frac{P_i}{A_c}\right) - \left(\frac{M_{ato}}{w}\right) \quad (50)$$

sendo P_i (kN) a força de protensão devido à protensão considerando-se as perdas imediatas. Salienta-se que q_e , q_{ato} , M_{ato} podem assumir valores negativos ou positivos.

2.9.3 Cálculo da tensão na armadura ativa

No Estado-Limite Último o valor de cálculo da força de protensão (P_d) é definido como:

$$P_d = \gamma_p \cdot P_\infty \quad (51)$$

em que γ_p é o ponderador para o efeito da protensão, o qual pode assumir 1,2 se for desfavorável e 0,9 se for favorável. Como, normalmente, a protensão é adicionada nas regiões tracionadas das seções, adota-se o valor inferior da força de protensão, ou seja, $\gamma_p = 0,9$.

Com P_d calculado, pode-se então determinar a tensão no concreto produzida pela protensão na posição do C.G. da armadura de protensão (σ_{cp}), que é definido pela expressão:

$$\sigma_{cp} = P_d \cdot \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_p^2}{I_c} \right) \quad (52)$$

Para auxiliar na determinação da tensão na armadura ativa, pode-se utilizar o chamado estado de neutralização, o qual é obtido a partir da situação em que existem apenas os esforços devidos à protensão, acrescentando-se solicitações adequadas que tornem nulas as tensões em toda a seção transversal considerada (HANAI, 2005).

Se uma força externa de neutralização ($P_n = P + \Delta P$) for aplicada tal que anule a tensão no concreto na fibra correspondente ao C.G. da armadura, tem-se o estado convencional de neutralização. A força de neutralização pode ser calculada como:

$$P_n = P_d + \alpha_p \cdot A_p \cdot |\sigma_{cp}| \quad (53)$$

em que α_p é a razão entre os módulos de elasticidade do aço de protensão (E_p) e do concreto (E_c).

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_c} \quad (54)$$

Pode-se então calcular a tensão efetiva na armadura ativa devido ao pré-alongamento (σ_n):

$$\sigma_n = \frac{P_n}{A_p} \quad (55)$$

A tensão total na armadura ativa (σ_{pd}) leva em consideração a tensão devida ao pré-alongamento (σ_n) e o acréscimo de tensão na armadura ($\Delta\sigma_p$) mostrado anteriormente, tem-se então:

$$\sigma_{pd} = \frac{\sigma_n + \Delta\sigma_p}{\gamma_s} \quad (56)$$

onde γ_s é o coeficiente de ponderação da resistência do aço igual a 1,15.

2.9.4 Cálculo do Momento Fletor Solicitante (M_{sd})

Para verificação do ELU, de acordo com a ABNT NBR 6118 (2023), é considerado o somatório das cargas atuantes na estrutura, tanto permanentes quanto variáveis, podendo essa consideração ser realizada a partir do cálculo do Momento Fletor Solicitante de Cálculo (M_{sd}), que pode ser definido como:

$$M_{sd} = \gamma_g \cdot (M_g) + \gamma_q \cdot (M_q) + \gamma_p \cdot (M_{hip}) \quad (57)$$

sendo M_g (kN.m) o momento resultante devido à carga permanente e peso próprio, M_q (kN.m) o momento resultante devido à carga acidental, M_{hip} (kN.m) o momento resultante devido ao momento hiperestático de protensão, γ_g e γ_q ponderadores de ações com valores de 1,4 para ambos e γ_p é o ponderador para o efeito da protensão, o qual pode assumir 1,2 se for desfavorável e 0,9 se for favorável.

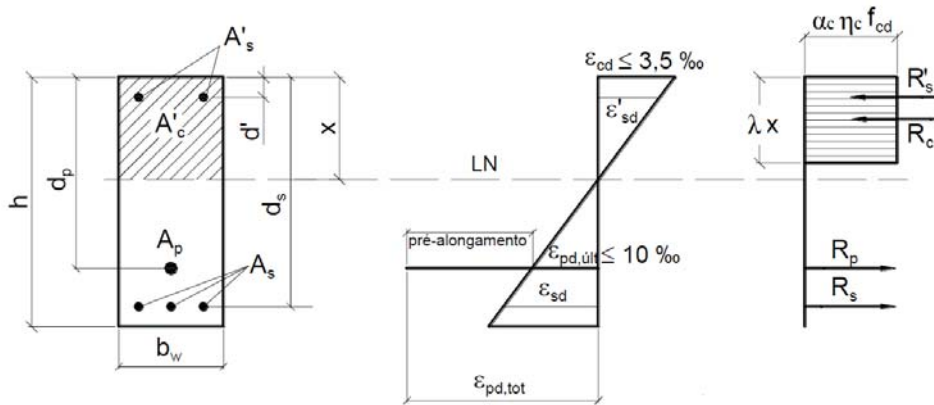
2.9.5 Cálculo do Momento Fletor Último (M_{Rd}) e da armadura passiva (A_s e A_s')

De acordo com Bastos (2024), a partir da determinação da capacidade última da peça, geralmente feita com o cálculo do Momento Fletor Último (M_{Rd}) que a peça pode resistir, é que se pode garantir a margem de segurança entre os carregamentos de serviço e o carregamento último (máximo).

A determinação do M_{Rd} também tem a finalidade de mostrar se há a necessidade de acrescentar armaduras passivas, para garantir a segurança no ELU. A seguir são apresentadas as formulações para o M_{Rd} de seções retangulares.

Abaixo se tem uma seção retangular de concreto composta por armadura de protensão (A_p) e armaduras passivas, tracionada (A_s) e comprimida (A_s').

Figura 15 – Tensões e deformações no ELU em seção retangular protendida



Fonte: Bastos (2024, p. 220) – Adaptado.

Inicialmente iguala-se o Momento Fletor Último (M_{Rd}) ao Momento Fletor Solicitante de Cálculo (M_{Sd}). O M_{Sd} também pode ser definido como:

$$M_{Sd} = M_{Rd1} + M_{Rd2} \quad (58)$$

M_{Rd1} é o momento resistente da armadura passiva de tração e o M_{Rd2} é o momento resistente referente à região de compressão.

Para um caso inicial, em que apenas a armadura ativa foi definida, ou seja, apenas há concreto e armadura ativa, de acordo com as formulações desenvolvidas por Ferreira (2024), pode-se fazer o passo a passo a seguir:

I. Calcula-se o Momento Resistente Limite ($M_{Rd(lim)}$) no limite da linha neutra no qual a seção cumpre os requisitos de ductilidade:

$$M_{Rd(lim)} = (\alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot b_w) \cdot (\lambda \cdot x) \cdot [d_p - (\lambda \cdot x)/2] \quad (59)$$

Para os concretos do Grupo I de resistência (C20 ao C50, ou $f_{ck} \leq 50$ MPa), a distância x (Figura 15) do limite da linha neutra é de $0,45 \cdot d_p$, λ é 0,8, α_c é 0,85 e η_c é igual a 1. Logo, a Equação (59), torna-se:

$$M_{Rd(lim)} = (0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w) \cdot (0,8 \cdot 0,45 \cdot d_p) \cdot [d_p - (0,4 \cdot 0,45 \cdot d_p)] \quad (60)$$

Para concretos de classe superior a 50 MPa, λ e α_c variam de acordo com o f_{ck} , podendo ser calculados com as Equações (44) e (45), respectivamente. E η_c é definido pela Equação (8). Para o limite da linha neutra tem-se $x = 0,35 \cdot d_p$.

II. Se $M_{Sd} \leq M_{Rd(lim)}$ o Momento Resistente referente à região tracionada (M_{Rd1}) é igual ao M_{Sd} , caso contrário faz-se M_{Rd1} igual ao $M_{Rd(lim)}$.

III. Se $M_{Rd1} \leq M_{Sd}$ calcula-se o Momento Resistente (M_{Rd2}) referente a armadura comprimida como na Equação (61), caso contrário, considera-se $M_{Rd2} = 0$.

$$M_{Rd2} = M_{Sd} - M_{Rd1} \quad (61)$$

IV. Calcula-se o valor da linha neutra (x) considerando apenas a armadura ativa e o concreto, a partir do equilíbrio de momentos, que resulta na seguinte expressão:

$$(1/2 \cdot \alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \lambda^2) \cdot x^2 - (\alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \lambda \cdot d_p) \cdot x + M_{Sd} = 0 \quad (62)$$

Para concretos da Classe I, tem-se:

$$0,272 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x^2 - 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d_p \cdot x + M_{Sd} = 0 \quad (63)$$

V. Para concretos da Classe I, se $x / d_p \geq 0,45$, adota-se 0,45, caso contrário adota-se o próprio valor calculado. Realiza-se o mesmo procedimento para concretos da Classe II em que $x / d_p \geq 0,35$.

VI. Pode-se então calcular a armadura de protensão necessária (A_{pn}) para a seção, considerando-se apenas a armadura ativa:

$$A_{pn} = \frac{M_{Rd1}}{[\sigma_{pd} \cdot (d_p - \frac{\lambda}{2} \cdot x)]} + \frac{M_{Rd2}}{[\sigma_{pd} \cdot (d_p - d')]} \quad (64)$$

Onde d' representa a altura útil da armadura na região de compressão.

VII. Para cálculo da armadura passiva de tração (A_s), subtrai-se da armadura de protensão necessária a armadura de protensão efetiva (A_p), definida previamente, fazendo-se:

$$A_s = (A_{pn} - A_p) \cdot \left(\frac{\sigma_{pd}}{f_{yd}} \right) \quad (65)$$

onde f_{yd} representa a resistência de cálculo ao escoamento do aço de armadura passiva, sendo igual a 435 MPa para o aço CA-50.

VIII. Calcula-se também a armadura mínima da seção, fazendo:

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c \quad (66)$$

onde ρ_{min} é a taxa de armadura mínima, a qual se encontra na Tabela 17.3 da ABNT NBR 6118:2023.

Adota-se então o resultado de maior dos valores entre as Equações (65) e (66).

IX. Já para a armadura passiva de compressão (A'_s), caso seja necessária, faz-se:

$$A'_s = \frac{M_{Rdz}}{[f_{yd'}(d_p - d')]} \quad (67)$$

3 OTIMIZAÇÃO

A otimização é o processo no qual se obtém o melhor resultado para um problema que está submetido a condições particulares. Na engenharia estrutural, por exemplo, os engenheiros precisam assumir diversas decisões ao longo das etapas de um projeto, em que o objetivo final de todas essas decisões é minimizar o custo ou maximizar a capacidade de carga da estrutura. Deste modo, a otimização pode ser definida como a metodologia capaz de encontrar os parâmetros de projeto que fornecem o valor máximo ou mínimo da função objetivo, respeitando, restrições ou exigências de projeto (RAO, 2009).

3.1 Formulação de um problema de otimização

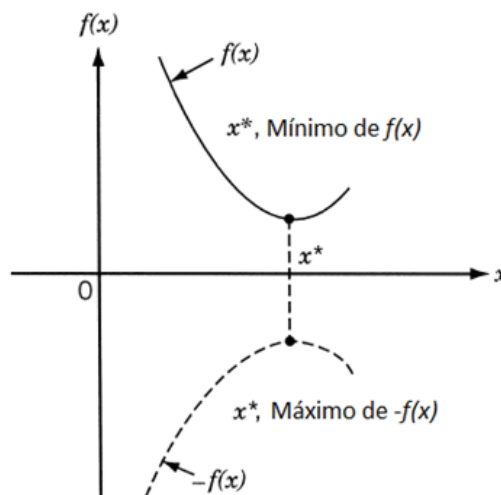
Conforme Rao (2009), qualquer sistema é definido por um conjunto de valores, os quais alguns são vistos como variáveis durante a fase de projeto. As variáveis de projeto são representadas como um vetor

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (68)$$

que minimiza a função objetivo $f(\mathbf{x})$.

É importante notar que se x^* corresponde ao valor mínimo da função $f(\mathbf{x})$, como ilustrado na Figura 16, o mesmo ponto também corresponde ao valor máximo do negativo da função, $-f(\mathbf{x})$. Assim, a otimização pode ser entendida como uma minimização, uma vez que o máximo de uma função pode ser encontrado buscando-se o mínimo do negativo da mesma função.

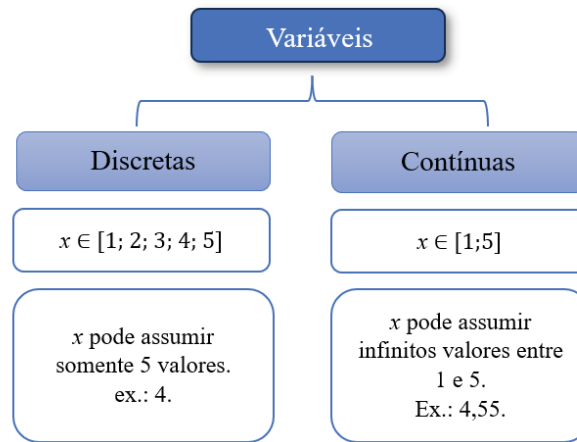
Figura 16 – Mínimo e máximo de uma função $f(\mathbf{x})$.



Fonte: Rao (2009, p. 2) – Adaptado.

As variáveis de projeto podem ser classificadas como discretas e contínuas. Uma variável de projeto é chamada discreta quando seu valor deve ser selecionado dentro de um conjunto finito de valores. Já uma variável é dita contínua quando pode assumir qualquer valor real dentro de seu intervalo definido de valores, ou seja, a quantidade de valores que a variável pode assumir é infinita (ARORA, 2012). A otimização é chamada de mista quando tanto variáveis contínuas como discretas são utilizadas. Na Figura 17 tem-se exemplos de variáveis discretas e contínuas.

Figura 17 – Exemplos de variáveis discretas e contínuas



Fonte: Autoria própria.

Em muitos problemas práticos, as variáveis de projeto não podem ser escolhidas arbitrariamente tendo que satisfazer certos requisitos funcionais e outros requisitos específicos. Estas exigências que devem ser satisfeitas para produzir um projeto aceitável são chamadas de restrições de projeto.

As restrições que representam limitações no comportamento ou desempenho do sistema são denominadas restrições de comportamento ou funcionais. Já as restrições que representam limitações físicas nas variáveis de projeto, como disponibilidade, fabricação e transportabilidade, são conhecidas como restrições geométricas ou laterais (RAO, 2009). As restrições podem ser escritas da seguinte forma:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (69)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, 2, \dots, p \quad (70)$$

em que a g_i representa as restrições de desigualdade e h_j as restrições de igualdade.

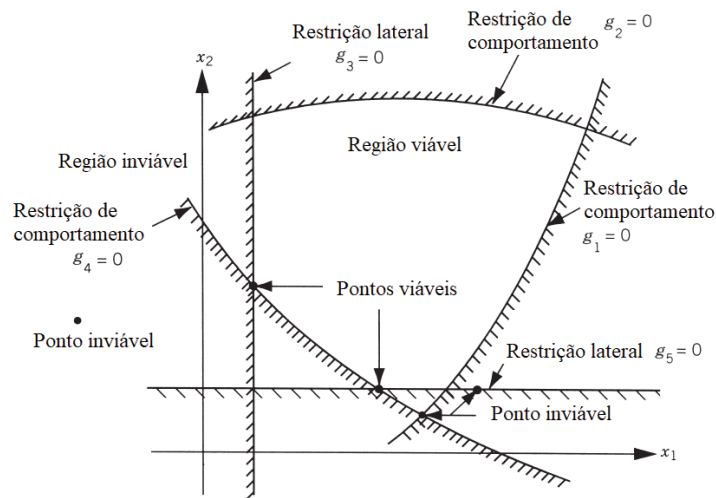
Conforme Arora (2012), as funções $g_i(\mathbf{x})$ e $h_j(\mathbf{x})$ devem depender, explicitamente ou não, de algumas das variáveis de projeto, tendo em vista que funções que não dependem de nenhuma variável não possuem relação com o problema, sendo, portanto, ignoradas.

O número de restrições de igualdade deve ser menor ou igual ao número de variáveis de projeto ($p \leq n$). Não existe limitação de quantidade para restrições de desigualdade, no entanto, o número total de restrições ativas (satisfeitas na igualdade) deve, no ótimo, ser menor ou igual ao número de variáveis de projeto.

As restrições podem assumir diferentes estados na solução ótima, como, por exemplo, ser ativa, rígida, inativa ou violada. Uma restrição de desigualdade $g_i(\mathbf{x})$ é ativa se na solução ótima $g_i(\mathbf{x}) = 0$. Uma restrição de desigualdade $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ é dita inativa em um ponto de projeto $\mathbf{x}^*$ se for estritamente satisfeita ($g_i(\mathbf{x}^*) < 0$). E diz-se que é violada em um ponto de projeto $\mathbf{x}^*$ se seu valor for positivo. Já uma restrição de igualdade $h_j(\mathbf{x}) = 0$ é violada em um ponto de projeto $\mathbf{x}^*$ se $h_j(\mathbf{x}^*)$ não for identicamente zero.

O conjunto de valores viáveis de projeto é chamado de região viável, como apresentado na Figura 18, que ilustra um problema de otimização com duas variáveis de projeto.

Figura 18 – Restrições em um espaço de projeto bidimensional hipotético.

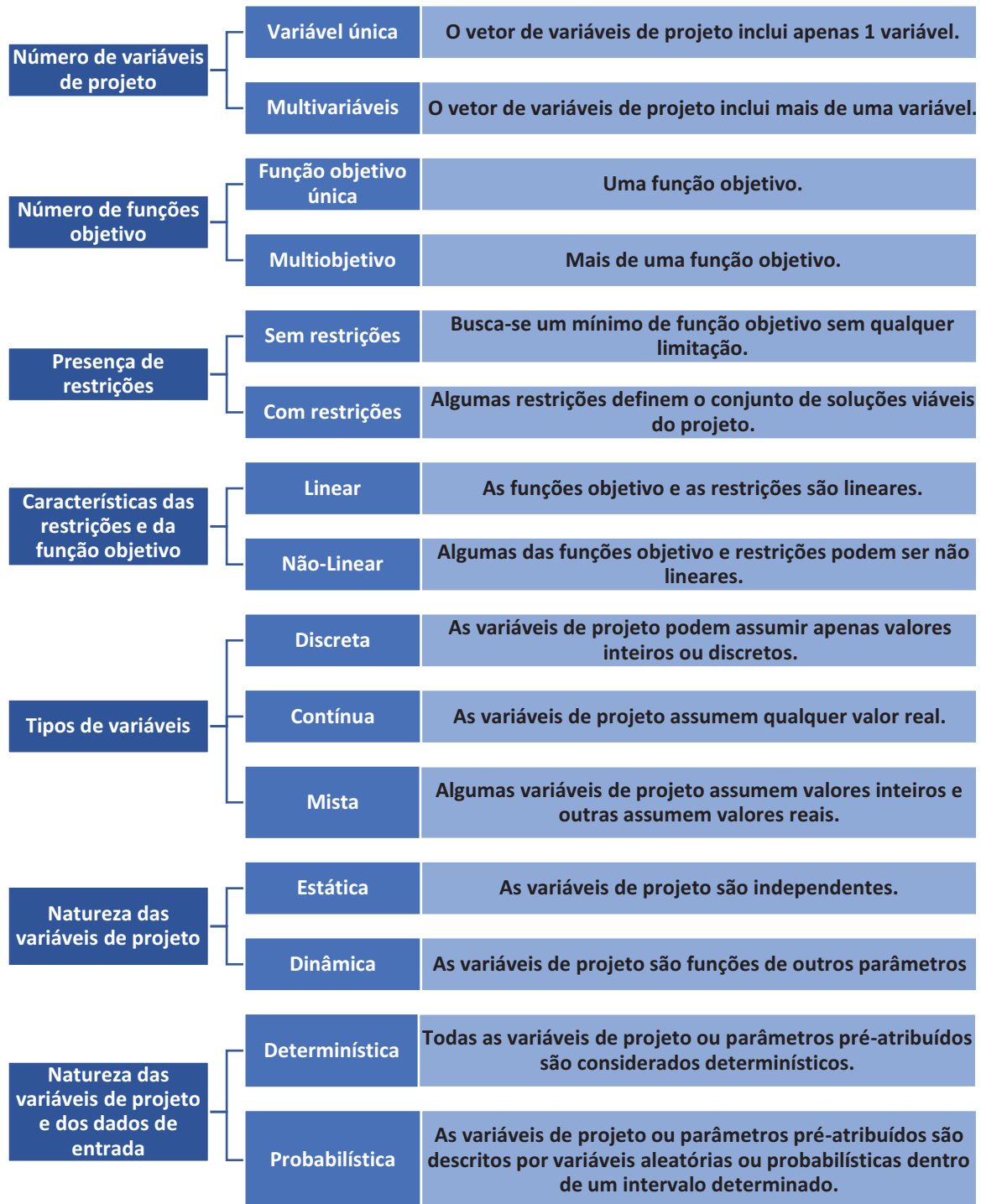


Fonte: Rao (2009, p. 8) – Adaptado.

3.2 Classificação dos problemas de otimização

Conforme Gandomi *et. al* (2013), os problemas de otimização podem ser classificados, por exemplo, de acordo com as variáveis, as funções objetivo e as restrições. Uma categorização abrangente é indicada na Figura 19.

Figura 19 – Classificação dos problemas de otimização.



Fonte: Gandomi *et. al* (2013, p. 27) – Adaptado.

3.3 Técnicas de Otimização

Não existe um método único disponível para resolver todos os problemas de otimização de forma eficiente. Portanto, uma série de métodos de otimização foram desenvolvidos para resolver diferentes tipos de problemas: métodos determinísticos, método enumerativo e os métodos estocásticos.

Segundo Arteaga (2015), os métodos determinísticos utilizam informações precisas e relações matemáticas exatas para encontrar a solução ótima, são altamente previsíveis, e a solução gerada depende completamente das condições iniciais e dos parâmetros de entrada. Além disso, baseiam-se em equações matemáticas, derivadas e relações bem definidas. Normalmente, requerem que a função a ser otimizada seja contínua e diferenciável. São exemplos de métodos determinísticos a programação linear e métodos de gradiente.

O método enumerativo envolve a busca exaustiva através de todas as possíveis soluções dentro de um espaço de busca finito. A abordagem garante encontrar a solução ótima, mas pode ser extremamente intensiva computacionalmente. Exigem a análise de todas as possíveis soluções em um espaço finito de soluções e podem ser ineficazes em problemas com grandes espaços de solução, pois o número de possibilidades cresce rapidamente. Esse método é ideal quando o espaço de soluções é pequeno ou quando se deseja garantir uma solução ótima. São exemplos de métodos enumerativos a busca exaustiva e programação dinâmica.

Por fim, os métodos estocásticos empregam processos aleatórios ou baseados em probabilidades para explorar o espaço de soluções, sendo mais flexíveis e adequados para problemas onde as soluções exatas não são facilmente obtidas. Não requerem informações precisas sobre a função ou seus gradientes e são mais adequados para problemas complexos, como aqueles com múltiplos ótimos locais ou funções não diferenciáveis. São frequentemente usados em problemas de grande escala e situações em que é impossível calcular uma solução exata. Exemplos de métodos estocásticos são: algoritmos genéticos e enxame de partículas (ARTEAGA, 2015).

3.4 Otimização estrutural

De acordo com Mei e Wang (2021), a indústria de construção é considerada um setor que requer bastante mão de obra, possui baixa eficiência e gera impactos ambientais consideráveis, embora seja responsável por uma grande parte da economia de um país. Desta maneira, com desenvolvimento de métodos computacionais para projeto e análise de estruturas, métodos de otimização foram propostos e adotados no campo da engenharia civil nas últimas décadas na tentativa de aprimorar as fases do ciclo de vida das edificações.

3.4.1 *Objetivos da otimização estrutural*

A otimização pode ser empregada em cada etapa do ciclo de vida de uma edificação como, por exemplo, na fase de projeto, de construção, operação e manutenção. A otimização estrutural visa encontrar a melhor solução para a estrutura e de seus componentes para atingir certos objetivos sob condições previamente estabelecidas. Alguns desses objetivos explorados são: minimização do custo, melhoria do desempenho, minimização do impacto e multi-objetivos (MEI; WANG, 2021).

Na minimização de custos o objetivo é minimizar o custo total da estrutura, que geralmente é alcançado pela redução do peso ou do volume de seus componentes. Para uma estimativa abrangente de custos estruturais, todos os aspectos relacionados devem ser considerados, como custo de material, custo de transporte, custo de fabricação e execução que está relacionado ao método construtivo.

Com relação ao desempenho estrutural o objetivo é melhorar certas propriedades da estrutura como, por exemplo, seu comportamento mecânico a fim de atender aos requisitos estabelecidos por normas.

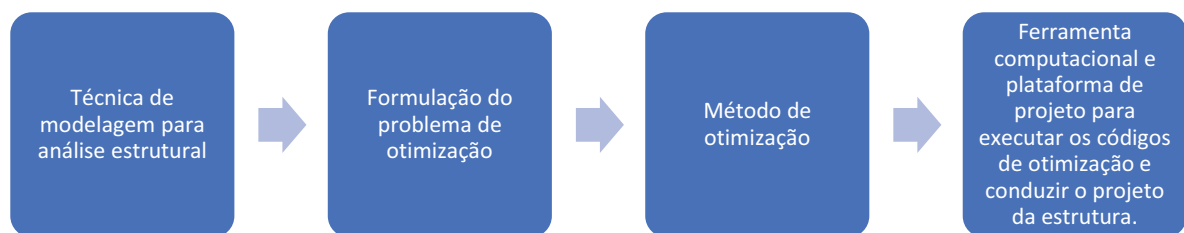
A minimização do impacto ambiental tem o objetivo de reduzir, por exemplo, a emissão de gases de efeito estufa ou o consumo de energia fazendo com que a estrutura se torne mais sustentável. Já uma otimização multiobjetivo engloba mais de um dos três objetivos citados anteriormente (MEI; WANG, 2021).

3.4.2 Etapas da otimização estrutural

Na área da engenharia civil toda a estrutura pode ser otimizada, o que inclui elementos estruturais como pilares, vigas e lajes. Modelam-se estruturas compostas por barras, como treliças, pórticos e cascas, por exemplo.

Conforme Mei e Wang (2021), existem quatro etapas principais que devem ser levadas em consideração no processo de otimização estrutural com ilustrado na Figura 20. A otimização estrutural é um processo iterativo em que a análise estrutural precisa ser repetida diversas vezes para avaliar a melhoria de cada projeto até que a convergência seja alcançada, o que pode ser computacionalmente dispendioso a depender da complexidade da estrutura. Portanto, é necessário selecionar um método de análise estrutural que seja computacionalmente barato, mas que atinja resultados satisfatórios. Muitos trabalhos de otimização estrutural utilizam o método dos elementos finitos (MEF) para a fase de análise devido à sua simplicidade e eficácia se comparado a outros métodos existentes.

Figura 20 – Etapas da otimização estrutural



Fonte: Mei e Wang (2021, p. 10) – Adaptado.

A formulação do problema se refere à determinação dos três componentes fundamentais de um problema de otimização no espaço de busca do problema: as variáveis de projeto, as funções objetivo e as restrições. Na otimização de dimensão, por exemplo, o sistema estrutural é dividido em vários elementos e as áreas transversais se tornam variáveis de projeto uma vez que o peso total da estrutura é relevante para a otimização. Na otimização estrutural com o objetivo de minimização de custos, as restrições de tensões e deslocamentos são geralmente adotadas e os requisitos de projeto dependem de normas específicas (MEI; WANG, 2021).

Com relação aos métodos de otimização têm-se duas categorias amplamente utilizadas na otimização estrutural: abordagens baseadas em gradiente, conhecida também

como programação matemática, e abordagens heurísticas. As abordagens baseadas em gradiente possuem diversas aplicações, no entanto possuem limitações como:

I. A convergência para o ótimo global é difícil de garantir devido ao fato de que um problema de otimização estrutural geralmente tem mais de um ótimo local. Os algoritmos baseados em gradiente podem convergir para um desses ótimos locais se o projeto inicial e a direção da busca não forem bem definidos.

II. O requisito de gradientes desses métodos os tornam ineficientes e difíceis de implementar. Logo, se torna difícil de lidar eficientemente com o problema de otimização de grandes estruturas com restrições não-lineares.

III. Poucos algoritmos baseados em gradiente contêm os elementos necessários para explorar todas as possibilidades de projeto para uma estrutura específica, o que limita o escopo de suas aplicações (MEI; WANG, 2021).

Para contornar as limitações dos algoritmos baseados em gradiente, têm-se os métodos heurísticos, os quais são baseados na busca da solução ótima usando, como o próprio nome diz, uma heurística, por exemplo um processo de “tentativa e erro”. Embora os métodos heurísticos sejam relativamente fáceis de programar com alta velocidade computacional, esses métodos podem ficar presos em um ótimo local. Portanto, pesquisadores propuseram métodos heurísticos mais desenvolvidos que sistematizam o processo de busca, ou seja, métodos meta-heurísticos, os quais possuem um bom desempenho se calibrados corretamente ao problema estudado. Tem-se como exemplos de métodos meta-heurísticos o algoritmo genético e o enxame de partículas. Algumas das vantagens dos algoritmos meta-heurísticos são:

I. Os algoritmos meta-heurísticos são adequados para problemas de otimização combinatória com variáveis de projeto contínuas e discretas.

II. Não requerem informações de gradiente.

III. Não requerem a convexidade ou uma relação explícita entre a função objetivo e as restrições.

IV. Podem encontrar um ótimo global mais efetivamente (MEI; WANG, 2021).

Conforme Mei e Wang (2021), deve-se selecionar a ferramenta adequada tanto para análise como a ferramenta responsável por executar os códigos de otimização. Na ferramenta de otimização, a parte iterativa da otimização é realizada e cada iteração gerará um conjunto de valores para as variáveis de projeto, as quais são transferidas para o programa de análise estrutural para atualizar o modelo da estrutura com novas propriedades calculadas na otimização. O processo de otimização é finalizado quando um critério de convergência é

atingido. Tem-se como exemplo de *softwares* comumente utilizados para otimização estrutural o MATLAB, e para análise estrutural o SAP2000, ETABS e Abaqus. Alguns pesquisadores adotaram uma única plataforma integrada para conduzir todo o processo de otimização estrutural, embora muitas dessas plataformas não sejam apresentadas em detalhes.

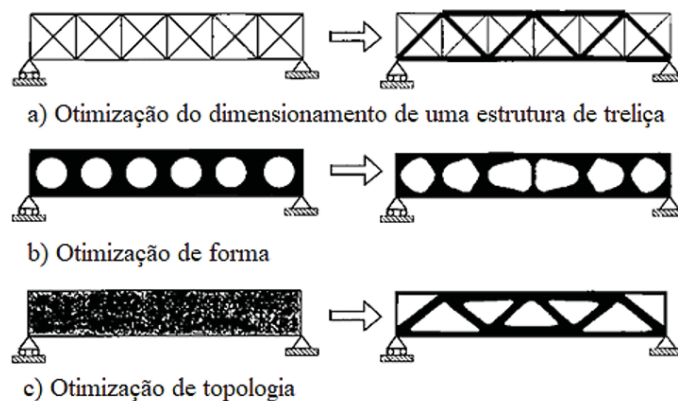
3.4.3 Classificação dos problemas de otimização estrutural

A otimização estrutural pode ser dividida em três tipos: otimização dimensional, otimização de forma e otimização topológica. Conforme Arteaga (2015), na otimização dimensional a forma da estrutura é conhecida e o objetivo é otimizar a estrutura ajustando as dimensões dos componentes. Para uma estrutura de treliça, por exemplo, a variável do projeto pode ser a área da seção transversal das barras.

A otimização de forma o objetivo trata as coordenadas nodais da estrutura como variáveis de projeto. Esse tipo de otimização é mais completo porque modifica a malha de elementos levando a uma possível convergência da solução.

Por fim, a otimização topológica busca, em um dado domínio, encontrar uma distribuição ótima para o material da estrutura, ou seja, a variável do projeto está associada à distribuição espacial do material. A Figura 21 ilustra os tipos de otimização estruturais existentes.

Figura 21 – Tipos de otimização estrutural



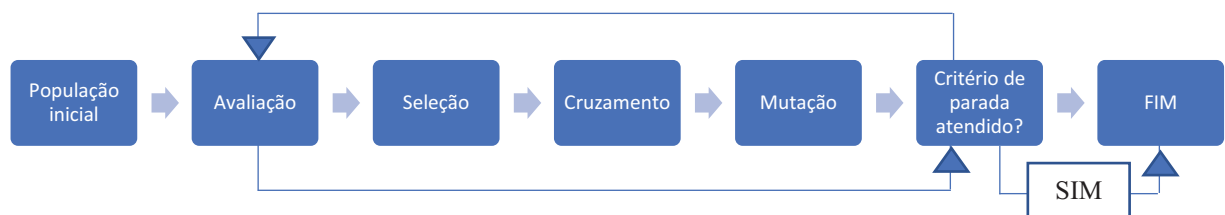
Fonte: Bendsøe (2003, p. 2) – Adaptado.

4 ALGORITMOS GENÉTICOS

Os Algoritmos Genéticos (AG) estão entre as meta-heurísticas mais conhecidas, sendo inspirado no processo de evolução biológica, o qual se baseia na teoria darwiniana de sobrevivência do mais apto na natureza. Os elementos básicos de um AG são a representação cromossômica, a aptidão e operadores de inspiração biológica, os quais são: seleção, mutação e cruzamento (KATOCH *et al.*, 2021).

Segundo Hillier e Lieberman (2006), o procedimento de busca de uma solução ótima em um método heurístico consiste em um algoritmo iterativo o qual cada iteração conduz a uma busca por uma nova solução que pode ser melhor que a melhor solução encontrada previamente. Sendo assim, ao final da última iteração, tem-se que a solução fornecida é a melhor encontrada dentre todas as iterações realizadas. A seguir, tem-se o esquema básico de um AG.

Figura 22 – Algoritmo básico de AGs



Fonte: Autoria própria.

Algumas das terminologias apresentadas na Figura 22 serão explanadas no decorrer do capítulo.

4.1 Terminologia biológica em AGs

Conforme Arteaga (2015), algumas nomenclaturas provenientes da biologia são aplicadas aos AGs, as quais são apresentadas a seguir.

- Alelo: representa os valores que o gene pode assumir.
- Indivíduo: representa uma das soluções do problema proposto.
- Cromossomo: é formado por um conjunto de genes que faz referência ao espaço de busca genotípico. Nos AGs, cada cromossomo representa uma estrutura de dados que codifica uma solução para um problema.

- Espaço Fenotípico: esse espaço é formado por um conjunto das variáveis do projeto.
- Espaço Genotípico: representa a informação contida no cromossomo. Este espaço codifica o espaço fenotípico atribuindo nele uma faixa de valores.
- Gene: é um parâmetro codificado no cromossomo, ou seja, um elemento de vetor que representa o cromossomo. A estrutura do gene depende da função de codificação.
- Geração: é o número da iteração que o AG executa. As gerações dizem respeito à evolução que as populações vão apresentando ao longo do tempo em função da aplicação dos operadores genéticos.
- População: é um conjunto de indivíduos que representam todas as soluções consideradas durante a geração (iteração). O desempenho global e a eficiência dos AGs estão influenciados por este parâmetro (ARTEAGA, 2015).

Em um algoritmo genético, para cada geração, tem-se a população atual a qual é formada pelo conjunto de soluções (atuais indivíduos da espécie). Alguns dos indivíduos, especialmente os membros mais aptos, sobrevivem e tornam-se pais que formam pares aleatórios e depois têm descendentes (novas soluções) que compartilham algumas das características (genes) de ambos os pais.

Tendo em vista que os indivíduos mais adaptados têm mais chance de sobrevivência e, conseqüentemente, mais chance de se tomarem pais, um algoritmo genético tende a gerar populações com indivíduos mais aptos à medida que as gerações evoluem. Ocasionalmente podem ocorrer mutações de modo que certos filhos também adquiram características que nenhum dos pais possui, explorando melhor, dessa forma, o espaço de busca. Finalmente, a sobrevivência dos mais adaptados tende a levar o algoritmo genético a uma solução que é mais próxima da solução ótima (HILLIER; LIEBERMAN, 2006).

4.2 População inicial

O processo de busca de algoritmos meta-heurísticos se inicia com um conjunto de soluções candidatas chamado população inicial. Diferentes técnicas podem ser usadas para gerar uma população inicial, como a geração aleatória dos indivíduos, ou o uso de técnicas de amostragem, como a amostragem por hipercubo latino e amostragem de sequência de Hammersley, sendo a geração aleatória a mais utilizada.

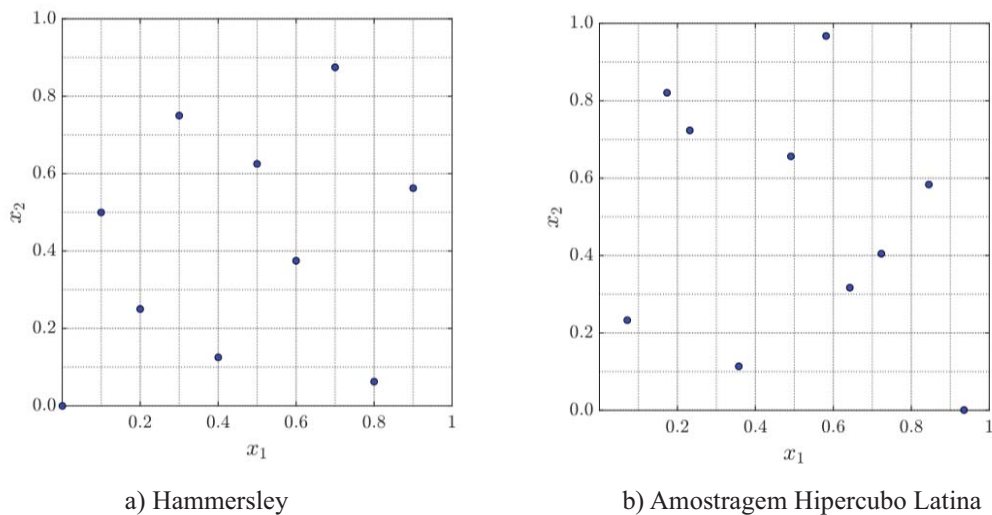
Após a geração da população inicial, os operadores genéticos são aplicados à população atual para gerar uma nova população de soluções. Este processo continua até que o critério de parada predefinido seja satisfeito (KAVEH; HAMEDAN, 2022).

Segundo Mirjalili (2019), o objetivo principal na etapa de inicialização é espalhar as soluções ao redor do espaço de busca tão uniformemente quanto possível para aumentar a diversidade da população encontrando, dessa forma, regiões promissoras. Sendo assim, a população inicial é de suma importância no processo de otimização, tendo em vista que essa servirá de base para as populações futuras a serem geradas.

A Amostragem Hipercubo Latina (LHS - *Latin Hypercube* em inglês) é uma amostragem estocástica estratificada, ou seja, para gerar n pontos, cada dimensão é dividida em n intervalos igualmente espaçados. Um ponto é então selecionado aleatoriamente em cada intervalo, e os pontos de dados seguintes não podem ser selecionados no mesmo intervalo. O procedimento é repetido até que toda a amostra seja gerada.

Neste trabalho será empregada a LHS em todos os exemplos. Na Figura 23 a seguir tem-se ilustrativamente exemplos dos pontos gerados em um espaço disponível para busca.

Figura 23 – Métodos de amostragem para a população inicial



Fonte: Ribeiro (2022, p. 79-81) – Adaptado.

4.3 Função aptidão

Para cada indivíduo da população é atribuído um valor de aptidão, geralmente usando a função de custo para problemas irrestritos ou a função de penalidade para problemas com restrições.

Conforme Arora (2012), a função aptidão define o potencial dos indivíduos de uma população durante a evolução. A função de aptidão $F_a(\mathbf{x})$, no caso de minimização, pode ser definida da seguinte forma:

$$F_a(\mathbf{x}) = k_f \cdot |f_{max}| - f_i \quad (71)$$

em que f_{max} é o maior valor absoluto da função penalizada, f_i é função objetivo penalizada e k_f é um parâmetro para garantir valores positivos (ex.: 1,1).

4.4 Funções de penalização

Conforme Rao (2009), as funções de penalização têm o objetivo de penalizar indivíduos de uma população que não respeitem as restrições impostas, fazendo com que a função aptidão desses indivíduos seja reduzida. A solução do problema é bastante sensível às funções de penalidade, tendo em vista que se penalização for inadequada, a população pode evoluir para soluções inviáveis ou convergir prematuramente para uma solução viável, mas não ótima.

Para isso, as funções de penalização são relacionadas a um parâmetro de penalização que atua sobre as restrições violadas. Assim, um problema com restrições é transformado em um problema irrestrito, gerando uma única função a ser otimizada.

Algumas outras penalidades, como as estáticas e de DEB, são explanadas a seguir.

4.4.1 Penalidades estáticas

As penalidades estáticas, de acordo com Yeniyay (2005), não dependem do número de geração atual, assim, uma penalidade constante é aplicada às soluções inviáveis. Essas estratégias evitam penalizar de forma mais rigorosa pequenas violações, no entanto requerem que um maior número de parâmetros seja ajustado, gerando-se uma maior complexidade em suas aplicações práticas. A função objetivo penalizada na penalidade estática é definida por:

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m R_{ij} \cdot \max[0, g_j(\mathbf{x})]^2 \quad (72)$$

em que R_{ij} indica o coeficiente de penalidade correspondente à j -ésima restrição e ao i -ésimo nível de violação, m é o número de restrições. Usualmente é adotado um coeficiente constante para todas as restrições.

Para transformar restrições de igualdade em restrições de desigualdade, faz-se:

$$|h_j(\mathbf{x})| - \varepsilon \leq 0 \quad (73)$$

em que ε é um pequeno número positivo.

4.4.2 Método de penalidade DEB 2000

Devido à dificuldade em encontrar os parâmetros de penalidade apropriados necessários para orientar a busca em direção à solução ótima de determinado problema, Deb (2000) desenvolveu um método de penalidade que não requer que um parâmetro seja previamente definido.

O método propõe usar um operador de seleção de torneio, em que duas soluções são comparadas ao mesmo tempo, aplicando-se os seguintes critérios:

- I. Qualquer solução viável é preferível que qualquer solução inviável;
- II. Entre duas soluções viáveis, aquela com melhor valor de função objetivo é priorizada;
- III. Entre duas soluções inviáveis, aquela com menor violação de restrição é preferível.

Os parâmetros de penalidade não são necessários porque em qualquer um dos três cenários acima, as soluções nunca são comparadas em termos de função objetivo e informações de violação de restrições juntas. Pois, no primeiro caso, nem o valor da função objetivo nem as informações de violação de restrição são usados, simplesmente a solução viável é priorizada. No segundo caso, as soluções são comparadas apenas em termos de valores de função objetivo e no terceiro caso, as soluções são comparadas apenas em termos de informações de violação de restrição.

Logo, tem-se a função aptidão em que soluções inviáveis são comparadas com base apenas em sua violação de restrição:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{se } g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots, m) \\ f_{\max} + \sum_{j=1}^m |g_j(\mathbf{x})| \rightarrow \text{caso contrário} \end{cases} \quad (74)$$

em que f_{max} é o valor da função objetivo da pior solução viável na população. Assim, a aptidão de uma solução inviável não depende apenas da violação da restrição, mas também da população de soluções utilizada. No entanto, a aptidão de uma solução viável é sempre fixa e é igual ao seu valor da função objetivo (DEB, 2000).

4.5 Taxa de sucesso

Segundo Barroso (2015), a taxa de sucesso é definida como o número de otimizações que encontraram o mínimo global do problema (N_g) dividido pelo número total de otimizações (N_{opt}):

$$R(\%) = 100 \cdot \frac{N_g}{N_{opt}} \quad (75)$$

A fórmula acima é válida para problemas que possuem o mínimo global conhecido. Caso contrário, a taxa de sucesso pode ser definida como o número de otimizações que atingiram o menor valor para o problema (N_m) dividido pelo número total de otimizações:

$$R(\%) = 100 \cdot \frac{N_m}{N_{opt}} \quad (76)$$

A taxa de sucesso pode ser usada como uma forma de verificar o desempenho do algoritmo, tendo em vista que quanto maior a taxa de sucesso maior a convergência para um valor mínimo do problema, seja esse local ou global.

4.6 Elitismo

Segundo Patkar *et al.* (2007), o elitismo consiste em transmitir diretamente um ou alguns dos melhores indivíduos à próxima geração, conservando, dessa forma, um número fixo das melhores soluções produzidas até aquele ponto de evolução. Embora o elitismo possa levar a um domínio mais rápido de um determinado cromossomo na população, descobriu-se que melhora o desempenho geral do procedimento genético.

O objetivo principal do elitismo é evitar que tais as melhores soluções sejam descartadas ao aplicar os operadores de cruzamento ou mutação. No *software* BIOS, uma taxa de cruzamento para a população é selecionada e a porcentagem restante é equivalente à taxa de elitismo.

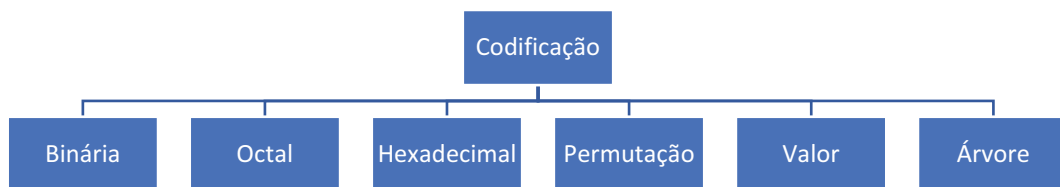
4.7 Codificação

Os esquemas de codificação são diferenciados de acordo com o domínio do problema, sendo os mais conhecidos: binário, octal, hexadecimal, permutação, baseado em valor, e em árvore.

Na codificação binária cada gene ou cromossomo é representado como 1 ou 0 em que cada *bit* representa as características da solução, fornecendo a implementação mais rápida de operadores de cruzamento e mutação. No entanto, requer esforço extra para converter em formato binário, sendo que a precisão do algoritmo depende da conversão binária (KATOCH *et al.*, 2021).

Para os demais tipos de codificação, de acordo com Katoch *et al.* (2021), tem-se: o esquema de codificação octal, em que o gene ou cromossomo é representado na forma de octal de números (0 a 7); a codificação hexadecimal, onde o gene ou cromossomo é representado em a forma de números hexadecimais (0 a 9); a codificação de permutação, que é geralmente usada em problemas de ordenação onde o gene ou cromossomo é representado pela sequência de números que representa a posição em uma sequência; o esquema de codificação de valor, onde o gene ou cromossomo é representado por uma sequência de alguns valores que podem ser reais, números inteiros ou caracteres; por último, a codificação em árvore, em que o gene ou cromossomo é representado por uma árvore de funções ou comandos que podem estar relacionados a qualquer linguagem de programação. Tem-se, a seguir, um resumo ilustrativo dos tipos de codificação existentes para AGs.

Figura 24 – Tipos de codificação para AGs

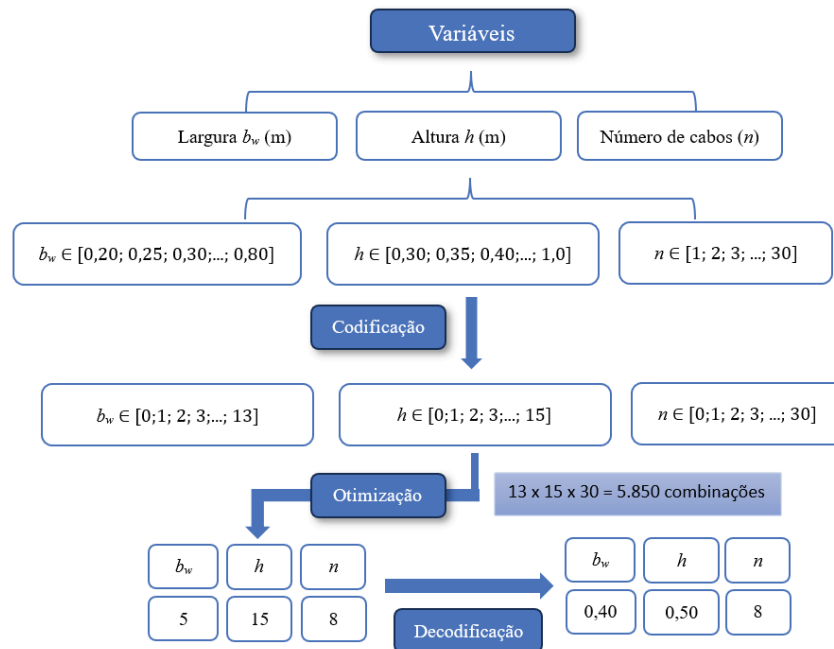


Fonte: Katoch *et al.* (2021, p. 8096) – Adaptado.

No *software* BIOS tem-se uma codificação, a qual foi utilizada no referente trabalho, que se difere das apresentadas anteriormente, pois utiliza codificação inteira e seus valores decodificados podem ser quaisquer números do espaço real, representando a posição das variáveis no espaço de busca, em vez do valor nominal das variáveis. Abaixo tem-se um exemplo utilizando essa codificação na otimização de uma viga protendida com três variáveis

de projeto, as quais possuem limites previamente estabelecidos, em que as variáveis largura e altura da seção variam de 5 em 5 centímetros.

Figura 25 – Exemplo de esquema da codificação utilizada



Fonte: Autoria própria.

4.8 Seleção

De acordo com Kramer (2017), para permitir a convergência para soluções ótimas, as melhores soluções em uma geração são selecionadas para serem pais na nova população parental, sendo esse processo de seleção baseado nos valores de aptidão da população. As técnicas de seleção mais conhecidas utilizadas em AGs são: roleta, classificação, torneio, Boltzmann e amostragem universal estocástica.

A roleta, segundo Patkar *et al.* (2007), é o operador de seleção mais comumente usado, em que a probabilidade de seleção de um cromossomo é diretamente proporcional à sua aptidão, onde todos os indivíduos da população são mapeados em partes de uma roda de acordo com seu valor de aptidão. A roda é então girada aleatoriamente para selecionar soluções específicas que participarão na formação da próxima geração. No entanto, sofre de muitos problemas, como erros introduzidos pela sua natureza estocástica.

A seleção de *ranking* é a forma modificada da roleta, a qual utiliza as classificações em vez do valor de aptidão. As classificações são dadas de acordo com seu valor de aptidão para que cada indivíduo tenha a chance de ser selecionado de acordo com sua

posição. O método de seleção por *ranking* reduz as chances de convergir prematuramente para uma solução de mínimo local (KATOCH *et al.*, 2021). No entanto, pode ocorrer falta de variedade na seleção prejudicando a diversidade na população. Além disso, pontuações próximas podem dificultar a ordenação final dos itens.

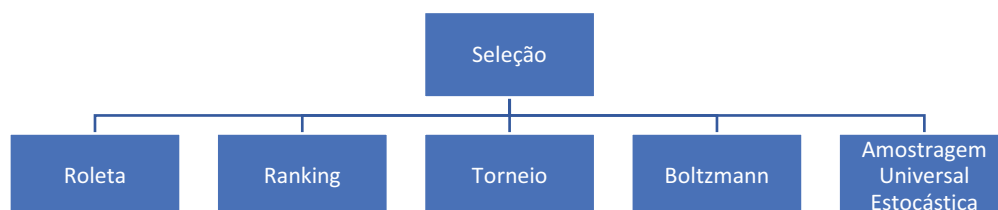
Já o torneio é frequentemente usado na otimização de estratégias de jogo, onde dois jogadores que adotam estratégias diferentes jogam um contra o outro, de acordo com a estratégia do vencedor. Da mesma forma, dois cromossomos são escolhidos e aquele com maior aptidão é escolhido como genitor para reprodução (Patkar *et al.*, 2007).

Conforme Katoch *et al.* (2021), a seleção de Boltzmann é baseada em métodos de entropia e amostragem, auxiliando com problemas de convergência prematura. A probabilidade para selecionar a melhor solução é alta, no entanto, existe a possibilidade de perda de informações durante o processo.

Já a amostragem universal estocástica é uma extensão do método de seleção de roleta, usando um ponto de partida aleatório na lista de indivíduos de uma geração e selecionando o novo indivíduo com espaçamento uniforme intervalos. Dessa forma, todos os indivíduos possuem oportunidades iguais de serem selecionados para participar do cruzamento para a próxima geração (KATOCH *et al.*, 2021).

A seguir, um resumo ilustrativo dos tipos de seleção existentes para AGs é apresentado.

Figura 26 – Tipos de seleção em AGs



Fonte: Katoch *et al.* (2021, p. 8096) – Adaptado.

4.9 Cruzamentos de código binário

Depois de selecionar os indivíduos usando um operador de seleção, esses devem ser empregados para que uma nova geração seja criada. Os cromossomos são então combinados para produzir novos cromossomos através de um operador de cruzamento que possibilita a combinação do material genético de duas ou mais soluções.

Com base na representação dos cromossomos, os cruzamentos podem ser categorizados em duas classes: os de código binário (BGA do inglês *Binary Genetic Algorithm*) e os de código real (RGAs do inglês *Real-coded Genetic Algorithm*). As duas classes de AGs podem ser aprimoradas a partir de algumas alterações em seus algoritmos.

Conforme com Rao (2009), em um cruzamento de ponto único, exemplificado na Figura 27, um ponto de cruzamento aleatório é selecionado e os *bits* finais do cromossomo de ambos os pais são utilizados para obter a nova prole.

Figura 27 – Exemplo de cruzamento de ponto único

cromossomo 1	1	1	1	0	0	0	0	0
cromossomo 2	0	0	0	0	1	1	1	0

>>>

descendente 1	1	1	1	0	0	1	1	0
descendente 2	0	0	0	0	1	0	0	0

Fonte: Aladdin e Rashid (2023, p. 8) – Adaptado.

Segundo Katoch *et al.* (2021), em um cruzamento de dois pontos e k-pontos, dois ou mais pontos de cruzamento aleatórios são selecionados e as informações genéticas dos pais são trocadas de acordo com os segmentos que foram criados, assim como apresentado na Figura 28 a seguir.

Figura 28 – Exemplo de cruzamento de k-pontos

cromossomo 1	1	1	1	0	0	0	0	0
cromossomo 2	0	0	0	0	1	1	1	0

>>>

descendente 1	0	0	0	0	0	1	1	0
descendente 2	1	1	1	0	1	0	0	0

Fonte: Aladdin e Rashid (2023, p. 8) – Adaptado.

Outras estratégias de cruzamentos são apresentadas no Apêndice A.

4.10 Cruzamentos de código real

A capacidade de busca dos operadores de cruzamento tradicionais não é satisfatória para o espaço de busca contínuo, sendo assim, foram desenvolvidos operadores específicos para variáveis em domínio real. Os cruzamentos provenientes da literatura utilizados neste trabalho são: cruzamento aritmético, cruzamento geométrico, cruzamento binário simulado (SBX do inglês *Simulated Binary Crossover*) e cruzamento de mistura (BLX do inglês *Blend Crossover*).

Conforme Herrera, Lozano e Sánchez (2003), existem os operadores de cruzamento baseados na vizinhança, os quais determinam os genes da prole extraindo valores de intervalos definidos por vizinhanças associados aos genes dos pais, ou seja, são capazes de gerar genes refinando o espaço de busca já explorado (*exploitation*), como em novas regiões

não exploradas (*exploration*), conduzindo o processo de busca em direção às zonas possivelmente mais promissoras.

É importante notar que neste trabalho foram utilizados operadores de cruzamento reais em codificação inteira, como apresentado na Figura 25. Apesar disto, os operadores apresentados são processados com variáveis codificadas inteiras, e o resultado é arredondado para o inteiro mais próximo.

4.10.1 Cruzamento Aritmético

O cruzamento aritmético consiste em realizar uma operação aritmética para obter a nova geração. Logo, para dois indivíduos x_1 e x_2 , o resultado do cruzamento aritmético, ou seja, os descendentes y_1 e y_2 , podem ser expressos como:

$$y_1 = \alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2 \quad (77)$$

$$y_2 = \alpha \cdot x_2 + (1 - \alpha) \cdot x_1 \quad (78)$$

sendo α um número gerado aleatoriamente podendo variar de 0 a 1.

Para gerar dois descendentes de dois pais, basta fazer $\beta = (1 - \alpha)$ e gerar α como o número aleatório. Esse cruzamento também é chamado de cruzamento aritmético completo porque usa um cruzamento uniforme de números aleatórios para todas as variáveis (YU; GEN, 2010). Esse operador gera indivíduos sempre interpolando os genes dos dois pais, o que tende a diminuir a diversidade da população.

4.10.2 Cruzamento Geométrico

O cruzamento geométrico se difere da representação do cruzamento aritmético usando a distância do espaço de busca da solução, pois é independente da representação do operador definido ao longo da distância do espaço de busca (KIM *et al.*, 2006).

Conforme Katoch *et al.* (2021), sendo x_1 e x_2 os pais, com δ variando aleatoriamente de 0 a 1, os descendentes y_1 e y_2 podem ser definidos, para cada gene, ou variável, como:

$$y_1 = x_1^\delta \cdot x_2^{(1-\delta)} \quad (79)$$

$$y_2 = x_2^\delta \cdot x_1^{(1-\delta)} \quad (80)$$

4.10.3 Cruzamento Binário Simulado (SBX)

De acordo com Yu e Gen (2010), os descendentes do cruzamento de ponto único têm o mesmo centroide dos pais, então tem-se o cruzamento binário simulado como tentativa de reproduzir essa propriedade em um cruzamento de código real.

Definiu-se, então, um termo chamado Fator de Propagação (β) para o gene de código real da seguinte forma:

$$\beta = \left| \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right| \quad (81)$$

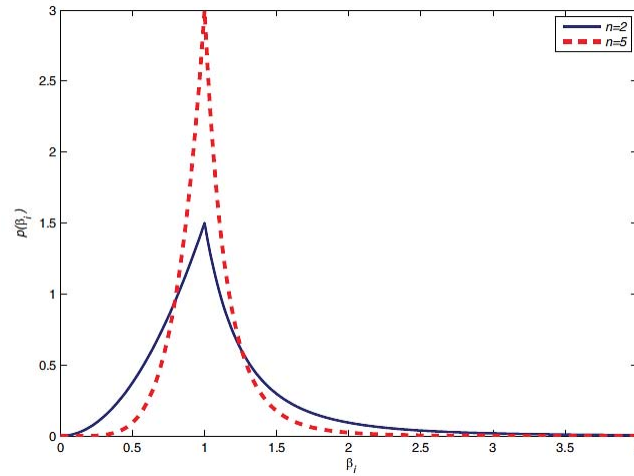
em que y_1 e y_2 são os genes de dois descendentes, e x_1 e x_2 são genes de dois pais.

Se $\beta < 1$, o operador é chamado de cruzamento de contração e se $\beta > 1$, o operador é chamado de cruzamento em expansão. Já no caso de $\beta = 1$, o operador é chamado de cruzamento estacionário.

Para simular a propriedade centroide de um ponto único de cruzamento para binário, a prole deve ser simétrica com relação ao centroide dos dois pais, além disso, o cruzamento de código real deve ter uma alta probabilidade de ser um cruzamento estacionário e uma baixa probabilidade de ser um cruzamento de contração, obtendo-se, dessa forma, o cruzamento expandindo para cada variável. Para que isso seja possível, considera-se β como um número aleatório e cria-se uma função de densidade de probabilidade para β , dada por:

$$p(\beta) = \begin{cases} 0,5 \cdot (n + 1) \cdot \beta^n & \rightarrow \beta \leq 1 \\ \frac{0,5 \cdot (n+1)}{\beta^{n+2}} & \rightarrow \beta > 1 \end{cases} \quad (82)$$

onde n é um parâmetro de controle definido pelo usuário. O Gráfico 4 ilustra a densidade de probabilidade para $n = 2$ e $n = 5$, em que, β tem uma alta probabilidade de ser 1.

Gráfico 4 – Densidade de probabilidade ($n = 2$ e $n = 5$)

Fonte: Yu e Gen (2010, p. 49).

Yu e Gen (2010) propuseram um método que consiste em usar a transformação inversa para gerar um número aleatório para β a partir de um número aleatório uniformemente distribuído u , o qual varia de 0 a 1. Assim, integrando a Equação (82) apresentada anteriormente, obtém-se:

$$\beta = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{n+1}} & \rightarrow u \leq 0,5 \\ 2 \cdot (1 - u)^{-\frac{1}{n+1}} & \rightarrow u > 0,5 \end{cases} \quad (83)$$

De acordo com a Equação (83), quanto menor u , menor β , o que faz com que os descendentes estejam próximos do centroide. E quanto maior u significa um maior β , o que torna o cruzamento uma expansão, ou seja, os descendentes estão longe do centroide. Aplicando a ideia de centroide aos genes da prole, tem-se:

$$y_1 = 0,5 \cdot (x_1 + x_2) + 0,5 \cdot \beta \cdot (x_1 - x_2) \quad (84)$$

$$y_2 = 0,5 \cdot (x_1 + x_2) + 0,5 \cdot \beta \cdot (x_2 - x_1) \quad (85)$$

como β tem alta probabilidade de ser próximo de 1, os descendentes têm alta probabilidade de estarem próximo dos pais, o que garante que a prole tenha o mesmo centroide dos pais.

No caso de os pais estiverem distantes um do outro, os descendentes estarão, muito provavelmente, distantes um do outro devido à alta probabilidade de $\beta = 1$, o que poderia promover a exploração na fase inicial dos AGs. Já se os pais forem próximos, os descendentes estarão próximos, o que pode proporcionar refinamento da solução na fase final dos AGs.

Ademais, o método do cruzamento binário simulado é baseado em eixos, portanto, deve-se tomar cautela no caso de as variáveis do problema serem inseparáveis, pois sua capacidade de busca é limitada nesses casos.

4.10.4 Cruzamento de Mistura

O cruzamento aritmético padrão é uma interpolação linear de dois indivíduos, logo, só poderia gerar descendentes na linha que conecta dois pais. Então o cruzamento de mistura (BLX do inglês *Blend Crossover*) vem como maneira de expandir a faixa de cruzamento aritmético, sendo esse método realizado no nível do gene (YU; GEN, 2010).

Para os genes x_1 e x_2 , supondo que $x_1 < x_2$, a expansão c_1 e c_2 é:

$$c_1 = x_1 - \alpha \cdot (x_2 - x_1) \quad (86)$$

$$c_2 = x_2 + \alpha \cdot (x_2 - x_1) \quad (87)$$

em que α é um parâmetro definido pelo usuário e controla a extensão da expansão, sendo limitado pelas imposições de que: $c_1 \geq x_{min}$ e $c_2 \leq x_{max}$. Normalmente, escreve-se, BLX- α , fazendo com que o valor de α fique explicitado. Conforme Yu e Gen (2010), $\alpha = 0,5$ é uma boa escolha para a maioria das situações, sendo o valor de α mais frequentemente utilizado. Assim, os descendentes y_1 e y_2 , são:

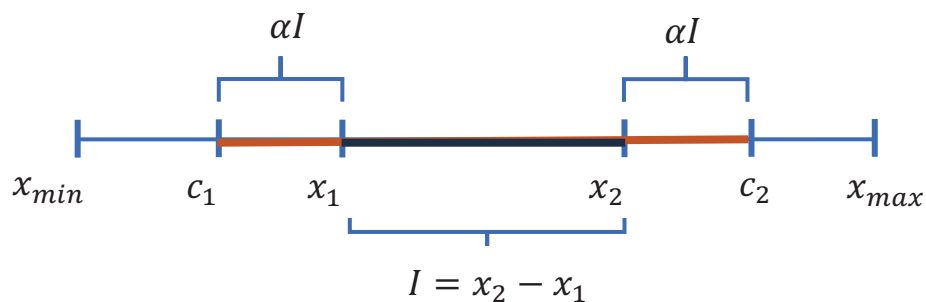
$$y_1 = \gamma \cdot c_1 + (1 - \gamma) \cdot c_2 \quad (88)$$

$$y_2 = \gamma \cdot c_2 + (1 - \gamma) \cdot c_1 \quad (89)$$

onde γ é um número gerado aleatoriamente com intervalo de 0 a 1.

O intervalo de busca para esse método, como no cruzamento binário simulado, possibilita exploração local e global do espaço de projeto ao mesmo tempo, como se pode observar na Figura 29 abaixo.

Figura 29 – Intervalo de busca para o método BLX- α



Fonte: Herrera, Lozano e Sánchez – adaptado (2003, p. 312).

4.10.5 Mod Blend

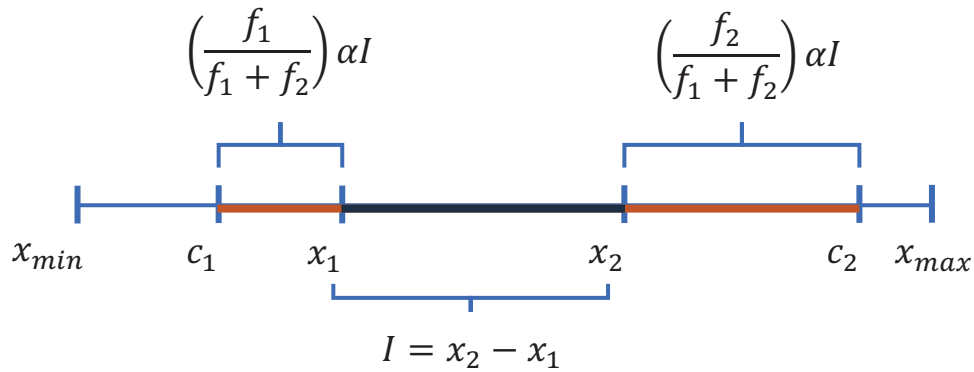
No referente trabalho, uma versão modificada do operador de cruzamento *Blend* é proposta, nomeada *Mod Blend*. Nesse novo operador, o comprimento da expansão em x_1 e x_2 é ponderado usando a função de aptidão dos pais:

$$c_1 = x_1 - \left(\frac{f_1}{f_1 + f_2} \right) \cdot \alpha \cdot (x_2 - x_1) \quad (90)$$

$$c_2 = x_2 + \left(\frac{f_2}{f_1 + f_2} \right) \cdot \alpha \cdot (x_2 - x_1) \quad (91)$$

onde c_1 e c_2 são os intervalos e f_1 e f_2 são a função de aptidão dos pais x_1 e x_2 , respectivamente. Essa modificação visa priorizar o cromossomo do melhor indivíduo no processo de cruzamento, visto que expande o intervalo de interpolação mais para o lado do melhor indivíduo. O cruzamento é realizado de forma semelhante às Equações (88) e (89) e sua expansão é ilustrada a seguir.

Figura 30 – Intervalo de busca para o método *Mod Blend*



Fonte: Autoria própria.

4.10.6 Mod Geometric

Outro cruzamento foi proposto neste trabalho, aplicando-se ao cruzamento geométrico o princípio das funções aptidões dos pais empregado no *MOD Blend*.

A expansão dos pais em x_1 e x_2 é ponderada utilizando as Equações (90) e (91) e o cruzamento geométrico é aplicado em seguida. Logo, os descendentes y_1 e y_2 são definidos, para cada gene, ou variável, como:

$$y_1 = c_1^\delta \cdot c_2^{(1-\delta)} \quad (92)$$

$$y_2 = c_2^\delta \cdot c_1^{(1-\delta)} \quad (93)$$

em que δ varia aleatoriamente de 0 a 1.

4.11 Mutação

A mutação é um operador que mantém a diversidade genética de uma população para outra e é baseada em mudanças aleatórias, podendo-se medir esse distúrbio através da taxa de mutação.

Conforme Rocha (2013), o operador presente no BIOS aplica a mutação nos filhos gerados no processo de cruzamento, utilizando uma probabilidade de mutação, à qual geralmente se atribui valores baixos. Assim, um número aleatório entre 0 e 1 é gerado para cada gene do cromossomo. Se o número gerado for menor que a probabilidade de mutação, um número inteiro aleatório é gerado, considerando-se os limites da lista da respectiva variável. Esse número substitui o valor original do gene. O procedimento de mutação utilizado é exemplificado na Figura 31.

Figura 31 – Exemplo de mutação utilizada



Fonte: Autoria própria.

Outros operadores de mutação são detalhados no Apêndice B.

4.12 Critérios de parada

De acordo com Yu e Gen (2010), é necessário definir algum critério de parada de modo que o processo de otimização ocorra em um tempo de execução razoável e possua resultados eficientes ao problema tratado. O critério de parada selecionado neste trabalho depende do número de iterações ou gerações, em que:

- Pode-se registrar o número de gerações. Se a otimização atingir o número máximo de gerações predefinido, o AG para.
- Também se pode utilizar o número de avaliações da função objetivo. Se esse número atingir o valor predefinido, o AG para.

Em uma implementação real, vários critérios podem ser combinados para obter uma regra flexível, mas eficaz para encerrar a execução.

Para o referente trabalho adotou-se como critério de parada para o AG o número máximo de gerações.

4.13 Avanços de algoritmos genéticos aplicados à otimização de elementos protendidos nos últimos anos

Conforme Narques *et al.* (2023), pesquisas relacionadas à otimização de estruturas avançaram bastante nos últimos anos, no entanto, ainda hoje, a busca por soluções ótimas para esses problemas, na prática de projetos, é baseada no processo empírico de tentativa e erro. Esse procedimento é considerado ineficiente, pois consome muito tempo do profissional e investiga um intervalo de busca muito restrito. Além de que a solução adotada não garante que seja ótima para o problema analisado.

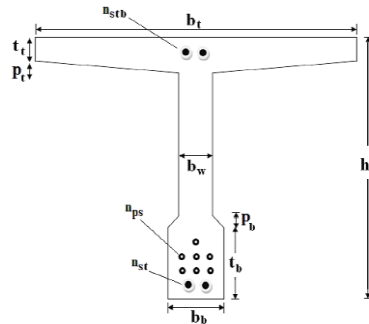
Quanto à otimização de estruturas protendidas existe ainda certa carência de pesquisas na área, sendo a maioria das pesquisas existentes aplicadas a galpões industriais, pontes e elementos pré-moldados no geral. Dessa forma, é primordial que novas pesquisas sejam realizadas a respeito de elementos protendidos no geral, tanto na parte de modelagem da estrutura como na parte de implementação do algoritmo de otimização.

De acordo com Adeli e Sarma (2006), existem três características dos AGs que são atraentes para otimização de estruturas. Primeiramente, o algoritmo inicia com um grupo de pontos (variáveis de projeto) em vez de um único ponto de partida, garantindo uma convergência rápida para uma solução ótima. Segundo, AGs requerem apenas avaliações de funções simples, resultando em um algoritmo numericamente eficiente. Finalmente, pode-se utilizar o processamento paralelo porque cada cromossomo ou sequência na população é independente dos outros e, portanto, podem ser processados simultaneamente. Devido às suas vantagens, o AG se torna uma ótima alternativa a ser implementada no algoritmo de otimização de estruturas. Artigos relevantes das últimas duas décadas, detalhados a seguir, corroboram com essa afirmação.

Türkeli e Öztürk (2017) realizaram um estudo com o objetivo de minimizar o custo de vigas de concreto com protensão parcial utilizando AGs. As vigas analisadas possuíam seção transversal I e seus resultados foram comparados com dados disponíveis na literatura sendo de 35% a 50% mais econômicos. Todas as etapas de análise e otimização

foram implementadas no MATLAB. As variáveis do problema incluem dimensões da seção e quantidade de armadura ativa e passiva (positiva e negativa), as quais são ilustradas a seguir.

Figura 32 – Seção transversal típica com as variáveis de projeto



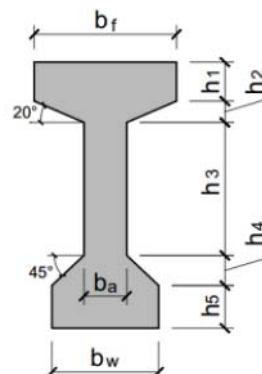
Fonte: Türkeli e Öztürk – adaptado (2017, p. 581).

Foram impostas 16 restrições de projeto que incluíam restrições de tensão de flexão, cambagem inicial, deflexão, ductilidade, resistência ao cisalhamento, resistência máxima à flexão, restrições geométricas e de alojamento da armadura passiva.

Os pesquisadores utilizaram uma função de penalidade adaptativa e populações de 40 a 200 indivíduos. Alguns dos resultados foram que quanto mais indivíduos maior a chance de o algoritmo convergir para a solução ótima, embora o tempo de processamento também aumente. Além disso, foi possível diminuir a quantidade de aço protendido devido a sua substituição parcial pelo aço de armadura passiva.

Já o objetivo da pesquisa Narques *et al.* (2023) foi apresentar a otimização com uso de AG para uma viga de concreto protendido, com seção I e vão de 22 metros, de uma cobertura de um galpão industrial construído utilizando o sistema pré-moldado, comparando-se os resultados com o projeto real já executado, obtendo-se uma taxa de economia de 4,3%. O esquema da seção é apresentado a seguir:

Figura 33 – Seção transversal otimizada



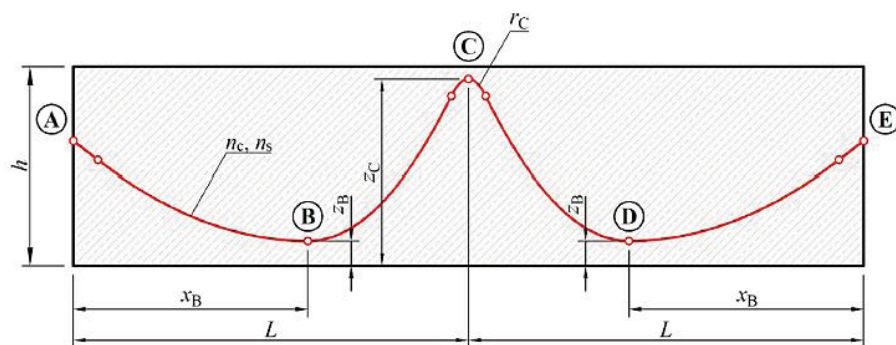
Fonte: Narques *et al.* – adaptado (2023, p. 6).

Alguns detalhes da otimização de Narques *et al.* (2023) foram:

- O código de algoritmo genético utilizou código real e foi implementado no MATLAB.
- Seis variáveis relacionadas às dimensões da seção foram consideradas.
- Os melhores resultados foram para as 10 simulações realizadas com uma população de 150 indivíduos com 500 iterações e taxa de mutação de 5%. Utilizou-se o cruzamento binário simulado (SBX) com $n=5$ e seleção de Torneio.
- Consideração das cargas de peso próprio, permanentes, acidentais e provenientes da ação do vento.
- Os critérios utilizados para determinação das restrições de projeto foram baseados nas normas brasileiras, que consideram tensões e deslocamentos limites para algumas combinações de cargas.
- Os custos foram levantados nas Tabelas de Preços Unitários Unificados para Pontes.

Outra pesquisa interessante foi a de Jasiński, Salamak e Gerges (2024) que otimizou o *layout* dos cabos de protensão de uma viga com dois vãos com o objetivo de minimizar o peso total do aço de protensão. O artigo descreve suposições, implementação e validação dos métodos utilizando duas vigas como exemplo.

Figura 34 – *Layout* dos cabos



Fonte: Jasiński, Salamak e Gerges – adaptado (2024, p. 7).

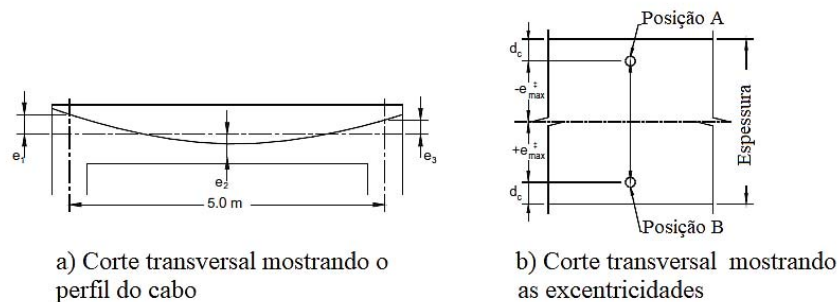
A análise utilizou elementos finitos do *software Autodesk Robot Structural Analysis* e uma rede neural para prever a saída numérica com base nos parâmetros de *layout* usando a linguagem computacional C#.

No AG utilizou-se uma população de 100 indivíduos, seleção de Torneio, cruzamento binário simulado (SBX) e taxa de mutação de 10%, estabelecendo-se um número

máximo de gerações de 200. Tem-se 10 variáveis de projeto e as restrições limites máximos das tensões estabelecidos pelo Eurocode.

Semelawy, Nassef e Damatty (2012) realizaram um estudo de minimização do custo (concreto e armadura ativa) de uma laje quadrada de concreto com protensão total em que os resultados obtidos satisfizeram os estados limites de resistência e de utilização das normas canadenses. As variáveis de projeto incluíram a altura da laje e a quantidade de cabos nas duas direções juntamente com suas excentricidades. Sete restrições foram impostas e a laje foi modelada utilizando elementos finitos de casca triangular. Tanto a modelagem como a otimização utilizaram um código computacional em linguagem FORTRAN. Alguns cortes da laje são ilustrados a seguir.

Figura 35 – Cortes da laje quadrada com protensão total otimizada



Fonte: Semelawy, Nassef e Damatty – adaptado (2012, p. 5760).

4.14 BIOS (*Biologically-Inspired Optimization System*)

O BIOS (*Biologically-Inspired Optimization System*) é um programa acadêmico de código aberto desenvolvido em linguagem C++ pelo desenvolvido Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC).

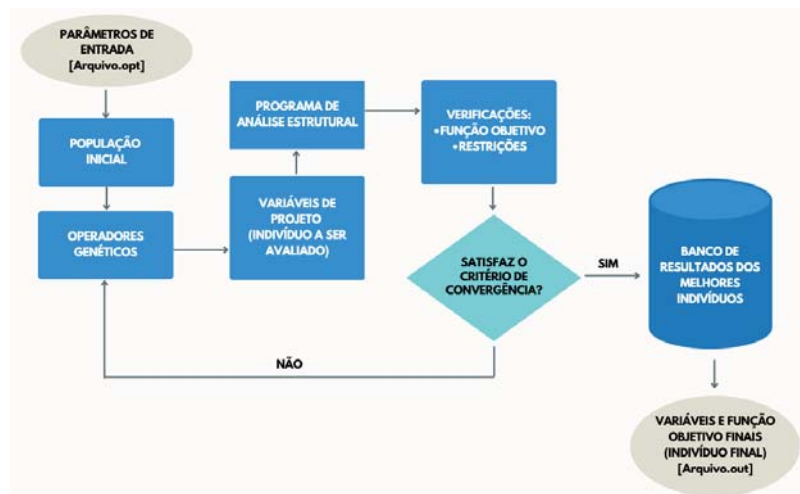
Segundo Barroso *et al.* (2022), os principais algoritmos disponíveis no BIOS são o Algoritmo Genético, a otimização por Enxame de Partículas e a Evolução Diferencial, disponíveis para otimização discreta e contínua e para problemas multiobjetivos. Com relação aos métodos determinísticos de amostragem disponíveis tem-se, por exemplo, as sequências de Hammersley e Sobol, e métodos estocásticos, como amostragem aleatória e amostragem por hipercubo latino. Com relação às restrições, tem-se que são tratadas por uma abordagem de penalidade, como os métodos de penalidade estática, de Deb 2000 ou adaptativa (Lemonge e Barbosa, 2004). O tipo de cruzamento anteriormente disponível para AG no BIOS era o

aritmético, e, a partir deste trabalho, outros cruzamentos citados anteriormente foram implementados.

Alguns trabalhos utilizaram o BIOS como ferramenta de otimização, dentre os quais tem-se: o trabalho de Sobrinho (2018) na otimização de pavimento de lajes nervuradas protendidas, Mota (2019) que estudou a otimização voltada para lajes nervuradas de concreto protendido não aderente e o trabalho de Toscano (2023) na otimização de pavimentos de lajes lisas maciças protendidas. Ambos utilizaram o AG disponível no BIOS para realizarem suas análises.

A seguir, tem-se o esquema de algoritmo de AG presente no BIOS (*software* utilizado para realizar as otimizações necessárias).

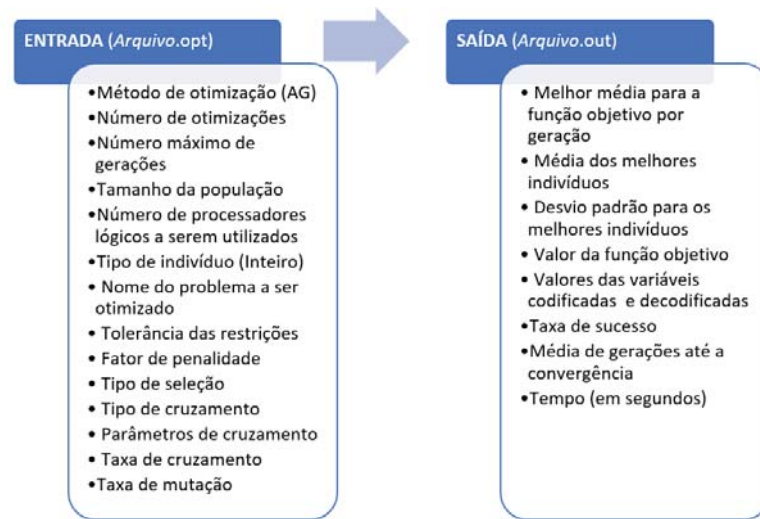
Figura 36 – Algoritmo de AG utilizado no BIOS



Fonte: Autoria própria.

O número de otimizações, gerações e o tamanho da população são selecionados pelo usuário antes da realização da otimização juntamente com outros parâmetros de entrada apresentados na Figura 37. O BIOS funciona através de arquivos de entrada e saída de texto, e os dados contidos em cada arquivo são detalhados a seguir.

Figura 37 – Arquivos de entrada e saída do BIOS



Fonte: Autoria própria.

5 MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DE VIGAS PROTENDIDAS DE MÚLTIPLOS VÃOS

Na metodologia convencional de projeto de vigas protendidas, o projetista pode definir adequadamente as dimensões das vigas e lajes protendidas, bem como parâmetros como a quantidade e o traçado dos cabos a partir de sua experiência. Porém, as técnicas de otimização podem ser utilizadas em busca de uma solução ótima, onde parâmetros de projeto podem ser determinados de modo que a solução minimize, por exemplo, o custo, composto pelo custo dos materiais – que inclui o volume de concreto, peso dos cabos e da armadura passiva – e custo da execução dos serviços.

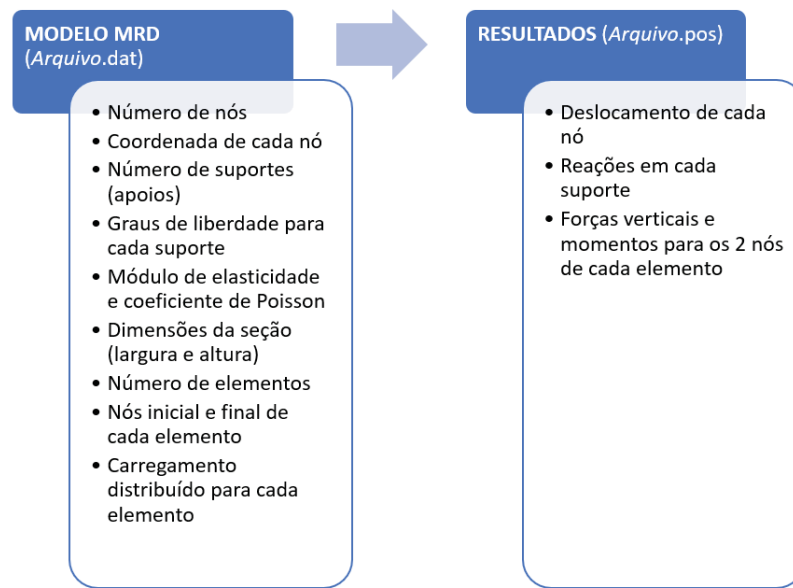
Este capítulo detalha o procedimento de modelagem da viga protendida de múltiplos vãos no FAST e sua integração com os recursos de otimização via algoritmos genéticos presentes no BIOS.

5.1 Integração da modelagem e otimização

Primeiramente, as alternativas de cruzamento (MOD *Blend* e MOD *Geometric*) foram desenvolvidas e, tanto esses cruzamentos como os cruzamentos existentes para o código real (Geométrico, SBX e *Blend*) foram implementados no sistema BIOS. Vale salientar que o cruzamento Aritmético era o único existente no BIOS inicialmente. Posteriormente, avaliou-se o desempenho de todos esses cruzamentos em *Benchmarks* de otimização estrutural e de funções matemáticas. Além disto, também foram otimizadas vigas contínuas em concreto protendido, os quais foram implementados diretamente no BIOS usando rotinas em linguagem C++.

Para o problema da viga contínua em concreto protendido utilizou-se o *software* FAST (*Finite Element analySis Tool*) para realizar as análises estruturais necessárias para o cálculo dos esforços e deslocamentos nos casos de carga discutidos na seção 5.2.2. Esse programa funciona através de arquivos de texto de entrada e saída, os quais suas escritas e leituras tiveram que ser programadas na parte de implementação do problema no BIOS. Os dados contidos em cada tipo de arquivo são detalhados abaixo.

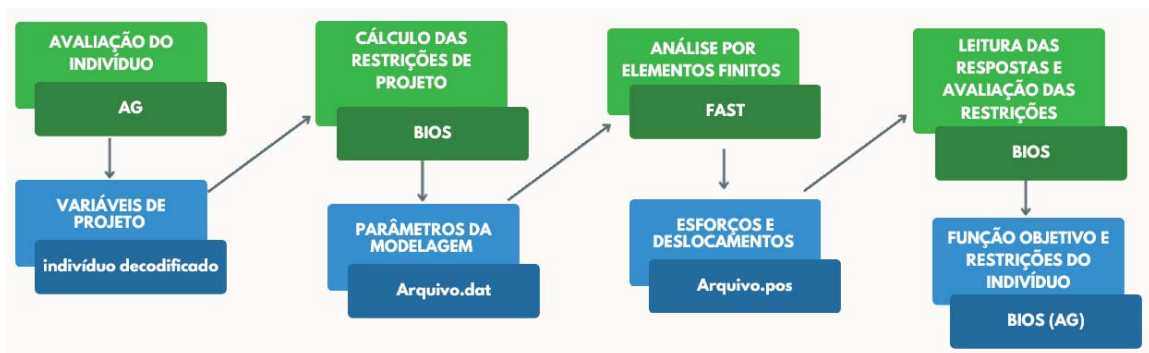
Figura 38 – Arquivos de entrada e saída do FAST



Fonte: Autoria própria.

Portanto, o modelo de análise estrutural (desenvolvido dentro do BIOS e FAST) foi integrado ao algoritmo genético do BIOS, como ilustrado a seguir.

Figura 39 – Integração do BIOS com o FAST



Fonte: Autoria própria.

5.2 Formulação do problema de otimização para uma viga contínua protendida com múltiplos vãos

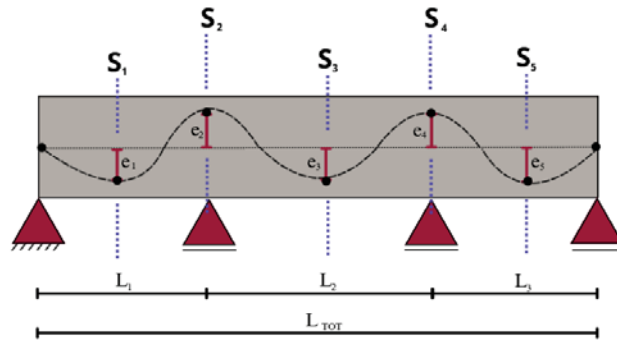
O modelo de otimização do problema em questão tem por objetivo minimizar o custo unitário total dos materiais para produção de uma viga de concreto protendido com cordoalha engraxada não-aderente.

O problema foi formulado de modo que o usuário possa escolher o f_{ck} desejado (de 30MPa à 90 MPa). Além disso, pode-se selecionar vigas com número arbitrário de vãos,

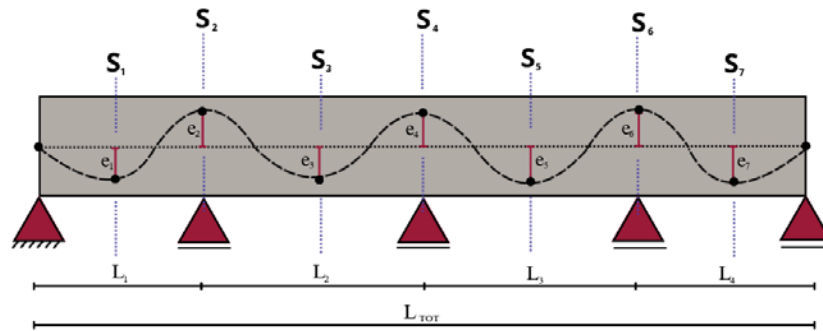
os quais podem possuir comprimentos quaisquer. Algumas das possibilidades para o problema são apresentadas na Figura 40.

Figura 40 – Exemplos de vigas protendidas a serem otimizadas

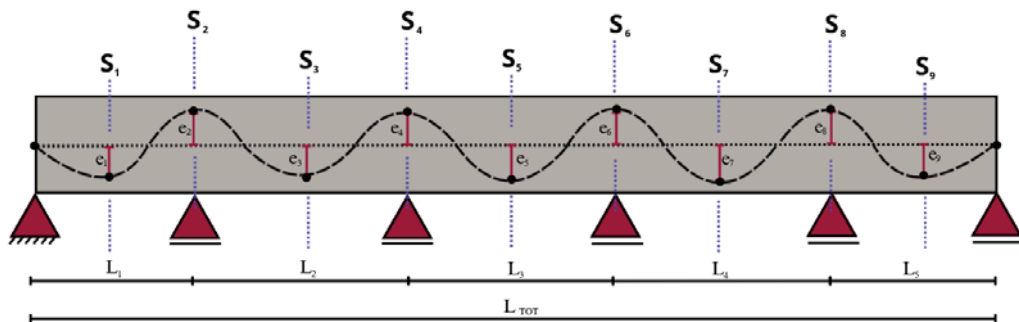
a) Viga com 3 vãos



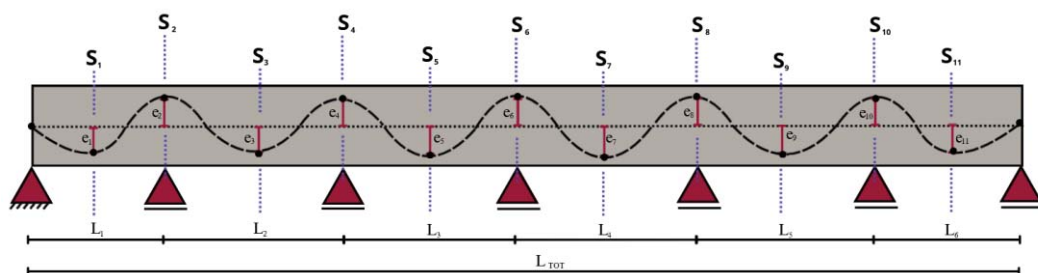
b) Viga com 4 vãos



c) Viga com 5 vãos



d) Viga com 6 vãos



Fonte: Autoria própria.

5.2.1 Variáveis de Projeto e Função Objetivo

A função objetivo é definida como:

$$C_{TOT} = C_c \cdot V_c + C_p \cdot m_p + C_s \cdot m_s \quad (94)$$

em que C_{TOT} (R\$) é o custo total dos materiais, C_c (R\$/m³) é o custo unitário do concreto, V_c (m³) é o volume do concreto, C_p (R\$/kg) é o custo unitário da armadura ativa, m_p (kg) é a massa da armadura ativa, C_s (R\$/kg) é o custo unitário da armadura passiva e m_s (kg) é a massa da armadura passiva.

Os custos unitários sem desoneração das armaduras ativa, passiva e concreto foram retirados das tabelas da SEINFRA (Secretaria da Infraestrutura do Ceará) que incluem os custos referentes à mão-de-obra e transporte, os quais são apresentados abaixo.

Tabela 4 – Custos sem desoneração dos materiais utilizados (SEINFRA)

Material	Custo
Concreto para vibração $f_{ck} = 40$ MPa com agregado adquirido	647,01 R\$/m ³
Concreto com $f_{ck} > 50$ MPa executado em central dosadora	720,99 R\$/m ³
Cordoalha de 12,7 mm com bainha	43,85 R\$/kg
Armadura CA-50 (12,5 a 25,0 mm)	13,46 R\$/kg

*Dados coletados em dezembro de 2024.

Fonte: Autoria própria.

Devido ao fato dos preços para concreto com $f_{ck} = 60$ MPa e $f_{ck} = 80$ MPa coletados da SEINFRA serem os mesmos, uma pesquisa dos valores comerciais de usina também foi realizada, os quais se encontram a seguir.

Tabela 5 – Valores comerciais para concreto coletados da Apodi

Material	Custo
Concreto com $f_{ck} = 40$ MPa executado em central dosadora	580,00 R\$/m ³
Concreto com $f_{ck} = 60$ MPa executado em central dosadora	720,00 R\$/m ³
Concreto com $f_{ck} = 80$ MPa executado em central dosadora	1.200,00 R\$/m ³

*Dados coletados em janeiro de 2025.

Fonte: Autoria própria.

As variáveis de projeto são a largura da seção (b_w), a altura da seção (h), o número de cordoalhas (n) e o valor das excentricidades ($e_1, \dots, e_n$) na região central dos vãos e nos eixos centrais dos pilares a depender do número de vãos da viga. Todas as variáveis são

$$m_s = m_{bar} \cdot L_{bar} \quad (98)$$

onde m_{bar} é a massa da armadura passiva de 1 kg/m (bitola selecionada de 12,5) e L_{bar} é a soma do comprimento (em metros) de todas as barras utilizadas no dimensionamento da viga.

5.2.2 Restrições

Sendo compressão negativa e tração positiva, as restrições impostas no modelo, relacionadas aos Estados Limites Últimos e de Serviço, são apresentadas na Tabela 6.

Tabela 6 – Restrições do problema da viga contínua protendida

Restrição	Função	Restrição normalizada
Restrições Laterais		
(1) Largura mínima da seção	$b_w \geq b_{w,min}$	$1 - (b_w / b_{w,min}) \leq 0$
(2) Largura máxima da seção	$b_w \leq b_{w,max}$	$(b_w / b_{w,max}) - 1 \leq 0$
(3) Altura mínima da seção	$h \geq h_{min}$	$1 - (h / h_{min}) \leq 0$
(4) Altura máxima da seção	$h \leq h_{max}$	$(h / h_{max}) - 1 \leq 0$
(5) Número mínimo de cordoalhas	$n \geq n_{min}$	$1 - (n / n_{min}) \leq 0$
(6) Número máximo de cordoalhas	$n \leq n_{max}$	$(n / n_{max}) - 1 \leq 0$
(7) Excentricidade mínima	$e \geq 0$	$\{e + L_1\} / L_1 - 1 \leq 0$
(8) Excentricidade máxima	$e \leq e_{max}$	$(e / e_{max}) - 1 \leq 0$
Restrições no Ato da Protensão		
(9) Tração máxima	$\sigma \leq \sigma_{t,lim} (ato)$	$[\sigma / \sigma_{t,lim(ato)}] - 1 \leq 0$
(10) Compressão máxima	$\sigma \geq \sigma_{c,lim} (ato)$	$[\sigma / \sigma_{c,lim(ato)}] - 1 \leq 0$
Estado Limite de Descompressão (ELS-D)		
(11) Tração máxima	$\sigma \leq 0$	$\{[\sigma + f_{ck}] / f_{ck}\} - 1 \leq 0$
(12) Compressão máxima	$\sigma \geq \sigma_{c,lim} (cqp)$	$[\sigma / \sigma_{c,lim} (cqp)] - 1 \leq 0$
Estado Limite de Formação de Fissuras (ELS-F)		
(13) Tração máxima	$\sigma \leq \sigma_{t,lim} (cf)$	$[\sigma / \sigma_{t,lim} (cf)] - 1 \leq 0$
(14) Compressão máxima	$\sigma \geq \sigma_{c,lim} (cf)$	$[\sigma / \sigma_{c,lim} (cf)] - 1 \leq 0$
Estado-Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF)		
(15) Flecha máxima	$\delta \leq \delta_{max}$	$[\delta / \delta_{max}] - 1 \leq 0$
Raio mínimo de curvatura		
(16) Raio mínimo	$r \geq r_{min}$	$1 - (r / r_{min}) \leq 0$

Fonte: Autoria própria.

Todas as restrições laterais de 1 a 8 são satisfeitas *a priori* implicitamente pelo algoritmo de otimização. As restrições referentes às tensões máximas e mínimas a verificação é realizada para as regiões superior e inferior de cada seção avaliada da viga, de acordo com o sinal da tensão atuante nas bordas inferior e superior. A flecha máxima é verificada no ponto central de cada vão da viga e o raio mínimo nas regiões esquerda e direita dos pilares centrais.

5.3 Algoritmo para automatização do dimensionamento de uma viga contínua protendida com múltiplos vãos

Tem-se a seguir o passo a passo da discretização e verificações realizadas para cada indivíduo avaliado pelo algoritmo de genético.

5.3.1 Metodologia adotada para discretização da viga

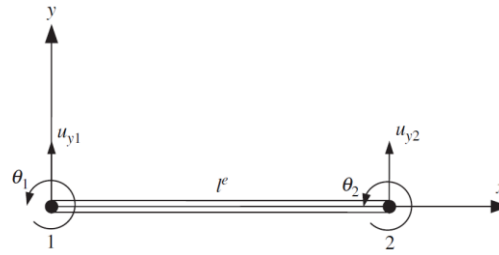
Para obtenção dos momentos e forças verticais para cada combinação de carga, além das flechas imediatas, foi utilizado o *software* FAST, que utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) para obtenção dos esforços e deslocamentos de cada nó da estrutura.

Muitos problemas de engenharia, como o desenvolvido no decorrer do referente trabalho, podem ser descritos em termos equações diferenciais parciais. Em geral, resolver essas equações por métodos analíticos clássicos é inviável. Portanto, o método dos elementos finitos (MEF) é uma abordagem numérica pela qual essas equações podem ser resolvidas de maneira aproximada (FISH e BELYTSCHKO, 2007).

O MEF consiste na discretização de um meio contínuo em pequenos elementos, mantendo as mesmas propriedades do meio original e tem por objetivo calcular o campo de deslocamentos de uma estrutura e, conseqüentemente, seus esforços. Esses elementos podem ser de diversos tipos como, por exemplo, elementos reticulados de treliças, vigas e pórticos, e elementos contínuos triangulares e quadrilaterais de placas e cascas. A escolha do tipo de elemento é um dos fatores que influenciam diretamente na qualidade dos resultados obtidos.

O Método da Rigidez Direta (MRD) pode ser tratado como um caso particular do método dos elementos finitos aplicado a elementos de barra. As barras são analisadas isoladamente e o equilíbrio global da estrutura é alcançado se todos os nós isolados estiverem em equilíbrio (MARTHA, 2010). Como maneira de simplificação, o elemento de viga de Euler–Bernoulli com 2 graus de liberdade em cada nó (1 deslocamento vertical e 1 rotação) e, ilustrado na Figura 42, foi utilizado para a discretização das vigas protendidas de múltiplos vãos.

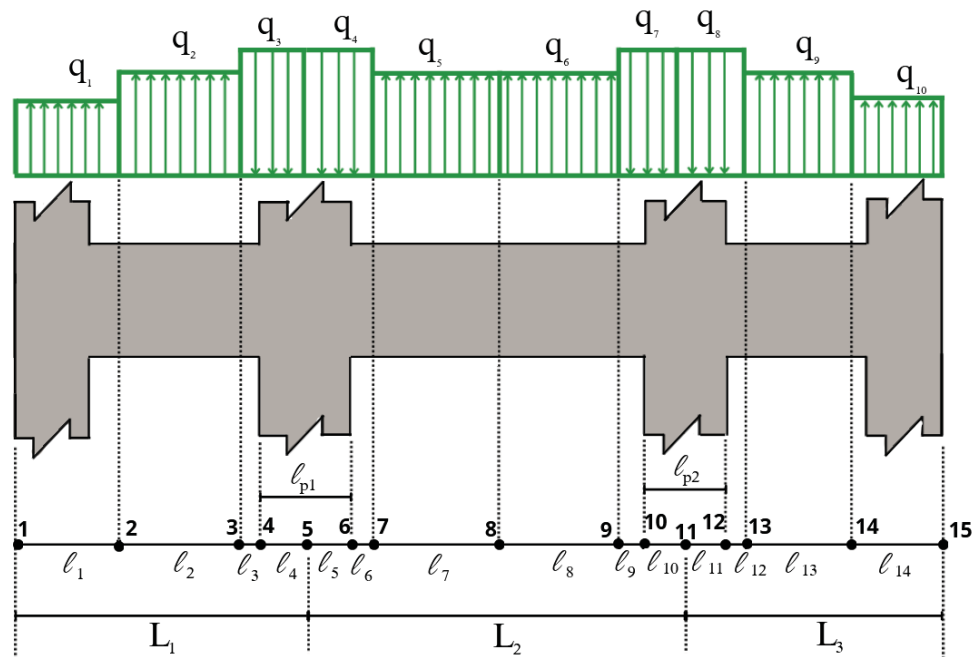
Figura 42 – Elemento de viga Euler–Bernoulli de dois nós.



Fonte: Fish e Belytschko (2007, p. 259).

A quantidade de elementos por vão foi definida com base nas cargas equivalentes de protensão, de modo que, para cada carga existisse um elemento correspondente. Além disso, foram adicionados nós no início e final de cada pilar central, com o objetivo de substituir, posteriormente, a reação pontual desses pilares em cargas distribuídas ao longo da largura dos pilares, aumentando, dessa forma, a precisão da análise. A Figura 43 ilustra a discretização dos elementos utilizada.

Figura 43 – Modelo de discretização utilizado



Fonte: Autoria própria.

As fórmulas para definição do comprimento de cada elemento do primeiro vão são apresentadas a seguir.

$$\begin{cases} l_1 = \alpha \cdot L_1 \\ l_2 = (1 - \alpha - \alpha_1) \cdot L_1 \\ l_3 = \alpha_1 \cdot L_1 - l_{p1}/2 \\ l_4 = l_{p1}/2 \end{cases} \quad (99)$$

Já para os vãos centrais, tem-se:

$$\begin{cases} l_5 = l_{p1}/2 \\ l_6 = \alpha_2 \cdot L_2 - l_{p1}/2 \\ l_7 = (1/2 - \alpha_2) \cdot L_2 \\ l_8 = (1/2 - \alpha_2) \cdot L_2 \\ l_9 = \alpha_2 \cdot L_2 - l_{p2}/2 \\ l_{10} = l_{p2}/2 \end{cases} \quad (100)$$

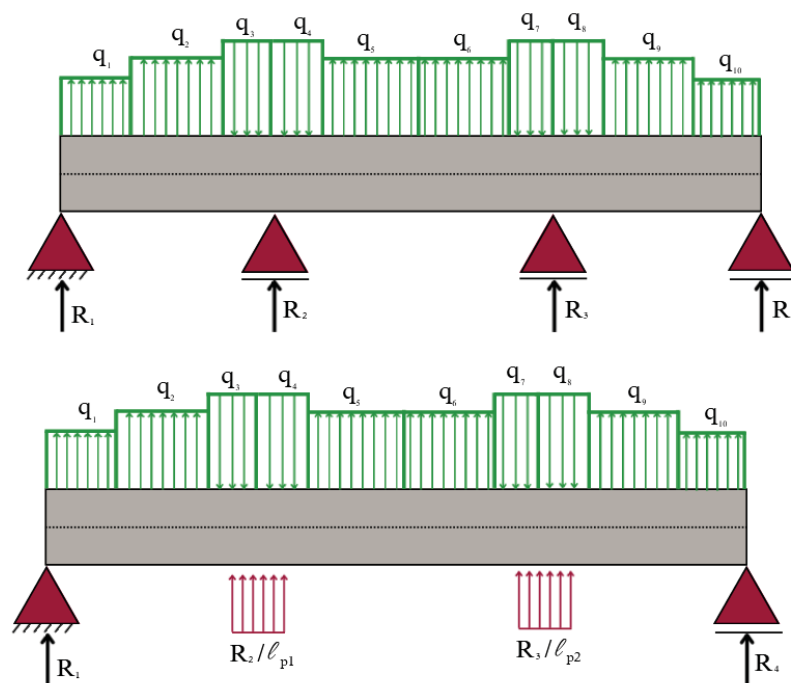
E para o último vão, faz-se:

$$\begin{cases} l_{11} = l_{p2}/2 \\ l_{12} = \alpha_1 \cdot L_3 - l_{p2}/2 \\ l_{13} = (1 - \alpha - \alpha_1) \cdot L_3 \\ l_{14} = \alpha \cdot L_3 \end{cases} \quad (101)$$

em α , α_1 e α_2 são parâmetros provenientes do método de cálculo das cargas equivalentes explanado no capítulo 2.

A Figura 44 ilustra a substituições das reações dos pilares em cargas distribuídas para uma viga de três vãos para uma combinação de carga qualquer. Os valores das reações são obtidos processando um modelo de viga contínua no FAST.

Figura 44 – Substituição das cargas concentradas dos pilares centrais em cargas distribuídas



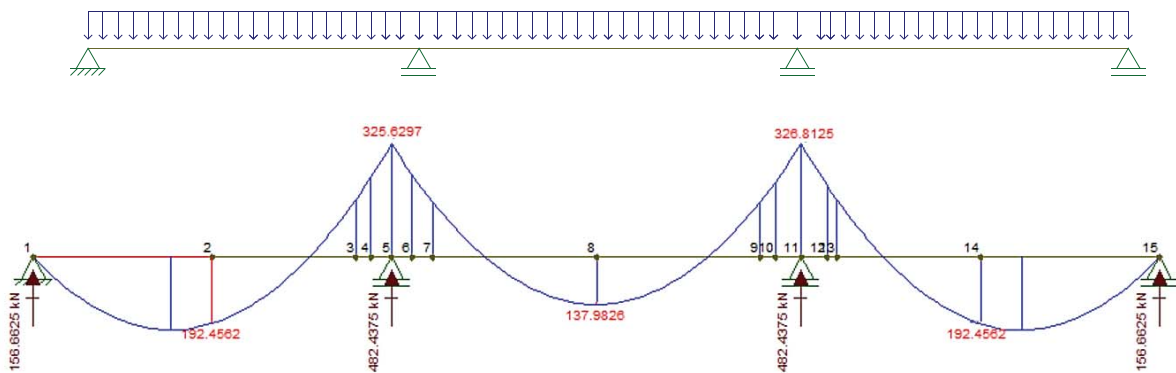
Fonte: Autoria própria.

Após a substituição das reações dos pilares, a viga é reprocessada e os momentos necessários são obtidos. A seguir, tem-se um exemplo que ilustra a vantagem dessa

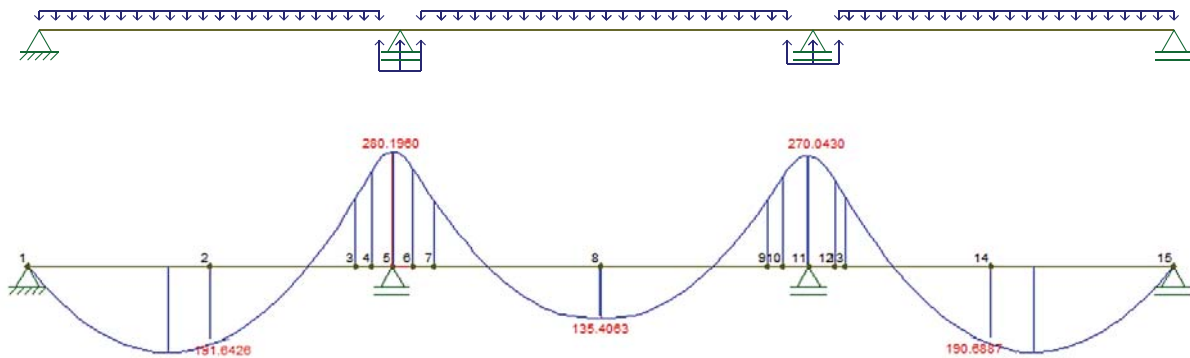
substituição, na qual os valores dos momentos são suavizados, reduzindo seus valores significativamente, o que faz com que o resultado da otimização atinja valores menores. Neste caso, apresentado na Figura 45, houve redução de 13,95% nos picos de momento negativo observados nos pilares centrais.

Figura 45 – Exemplo de substituição das cargas concentradas dos pilares centrais em cargas distribuídas para uma combinação de carga qualquer

a) Sem a substituição das cargas concentradas dos pilares



b) Com a substituição das cargas concentradas dos pilares



Fonte: Autoria própria.

A partir dos valores do número de vãos (n_v) e o comprimento de cada vão ($L_1, \dots, L_{n_v}$) e da discretização da viga apresentada, são calculadas automaticamente outras variáveis importantes para o problema

- Número de nós da estrutura ($n_{nós}$), calculado como:

$$n_{nós} = n_v \cdot 6 - 3 \quad (102)$$

- O número de elementos (n_{ele}):

$$n_{ele} = n_{nós} - 1 \quad (103)$$

- O número de suportes (n_{sup}):

$$n_{sup} = n_v + 1 \quad (104)$$

- O número de pilares centrais (n_{pc}):

$$n_{pc} = n_{sup} - 2 \quad (105)$$

Os momentos selecionados que são, posteriormente, utilizados para cálculo das tensões estão na região central dos vãos e nos eixos centrais dos pilares. Portanto, tem-se, para a quantidade de momentos (n_{mom}) a serem obtidos:

$$n_{mom} = n_{nós}/3 \quad (106)$$

O número de momentos a serem obtidos é igual ao número de excentricidades (n_e) avaliadas, logo:

$$n_e = n_{nós}/3 \quad (107)$$

Tem-se para o número de variáveis (n_{var}) a serem otimizadas:

$$n_{var} = 3 + (n_v \cdot 2 - 1) \quad (108)$$

E para a quantidade de restrições (n_{res}):

$$n_{res} = 6 + 2 \cdot (n_v \cdot 2 - 1) + 2 \cdot 3 \cdot (n_{nós}/3) + n_v + n_{pc} \cdot 2 \quad (109)$$

sendo a primeira parcela referente às restrições de largura, altura e quantidade de cabos da seção, a segunda parcela relacionada às excentricidades, a terceira referente às tensões de tração e compressão para 3 combinações, a quarta parcela relacionada à flecha máxima e a última referente ao raio de curvatura dos cabos.

Na Tabela 7 a seguir, tem-se a quantidades dos parâmetros da discretização apresentadas anteriormente para algumas configurações de viga de acordo com a quantidade de vãos.

Tabela 7 – Parâmetros da discretização para 3, 4 e 5 vãos.

	3 vãos	4 vãos	5 vãos
$n_{nós}$	15	21	27
n_{ele}	14	20	26
n_{sup}	4	5	6
n_{pc}	2	3	4
n_{mom}	5	7	9

n_e	5	7	9
n_{var}	8	10	12
n_{res}	53	72	91

Fonte: Autoria própria.

5.3.2 Inicialização do problema

Para inicialização do problema de uma viga protendida de múltiplos vãos, alguns valores devem ser explicitados pelo usuário. A Tabela 8 a seguir apresenta os dados que o usuário precisa fornecer para o dimensionamento da viga protendida.

Tabela 8 – Dados de entrada informados pelo usuário para a viga protendida

Dados de entrada	Símbolo
Número de vãos	n_v
Comprimento de cada vão (m)	$L_1, \dots, L_{nv}$
Largura de cada pilar central (m)	$l_{p1}, \dots, l_{npc}$
Resistência característica do concreto à compressão (MPa)	f_{ck}
Ponderador da carga acidental na combinação frequente	ψ_1
Ponderador da carga acidental na combinação quase permanente	ψ_2
Cobrimentos da armadura ativa e passiva (m)	Co_{Ap} e Co_{As}
Carga permanente (kN/m)	g
Carga acidental (kN/m)	q

Fonte: Autoria própria.

5.3.3 Cálculo dos parâmetros variáveis

A Tabela 9 abaixo apresenta os parâmetros variáveis, os quais são obtidos automaticamente a partir dos parâmetros fixos. As equações correspondentes ao cálculo desses valores também são indicadas.

Tabela 9 – Parâmetros variáveis calculados para a viga protendida

Parâmetros variáveis	Símbolo	Equação
Resistência de cálculo (minorada) à compressão do concreto aos j dias (MPa)	f_{cd}	$f_{ck}/1,4$
Resistência característica à compressão do concreto na idade em que se pretende estimar o módulo de elasticidade (MPa)	f_{ckj}	$0,7 \cdot f_{ck}$
Força de protensão inicial (kN)	P_0	(10)
Força de protensão inicial após as perdas imediatas (kN)	P_i	(22)

Valor final da força de protensão (kN)	P_{∞}	(23)
Armadura mínima da seção (m ²)	$A_{s,min}$	(66)
Módulo resistente (m ³)	w	(26)
Peso próprio (kN/m)	g_i	$b_w \cdot h \cdot 25^*$
Momento de inércia (m ⁴)	I	$b_w \cdot h^3 / 12$
Coefficiente de fluência**	φ	2,8 ou 1,9
Módulo de deformação secante (kN/m ²)	E_{cs}	(2)
Número de nós da estrutura	$n_{nós}$	(102)
Número de elementos	n_{ele}	(103)
Comprimento de cada elemento (m)	$l_1, \dots, l_{nele}$	(99), (100) e (101)
Número de suportes	n_{sup}	(104)
Número de pilares centrais	n_{pc}	(105)
Número de momentos a serem obtidos	n_{mom}	(106)
Número de excentricidades avaliadas	n_e	(107)
Ordenadas dos cabos com relação à borda inferior da viga (m)	$y_1, \dots, y_{ne}$	(18)
Cargas equivalentes de protensão com perdas imediatas e diferidas (kN/m)	$q_{e1}, \dots, q_{e(nele)}$	(16) e (17)

*Referente ao peso adotado para o concreto de 25 kN/m³.

**2,8 (para $f_{ck} \leq 45$ MPa) e 1,9 (para $f_{ck} > 45$ MPa).

Fonte: Autoria própria.

5.3.4 Limites de tensões e deformações

Em seguida são calculados os limites de tensões, deformações e do raio de curvatura, os quais são apresentados na Tabela 10. Esses limites serão utilizados nas restrições de projeto.

Tabela 10 – Limites de tensões, deformações e do raio de curvatura.

Limites	Símbolo	Equação
<i>Estado Limite de Formação de Fissuras (ELS-F)</i>		
Limite de tração (MPa)	$\sigma_{t,lim(cf)}$	(29)
Limite de compressão (MPa)	$\sigma_{c,lim(cf)}$	(30)
<i>Estado Limite de Descompressão (ELS-D)</i>		
Limite de tração (MPa)	$\sigma_{t,lim(cqp)}$	(39)
Limite de compressão (MPa)	$\sigma_{c,lim(cqp)}$	(38)

<i>Ato da protensão</i>		
Limite de tração (MPa)	$\sigma_{t,lim(ato)}$	(47)
Limite de compressão (MPa)	$\sigma_{c,lim(ato)}$	(46)
<i>Estado-Limite de deformações excessivas (ELS-DEF)</i>		
Limite da flecha diferida para cada vão	$f_{dif(1)}, \dots, f_{dif(nv)}$	$L_1/250, \dots, L_{nv}/250$

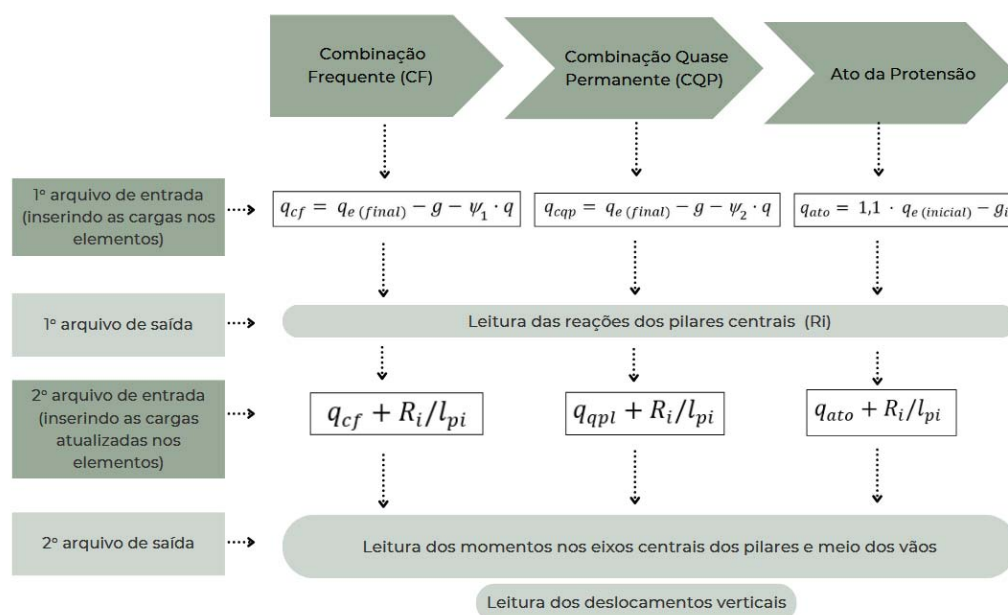
Fonte: Autoria própria.

5.3.5 Cálculo dos momentos e tensões para cada combinação de carga

Para obtenção dos momentos necessários (arquivo de saída) para o cálculo das tensões nas seções da viga é necessário escrever no arquivo de entrada do FAST as cargas atuantes em cada elemento. Essa ação é realizada para cada combinação de carga. No entanto, um pós-processamento é feito devido ao fato de que as reações dos pilares são substituídas em cargas distribuídas na região dos pilares.

Dessa forma, na primeira etapa incluem-se no arquivo de entrada as cargas da combinação desejada e obtém-se as reações nos pilares. Em seguida, um novo arquivo de entrada é feito com os valores das cargas da combinação juntamente com as cargas distribuídas provenientes das reações dos apoios. Tem-se como saída os valores dos momentos nos pontos desejados. Esse procedimento é realizado para cada indivíduo e é ilustrado em um esquema a seguir.

Figura 46 – Esquema de entrada e saída para as combinações de carga no FAST



Fonte: Autoria própria.

Para o cálculo das tensões em cada seção selecionada, a partir dos momentos resultantes para as combinações de carga, utilizam-se as Equações (33) e (34) para a combinação frequente, (36) e (37) para a quase permanente e, por fim, (49) e (50) para o ato da protensão.

Para obtenção dos momentos atuantes totais no Estado Limite Último devem-se considerar os momentos provenientes das cargas permanentes e acidentais, além dos momentos hiperestáticos de protensão.

Assim, inicialmente, incluem-se no arquivo de entrada do FAST as cargas permanentes e acidentais majoradas, obtendo-se os momentos provenientes dessas duas cargas somadas. Em seguida, a combinação desses momentos com os momentos hiperestáticos é feita conforme a Equação (57).

5.3.6 Cálculo da armadura passiva

O valor da quantidade de aço de armadura passiva deve ser obtido calculando-se algumas equações, as quais são explicitadas a seguir em ordem.

Tabela 11 – Equações necessárias para o cálculo do aço passivo

Descrição	Símbolo	Equação
Altura útil da armadura ativa para cada excentricidade (m)	$d_{p(1)}, \dots, d_{p(ne)}$	—
Parâmetro λ do diagrama idealizado do concreto	λ	(44)
Parâmetro α_c do diagrama idealizado do concreto	α_c	(45)
Parâmetro η_c do diagrama idealizado do concreto	η_c	(8)
Momento Resistente Limite para cada excentricidade (kN.m)	$M_{Rd,lim(1)}, \dots, M_{Rd,lim(ne)}$	(59)
Momento Resistente M_{Rd2} para cada excentricidade (kN.m)	$M_{Rd2(1)}, \dots, M_{Rd2(ne)}$	(61)
Linha neutra para cada excentricidade (m)*	$x_1, \dots, x_{ne}$	$0,45 \cdot d_p$ ou $0,35 \cdot d_p$
Vão/Altura útil para cada vão	—	$L_1/d_{p1}, \dots, L_{nv}/d_{p(nv)}$
Taxa geométrica da armadura ativa para cada excentricidade	$\rho_{p(1)}, \dots, \rho_{p(ne)}$	(43)
Acréscimo de tensão para cada excentricidade (MPa)	$\Delta\sigma_{p(1)}, \dots, \Delta\sigma_{p(ne)}$	(42)
Força de protensão (kN)	P_d	(51)
Razão entre dos módulos de elasticidade do aço de protensão (E_p) e do concreto (E_c)	α_p	(54)

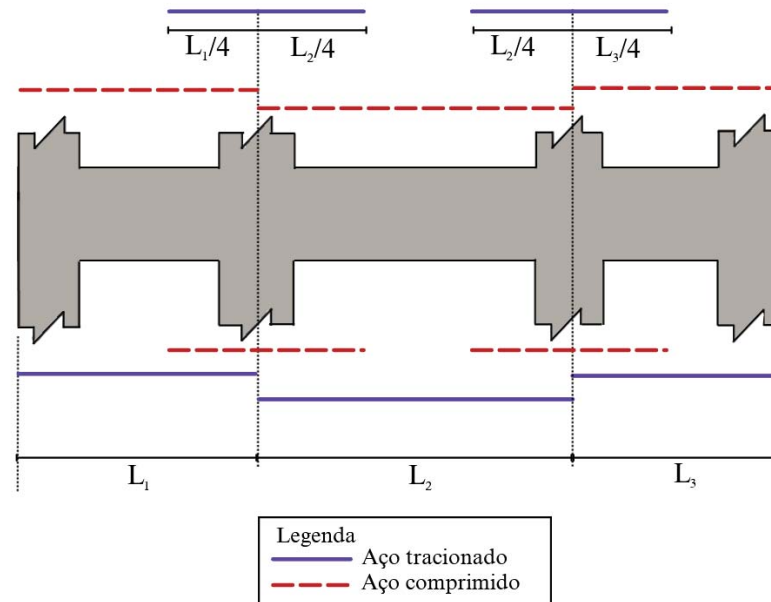
Tensão no concreto produzida pela protensão para cada excentricidade (MPa)	$\sigma_{cp(1)}, \dots, \sigma_{cp(ne)}$	(52)
Força externa de neutralização para cada excentricidade (kN)	$P_{n(1)}, \dots, P_{n(ne)}$	(53)
Tensão efetiva na armadura ativa para cada excentricidade (MPa)	$\sigma_n(1), \dots, \sigma_n(ne)$	(55)
Tensão total na armadura ativa para cada excentricidade (MPa)	$\sigma_{pd(1)}, \dots, \sigma_{pd(ne)}$	(56)
Armadura de protensão necessária para cada excentricidade	$A_{pn(1)}, \dots, A_{pn(ne)}$	(64)
Armadura passiva de tração para cada excentricidade (cm ²)	$A_s(1), \dots, A_s(ne)$	(65)
Armadura passiva de compressão para cada excentricidade (cm ²)	$A'_s(1), \dots, A'_s(ne)$	(67)

* $0,45 \cdot d_p$ (para $f_{ck} \leq 50$ MPa) e $0,35 \cdot d_p$ (para $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90$ MPa).

Fonte: Autoria própria.

O comprimento das armaduras passivas foi estimado, adotando-se o comprimento do vão nos momentos positivos e 1/4 de cada vão adjacente para as regiões de momento negativo, como exemplificado na Figura 47.

Figura 47 – Comprimentos das armaduras passivas de tração e compressão



Fonte: Autoria própria.

O aço comprimido é adicionado apenas se necessário. O comprimento total de aço passivo a ser utilizado é feito somando-se o comprimento de todos os aços tracionados e comprimidos necessários.

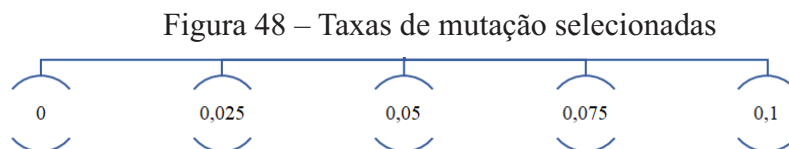
6 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Tem-se a seguir o estudo do desempenho dos cruzamentos avaliados através da aplicação a *Benchmarks* e vigas contínuas em concreto protendido. Inicialmente, é realizado um procedimento de calibração dos parâmetros dos algoritmos para os problemas analisados, com o objetivo de garantir uma comparação justa entre estes, pois, em geral, os parâmetros dos algoritmos afetam seu desempenho na solução de um problema de otimização específico. Além disto, busca-se definir parâmetros de referência para as variantes propostas, tanto para *Benchmarks* quanto para o problema de otimização de vigas protendidas. Também é estudado o efeito da variação do custo do f_{ck} no concreto, para um problema de viga com 3 e 5 vãos, e comparada a solução otimizada com uma obtida via pré-dimensionamento através de um *software* de projeto.

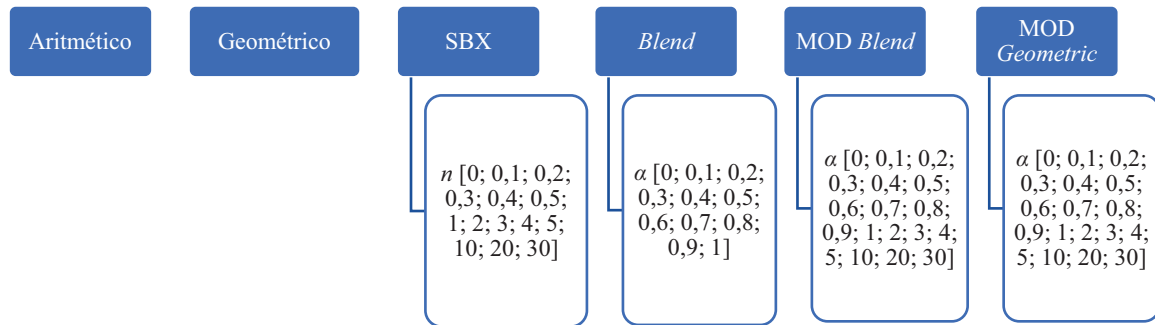
6.1 Estudo dos cruzamentos genéticos utilizados aplicados a *Benchmarks*

O desempenho de algoritmos de otimização é usualmente verificado utilizando *Benchmarks*, com problemas de variáveis restritas ou irrestritas, contínuas ou discretas, e problemas unimodais ou multimodais.

Neste estudo, as análises foram realizadas variando-se a taxa de mutação (Figura 48), o tipo de cruzamento e os parâmetros de cruzamento quando necessários (Figura 49), isto posto, várias execuções foram efetuadas dos respectivos algoritmos de otimização no BIOS. Somando-se todas as análises dos cruzamentos utilizados (Tabela 12), tem-se um total de 315 execuções para cada *Benchmark*. Em cada execução, o mesmo algoritmo é processado 20 vezes, para permitir avaliação de respostas estatísticas, com taxa de sucesso e média dos melhores indivíduos. Logo são processadas 6300 otimizações por problema analisado.



Fonte: Autoria própria.

Figura 49 – Cruzamentos utilizados para *Benchmarks* e seus parâmetros

Fonte: Autoria própria.

Tabela 12 – Execuções para cada cruzamento por problema avaliado

Cruzamento	Quantidade de parâmetros de cruzamento	Quantidade de taxas de mutação	Total de execuções por cruzamento
Aritmético	-	5	5
Geométrico	-		5
SBX	14		70
<i>Blend</i>	11		55
<i>MOD Blend</i>	18		90
<i>MOD Geometric</i>	18		90

Fonte: Autoria própria.

Para essas execuções foi utilizado um computador Intel(R) Core(TM) i5-4440 com 4 núcleos de 3,10 GHz e 4 gigabytes de RAM em sistema Windows 10 Home.

Os *Benchmarks* selecionados foram três otimizações de funções matemáticas, o *Branin* irrestrito, o *Branin* restrito e *Rastrigin*. Um problema de otimização estrutural de uma viga com seção variável também foi utilizado para verificação do algoritmo.

6.1.1 *Branin*

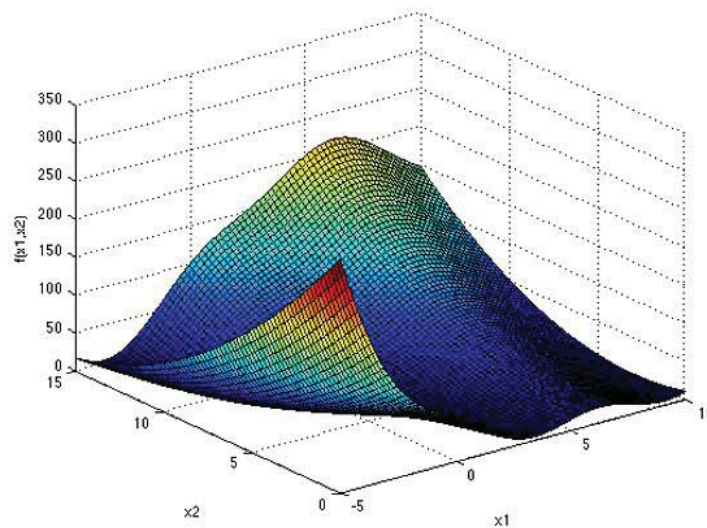
Segundo Surjanovic e Bingham (2013), a função *Branin*, ou *Branin-Hoo*, tem três mínimos globais e é irrestrita, sendo definida como:

$$f(x) = a \cdot (x_2 - b \cdot x_1^2 + c \cdot x_1 - r)^2 + s \cdot (1 - t) \cdot \cos(x_1) + 8 \quad (110)$$

onde os parâmetros a , b , c , r , s e t que foram utilizados na implementação do problema são $a=1$, $b=5,1/(4\pi^2)$, $c=5/\pi$, $r=6$, $s=10$ e $t=1/(8\pi)$. A superfície formada pela função de *Branin* é apresentada na Figura 50. O domínio da função foi avaliado no intervalo de $x_1 \in [-5, 10]$ e $x_2 \in [0, 15]$. O mínimo global da função é 0,397887 em $x = (-\pi; 12,275)$, $(\pi; 2,275)$ e $(9,2478;$

2,475).

Figura 50 – Função *Branin*



Fonte: Surjanovic e Bingham, 2013.

Os parâmetros do algoritmo genético foram mantidos constantes para todas as análises realizadas da função *Branin* e se encontram na Tabela 13.

Tabela 13 – Parâmetros do AG utilizados para a função *Branin*

Número de otimizações	20
Número máximo de gerações	80
Tamanho da população	80
Taxa de cruzamento	0,9
Método de seleção	“Roleta”
Amostragem para pop. inicial	“Hipercubo Latino”
Método de penalidade	“Deb 2000”

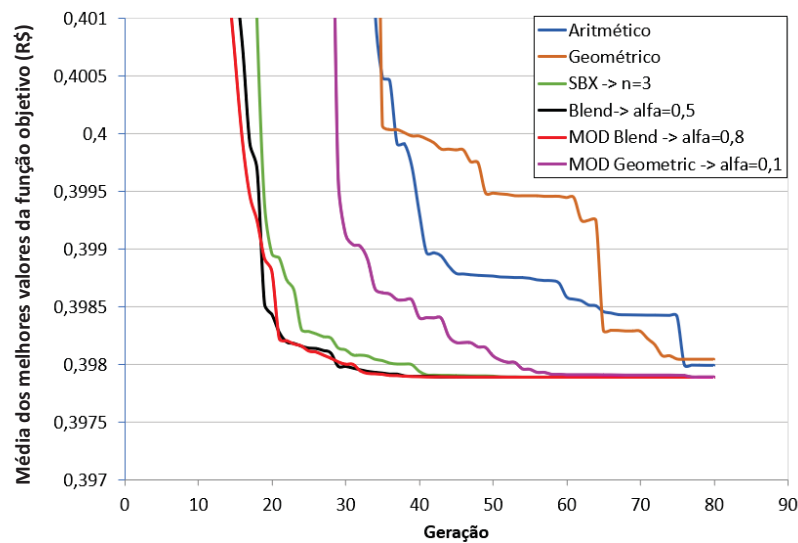
Fonte: Autoria própria.

Os melhores resultados obtidos para cada cruzamento considerando-se a taxa de mutação e os parâmetros dos cruzamentos são apresentados na Tabela 14. A média dos melhores indivíduos a cada geração, considerando os melhores parâmetros de cada alternativa, são apresentados no Gráfico 5.

Tabela 14 – Melhores resultados por cruzamento para a função *Branin* irrestrita

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=3	Blend - α=0,5	MOD Blend - α=0,8	MOD Geometric - α=0,1
Taxa de mutação	0,050	0,100	0,025	0,000	0,025	0,050
Taxa de sucesso (%)	70	90	100	100	100	100
Média dos melhores indivíduos	0,39799	0,39805	0,39789	0,39789	0,39789	0,39789
Desvio padrão dos melhores indivíduos	1,9453E-04	4,6635E-04	2,5972E-07	2,3800E-07	2,0961E-07	1,2899E-05
Tempo (s)	0,998	0,970	0,898	0,850	0,918	1,083
Variáveis	-3,142 12,276	3,142 2,275	9,425 2,475	9,425 2,475	9,425 2,475	9,425 2,475
Valor da função objetivo	0,397888	0,397888	0,397888	0,397888	0,397888	0,397888

Fonte: Autoria própria.

Gráfico 5 – Melhores resultados por cruzamento para a função *Branin* irrestrita

Fonte: Autoria própria.

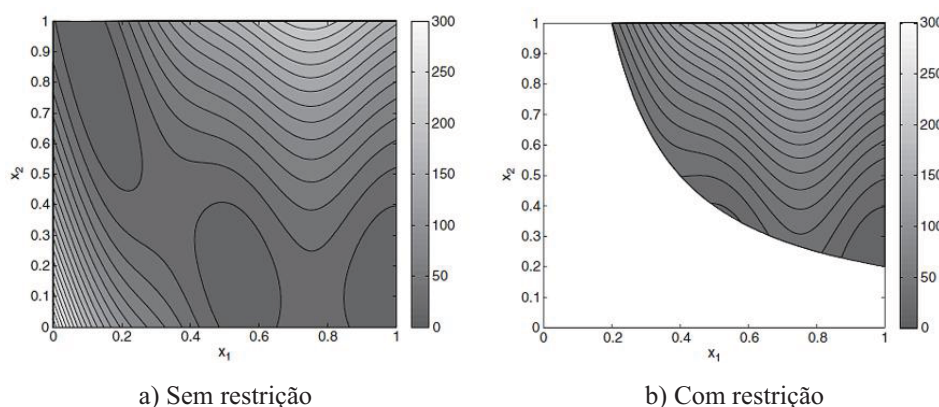
Pode-se observar que, a partir dos resultados para a função *Branin* irrestrita, o menor desvio padrão obtido foi para o cruzamento *MOD Blend*. Além disso, apenas os cruzamentos *Aritmético* e *Geométrico* não conseguiram atingir uma taxa de sucesso de 100%. Já com relação à função objetivo, todos os cruzamentos conseguiram alcançar o valor esperado em tempo de execução semelhante, visto que o problema é considerado simples. Também é interessante notar que, as variáveis encontradas podem ser distintas entre si a depender do cruzamento utilizado. O resultado mostra que os cruzamentos que atingem menores valores para a função objetivo são o *Blend* ($\alpha=0,5$) e *MOD Blend* ($\alpha=0,8$). Além disto, o as alternativas *Blend*, *MOD Blend* e *SBX* apresentaram as melhores velocidades de convergência.

Também é considerada uma versão modificada da função *Branin*:

$$f(x) = \left(x_2 - \frac{5,1}{4\pi^2} \cdot x_2 + \frac{5}{\pi} \cdot x_1 - 6\right)^2 + 10 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{8\pi}\right) \cdot \cos(x_1) + 1\right] + 5 \cdot x_1 \quad (111)$$

onde o domínio da função é avaliado no intervalo de $x_1 \in [-5, 10]$ e $x_2 \in [0, 15]$. O termo final é uma modificação da função *Branin* tradicional e significa que há dois ótimos locais e um ótimo global, em vez de três ótimos globais de igual valor. Essa modificação torna a função mais representativa de funções de engenharia. A Figura 51a mostra os contornos da função *Branin*. O ótimo global está em direção ao canto superior esquerdo do gráfico (FORRESTER, SÓBESTER e KEANE, 2008).

Figura 51 – Função *Branin* modificada



Fonte: Forrester, Sóbestter e Keane – adaptado (2008, p. 197).

Aplicando-se a restrição:

$$x_1 \cdot x_2 \geq 0,2 \quad (x_1, x_2 \in [0, 1]) \quad (112)$$

apenas a área da função *Branin* mostrada na Figura 51b é considerada. O ótimo é 0,397887 e está em direção ao canto inferior direito.

Os parâmetros do algoritmo genético utilizados para a função *Branin* restrita foram as mesmas do problema *Branin* irrestrito com tolerância da restrição de 10^{-10} . E os resultados numéricos (Tabela 15) e gráficos (Gráfico 6) se encontram a seguir.

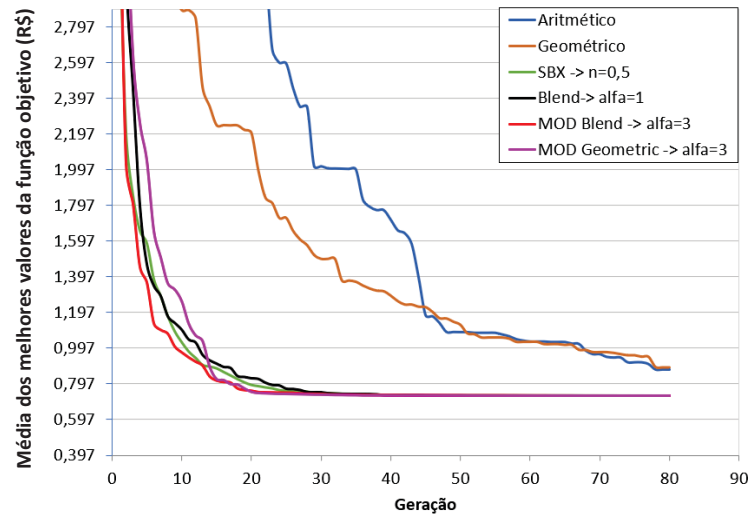
Tabela 15 – Melhores resultados por cruzamento para a função *Branin* restrita

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=0,5	Blend - α=1	MOD Blend - α=3	MOD Geometric - α=3
Taxa de mutação	0,100	0,100	0,000	0,025	0,025	0,025
Taxa de sucesso (%)	5	5	80	80	65	95
Média dos melhores indivíduos	0,87733	0,88846	0,73330	0,73321	0,73338	0,73311
Desvio padrão dos melhores indivíduos	1,3313E-01	1,2364E-01	4,4155E-04	2,3987E-04	4,6432E-04	4,9184E-05
Tempo (s)	1,090	1,122	1,013	1,108	1,091	1,122
Variáveis	9,544	9,573	9,540	9,540	9,540	9,540
	3,097	3,095	3,095	3,095	3,095	3,095
Restrição	-9,5040E-04	-2,2986E-03	-2,8889E-05	-2,8889E-05	-2,8889E-05	-2,8889E-05
Valor da função objetivo	0,736030	0,745368	0,733094	0,733094	0,733094	0,733094

Fonte: Autoria própria.

A maior taxa de sucesso obtida foi do cruzamento MOD *Geometric* ($\alpha = 3$), o qual também possuiu menor desvio padrão dentre todos os métodos. Os valores para as variáveis e função objetivo para SBX, *Blend*, MOD *Blend* e MOD *Geometric* foram os mesmos, apesar de nenhum deles atingir o valor esperado para a função objetivo.

Gráfico 6 – Melhores resultados por cruzamento para a função *Branin* restrita



Fonte: Autoria própria.

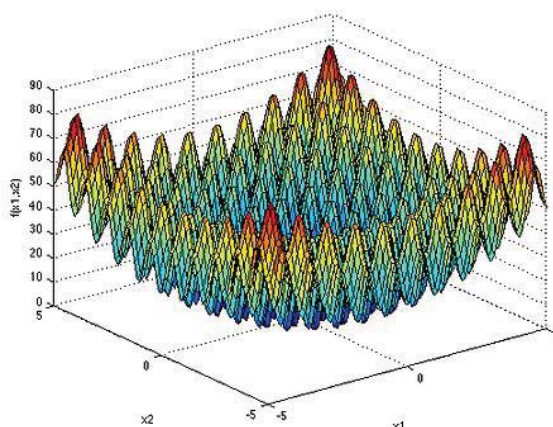
A partir do Gráfico 6 é possível aferir que os cruzamentos MOD *Blend* e MOD *Geometric* foram os primeiros a atingir menores valores para a função objetivo, apesar de estarem bem próximos dos cruzamentos SBX e *Blend*.

6.1.2 *Rastrigin*

Conforme Surjanovic e Bingham (2013), a função *Rastrigin* é dada por:

$$f(x) = 10 \cdot d + \sum_{i=1}^d [x_i^2 - 10 \cdot \cos(2\pi x_i)] \quad (113)$$

possuindo vários mínimos locais, sendo irrestrita e multimodal, com as localizações dos mínimos regularmente distribuídas. O domínio da função é dado no intervalo de $x_i \in [-5,12; 5,12]$, para todo $i = 1, \dots, d$. O mínimo global da função é de 0 quando $x = (0, \dots, 0)$. O gráfico dessa função é apresentado a seguir em sua forma bidimensional.

Figura 52 – Função *Rastrigin*

Fonte: Surjanovic e Bingham, 2013.

Utilizou-se $d = 5$ e os parâmetros do algoritmo genético para a função *Rastrigin* se encontram na Tabela 16 a seguir.

Tabela 16 – Parâmetros do AG utilizados para a função *Rastrigin*

Número de otimizações	20
Número máximo de gerações	100
Tamanho da população	150
Taxa de cruzamento	0,9
Método de seleção	“Ranking”
Amostragem para pop. inicial	“Hipercubo Latino”
Método de penalidade	“Deb 2000”

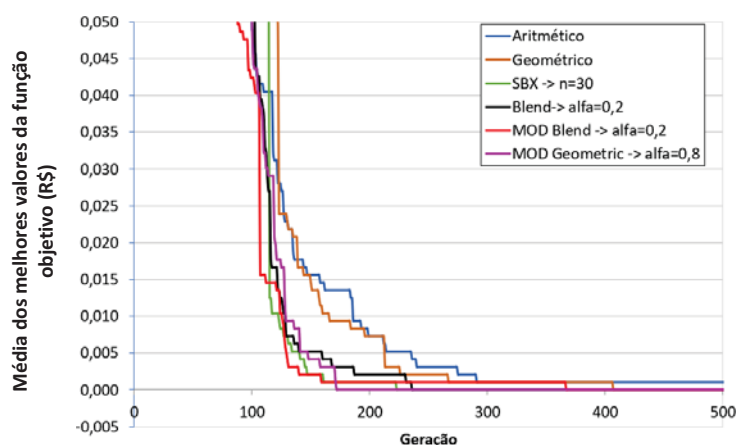
Fonte: Autoria própria.

Tabela 17 – Melhores resultados por cruzamento para a função *Rastrigin*

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=30	Blend - $\alpha=0,2$	MOD Blend - $\alpha=0,2$	MOD Geometric - $\alpha=0,8$
Taxa de mutação	0,100	0,075	0,100	0,100	0,100	0,100
Taxa de sucesso (%)	100	100	100	100	100	100
Média dos melhores indivíduos	0	0	0	0	0	0
Desvio padrão dos melhores indivíduos	0	0	0	0	0	0
Média de gerações até a convergência	128,40	126,70	116,50	117,30	121,65	119,70
Tempo (s)	9,356	9,478	9,106	8,454	8,683	9,346
Variáveis	-3,57735E-14	-3,57735E-14	-3,57735E-14	-3,57735E-14	-3,57735E-14	-3,57735E-14
Valor da função objetivo	0	0	0	0	0	0

Fonte: Autoria própria.

Os resultados obtidos para todos os métodos são apresentados na Tabela 17, onde observa-se que são bem semelhantes, em que todos conseguiram atingir a função objetivo com taxa de sucesso de 100%, desvio padrão zero e em tempo de execução semelhante.

Gráfico 7 – Melhores resultados por cruzamento para a função *Rastrigin*

Fonte: Autoria própria.

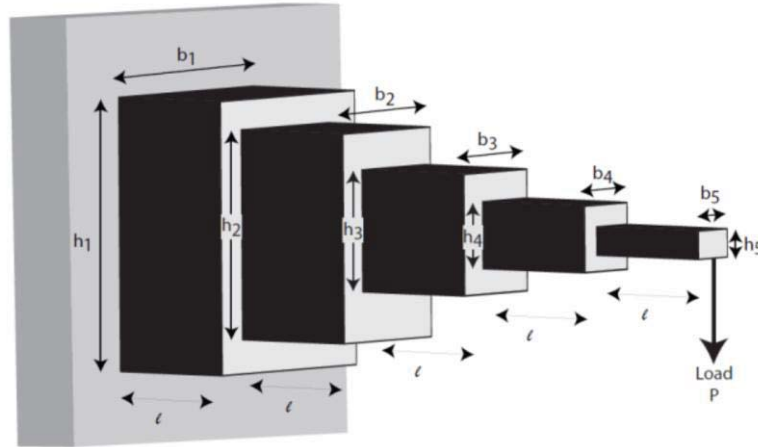
O Gráfico 7 apresenta a média dos melhores indivíduos por geração, para as melhores alternativas de cada cruzamento. A partir dos resultados para a função *Rastrigin* é possível aferir que o primeiro cruzamento a atingir a função objetivo é o cruzamento MOD *Geometric*, seguido do SBX e *Blend*.

Os resultados obtidos para as funções matemáticas estudadas, indicam que os cruzamentos MOD *Blend* e MOD *Geometric* se destacam por obterem valores interessantes como, por exemplo, menor desvio padrão e menores valores para a função objetivo. A calibração possibilitou a obtenção das melhores respostas com maior acurácia e maior velocidade de convergência. Com relação aos parâmetros de cruzamento e taxa de mutação, tem-se que variam conforme o problema, o que indica a necessidade de calibração para cada caso.

6.1.3 Viga em balanço com seção variável

A viga em balanço, mostrada na Figura 53, deve ser projetada para o volume mínimo de material. As variáveis de projeto são as larguras b_n e as alturas h_n em cada um dos n segmentos, onde $n = 5$. Deseja-se projetar a viga sujeita a limites de tensão (calculado na extremidade esquerda de cada segmento), deflexão sob a carga (na extremidade livre) e o requisito geométrico de que a altura de qualquer segmento não exceda vinte vezes a largura (VANDERPLAATS, 1999).

Figura 53 – Viga em balanço com seção variável



Fonte: MathWorks, 2024.

Os dados de entrada são a carga P (50.000 N), o módulo de elasticidade E ($2 \cdot 10^7$ N/cm²), o comprimento total L ($5 \cdot \ell = 500$ cm), a tensão máxima $\bar{\sigma}$ (14.000 N/cm²) e o deslocamento máximo $\bar{y} = 2,5$ cm.

A deflexão y_i na extremidade esquerda do segmento i é calculada através das fórmulas a seguir.

$$\begin{cases} y_0 = y'_0 = 0 \\ y'_i = \frac{Pl_i}{EI_i} \left[L + \frac{l_i}{2} - \sum_{j=1}^i l_j \right] + y'_{i-1} \\ y_i = \frac{Pl_i^2}{2EI_i} \left[L - \sum_{j=1}^i l_j + \frac{2l_i}{3} \right] + y'_{i-1} l_i + y_{i-1} \end{cases} \quad (114)$$

onde a deflexão y é definida como positiva para baixo, y' é a inclinação, e l_i é o comprimento do segmento i . O módulo de elasticidade E é o mesmo para todos os segmentos, e o momento de inércia para o segmento i é:

$$I_i = \frac{b_i \cdot h_i^3}{12} \quad (115)$$

O momento fletor do lado esquerdo do segmento i é:

$$M_i = P[L + l_i - \sum_{j=1}^i l_j] \quad (116)$$

A tensão correspondente ao momento fletor máximo é:

$$\sigma_i = \frac{M_i h_i}{2l_i} \quad (117)$$

A função objetivo correspondente ao volume total da viga é dada por:

$$V = \sum_{i=1}^n b_i h_i l_i \quad (118)$$

sujeita às restrições de projeto:

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} - 1 \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (119)$$

$$h_i - 20b_i \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (120)$$

$$\frac{y_n}{\bar{y}} - 1 \leq 0 \quad (n = 5) \quad (121)$$

$$b_i \geq 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (122)$$

$$h_i \geq 5 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (123)$$

Vanderplaats (1999) resolveu o problema da viga em balanço com seção variável com alguns métodos, os quais são citados a seguir com suas respectivas funções objetivo obtidas. Ele utilizou, em sua pesquisa genética, 6.657 gerações e realizou 1.000.000 otimizações para o problema em questão.

Tabela 18 – Resultados obtidos por Vanderplaats para o problema da viga em balanço

Método	Valor da função objetivo obtida
Algoritmo genético	65.850
Programação linear sequencial	65.775
Método das hiperesferas inscritas	65.638
Método de direções viáveis	65.559
Método de gradiente reduzido generalizado	65.399
Método de direções viáveis modificado	65.387
Programação quadrática sequencial	65.420

Fonte: Vanderplaats – adaptado (1999, p. 246).

Os parâmetros do algoritmo genético utilizados no referente trabalho para esse problema se encontram na Tabela 19. Os resultados obtidos para esse problema se encontram a seguir na Tabela 20 e Gráfico 8.

Tabela 19 – Parâmetros do AG utilizados para a viga em balanço

Número de otimizações	20
Número máximo de gerações	6000
Tamanho da população	300
Taxa de cruzamento	0,9
Método de seleção	“Roleta”
Amostragem para pop. inicial	“Hipercubo Latino”
Método de penalidade	“Estática”
Tolerância para restrições	10^{-10}

Fonte: Autoria própria.

Tabela 20 – Melhores resultados por cruzamento para a viga em balanço

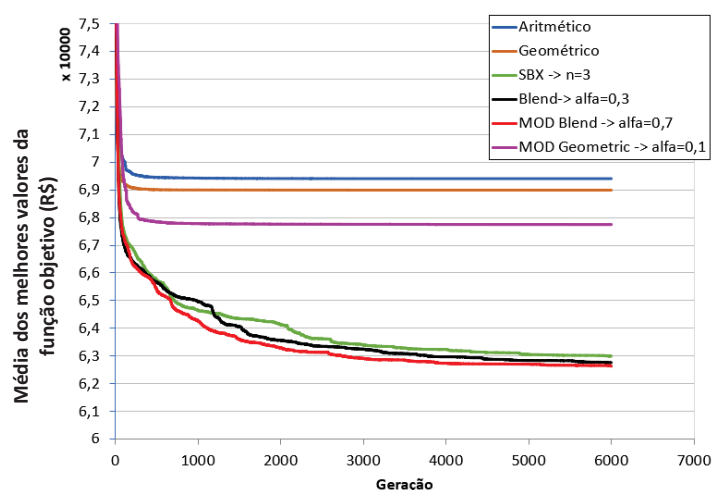
Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - $n=3$	Blend - $\alpha=0,3$	MOD Blend - $\alpha=0,7$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
Taxa de mutação	0,100	0,050	0,050	0,025	0,025	0,025
Taxa de sucesso (%)	5	5	5	5	10	5
Média dos melhores indivíduos	69406,10	68990,80	62995,50	62760,90	62636,60	69996,70
Desvio padrão dos melhores indivíduos	1668,970	1827,420	357,687	378,689	465,576	1548,220
Tempo (s)	141,345	79,446	140,202	122,401	114,996	98,426
Valor da função objetivo (m^3)	66997,9	66008,5	62007,6	62011,2	61965,6	64634,2
Diferença com relação ao menor valor de Vanderplaats (%)	2,46	0,95	-5,17	-5,16	-5,23	-1,15

Fonte: Autoria própria.

Esse problema se torna mais complexo que os anteriores, pois possui 10 variáveis e 11 restrições, o que torna a busca pela solução ótima mais dispendiosa. Sendo assim, a melhor taxa de sucesso obtida é de 10% para MOD Blend, a qual ainda é considerada baixa. O cruzamento SBX possui menor desvio padrão, no entanto, o tempo de execução necessário foi superior ao Blend, MOD Blend e MOD Geometric.

O cruzamento MOD Blend obteve menor valor para a função objetivo, o que significa uma economia de 5,23% com relação ao melhor valor obtido por Vanderplaats. Também é possível observar a partir do Gráfico 8 a seguir que os cruzamentos SBX, Blend e MOD Blend são os que atingem mais rapidamente menores valores para a função objetivo.

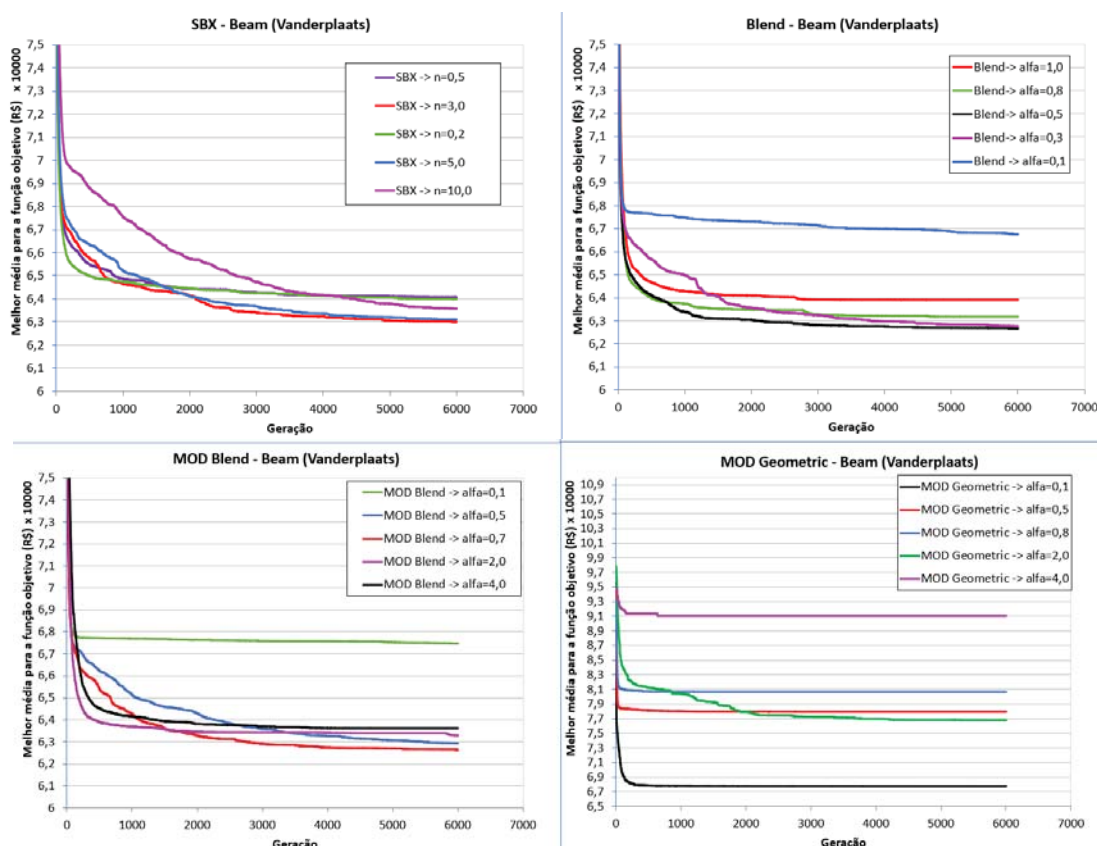
Gráfico 8 – Melhores resultados por cruzamento para a viga em balanço



Fonte: Autoria própria.

A seguir tem-se um estudo da variação dos parâmetros para cada cruzamento aplicados à viga de Vanderplaats. Nota-se, a partir do Gráfico 9, que os melhores valores para os parâmetros dos cruzamentos são: n do SBX entre 3 e 5; α do Blend entre 0,3 e 0,5; α do MOD Blend entre 0,5 e 0,7; α do MOD Geometric de 0,1.

Gráfico 9 – Estudo dos parâmetros de cruzamento para a viga em balanço



Fonte: Autoria própria.

Os resultados para as variáveis para cada cruzamento são explicitados abaixo.

Tabela 21 – Resultados para as variáveis para a viga em balanço

Cruzamento	Variáveis									
	h1	h2	h3	h4	h5	b1	b2	b3	b4	b5
Aritmético	53,70	52,62	47,47	43,37	30,47	3,71	3,09	2,85	2,28	2,31
Geométrico	57,20	51,60	47,66	42,84	30,23	3,28	3,22	2,83	2,34	2,34
SBX - $n=3$	59,84	55,50	50,35	44,01	34,82	2,99	2,78	2,54	2,21	1,77
Blend - $\alpha=0,3$	59,81	55,48	50,31	44,07	35,01	3,00	2,79	2,54	2,21	1,75
MOD Blend - $\alpha=0,7$	59,80	55,54	50,44	44,07	34,86	3,00	2,78	2,53	2,21	1,76
MOD Geometric - $\alpha=0,1$	57,48	55,36	45,75	38,90	30,00	3,24	2,79	3,07	2,82	2,38
Melhor método Vanderplaats	62,49	57,70	51,72	44,09	35,00	3,12	2,88	2,59	2,20	1,75

Fonte: Autoria própria.

Já para as restrições, tem-se:

Tabela 22 – Resultados para as restrições para a viga em balanço

Restrição	Aritmético	Geométrico	SBX - $n=3$	Blend - $\alpha=0,3$	MOD Blend - $\alpha=0,7$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$	Melhor método Vanderplaats
1	8,83E-04	3,69E-06	1,41E-06	-7,10E-05	-4,54E-07	-1,03E-04	-1,22E-01
2	2,68E-03	1,01E-03	-1,67E-05	-4,57E-04	-9,50E-08	1,86E-03	-1,07E-01
3	-1,40E-05	-1,29E-07	-9,36E-06	-1,65E-04	2,71E-07	3,50E-05	-7,10E-02
4	-5,00E-06	-1,14E-05	-1,78E-05	-5,58E-04	-4,46E-07	4,35E-03	0,00E+00
5	-8,20E-05	-1,30E-05	-7,24E-06	-1,39E-03	-3,70E-05	-8,50E-05	0,00E+00
6	-2,77E-01	-1,27E-01	-6,47E-05	-1,84E-03	-2,11E-03	-1,14E-01	0,00E+00
7	-1,48E-01	-1,98E-01	-2,60E-03	-4,17E-03	-6,34E-04	-8,65E-03	0,00E+00
8	-1,68E-01	-1,58E-01	-6,99E-03	-9,50E-03	-1,82E-03	-2,55E-01	0,00E+00
9	-4,81E-02	-8,27E-02	-5,28E-03	-2,10E-03	-1,13E-03	-3,10E-01	0,00E+00
10	-3,40E-01	-3,55E-01	-1,53E-02	-1,31E-04	-1,14E-02	-3,70E-01	-3,00E-02
11	-1,03E+00	-1,03E+00	-1,03E+00	-1,03E+00	-1,03E+00	-1,03E+00	1,00E-03

Fonte: Autoria própria.

Os resultados obtidos para as variáveis e restrições foram, ou menores que as obtidas por Vanderplaats, ou bem próximas, o que indica que o problema foi implementado corretamente.

Com intuito de tentar melhorar as respostas obtidas para o cruzamento MOD *Geometric*, investigou-se a influência:

a) Do número de gerações, utilizando-se um número máximo de gerações de 20.000;

b) De um indivíduo pré-determinado, selecionando-se o indivíduo da melhor resposta encontrada por Vanderplaats para a função objetivo (65.387) e inserindo-o no início do processo de otimização, o qual se encontra na Tabela 21.

Os resultados para esses estudos encontram-se a seguir.

Tabela 23 – Resultados para o estudo do número de gerações e indivíduo pré-determinado para a viga de Vanderplaats

Cruzamento	MOD <i>Geometric</i> - $\alpha=0,1$		
Indivíduo inicial	Aleatório	Aleatório	Pré-determinado
Número de gerações	6000	20000	6000
Taxa de mutação	0,025	0,025	0,025
Taxa de sucesso (%)	5	5	5
Média dos melhores indivíduos	69996,70	62091,50	62461,60
Desvio padrão dos melhores indivíduos	1548,22	71,03	171,12
Tempo (s)	98,43	868,00	162,00
Valor da função objetivo (m ³)	64634,2	61943,6	62082,0

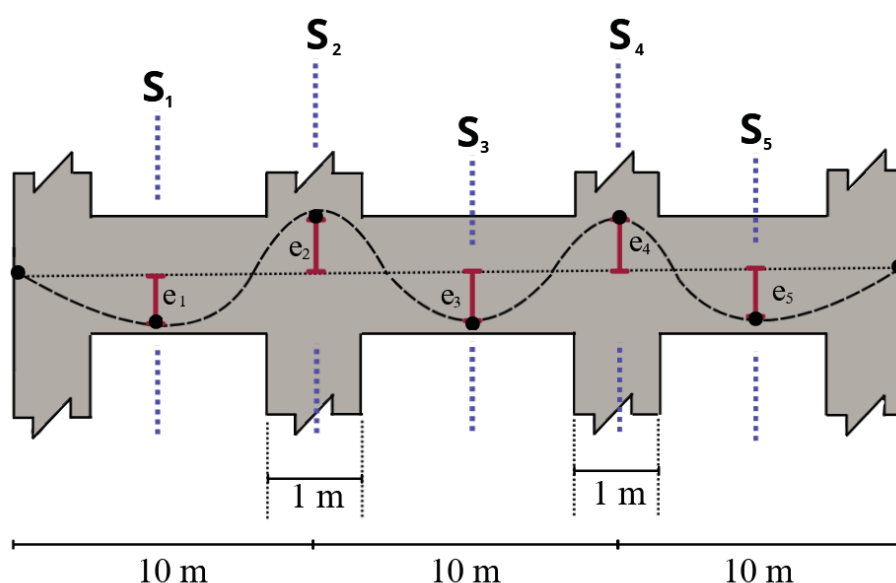
Fonte: Autoria própria.

A partir dos resultados para a viga em balanço, tem-se que o menor desvio padrão e menor valor para a função objetivo foram obtidos para a análise com 20.000 gerações e indivíduo inicial gerado aleatoriamente. Portanto, afere-se que ambas as estratégias possibilitaram otimizar de forma mais satisfatória, porém demonstrando um desempenho inferior no respectivo problema, em comparação aos demais operadores. Ressalta-se que, as alternativas MOD *Blend*, *Blend* e SBX se destacaram novamente com relação aos demais cruzamentos.

6.2 Calibração do algoritmo genético utilizado para otimização de vigas protendidas contínuas

Tendo em vista que os parâmetros do AG são diretamente dependentes do problema analisado, alguns estudos foram realizados com intuito de calibrar o algoritmo genético aplicado ao problema de vigas protendidas de múltiplos vãos apresentado anteriormente. Optou-se, então, por realizar esses estudos na configuração da viga protendida de três vãos ilustrada na Figura 54.

Figura 54 – Configuração da viga protendida utilizada para calibração



Fonte: Autoria própria.

Utilizaram-se os custos unitários das tabelas da SEINFRA. Os dados de entrada do problema de otimização são apresentados na Tabela 24. As cargas adotadas para a viga protendida foram calculadas do modelo de laje apresentado na Figura 55.

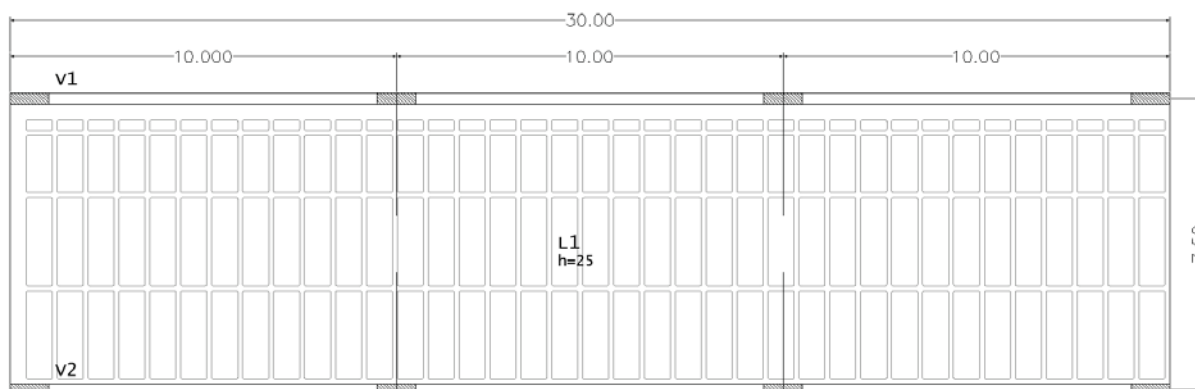
Tabela 24 – Dados do problema de calibração

Dados do elemento estrutural	- Viga protendida com 3 vãos de 10 m cada; - Pilares com 1 metro de largura cada; - $f_{ck}=40\text{MPa}$.
Intervalos para as variáveis	- Largura $b_w \in \{0,14; 0,15; 0,16; \dots; 1,00\}$ em metros; - Altura $h \in \{0,20; 0,21; 0,22; \dots; 0,60\}$ em metros; - Quantidade de cabos $n \in \{1; 2; 3; \dots; 30\}$; - Excentricidades $e \in \{0; 0,01; 0,02; \dots; e_{max}\}$ em metros.
Carregamentos	- Carga permanente g de 15, 5 kN/m; - Carga acidental q de 20 kN/m;

	- Ponderadores da carga acidental $\psi_1 = 0,4$ e $\psi_2 = 0,3$;
Cobrimentos	- 3 cm para armadura passiva; -3,5 cm para as cordoalhas, totalizando uma distância máxima do C.G. da cordoalha à borda inferior de 4 cm.

Fonte: Autoria própria.

Figura 55 – Modelo de laje utilizado para definição das cargas lineares na viga



Fonte: Autoria própria.

Para definição das cargas atuantes na laje considerou-se um local de ocupação residencial ou hospedagem. Sendo assim, para a carga acidental adotou-se um valor de 4 kN/m² acrescidos de 1 kN/m² para consideração de paredes divisórias sem posição definida no projeto, conforme a NBR 6120 (2019), totalizando 5 kN/m².

Já para a carga permanente, adotou-se 2,44 kN/m² para a laje nervurada unidirecional, de acordo com o catálogo de fôrmas da Impacto (2025), um revestimento de 0,5 kN/m². Além disso, considerou-se uma parede com 12 cm de espessura, pé-direito de 2,70 m (considerando uma altura aproximada para a viga superior) e peso específico de 14 kN/m³. Logo, para a carga linear em ambas as vigas, tem-se os valores descritos na Tabela 25:

Tabela 25 – Cargas lineares que atuam nas vigas

Carga linear (kN/m)	
Permanente proveniente da laje	11,0
Permanente proveniente da parede	4,5
Permanente Total	15,5
Acidental Total	18,75

Fonte: Autoria própria.

Salienta-se que a carga de peso próprio da viga é calculada e acrescentada à carga permanente total para cada indivíduo no processo de otimização. Além disso, optou-se por

utilizar uma carga accidental total de 20 kN/m, tendo em vista que uma carga accidental maior facilitará uma possível mudança do uso da edificação posteriormente.

6.2.1 *Variação dos parâmetros dos cruzamentos, número da população e gerações*

Após os dados de entrada serem inseridos, o passo a passo para cálculo da viga pretendida apresentado anteriormente é realizado e os resultados obtidos.

Inicialmente, dois estudos foram realizados para o problema. No primeiro estudo verificaram-se quais os melhores parâmetros dos cruzamentos implementados, variando-se também a taxa de mutação, mas fixando um número de indivíduos e gerações. No segundo, o tamanho da população e o número de gerações foi variado, com o intuito de investigar qual proporção entre tamanho da população ou número de gerações é ideal.

Os parâmetros de cruzamento e taxas de mutações utilizadas para o primeiro estudo foram os mesmos avaliados nos *Benchmarks* apresentados anteriormente, totalizando 315 execuções, com 20 otimizações por execução. Os parâmetros do AG utilizados para o primeiro estudo são apresentados a seguir.

Tabela 26 – Parâmetros do AG para a viga pretendida – Estudo 1

Número de otimizações	20
Número máximo de gerações	250
Tamanho da população	200
Taxa de cruzamento	0,9
Método de seleção	“ <i>Ranking</i> ”
Método de penalidade	“Deb 2000”
Amostragem para pop. inicial	“Hipercubo Latino”
Tolerância para restrições	10^{-10}

Fonte: Autoria própria.

Neste estudo, devido ao custo computacional elevado, foi utilizado uma estação de trabalho de maior capacidade computacional, com dois processadores Xeon® de 2.8 GHz velocidade e 32 GB de memória RAM, cada um com 10 núcleos, resultando em 20 núcleos no total.

Os resultados para os melhores parâmetros de cruzamento e taxas de mutações para esse primeiro estudo encontram-se na Tabela 27. Observa-se que, para os cruzamentos modificados, melhor taxa de mutação foi de 0,1, enquanto pros demais cruzamentos é variável.

Tabela 27 – Melhores resultados por cruzamento para o Estudo 1 de calibração

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=4	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
Taxa de mutação	0,050	0,050	0,025	0,050	0,100	0,100
Taxa de sucesso (%)	5	5	5	5	5	5
Média dos melhores indivíduos	14998,60	17501,70	14028,00	14110,10	14024,00	17111,90
Desvio padrão dos melhores indivíduos	168,961	750,207	192,144	208,339	274,840	712,917
Média de gerações até a convergência	231,300	229,350	173,800	179,150	204,450	231,450
Valor da função objetivo	14692,8	16136,1	13522,0	13570,7	13637,1	15828,1

Fonte: Autoria própria.

Um segundo estudo foi feito a partir dos melhores valores dos parâmetros de cruzamento e mutação de cada cruzamento obtidos no primeiro estudo. Dessa vez o tamanho da população e o número de gerações foram variados para cada cruzamento com objetivo de compreender a influência desses valores nas respostas da função objetivo e das variáveis.

Os parâmetros do AG utilizados para o segundo estudo são os mesmos do estudo 1, exceto os valores para o número máximo de gerações e tamanho da população, os quais são apresentados na Tabela 28.

Tabela 28 – Execuções para cada cruzamento variando-se a população e número de gerações

Cruzamento	Opções para tamanho da população	Opções para quantidade de gerações	Total de execuções por cruzamento
Aritmético; Geométrico SBX; Blend; MOD Blend MOD Geometric	240; 300; 340; 400; 500	240; 300; 340; 400; 500	25

Fonte: Autoria própria.

O total do número de otimizações executadas para o segundo estudo, somando-se todas as execuções por cruzamento, é 150.

Na Tabela 29, é apresentada a diferença entre a função objetivo média dos melhores indivíduos otimizados e a função objetivo do melhor indivíduo obtido anteriormente (13522). Nota-se que, para a maioria dos casos, quanto maior a população e o número de gerações menor essa diferença, ou seja, melhor a resposta, o que é esperado por estar sendo usado um número maior de avaliações. Porém, se observam resultados melhores quando utilizado 500 gerações em comparação a considerar 500 indivíduos, o que sugere que um número maior de gerações é mais benéfico do que aumentar o tamanho da população.

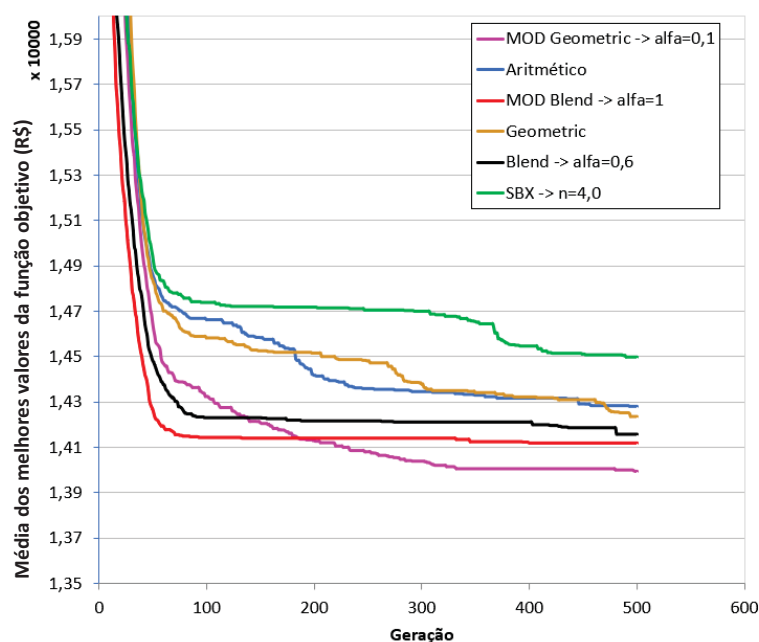
Tabela 29 – Resultados da diferença entre média dos melhores e melhor para o Estudo 2 de calibração

		Tamanho da população														
		Aritmético					Geométrico					MOD <i>Geometric</i>				
Geração		240	300	340	400	500	240	300	340	400	500	240	300	340	400	500
	240	1030	990	808	972	795	979	859	935	770	756	683	648	577	658	560
	300	1052	928	991	950	735	974	1014	821	735	826	593	672	505	546	674
	340	964	838	785	933	814	931	779	884	887	756	666	618	566	556	506
	400	998	958	855	787	804	904	967	867	757	728	592	493	437	426	497
	500	864	726	739	648	760	853	784	827	798	715	558	456	500	407	472
Geração	SBX					Blend					MOD <i>Blend</i>					
		240	300	340	400	500	240	300	340	400	500	240	300	340	400	500
	240	1625	1220	1344	1096	1023	801	743	784	706	681	668	601	643	579	587
	300	1398	1208	1125	1155	1163	769	701	729	738	659	751	588	571	552	541
	340	1589	1187	1155	1152	1123	884	814	673	726	688	607	564	606	563	588
	400	1266	815	1221	898	1243	798	768	720	622	656	523	542	646	600	576
	500	1052	1017	965	1070	974	712	789	629	725	635	515	600	584	619	598

Fonte: Autoria própria.

Um gráfico (Gráfico 10) também foi plotado a fim de comparação da convergência dos cruzamentos, selecionando-se uma população de 500 e número de gerações de 500.

Gráfico 10 – Melhores resultados por cruzamento para o Estudo 2 de calibração



Fonte: Autoria própria.

É possível aferir, a partir do Gráfico 10 que os cruzamentos modificados MOD *Blend* e MOD *Geometric* atingem menores para a função objetivo com o aumento do número de gerações, enquanto o SBX, que antes se apresentava uma alternativa interessante, obteve valores maiores.

Como forma de validação do problema em questão, foram selecionados os resultados para MOD *Blend* do Estudo 2 detalhando-se os valores obtidos para cada uma das etapas apresentadas no capítulo anterior. Essa validação encontra-se no Apêndice C.

6.3 Estudos a partir da viga de calibração

Como observou-se que, para a maioria dos cruzamentos, um número maior de gerações representava uma melhora nas respostas da função objetivo, um estudo com 1000 gerações foi realizado para viga de três vãos considerada. Os parâmetros adotados de cruzamento e mutação foram os encontrados para o Estudo 1, variando-se apenas a população (300) e o número de gerações (1000) devido à dificuldade do problema. Utilizou-se um número maior de gerações em detrimento ao tamanho da população porque se observou que o número de gerações tinha maior influência nos resultados.

Também são apresentados nessa seção estudos de sensibilidade da solução otimizada com relação a parâmetros do modelo de otimização, como o f_{ck} do concreto, onde foram considerados os valores de 40 MPa, 60MPa e 80 MPa. Os resultados de 5 vãos são tratados posteriormente na Seção 6.4. Também é realizada uma comparação com uma abordagem tradicional de dimensionamento.

6.3.1 Análise das vigas otimizadas pela metodologia proposta

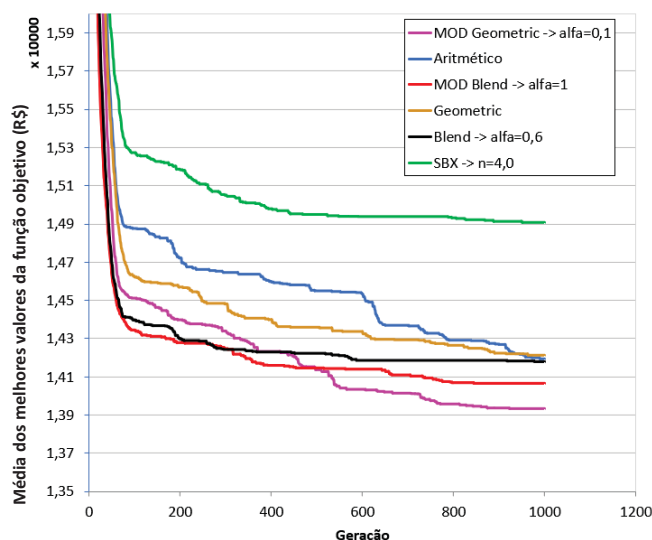
A seguir (Tabela 30) são apresentados os resultados da otimização da viga de 3 vãos. O melhor resultado obtido para a função objetivo continua sendo do cruzamento MOD *Blend*, e o cruzamento MOD *Geometric* atinge menor valor para o desvio padrão. O que também é ilustrado a partir do Gráfico 11 a seguir, tendo em vista que esses cruzamentos atingem menores valores ao longo das gerações. Vale ressaltar que as alternativas propostas neste trabalho obtiveram o melhor desempenho em termos de função objetiva média.

Tabela 30 – Resultados por cruzamento para o estudo com 1000 gerações

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=4	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
Taxa de mutação	0,050	0,050	0,025	0,050	0,100	0,100
Taxa de sucesso (%)	5	5	5	10	5	5
Média dos melhores indivíduos	14192,60	14215,40	14907,70	14182,00	14065,00	13933,20
Desvio padrão dos melhores indivíduos	342,40	298,03	683,43	194,08	247,99	186,52
Média de gerações até a convergência	609,45	564,75	410,25	224,45	282,20	481,55
Valor da função objetivo (R\$)	13853,8	13787,40	13937,70	13737,30	13570,70	13588,40

Fonte: Autoria própria.

Gráfico 11 – Resultados por cruzamento para o estudo com 1000 gerações



Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 31, tem-se os valores das variáveis e na Tabela 32 a composição do custo para os resultados encontrados para cada cruzamento. As excentricidades encontradas foram maiores para as regiões de momento negativo, indicando maior necessidade da contribuição da protensão. Com relação às regiões com momento positivo, tem-se que as excentricidades foram maiores para o primeiro e último vãos, visto que os momentos nesses vãos são maiores que o vão central.

Também se observa que a altura da seção para todos os cruzamentos atingiu seu valor máximo e a quantidade de cabos foi a mesma para todos os métodos. A partir da Tabela 32, tem-se que a composição dos custos se mantém na mesma ordem de grandeza entre os cruzamentos, sendo o custo do aço ativo 50% do custo total para a viga, o custo do concreto de 25% a 30% e do aço passivo de 19% a 22%.

Tabela 31 – Resultados para as variáveis por cruzamento para o estudo com 1000 gerações

Cruzamento	b_w (m)	h (m)	n	e_1 (m)	e_2 (m)	e_3 (m)	e_4 (m)	e_5 (m)
Aritmético	0,33	0,60	6	0,23	0,18	0,09	0,20	0,23
Geométrico	0,33	0,60	6	0,23	0,19	0,08	0,23	0,22
SBX ($n=4$)	0,36	0,60	6	0,24	0,22	0,08	0,25	0,22
Blend ($\alpha=0,6$)	0,32	0,60	6	0,22	0,21	0,08	0,19	0,23
MOD Blend ($\alpha=1$)	0,30	0,60	6	0,18	0,25	0,03	0,25	0,19
MOD Geometric ($\alpha=0,1$)	0,33	0,60	6	0,21	0,23	0,04	0,26	0,20

Fonte: Autoria própria.

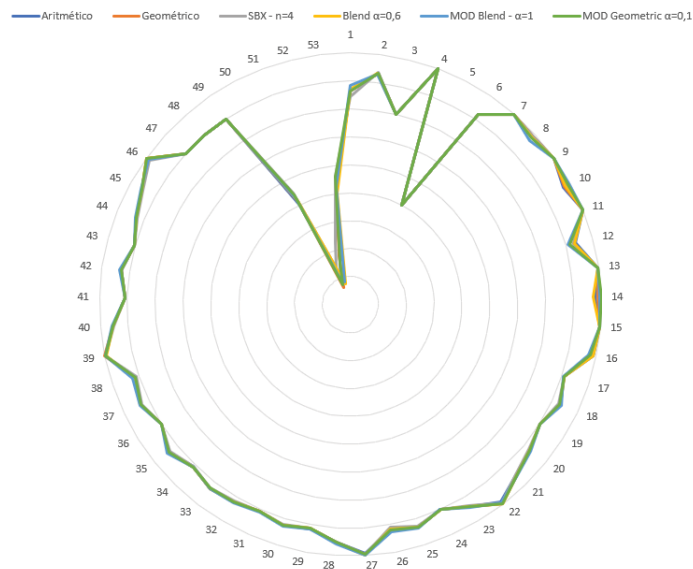
Tabela 32 – Composição do custo por cruzamento para o estudo com 1000 gerações

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - $n=4$	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
Custo do concreto (R\$)	3843,24 (27,74%)	3843,24 (27,88%)	4192,62 (30,08%)	3726,78 (27,13%)	3493,85 (25,75%)	3843,24 (28,28%)
Custo do aço ativo (R\$)	7024,77 (50,71%)	7024,77 (50,95%)	7024,77 (50,40%)	7024,77 (51,14%)	7024,77 (51,76%)	7024,77 (51,70%)
Custo do aço passivo (R\$)	2985,75 (21,55%)	2919,40 (21,17%)	2720,35 (19,52%)	2985,75 (21,73%)	3052,10 (22,49%)	2720,35 (20,02%)
Custo Total (R\$)	13853,80 (100%)	13787,40 (100%)	13937,70 (100%)	13737,30 (100%)	13570,70 (100%)	13588,40 (100%)

Fonte: Autoria própria.

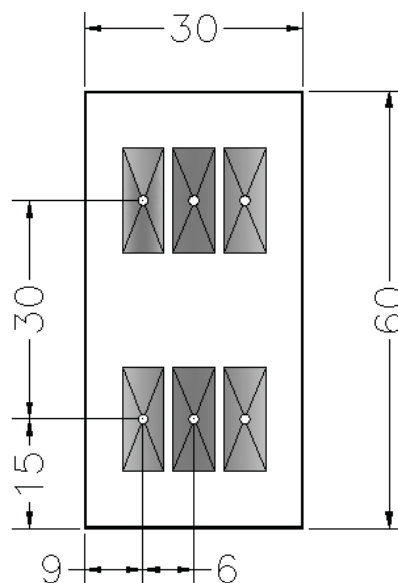
Para avaliação das restrições, plotou-se o Gráfico 12. Quanto mais próximo o resultado para a restrição estiver da borda externa, mais determinante essa restrição será nos resultados da otimização. Ou seja, tem-se como restrições determinantes a altura máxima (restrição 4), excentricidades mínimas (restrições 7, 9, 11, 13 e 15) e as tensões no ato da protensão (restrições 22, 27, 39 e 46).

Gráfico 12 – Resultados para as restrições para o estudo com 1000 gerações



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 56 a seguir tem-se a configuração das placas de ancoragem para a melhor resposta obtida para esse estudo (MOD Blend).

Figura 56 – Configuração das placas de ancoragem para MOD *Blend* em centímetros

Fonte: Autoria própria.

6.3.2 Efeito da variação do f_{ck} do concreto no custo da viga

Um estudo de variação do f_{ck} para 60MPa e 80MPa foi realizado. Os custos para todos os materiais, bem como nas análises anteriores foram retirados das tabelas da SEINFRA (Tabela 4). Os resultados encontram-se a seguir.

Tabela 33 – Resultados por cruzamento para o estudo do f_{ck} (SEINFRA)a) $f_{ck} = 60\text{MPa}$

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=4	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
Taxa de mutação	0,050	0,050	0,025	0,050	0,100	0,100
Taxa de sucesso (%)	5	10	5	25	45	10
Média dos melhores indivíduos	13789,6	13633	14282,9	13371,6	13295,6	13391
Desvio padrão dos melhores indivíduos	433,16	354,20	454,19	154,51	132,97	121,88
Média de gerações até a convergência	550,05	618,85	393,50	464,90	442,00	555,70
Tempo (s)	12632,00	12564,00	12591,00	12081,00	12061,00	12063,00
Valor da função objetivo (R\$)	13306,7	13312,6	13499,9	13182,8	13182,8	13182,8

b) $f_{ck} = 80\text{MPa}$

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=4	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
Taxa de mutação	0,050	0,050	0,025	0,050	0,100	0,100
Taxa de sucesso (%)	20	30	10	70	85	55
Média dos melhores indivíduos	12979,0	13130,5	13098,4	12870,5	12801,6	12863,3
Desvio padrão dos melhores indivíduos	151,91	422,75	317,14	226,09	42,13	98,76
Média de gerações até a convergência	654,10	527,55	640,50	397,50	264,45	446,00
Tempo (s)	12533,00	12494,00	12528,00	12519,00	12563,00	12520,00
Valor da função objetivo (R\$)	12784,7	12784,7	12784,7	12784,7	12784,7	12784,7

Fonte: Autoria própria.

Já para o resultado das variáveis, tem-se:

Tabela 34 – Resultados para as variáveis para o estudo do f_{ck} (SEINFRA)a) $f_{ck} = 60\text{MPa}$

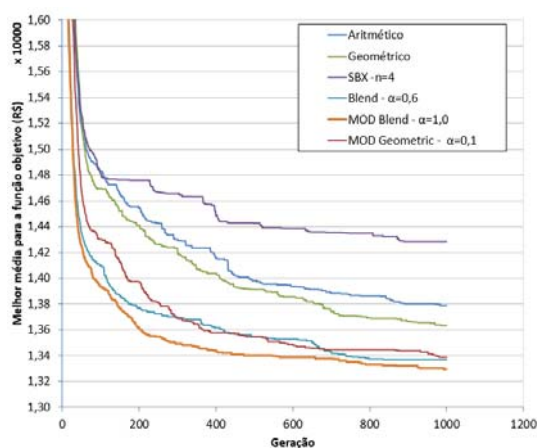
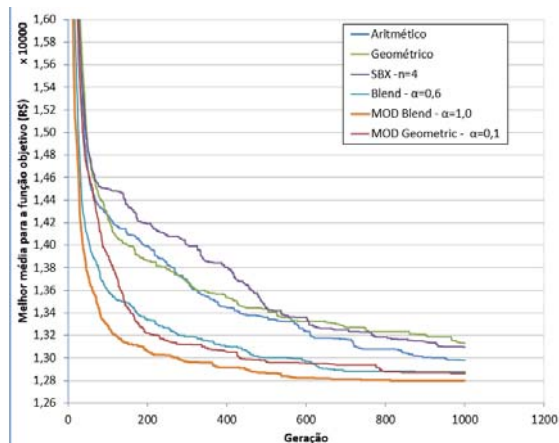
Cruzamento	bw (m)	h (m)	n	e1 (m)	e2 (m)	e3 (m)	e4 (m)	es (m)
Aritmético	0,30	0,60	6	0,21	0,24	0,05	0,23	0,22
Geométrico	0,28	0,60	6	0,20	0,24	0,03	0,26	0,18
SBX (n-4)	0,32	0,60	6	0,24	0,21	0,06	0,26	0,21
Blend ($\alpha=0,6$)	0,27	0,60	6	0,19	0,25	0,02	0,25	0,19
MOD Blend ($\alpha=1$)	0,27	0,60	6	0,18	0,25	0,00	0,25	0,18
MOD Geometric ($\alpha=0,1$)	0,27	0,60	6	0,18	0,25	0,02	0,25	0,19

b) $f_{ck} = 80\text{MPa}$

Cruzamento	bw (m)	h (m)	n	e1 (m)	e2 (m)	e3 (m)	e4 (m)	es (m)
Aritmético	0,27	0,60	6	0,20	0,24	0,04	0,25	0,20
Geométrico	0,27	0,60	6	0,20	0,24	0,03	0,25	0,20
SBX (n-4)	0,27	0,60	6	0,21	0,24	0,03	0,26	0,19
Blend ($\alpha=0,6$)	0,27	0,60	6	0,20	0,25	0,03	0,25	0,20
MOD Blend ($\alpha=1$)	0,27	0,60	6	0,19	0,25	0,00	0,25	0,19
MOD Geometric ($\alpha=0,1$)	0,27	0,60	6	0,20	0,24	0,04	0,24	0,20

Fonte: Autoria própria.

Plotando-se as curvas de melhor média da função objetivo por cruzamento, tem-se:

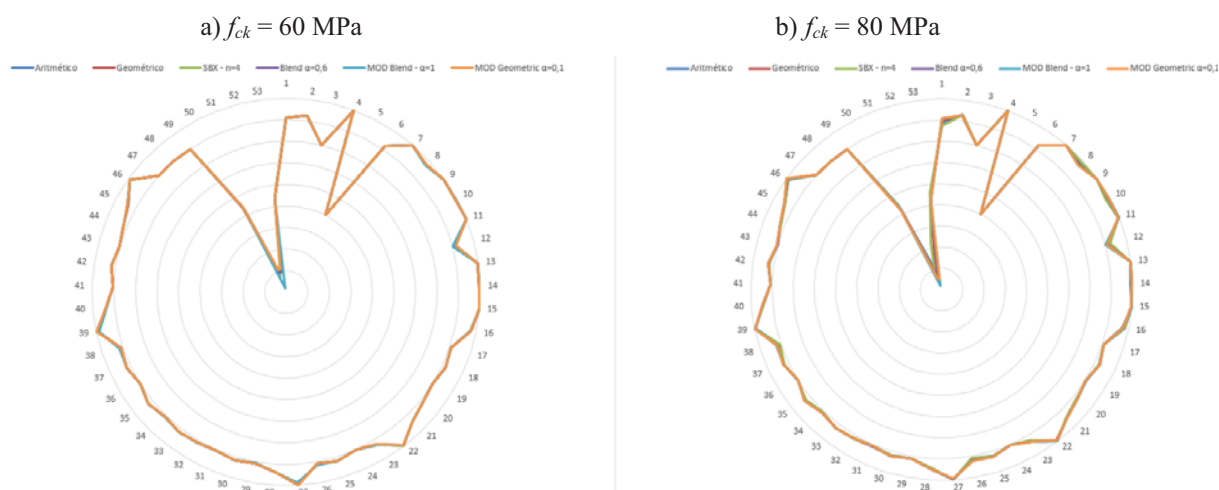
Gráfico 13 – Resultados por cruzamento para o estudo do f_{ck} (SEINFRA)a) $f_{ck} = 60\text{MPa}$ b) $f_{ck} = 80\text{MPa}$ 

Fonte: Autoria própria.

Observa-se, a partir do Gráfico 13, que os cruzamentos que atingiram menores valores para a função objetivo ao longo das gerações foi MOD *Blend*, MOD *Geometric* e *Blend*.

Já para as restrições, tem-se:

Gráfico 14 – Resultados para as restrições para o estudo do f_{ck} (SEINFRA)



Fonte: Autoria própria.

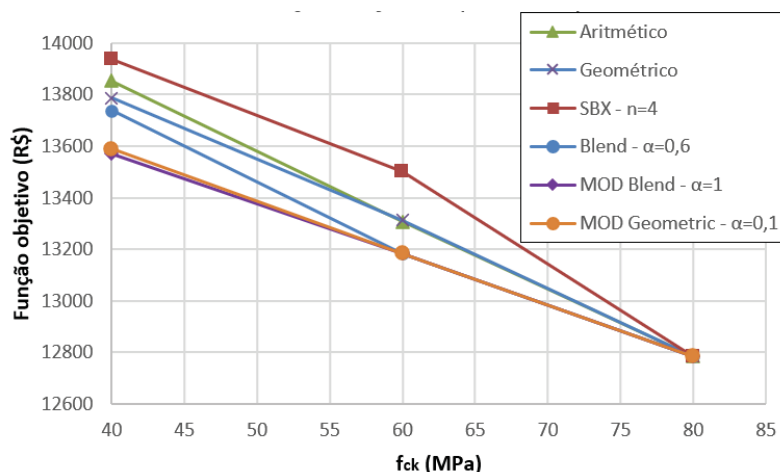
A partir do Gráfico 14, tem-se que os resultados para as restrições foram semelhantes para todos os f_{cks} .

Com intuito de comparar o valor da função objetivo para cada f_{ck} avaliado, tem-se a Tabela 35 e o Gráfico 15 abaixo.

Tabela 35 – Valores da função objetivo por f_{ck} (SEINFRA)

f_{ck} (MPa)	Aritmético	Geométrico	SBX - $n=4$	<i>Blend</i> - $\alpha=0,6$	MOD <i>Blend</i> - $\alpha=1$	MOD <i>Geometric</i> - $\alpha=0,1$
40	13853,8	13787,4	13937,7	13737,3	13570,7	13588,4
60	13306,7	13312,6	13499,9	13182,8	13182,8	13182,8
80	12784,7	12784,7	12784,7	12784,7	12784,7	12784,7
Diferença entre 40MPa e 80MPa (%)	8,36	7,84	9,02	7,45	6,15	6,29

Fonte: Autoria própria.

Gráfico 15 – Valores da função objetivo por f_{ck} (SEINFRA)

* Valores do $f_{ck} = 40$ MPa retirados do estudo com 1000 gerações.

Fonte: Autoria própria.

A partir desse estudo conclui-se que com o aumento do f_{ck} tem-se também diminuição do custo total em até 9% devido a diminuição da largura da seção e da quantidade de aço passivo necessário, que diminui com o aumento do f_{ck} . Além disso, os resultados para o f_{ck} de 80MPa alcançam melhores valores para a taxa de sucesso, indicando que a solução do problema de otimização se torna mais fácil, estando o MOD *Blend* com 85%.

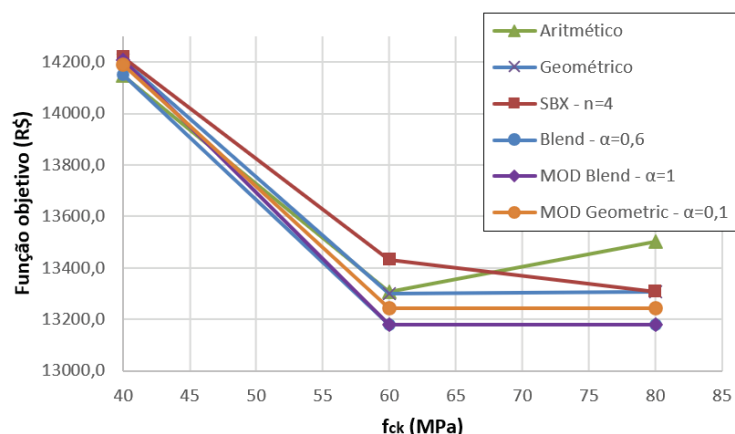
No entanto, como o custo para os f_{cks} de 60MPa e 80MPa são os mesmos de acordo com as tabelas da SEINFRA os resultados para essa análise talvez não sejam tão representativos. Portanto é feito um estudo complementar a seguir.

Um novo estudo de variação do f_{ck} foi realizado de modo semelhante ao realizado anteriormente, variando-se apenas os custos unitários do concreto, os quais foram estabelecidos através de uma pesquisa dos valores comerciais de usina explicitados anteriormente (Tabela 5). Os resultados desse novo estudo do f_{ck} são apresentados abaixo.

Tabela 36 – Valores da função objetivo por f_{ck} (Valores de usina)

f_{ck} (MPa)	Aritmético	Geométrico	SBX - n=4	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
40	14148,5	14208,9	14218,7	14152,3	14208,9	14190,4
60	13307,6	13301,4	13431,0	13178,0	13178,0	13244,3
80	13503,5	13307,6	13307,6	13178,0	13178,0	13244,3
Diferença entre 40MPa e 80MPa (%)	4,78	6,77	6,85	7,39	7,82	7,14

Fonte: Autoria própria.

Gráfico 16 – Valores da função objetivo por f_{ck} (Valores de usina)

Fonte: Autoria própria.

A partir dos resultados para esse estudo, tem-se que com o aumento do f_{ck} de 40MPa para 60MPa o valor da função objetivo diminui em torno de 1.000 reais, no entanto, esse valor se mantém praticamente estável para o f_{ck} de 80MPa. Ou seja, esse novo estudo, por utilizar valores comerciais para o concreto ilustra melhor a variação da função objetivo com o aumento do f_{ck} . Vale destacar que os cruzamentos propostos apresentaram menores valores para todos os f_{ck} 's estudados.

6.3.3 Tentativa de determinação do ótimo global para $f_{ck} = 40$

Com o intuito de avaliar melhor a solução ótima do problema para o caso de $f_{ck} = 40$ MPa com custos unitários da SEINFRA, realizaram-se mais dois estudos separadamente: aumentou-se o número de gerações (5000) e a taxa de mutação (0,8 e 0,4) para valores bem maiores do que os utilizados anteriormente. Para isso, selecionou-se o cruzamento MOD *Blend*, adotando-se seus melhores parâmetros. Os resultados obtidos foram comparados com os do estudo de 1000 gerações com taxa de mutação de 0,1 e encontram-se a seguir.

Tabela 37 – Resultados para 1000 e 5000 gerações para $f_{ck} = 40$ MPa (SEINFRA)

Cruzamento	MOD Blend - $\alpha=1$	
Número de gerações	1000	5000
Taxa de mutação	0,10	0,10
Taxa de sucesso (%)	5	5
Média dos melhores indivíduos	14065,00	14090,40
Desvio padrão dos melhores indivíduos	247,99	172,40
Média de gerações até a convergência	282,20	471,80
Tempo (s)	12472,00	62192,00
Valor da função objetivo (R\$)	13570,70	13570,70

Fonte: Autoria própria.

Tabela 38 – Resultados para taxa de mutação de 0,4; 0,8 e 0,1 para $f_{ck} = 40$ MPa (SEINFRA)

Cruzamento	MOD Blend - $\alpha=1$		
Taxa de mutação	0,80	0,40	0,10
Taxa de sucesso (%)	5	5	5
Média dos melhores indivíduos	15151,3	13855,2	14065,00
Desvio padrão dos melhores indivíduos	274,77	218,19	247,99
Média de gerações até a convergência	567,75	721,95	282,20
Tempo (s)	12070,00	12545,00	12472,00
Valor da função objetivo (R\$)	14573,2	13588,4	13570,70

Fonte: Autoria própria.

O menor valor encontrado para esse estudo foi de 13.570. No primeiro estudo, obteve-se para SBX um valor menor de 13.522, em que as variáveis correspondentes são $b = 0,3$; $h = 0,6$; $n = 6$; $e_1 = 0,78$; $e_2 = 1,0$; $e_3 = 0,1$; $e_4 = 1,0$ e $e_5 = 0,78$. Essa diferença de 0,36% no valor da função objetivo se deve, muito provavelmente, à dificuldade de obtenção do mínimo global do problema.

Pelo custo computacional da abordagem, não foi realizado uma pesquisa via enumeração exaustiva para determinação do valor mínimo. Contudo, é assumido o valor reportado de SBX do primeiro estudo como o mínimo do problema.

6.3.4 Comparação com metodologia de projeto

Com a tentativa de comparar os valores otimizados pela metodologia proposta com projetos convencionais de vigas protendidas, utilizou-se uma calculadora de pré-dimensionamento de seções protendidas: RLF-SecPro, permite avaliar uma seção por vez.

Os dados de entrada necessários para esse programa são: f_{ck} , f_{ckj} , coeficientes de ponderação de cargas, a seção a ser analisada, os momentos característicos relacionados ao peso próprio, carga acidental e carga permanente, o tipo de cabo de protensão e a excentricidade do cabo.

Como saída do programa tem-se o número de cabos necessários para combater os momentos solicitantes na seção, a armadura passiva necessária e se a seção passa nos estados limites últimos.

Como as dimensões da seção são necessárias inicialmente, adotou-se uma metodologia de pré-dimensionamento para a altura de seções protendidas, em que:

$$h = \frac{L}{20} \quad (124)$$

em que h é a altura da seção e L o comprimento do vão. Assim, a altura da seção adotada foi de 50 cm.

As excentricidades para os cabos de protensão comumente utilizadas em projetos são as máximas possíveis, portanto, adotou-se uma excentricidade de 21 cm, tendo em vista que o cobrimento é de 4 cm.

Dessa forma, a única variável a ser investigada é a base da seção. Iniciou-se o estudo com uma base de 14 cm, a qual foi se incrementando até que a seção passasse nos Estados Limites Últimos e de Serviço. A seção com base igual a 50 cm atendeu aos critérios do ELS e ELU. As demais seções não atenderam aos critérios (Equações 46 e 47), referentes ao ato da protensão.

O vão analisado foi o primeiro (simétrico ao terceiro) visto que a carga solicitante gera os maiores momentos positivo na viga. Os momentos característicos causados pela carga permanente e acidental foram obtidos por meio do Ftool. Já os momentos gerados devido ao peso próprio tiveram que ser atualizados a cada tentativa. A seguir, tem-se os momentos característicos gerados no meio do primeiro vão para cada carga.

Tabela 39 – Momentos característicos gerados no meio do primeiro vão

Carga	Valor da carga (kN/m)	Valor do momento gerado (tf.m)
Permanente	15,5	11,85
Acidental	20,0	15,29
Peso próprio: seção 14 cm x 50 cm	1,75	1,34
seção 20 cm x 50 cm	2,50	1,91
seção 30 cm x 50 cm	3,75	2,87
seção 35 cm x 50 cm	4,38	3,35
seção 40 cm x 50 cm	5,00	3,82

seção 45 cm x 50 cm	5,63	4,30
seção 50 cm x 50 cm	6,25	4,78

Fonte: Autoria própria.

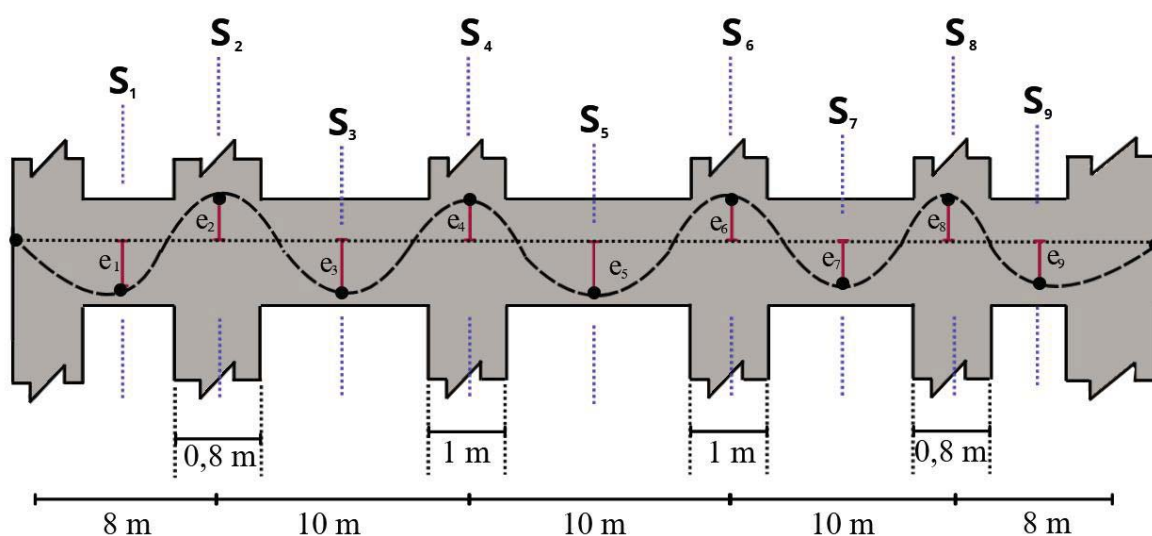
O resultado final obtido indica que a viga precisava de aumentar seu peso próprio para que passasse no ato da protensão. Utilizando-se a fórmula da função objetivo apresentada anteriormente, obtém-se um resultado de R\$ 16.123,70.

Além disso, inseriu-se na calculadora as variáveis obtidas para o cruzamento MOD *Blend*, o qual foi um dos melhores resultados para o estudo com 1000 gerações realizado anteriormente, o qual o valor da função objetivo foi de R\$ 13.570,70, o que indica uma redução de 18,81% no valor total com relação ao obtido pelo método de tentativas apresentado anteriormente. As variáveis, descritas na Tabela 31, para esse caso tinham sido: $b_w = 0,3$ m; $h = 0,6$ m; $n = 6$; $e = 0,18$ m. Para esses dados a seção passou na calculadora em todos os estados limites, o que sugere que a excentricidade poderia ser reduzida para que a seção passasse no ato da protensão.

6.4 Viga de 5 vãos

O próximo problema avaliado foi uma viga com 5 vãos de comprimentos diferentes e pilares de larguras distintas. Optou-se por uma estrutura simétrica para que os resultados pudessem ser comparados entre si. Os valores dos comprimentos dos vãos e largura dos pilares são apresentados na Figura 57 a seguir.

Figura 57 – Configuração da viga protendida com 5 vãos



Fonte: Autoria própria.

Dessa vez a altura máxima da viga foi limitada a 1 metro e utilizaram-se os custos comerciais de usina para o concreto para diferentes f_{cks} . Os dados de entrada para esse problema são descritos a seguir.

Tabela 40 – Dados do problema da viga de 5 vãos

Dados do elemento estrutural	- Viga protendida com 5 vãos: centrais de 10 m e laterais de 8 m; - Pilares com 1 m ou 0,8 m de largura; - f_{ck}=40MPa, 60MPa e 80MPa.
Intervalos para as variáveis	- Largura $b_w \in \{0,14; 0,15; 0,16; \dots; 1,00\}$ em metros; - Altura $h \in \{0,20; 0,21; 0,22; \dots; 1,00\}$ em metros; - Quantidade de cabos $n \in \{1; 2; 3; \dots; 30\}$; - Excentricidades $e \in \{0; 0,01; 0,02; \dots; e_{max}\}$ em metros.
Carregamentos	- Carga permanente g de 15, 5 kN/m; - Carga acidental q de 20 kN/m; - Ponderadores da carga acidental $\psi_1 = 0,4$ e $\psi_2 = 0,3$;
Cobrimentos	- 3 cm para armadura passiva; - 3,5 cm para as cordoalhas, totalizando uma distância máxima do C.G. da cordoalha à borda inferior de 4 cm.

Fonte: Autoria própria.

Essa análise foi feita utilizando os mesmos cruzamentos da viga de calibração e seus melhores valores de parâmetros de cruzamento e mutação encontrados no Estudo 1. Outros parâmetros do AG considerados são explicitados a seguir.

Tabela 41 – Parâmetros do AG para a viga protendida com 5 vãos

Número de otimizações	20
Número máximo de gerações	1000
Tamanho da população	300
Taxa de cruzamento	0,9
Método de seleção	“Ranking”
Amostragem para pop. inicial	“Hipercubo Latino”
Método de penalidade	“Deb 2000”
Tolerância para restrições	10^{-10}

Fonte: Autoria própria.

A seguir tem-se os resultados obtidos para o problema da viga de 5 vãos para cada

f_{ck} .

Tabela 42 – Resultados por cruzamento para o estudo da viga de 5 vãos

a) $f_{ck} = 40$ MPa

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=4	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
Taxa de mutação	0,050	0,050	0,025	0,050	0,100	0,100
Taxa de sucesso (%)	5	10	5	95	5	5
Média dos melhores indivíduos	12984,0	12883,8	13072,4	12596,4	12526,4	12715,8
Desvio padrão dos melhores indivíduos	418,87	277,97	737,47	8,35	313,10	45,73
Média de gerações até a convergência	534,65	436,95	452,05	224,85	253,25	505,30
Tempo (s)	14610,00	14634,00	14702,00	14643,00	14695,00	14613,00
Valor da função objetivo (R\$)	11849,8	12706,5	11757,8	12594,5	11163,5	12631,8

b) $f_{ck} = 60$ MPa

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=4	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
Taxa de mutação	0,050	0,050	0,025	0,050	0,100	0,100
Taxa de sucesso (%)	5	15	5	25	15	40
Média dos melhores indivíduos	12604,6	12978,5	13216,0	12697,8	12846,4	12459,0
Desvio padrão dos melhores indivíduos	843,99	639,58	1160,22	681,68	593,05	754,63
Média de gerações até a convergência	614,70	405,70	527,70	383,55	287,90	586,20
Tempo (s)	14701,00	14697,00	14735,00	14694,00	14655,00	14657,00
Valor da função objetivo (R\$)	11675,1	11695,4	11721,5	11649,0	11649,0	11695,4

c) $f_{ck} = 80$ MPa

Cruzamento	Aritmético	Geométrico	SBX - n=4	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
Taxa de mutação	0,050	0,050	0,025	0,050	0,100	0,100
Taxa de sucesso (%)	20	10	5	10	30	5
Média dos melhores indivíduos	13119,9	12815,3	13644,0	12857,4	12620,6	12999,1
Desvio padrão dos melhores indivíduos	803,78	705,83	834,50	576,21	708,28	526,40
Média de gerações até a convergência	605,05	509,6	473,3	271,3	390,05	563,6
Tempo (s)	14710	14631	14664	14758	14687	14712
Valor da função objetivo (R\$)	11741,8	11695,4	11788,1	11695,4	11649,0	11695,4

Fonte: Autoria própria.

Já para as variáveis, obteve-se:

Tabela 43 – Resultados para as variáveis por cruzamento para o estudo da viga de 5 vãos

a) $f_{ck} = 40$ MPa

Cruzamento	b_w (m)	h (m)	n	e_1 (m)	e_2 (m)	e_3 (m)	e_4 (m)	e_5 (m)	e_6 (m)	e_7 (m)	e_8 (m)	e_9 (m)
Aritmético	0,17	0,96	3	0,18	0,43	0,29	0,33	0,31	0,36	0,28	0,41	0,22
Geométrico	0,14	0,95	4	0,13	0,33	0,16	0,37	0,10	0,37	0,13	0,37	0,09
SBX (n=4)	0,16	1,00	3	0,23	0,45	0,15	0,45	0,33	0,29	0,40	0,25	0,35
Blend ($\alpha=0,6$)	0,14	0,92	4	0,00	0,41	0,09	0,42	0,00	0,42	0,10	0,41	0,00
MOD Blend ($\alpha=1$)	0,14	0,95	3	0,07	0,43	0,20	0,43	0,09	0,42	0,25	0,38	0,10
MOD Geometric ($\alpha=0,1$)	0,14	0,93	4	0,00	0,40	0,14	0,41	0,00	0,41	0,13	0,40	0,00

b) $f_{ck} = 60$ MPa

Cruzamento	b_w (m)	h (m)	n	e_1 (m)	e_2 (m)	e_3 (m)	e_4 (m)	e_5 (m)	e_6 (m)	e_7 (m)	e_8 (m)	e_9 (m)
Aritmético	0,14	0,93	3	0,20	0,40	0,26	0,43	0,22	0,41	0,28	0,40	0,19
Geométrico	0,14	0,88	3	0,14	0,38	0,25	0,38	0,16	0,39	0,24	0,38	0,14
SBX (n=4)	0,14	0,94	3	0,28	0,43	0,13	0,42	0,32	0,43	0,18	0,38	0,34
Blend ($\alpha=0,6$)	0,14	0,87	3	0,11	0,38	0,26	0,39	0,13	0,39	0,26	0,39	0,10
MOD Blend ($\alpha=1$)	0,14	0,87	3	0,17	0,39	0,19	0,39	0,19	0,40	0,19	0,37	0,20
MOD Geometric ($\alpha=0,1$)	0,14	0,88	3	0,15	0,36	0,24	0,38	0,17	0,39	0,24	0,37	0,15

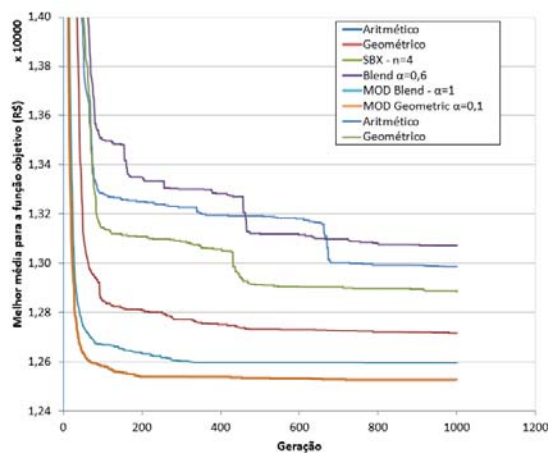
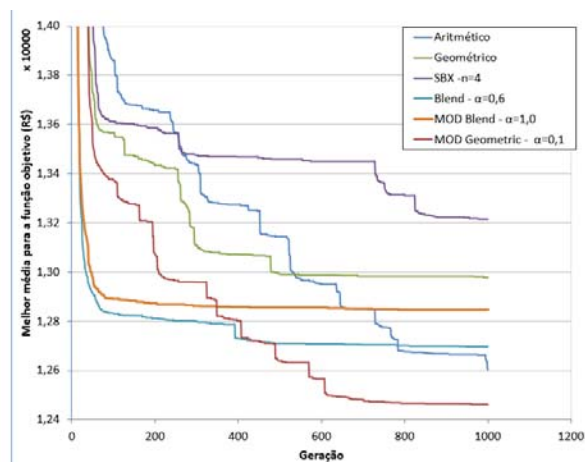
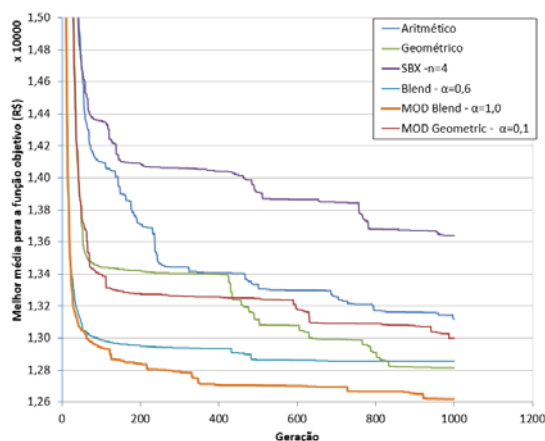
c) $f_{ck} = 80$ MPa

Cruzamento	b_w (m)	h (m)	n	e_1 (m)	e_2 (m)	e_3 (m)	e_4 (m)	e_5 (m)	e_6 (m)	e_7 (m)	e_8 (m)	e_9 (m)
Aritmético	0,14	0,89	3	0,21	0,36	0,24	0,37	0,23	0,39	0,20	0,36	0,23
Geométrico	0,14	0,88	3	0,16	0,36	0,25	0,38	0,19	0,39	0,24	0,37	0,17
SBX (n=4)	0,14	0,90	3	0,14	0,39	0,26	0,36	0,23	0,35	0,31	0,34	0,18
Blend ($\alpha=0,6$)	0,14	0,88	3	0,16	0,39	0,19	0,40	0,17	0,39	0,20	0,38	0,16
MOD Blend ($\alpha=1$)	0,14	0,87	3	0,10	0,38	0,26	0,39	0,13	0,40	0,26	0,37	0,11
MOD Geometric ($\alpha=0,1$)	0,14	0,88	3	0,19	0,36	0,22	0,38	0,23	0,37	0,22	0,38	0,17

Fonte: Autoria própria.

O aumento da altura máxima permitiu a diminuição da largura da seção e da quantidade de cabos, tornando os preços semelhantes à viga com 3 vãos apresentada anteriormente. Já graficamente, tem-se:

Gráfico 17 – Resultados por cruzamento para o estudo da viga com 5 vãos

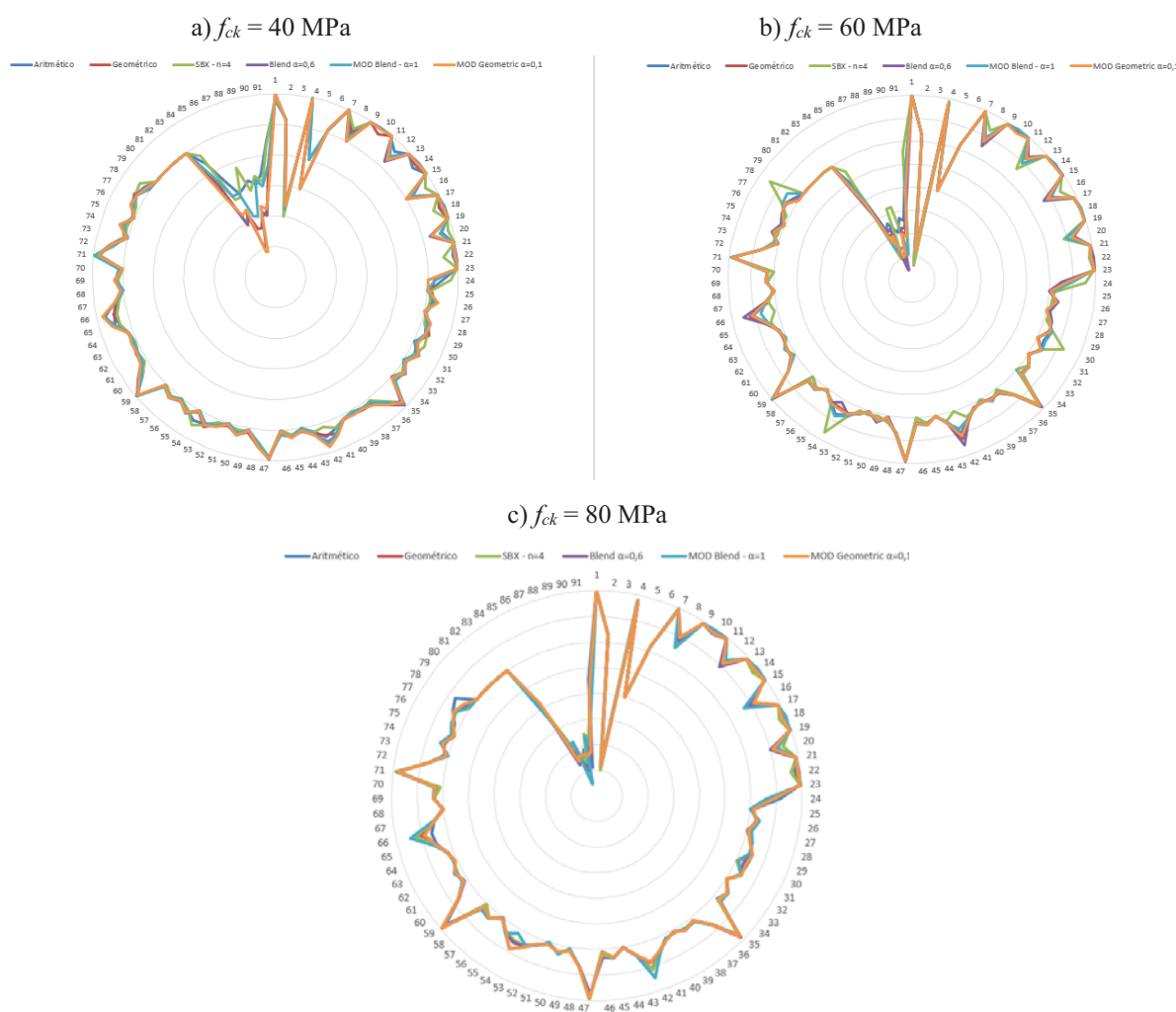
a) $f_{ck} = 40$ MPab) $f_{ck} = 60$ MPac) $f_{ck} = 80$ MPa

Fonte: Autoria própria.

A partir do Gráfico 17, nota-se que o cruzamento MOD *Blend* atinge menores valores mais rapidamente ao longo das gerações para os f_{cks} de 40MPa e 80MPa, já para o f_{cks} de 60 MPa o cruzamento MOD *Geometric* se mostra mais eficiente. Para as análises realizadas, pelo menos um dos cruzamentos propostos atinge melhores valores.

Com relação às restrições, apresentadas no Gráfico 18, tem-se que além das restrições determinantes para a viga de 3 vãos, adicionou-se outra restrição significativa, a qual foi a largura mínima da seção.

Gráfico 18 – Resultados para as restrições (estudo da viga com 5 vãos)



Fonte: Autoria própria.

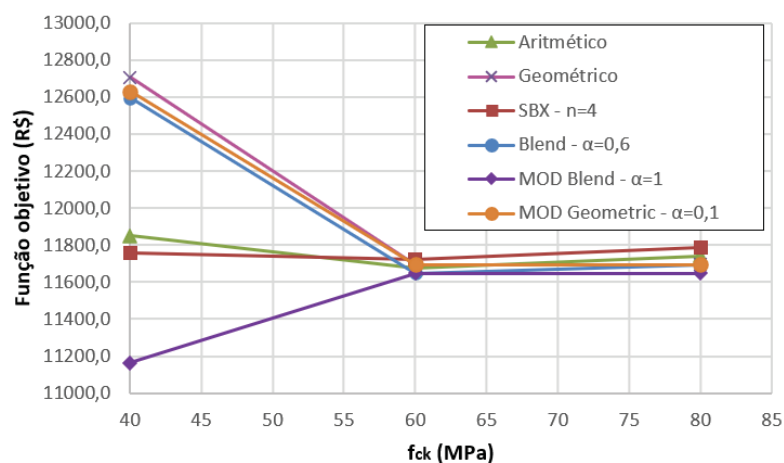
Com objetivo de comparar mais eficientemente os valores das funções objetivos para cada cruzamento e f_{ck} , tem-se a Tabela 44 e o Gráfico 19.

Tabela 44 – Resultados para a função objetivo por cruzamento para o estudo da viga de 5 vãos

fck (MPa)	Valor da função objetivo					
	Aritmético	Geométrico	SBX - n=4	Blend - $\alpha=0,6$	MOD Blend - $\alpha=1$	MOD Geometric - $\alpha=0,1$
40	11849,8	12706,5	11757,8	12594,5	11163,5	12631,8
60	11675,1	11695,4	11721,5	11649,0	11649,0	11695,4
80	11741,8	11695,4	11788,1	11695,4	11649,0	11695,4
Diferença entre 40MPa e 80MPa (%)	0,92	8,65	0,26	7,69	4,17	8,01

Fonte: Autoria própria.

Gráfico 19 – Resultados para a função objetivo para o estudo da viga de 5 vãos



Fonte: Autoria própria.

A partir dos resultados obtidos, tem-se que, para o cruzamento MOD Blend, o valor da função objetivo aumentou com o aumento do f_{ck} . Já para os cruzamentos SBX e Aritmético o aumento do f_{ck} praticamente não tem influência no valor da função objetivo. Por fim, para os cruzamentos Blend, Geométrico e MOD Geometric o valor da função objetivo caiu do f_{ck} de 40MPa para 60MPa, no entanto se mantém constante para o f_{ck} de 80MPa.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentado uma metodologia de otimização de vigas protendidas em que novos cruzamentos foram desenvolvidos para otimização de custo de vigas protendidas de múltiplos vãos, os quais foram calibrados variando-se os parâmetros de cruzamento, taxa de mutação, tamanho da população e número de gerações. Cruzamentos já existentes da literatura também foram aplicados aos problemas analisados; avaliou-se a influência do f_{ck} utilizado no custo da viga protendida otimizada; além disso, os valores obtidos pelas otimizações realizadas foram comparados com resultados do pré-dimensionamento utilizando-se a calculadora *SecPro*.

Os cruzamentos Geométrico, SBX, *Blend*, MOD *Blend* e MOD *Geometric* foram implementados no sistema BIOS, o qual só possuía o cruzamento Aritmético anteriormente. Além disto, também foram implementados no sistema os problemas de vigas de múltiplos vãos em concreto protendido, usando rotinas em linguagem C++, como proposto. Dessa forma houve aprimoramento do BIOS, tanto do ponto de vista de otimização como do ponto de vista de aplicação aos problemas propostos.

A aplicação dos cruzamentos aos *Benchmarks* possibilitou que os resultados obtidos fossem comparados com mínimos globais, o que muitas vezes não é possível quando se trata de problemas mais complexos, como o da viga protendida. Tem-se destaque para os cruzamentos modificados propostos MOD *Blend* e MOD *Geometric*, os quais apresentaram desempenho superior com as alternativas comparadas nos problemas estudados.

Com relação ao estudo de calibração realizado para viga protendida de três vãos, os melhores resultados foram, novamente, para os cruzamentos MOD *Blend* e MOD *Geometric*. Já a partir do estudo de f_{cks} realizado, tem-se que os valores comerciais para o concreto ilustram melhor a variação da função objetivo com o aumento do f_{ck} . Com esse estudo constata-se que uma das melhores escolhas para o f_{ck} seja o de 60MPa.

A comparação entre a resposta otimizada pela metodologia proposta com o pré-dimensionamento realizado na *SecPro* indicou uma redução de 18,81% no custo total. Isso pode ser explicado pelo fato de que é possível que a excentricidade seja reduzida automaticamente pelo algoritmo de otimização se necessário como, por exemplo, para atender os critérios de projeto relacionados ao ato da protensão.

Para o estudo com viga de 5 vãos observou-se, como esperado, que o aumento da altura máxima permitida resultou na diminuição da largura da seção e da quantidade de cabos

necessária. Por outro lado, a resposta obtida não é usual em projetos, visto que a altura de uma viga, normalmente, é um limitante da arquitetura.

Tem-se que a composição dos custos para todos os problemas avaliados se mantém na mesma ordem de grandeza, sendo o custo do aço ativo em torno de 50% do custo total para a viga, o do concreto entre 25% e 30% e do aço passivo entre 19% e 22%. Esses valores indicam que o aço ativo é determinante no valor final de uma viga protendida.

Com relação às restrições determinantes para todos os problemas tem-se: a altura máxima e as tensões no ato da protensão. Quando se trata do problema da viga de 5 vãos a restrição da largura mínima da seção também é significativa.

Já com relação aos parâmetros de cruzamento e mutação observou-se que são, extremamente, dependentes do problema em questão, por isso tem-se a necessidade de calibração. Com a calibração realizada, foram estabelecidos os parâmetros considerados padrão para o problema de otimização de viga protendida de múltiplos vãos descrita neste trabalho. Para o algoritmo MOD *Blend*, tem-se $\alpha = 1$, e para o MOD *Geometric*, $\alpha = 0,1$, ambos com a taxa de mutação de 0,1.

Em suma, a partir do referente trabalho foi possível estudar o comportamento de vários tipos de cruzamento aplicados a *Benchmarks* e problemas reais como o da viga protendida. Além disso, os resultados para os cruzamentos propostos foram bastante satisfatórios para a maioria das análises realizadas. Salienta-se que, usualmente na literatura, a otimização de vigas protendidas é realizada para vigas isostáticas, com variáveis conjuntas como largura e altura da seção e quantidade de cabos. No entanto, não se verificam muitos trabalhos na literatura quando se trata de otimização de vigas protendidas hiperestáticas considerando-se todas as excentricidades possíveis no processo de otimização.

Como sugestão para trabalhos futuros tem-se:

- Formulação de algoritmo híbrido de otimização, utilizando os cruzamentos genéticos com enxame de partículas, por exemplo;
- Otimização da quantidade, do posicionamento e das dimensões dos pilares na viga;
- Otimização das excentricidades nos locais exatos em que os momentos são máximos;
- Consideração de trechos da viga com seções e quantidade de cabos diferentes;
- Adaptação do problema para as verificações do ACI ou EUROCOD;
- Avaliação de estruturas diferentes como, por exemplo, vigas de pontes;

- Consideração do cortante e a fretagem no custo final da viga protendida.

REFERÊNCIAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 6120: Ações para o cálculo de estruturas de edificações**. 2. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 8953: Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência**. 3. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2015.

ADELI, Hojjat; SARMA, Kamal C. **Cost optimization of structures : fuzzy logic, genetic algorithms, and parallel computing**. 1. ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2006.

ALADDIN, A.M.; RASHID, T.A. **A New Lagrangian Problem Crossover – A Systematic Review and Meta-Analysis of Crossover Standards**. *Systems*, v.11, p. 144, mar 2023. DOI: <https://doi.org/10.3390/systems11030144>

ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 3. ed. Waltham: Elsevier, 2012.

ARTEAGA, D. I. **Otimização de Estruturas Reticuladas Utilizando Algoritmos Genéticos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília. Brasília, 2015.

BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. **An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 59, p. 703 – 736, 2004.

BARROSO, Elias Saraiva. **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2015.

BARROSO, E.S., RIBEIRO, L.G., MAIA, M.A. *et al.* **BIOS: an object-oriented framework for Surrogate-Based Optimization using bio-inspired algorithms**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.65, p.203, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-022-03302-0>.

BASTOS, P. S. **Fundamentos do Concreto Protendido**. Bauru: UNESP, 2024.

BENDSØE, Martin P. **Topology optimization: theory, methods and applications**. Berlin: Springer, 2003.

BUCHAIM, Roberto. **Concreto protendido: tração axial, flexão simples e força cortante**. 1. ed. Londrina: EDUEL, 2007.

CARVALHO, Roberto Chust. **Estrutura em concreto protendido: cálculo e detalhamento**. 2. ed. São Paulo: Pini, 2017.

CAUDURO, E. L. **Manual para a boa execução de estruturas protendidas usando cordoalhas de aço engraxadas e plastificadas**. Belgo Mineira, 2002. 109 p.

DEB, Kalyanmoy. **An efficient constraint handling method for genetic algorithms**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.186, p. 311-338, jun 2000. ISSN 0045-7825. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00389-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00389-8).

EMERICK, A. A. **Projeto e Execução de Lajes Protendidas**. Brasília: s.n, 2002.

FERREIRA, Reginaldo Lopes. **RLF-SecPro: Calculadora de Seções Protendidas**. Versão 4.0, 4 mar. 2024. Disponível em: <https://www.rlf.com.br/secpro.html>. Acesso em: 22 jun. 2024.

FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. **A first course in finite elements**. 1. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2007.

FORRESTER, Alexander I. J.; SÓBESTER, András; KEANE, Andy J. **Engineering Design via Surrogate Modelling A Practical Guide**. 1. ed. London: John Wiley & Sons, 2008.

GANDOMI, Amir; YANG, Xin-She; TALATAHARI, Siamak; ALAVI, Amir. **Metaheuristic Applications in Structures and Infrastructures**. 1. ed. London: Elsevier, 2013.

HANAI, J. B. **Fundamentos do Concreto Protendido**. São Carlos: USP, 2005.

HERRERA, F.; LOZANO, M.; SÁNCHEZ, A.M. **A taxonomy for the crossover operator for real-coded genetic algorithms: An experimental study**. International Journal of Intelligent Systems, v.18, p. 309-338, fev 2003. ISSN: 0884-8173. DOI: <https://doi.org/10.1002/int.10091>

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. 8. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

IMPACTO. **Catálogo: Formas**. 1. ed. Fortaleza: Protensão Impacto, 2025.

JASIŃSKI, Marcin; SALAMAK, Marek; GERGES, Michael. **Tendon layout optimization in statically indeterminate structures using neural networks and genetic algorithm**. Engineering Structures, v. 305, fev 2024. ISSN 0141-0296. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.117713>.

KATOCH, Sourabh; CHAUHAN, Sumit Singh; KUMAR, Vijay. **A review on genetic algorithm: past, present, and future**. Multimed Tools Appl, v. 80, p. 8091–8126, out 2021. ISSN 8091-8126. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11042-020-10139-6>.

KAVEH, Ali; HAMEDAN, Kiarash Biabani. **Advanced Metaheuristic Algorithms and Their Applications in Structural Optimization**. 1. ed. Cham: Springer, 2022.

KIM, Yong-Hyuk; YOON, Yourim; MORAGLIO, Alberto; MOON, Byung-Ro. **Geometric crossover for multiway graph partitioning**. In: Genetic and Evolutionary Computation Conference, VI, 2006, Washington. **Proceedings [...]** Washington: Association for Computing

Machinery, 2006, p.1217–1224, ISBN: 978-1-59593-186-3. DOI: <https://doi.org/10.1145/1143997.1144189>

KRAMER, Oliver. **Genetic Algorithm Essentials**. 1. ed. Oldenburg : Springer, 2017.

LIN, T'ung-yen; BURNS, Ned Hamilton. **Design of Prestressed Concrete Structures**. 3. ed. Nova Iorque: John Wiley and Sons, 1981.

LOUREIRO, Giordano José. **Projeto de lajes protendidas com cordoalhas Engraxadas**. In: Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, VI, 2006, São Paulo. **Anais [...]** São Paulo: Protensão e Industrialização de Estruturas de Concreto, 2006, p.1734–1755.

MARQUES, Ícaro Rodrigues. **Manual de Boas Práticas do Sistema PavPlus**. 1. ed. Fortaleza: Protensão Impacto, 2021.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MEI, Linfeng; WANG, Qian. 2021. **Structural Optimization in Civil Engineering: A Literature Review**. Buildings, v.11, n. 2: 66, fev 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/buildings11020066>.

MENEGATTI, M. **A protensão como um conjunto de cargas concentradas equivalentes**. Tese (Dissertação de Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2004.

MIRJALILI, Seyedali. **Evolutionary Algorithms and Neural Networks: Theory and Applications**. 1. ed. Brisbane: Springer, 2019.

MOTA, J. P. A. S. ; MELO, A.M.C. ; PARENTE JUNIOR, E. **Optimization of unbonded post-tensioned concrete ribbed floors**. In: XL CILAMCE - Ibero-Latin American Congress in Computational Methods in Engineering, 2019, Natal. Proceedings of the XL Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2019. v. 1. p. 1-19.

NARQUES, Tarniê Vilela Nunes; CARVALHO, Roberto Chust; CHRISTOFORO, André Luis; MASCARENHAS, Fernando Júnior Resende; ARROYO, Felipe Nascimento; BOMFIM, Florisvaldo Cardozo Junior; SANTOS, Herisson Ferreira dos. **Use of Real Coded Genetic Algorithm as a Pre-Dimensioning Tool for Prestressed Concrete Beams**. Buildings, v.13, mar 2023. DOI: <https://doi.org/10.3390/buildings13030819>.

PATKAR, P.R.; VENKATASUBRAMANIAN, V. **Genetic Algorithms Based CAMD**. Elsevier, v.12, p. 95-128, set 2007, ISSN 1570-7946. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1570-7946\(03\)80007-X](https://doi.org/10.1016/S1570-7946(03)80007-X).

RAO, Singiresu S. **Engineering optimization: theory and practice**. 4. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.

RIBEIRO, Leonardo Gonçalves. **Efficient Optimization of Composite Structures using Multi-Fidelity Models**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Estruturas e Construção Civil. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2022.

ROCHA, Iuri Barcelos Carneiro Montenegro da. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando não – linearidade geométrica e falha progressiva**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2013.

SEMELAWY, M. El; NASSEF, A.O.; DAMATTY, A.A. El. **Design of prestressed concrete flat slab using modern heuristic optimization techniques**. Expert Systems with Applications, v. 39, p. 5758-5766, abr 2012, ISSN: 0957-4174. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.11.093>.

SOBRINHO, Francisco Rosendo. **Otimização de pavimento de lajes nervuradas protendidas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2018.

SOLVE a Mixed-Integer Engineering Design Problem Using the Genetic Algorithm. **The MathWorks**, França, 2024. Disponível em: < <https://fr.mathworks.com/help/gads/solving-a-mixed-integer-engineering-design-problem-using-the-genetic-algorithm.html>>. Acesso em: 6 de dez. de 2024.

SURJANOVIC, Sonja; BINGHAM, Derek. Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets. **Simon Fraser University**, Burnaby, 2013. Disponível em: <<https://www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html>>. Acesso em: 5 de dez de 2024.

TOSCANO, Caroline Galvão. **Otimização de pavimentos de lajes lisas maciças protendidas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2023.

TÜRKELI, Erdem; ÖZTÜRK, Hasan Tahsin. **Optimum design of partially prestressed concrete beams using Genetic Algorithms**. Structural Engineering and Mechanics, v.64, n.5, p. 579-589, jun 2017. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2017.64.5.579>.

UMBARKAR, A.J.; SHETH, P.D. **Crossover operators in genetic algorithms: a review**. Ictact journal on soft computing, v.6, p. 1083-1092, out 2015. ISSN: 2229-6956. DOI: <https://doi.org/10.21917/ijsc.2015.0150>

VANDERPLAATS, Garret N. **Numerical optimization techniques for engineering design**. 3. ed. Colorado: Colorado Springs, 1999.

YENIAY, Özgür. **Penalty Function Methods for Constrained Optimization with Genetic Algorithms**. Mathematical and Computational Applications. v.10, p. 45-56, abr 2005. DOI: <https://doi.org/10.3390/mca10010045>

YU, Xinjie; GEN, Mitsuo. **Introduction to Evolutionary Algorithms**. 1. ed. London: Springer, 2010.

APÊNDICE A – OPERADORES DE CRUZAMENTO EM CÓDIGO BINÁRIO

Outros exemplos de operadores de cruzamento em código binário são descritos a seguir.

O cruzamento uniforme com máscara fornece uniformidade na combinação dos segmentos de ambos os pais. Uma máscara aleatória de 0 e 1 é gerada conforme a taxa de cruzamento. Para uma taxa de cruzamento de 50% metade dos genes nos filhos seria herdada do pai 1, enquanto a outra metade seria herdada do pai 2. Os genes que correspondem ao *bit* 1 são retirados do pai 1, enquanto os correspondentes a 0 são retirados do pai 2 (UMBARKAR *et al.*, 2015).

O cruzamento parcialmente compatível (PMX do inglês *Partially Mapped Crossover*), é o operador de cruzamento utilizado com maior frequência, possuindo melhor desempenho do que a maioria dos outros operadores. Seleccionam-se dois pais para o cruzamento, em que um dos pais doa parte do material genético e a parte correspondente do outro pai participa do filho. Uma vez concluído este processo, os alelos deixados de fora são copiados do segundo pai (KATOCH *et al.*, 2021).

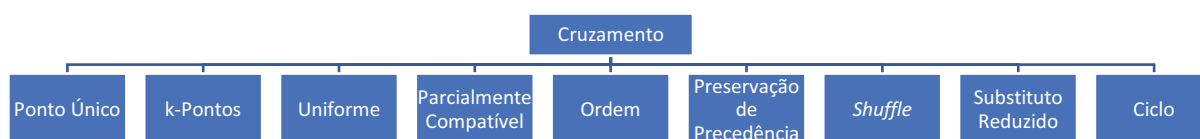
Ainda conforme Katoch *et al.* (2021), o cruzamento baseado em ordem (OX do inglês *Order Crossover*), proposto por Davis em 1985, copia uma (ou mais) partes de pai para o filho a partir dos pontos de corte selecionados e preenche o espaço restante com valores além daqueles incluídos na seção copiada, sendo útil para problemas de ordenação. Já o cruzamento com preservação de precedência (PPX do inglês *Precedence Preserving Crossover*) preserva a ordenação de soluções individuais conforme presente no pai antes da aplicação do cruzamento, sendo a inicializada com uma sequência aleatória de 1 e 0 aleatórios a qual determina se os indivíduos de ambos os pais devem ser selecionados ou não.

Segundo Umbarkar *et al.* (2015), o cruzamento *Shuffle* contribui na criação de descendentes que possuam pontos de cruzamento independentes de seus pais usando a técnica de cruzamento de 1 ponto além do “embaralhamento”. Esse método embaralha aleatoriamente os genes de ambos os pais da mesma maneira e, em seguida, aplica a técnica de cruzamento de 1 ponto selecionado aleatoriamente e os desembaralha após a operação de cruzamento ser executada para que o ponto de cruzamento não introduza qualquer viés no cruzamento.

O cruzamento substituto reduzido (RCX do inglês *Reduced Surrogate Crossover*) minimiza as operações de cruzamento indesejadas no caso dos pais possuírem os mesmos genes. Nesses casos, primeiro verificam-se os genes individuais nos pais, criando uma lista de todos os possíveis pontos de cruzamento onde os genes de ambos os pais são diferentes. No

caso de não existir nenhum ponto de cruzamento, nenhuma ação será tomada, no entanto, no caso de os pais diferirem em mais de um gene, mantém-se a lista de todos os pontos de cruzamento. Por fim, seleciona-se aleatoriamente um ponto de cruzamento da lista e executa-se o cruzamento de 1 ponto para criar a prole (UMBARKAR *et al.*, 2015).

Enfim tem-se o cruzamento de ciclo, o qual tenta gerar uma prole em que cada elemento ocupa a posição que se refere a posição de seus pais. No primeiro ciclo, são necessários alguns elementos do primeiro pai e no segundo ciclo, o filho adquire os elementos restantes do segundo pai (KATOCH *et al.*, 2021). A seguir, tem-se um resumo ilustrativo dos tipos de cruzamento de código binário existentes para AGs.



APÊNDICE B – OPERADORES DE MUTAÇÃO

De acordo com Kramer (2017), existem três requisitos principais para operadores de mutação, os quais são apresentados a seguir.

A primeira condição é a acessibilidade. Cada ponto no espaço de solução deve ser acessível a partir de um ponto arbitrário no espaço de solução. A existência de restrições que reduzem todo o espaço de soluções a um valor viável subconjunto, por exemplo, podem complicar o cumprimento desta condição. Em suma, deve existir uma chance mínima de alcançar todas as partes do espaço de solução, caso contrário, a probabilidade de encontrar o ótimo não é favorável.

O segundo bom princípio de operadores de mutação é a imparcialidade. O operador de mutação não deve induzir um desvio da busca para uma direção específica, pelo menos em espaços de solução irrestritos, no entanto, no caso de restrição o viés dos espaços de solução pode ser vantajoso.

O terceiro princípio é a escalabilidade. A cada mutação o operador deve oferecer o grau de liberdade que sua taxa é adaptável. Isso é geralmente possível para operadores de mutação baseados em uma distribuição de probabilidade, como, por exemplo, para a mutação baseada na distribuição Gaussiana.

De acordo com Katoch *et al.* (2021), os operadores de mutação mais conhecidos são deslocamento, inversão simples e mutação embaralhada. O operador de mutação de deslocamento (DM do inglês *Displacement Mutation*) desloca um segmento de uma determinada solução individual dentro de si mesma. O local é escolhido aleatoriamente para deslocamento tal que a solução resultante seja válida. Existem variantes desse método que são mutação de troca, a qual uma parte de uma solução individual é trocada por outra parte e a mutação de inserção, a qual o alelo é inserido em outro local aleatoriamente.

O operador de mutação de inversão simples (SIM do inglês *Simple Inversion Mutation*) inverte um segmento entre quaisquer dois locais especificados em uma solução individual, posicionando-o em um local aleatório. Já o operador de mutação embaralhada (SM do inglês *Scramble Mutation*) dispõe os elementos em um intervalo especificado da solução individual em ordem aleatória e verifica-se se o valor de aptidão da solução gerada recentemente é melhorado ou não (KATOCH *et al.*, 2021).

A seguir, apresenta-se um resumo ilustrativo de outros tipos de cruzamento existentes para AGs.



APÊNDICE C – VALIDAÇÃO DO PROBLEMA DA VIGA PROTENDIDA

Viga protendida com 3 vãos – Dados do Estudo 2

Cruzamento MOD *Blend* com $\alpha=1$

b_w	h	n	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
0,30	0,60	6	0,1820	0,2522	0,0208	0,2522	0,1820

1. Discretização dos elementos

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7
5,0	4,0	0,5	0,5	0,5	0,5	4,0

ℓ_8	ℓ_9	ℓ_{10}	ℓ_{11}	ℓ_{12}	ℓ_{13}	ℓ_{14}
4,0	0,5	0,5	0,5	0,5	4,0	5,0

2. Coordenadas verticais

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
0,3000	0,1180	0,4654	0,5522	0,4976	0,2792	0,4976	0,5522	0,4654	0,1180	0,3000

3. Raio de curvatura

R_1	R_2	R_3	R_4
5,7577	9,1575	9,1575	5,7577

4. Parâmetros variáveis

- $f_{cd} = \frac{40}{1,4} = 28,5714 \text{ MPa}$
- $f_{ckj} = 28 \text{ MPa}$
- $P_0 = 0,8 \cdot 190 \cdot 0,99 = 150,480 \text{ kN}$
- $P_i = (1 - 0,1) \cdot 150 = 135,432 \text{ kN}$
- $P_\infty = (1 - 0,2) \cdot 150 = 120,384 \text{ kN}$
- $A_{s,min} = 0,179 \cdot 0,3 \cdot 0,6 \cdot 100 = 3,222 \text{ cm}^2$
- $w = \frac{0,3 \cdot 0,6^2}{6} = 0,018 \text{ m}^3$
- $g_i = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 25 = 4,5 \text{ kN/m}$
- $I = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 0,0054 \text{ m}^4$
- $E_{cs} = 1000 \cdot \left(0,8 + 0,2 \cdot \frac{40}{80}\right) \cdot (5600 \cdot \sqrt{40}) = 3,18758 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$

5. Tensões Limites

ELS-D	
$\sigma_{t,lim(cqp)}$ (MPa)	0
$\sigma_{c,lim(cqp)}$ (MPa)	-18
ELS-F	
$\sigma_{t,lim(cf)}$ (MPa)	3,6843
$\sigma_{c,lim(cf)}$ (MPa)	-24
Ato da protensão	
$\sigma_{t,lim(ato)}$ (MPa)	3,3195
$\sigma_{c,lim(ato)}$ (MPa)	-19,6

6. Limite da flecha diferida

$f_{dif(1)}$	$f_{dif(1)}$	$f_{dif(1)}$
0,04	0,04	0,04

7. Carga equivalente inicial (Com perdas imediatas)

q _{ei} (1)	q _{ei} (2)	q _{ei} (3)	q _{ei} (4)	q _{ei} (5)	q _{ei} (6)	q _{ei} (7)
11,83	35,28	-141,13	-141,13	-88,74	-88,74	22,18

q _{ei} (8)	q _{ei} (9)	q _{ei} (10)	q _{ei} (11)	q _{ei} (12)	q _{ei} (13)	q _{ei} (14)
22,18	-88,74	-88,74	-141,13	-141,13	35,28	11,83

8. Carga equivalente final (Com perdas totais)

q _{ef} (1)	q _{ef} (2)	q _{ef} (3)	q _{ef} (4)	q _{ef} (5)	q _{ef} (6)	q _{ef} (7)
10,52	31,36	-125,45	-125,45	-78,88	-78,88	19,72

q _{ef} (8)	q _{ef} (9)	q _{ef} (10)	q _{ef} (11)	q _{ef} (12)	q _{ef} (13)	q _{ef} (14)
19,72	-78,88	-78,88	-125,45	-125,45	31,36	10,52

9. Combinação quase-permanente (CQP)

9.1. Carga aplicada inicial (Escrita inicial)

q _{cqpi} (1)	q _{cqpi} (2)	q _{cqpi} (3)	q _{cqpi} (4)	q _{cqpi} (5)	q _{cqpi} (6)	q _{cqpi} (7)
-15,48	5,36	-151,45	-151,45	-104,88	-104,88	-6,28

q _{cqpi} (8)	q _{cqpi} (9)	q _{cqpi} (10)	q _{cqpi} (11)	q _{cqpi} (12)	q _{cqpi} (13)	q _{cqpi} (14)
-6,28	-104,88	-104,88	-151,45	-151,45	5,36	-15,48

9.2. Leitura das cargas concentradas dos pilares (Leitura inicial)

Software	F ₁ (kN)	F ₂ (kN)
FAST	288,8270	288,8270
FTOOL	288,8276	288,8276
Erro (%)	$2,0774 \cdot 10^{-4}$	$2,0774 \cdot 10^{-4}$

9.3. Carga inicial adicionada das cargas distribuídas nos pilares (Escrita final)

Q _{cqpf} (1)	Q _{cqpf} (2)	Q _{cqpf} (3)	Q _{cqpf} (4)	Q _{cqpf} (5)	Q _{cqpf} (6)	Q _{cqpf} (7)
-15,48	5,36	-151,45	137,38	183,95	-104,88	-6,28

Q _{cqpf} (8)	Q _{cqpf} (9)	Q _{cqpf} (10)	Q _{cqpf} (11)	Q _{cqpf} (12)	Q _{cqpf} (13)	Q _{cqpf} (14)
-6,28	-104,88	183,95	137,38	-151,45	5,36	-15,48

9.4. Leitura dos momentos (Leitura Final)

Software	M ₁ (kN.m)	M ₂ (kN.m)	M ₃ (kN.m)	M ₄ (kN.m)	M ₅ (kN.m)
FAST	48,6886	-71,4363	20,2715	-71,4363	48,6886
FTOOL	48,6886	-71,4363	20,2715	-71,4363	48,6886
Erro (%)	0	0	0	0	0

9.5. Deslocamento vertical imediato

Software	δ_1 (m)	δ_2 (m)	δ_3 (m)
FAST	$-2,75337 \cdot 10^{-3}$	$-5,02341 \cdot 10^{-4}$	$-2,75337 \cdot 10^{-3}$
FTOOL	$-2,75335 \cdot 10^{-3}$	$-5,02338 \cdot 10^{-4}$	$-2,75335 \cdot 10^{-3}$
Erro (%)	$7,2639 \cdot 10^{-6}$	$5,9721 \cdot 10^{-5}$	$7,2639 \cdot 10^{-6}$

9.6. Tensões nas seções

Fibra	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_4 (MPa)	σ_5 (MPa)
Superior	-6,71772	-0,0441167	-5,13899	-0,0441167	-6,71772
Inferior	-1,30788	-7,98148	-2,88661	-7,98148	-1,30788

10. Combinação frequente (CF)

10.1. Carga aplicada inicial (Escrita inicial)

Q _{cfi} (1)	Q _{cfi} (2)	Q _{cfi} (3)	Q _{cfi} (4)	Q _{cfi} (5)	Q _{cfi} (6)	Q _{cfi} (7)
-17,48	3,36	-153,45	-153,45	-106,88	-106,88	-8,28

Q _{cfi} (8)	Q _{cfi} (9)	Q _{cfi} (10)	Q _{cfi} (11)	Q _{cfi} (12)	Q _{cfi} (13)	Q _{cfi} (14)
-8,28	-106,88	-106,88	-153,45	-153,45	3,36	-17,48

10.2. Leitura das cargas concentradas dos pilares (Leitura inicial)

Software	F ₁ (kN)	F ₂ (kN)
FAST	310,8270	310,8270
FTOOL	310,8276	310,8276
Erro (%)	$1,9303 \cdot 10^{-4}$	$1,9303 \cdot 10^{-4}$

10.3. Carga inicial adicionada das cargas distribuídas nos pilares (Escrita final)

q _{cff} (1)	q _{cff} (2)	q _{cff} (3)	q _{cff} (4)	q _{cff} (5)	q _{cff} (6)	q _{cff} (7)
-17,48	3,36	-153,45	157,38	203,95	-106,88	-8,28

q _{cff} (8)	q _{cff} (9)	q _{cff} (10)	q _{cff} (11)	q _{cff} (12)	q _{cff} (13)	q _{cff} (14)
-8,28	-106,88	-203,95	157,38	-153,45	3,36	-17,48

10.4. Leitura dos momentos (Leitura Final)

Software	M ₁ (kN.m)	M ₂ (kN.m)	M ₃ (kN.m)	M ₄ (kN.m)	M ₅ (kN.m)
FAST	63,6340	-88,7956	25,1622	-88,7956	63,6340
FTOOL	63,6340	-88,7956	25,1622	-88,7956	63,6340
Erro (%)	0	0	0	0	0

10.5. Tensões nas seções

Fibra	σ ₁ (MPa)	σ ₂ (MPa)	σ ₃ (MPa)	σ ₄ (MPa)	σ ₅ (MPa)
Superior	-7,54802	0,920289	-5,4107	0,920289	-7,54802
Inferior	-0,477578	-8,94589	-2,6149	-8,94589	-0,477578

11. Combinação no ato da protensão (ATO)

11.1. Carga aplicada inicial (Escrita inicial)

Q _{atoi} (1)	Q _{atoi} (2)	Q _{atoi} (3)	Q _{atoi} (4)	Q _{atoi} (5)	Q _{atoi} (6)	Q _{atoi} (7)
8,51	34,31	-159,74	-159,74	-102,11	-102,11	19,90

Q _{atoi} (8)	Q _{atoi} (9)	Q _{atoi} (10)	Q _{atoi} (11)	Q _{atoi} (12)	Q _{atoi} (13)	Q _{atoi} (14)
19,90	-102,11	-102,11	-159,74	-159,74	34,31	8,51

11.2. Leitura das cargas concentradas dos pilares (Leitura inicial)

Software	F ₁ (kN)	F ₂ (kN)
FAST	52,9990	52,9990
FTOOL	52,9989	52,9989
Erro (%)	$1,8868 \cdot 10^{-4}$	$1,8868 \cdot 10^{-4}$

11.3. Carga inicial adicionada das cargas distribuídas nos pilares (Escrita final)

Qatof (1)	Qatof (2)	Qatof (3)	Qatof (4)	Qatof (5)	Qatof (6)	Qatof (7)
8,51	34,31	-159,74	-106,75	-49,11	-102,11	19,90

Qatof (8)	Qatof (9)	Qatof (10)	Qatof (11)	Qatof (12)	Qatof (13)	Qatof (14)
19,90	-102,11	-49,11	-106,75	-159,74	34,31	8,51

11.4. Leitura dos momentos (Leitura Final)

Software	M ₁ (kN.m)	M ₂ (kN.m)	M ₃ (kN.m)	M ₄ (kN.m)	M ₅ (kN.m)
FAST	-146,5540	151,8070	-42,5885	151,8070	-146,5540
FTOOL	-146,5545	151,8072	-42,5884	151,8072	-146,5545
Erro (%)	$3,4117 \cdot 10^{-4}$	$1,3175 \cdot 10^{-4}$	$2,3481 \cdot 10^{-4}$	$1,3175 \cdot 10^{-4}$	$3,4117 \cdot 10^{-4}$

11.5. Tensões nas seções

Fibra	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_4 (MPa)	σ_5 (MPa)
Superior	3,22749	-12,9481	-2,14837	-12,9481	3,22749
Inferior	-12,6563	3,21932	-6,88043	3,21932	-12,6563

12. Restrições

1	-1,1429	27	-0,0283
2	-0,7000	28	-0,4273
3	-2,0000	29	-0,8408
4	0,0000	30	-0,7148
5	-5,0000	31	-0,8919
6	-0,8000	32	-0,7748
7	-0,0182	33	-0,6925
8	-0,3000	34	-0,8993
9	-0,0252	35	-0,5558
10	-0,0300	36	-0,9998
11	-0,0021	37	-0,6267
12	-0,9200	38	-0,7393
13	-0,0252	39	-0,0283
14	-0,0300	40	-0,4273
15	-0,0182	41	-0,9295
16	-0,3000	42	-0,6261
17	-0,9295	43	-0,9817
18	-0,6261	44	-0,6850
19	-0,9817	45	-0,4387
20	-0,6850	46	-0,0959
21	-0,4387	47	-0,8004

22	-0,0959	48	-0,9636
23	-0,5558	49	-0,8004
24	-0,9998	50	-4,7577
25	-0,6267	51	-8,1575
26	-0,7393	52	-8,1575
		53	-4,7577

13. Hiperestático

13.1. Leitura das cargas concentradas dos pilares (Leitura inicial)

Software	F ₁ (kN)	F ₂ (kN)
FAST	2,82736	2,82736
FTOOL	2,82740	2,82740
Erro (%)	$1,4147 \cdot 10^{-3}$	$1,4147 \cdot 10^{-3}$

13.2. Leitura dos momentos (Leitura Final)

Software	M ₁ (kN.m)	M ₂ (kN.m)	M ₃ (kN.m)	M ₄ (kN.m)	M ₅ (kN.m)
FAST	14,1368	28,2736	28,2736	28,2736	14,1368
FTOOL	14,1370	28,2740	28,2740	28,2740	14,1370
Erro (%)	$1,4147 \cdot 10^{-3}$	$1,4147 \cdot 10^{-3}$	$1,4147 \cdot 10^{-3}$	$1,4147 \cdot 10^{-3}$	$1,4147 \cdot 10^{-4}$

14. Estado Limite Último

14.1. Leitura dos momentos das cargas permanentes e acidentais

Software	M ₁ (kN.m)	M ₂ (kN.m)	M ₃ (kN.m)	M ₄ (kN.m)	M ₅ (kN.m)
FAST	420,00	-560,00	140,00	-560,00	420,00
FTOOL	420,00	-560,00	140,00	-560,00	420,00
Erro (%)	0	0	0	0	0

14.2. Adição dos momentos hiperestáticos à combinação no ELU

Software	M ₁ (kN.m)	M ₂ (kN.m)	M ₃ (kN.m)	M ₄ (kN.m)	M ₅ (kN.m)
FAST	436,964	-534,554	173,928	-534,554	436,964

15. Cálculo da armadura passiva

15.1. Altura útil

d _{p1} (m)	d _{p2} (m)	d _{p3} (m)	d _{p4} (m)	d _{p5} (m)
0,4820	0,5522	0,3208	0,5522	0,4820

15.2. $M_{Rd,lim}$

$M_{Rd,lim}$ (kN.m)	$M_{Rd,lim}$ (1)	$M_{Rd,lim}$ (2)	$M_{Rd,lim}$ (3)	$M_{Rd,lim}$ (4)	$M_{Rd,lim}$ (5)
	499,669	655,815	221,339	655,815	499,669

14.3. M_{Rd1}

M_{Rd1} (kN.m)	M_{Rd1} (1)	M_{Rd1} (2)	M_{Rd1} (3)	M_{Rd1} (4)	M_{Rd1} (5)
	436,964	534,554	173,928	534,554	436,964

14.4. M_{Rd2}

M_{Rd2} (kN.m)	M_{Rd2} (1)	M_{Rd2} (2)	M_{Rd2} (3)	M_{Rd2} (4)	M_{Rd2} (5)
	0	0	0	0	0

14.5. Linha neutra para cada excentricidade

x_1 (m)	x_2 (m)	x_3 (m)	x_4 (m)	x_5 (m)
0,183474	0,193095	0,107403	0,193095	0,183474

14.6. Aço passivo

Parâmetros necessários para cálculo do aço passivo					
Vão/Altura útil	L_1/d_{p1}	$((L_1 + L_2)/2)/d_{p2}$	L_2/d_{p3}	$((L_2 + L_3)/2)/d_{p4}$	L_3/d_{p5}
	20,7469	18,1094	31,1721	18,1094	20,7469
ρ_p	$\rho_{p(1)}$	$\rho_{p(2)}$	$\rho_{p(3)}$	$\rho_{p(4)}$	$\rho_{p(5)}$
	0,004149	0,003622	0,006234	0,003622	0,004149
$\Delta\sigma_p$ (MPa)	$\Delta\sigma_{p(1)}$	$\Delta\sigma_{p(2)}$	$\Delta\sigma_{p(3)}$	$\Delta\sigma_{p(4)}$	$\Delta\sigma_{p(5)}$
	166,40	180,44	134,16	180,44	166,4
σ_{cp} (MPa)	$\sigma_{cp(1)}$	$\sigma_{cp(2)}$	$\sigma_{cp(3)}$	$\sigma_{cp(4)}$	$\sigma_{cp(5)}$
	7,5991	11,2685	3,6636	11,2685	7,5991
P_n (kN)	$P_{n(1)}$	$P_{n(2)}$	$P_{n(3)}$	$P_{n(4)}$	$P_{n(5)}$
	677,966	691,435	663,521	691,435	677,966
σ_n (MPa)	$\sigma_{n(1)}$	$\sigma_{n(2)}$	$\sigma_{n(3)}$	$\sigma_{n(4)}$	$\sigma_{n(5)}$
	1129,94	1152,39	1105,87	1152,39	1129,94
σ_{pd} (MPa)	$\sigma_{pd(1)}$	$\sigma_{pd(2)}$	$\sigma_{pd(3)}$	$\sigma_{pd(4)}$	$\sigma_{pd(5)}$
	1127,26	1158,98	1078,29	1158,98	1127,26
A_{pn} (cm ²)	$A_{pn(1)}$	$A_{pn(2)}$	$A_{pn(3)}$	$A_{pn(4)}$	$A_{pn(5)}$
	9,4867	9,7108	5,8055	9,7108	9,4867
A_s (cm ²)	$A_{s(1)}$	$A_{s(2)}$	$A_{s(3)}$	$A_{s(4)}$	$A_{s(5)}$
	9,0353	9,8868	0	9,8868	9,0353
A'_s (cm ²)	$A'_{s(1)}$	$A'_{s(2)}$	$A'_{s(3)}$	$A'_{s(4)}$	$A'_{s(5)}$
	0	0	0	0	0
n_{bar}	$n_{bar(1)}$	$n_{bar(2)}$	$n_{bar(3)}$	$n_{bar(4)}$	$n_{bar(5)}$
	7	8	3	8	7

15. Função objetivo

Composição do custo total			
Concreto	Aço ativo	Aço passivo	Total
R\$ 3493,85	R\$ 7024,77	R\$ 3052,10	R\$ 13570,7
25,75%	51,76%	22,49%	100%

