



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

JHONATAS PEREIRA DO NASCIMENTO

**EQUIDECOMPOSIÇÃO NO PLANO E NO ESPAÇO: DO TEOREMA DE
WALLACE-BOLYAI-GERWIEN AO PARADOXO DE BANACH-TARSKI – UMA
ABORDAGEM HISTÓRICA, CONCEITUAL E DIDÁTICA.**

FORTALEZA

2025

JHONATAS PEREIRA DO NASCIMENTO

EQUIDECOMPOSIÇÃO NO PLANO E NO ESPAÇO: DO TEOREMA DE WALLACE-
BOLYAI-GERWIEN AO PARADOXO DE BANACH-TARSKI – UMA ABORDAGEM
HISTÓRICA, CONCEITUAL E DIDÁTICA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N195e Nascimento, Jhonatas Pereira do.
EQUIDECOMPOSIÇÃO NO PLANO E NO ESPAÇO: DO TEOREMA DE WALLACE-BOLYAI-
GERWIEN AO PARADOXO DE BANACH-TARSKI – UMA ABORDAGEM HISTÓRICA,
CONCEITUAL E DIDÁTICA. / Jhonatas Pereira do Nascimento. – 2025.
125 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Equidecomposição. 2. Geometria. 3. Área. 4. Volume. 5. Paradoxo. I. Título.

CDD 510

JHONATAS PEREIRA DO NASCIEMENTO

EQUIDECOMPOSIÇÃO NO PLANO E NO ESPAÇO: DO TEOREMA DE WALLACE-
BOLYAI-GERWIEN AO PARADOXO DE BANACH-TARSKI – UMA ABORDAGEM
HISTÓRICA, CONCEITUAL E DIDÁTICA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 06/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Às minhas filhas, Maitê e Catarina.

.

AGRADECIMENTOS

A Deus pai, autor da vida, a Jesus Cristo, autor e consumidor da minha fé, e ao Espírito Santo, por todas as vezes que me convenceu dos meus pecados e renovou as esperanças durante o percurso.

À minha amada esposa, Giovanna Alves Machado, meu eterno obrigado pela compreensão, paciência e incentivo incondicional. Seu apoio foi o alicerce fundamental para que este sonho se tornasse realidade.

Aos meus amados pais, Antonio Rodrigues do Nascimento e Joaquina Luiz Pereira toda a minha gratidão pela vida, pelos ensinamentos, pela educação e por sempre acreditarem em meu potencial, sendo fontes inesgotáveis de inspiração e amor.

Ao meu estimado orientador, Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva, minha sincera gratidão pela dedicação, paciência, valiosas orientações e por compartilhar seu vasto conhecimento. Sua expertise e constante apoio foram cruciais para a concretização deste trabalho.

À Banca Examinadora, muito obrigado por aceitarem o convite para avaliar este trabalho. Suas contribuições e questionamentos enriquecerão imensamente esta dissertação.

Ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e realizado na Universidade Federal do Ceará (UFC), pela oportunidade ímpar de aprofundar meus conhecimentos e pela estrutura oferecida para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores do curso, pela excelência das aulas e pela paixão com que compartilharam seus saberes, contribuindo significativamente para minha formação acadêmica e profissional.

Aos meus colegas de turma, pela parceria, colaboração e amizade. As trocas de experiências e o apoio mútuo tornaram a jornada do mestrado mais leve e gratificante.

Aos coordenadores e gestores das instituições de ensino onde atuo, pela compreensão e flexibilidade, que foram essenciais para conciliar as demandas profissionais com os estudos e a pesquisa.

*“Entrega o teu caminho ao Senhor, confia nele,
e o mais ele fará.”*

Salmo 37:5 (Bíblia Sagrada, 1993, p.744).

RESUMO

Esta dissertação investiga a equidecomposição de figuras planas e espaciais e suas aplicações no ensino de geometria, analisando desde os fundamentos teóricos - incluindo o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien para polígonos e o Terceiro Problema de Hilbert para poliedros - até o paradoxal resultado de Banach-Tarski, que desafia noções intuitivas de volume, propondo ao final uma abordagem didática que utiliza recortes e rearranjos geométricos para tornar o aprendizado de áreas e volumes mais intuitivo e significativo. Mais do que um estudo técnico, esta pesquisa é um convite a repensar a geometria como um campo vivo, capaz de inspirar estudantes a enxergá-la além dos cálculos. Ao leitor, ofereço uma jornada que entrelaça beleza matemática, desafios conceituais e possibilidades educacionais – um mergulho que, espero, desperte o desejo de explorar cada página e descobrir como a equidecomposição pode transformar o modo como vemos e ensinamos o mundo ao nosso redor.

Palavras-chave: equidecomposição; geometria; área; volume; o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien; o terceiro Problema de Hilbert; o paradoxo de Banach-Tarski.

ABSTRACT

This dissertation investigates the equidecomposition of plane and solid figures and its applications in geometry education, examining theoretical foundations - including the Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem for polygons and Hilbert's Third Problem for polyhedra - through to the paradoxical Banach-Tarski result, which challenges intuitive notions of volume. The study culminates in proposing a didactic approach employing geometric dissections and rearrangements to make the learning of areas and volumes more intuitive and meaningful, demonstrating how advanced mathematical concepts can be adapted to enrich basic education through activities that stimulate visualization and spatial reasoning.

Keywords: equidecomposition; geometry; área; volume; the Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem; Hilbert's Third Problem; the Banach-Tarski paradox.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Euclides de Alexandria.	20
Figura 2 - Arquimedes de Siracusa.	20
Figura 3 - Isaac Newton.	20
Figura 4 - Gottfried Wilhelm Leibniz.	21
Figura 5 - Questão do Vestibular da FUVEST, realizado em 2014.	31
Figura 6 - Questão do Vestibular da UNESP, realizado em 2018.	32
Figura 7 - Questão do Concurso Militar da AFA, realizado em 2021.	34
Figura 8 - Ilustração das regiões que serão desapropriadas.	35
Figura 9 - Questão 21 da prova amarela do ENEM 2008.	37
Figura 10 - Ilustração do quadrado com vértices e lados nomeados.	37
Figura 11 - Questão 152 da prova amarela do ENEM 2010.	38
Figura 12 - Questão 15 da prova 1ª fase da OBMEP nível 3, realizada em 2019.	40
Figura 13 - Decomposição da Figura 12.	40
Figura 14 - Quadrado equivalente a Figura 13.	41
Figura 15 - Exemplos de algumas formas com as peças do Tangram.	43
Figura 16 - Exemplos de algumas formas com as peças do Stomachion.	44
Figura 17 - Exemplos diversos de quadrados com as peças do Stomachion.	44
Figura 18 - Figuras equidecomponíveis	45
Figura 19 - Triângulo ABC equicomposto ao retângulo ABFE.	46
Figura 20 - Triangulação de um polígono qualquer, 1ª caso.	47
Figura 21 - Triangulação de um polígono qualquer, 2ª caso.	48
Figura 22 - Polígono com pontos de maior e menor abscissa únicos.	49
Figura 23 - Triângulo ABC contém outro vértice de P.	49
Figura 24 - Triângulo ABC não contém outro vértice de P.	50
Figura 25 - Triângulo ABC equicomposto ao retângulo ABFE.	52
Figura 26 - Paralelogramos equicomposto relativo ao 1º caso.	53
Figura 27 - Paralelogramos equicompostos relativo ao 2º caso.	53
Figura 28 - Paralelogramos equicompostos relativo ao 3º caso.	54
Figura 29 - Retângulos equicompostos.	54
Figura 30 - Polígonos equicomposto a um retângulo.	56
Figura 31 - Quadrado e triângulo equicompostos.	57
Figura 32 - Decomposição e translação do triângulo A.	58
Figura 33 - O paralelogramo P e o retângulo R, com bases e alturas iguais, admitem as	

decomposições $P = A \cup B$ e $R = A' \cup B'$, onde A é congruente a A' e B é congruente a B'	58
Figura 34 - Se nenhuma altura do paralelogramo estiver contida em seu interior, a partir de uma extremidade da base traça um zigzag em ângulos retos, o qual decompõe o paralelogramo na forma $P = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$. Por meio de translações paralelas à base.	58
Figura 35 - As linhas pontilhadas indicam como se obteve a decomposição $R = A \cup B \cup C$. A altura do pentágono A é igual à altura de R' . Para obter o lado inclinado de A , traçamos, a partir do vértice superior esquerdo de R , um segmento paralelo à diagonal pontilhada. Como R e R' têm áreas iguais, tem-se $R' = A' \cup B' \cup C'$, sem superposições.	59
Figura 36 - Temos $R = A \cup B \cup S$ e $R' = A' \cup B' \cup S'$, onde A' é congruente a A e B' é congruente a B . Se R e R' tiverem a mesma área, S e S' também terão. Agora a altura de S é menos de 2 vezes a altura de S' , de modo que podemos aplicar a estes dois retângulos o processo da Figura 32.	59
Figura 37 - Retângulos de bases congruentes.	61
Figura 38 - Paralelogramo equicomposto a um retângulo.	63
Figura 39 - Poliedro convexo: Tetraedro Triakis (Poliedro de Catalan).	65
Figura 40 - Poliedro convexo: Dodecaedro Truncado (Poliedro de Arquimedes).	65
Figura 41 - Poliedro convexo: Bipirâmide Quadrada Giroalongada (Poliedro de Johnson). ...	65
Figura 42 - Prisma convexo de bases paralelas.	66
Figura 43 - Prisma triangular reto equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo.	67
Figura 44 - Prisma pentagonal oblíquo equicomposto a um prisma pentagonal reto.	68
Figura 45 - Ângulo diedro.	70
Figura 46 - Ilustração do Teorema de Banach-Tarski.	84
Figura 47 - Layout de apresentação da palestra.	86
Figura 48 - Sumário de apresentações.	87
Figura 49 - Equidecomposição no Plano	88
Figura 50 - Equidecomposição no Espaço Tridimensional	89
Figura 51 - Interface do Tangram no site Divertido.	90
Figura 52 - Homem sentado do jogo 10.	90
Figura 53 - Aluno montando um desenho do Tangram.	91
Figura 54 - Aluna montando uma figura do Tangram.	92
Figura 55 - Interface do jogo Archimedes Puzzle.	93
Figura 56 - Alunos montando o Stomachion.	94
Figura 57 - Slide com a atividade proposta.	95

Figura 58 - Foto com os alunos que participaram da palestra e das atividades.	95
Figura 59 - Respostas sobre a pergunta: O que você mais gostou na palestra?	100
Figura 60 - Respostas sobre a pergunta: Quais sugestões/dicas/elogios você pode fazer?	100

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Quantitativo de alunos satisfeitos com a palestra.	97
Gráfico 2 - Quantitativo de alunos que acharam a palestra útil.	98
Gráfico 3 - Percentual de alunos que conheciam o Tangram.	98
Gráfico 4 - Percentual de alunos que conheciam o Stomachion.	99
Gráfico 5 - Percentual sobre o que alunos acharam do Tangram.	99
Gráfico 6 - Percentual sobre o que alunos acharam do Stomachion.	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Quadro de habilidades dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental relacionadas à Unidade Temática Geometria e Grandezas e Medidas	23
Tabela 2 – Quadro de habilidades dos anos finais do Ensino Fundamental relacionadas à Unidade Temática Geometria e Grandezas e Medidas.	25
Tabela 3 – Quadro de habilidades do Ensino Médio relacionadas à Unidade Temática Geometria e Medidas.	27
Tabela 4 - Competências e Habilidades da Matriz de Referência do ENEM que relacionam com Geometria	36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AFA	Academia da Força Aérea
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EFOMM	Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante.
ESPCEX	Escola Preparatória de Cadetes do Exército
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
IME	Instituto Militar de Engenharia
IMO	Olimpiada Internacional de Matemática
ITA	Instituto Tecnológico da Aeronáutica
OBM	Olimpiada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.
OCM	Olimpiada Cearense de Matemática
UERJ	Universidade Estadual do Rio de Janeiro
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNESP	Universidade Estadual Paulista
USP	Universidade de São Paulo
PUCPR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Contexto Histórico	16
2.2.	Ensino de Áreas de Figuras Planas na Educação Básica	21
2.2.1	<i>Áreas de Figuras Planas na BNCC.....</i>	22
2.2.2	<i>Áreas de Figuras Planas nos VESTIBULARES</i>	29
2.2.2	<i>Áreas de Figuras Planas nas OLÍMPIADAS</i>	38
3	EQUIDECOMPOSIÇÃO NO PLANO	43
3.1.	Equidecomposição	46
3.2	Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien	56
3.3	Cálculo de Áreas por Equidecomposição	59
4	EQUIDECOMPOSIÇÃO NO ESPAÇO	64
4.1	Equidecomposição no Espaço Tridimensional	64
4.2	O Terceiro Problema de Hilbert	68
5	O PARADOXO DE BANACH-TARSKI	77
5.1	O Teorema de Banach-Tarski na Circunferência	78
6	ABORDAGEM DIDÁTICA	85
6.1	Palestra de Apresentação do Produto Educacional	86
6.2	Aprendendo sobre Equidecomposição com o <i>Tangram</i>	89
6.3	Aprendendo sobre Equidecomposição com o <i>Stomachion</i>	92
6.4	Conclusão das Atividades	94
6.5	Relato de Implementação do Produto Educacional: Um Estudo de Caso....	96
7	RESULTADOS.....	97
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS.....	108
	APÊNDICE B – PALESTRA APLICADA AOS ALUNOS.....	111
	APÊNDICE C – AXIOMAS DE ZEMERLO-FRAENKEL.....	118

1. INTRODUÇÃO

A Matemática, enquanto ciência que estrutura o pensamento lógico e formaliza relações espaciais, oferece ferramentas fundamentais para a compreensão de conceitos geométricos como áreas e volumes. Neste contexto, a equidecomposição de figuras planas e espaciais emerge como um tema de profundo interesse teórico e prático, com raízes históricas que remontam a problemas clássicos da geometria e implicações que transcendem o campo puramente abstrato, alcançando o ensino e a aprendizagem.

A equidecomposição é, em essência, a possibilidade de transformar uma figura em outra por meio de cortes e rearranjos, sem adição ou subtração de material. Essa noção, intuitiva em um primeiro momento, se aprofunda e ganha contornos rigorosos a partir de resultados clássicos como o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, que estabelece que dois polígonos de mesma área são equidecomponíveis no plano. No entanto, ao avançarmos para o espaço tridimensional, somos confrontados com resultados surpreendentes, como a impossibilidade de decompor certos sólidos em outros de mesmo volume — evidenciada pelo Terceiro Problema de Hilbert — e com paradoxos matemáticos instigantes, como o Paradoxo de Banach-Tarski.

No campo educacional, o ensino de áreas e volumes na educação básica frequentemente se limita a fórmulas e cálculos algébricos, negligenciando abordagens visuais e manipulativas que poderiam enriquecer a compreensão dos estudantes. A equidecomposição oferece uma perspectiva alternativa, promovendo a exploração de propriedades geométricas por meio de transformações concretas e intuitivas. Assim, esta pesquisa busca articular os fundamentos teóricos da equidecomposição com estratégias didáticas que possam ser aplicadas em sala de aula, contribuindo para o aprimoramento do ensino de Matemática. Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No segundo capítulo, Fundamentação Teórica, será estabelecido o contexto histórico do problema, destacando como a busca por métodos de comparação de áreas e volumes levou ao desenvolvimento de teorias mais sofisticadas, como a teoria da medida. Em seguida, será discutido o ensino de áreas de figuras planas na educação básica, com base nas avaliações externas, tais como o Exame Nacional do Ensino Médio, Olimpíadas de Matemática e Vestibulares de diversas instituições de Ensino.

O terceiro capítulo, Equidecomposição no Plano, abordará o célebre Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, que estabelece condições necessárias e suficientes para que dois polígonos planos sejam equidecomponíveis. Esse resultado não apenas ilustra a elegância do conceito, mas também oferece uma ferramenta poderosa para a compreensão intuitiva de áreas, permitindo que estudantes visualizem transformações geométricas de maneira concreta.

No quarto capítulo, Equidecomposição no Espaço, será discutido o Terceiro Problema de Hilbert, que questiona se poliedros de volumes iguais são necessariamente equidecomponíveis. A solução negativa, fornecida por Max Dehn, introduzindo invariantes geométricos como o invariante de Dehn, revela uma diferença fundamental entre o plano e o espaço tridimensional. O quinto capítulo tratará do Paradoxo de Banach-Tarski, um resultado surpreendente que demonstra a possibilidade de decompor uma esfera sólida em um número finito de partes não mensuráveis e remontá-las para formar duas esferas idênticas à original. Essencialmente, o maior interesse deste paradoxo para o capítulo é tentar visualizar sua aplicação no plano.

Por fim, o sexto e sétimo capítulo, Abordagem Didática e Resultados, materializam o objetivo central desta dissertação: explorar o potencial do conceito de equidecomposição como uma ferramenta didática para o ensino de áreas de figuras planas. A proposta se concretiza no desenvolvimento de uma abordagem pedagógica específica, materializada em atividades interativas e jogos online concebidos para aumentar o engajamento e a motivação dos alunos. A relevância desta pesquisa reside em oferecer aos educadores de matemática uma alternativa concreta e lúdica ao ensino tradicional de áreas, que frequentemente se restringe à memorização de fórmulas. Ao manipular as decomposições virtualmente, os estudantes são incentivados a construir uma compreensão conceitual e intuitiva do que a área representa, conectando um problema histórico da matemática a uma experiência de aprendizado dinâmica e significativa. Dessa forma, o trabalho cumpre seu propósito ao não apenas investigar um tema matemático profundo, mas também ao traduzi-lo em uma ferramenta pedagógica prática e validada, cuja eficácia é discutida na análise dos resultados.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O estudo de área de figuras planas consiste na determinação da medida da superfície ocupada por uma forma geométrica bidimensional, expressa em unidades quadradas, como metro quadrado. Segundo Lima (2009), a noção de área surge naturalmente da necessidade humana de quantificar e comparar extensões de terrenos, sendo um dos primeiros conceitos matemáticos desenvolvidos pelas civilizações antigas.

Esse conceito, que surgiu de necessidades práticas como a medição de terrenos e a construção civil, evoluiu para uma formalização matemática rigorosa, tornando-se um dos pilares da geometria. Como destacam Pavanello e Pietropaolo (2013), o ensino de áreas na educação básica deve considerar tanto seu aspecto histórico-cultural quanto suas aplicações contemporâneas, promovendo uma aprendizagem significativa.

Na educação básica, o ensino de área é introduzido nos anos iniciais do Ensino Fundamental, inicialmente de forma intuitiva, e progressivamente avança para métodos mais estruturados, como fórmulas e decomposição de figuras. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998), o trabalho com noções de área deve iniciar-se por atividades concretas de comparação e medição, utilizando materiais manipuláveis, antes da introdução de fórmulas.

Este capítulo está organizado em dois tópicos principais, que consiste no *Contexto Histórico*, onde há uma retrospectiva sobre a evolução do conceito de área, desde as civilizações antigas até sua formalização matemática, e o *Ensino de Área na Educação Básica*, visando mostrar como esse conteúdo é abordado no currículo escolar e quais as principais dificuldades dos alunos.

2.1. Contexto Histórico

A reflexão sobre a gênese do conceito de área levanta questionamentos sobre sua natureza: seria uma construção humana ou, assim como o senso numérico, uma noção inerente à cognição humana, anterior até mesmo à sua conscientização?

Evidências históricas apontam que sociedades avançadas, estabelecidas às margens de grandes rios — como o Nilo (Egito), o Tigre e Eufrates (Mesopotâmia), o Indo e Ganges (Ásia Centro-Sul) e o Huang Ho e Yangtzé (Ásia Oriental) — desenvolveram sofisticados sistemas de engenharia que demandavam conhecimentos geométricos práticos (Robins; Shute, 1987).

Conforme destacam Boyer e Merzbach (2012), esses avanços tecnológicos estavam

intrinsecamente ligados ao desenvolvimento matemático. Essas civilizações foram pioneiras no desenvolvimento de tecnologias e, conseqüentemente, de saberes matemáticos aplicados, como a criação de calendários precisos e a padronização de sistemas de pesos e medidas — essenciais para a organização da produção agrícola, armazenamento e distribuição de alimentos. A comprovação desses avanços pode ser verificada em documentos históricos fundamentais, como os papiros de Moscou (ou Golenishev), que contém soluções para problemas de volumes e áreas, conforme Gillings (1972), e o papiro Rhind (ou Ahmes) com métodos para cálculo de áreas, segundo Chace (1927), datados aproximadamente de 1850 a.C. e 1650 a.C., respectivamente.

Evidências históricas comprovam que tanto egípcios quanto babilônios desenvolveram métodos eficazes para o cálculo de áreas, incluindo a do círculo, além de estabelecerem regras gerais para determinar áreas de triângulos, retângulos e trapézios (Neugebauer, 1969). Esses conhecimentos eram aplicados principalmente na mensuração de terrenos agrícolas, mesmo quando estes apresentavam formatos geométricos complexos (Robins, 1990). Em geral a unidade de medida utilizada era um quadrado, mas em algumas situações a estratégia utilizada era decompor a superfície em triângulos ou retângulos e calcular a sua área como a soma das áreas das regiões resultantes desta decomposição.

Não se sabe ao certo porque o quadrado foi escolhido para unidade de área, possivelmente por ser uma figura mais simples. Existem algumas hipóteses de terem escolhido o quadrado para unidade de área inicial, conforme Struik (1987), a hipótese era artesanal, pois estava relacionada às técnicas primitivas de tecelagem de cestos, uma atividade que antecedeu a fiação. Na perspectiva de Joseph (2011), a hipótese era arquitetônica, baseada no uso de ladrilho quadrados em mosaicos hindus e chineses. Já Seidenberg (1978), sustentava a hipótese decorativa, inspirada pelos padrões quadriculados característicos da cerâmica babilônica.

De qualquer forma, o uso do quadrado para ajustar outras figuras e encontrar a região superficial era muito utilizado. Diante desta frequência, um nome *quadratura* foi empregado no sentido de determinar um quadrado com área igual à área da figura em estudo, ou seja, construir um quadrado equivalente a figura. E nesse processo, era preciso decompor a figura para recompô-la formando o quadrado.

Sobre a quadratura, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017) diz o seguinte:

Assim, a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau. (Brasil, 2017).

Heath (1921), ao discutir os Elementos de Euclides, ressalta a importância da quadratura para a geometria grega: "A quadratura de uma figura era o objetivo de muitos problemas geométricos, sendo a busca por uma área equivalente em forma de quadrado uma maneira de comparar e quantificar diferentes figuras planas". Embora o conceito de área como uma medida numérica não estivesse plenamente desenvolvido, a estratégia de buscar uma equivalência de área era uma noção fundamental e relevante.

A civilização grega representou um marco crucial na transição dos métodos empíricos para uma abordagem mais rigorosa e dedutiva da geometria. Com Euclides e sua obra monumental, "Os Elementos", o cálculo de áreas, ou mais precisamente, a teoria das áreas equivalentes, foi formalizada dentro de um sistema axiomático. Euclides não se preocupava diretamente com a atribuição de um número à área, mas sim com a comparação de áreas e a prova de equivalência entre figuras. Seus teoremas sobre a equivalência de áreas de paralelogramos e triângulos sob certas condições estabeleceram as bases para a compreensão abstrata do conceito.

Kline (1972) observa que

A matemática grega, especialmente a euclidiana, não desenvolveu um conceito numérico de área no sentido moderno. Em vez disso, focou na equivalência de figuras por meio de construções geométricas, o que se manifestou na teoria das áreas (Kline, 1972, p.50)

Avançando além das figuras retilíneas, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) elevou o estudo da área a um novo patamar, desenvolvendo métodos para calcular a área de figuras curvilíneas, como a parábola. Sua obra *A Quadratura da Parábola* é um dos exemplos mais notáveis da aplicação do método de exaustão, precursor do cálculo integral. Ao inscrever e circunscrever polígonos na figura e calcular a soma de suas áreas, Arquimedes conseguia aproximar a área da parábola com qualquer grau de precisão desejado.

Segundo Boyer e Merzbach (1991),

Arquimedes levou a geometria grega ao seu auge, desenvolvendo métodos que estavam próximos do cálculo integral moderno. Sua quadratura da parábola, em particular, demonstra uma sofisticação matemática notável para sua época. (Boyer e Merzbach, 1991, p.140)

Após o período grego, o conceito de área passou por uma transformação gradual, impulsionada em parte pela influência de outras culturas e pela crescente intersecção entre a geometria e a aritmética. A introdução do sistema de numeração indo-arábico e o avanço da álgebra no mundo islâmico e posteriormente na Europa medieval e renascentista, permitiram uma abordagem mais numérica e quantitativa da área. A área passou a ser vista não apenas como uma equivalência entre figuras, mas como uma medida escalar associada a uma superfície.

Smith (1923) observa que a passagem da ideia de equivalência geométrica para a atribuição de um valor numérico à área foi um processo gradual, influenciado pela evolução da aritmética e da álgebra. A familiaridade com a multiplicação e a capacidade de realizar cálculos com números racionais e, posteriormente, irracionais, abriu caminho para a definição moderna de área como um produto de grandezas lineares.

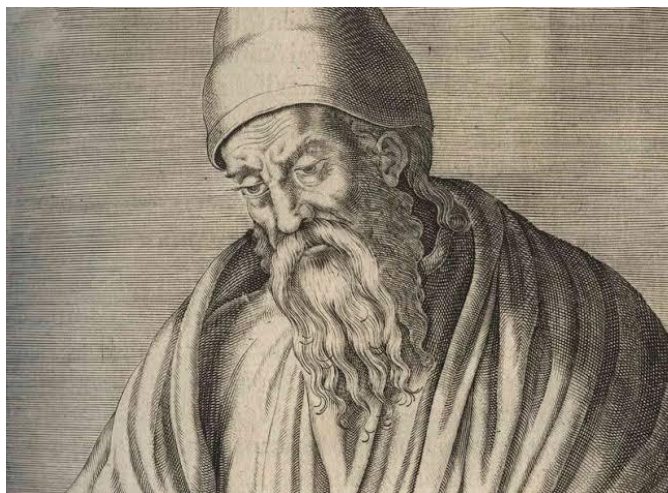
O século XVII testemunhou uma revolução na matemática com o advento do cálculo diferencial e integral, desenvolvido independentemente por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. O cálculo integral, em particular, forneceu as ferramentas analíticas para determinar a área de figuras complexas, incluindo aquelas delimitadas por curvas arbitrárias. A integral definida formalizou a ideia de somar infinitesimais para obter a área total, transcendendo os métodos de exaustão de Arquimedes.

Para Stewart (2020),

O cálculo integral revolucionou a maneira como a área é compreendida e calculada. A integral definida tornou-se a ferramenta fundamental para determinar a área de regiões sob curvas e entre curvas, independentemente da complexidade de suas fronteiras. (Stewart, 2020, p.367)

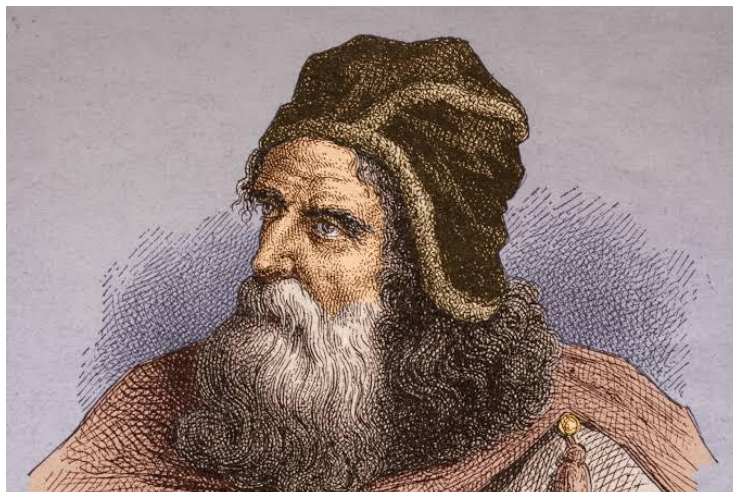
Essa formalização permitiu a determinação precisa de áreas em contextos que seriam intratáveis pela geometria euclidiana tradicional. A função $A = \int_a^b f(x)dx$ tornou-se a representação canônica da área sob uma curva. As Figuras 1, 2, 3 e 4 destacam nomes de matemáticos importantes que fizeram parte dessa construção do conceito de área, das ideias iniciais até uma formalização por meio de cálculo diferencial integral.

Figura 1 - Euclides de Alexandria.



Fonte: Google Imagens (2025).

Figura 2 - Arquimedes de Siracusa.



Fonte: Google Imagens (2025).

Figura 3 - Isaac Newton.



Fonte: Google Imagens (2025).

Figura 4 - Gottfried Wilhelm Leibniz.



Fonte: Google Imagens.

2.2. Ensino de Áreas de Figuras Planas na Educação Básica

O ensino na Educação Básica demanda constantes reflexões críticas, uma vez que as avaliações predominantes frequentemente limitam-se a verificar se os alunos atingem padrões numéricos estabelecidos. Nesse contexto, o processo de ensino-aprendizagem em diversas disciplinas torna-se mecanizado, reduzindo-se à transmissão de fórmulas ou à memorização de trechos destacados, sem exigir reflexão substantiva sobre os textos ou a compreensão conceitual subjacente às aplicações matemáticas.

Quando focalizamos especificamente o estudo de Áreas de Figuras Planas, observa-se uma gradual transição de abordagem geométrica para uma perspectiva predominantemente algébrica. O conteúdo, em muitos casos, restringe-se à substituição de valores em variáveis pré-estabelecidas para obtenção de resultados numéricos. Como salienta Lima (2009), tal abordagem, embora eficaz para resolução de exercícios padronizados, negligencia o desenvolvimento do raciocínio espacial e da capacidade de argumentação matemática - elementos fundamentais para a construção de um pensamento crítico consolidado.

A literatura na área de Educação Matemática corrobora essa análise, evidenciando que a memorização de fórmulas sem compreensão de sua origem conceitual leva a erros sistemáticos quando os estudantes enfrentam problemas não convencionais (Dante, 2013). Contudo, o ensino de áreas de figuras planas apresenta potencial para transcender essa abordagem puramente algorítmica. Os tópicos subsequentes demonstrarão como as competências e habilidades já estabelecidas nos currículos podem fornecer bases sólidas para

uma construção reflexiva do conhecimento geométrico. Nessa perspectiva, conforme argumenta Skovsmose (2000), a matemática escolar deve priorizar a literacia crítica, capacitando os alunos não apenas para calcular, mas para questionar, justificar e construir significados matemáticos consistentes.

2.2.1 O Ensino de Áreas de Figuras Planas na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), enquanto documento normativo de caráter obrigatório para as escolas de Educação Básica no Brasil, reconfigura as expectativas de aprendizagem e o desenvolvimento de competências e habilidades em todas as áreas do conhecimento. No âmbito da matemática, e em particular da geometria, a BNCC propõe uma abordagem que visa transcender a tradicional fragmentação dos conteúdos, buscando uma construção progressiva do conhecimento, da Educação Infantil ao Ensino Médio. Nesse contexto, o ensino de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos assume um papel central, exigindo dos alunos não apenas a aplicação de fórmulas, mas uma compreensão conceitual aprofundada e a capacidade de relacionar esses conceitos a diversas situações do cotidiano.

A BNCC organiza a matemática em cinco Unidades Temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. A geometria, juntamente com Grandezas e Medidas, são os pilares para o desenvolvimento das habilidades relacionadas a áreas e volumes. A importância da BNCC reside em sua ênfase na construção de uma aprendizagem significativa, que valoriza a exploração, a experimentação e a conexão entre os diferentes campos da matemática e com outras áreas do saber. Conforme a própria BNCC (Brasil, 2018) estabelece

A matemática deve permitir ao estudante construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais, compreender as relações de proporcionalidade e as grandezas e medidas, manipular as expressões algébricas e desenvolver o raciocínio geométrico, estatístico e probabilístico. (Brasil, 2018)

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, que consiste do 1^a ao 5^a ano, a BNCC foca na construção intuitiva de noções espaciais e na introdução das primeiras ideias sobre medida. A Tabela 1 mostra as habilidades relacionadas às unidades temáticas geometria e grandezas e medidas.

Tabela 1 - Quadro de habilidades dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental relacionadas à Unidade Temática Geometria e Grandezas e Medidas

COMPONENTE	ANO/FAIXA	UNIDADE TEMÁTICA	HABILIDADES
Matemática	1ª	Geometria	(EF01MA11), (EF01MA12), (EF01MA13), (EF01MA14).
Matemática	1ª	Grandezas e Medidas	(EF01MA15), (EF01MA16), (EF01MA17), (EF01MA18), (EF01MA19).
Matemática	2ª	Geometria	(EF02MA12), (EF02MA13), (EF02MA14), (EF02MA15).
Matemática	2ª	Grandezas e Medidas	(EF02MA16), (EF02MA17), (EF02MA18), (EF02MA19), (EF02MA20).
Matemática	3ª	Geometria	(EF03MA12), (EF03MA13), (EF03MA14), (EF03MA15), (EF03MA16).
Matemática	3ª	Grandezas e Medidas	(EF03MA17), (EF03MA18), (EF03MA19), (EF03MA20), (EF03MA21), (EF03MA22), (EF03MA23), (EF03MA24).
Matemática	4ª	Geometria	(EF04MA16), (EF04MA17), (EF04MA18), (EF04MA19).
Matemática	4ª	Grandezas e Medidas	(EF04MA20), (EF04MA21), (EF04MA22), (EF04MA23), (EF04MA24), (EF04MA25).
Matemática	5ª	Geometria	(EF05MA14), (EF05MA15), (EF05MA16), (EF05MA17), (EF05MA18).
Matemática	5ª	Grandezas e Medidas	(EF05MA19), (EF05MA20), (EF05MA21).

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A BNCC estabelece um sistema de codificação alfanumérica para designar e organizar de forma unívoca as competências e habilidades propostas para a educação básica brasileira. Essa codificação estrutura-se a partir de uma lógica sequencial que permite a identificação precisa de cada objetivo de aprendizagem no documento. A título de exemplo, o código EF04MA05 pode ser decomposto da seguinte forma: o primeiro par de letras (EF) indica a etapa do Ensino Fundamental; o primeiro par de números (04) especifica o 4º ano; o segundo par de letras (MA) aponta para o componente curricular de Matemática; e o número final (05) designa a quinta habilidade listada para o referido ano e componente. Tal padrão, que articula etapa de ensino, ano ou faixa etária, e componente ou área do conhecimento, cria uma linguagem comum para o planejamento pedagógico, a produção de materiais didáticos e os processos avaliativos em âmbito nacional, apresentando, contudo, variações estruturais para se adequar às especificidades da Educação Infantil, organizada por campos de experiência, e do Ensino Médio, estruturado por áreas do conhecimento.

A análise das habilidades de Geometria e Grandezas e Medidas para as turmas do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, conforme preconizado pela BNCC, revela uma

intencionalidade pedagógica voltada para o desenvolvimento de um pensamento espacial e de uma compreensão prática das medidas no cotidiano dos estudantes. Longe de um ensino abstrato e puramente formal, a BNCC estabelece uma progressão que parte do concreto e da exploração intuitiva do mundo físico para a construção gradual de conceitos mais elaborados.

No que tange à Geometria, as habilidades iniciais, do 1^a e 2^a ano, priorizam o reconhecimento e a nomeação de figuras planas e espaciais, relacionando-as a objetos do cotidiano. Os alunos são incentivados a identificar características básicas, como lados, vértices e faces, e a explorar a localização e movimentação no espaço, utilizando pontos de referência e esboçando trajetórias. Essa fase é crucial para o desenvolvimento da visualização espacial e da linguagem geométrica. Nos anos seguintes, do 3^a ao 5^a ano, as habilidades se aprofundam, passando a exigir a classificação de figuras com base em suas características, o reconhecimento de planificações de sólidos e a ampliação do repertório de figuras geométricas. A manipulação e a observação de regularidades em formas geométricas são incentivadas, fundamentando a compreensão de conceitos mais abstratos que virão nos ciclos posteriores.

Paralelamente, a unidade de Grandezas e Medidas constrói as bases para a quantificação do mundo. Nos primeiros anos, o foco está na comparação e estimativa de grandezas como comprimento, massa, capacidade e tempo, utilizando termos comparativos, de maneira informal como *mais longo*, *mais pesado*, e unidades de medida não padronizadas como *palmos* ou *passos*. Gradualmente, a BNCC introduz as unidades de medida padronizadas mais usuais – metro, centímetro, litro, quilograma, horas, minutos – o manuseio de instrumentos de medida – régua, balança, relógio – e a resolução de problemas simples que envolvam essas grandezas. A introdução da noção de área como medida de superfície, que ocorre geralmente por contagem de quadrados em malhas, e a ideia de volume como espaço ocupado nos anos finais deste ciclo, representa um marco importante, pois estabelece as primeiras conexões entre a forma geométrica e sua quantificação.

Em síntese, a BNCC, para os Anos Iniciais, propõe uma abordagem didática que valoriza a experiência, a observação e a experimentação. As habilidades de Geometria e Grandezas e Medidas trabalham em sinergia para que o aluno construa uma compreensão robusta e intuitiva do espaço e da medida, essencial para o desenvolvimento de um raciocínio matemático aplicado. Ao conceber essas aprendizagens de forma progressiva e interconectada, o documento busca garantir que as crianças estabeleçam alicerces sólidos para o estudo mais formal das áreas e volumes que se dará nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Como ressaltam Pavanello e Campos (2013), a manipulação concreta de figuras (recortes, sobreposições) é crucial para que os alunos construam noções de congruência e

equivalência de áreas.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, que consiste do 6^a ao 9^a ano, a BNCC introduz o cálculo formal de áreas e volumes, sempre vinculado à resolução de problemas.

A Tabela 2 mostra as habilidades relacionadas às unidades temáticas geometria e grandezas e medidas.

Tabela 2 – Quadro de habilidades dos anos finais do Ensino Fundamental relacionadas à Unidade Temática Geometria e Grandezas e Medidas.

COMPONENTE	ANO/FAIXA	UNIDADE TEMÁTICA	HABILIDADES
Matemática	6 ^a	Geometria	(EF06MA16), (EF06MA17), (EF06MA18), (EF06MA19), (EF06MA20), (EF06MA21), (EF06MA22), (EF06MA23).
Matemática	6 ^a	Grandezas e Medidas	(EF06MA24), (EF06MA25), (EF06MA26), (EF06MA27), (EF06MA28), (EF06MA29).
Matemática	7 ^a	Geometria	(EF07MA19), (EF07MA20), (EF07MA21), (EF07MA22), (EF07MA23), (EF07MA24), (EF07MA25), (EF07MA26).
Matemática	7 ^a	Grandezas e Medidas	(EF07MA27), (EF07MA28), (EF07MA29), (EF07MA30), (EF07MA31), (EF07MA32), (EF07MA33).
Matemática	8 ^a	Geometria	(EF08MA14), (EF08MA15) (EF08MA16) (EF08MA17), (EF08MA18).
Matemática	8 ^a	Grandezas e Medidas	(EF08MA19), (EF03MA20) (EF03MA21).
Matemática	9 ^a	Geometria	(EF09MA10), (EF09MA11), (EF09MA12), (EF09MA13), (EF09MA14), (EF09MA15), (EF09MA16), (EF09MA17).
Matemática	9 ^a	Grandezas e Medidas	(EF09MA18), (EF09MA19).

Fonte: elaborado pelo autor(2025).

Os Anos Finais do Ensino Fundamental, 6^a ao 9^a ano, conforme a BNCC, representam um período de aprofundamento e formalização dos conhecimentos geométricos e das grandezas e medidas, construindo sobre as bases intuitivas lançadas nos anos anteriores. Esta fase é crucial para que o estudante transite de uma compreensão perceptiva para uma análise mais abstrata e dedutiva, preparando-o para os desafios do Ensino Médio.

Na unidade temática de Geometria, as habilidades evoluem para a classificação mais rigorosa de figuras planas e espaciais, considerando suas propriedades e relações. Os alunos são desafiados a identificar e classificar triângulos e quadriláteros com base em medidas de lados e ângulos, aprofundando o estudo de polígonos regulares e irregulares. A BNCC enfatiza a compreensão de transformações geométricas – translação, rotação, reflexão –, que são essenciais para entender a congruência e a semelhança de figuras. O uso de instrumentos de desenho geométrico, como réguas e compassos, e, de forma crescente, de softwares de

geometria dinâmica, é incentivado para a construção, análise e visualização de figuras, fortalecendo a intuição e a capacidade de argumentação. A introdução do plano cartesiano nessa etapa permite a representação e a análise de figuras em um sistema de coordenadas, estabelecendo uma ponte vital com a Álgebra.

No que se refere a Grandezas e Medidas, a BNCC estabelece a consolidação das unidades de medida padronizadas e suas transformações. É aqui que o ensino de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos ganha maior formalidade. Os alunos são esperados a calcular áreas de triângulos, quadriláteros – incluindo paralelogramos, losangos e trapézios – e círculos, utilizando fórmulas, mas também compreendendo a derivação e a lógica por trás delas. A BNCC estimula a resolução de problemas que envolvam grandezas como perímetro, área e volume em contextos reais, demandando do estudante a escolha da unidade de medida mais adequada e a interpretação dos resultados.

A compreensão do volume de prismas e cilindros é uma habilidade central, bem como a relação entre volume e capacidade. As habilidades se expandem para a aplicação desses conceitos em situações-problema mais complexas, que podem exigir a decomposição de sólidos em figuras mais simples ou a conversão entre diferentes unidades de medida. A BNCC também propõe a análise da relação entre perímetro e área, desmistificando a ideia de uma proporcionalidade direta entre as duas grandezas, o que contribui para um entendimento mais refinado da dimensão espacial.

Em síntese, os Anos Finais do Ensino Fundamental na BNCC direcionam o aprendizado da geometria para um nível mais formal e analítico. As habilidades relacionadas a áreas e volumes buscam não apenas a proficiência no cálculo, mas a capacidade de raciocinar geometricamente, de aplicar conceitos em contextos diversificados e de justificar procedimentos. Ao promover uma articulação entre a geometria e as grandezas e medidas, e ao incentivar o uso de tecnologias e a resolução de problemas significativos, a BNCC busca assegurar que os alunos desenvolvam um conhecimento sólido e funcional.

No Ensino Médio, a BNCC integra geometria a outros campos matemáticos, como Álgebra e Trigonometria.

A Tabela 3 mostra as habilidades relacionadas à unidade temática geometria e medidas.

Tabela 3 – Quadro de habilidades do Ensino Médio relacionadas à Unidade Temática Geometria e Medidas.

COMPONENTE	ANO/FAIXA	UNIDADE TEMÁTICA	COMPETÊNCIA	HABILIDADES
Matemática	EM	Geometria e Medidas	1	(EM13MAT103), (EM13MAT105).
Matemática	EM	Geometria e Medidas	2	(EM13MAT201).
Matemática	EM	Geometria e Medidas	3	(EM13MAT307), (EM13MAT308), (EM13MAT309), (EM13MAT313), (EM13MAT314).
Matemática	EM	Geometria e Medidas	5	(EM13MAT504), (EM13MAT105), (EM13MAT506), (EM13MAT509).

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

No Ensino Médio, a BNCC estabelece um patamar de aprendizagem em Geometria e Medidas que transcende a simples aplicação de fórmulas. Esta etapa é projetada para consolidar os conhecimentos adquiridos nos ciclos anteriores e, mais significativamente, para desenvolver habilidades de raciocínio abstrato, modelagem matemática e resolução de problemas complexos, preparando o estudante para a vida acadêmica e profissional. A ênfase recai na articulação dos conceitos geométricos com outras áreas da matemática e do conhecimento, visando uma compreensão mais holística e aplicada.

Na unidade temática de Geometria, as habilidades do Ensino Médio aprofundam-se na análise das propriedades de figuras planas e espaciais sob diferentes perspectivas. Os alunos são desafiados a investigar relações métricas em triângulos – incluindo as Leis do Seno e do Cosseno – e a aplicar noções de congruência e semelhança em contextos variados. A BNCC promove a compreensão da geometria analítica, permitindo a representação de figuras e o cálculo de áreas no plano cartesiano, o que representa uma ponte fundamental entre a geometria e a álgebra. Além disso, a visualização de transformações geométricas – isometrias e homotetias – é explorada de forma mais robusta, incluindo a análise de seus impactos na área e perímetro, e até mesmo a investigação da deformação de ângulos e áreas em projeções cartográficas. A capacidade de reconhecer padrões e de generalizar propriedades observadas em ladrilhamentos do plano é também uma habilidade destacada.

No campo de Grandezas e Medidas, o Ensino Médio exige uma compreensão mais sofisticada da mensuração e de suas aplicações. As habilidades focam na investigação de processos para a obtenção de medidas de áreas de superfícies por meio de reconfigurações,

aproximações e deduções de expressões de cálculo, aplicando-as em situações reais e com o apoio de tecnologias digitais. Contudo, a maior inflexão para a sua dissertação reside no estudo do volume de sólidos geométricos. A BNCC especifica a investigação de processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, com a inclusão explícita do Princípio de Cavalieri. Este princípio é crucial para entender a invariância do volume sob certas transformações e para derivar as fórmulas de cálculo de forma mais intuitiva e menos arbitrária. A aplicação desses cálculos de área e volume em cenários práticos, como projetos de arquitetura, engenharia, design e problemas que envolvem medições em geral, é uma constante nas habilidades, reforçando a natureza aplicada da matemática nessa etapa.

Em suma, a BNCC no Ensino Médio direciona o aprendizado da Geometria e Grandezas e Medidas para o desenvolvimento de uma matemática funcional e estratégica. O documento exige que o estudante não apenas execute cálculos de áreas e volumes, mas que compreenda os princípios que os governam, que saiba modelar situações-problema da realidade e que utilize diferentes recursos, incluindo tecnologias digitais, para analisar, representar e comunicar soluções. Ao promover essa articulação entre a abstração matemática e suas múltiplas aplicações, a Base busca capacitar os alunos a utilizar o raciocínio geométrico como uma ferramenta poderosa para interpretar e intervir criticamente no mundo. Aliando todo processo de ensino e aprendizagem de Geometria na BNCC ao processo avaliativo podemos destacar como ocorre no Ensino Básico, e como destaca-se no ingresso a universidade. Segundo Libâneo (2013),

A avaliação escolar não se resume à verificação do rendimento do aluno, mas assume um caráter diagnóstico, formativo e regulador do processo de ensino-aprendizagem, fornecendo subsídios para a tomada de decisões pedagógicas e para a reorientação do trabalho docente. (Libâneo, 2013, p.256)

A BNCC orienta os sistemas de ensino, as instituições e os professores na elaboração de currículos e propostas pedagógicas que contemplem o desenvolvimento integral dos estudantes. A construção da avaliação é um processo contínuo. Consoante a Zabalza (2004),

A avaliação é um processo contínuo e sistemático de coleta, análise e interpretação de informações sobre o desempenho dos alunos, visando a emissão de juízos de valor sobre o seu progresso e a sua aprendizagem, bem como a melhoria do processo de ensino. (Zabalza, 2004, p.45).

2.2.2 O Ensino de Áreas de Figuras Planas nos Vestibulares

A transição da Educação Básica para o Ensino Superior, mediada pelos exames vestibulares, impõe uma outra lente sobre a abordagem dos conteúdos matemáticos, incluindo a Geometria. Diferente da BNCC, que foca no desenvolvimento progressivo de competências e habilidades, os vestibulares, e em especial o ENEM, operam como instrumentos de seleção, testando a capacidade do candidato de aplicar conhecimentos em situações-problema, muitas vezes complexas e interdisciplinares. Conforme Soares (2004),

O Exame Nacional do Ensino Médio surge como uma proposta de democratização do acesso ao ensino superior, buscando avaliar competências e habilidades desenvolvidas ao longo da educação básica, em contraposição aos vestibulares tradicionais, muitas vezes focados na memorização de conteúdos específicos. (Soares, 2004, p.18)

Nesse panorama, o ensino de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos não se restringe à verificação da memorização de fórmulas, mas busca avaliar a compreensão conceitual, o raciocínio lógico e a capacidade de modelagem matemática.

Contudo, os vestibulares tradicionais ainda persistem em muitas regiões do Brasil, seguindo uma linha de conteúdos mais aprofundados. Para Fernandes (2018),

Apesar da crescente importância do ENEM, os vestibulares tradicionais mantêm-se como portas de entrada para diversas instituições de ensino superior, apresentando metodologias de avaliação próprias e, em muitos casos, ainda valorizando o domínio aprofundado de conteúdos específicos e a capacidade de resolução de problemas complexos em áreas como matemática e física. (Fernandes, 2018, p.67)

Embora os modelos de provas sejam distintos, existe uma interseção entre eles, que é o objetivo principal de uma pessoa que passa por todo processo seletivo, que é o ingresso no Ensino Superior. Como afirma Ribeiro (2015),

Embora com propostas distintas, o ENEM e os vestibulares tradicionais podem ser vistos como complementares na avaliação dos egressos do ensino médio, cada um com sua especificidade e contribuição para o processo seletivo do ensino superior. (Ribeiro, 2015, p.30)

Em um apanhado geral dos editais dos principais vestibulares do país, como Fuvest, Unicamp, Unesp, UERJ, que ainda tem uma alta procura e que observa-se que a Geometria Plana e Espacial é uma área consistentemente cobrada, com um peso significativo. No que tange especificamente a áreas de figuras planas, a exigência vai além do cálculo direto de formas básicas. É comum encontrar questões que demandam:

- **Compreensão da equidecomposição:** Problemas que exigem a decomposição e recomposição de figuras para o cálculo de áreas, explorando o conceito de equivalência de áreas.
- **Relações métricas em triângulos e polígonos:** Aplicação do Teorema de Pitágoras, relações trigonométricas e propriedades de semelhança e congruência para encontrar medidas e, conseqüentemente, áreas.
- **Área de setores e coroas circulares:** Cálculo de porções de círculos e figuras formadas por arcos.
- **Contextualização:** Questões que inserem o cálculo de área em cenários práticos, como plantas baixas, mapas, projetos de engenharia ou arte.
- **Geometria Analítica:** O cálculo de áreas de polígonos a partir das coordenadas de seus vértices no plano cartesiano, utilizando a fórmula do determinante ou a decomposição em figuras mais simples.

Para volumes de sólidos geométricos, a abordagem dos vestibulares também é abrangente e exige raciocínio tridimensional. Os editais tipicamente incluem:

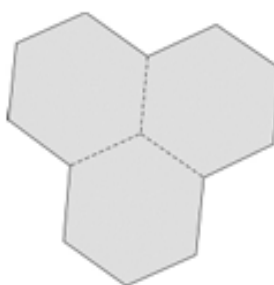
- **Volumes de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas:** Aplicação das fórmulas e compreensão de suas derivações.
- **Sólidos de revolução:** Geração de sólidos a partir da rotação de figuras planas e o cálculo de seus volumes.
- **Princípio de Cavalieri:** Embora não seja explicitamente nomeado em todos os editais, a ideia de que sólidos com a mesma altura e seções transversais de áreas iguais em todos os níveis têm o mesmo volume é frequentemente explorada em questões que envolvem a comparação de volumes de sólidos com formatos distintos.
- **Variação de volume e capacidade:** Problemas que envolvem a mudança de volume em função de alguma dimensão, ou a relação entre volume e capacidade (litros, metros cúbicos).
- **Conexão com a realidade:** Questões que simulam situações como embalagens, reservatórios, escavações, etc., exigindo a modelagem matemática do problema.

Em geral, os vestibulares buscam avaliar não apenas o domínio das fórmulas, mas a capacidade do candidato de interpretar problemas, selecionar as informações relevantes, aplicar o conhecimento de forma contextualizada e justificar suas soluções. O foco é na resolução de problemas não-rotineiros, que demandam criatividade e flexibilidade no raciocínio.

A seguir mostraremos alguns exemplos de questões de áreas de figuras planas que podem ser solucionados por ferramentas da equidecomposição. A Figura 5 mostra um problema do vestibular da FUVEST, realizado em 2014.

Figura 5 - Questão do Vestibular da FUVEST, realizado em 2014.

Uma das piscinas do Centro de Práticas Esportivas da USP tem o formato de três hexágonos regulares congruentes, justapostos, de modo que cada par de hexágonos tem um lado em comum, conforme representado na figura abaixo. A distância entre lados paralelos de cada hexágono é de 25 metros.



Assinale a alternativa que mais se aproxima da área da piscina.

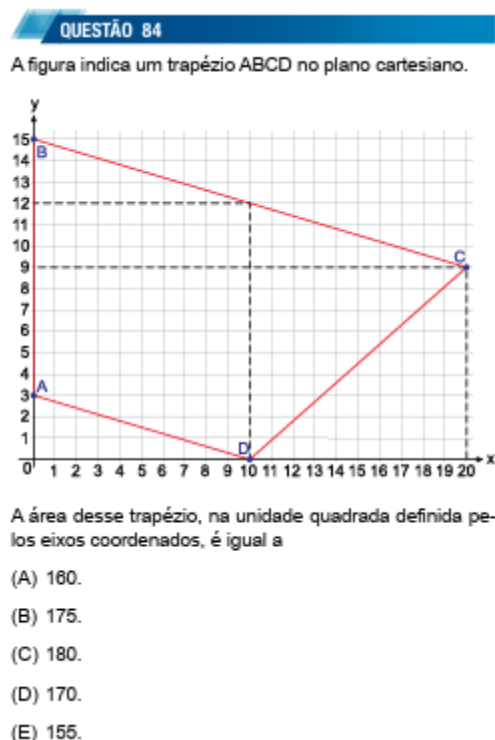
- a) 1.600 m^2
- b) 1.800 m^2
- c) 2.000 m^2
- d) 2.200 m^2
- e) 2.400 m^2

Fonte: Vestibular Fuvest 2014.

A solução do problema pode ser obtida por equidecomposição. A questão solicita a área aproximada da piscina de práticas esportivas da USP, que é formada por 6 hexágonos regulares, e que podem ser decomposto em 18 triângulos equiláteros, uma vez que um hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros. Com essa informação e o que foi dito no enunciado, podemos fazer algumas manipulações para calcular a área do triângulo equilátero, e encontrar a solução do problema.

A Figura 6 mostra uma questão da prova do vestibular da UNESP, realizada em 2018.

Figura 6 - Questão do Vestibular da UNESP, realizado em 2018.



Fonte: Vestibular Unesp (2018).

A solução pode ser obtida por meio de equidecomposição. Tomando os pontos $A(0,3)$, $B(0,15)$, $C(20,9)$, $D(10,0)$, $E(20,0)$, $F(0,9)$ e $O(0,0)$, então a área do trapézio ABCD pode ser calculada como sendo a área do triângulo BFC mais o trapézio AFCD, que por sua vez, é parte da decomposição do retângulo FCEO. Denotando $[ABC]$ como área do polígono ABC, temos que

$$[ABCD] = [FBC] + [AFCD] = [FBC] + [OFCD] - [ADO] - [DCE].$$

Com isso, concluímos que a resposta é

$$[ABCD] = 60 + 180 - 15 - 45 = 180.$$

Esses exemplos mostra aplicação dessa técnica em resoluções de problemas nos vestibulares mais tradicionais do Brasil. Mas, uma área que contém problemas que podem ser solucionados de forma semelhante são os exames militares. Os exames de admissão às academias e escolas militares, como IME, ITA, EsPCEx, AFA, Escola Naval, EFOMM, entre outras possuem uma reputação de alta exigência em Matemática, e a Geometria Plana e Espacial constitui um dos pilares dessa avaliação. Diferentemente de vestibulares que buscam uma abordagem mais interdisciplinar e contextualizada, os concursos militares frequentemente aprofundam-se nos aspectos formais, dedutivos e analíticos da geometria, testando não apenas a aplicação de fórmulas, mas o rigor do raciocínio e a capacidade de lidar com situações

complexas e, por vezes, abstratas.

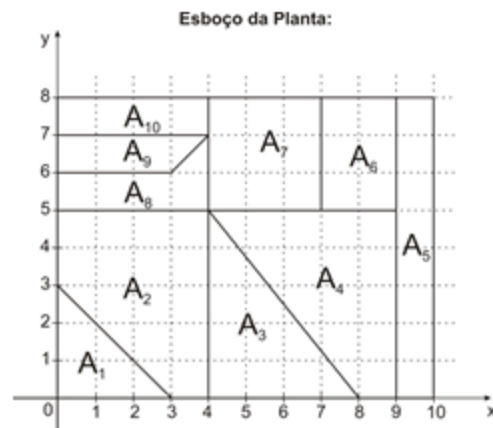
Nos editais e nas provas de vestibulares militares, a Geometria Plana é explorada em sua totalidade, abrangendo desde os conceitos fundamentais de pontos, retas e planos até propriedades avançadas de polígonos e círculos. Questões que envolvem relações métricas no triângulo, como Teorema de Pitágoras, relações trigonométricas, Lei dos Senos e Cossenos, propriedades de triângulos e quadriláteros notáveis, áreas de figuras planas diversas (incluindo as não convexas), e a geometria analítica são recorrentes. A precisão nos cálculos e a demonstração de compreensão sobre as propriedades que sustentam as soluções são elementos cruciais. É comum que os problemas exijam a manipulação de várias fórmulas e conceitos em uma única questão, demandando do candidato uma visão integrada do conteúdo.

Um aspecto particularmente interessante e que por vezes aparece de forma implícita ou explícita é a *equidecomposição*. Embora não seja um tópico listado diretamente como *equidecomposição* na maioria dos editais, o conceito subjacente é explorado na resolução de problemas de área e volume. Em geometria plana, a capacidade de decompor figuras complexas em figuras mais simples (triângulos, retângulos, etc.) para calcular sua área total é uma habilidade fundamental. Similarmente, na geometria espacial, a compreensão de que um volume pode ser obtido pela soma ou subtração de volumes de sólidos mais elementares é uma aplicação direta da ideia de equidecomposição. Questões que pedem a área de uma região sombreada em figuras compostas, ou o volume de um sólido "vazado", frequentemente dependem da manipulação e rearranjo de partes para simplificar o cálculo. O Princípio de Cavalieri, por exemplo, que estabelece a equivalência de volumes entre sólidos de mesma altura e seções transversais de áreas iguais, é um reflexo avançado da noção de equidecomposição. Isso exige do candidato não apenas a memorização de fórmulas, mas a capacidade de visualizar e transformar as figuras para encontrar a solução mais eficiente.

A Figura 7 mostra uma questão do concurso militar da AFA, realizada em 2021.

Figura 7 - Questão do Concurso Militar da AFA, realizado em 2021.

51 - Para construir um viaduto, a prefeitura de uma cidade precisará desapropriar alguns locais de uma determinada quadra da cidade. Para identificar o que precisará ser desapropriado, fez-se um esboço da planta dessa quadra no qual os locais foram representados em um plano cartesiano e nomeados de A_1 até A_{10} , conforme figura a seguir.



O viaduto estará representado pela região compreendida entre as retas de equações $r: -\frac{1}{2}x - y + 8 = 0$ e $s: -x - 2y + 10 = 0$.

Um local será inteiramente desapropriado se o viaduto passar por qualquer trecho de seu território.

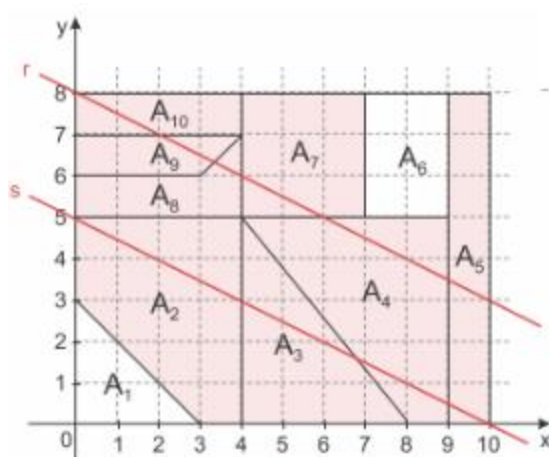
Se cada unidade do plano no esboço da planta equivale a 10 m na situação real, então a área total dos locais dessa quadra que precisará ser desapropriada, em m^2 , é igual a

- | | |
|----------|----------|
| a) 5 950 | c) 6 950 |
| b) 6 450 | d) 7 450 |

Fonte: Concurso Militar AFA 2021.

A solução pode ser obtida com auxílio da equidecomposição. A Figura 8 ilustra quais regiões devem ser desapropriadas.

Figura 8 - Ilustração das regiões que serão desapropriadas.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Como o retângulo da figura está decomposto em 10 regiões, podemos então dizer que a área desapropriada A será igual a $A = 8.10 - A_1 - A_6 = 80 - 9 - 6 = 69,5$. Pela escala fornecida, temos que a área real será igual a $69,5 \cdot 10^2 m^2 = 6950 m^2$.

Dando continuidade à análise de como a geometria é avaliada em exames de acesso ao Ensino Superior, e em contraste com a abordagem frequentemente mais formal e aprofundada dos vestibulares militares. O ENEM, enquanto principal porta de entrada para o Ensino Superior no Brasil, apresenta uma metodologia de avaliação da matemática que difere dos vestibulares tradicionais. Sua matriz de referência não se estrutura em conteúdos estanques, mas sim em competências de área e habilidades que buscam aferir a capacidade do estudante de aplicar o conhecimento matemático em situações-problema do cotidiano, de forma contextualizada e interdisciplinar. Nesse cenário, a Geometria Plana e Espacial, com particular destaque para o estudo de áreas e volumes, ocupa uma posição central, exigindo do candidato não apenas a memorização de fórmulas, mas a mobilização de raciocínio lógico, visualização e capacidade de modelagem.

As questões de geometria no ENEM frequentemente se apresentam vinculadas a cenários reais, como arquitetura, engenharia, design, cartografia ou situações do dia a dia. Elas demandam que o estudante interprete gráficos, figuras e textos para extrair as informações relevantes, planeje uma estratégia de resolução e execute os cálculos necessários. A ênfase não recai tanto na complexidade algorítmica ou na demonstração formal, mas na interpretação e aplicação de conceitos geométricos para resolver problemas práticos. Isso significa que, muitas vezes, uma questão de geometria envolve também habilidades de grandezas e medidas, números ou álgebra, reforçando o caráter integrado da matemática.

A Tabela 4 mostra a descrição das competências de área e habilidades que estão

ligadas a Geometria.

Tabela 4 - Competências e Habilidades da Matriz de Referência do ENEM que relacionam com Geometria

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES
Área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela	H6: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
	H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
	H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
	H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
Área 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
	H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
	H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

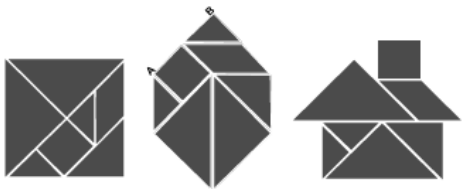
Em síntese, o ENEM, alinhado à BNCC, avalia a capacidade do estudante de ir além da memorização. As questões de geometria, e de áreas e volumes em particular, são frequentemente contextualizadas, exigindo que o candidato mobilize diferentes habilidades para interpretar a situação, selecionar a abordagem geométrica mais adequada e aplicar o conhecimento de forma crítica e eficaz para a resolução do problema proposto.

A Figura 9 mostra uma questão que pode ter o auxílio da equidecomposição na sua resolução.

Figura 9 - Questão 21 da prova amarela do ENEM 2008.

Questão 21

O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.



Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

☐ A 4 cm².
☐ B 8 cm².
☐ C 12 cm².
☐ D 14 cm².
☐ E 16 cm².

Fonte: ENEM (2008).

A solução do problema pode ser resolvido com auxílio da equidecomposição. Note que a Figura 10 ilustra a designação dos vértices e lado do quadrado, que está representado como figura 1 na Figura 9.

Figura 10 - Ilustração do quadrado com vértices e lados nomeados.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Note que de acordo com a Figura 2.6, $\overline{TS}$ é a diagonal do quadrado $RSUT$, e $TS = 2 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot 2 = 4$, o que implica que

$$TS = l \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow l = \frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow l = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow l = 2\sqrt{2}.$$

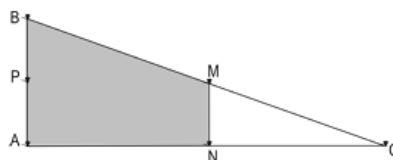
Como todas as sete peças foram utilizadas para fazer a casinha, segue que, por equidecomposição, o quadrado $RSUT$ e a casinha são equivalentes. Portanto, o resultado é $l^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8\text{cm}^2$.

A questão 152 da prova amarela do ENEM 2010, ilustrada na Figura 11 é normalmente resolvida por semelhança de triângulos, verificando a proporcionalidade e usando a razão entre as áreas. Mas, podemos utilizar a equidecomposição para resolver o problema.

Figura 11 - Questão 152 da prova amarela do ENEM 2010.

Questão 152

Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

- ☐ A à mesma área do triângulo AMC.
- ☐ B à mesma área do triângulo BNC.
- ☐ C à metade da área formada pelo triângulo ABC.
- ☐ D ao dobro da área do triângulo MNC.
- ☐ E ao triplo da área do triângulo MNC.

Fonte: ENEM (2010).

Observe que a questão deseja uma argumentação sobre os triângulos que podem ser encontrados no triângulo ABC . Traçando os segmentos PM e AM , temos a decomposição do triângulo ABC em quatro triângulos de mesma área. Segue que $[MNC] = \frac{[ABC]}{4}$ e $[ABMN] = [AMN] + [APM] + [BPM] = 3 \cdot \frac{[ABC]}{4} = 3[MNC]$. Portanto, a área da calçada é o triplo da área do triângulo MNC .

2.2.3 O Ensino de Áreas de Figuras Planas nas Olimpíadas.

As Olimpíadas de Matemática normalmente são divididas em níveis e fases, contemplando alunos do 5^a Ano do Ensino Fundamental até alunos no Ensino Superior. Geralmente os conteúdos são divididos em quatro áreas, sendo Álgebra, Geometria, Teoria dos Números e Combinatória. O objeto de estudo desta pesquisa é a Geometria, que na perspectiva das olimpíadas, é abordada de uma forma diferente, exigindo eficiência e elegância nas soluções dos problemas.

A geometria plana, e em particular o cálculo de áreas, ocupa um espaço proeminente nas competições de matemática, tanto em nível nacional quanto internacional. Olimpíadas como a OBMEP, OBM, OCM e a prestigiada IMO frequentemente apresentam problemas de geometria que exigem mais do que a mera aplicação de fórmulas. Nesses certames, a capacidade de visualizar, decompor e rearranjar figuras geométricas torna-se uma habilidade crucial para a resolução eficiente e elegante dos desafios propostos.

Problemas envolvendo áreas em olimpíadas frequentemente testam a criatividade e o raciocínio espacial dos competidores. Não é raro encontrar questões em que a dificuldade reside na identificação de uma estratégia geométrica astuta, ao invés de cálculos algébricos complexos (López; Linhares, 2020). Essa característica faz da geometria uma seção desafiadora, mas também gratificante, para os participantes.

Problemas envolvendo áreas de figuras planas são recorrentes em competições matemáticas. Segundo Lima et al. (2006), muitos desses problemas exigem não apenas fórmulas básicas (como as do triângulo, retângulo e círculo), mas também a aplicação de princípios geométricos mais sofisticados, como o Teorema de Pick, Razão de Áreas e Equidecomposição.

Dentro do vasto campo da geometria de áreas, a equidecomposição surge como uma técnica de valor inestimável nas provas de olimpíadas. Conforme discutido anteriormente, a equidecomposição permite transformar uma figura em outra de área equivalente através de cortes e rearranjos, fundamentada pelo Teorema de Bolyai-Gerwien para polígonos. A relevância dessa técnica em contextos olímpicos reside na sua capacidade de simplificar problemas aparentemente complexos, convertendo figuras de difícil mensuração em formas mais familiares, cujas áreas são facilmente calculáveis.

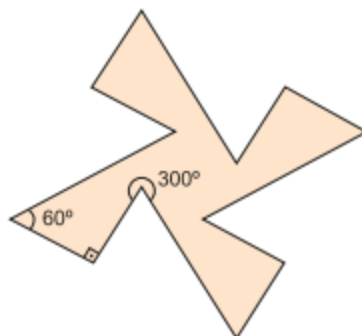
Muitos problemas de olimpíadas são construídos de forma a insinuar ou mesmo exigir uma abordagem por equidecomposição para uma solução mais rápida e elegante. Por exemplo, um problema pode apresentar um polígono irregular e perguntar por sua área, sem fornecer as medidas necessárias para o uso direto de fórmulas convencionais. Nesses casos, a perspicácia em identificar como *cortar* e *colar* partes da figura para formar um retângulo, um quadrado ou um triângulo simples pode ser o diferencial para a obtenção da resposta.

A prática de problemas de olimpíadas com foco em equidecomposição não apenas aprimora a intuição geométrica dos estudantes, mas também os capacita a abordar desafios de maneira mais flexível e criativa. A busca por decomposições eficientes e a visualização das transformações geométricas são habilidades que transcendem a mera memorização de fórmulas, promovendo um raciocínio matemático mais profundo e adaptável, características altamente valorizadas nas competições de matemática.

O problema 15 da 1ª fase da OBMEP nível 3, ilustrado na Figura 12, mostra um problema que pode ser resolvido com auxílio da equidecomposição.

Figura 12 - Questão 15 da prova 1ª fase da OBMEP nível 3, realizada em 2019.

15. A figura tem 8 lados de medida 10 cm, 4 lados de medida 20 cm, 4 ângulos de 60° , 4 ângulos de 90° e 4 ângulos de 300° .



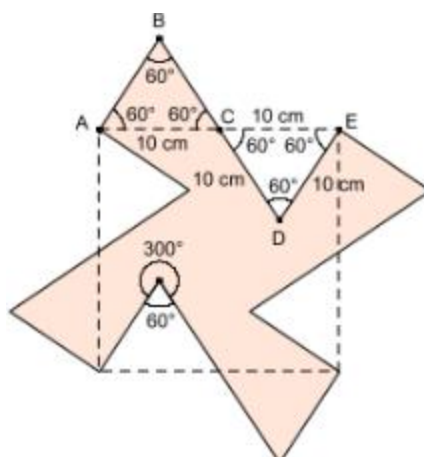
Qual é a área da figura?

- (A) 100 cm^2
- (B) 120 cm^2
- (C) 200 cm^2
- (D) 400 cm^2
- (E) 420 cm^2

Fonte: OBMEP (2019).

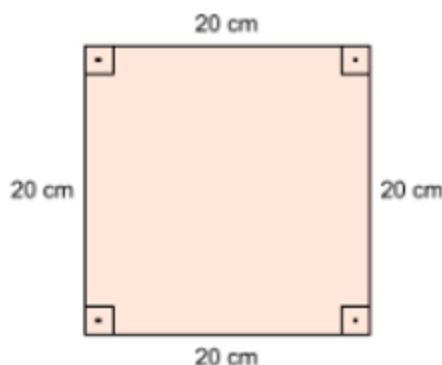
É possível notar que os triângulos ABC e CDE da Figura 13 são congruentes, com isso, temos que a Figura 13 e 14 são equivalentes.

Figura 13 - Decomposição da Figura 12.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Figura 14 - Quadrado equivalente a Figura 13.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Portanto, a área da figura é igual a $(20\text{cm})^2 = 400\text{cm}^2$.

Ao longo deste capítulo, analisamos como o ensino de áreas de figuras planas é abordado na Educação Básica, desde os anos iniciais até o Ensino Médio, destacando os desafios e as potencialidades presentes nos documentos curriculares, como a BNCC, nos processos avaliativos, como o ENEM e os vestibulares, e nas olimpíadas científicas. A BNCC, ao propor uma progressão de habilidades que vai da exploração concreta à formalização gradual, oferece um caminho para superar essa limitação. No entanto, como aponta Pavanello (2013), a implementação dessas diretrizes esbarra em desafios como a formação docente e a carência de recursos didáticos adequados. Os vestibulares, por sua vez, refletem essa dualidade: enquanto alguns exames priorizam problemas contextualizados, outros mantêm um foco excessivo em técnicas de cálculo, nem sempre promovendo uma compreensão profunda dos conceitos geométricos (Mori, 2016).

Como pontuam Nunes e Bryant (1997), a compreensão de grandezas e medidas é crucial para o desenvolvimento do pensamento matemático e para a capacidade de interagir com o mundo de forma significativa. Desse modo, o domínio do conceito de área não se restringe à geometria plana, mas se estende a diversas aplicações, desde a construção civil até a engenharia e o design. A habilidade de calcular e estimar áreas, bem como de compreender as relações entre diferentes figuras geométricas, fortalece a visão geométrica do estudante, um aspecto salientado por Serrazina (2002) ao afirmar que a geometria não é apenas um conjunto de fórmulas, mas uma forma de pensar e de ver o mundo. É nesse contexto que o ensino de áreas se revela um pilar essencial para o desenvolvimento de competências matemáticas mais complexas, preparando o terreno para a exploração de conceitos avançados.

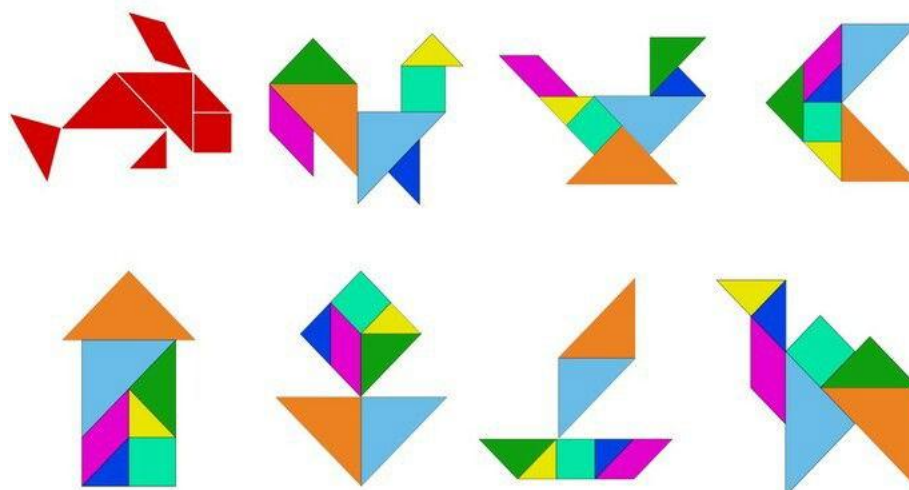
No próximo capítulo, avançaremos nessa discussão, explorando como o conceito de equidecomposição de figuras planas pode ser uma ferramenta poderosa para o ensino de

áreas, promovendo uma aprendizagem mais significativa e conectada aos princípios da geometria euclidiana. Como veremos, essa abordagem não apenas enriquece o trabalho com medidas de superfície, mas também fortalece o desenvolvimento do raciocínio lógico e da visualização espacial, competências essenciais para o estudo da Matemática (Nasser, 2019).

3. EQUIDECOMPOSIÇÃO NO PLANO

Desde o começo do século XVIII, a equidecomposição tem-se tornado parte do que é conhecido como Matemática Recreativa. Uma vez descoberto que diferentes tipos de polígonos podem ser cortados e suas peças reagrupadas para formar outros polígonos, surge a questão do número mínimo de cortes para tal agrupamento. Além do número mínimo de peças, outro aspecto em equidecomposição são quebra-cabeças que contêm alguns polígonos, como, por exemplo, o clássico quebra-cabeça chinês *Tangram*, que são sete peças representando figuras geométricas que sem sobreposição são reagrupadas e formam polígonos que lembram animais, flores, dançarinos ou letras, conforme a Figura 15.

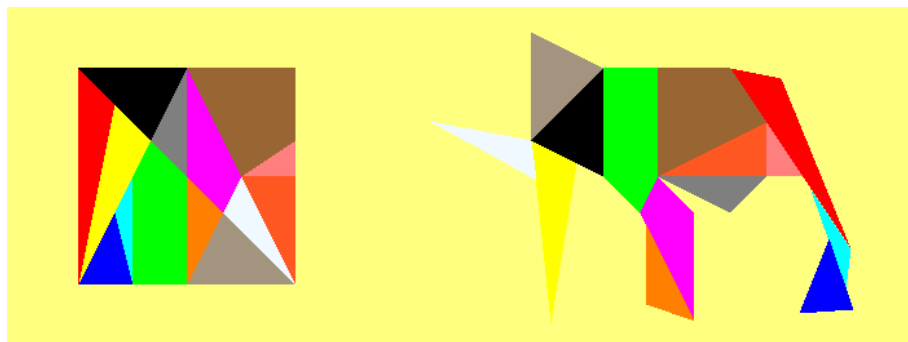
Figura 15 - Exemplos de algumas formas com as peças do Tangram.



Fonte: Google Imagens.

Outro exemplo é um jogo antigo, atribuído a Arquimedes, chamado de *Stomachion*, em que consiste num quebra-cabeça geométrico constituído por um conjunto de 14 peças planas de diversos formatos poligonais, que permitem o rearranjo para construção de figuras poligonais distintas, conforme a Figura 16.

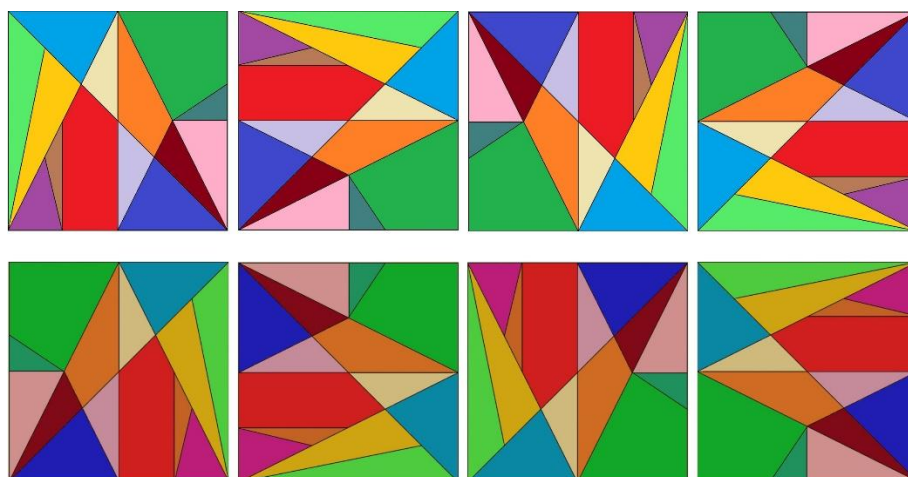
Figura 16 - Exemplos de algumas formas com as peças do Stomachion.



Fonte: Google Imagens.

Um destaque importante do *Stomachion* é que diferentemente do *Tangram*, podemos utilizar todas as peças para construir um quadrado, mas representado de diversas formas, como é mostrado na Figura 17, a seguir.

Figura 17 - Exemplos diversos de quadrados com as peças do Stomachion.

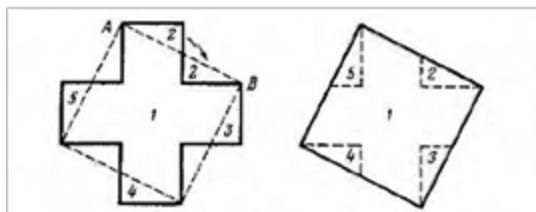


Fonte: Google Imagens.

Além da praticidade no ensino de áreas, permitindo a visualização da equivalência de áreas sem o uso de fórmulas, torna-se imprescindível a elaboração de definições rigorosas desse conceito, as quais fundamentam a formalização dos teoremas que sustentam toda teoria estabelecida nos livros didáticos. Recorrendo a Boltianski (1981),

Examinaremos as duas figuras mostradas abaixo (todos os segmentos que compõem a figura cruciforme são iguais entre si; e o lado do quadrado é igual ao segmento AB). As linhas tracejadas no desenho partem as figuras em um número idêntico de partes iguais (as partes iguais das duas figuras estão marcadas com números). Esta ação se expressa com as seguintes palavras: as figuras abaixo são equidecompostas.

Figura 18 - Figuras equidecomponíveis



Fonte: Boltianski (1981, p.9)

Falando de outra maneira, duas figuras são equidecomponíveis, se, cortando de certo modo uma delas em um número finito de partes, pode-se (ao dispor essas partes de outra forma) compor com essas a segunda figura. (Boltianski, 1981, tradução autoral)

Em uma linguagem matemática, poderíamos formalizar as definições para *decomposição* e *equidecomponível*, da forma a seguir.

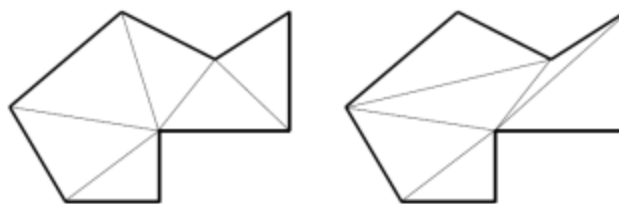
Definição 3.1 (*Decomposição de Polígonos*): Dada uma região poligonal P , se existem regiões poligonais $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ tais que $P = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \dots \cup K_n$, com $K_i \cap K_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, dizemos que $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ são *decomposições* de P , ou que P é decomposta pela sequência de regiões poligonais $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$.

Definição 3.2 (*Polígonos equidecomponíveis*). Dois polígonos P e P' são *equidecomponíveis* quando existem decomposições $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_i \cup \dots \cup P_n$ e $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \cup \dots \cup P'_i \cup \dots \cup P'_n$, de tal modo que cada polígono $P_i, 1 \leq i \leq n$, é congruente ao polígono P'_i .

Definição 3.3 (*Triangulação de um polígono*). Seja P um polígono qualquer, um segmento que liga dois vértices não consecutivos de P denomina-se diagonal de P . Esta diagonal é uma diagonal interior de P se, com exceção de seus extremos, estiver contido no interior de P . Uma triangulação de P é uma coleção de triângulos cujos lados são lados de P e/ou diagonais interiores de P , de modo que os triângulos, quando se intersectam, o fazem em lados comuns ou em vértices de P e a reunião desses triângulos e seus interiores é a região determinada por P .

A Figura 19 apresenta um polígono não convexo com duas formas diferentes de triangulação.

Figura 19 - Triângulo ABC equicomposto ao retângulo ABFE..



Fonte: Marques, 2012.

A apresentação da equidecomposição varia conforme a finalidade, podendo ser tratada com rigor formal, por meio de definições e demonstrações ou, alternativamente, por práticas mediante recursos visuais e manipulativos. Hilbert (2003) define que dois polígonos são equidecomponíveis quando se puderem decompor em um número finito de triângulos congruentes entre si dois a dois.

No esforço de elucidar o conceito de equidecomposição da maneira acessível, Souza (Souza, 1973) define que duas figuras são equidecomponíveis quando podem ser decomponíveis em partes respectivamente iguais.

3.1 Equidecomposição

A equidecomposição de polígonos, conforme destacado por Hadwiger (1957), representa não apenas uma curiosidade geométrica, mas uma ferramenta poderosa para compreender a equivalência de formas sob transformações elementares.

Este estudo se fundamenta no célebre Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, que segundo Wallace e West (Wallace; West, 1992), estabelece a ponte definitiva entre a teoria da área e as operações concretas com figuras planas.

Seguiremos com as demonstrações de alguns resultados que servirão de base para o teorema central deste capítulo.

Proposição 3.1. Todo polígono de n lados, $n \geq 4$, admite uma triangulação.

Demonstração: Iremos dividir o problema em dois casos, sendo

- i) P um polígono convexo.

Seja P um polígono convexo, em que $P = A_1A_2 \dots A_n$, onde A_i com $1 \leq i < n$, representam os vértices de P . Para todo $i \leq j \leq n - 1$, sejam Π_j o semiplano determinado por $\overrightarrow{A_jA_{j+1}}$ que contém os pontos de P e Π_n o semiplano determinado por $\overrightarrow{A_nA_1}$ que contém pontos de P . As diagonais $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$ estão, com exceção de seus extremos, contidas em todos

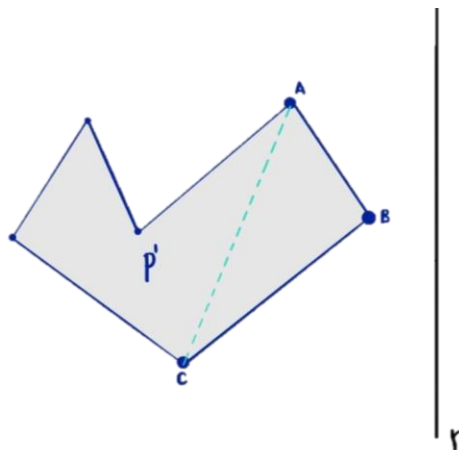
esses semiplanos. Logo, são diagonais interiores de P . Considerando os triângulos $\Delta_1 = A_1A_2A_3, \Delta_2 = A_1A_3A_4, \dots, \Delta_{n-2} = A_1A_{n-1}A_n$. O polígono P está contido na reunião desses triângulos e o interior de P está contido na reunião dos interiores desses triângulos e dos lados que estão no interior de P . Portanto, os triângulos $A_j, 1 \leq j \leq n-2$, formam uma triangulação de P .

ii) P um polígono qualquer.

Suponhamos, por absurdo, que seja possível obter um polígono P de n lados que não pode ser decomposto em triângulos. Tomemos P de modo que n seja o menor possível, e consideremos uma reta r que não intersecta P e que não seja paralela a nenhum dos lados de P . Sejam ainda B o vértice do polígono P localizado à menor distância de r , e A e C os vértices adjacentes a B , temos dois casos para analisar.

1ª caso: Os pontos A, B e C são os únicos vértices de P que pertencem à região triangular ABC . O polígono P' , obtido do polígono P substituindo-se os lados AB e BC por AC , conforme a Figura 20, tem $(n-1)$ lados. No entanto, por hipótese, n é o menor número de lados para o qual a tese não vale. Assim, P' pode ser decomposto em triângulos adjacentes. Juntando a P' o triângulo ABC , obtemos uma decomposição de P em triângulos justapostos.

Figura 20 - Triangulação de um polígono qualquer, 1ª caso.

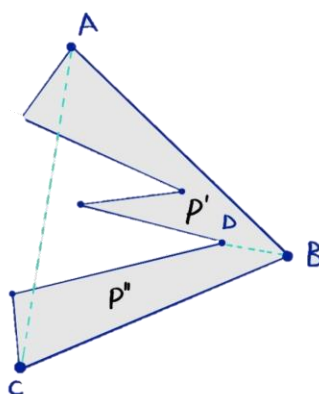


Fonte: elaborado pelo autor (2025).

2ª caso: O triângulo ABC contém outros vértices de P . Dentre estes vértices, seja D o mais distante do lado AC , como mostra a Figura 21. Dessa forma, a diagonal BD não intersecta nenhum lado de P fora os pontos B e D . O segmento BD divide P em

dois polígonos adjacentes, P' e P'' , ambos com um número de lados menor do que o número de lados de P . Como, novamente n é o menor número de lados para o qual a tese não vale, os polígonos P' e P'' podem ser decompostos em triângulos adjacentes. Unindo estas decomposições, temos uma triangulação de P .

Figura 21 - Triangulação de um polígono qualquer, 2ª caso.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A decomposição de figuras planas em elementos mais simples, como triângulos, é um método fundamental na geometria euclidiana, tanto para o cálculo de áreas, quanto para análise de propriedades topológicas. Como destacado por Honsberger (1973), todo polígono simples pode ser particionado em um número finito de triângulos não sobrepostos por meio de diagonais internas.

É artístico pensar que decompor polígonos em triângulos é mais do que um simples exercícios de tesoura geométrica, é entender como formas complexas podem ser reduzidas a componentes elementares, preservando sua essência métrica.

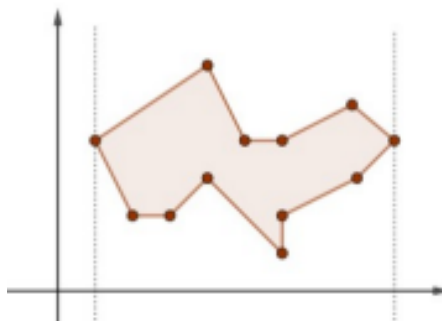
O Teorema 3.1 fornece a possibilidade de decompor um polígono de n lados em triângulos justapostos.

Teorema 3.1. Todo polígono de n lados, $n \geq 4$, pode ser decomposto em $(n - 2)$ triângulos justapostos cujos vértices são vértices do polígono.

Demonstração: Suponha que existe um número n tal que para qualquer polígono com quantidade de lados menor que n o teorema é válido, mas que existam polígonos com quantidade de lados maior ou igual a n para os quais o teorema seja falso. Então, existe algum polígono P de n lados que não pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos justapostos cujos vértices sejam vértices de P . Tomando no plano um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que nenhum lado de P seja paralelo ao eixo das ordenadas, P é tal que haja um único ponto de maior abscissa e um único ponto de menor abscissa, conforme a Figura 22. Caso essa

condição não seja imediata, basta rotacionar o polígono em alguma quantidade adequada de graus com relação à origem.

Figura 22 - Polígono com pontos de maior e menor abscissa únicos.

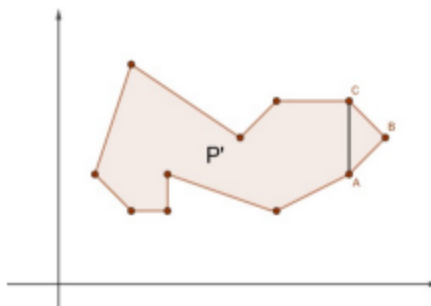


Fonte: Gomides, 2022.

Tomando o ponto B como o de maior abscissa e os vértices A e C , com C sendo consecutivo a A , há um triângulo determinado por esses três vértices. Existem duas possibilidades para esta situação, o triângulo ABC contém, ou não contém, algum outro vértice de P . Analisando os dois casos, temos,

- i. ABC contém algum outro vértice de P .

Figura 23 - Triângulo ABC contém outro vértice de P .



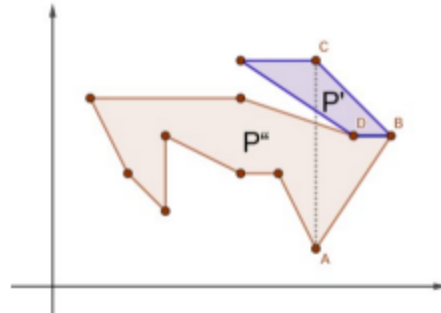
Fonte: Gomides, 2022.

Analisando a Figura 23, vamos considerar que o triângulo ABC contenha o ponto D , que é vértice de P . Traçando o segmento BD , o polígono P é dividido em dois polígonos, o P_1 com n_1 lados e P_2 com n_2 lados. Note que a soma $P_1 + P_2$ fornece $n_1 + n_2 = n + 2$ lados, pois o lado AD , que é o único lado dos dois polígonos que não é lado de P , é contado duas vezes, enquanto cada um dos outros n lados é contado uma única vez. Como P_1 e P_2 são polígonos, $n_1 \geq 4$ e $n_2 \geq 4$, o que implica que tanto n_1 quanto n_2 são menores que n e então o teorema vale para P_1 e P_2 . Logo, P_1 pode ser repartido em $n - 2$ triângulos, e P_2 pode ser repartido em $n - 2$. Juntando a

quantidade de triângulos total, temos $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$, o que é um absurdo pois o teorema não vale para P .

- ii. ABC não contém nenhum outro vértice de P .

Figura 24 - Triângulo ABC não contém outro vértice de P .



Fonte: Gomides, 2022.

Neste caso, considerando que o segmento AC divide P em dois novos polígonos, sendo o triângulo ABC e polígono P_1 que possui $n - 1$ lados. Portanto, o teorema vale para P' , que pode ser triangulado em $(n - 1) - 2 = n - 3$ triângulos. Então, a divisão total de P em triângulos será igual a quantidade de triângulos de P_1 somado ao triângulo ABC , ou seja, o número de triângulos de P é $n - 3 + 1 = n - 2$, o que é um absurdo, pois o teorema não é válido para P .

Portanto, o teorema é válido.

■

Além disso, a beleza algébrica da equidecomposição surge quando percebemos que ela define uma relação de equivalência entre as figuras geométricas, onde são satisfeitas as relações de simetria, reflexividade e transitividade. Essas propriedades, como destacado por Wagon (1993), transformam a equidecomposição em uma ferramenta poderosa para classificar figuras, não por sua aparência, mas por sua estrutura intrínseca. As relações de simetria, reflexividade e transitividade desempenham um papel vital na caracterização da decomposição de polígonos. São conceitos que não apenas fundamentam demonstrações clássicas, como o Teorema de Pitágoras via decomposição, mas também preparam o terreno para generalizações em dimensões superiores. O Lema 3.1 mostra como as relações são satisfeitas em polígonos equidecomponíveis.

Lema 3.1. Se P, Q e R são polígonos equidecomponíveis, então as seguintes relações são satisfeitas:

- i. Reflexiva: P é equidecomponível a P ;
- ii. Simétrica: se P é equidecomponível a Q , então Q é equidecomponível a P ;
- iii. Transitiva: se P é equidecomponível a Q e Q é equidecomponível a R , então P é equidecomponível a R .

Demonstração: Segundo o Teorema 3.1, um polígono sempre é decomponível em um número finito de triângulos.

- i. Suponhamos que os polígonos P, Q e R são decomponíveis em triângulos

$$(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n); (Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n) \text{ e } (R_1, R_2, R_3, \dots, R_n)$$

$n \in \mathbb{N}^*$, respectivamente. Como todo triângulo P_i com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, é congruente a si mesmo, temos que

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n = P.$$

- ii. Suponha que P é equidecomponível a Q . Assim, por definição, temos que

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n \text{ e } Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n,$$

com P_i congruente a Q_i para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Como a congruência de triângulos é simétrica, então Q_i é congruente a P_i para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Portanto, Q é equidecomponível a P .

- iii. Suponha P equidecomponível a Q e Q equidecomponível a R . Dessa forma, por definição, temos que

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n, Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n \text{ e } R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$$

com P_i congruente a Q_i e Q_i congruente a R_i para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Como a congruência de triângulos é transitiva, se P_i é congruente a Q_i e Q_i é congruente a R_i , então P_i é congruente a R_i , para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Portanto, P é equidecomponível a R .

■

Dois polígonos P e P' são equidecomponíveis quando é possível dividir cada um deles em um mesmo número de partes, com interiores distintos, e congruentes entre si. Embora esse conceito não fosse formalizado na antiguidade, ele está implicitamente presente no estudo euclidiano de áreas, como observado na obra *Os Elementos*, de Euclides, o texto deixa claro que “Figuras que podem ser decompostas em partes congruentes possuem áreas iguais” (Euclides, 2009).

No entanto, a recíproca não foi algo de imediato, demandou uma análise mais profunda. A resposta afirmativa a essa questão é formalizada pelo Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein, que estabelece “Dois polígonos planos possuem a mesma área se, e somente se, forem equidecomponíveis por meio de um número finito de cortes e rearranjos utilizando apenas isometrias” (Bolyai, 1832; Gerwein, 1833).

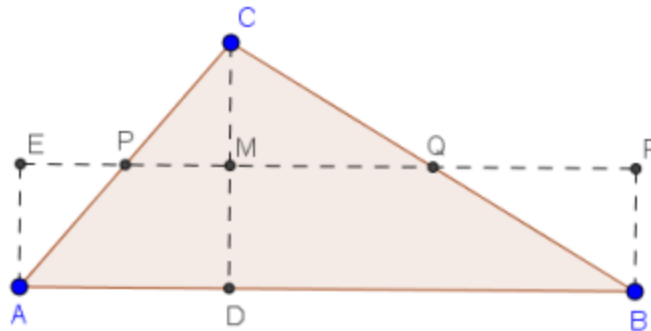
Alguns lemas serão provados antes de demonstrarmos efetivamente o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein.

Definição 3.4. Dois polígonos P e Q são ditos equicompostos se P pode ser decomposto em um número finito de peças poligonais $P_1, P_2, \dots, P_n$ e Q pode ser decomposto em um número finito de peças poligonais $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ de modo que cada peça P_i seja congruente à peça Q_i para todo i de 1 a n .

Lema 3.2. Todo triângulo é equicomposto a um retângulo.

Demonstração: Sejam $\overline{AB}$ o maior lado do triângulo ABC , ilustrado na Figura 25, e $\overline{CD}$ a altura relativa a $\overline{AB}$. O ponto D , projeção ortogonal do ponto C sobre o lado $\overline{AB}$, encontra-se entre A e B , pois caso contrário um dos ângulos, $\hat{A}$ ou $\hat{B}$, seria obtuso e, então $\overline{AB}$ não seria o maior lado.

Figura 25 - Triângulo ABC equicomposto ao retângulo $ABFE$.



Fonte: Autoral.

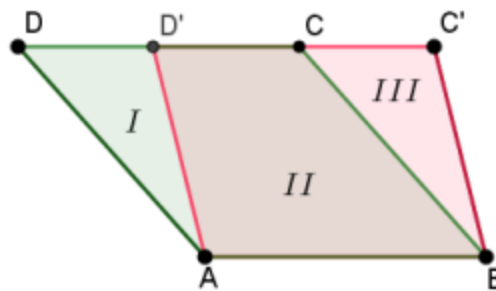
Pelo ponto médio M da altura $\overline{CD}$, tracemos uma reta paralela a $\overline{AB}$, conforme a Figura 25. Esta intersecta $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ nos seus respectivos pontos médios, P e Q . Baixemos agora as perpendiculares $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ a essa reta. Pelo caso de congruência ALA_o (ângulo-lado-ângulo oposto), temos que $\triangle APE \equiv \triangle CPM$ e $\triangle BQF \equiv \triangle CQM$. Assim, o triângulo ABC e o retângulo $ABFE$ são compostos pelo trapézio $ABQP$ e pelos triângulos CPM e CQM . Portanto, o triângulo ABC é equicomposto ao retângulo $ABFE$.

Lema 3.3. Se dois paralelogramos têm áreas iguais e uma base comum, então eles são equicompostos.

Demonstração: Sem perda de generalidade, considere os paralelogramos $ABCD$ e $ABC'D'$ de base comum $\overline{AB}$ e alturas congruentes. Diante disto, vamos analisar três casos.

1º caso: Os segmentos CD e $C'D'$ têm um segmento comum $D'C'$ como mostra a Figura 26.

Figura 26 - Paralelogramos equicomposto relativo ao 1º caso.

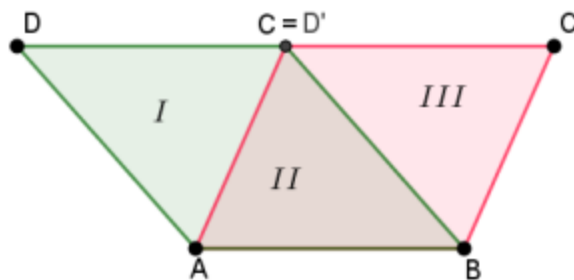


Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Neste caso, temos que $\overline{CD} = \overline{CD'} + \overline{D'D}$ e $\overline{C'D'} = \overline{C'C} + \overline{CD'}$. Como $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$, então $\overline{C'C} \equiv \overline{D'D}$. Logo, pelo caso LLL (lado-lado-lado), $\triangle ADD' \equiv \triangle BCC'$ ($I = III$). Portanto, $ABCD$ ($I + II$) é equicomposto a $ABC'D'$ ($III + I = I + II$).

2ª caso: Os segmentos CD e $C'D'$ tem somente um ponto comum, como ilustra a Figura 27.

Figura 27 - Paralelogramos equicompostos relativo ao 2º caso.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Os triângulos ADD' e BCC' são congruentes pelo caso LLL ($I = III$), uma vez que

$$\overline{DD'} \equiv \overline{CC'} \equiv \overline{AB}, \text{ por construção;}$$

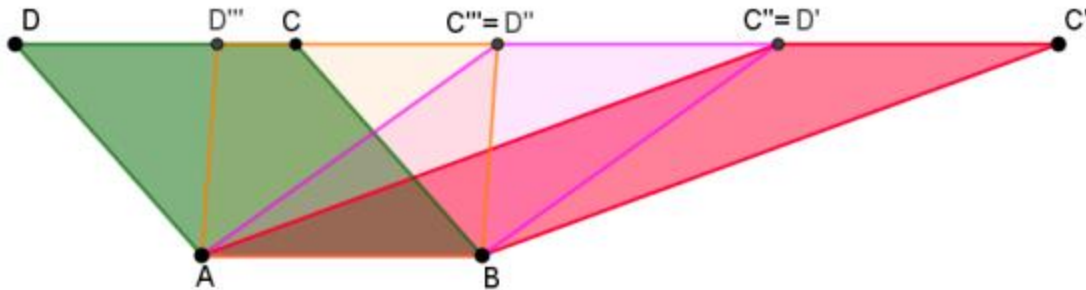
$$\overline{AD'} \equiv \overline{BC'}, \text{ pois são lados opostos do paralelogramo } ABC'D';$$

$$\overline{AD} \equiv \overline{BC}, \text{ pois são lados opostos do paralelogramo } ABCD.$$

Portanto, temos que $ABCD$ ($I + II$) é equidecomposto a $ABC'D'$ ($III + II = I + II$).

3ª caso: Os segmentos CD e $C'D'$ não têm pontos comuns, como mostra a Figura 28.

Figura 28 - Paralelogramos equicompostos relativo ao 3º caso.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Conforme Hartshorne (2000) quando adapta o postulado de Arquimedes, dizendo que se CD e $C'D'$ são segmentos quaisquer, então existe um número natural n tal que a união de n segmentos congruentes a $C'D'$, construídos continuamente a partir de D' sobre a semirreta CD , conterá o ponto C .

Com isso em mãos, podemos empregar o postulado de Arquimedes, traçando a partir do ponto D' esses segmentos, o que nos permite a construção de paralelogramos auxiliares, como ilustra a Figura 28. Cada um desses paralelogramos será equicomposto ao outro pelo 1ª caso ou pelo 2ª caso. Dessa forma, pela propriedade transitiva da equicomposição, $ABCD$ é equicomposto a $ABC'D'$.

■

Lema 3.4. Dois retângulos que têm áreas iguais são equicompostos.

Demonstração: Sejam os retângulos $ABCD$ e $AEJI$, ilustrados na Figura 29, sobrepostos e de mesma área, ou seja,

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AI} \cdot \overline{AE} . \quad (i)$$

Seja ainda o segmento BI , que intersecta $\overline{CD}$ em F e $\overline{EJ}$ em G , isto é, $F = \overline{BI} \cap \overline{CD}$ e $G = \overline{BI} \cap \overline{EJ}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que

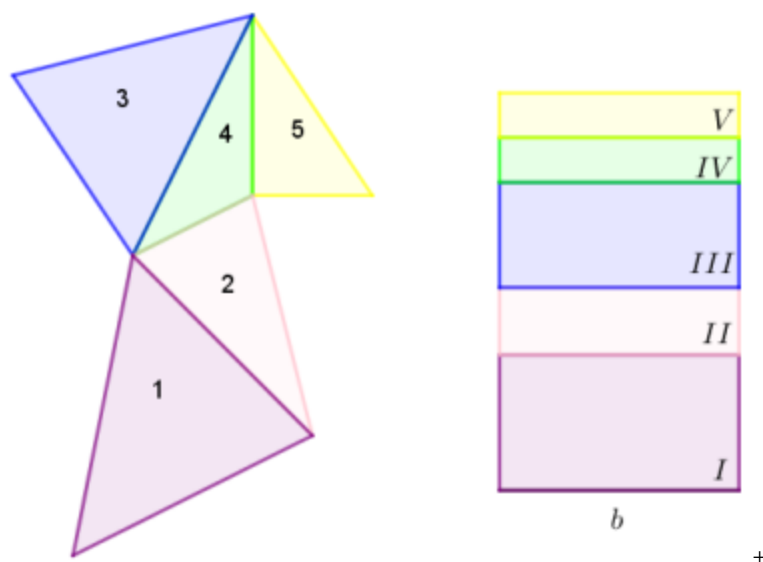
$$\frac{\overline{AB}}{2} \leq \overline{AE} \leq \overline{AB} .$$

Diante disto, temos três situações distintas para analisar.

Figura 29 - Retângulos equicompostos.

de cada um desses retângulos. Dessa forma, por transitividade, os triângulos 1,2,3,4,5, nos quais foi decomposto o polígono original são equicompostos, respectivamente, aos retângulos *I,II,III,IV,V,...* de base b . Empilhando estes retângulos uns sobre os outros, obtemos um retângulo de base b , o qual é equicomposto ao polígono original, como ilustra a Figura 30.

Figura 30 - Polígonos equicomposto a um retângulo.



Fonte: elaborado pelo próprio autor (2025).

3.2. O Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien

Dois polígonos quaisquer, de mesma área, são equidecomponíveis, como exemplifica a Figura 31. Esse teorema foi demonstrado em 1832 por Farkas Wolfgang Bolyai (1775-1856), que foi um matemático húngaro interessado nos fundamentos da geometria, com destaque para o axioma das paralelas e teve como principal trabalho, o *Tentamen*, que foi uma tentativa de estabelecer uma base rigorosa e sistemática para a geometria, aritmética, álgebra e análise. Além de que, Farkas Bolyai foi o pai do famoso matemático Janos Bolyai, que destacou-se como pioneiro no estudo de geometria hiperbólica, juntamente com Lobatchevski e Gauss. De forma independente, em 1833, Paul Gerwien, um matemático alemão amador, também demonstrou o teorema.

No entanto, Ian Stewart que foi professor na Universidade de Warwick, na Inglaterra, acrescenta, em seu livro *From Here to Infinity*, que em 1807 a prova do teorema foi apresentada por William Wallace (1768-1843), nos *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*.. William Wallace foi um matemático e astrônomo escocês, inventor do pantógrafo, um instrumento feito de madeira e utilizado para reproduzir desenhos em diferentes escalas.

Figura 31 - Quadrado e triângulo equicompostos.



Fonte: Wikipedia, 2017.

Teorema 3.2. (Wallace-Bolyai-Gerwien): Dois polígonos que têm áreas iguais são equicompostos.

Demonstração. Pelo Teorema 3.1, cada um dos polígonos pode ser decomposto em triângulos, os quais são, de acordo com o Lema 3.2, equicomposto a retângulos. Os dois retângulos obtidos da decomposição dos dois polígonos têm áreas iguais e, portanto, pelo Lema 3.4, são equicompostos. Logo, pela transitividade da equidecomposição, os dois polígonos são equicompostos. ■

O Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien dá precedentes para diversas possibilidades a serem investigadas. Dentre elas, podemos destacar a seguinte:

É possível impormos condições extras sobre o número ou a disposição das partes com as quais se compõem os polígonos equivalentes?

Em 1951, mais de um século depois da demonstração original, os matemáticos suíços Hugo Hadwiger (1908-1981) e P. Glur refinaram o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien.

Definição 3.5 (Polígonos TR-equidecomponíveis). Dois polígonos P e P' são *TR-equidecomponíveis* quando admitem decomposições $P = P_1, \dots, P_n = P'_1, \dots, P'_n$ tais que, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, pode-se obter P'_i a partir de P_i por meio de uma translação ou de uma rotação de 180° (com centro em um ponto qualquer do plano).

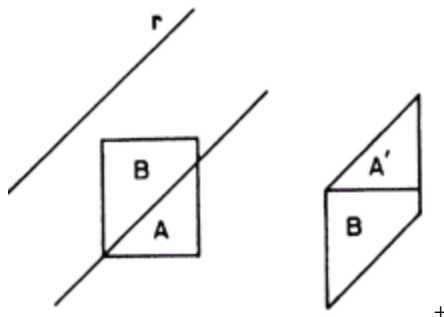
Teorema 3.3 (Hadwiger-Glur). Dois polígonos com áreas iguais são TR-equidecomponíveis.

Demonstração: De acordo com Lima (Lima, 1985), a prova do Teorema de Hadwiger-Glur segue as ideias da prova do Teorema 3.2 acrescida do seguinte resultado:

Lema 3.6. Todo retângulo R é *TR-equidecomponível* com outro retângulo R' cuja base é paralela a uma reta r dada.

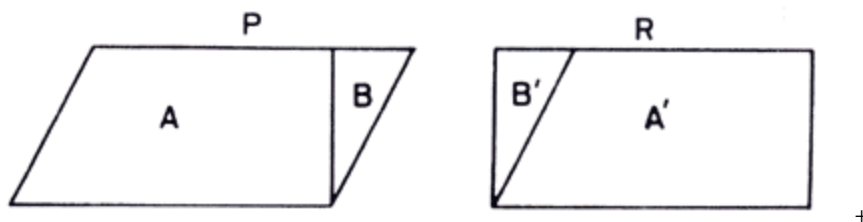
Demonstração: Um segmento de reta paralelo a r fornece uma decomposição $R = A \cup B$, como mostra a Figura 32. Transladando o triângulo A para outra extremidade de R , obtemos o paralelogramo $P = A' \cup B$, o qual é TR-equidecomponível com R . Como mostra as Figuras 33, 34, 35 e 36, o paralelogramo R é TR-equidecomponível com um retângulo R' , cuja base tem comprimento b e é paralela à reta r .

Figura 32 - Decomposição e translação do triângulo A .



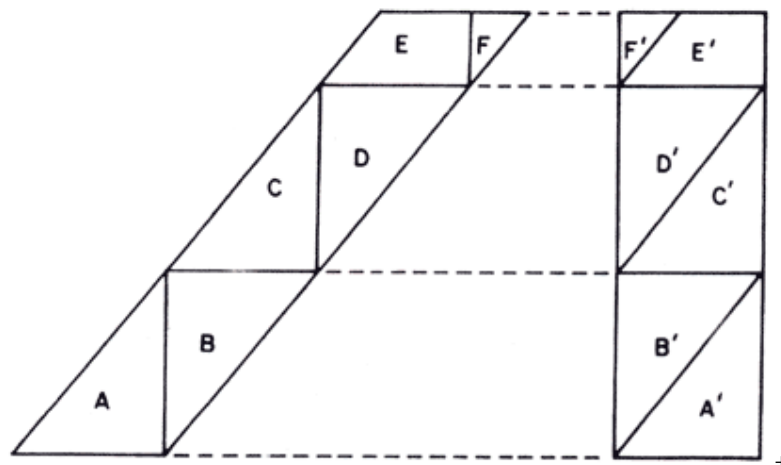
Fonte: Lima (2017).

Figura 33 - O paralelogramo P e o retângulo R , com bases e alturas iguais, admitem as decomposições $P = A \cup B$ e $R = A' \cup B'$, onde A é congruente a A' e B é congruente a B' .



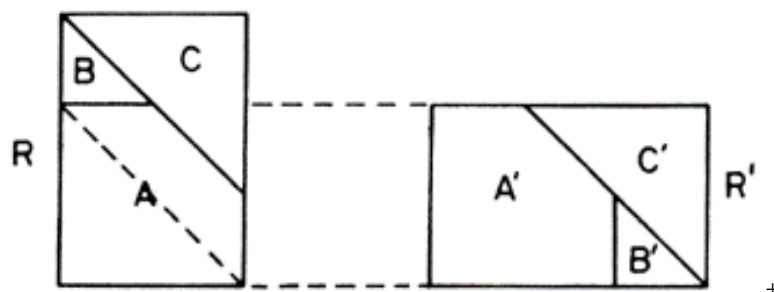
Fonte: Lima (2017).

Figura 34 - Se nenhuma altura do paralelogramo estiver contida em seu interior, a partir de uma extremidade da base traça um ziguezague em ângulos retos, o qual decompõe o paralelogramo na forma $P = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$. Por meio de translações paralelas à base.



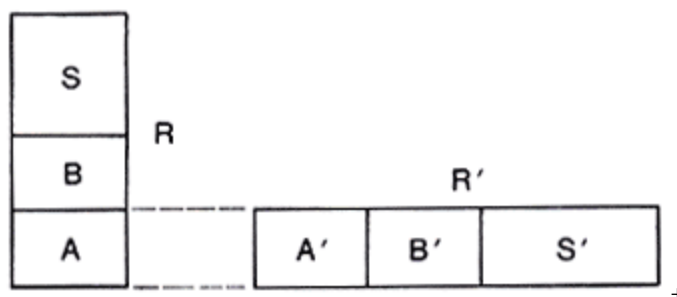
Fonte: Lima (2017).

Figura 35 - As linhas pontilhadas indicam como se obteve a decomposição $R = A \cup B \cup C$. A altura do pentágono A é igual à altura de R' . Para obter o lado inclinado de A, traçamos, a partir do vértice superior esquerdo de R, um segmento paralelo à diagonal pontilhada. Como R e R' têm áreas iguais, tem-se $R' = A' \cup B' \cup C'$, sem superposições.



Fonte: Lima (2017).

Figura 36 - Temos $R = A \cup B \cup S$ e $R' = A' \cup B' \cup S'$, onde A' é congruente a A e B' é congruente a B. Se R e R' tiverem a mesma área, S e S' também terão. Agora a altura de S é menos de 2 vezes a altura de S' , de modo que podemos aplicar a estes dois retângulos o processo da Figura 32.



Fonte: Lima (2017).

■

3.3. Cálculo de Áreas por Equidecomposição.

O cálculo de áreas de figuras planas constitui um pilar da geometria, com aplicações que se estendem desde problemas elementares até contextos científicos e tecnológicos avançados. Uma abordagem particularmente elegante e intuitiva para a compreensão e determinação de áreas reside na teoria da equidecomposição. O principal resultado dessa teoria é o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, que foi estabelecido e demonstrado no tópico anterior, deixando claro a equivalência entre área e equidecomponibilidade para polígonos, fornecendo uma deixa para explorarmos o cálculo de áreas sob essa perspectiva.

A aplicação prática desse teorema revela-se na dedução e compreensão das fórmulas de área de diversas figuras. Por exemplo, a área de um paralelogramo pode ser facilmente visualizada como equivalente à de um retângulo de mesma base e altura através de

um simples corte e translação. Quando analisamos o estudo de áreas, sob o olhar da equidecomposição, ficamos em conformidade a Hartshorne (2000) que deixa claro como a equidecomposição transforma o problema de equivalência de áreas em um exercício construtivo de decomposição geométrica.

A importância desse olhar para o cálculo de áreas é algo que do ponto de vista pedagógico, consoante a Coxeter (1969), oferece uma rica oportunidade para o desenvolvimento do raciocínio espacial e da intuição geométrica dos estudantes. A manipulação de peças e a visualização das transformações fortalecem a compreensão do conceito de área como uma propriedade conservada sob decomposição e recomposição, promovendo um aprendizado mais significativo e duradouro.

Dando sequência à discussão sobre o cálculo de áreas, sob a perspectiva da equidecomposição, os próximos tópicos serão dedicados à apresentação de definições e exploração de teoremas que sustentam essa abordagem geométrica.

Definição 3.6. A área A de um polígono é um número real positivo associado a ele, de forma que:

- i) Polígonos congruentes tem áreas iguais;
- ii) Se dois polígonos P_1 e P_2 têm interiores disjuntos, isto é, de intersecção vazia, então

$$A(P_1 \cup P_2) = A(P_1) + A(P_2);$$

- iii) Se um polígono P_1 está contido em um polígono P_2 , então

$$A(P_1) \leq A(P_2);$$

- iv) A área do quadrado unitário (lado de medida 1 u.c – uma unidade de comprimento –) é 1 u.a. (uma unidade de área).

Proposição 3.3. A razão entre as áreas de dois retângulos de bases congruentes equivale à razão entre as suas alturas.

Demonstração: Sejam $R_1(b, h_1)$ e $R_2(b, h_2)$ as áreas de dois retângulos de alturas h_1 e h_2 , respectivamente, e bases de medida b . Queremos mostrar que

$$\frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Dividiremos a prova em duas etapas.

1º caso: as alturas h_1 e h_2 são comensuráveis.

Nesse caso, como ilustra a Figura 37, existe um segmento de medida x tal que:

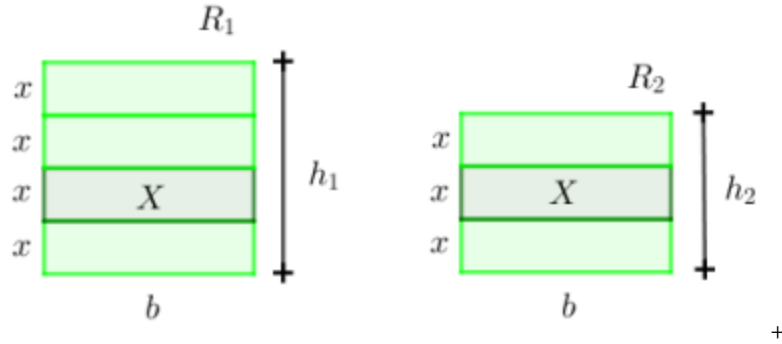
$$h_1 = px, p \in \mathbb{N}; \quad (i)$$

$$h_2 = qx, q \in \mathbb{N}. \quad (ii)$$

Dividindo (i) por (ii), obtemos

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q}. \quad (iii)$$

Figura 37 - Retângulos de bases congruentes.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Considerando o retângulo X , de área $X(b, x)$, temos que:

$$R_1(b, h_1) = pX(b, x), p \in \mathbb{N}; \quad (iv)$$

$$R_2(b, h_2) = qX(b, x), q \in \mathbb{N}. \quad (v)$$

Dividindo (iii) por (iv), obtemos

$$\frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} = \frac{p}{q}. \quad (vi)$$

Comparando (iii) com (vi), concluímos que

$$\frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}$$

2º caso: as alturas h_1 e h_2 são incomensuráveis.

Considerando um segmento de medida y tal que

$$h_2 = ny, n \in \mathbb{N} \quad (vii)$$

Como h_1 e h_2 são incomensuráveis, y não cabe um número inteiro de vezes em h_1 (mas cabe um número inteiro de vezes em h_2 , pela propriedade Arquimediana em $\mathbb{R}$, que diz que para quaisquer dois números reais x e y , com $x > 0$ e $y > 0$, existe um número natural n tal que $nx > y$). Assim,

$$my < h_1 < (m + 1)y, m \in \mathbb{N} \quad (viii)$$

Dividindo (viii) por (vii), obtemos

$$\frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m + 1}{n} \quad (ix)$$

Considerando o retângulo $Y(b, y)$, pela Definição 3.6 temos que:

$$R_2(b, h_2) = nY(b, y), n \in \mathbb{N}; \quad (x)$$

$$mY(b, y) < R_1(b, h_1) < (m + 1)Y(b, y), m \in \mathbb{N}. \quad (xi)$$

Dividindo (xi) por (x), obtemos

$$\frac{m}{n} < \frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} < \frac{m + 1}{n}. \quad (xii)$$

Como y é uma medida arbitrária, podemos escolher y tão pequeno quanto quisermos. Assim,

$$y \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty;$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{m + 1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \rightarrow \frac{m}{n}$$

Dessa forma, comparando (ix) e (xii), concluímos que, no limite ($y \rightarrow 0$ ou $n \rightarrow \infty$),

$$\frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Portanto, a razão entre as áreas de dois retângulos de bases congruentes equivale à razão entre as suas alturas.

■

Teorema 3.4. A área do retângulo de dimensões a e b é ab .

Demonstração: Sejam os retângulos de áreas $R_1(a, b)$, $R_2(a, 1)$ e $R_3(1, 1)$, sendo este último o quadrado unitário conforme a Definição 3.6. Como a Proposição 3.3 estabelece a razão entre as áreas de dois retângulos de bases congruentes equivale à razão entre as alturas, temos que:

$$\frac{R_1(a, b)}{R_2(a, 1)} = \frac{b}{1} = b; \quad (xiii)$$

$$\frac{R_2(a, 1)}{R_3(1, 1)} = \frac{R_2(1, a)}{R_3(1, 1)} = \frac{a}{1} = a. \quad (xiv)$$

Multiplicando membro a membro (xiii) e (xiv), concluímos que:

$$\frac{R_1(a, b)}{R_2(a, 1)} \times \frac{R_2(a, 1)}{R_3(1, 1)} = b \cdot a$$

$$\frac{R_1(a, b)}{R_3(1, 1)} = ab. \quad (xv)$$

Com base na ideia intuitiva de área, a igualdade (xv) demonstra que o quadrado unitário pode ser contido ab vezes dentro de um retângulo cujos lados medem a e b .

$$R_1(a, b) = ab.$$

■

Teorema 3.5. A área do triângulo de base de medida b e altura de medida h é $\frac{b \times h}{2}$.

Demonstração: Sejam, na Figura 25, $\overline{AB} = b$, $\overline{CD} = h$ e $\overline{BF} = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{h}{2}$. Pelo Teorema 3.4, a área do retângulo $ABFE$ é

$$\mathcal{A}(ABFE) = \overline{AB} \times \overline{BF} = \frac{b \times h}{2}.$$

Como, pelo Lema 3.2, o triângulo ABC é equicomposto ao retângulo $ABFE$, temos que

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABFE) = \frac{b \times h}{2}$$

■

Teorema 3.6. A área do paralelogramo de base de medida b e altura de medida h é $b \times h$.

Demonstração: Seja o paralelogramo $ABCD$, de base $\overline{AB} = b$ e altura $\overline{DG} = \overline{BF} = h$, ilustrado na Figura 38. Conforme o Lema 3.5, o paralelogramo $ABCD$ é equicomposto ao retângulo $GECD$, de base $\overline{CD} \equiv \overline{AB} = b$ e altura $\overline{GD} = h$. Portanto, pelo Teorema 3.4, concluímos que

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(GECD) = \overline{CD} \times \overline{DG} = \overline{AB} \times \overline{DG} = b \times h.$$

Figura 38 - Paralelogramo equicomposto a um retângulo.



Fonte: elaborado pelo próprio autor (2025).

■

As áreas dos demais polígonos convexos são decorrência direta do Lema 3.5.

4 EQUICOMPOSIÇÃO NO ESPAÇO

De acordo com Boltianski (1996), dois poliedros são considerados equidecomponíveis quando, ao seccionar um deles em um número finito de partes por meio de cortes específicos, é possível reorganizar essas partes para formar o segundo poliedro. Essa reconfiguração é realizada mediante operações de rotação, translação, reflexão e isometrias. Poliedros equidecomponíveis são, portanto, equivalentes no sentido de que possuem volumes idênticos.

A equicomposição, conforme demonstrada no Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, pode ser generalizada para poliedros, isto é, dois poliedros equivalentes são equidecomponíveis? Essa problemática está diretamente associada ao terceiro dos vinte e três problemas propostos por David Hilbert (1862-1943) durante o segundo Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris no ano de 1900. Diversos estudiosos da área dedicaram-se à investigação da decomposição de poliedros, cabendo a Max Wilhelm Dehn (1878-1952), então orientando de doutorado de Hilbert, a contribuição de uma resposta negativa ao problema em questão.

Neste capítulo, serão apresentados os resultados referentes à equicomposição de poliedros, partindo do pressuposto de que o leitor possui familiaridade com as expressões para o cálculo de volumes de prismas. O objetivo central consiste em investigar os limites da equidecomposição de poliedros, culminando na discussão sobre o terceiro problema de Hilbert.

4.1 Equidecomposição no Espaço Tridimensional.

Apesar da resposta negativa ao Terceiro Problema de Hilbert, o estudo da equidecomposição no espaço tridimensional não se encerra. Pesquisas posteriores exploraram condições sob as quais certos tipos de poliedros são equidecomponíveis, como prismas com a mesma altura e base de mesma área, e investigaram generalizações do conceito de equidecomposição, como a equivalência por complementação, conforme Sah (1979). Os objetos de estudo devem ser rigorosamente definidos para garantir clareza e precisão no desenvolvimento do trabalho. Diante disso, apresentam-se, a seguir, algumas definições fundamentais sobre os objetos que serão abordados ao longo deste tópico.

Definição 4.1 (Poliedro). Um poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$ é definido como a união de um conjunto finito de polígonos, obedecendo às seguintes condições:

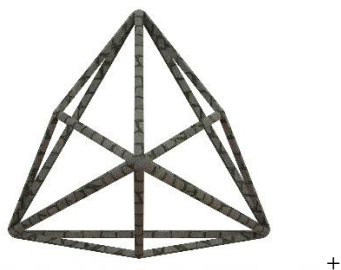
- i. Existe um conjunto finito de polígonos $F_1, F_2, \dots, F_n \subset \mathbb{R}^3$ denominado de Faces e formam a superfície do poliedro P.

- ii. Para quaisquer dois polígonos F_1 e F_2 , com $i \neq j$, a interseção $F_1 \cap F_j$ é vazia ou é um subconjunto comum de uma aresta ou de um vértice.
- iii. Cada aresta e_k de P é um segmento de reta que conecta dois vértices v_a e v_b , e pertence a exatamente duas faces adjacentes F_i e F_j .
- iv. Cada vértice v_m de P é um ponto em $\mathbb{R}^3$ que pertence a pelo menos três arestas ou faces distintas.

Definição 4.2. (Poliedro Convexo). Um poliedro P é dito *convexo* se, para quaisquer dois pontos $x, y \in P$, o segmento de reta que os conecta está completamente contido em P . Caso contrário, P é classificado como não convexo.

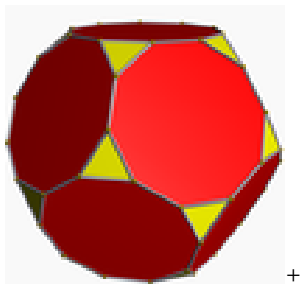
As Figuras 39, 40 e 41 são exemplos de poliedros convexos.

Figura 39 - Poliedro convexo: Tetraedro Triakis (Poliedro de Catalan).



Fonte: Wikipédia (2025).

Figura 40 - Poliedro convexo: Dodecaedro Truncado (Poliedro de Arquimedes).



Fonte: Wikipédia (2025).

Figura 41 - Poliedro convexo: Bipirâmide Quadrada Giroalongada (Poliedro de Johnson).

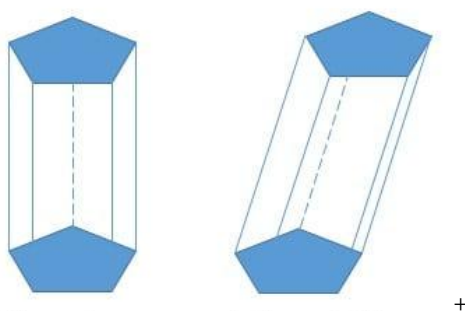


Fonte: Wikipédia (2025).

Definição 4.3. (Prisma Convexo): É um poliedro convexo constituído por duas bases poligonais congruentes, B_1 e B_2 , situadas em planos paralelos distintos em $\mathbb{R}^3$, e cujas faces laterais são os paralelogramos que conectam as arestas correspondentes de ambas as bases. Formalmente, sejam B_1 um polígono convexo contido em uma plano de $\mathbb{R}^3$ e v um vetor de translação não paralelo a esse plano. O prisma P é o conjunto de pontos

$$P = \{p + tv \mid p \in B_1 \text{ e } 0 \leq t \leq 1\}.$$

Figura 42 - Prisma convexo de bases paralelas.



Fonte: Wikipédia.

Definição 4.4 (Poliedros equivalentes). Dois poliedros são equivalentes se têm o mesmo volume.

Definição 4.5 (Decomposição de um poliedro). Um poliedro P é composto pelos poliedros $P_1, P_2, \dots, P_n$, ou pode ser decomposto neles, se $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ e os interiores de $P_i, 1 \leq i \leq n$, forem disjuntos.

Definição 4.6 (Poliedros equidecomponíveis). Dois poliedros P e P' são equidecomponíveis quando existem decomposições $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ e $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_n$ de tal modo que cada poliedro P_i é congruente ao poliedro P'_i , com $1 \leq i \leq n$. Além disso, exige-se que o poliedro P tenha suas partições com os interiores disjuntos, o mesmo ocorrendo com o poliedro P' .

Essa definição pode ser vista como *congruência por corte*, neste caso teríamos P e P' congruentes por corte e denotaríamos por $P \sim P'$.

Um resultado positivo importante no estudo da equidecomposição de poliedros concerne aos prismas. Eles ocupam um lugar especial no estudo da equidecomposição de poliedros. Como demonstra Sydler (1985), todo prisma triangular é equidecomponível a um paralelepípedo retângulo de mesmo volume.

Do ponto de vista educacional, NCTM (2000) destaca que a equidecomposição de prismas oferece um método visualmente intuitivo para compreender fórmulas de volume, transformando a abstração algébrica em operações geométricas concretas.

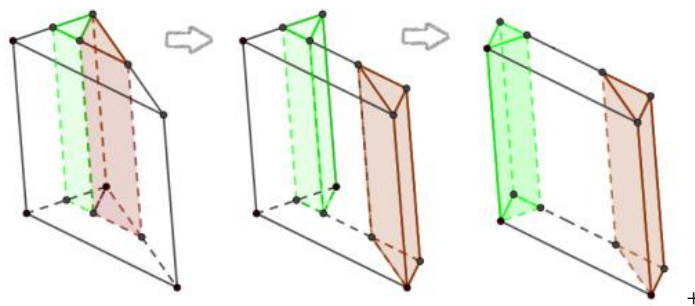
Com as definições devidamente estabelecidas, é possível proceder à análise de algumas equicomposições envolvendo prismas.

Teorema 4.1. Todo prisma reto é equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo.

Demonstração: Seja P um prisma reto qualquer. Pelo Lema 3.5, a base poligonal do prisma P é equicomposta a um retângulo. Consideremos este retângulo como base de um paralelepípedo reto retângulo R cuja altura é congruente à altura de P . Como P e R têm alturas congruentes e bases equicompostas, temos que P é equivalente a R . Assim, P e R são equidecomponíveis, como pode ser exemplificado na Figura 43.

■

Figura 43 - Prisma triangular reto equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo.



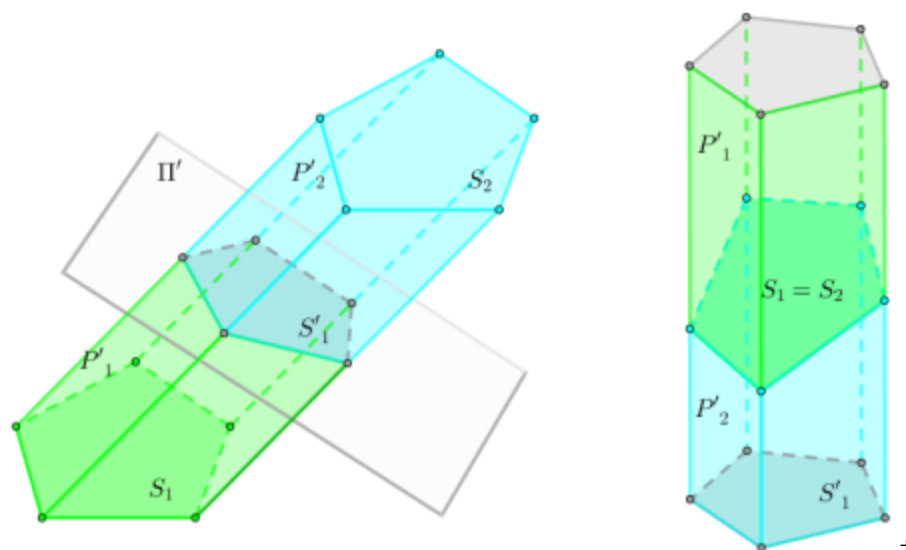
Fonte: elaborado pelo próprio autor (2025).

Teorema 4.2. Se a seção reta de um prisma oblíquo está contida nele, então o prisma oblíquo é equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo.

Demonstração: Seja P' um prisma oblíquo qualquer de bases S_1 e S_2 . Seja S'_1 a seção reta ou seção normal do prisma, que seria uma seção perpendicular às arestas laterais, com $S'_1 \subset P'$, tal que o plano Π' que contém S'_1 divide P' em dois sólidos: P'_1 , o sólido inferior, e P'_2 , o sólido superior. Com movimentos de translação no espaço, podemos mover P'_1 de modo a colocá-lo sobreposto a P'_2 , formando um prisma reto P . Como demonstrado no Teorema 4.1, esse prisma reto P é equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo R . Logo, P' é equivalente a P e, por transitividade, equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo R , ilustrado na Figura 44.

■

Figura 44 - Prisma pentagonal obluo equicomposto a um prisma pentagonal reto.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

4.2 O Terceiro Problema de Hilbert

A equidecomposio demonstrada no Teorema 4.1 pode ser estendida a outros poliedros equivalentes, ou seja,  possível afirmar que dois poliedros equivalentes são equidecomponíveis? Essa questo está intrinsicamente relacionada ao terceiro dos vinte e três problemas propostos por David Hilbert em 1900, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris. Ao longo do tempo, diversos matemáticos dedicaram-se ao estudo da decomposio de poliedros, investigando as condies e propriedades que permitem tais divises e suas implicaes teóricas. Essa linha de pesquisa não apenas contribuiu para o avanço da geometria, mas também estabeleceu conexes profundas com outras áreas da matemática, como a teoria dos conjuntos e a lgebra.

Segundo Guimarães (2011)

Legendre em uma nota de seus *lements de Géométrie* (1794), já havia demonstrado que dois poliedros simétricos são equidecomponíveis com partes que têm a mesma orientao. Hill, professor na Universidade de Londres, fornece, em 1895, exemplos de tetraedros equidecomponíveis com um cubo. Bricard, professor de Matemática em Paris, fornece em 1896 uma condio para que dois poliedros de mesmo volume sejam equidecomponíveis, mas sua demonstrao  incompleta. Max Dehn, aluno de Hilbert, prova, em 1900, poucos meses após o congresso de Paris, que existem poliedros com o mesmo volume que não são equidecomponíveis. Em particular, Dehn mostra que um tetraedro regular e um cubo, ambos com o mesmo volume, não podem ser equidecomponíveis. Hadwiger, na década de 1950, simplificou a demonstrao de Dehn, empregando o chamado invariante de Dehn, que  igual para poliedros equidecomponíveis. Ora, a decomposio de um prisma em três pirâmides pode fazer surgir pirâmides de mesmo volume, mas com invariantes de Dehn diferentes. Em 1965, o matemático suo J. P. Sydler consegue, enfim, provar que as condies de Dehn são necessárias e suficientes para que dois poliedros de mesmo volume sejam equidecomponíveis (Guimarães et al., 2011).

Um dos discípulos de Hilbert, Max Dehn, dedicou-se ao estudo do problema proposto por seu mentor e apresentou uma resposta negativa à questão. O aspecto central de sua demonstração reside na construção de invariantes, que posteriormente foram denominadas invariantes de Dehn. Tais invariantes desempenham um papel fundamental na análise da equidecomponibilidade de poliedros, fornecendo critérios essenciais para determinar quando dois poliedros não podem ser decompostos em partes congruentes. A contribuição de Dehn não apenas resolveu parcialmente o problema proposto por Hilbert, mas também estabeleceu uma base teórica significativa para investigações futuras em geometria e teoria da decomposição.

Podemos apresentar um contraexemplo que ilustra o resultado estabelecido por Max Dehn, o qual demonstra a existência de dois poliedros que, embora possuam volumes idênticos, não são equidecomponíveis. Esse resultado evidencia que a equidecomponibilidade de poliedros não é determinada exclusivamente pelo volume.

O seguinte par de poliedros A e B , definidos por:

$A =$ Envoltória convexa de $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$;

$B =$ Envoltória convexa de $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$.

Ambos possuem volume idênticos, com $V(A) = V(B) = \frac{1}{6}$, mas não são equivalentes por decomposição.

Para a demonstração do Teorema de Dehn, que é o principal ponto deste capítulo, usaremos de alguns resultados sobre funções aditivas e invariantes.

Definição 4.7. (Invariantes). Seja I uma aplicação que associa a cada poliedro P um número real denominado de $I(P)$. O número $I(P)$ é chamado de invariante se satisfaz as seguintes propriedades:

- i. Se P_1 e P_2 são congruentes por corte, então $I(P_1) = I(P_2)$.
- ii. Se o poliedro P for decomposto em poliedros menores $P_1, P_2, \dots, P_n$, ou seja, $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, então $I(P) = I(P_1) + I(P_2) + \dots + I(P_n)$.

Definição 4.8. (Funções Aditivas). Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *aditiva* se satisfaz

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Definição 4.9. (Função $\mathbb{Q}$ -Linear). Uma função aditiva f é $\mathbb{Q}$ -Linear se também preserva a multiplicação por escalares racionais

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}, f(qx) = qf(x).$$

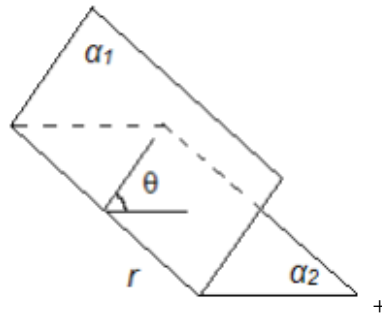
Uma das ideias centrais consiste na construção de invariantes para poliedros, mas a consideração dos ângulos diedros de um poliedro revela-se fundamental. O invariante de Dehn, construído para distinguir poliedros de mesmo volume que não são equidecomponíveis,

depende crucialmente da medida desses ângulos e dos comprimentos das arestas correspondentes. Conforme destacado por Hadwiger (1957), a não equidecomponibilidade de certos poliedros de mesmo volume reside precisamente na diferença de seus ângulos de aresta ponderados pelos comprimentos das arestas correspondentes. Essa observação sublinha a importância de analisar não apenas o volume, uma medida integral, mas também as características locais da geometria do poliedro, como seus ângulos diedros, para determinar sua equidecomponibilidade.

Diante disso, é fundamental estabelecer uma definição precisa do conceito de ângulo diedro.

Definição 4.10. Sejam α_1 e α_2 planos e r a reta de interseção de α_1 e α_2 . O ângulo θ construído pela interseção ortogonal de um plano β com a reta r e os planos α_1 e α_2 é chamado ângulo diedro.

Figura 45 - Ângulo diedro.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Se o ângulo θ for o ângulo diedro então o seu suplemento também é um ângulo diedro. Adotaremos a medida do ângulo diedro em radianos.

Usando ângulos diedros, construiremos um invariante, que segue da seguinte forma: Considere os ângulos diedros $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ medidos em radiano, e $c_1, c_2, \dots, c_n$ os comprimentos das arestas correspondentes a cada ângulo diedro do polígono P . Dada uma função aditiva f , definimos

$$X_f(P) := X(P) := c_1 f(\omega_1) + c_2 f(\omega_2) + \dots + c_n f(\omega_n).$$

Por definição, se P_1 e P_2 são congruentes por corte, então os comprimentos de suas arestas e ângulos diedros são iguais. Logo, $X_f(P_1) = X_f(P_2)$. Portanto, segue que se $P_1 \sim P_2$ então $X_f(P_1) = X_f(P_2)$.

Para a função X_f construída com o propósito de ser um invariante, é necessário impor algumas condições sobre a função aditiva f .

Teorema 4.3 (Hadwiger). Se uma função aditiva satisfaz $f(\pi) = 0$, então X_f é um invariante, isto é, se $P \sim P'$ então $X_f(P) = X_f(P')$, dado um poliedro T e sua decomposição $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, vale $X_f(T) = X_f(T_1) + X_f(T_2) + \dots + X_f(T_n)$, para qualquer função aditiva f tal que $f(\pi) = 0$.

Demonstração: Seja o funcional $X_f(P)$ definido como

$$X_f(P) = \sum l(e).f(\theta(e)).$$

A prova é realizada em duas etapas. Primeiramente, demonstra-se a propriedade aditiva do funcional X_f e, em seguida, utiliza-se tal propriedade para estabelecer a invariância sob equidecomposição. Para provar a aditividade, seja T_0 um poliedro decomposto em n partes, $T_1, T_2, \dots, T_n$. O objetivo é demonstrar que

$$\sum_{i=1}^n X_f(T_i) = X_f(T_0).$$

A intersecção dos vértices e arestas de todas as peças T_i define uma partição de cada aresta original em segmentos menores. Denominaremos cada um desses segmentos de cadeia. O funcional de um poliedro T_i pode ser expresso como uma soma sobre as cadeias que compõem suas arestas. Como o ângulo diedro é constante ao longo de uma aresta original de T_i , o valor $X_f(T_i)$ pode ser reescrito como a soma dos valores $a.f(\phi)$ para todas as cadeias pertencentes às arestas de T_i , onde a é o comprimento da cadeia e ϕ o ângulo diedro. Consequentemente, a soma total

$$\sum_{i=1}^n X_f(T_i)$$

pode ser vista como uma grande soma sobre todas as cadeias de todas as peças. A validade da propriedade aditiva é verificada ao se analisar a contribuição de uma cadeia genérica G , de comprimento a , para a soma total. Se a cadeia G pertence a um conjunto de peças $\{T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_s}\}$, com ângulos diedros correspondentes $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$, sua contribuição agregada para a soma é $a.f(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_s)$, em virtude da aditividade da função f . O valor desta expressão depende da localização de G em relação ao poliedro original T_0 .

A investigação das propriedades locais da cadeia G requer a análise de três casos distintos.

1. Se a cadeia G está contida no interior de T_0 , ela está completamente rodeada por faces das peças da decomposição. A soma de seus ângulos diedros deve, portanto, formar um ângulo completo, implicando

$$\sum \xi_k = 2\pi.$$

A contribuição de G para a soma é $a \cdot f(2\pi) = a \cdot 2f(\pi) = 0$, pela condição imposta sobre f .

2. Quando a cadeia G se encontra sobre uma face de T_0 , mas não em uma de suas arestas, os ângulos diedros das peças que a contêm somam um ângulo plano. Neste caso,

$$\sum \xi_k = \pi$$

e a contribuição de G é $a \cdot f(\pi) = 0$.

3. Se a cadeia G é parte de uma aresta original de T_0 com ângulo diedro ϕ_0 , os ângulos diedros das peças em G devem somar precisamente ϕ_0 . A contribuição de G é, portanto, $a \cdot f(\phi_0)$, um termo em geral, não-nulo.

Desta análise, conclui-se que as únicas cadeias que fornecem uma contribuição não-nula para a soma total são aquelas que compõem as arestas do poliedro original T_0 . A soma de todas essas contribuições não-nulas reconstrói exatamente o funcional de Hadwiger do poliedro original, $X_f(T_0)$. Assim, a propriedade aditiva

$$\sum_{i=1}^n X_f(T_i) = X_f(T_0)$$

está verificada. Com a aditividade estabelecida, a prova da invariância é direta. Pela definição de congruência entre poliedros, se T_1 e T_2 são congruentes, então suas arestas possuem comprimentos iguais e seus ângulos diedros correspondentes são idênticos. Logo, decorre diretamente que $X_f(T_1) = X_f(T_2)$. Dado que a propriedade aditiva foi estabelecida e que a congruência implica a igualdade dos invariantes, segue-se que, se $K \sim W$, então $X_f(K) = X_f(W)$.

■

Para a demonstração rigorosa do Teorema de Dehn, que estabelece a não equidecomponibilidade de certos poliedros de mesmo volume, torna-se imprescindível o desenvolvimento prévio de alguns lemas e teoremas auxiliares. Como observa Boltianski (1978), a solução do Terceiro Problema de Hilbert não pode ser alcançada diretamente, ela demanda uma estrutura de lemas que isolem e tratem separadamente cada aspecto essencial do problema. Consoante a Hartshorne (2000), sem esses resultados intermediários, a invariância da soma de Dehn sob decomposição não poderia ser estabelecida de modo rigoroso.

Nas palavras de Stillwell (1998)

A beleza do Teorema de Dehn reside precisamente na maneira como ele sintetiza observações geométricas aparentemente desconexas, unificadas por uma sequência lógica de resultados intermediários. (Stillwell, 1998).

Dando continuidade à discussão, exibiremos as demonstrações de alguns lemas auxiliares.

Lema 4.1. Se θ é um ângulo tal que $\cos \theta = \frac{l}{3}$, onde l é um número inteiro não divisível por 3, então para todo número natural n , $\cos(n\theta) = \frac{c}{3^n}$, onde c é um número inteiro não divisível por 3.

Demonstração: Faremos a demonstração por indução

- i) Verificando para $n = 1$, temos que

$$\cos(1\theta) = \frac{c_1}{3^1} = \frac{l}{3}$$

- ii) Suponhamos que a proposição seja verdadeira para alguma $n = k > 1$, ou seja, assumimos que

$$\cos(k\theta) = \frac{c_k}{3^k}$$

onde c_k é um número inteiro não divisível por 3. Queremos agora mostrar a validade para $n = k + 1$, ou seja

$$\cos((k + 1)\theta) = \frac{c_{k+1}}{3^{k+1}}$$

com c_{k+1} um inteiro não divisível por 3. Para isso, iremos utilizar a fórmula de recorrência para o cosseno de múltiplos de um ângulo (que pode ser obtida usando as fórmulas de adição de arcos)

$$\cos((k + 1)\theta) = 2 \cos(k\theta) \cos \theta - \cos((k - 1)\theta).$$

Substituindo na hipótese de indução, temos que

$$\cos(k\theta) = \frac{c_k}{3^k}, \cos((k-1)\theta) = \frac{c_{k-1}}{3^{k-1}}$$

e usaremos $\cos \theta = \frac{m}{3}$ com m um inteiro não divisível por 3 para ajustes de cálculo, ficando

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\theta) &= 2 \cdot \frac{c_k}{3^k} \cdot \frac{m}{3} - \frac{c_{k-1}}{3^{k-1}} = \frac{2mc_k}{3^{k+1}} - \frac{c_{k-1}}{3^{k-1}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos((k+1)\theta) &= \frac{2mc_k}{3^{k+1}} - \frac{9c_{k-1}}{3^{k+1}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos((k+1)\theta) &= \frac{2mc_k - 9c_{k-1}}{3^{k+1}}. \end{aligned}$$

Definindo $c_{k+1} = 2mc_k - 9c_{k-1}$, temos

$$\cos((k+1)\theta) = \frac{c_{k+1}}{3^{k+1}}$$

Note que $c_k, c_{k-1}, 2m$ não são divisíveis por 3, ou seja, a combinação linear $2mc_k - 9c_{k-1}$ também não é divisível por 3.

■

Lema 4.2. Seja $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ o ângulo diedro de um tetraedro regular. Então a razão $\frac{\pi}{\theta}$ é um número irracional.

Demonstração: Vamos provar por absurdo. Seja $\frac{\pi}{\theta} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+$, então

$$-n\pi + m\theta = 0 \Rightarrow m\theta = n\pi \Rightarrow \cos(m\theta) = \cos(n\pi) = \pm 1.$$

O que é absurdo, de acordo com o Lema 4.1, portanto a suposição é falsa e $\frac{\pi}{\theta}$ é irracional.

■

Após a cuidadosa construção dos fundamentos teóricos e a demonstração dos lemas auxiliares necessários, estamos finalmente preparados para apresentar a prova completa do Teorema de Dehn.

Teorema 4.4 (Dehn). Um cubo e um tetraedro regular não são congruentes por corte.

Demonstração: Seja $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ o ângulo diedro de um tetraedro regular, de acordo com o Lema 4.2, temos que π e θ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Com isso, defina uma função $\mathbb{Q}$ -linear $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(\pi) = 0$ e $f(\theta) = 1$. Seja C um cubo de aresta a e ângulo diedro $\theta = \frac{\pi}{2}$, como ele possui 12 arestas de mesmo comprimento, temos que o invariante $X_f(C)$ é dado por

$$X_f(C) = \sum_{i=1}^{12} a \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Como f é $\mathbb{Q}$ -linear, temos que $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}f(x)$. Portanto,

$$X_f(C) = \sum_{i=1}^{12} a \cdot \frac{1}{2} \cdot f(\pi) = \sum_{i=1}^{12} a \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Seja T um tetraedro regular com arestas de comprimento a , temos que

$$X_f(T) = \sum_{i=1}^6 a \cdot f(\theta),$$

pela definição de f , temos $f(\theta) = 1$, o que implica

$$X_f(T) = \sum_{i=1}^6 a \cdot 1 = 6a.$$

Portanto, conclui-se que um tetraedro regular e um cubo de volumes iguais não são congruentes por corte, uma vez que seus invariantes de Dehn são distintos.

■

A demonstração apresentada para o Teorema de Dehn, foi construída sobre o arcabouço mais geral dos invariantes de Hadwiger. A escolha de um funcional X_f específico, baseado em uma função $\mathbb{Q}$ -linear, permitiu-nos chegar ao resultado de forma direta e acessível. É fundamental, contudo, contextualizar esta abordagem em relação ao trabalho pioneiro que ela representa. A demonstração original de Max Dehn, publicada em 1901 na prestigiosa revista *Mathematische Annalen*, foi um marco da matemática por introduzir métodos algébricos para resolver um problema puramente geométrico. A sua prova não utilizava o formalismo aqui apresentado, mas sim a definição de um invariante específico, hoje conhecido como Invariante de Dehn, que reside na estrutura mais complexa dos produtos tensoriais. Décadas mais tarde, a teoria foi generalizada por Hugo Hadwiger, que em sua obra de 1957, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, estabeleceu uma família de invariantes que inclui o de Dehn como um caso particular.

A demonstração do Teorema de Dehn usando produtos tensoriais pode ser encontrada com mais detalhes em Dias (2013).

O teorema de Dehn, não apenas resolveu o terceiro problema de Hilbert, mas também inaugurou uma linha de investigação profunda na teoria da equidecomposição. Em 1965, Jean-Pierre Sydler, publicou o artigo *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, na revista *Commentarii*

Mathematici Helvetici, provando que, em $\mathbb{R}^3$, dois poliedros são equidecomponíveis se e somente se possuem o mesmo volume e o mesmo invariante de Dehn. Posteriormente, Borge Jessen e Anders Thorup, publicaram o artigo *The algebra of polytopes in affine spaces*, na revista *Mathematica Scandinavica*, generalizando esses invariantes para dimensões superiores, mostrando que, em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$, a equidecomposição exige não apenas a igualdade de volumes, mas também a coincidência de invariantes combinatórios mais complexos, associados a ângulos diedros de faces com dimensão superior.

5 O PARADOXO DE BANACH-TARSKI

O tema equidecomposição abre margem para diversas situações, algumas sendo até inusitadas e contra intuitiva. Neste capítulo iremos adentrar em um domínio surpreendente desta teoria, o teorema de Banach-Tarski, um resultado que desafia nossa intuição sobre a natureza do volume no espaço tridimensional, desta forma, o teorema é conhecido como Paradoxo de Banach-Tarski. Proposto por Stefan Banach e Alfred Tarski em 1924 (Banach; Tarski, 1924), o resultado afirma que uma bola sólida no espaço tridimensional pode ser decomposta em um número finito de pedaços e, através de meras rotações e translações desses pedaços, remontada para formar duas cópias idênticas da bola original.

Stefan Banach (1892 – 1945), matemático polonês, é reconhecido como um dos fundadores da análise funcional moderna. Sua colaboração com Alfred Tarski no célebre paradoxo geométrico reflete sua abordagem inovadora aos espaços vetoriais e à teoria da medida. Como observa Davis (2006), Banach transformou problemas concretos em estruturas axiomáticas, pavimentando o caminho para resultados contraintuitivos, como o teorema que hoje leva seu nome. Sua obra *Théorie des Opérations Linéaires* (1932) estabeleceu bases para a formalização de espaços de Banach, essenciais ao contexto do teorema.

Alfred Tarski (1901 – 1983), lógico e matemático polonês-americano, destacou-se por seus trabalhos em teoria dos conjuntos e semântica formal. Sua parceria com Banach surgiu da intersecção entre lógica e geometria, resultando no paradoxo publicado em "*Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*" (1924). O texto mostra que, usando o axioma da escolha, conjuntos equidecomponíveis podem violar a conservação de volume. Segundo Feferman (2004), Tarski via na matemática uma linguagem precisa para explorar o impossível, como a duplicação de esferas. Jech (2008) destaca que Tarski transformou um problema geométrico em um teorema sobre ações de grupos, ligando a equidecomposição à teoria de invariantes.

Embora o Teorema de Banach-Tarski seja frequentemente discutido no contexto de uma esfera sólida em $\mathbb{R}^3$, sua aplicação a objetos de dimensão inferior, como a circunferência, que iremos nos referir como $\mathbb{S}^1$, revela algumas diferenças, mas relacionam-se por serem tão contraintuitivos. O que deve ficar claro, conforme Mycielski (1989), é que possível particionar a circunferência em um número finito de conjuntos não-mensuráveis e remonta-los via rotações para obter múltiplas cópias, mas apenas se o axioma da escolha for aplicado.

A análise da circunferência ilustra como a dimensionalidade e a estrutura algébrica das isometrias determinam a viabilidade do paradoxo. Conforme Dougherty e Foreman (1994),

em dimensão 1, a equidecomposição paradoxal é menos acentuado, mas ainda desafia a noção clássica de medida.

O objetivo principal deste capítulo será a exposição do Teorema de Banach-Tarski na Circunferência e a sua demonstração. Mas, a nível de curiosidade, será enunciado a versão clássica do Teorema de Banach-Tarski, e onde encontrar a demonstração, haja vista que a verificação do resultado foge do escopo deste trabalho.

Teorema 5.1. (Banach-Tarski em $\mathbb{R}^3$) Dada uma bola E em $\mathbb{R}^3$, existe uma família finita de subconjuntos, dois a dois disjuntos, $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ de E e isometrias de $\mathbb{R}^3$ $g_1, g_2, \dots, g_n, h_1, h_2, \dots, h_m$ tais que

$$E = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) \quad e \quad E = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j)$$

Nesse resultado, isometria significa, a grosso modo, movimentos no espaço $\mathbb{R}^3$ que não alteram o comprimento do vetor, ou seja, são rotações e translações. Em outras palavras, o Teorema 5.1 diz que toda bola em $\mathbb{R}^3$ pode ser dividida em um número finito de pedaços, subconjuntos da bola, tais que, reorganizando-os, é possível formar duas novas bolas iguais à primeira.

Demonstração: A demonstração pode ser analisada em Panek (2006).

5.1 O Teorema de Banach-Tarski na Circunferência

Os paradoxos de decomposição são frutos de diversas propriedades dos conjuntos infinitos não-enumeráveis. O teorema de Banach-Tarski, é um paradoxo de decomposição, que consiste em duplicar e ampliar esferas em $\mathbb{R}^n$, o Teorema 5.1, ilustra o resultado em $\mathbb{R}^3$. Mas, o sentido deste tópico é apresentar o paradoxo em uma versão para esfera unidimensional. É necessário deixar claro que os axiomas de Zermelo-Fraenkel, conhecidos por sistema ZF são os axiomas padrão da teoria de conjuntos, e eles não incluem o axioma da escolha, conhecido como sistema AC, do inglês *axiom of choice*. O sistema ZF, que inclui AC, é denominado de sistema ZFC.

A exposição dos axiomas de Zermelo-Fraenkel pode ser conferida no *Apêndice C* de forma integral.

Seguiremos para apresentação de alguns resultados que auxiliarão na demonstração do teorema de Banach-Tarski na circunferência.

Definição 5.1. Seja A um conjunto qualquer. Um conjunto $R \subseteq A \times A$ é chamado de relação entre os elementos de A ou, simplesmente, relação binária em A . Neste caso, dizemos que o elemento $x \in A$ está relacionado com o elemento $y \in A$ via relação R se o par ordenado $(x, y) \in R$, e escreve-se xRy ou $x \sim y$.

É importante ressaltar que a construção da demonstração do teorema repousa de maneira crucial na utilização de relações de equivalência, que permitem particionar o conjunto em classes adequadas para a decomposição. Como destaca Weiss (1995),

A essência do paradoxo reside na capacidade de estabelecer relações de equivalência que, ao mesmo tempo, preservam propriedades geométricas fundamentais e permitem rearranjos contraintuitivos quando combinados com o axioma da escolha. (Weiss, 1995, p. 142).

Caminhando sobre as relações de equivalência, as definições a seguir deixarão bem estabelecida os conceitos que utilizaremos na demonstração do teorema.

Definição 5.2. Seja A um conjunto qualquer. Uma relação R em A é dita ser uma relação de equivalência se satisfaz essas três condições:

- i. $\forall x \in A, (x, x) \in R$;
- ii. $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;
- iii. $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

A condição (i) é chamada de reflexiva, (ii) de simétrica e (iii) de transitiva. São condições úteis para a construção de um conjunto adequado para a demonstração do teorema.

Definição 5.3. Sejam A um conjunto, $R \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência em A e $a \in A$. Definimos a classe de equivalência do elemento a com relação a R como

$$[a] = \{x \in A; (x, a) \in R\}.$$

O axioma que está intrinsicamente ligado ao Teorema de Banach-Tarski, como já comentado anteriormente, é o *Axioma da Escolha*. Segundo Solovay (1970) o axioma da escolha é necessário para que ocorra o teorema de Banach-Tarski na circunferência.

Axioma 5.1 (Axioma da Escolha) Para qualquer conjunto de conjuntos não-vazios S , existe uma função chamada *função escolha* para S tal que a imagem de cada conjunto S é um elemento de S .

Dizer que é possível escolher um elemento de cada conjunto não-vazio de uma família de conjuntos é até aceitável quando ela é infinita enumerável, ou seja, possui a mesma cardinalidade dos naturais, que significa estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de ambos os conjuntos, ou quando ela é uma família finita. A força do axioma da

escolha está no fato de podermos demonstrar teoremas a partir da existência de uma função escolha, muito embora não possamos conhecê-la (Warner, 2019).

A profundidade e o alcance do Axioma da Escolha são evidenciados pela vasta gama de proposições matemáticas, aparentemente desconectadas, que se revelam logicamente equivalentes a ele no sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (ZF). Entre as formulações equivalentes mais proeminentes encontra-se o *Princípio do Bom Ordenamento*, proposto por Zermelo, que afirma que todo conjunto pode ser dotado de uma relação de boa ordem. Outra equivalência de importância capital, e talvez a mais utilizada em aplicações práticas na álgebra e na análise, é o *Lema de Zorn*, o qual garante a existência de elementos maximais em conjuntos parcialmente ordenados sob a condição de que toda cadeia possua um majorante. Adicionalmente, o AE é equivalente a resultados fundamentais que estruturam diversas áreas da matemática: em álgebra linear, assegura que todo espaço vetorial admite uma *base de Hamel*; em álgebra comutativa, garante que todo anel não trivial com unidade contém um *ideal maximal*; e em topologia geral, o célebre *Teorema de Tychonoff* — que estabelece que o produto cartesiano de qualquer coleção de espaços topológicos compactos é compacto — também se demonstra ser equivalente ao axioma. Essas equivalências não apenas ilustram o poder do AE, mas também revelam seu papel como um princípio unificador em diferentes domínios da matemática abstrata.

Podemos seguir, de forma efetiva, para a demonstração do Teorema de Banach-Tarski na circunferência.

Teorema 5.2 (Banach-Tarski) A circunferência S^1 pode ser particionada em um número infinito enumerável de subconjuntos de tal forma que, rotacionados convenientemente, pode-se gerar duas novas esferas S^1 .

Demonstração: Cada ponto da circunferência S^1 , definida como sendo o conjunto dos pontos (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tais que $a^2 + b^2 = 1$, está associado de maneira única a um ponto da forma $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ para algum $\theta \in [0, 2\pi)$ em radianos, e a recíproca também é verdadeira. Para deixarmos a notação mais simples, vamos assumir que cada $x \in S^1$ é um ângulo em radiano, e não iremos fazer diferenciação entre pontos que são congruentes a outros módulo 2π , isto é, se $x, y \in S^1$ e $x = y + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, vamos simplesmente dizer que $x = y$, o que é compreensível já que na circunferência não vemos dois pontos diferentes.

Diante disso, considere a seguinte relação de equivalência em S^1 , definida entre os ângulos x e y da circunferência

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Escrevemos $x - y \in \mathbb{Q}$ para representar que o ângulo y é obtido a partir de x por uma rotação de um ângulo racional. Esta relação na circunferência S^1 é de equivalência. Considere, então $[x] = \{y \in S^1; y \sim x\}$, isto é, $[x]$ é a classe de equivalência do elemento $x \in S^1$. Por estarmos tratando de uma relação de equivalência, é verdade que $x \in [x]$ seja qual for o elemento $x \in S^1$, pois a relação é reflexiva. Assim,

$$S^1 = \bigcup_{x \in S^1} [x].$$

Em cada classe $[x]$, com $x \in S^1$, escolha apenas um elemento e considere V o conjunto desses elementos, ou seja, $V = \{\text{um único elemento da classe } [x]; x \in S^1\}$, isso só é possível pelo Axioma 5.1.

Se $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma enumeração do conjunto $\mathbb{Q}$, conforme Lima (2017). Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere

$$V_i = r_i + V,$$

isto é, para cada $i \in \mathbb{N}$, o conjunto V_i é a rotação de V pelo ângulo r_i .

Afirmamos que

$$S^1 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i. \quad (*)$$

Com efeito, a inclusão

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i \subseteq S^1$$

é óbvia, pois os V_i 's foram construídos a partir de elementos de S^1 . Seja, então, $z \in S^1$ e considere sua classe $[z]$. Pela construção do conjunto V , existe $w \in V$ tal que $w \in [z]$. Note que pertencer à classe do elementos z significa que a diferença $z - w$ é algum número racional, digamos r_{i_0} , que segue com $z = r_{i_0} + w \in r_{i_0} + V = V_{i_0}$, o que mostra a inclusão

$$S^1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i$$

e prova nossa afirmação.

Sejam

$$A = V_1 \cup V_3 \cup V_5 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{2i-1}$$

e

$$B = V_2 \cup V_4 \cup V_6 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{2i}$$

Naturalmente, $S^1 = A \cup B$. Pela construção de V_i , temos que $V_i \cap V_j = \emptyset$, para $i \neq j$, pois V foi construído apenas com único elemento de cada classe de equivalência. As classes de equivalência sempre formam uma partição, lembrando que a partição divide um conjunto em subconjuntos não-vazios e dois a dois disjuntos, conforme Valleman (2006). Isso garante que $A \cap B = \emptyset$. Agora, vamos provar que é possível rotacionar os pontos dos conjuntos A e B e obter duas novas circunferências em S^1 .

Rotacionando V_2 em um ângulo $r_1 - r_2$, teremos

$$(r_1 - r_2) + V_2 = (r_1 - r_2) + r_2 + V = r_1 + V = V_1.$$

De modo geral, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$(r_i - r_{2i-1}) + V_{2i-1} = (r_i - r_{2i-1}) + r_{2i-1} + V = r_i + V = V_i$$

como também

$$(r_i - r_{2i}) + V_{2i} = (r_i - r_{2i}) + r_{2i} + V = r_i + V = V_i.$$

Utilizando esse processo em todos os elementos de A e, similarmente de B , segue de (*) que

$$\begin{array}{ccccccc} V_1 & \cup & V_3 & \cup & V_5 & \cup & \dots = A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & \downarrow \\ V_1 & \cup & V_2 & \cup & V_3 & \cup & \dots = S^1 \end{array}$$

como também

$$\begin{array}{ccccccc} V_2 & \cup & V_4 & \cup & V_6 & \cup & \dots = B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & \downarrow \\ V_1 & \cup & V_2 & \cup & V_3 & \cup & \dots = S^1. \end{array}$$

Portanto, uma vez que $S^1 = A \cup B$, rotacionando os pontos dos conjuntos disjuntos A e B , obtemos duas novas circunferências S^1 , o que conclui a prova do teorema. ■

Se é possível particionar a circunferência S^1 em duas novas circunferências idênticas S^1 , então seria possível dar continuidade ao processo e particionar em quantas quiser? A resposta é positiva e o próximo passo é mostrar como isso acontece.

Corolário 5.1. A circunferência S^1 pode ser particionada em um número infinito enumerável de subconjuntos de tal forma que, rotacionados convenientemente, pode-se gerar infinitas novas esferas S^1 .

Demonstração: Seguiremos o raciocínio análogo ao que foi demonstrado no Teorema 5.2. Para obtermos três novas circunferências, precisamos separar apropriadamente os índices dos V_i 's da união (*) dada por

$$S^1 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i.$$

Considere, para isso,

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{3i}, B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{3i+1} \text{ e } C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{3i+2}.$$

Note que A, B e C são dois a dois conjuntos e que $A = V_3 \cup V_6 \cup V_9 \cup \dots, B = V_4 \cup V_7 \cup V_{10} \cup \dots$, e $C = V_5 \cup V_8 \cup V_{11} \cup \dots$. Agora, procedemos da mesma forma que anteriormente, rotacionando cada V_{3i} em A , cada V_{3i+1} em B e cada V_{3i+2} em C para obtermos três novas circunferências. O caso para quatro circunferências é análogo, bastando considerar os conjuntos

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{4i}, B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{4i+1}, C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{4i+2} \text{ e } D = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_{4i+3}.$$

Para se obter infinitas novas circunferências, seja $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ uma enumeração dos números primos positivos. Considere, para cada $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, o conjunto

$$X_i = \{p_i^k; k \in \mathbb{N}\},$$

isto é, o conjunto X_i é formado por todas as potências do número p_i . Seja X_0 , o conjunto dos números naturais que não são potências de nenhum primo. Dessas considerações, temos que $\mathbb{N} = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \dots$, em que a união é formada por conjuntos dois a dois disjuntos, e cada X_i possui infinitos elementos. Agora, vamos construir os pedaços da circunferência que servirão para gerar outras circunferências. Seja, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o conjunto

$$A_i = \bigcup_{j \in X_i} V_j.$$

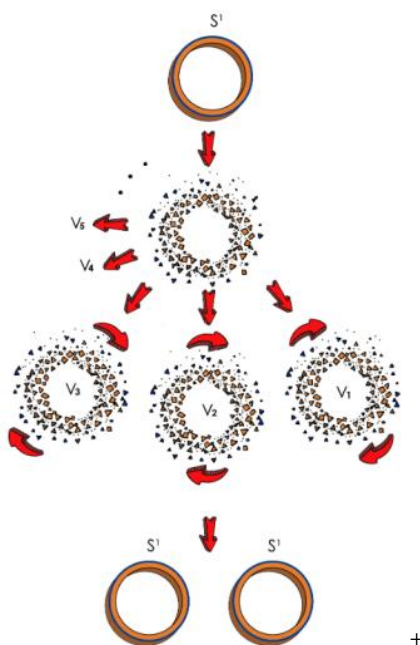
Por exemplo, considerando $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$, temos que $A_1 = V_2 \cup V_4 \cup V_8 \cup V_{16} \cup \dots$ e $A_2 = V_3 \cup V_9 \cup V_{27} \cup V_{81} \cup \dots$. Ora, procedendo, então, como antes, é possível tornar cada pedaço A_i de S^1 em uma nova circunferência S^1 . ■

Portanto, a demonstração na circunferência, embora mais acessível, mantém toda a elegância e o impacto do teorema original, servindo como uma porta de entrada para o estudo das equidecomposições paradoxais e das consequências do axioma da escolha. Em última análise, o teorema de Banach-Tarski é um exemplo sublime de como a matemática pode desafiar e expandir os limites do pensamento racional, convidando-nos a explorar conceitos que, embora aparentemente absurdos, são rigorosamente verdadeiros dentro do seu formalismo (Gama, 2016; Panek, 2004).

O paradoxo nos convida a refletir sobre o preço da generalidade matemática. Como pondera Maddy (1997), aceitar o Banach-Tarski é aceitar que a matemática pura pode nos levar a verdades que transcendem não apenas a experiência, mas até mesmo a imaginação – e que essa é precisamente sua força.

Na circunferência, como na esfera, o teorema celebra o poder criativo da matemática abstrata, capaz de transformar o aparentemente impossível em teorema, e o paradoxal em conhecimento. A Figura 46 ilustra o Teorema de Banach-Tarski.

Figura 46 - Ilustração do Teorema de Banach-Tarski.



Fonte: Oliveira et al. 2019.

6 ABORDAGEM DIDÁTICA

Este capítulo marca a culminância do trabalho desenvolvido, apresentando o produto educacional resultante desta dissertação. Nosso foco principal é a criação de atividades didáticas que visam aprimorar o ensino de áreas de figuras planas por meio do conceito de equidecomposição. Considerando a relevância desse tema na formação matemática e as dificuldades frequentemente enfrentadas pelos estudantes, elaboramos uma série de recursos pedagógicos que buscam transformar a aprendizagem em uma experiência mais dinâmica e engajadora.

O produto educacional aqui detalhado é composto por uma variedade de atividades, incluindo jogos online interativos e atividades práticas de corte e recorte. Como apontam D'Ambrosio e Lopes (2014), a matemática deve ser vista como um campo de investigação, onde a resolução de problemas e a modelagem são ferramentas fundamentais para a construção do conhecimento. Nessa perspectiva, o presente trabalho visa proporcionar uma educação matemática de qualidade, que promove o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais, como o pensamento científico, crítico e criativo, comunicação e argumentação, trabalho em equipe e cooperação, uma cultura digital, autonomia e proatividade, e por fim, resiliência e persistência.

A escolha da gamificação e de atividades manipulativas não foi escolhida de forma aleatória. Para o público-alvo, que foram jovens do ensino médio, a metodologia com jogos se mostra particularmente eficaz, pois estimula o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a criatividade de forma lúdica. De acordo com Huizinga (2000), o jogo é uma atividade inerente à cultura humana, capaz de envolver os indivíduos de maneira profunda e significativa. Além disso, o caráter interativo e prático dessas atividades facilita a compreensão de conceitos abstratos como a equidecomposição, permitindo que os estudantes visualizem e manipulem as figuras, experimentando na prática como a conservação de área se manifesta por meio de transformações. Essa abordagem concreta-pictórica-abstrata é defendida por Bruner (1966) como essencial para a construção de significados na aprendizagem.

Nosso objetivo é demonstrar como esses recursos, ao serem implementados em sala de aula, podem desenvolver habilidades cognitivas e socioemocionais cruciais para a fase juvenil. As atividades propostas buscam não apenas o domínio do conteúdo de áreas, mas também o aprimoramento de habilidades previstas na BNCC, como o pensamento computacional, a capacidade de argumentação e a colaboração. Acreditamos que, ao engajar os alunos em desafios que exigem a aplicação de conceitos matemáticos de forma criativa,

estaremos contribuindo significativamente para uma aprendizagem mais profunda e duradoura. Para Vygotsky (1987), a interação social e a atividade prática são pilares para o desenvolvimento cognitivo, e é nesse sentido que as atividades propostas buscam promover o aprendizado colaborativo e a construção coletiva do conhecimento.

6.1. Palestra de apresentação do produto educacional.

A etapa de introdutória do produto educacional foi a apresentação do projeto aos estudantes. Para isso, optou-se por uma apresentação inicial em formato de palestra, utilizando slides. Essa abordagem teve como meta contextualizar o tema da equidecomposição e das áreas de figuras planas, demonstrando a relevância do assunto e a forma como seria trabalhado.

Durante a palestra, buscamos não apenas expor o conteúdo teórico, mas principalmente despertar a curiosidade e o interesse dos alunos. Os slides foram desenvolvidos para serem visualmente atrativos e didáticos, usando como inspiração o template de um streaming online, a Netflix. Apresentamos a ideia central da equidecomposição de forma acessível, explicando como a manipulação de formas pode nos ajudar a compreender e calcular áreas de maneiras surpreendentes. A Figura 47 mostra o layout da apresentação.

Figura 47 - Layout de apresentação da palestra.



+

Fonte: elaborado pelo autor (2025)

Figura 48 - Sumário de apresentações.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Conforme a Figura 48, é notório que a palestra foi cuidadosamente estruturada em quatro tópicos principais. Essa divisão visou apresentar o conteúdo de forma progressiva e didática, garantindo que os estudantes pudessem construir o conhecimento de maneira sólida e interativa.

O primeiro tópico da palestra dedicou-se à apresentação do tema central: a equidecomposição no plano e no espaço. Explanando os conceitos fundamentais, demonstrando como figuras com áreas iguais podem ser decompostas e rearranjadas. Essa introdução buscou não apenas definir o que é equidecomposição, mas também mostrar sua relevância no estudo da geometria, despertando a curiosidade dos alunos para as possibilidades que essa ideia oferece.

Em seguida, o segundo tópico abordou o Tangram e suas aplicações. Este quebra-cabeça chinês milenar serviu como uma ferramenta prática e lúdica para ilustrar os princípios da equidecomposição. Apresentamos a história do Tangram, suas sete peças e como elas podem ser utilizadas para formar uma infinidade de figuras, sempre mantendo a área total. Discutimos suas aplicações não apenas na matemática, mas também na arte e no desenvolvimento do raciocínio espacial. Além da explanação teórica, a interação com o Tangram foi potencializada por meio de jogos online, permitindo que os alunos explorassem suas possibilidades de forma dinâmica e divertida.

O terceiro tópico seguiu uma linha similar, focando no Stomachion e suas aplicações. Pouco conhecido em comparação ao Tangram, o Stomachion, um antigo quebra-cabeça grego atribuído a Arquimedes, oferece desafios ainda mais complexos na equidecomposição. Exploramos suas 14 peças e as diversas formas que podem ser criadas, aprofundando o conceito de decomposição e recomposição de figuras. Assim como no Tangram, a exploração do Stomachion foi enriquecida por jogos online, proporcionando uma experiência interativa e imersiva na manipulação das peças e na compreensão da conservação de área.

Por fim, o quarto e último tópico da palestra culminou em uma atividade prática de corte e recorte. Essa parte foi projetada para permitir que os alunos experimentassem diretamente os conceitos apresentados. Utilizando figuras simples, os estudantes puderam, com tesouras e papel, decompor e recompor formas, visualizando de maneira concreta a invariância da área. Essa atividade serviu como uma ponte entre a teoria exposta nos slides e a vivência prática, solidificando a compreensão da equidecomposição.

A Figura 49 mostra a parte teórica sobre Equidecomposição no Plano que os alunos puderam conhecer e após questionamentos feitos durante a palestra, foi apresentado o slide da Figura 50 que respondia as dúvidas sobre Equidecomposição no Espaço Tridimensional.

Figura 49 - Equidecomposição no Plano



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Figura 50 - Equidecomposição no Espaço Tridimensional



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

6.2. Aprendendo sobre Equidecomposição com o Tangram

Após a exposição teórica sobre o tema, partimos para a exposição e prática sobre dois quebra-cabeças que trabalham a Equidecomposição. Começamos pelo Tangram, que revelou-se uma ferramenta de valor inestimável para a compreensão da tema. Ao manipularem as sete peças geométricas do quebra-cabeça, os alunos não só visualizaram o conceito de decompor e recompor figuras, mas também vivenciaram a propriedade de que a área total permanece invariável, independentemente da configuração das peças. A importância do Tangram residiu na capacidade de transformar um conceito abstrato em uma atividade tátil e visualmente estimulante.

A prática do jogo foi aplicada por meio de um jogo online, no site *Divertudo*, conforme a Figura 51.

Figura 51 - Interface do Tangram no site Divertudo.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Os alunos ficaram livres para escolherem qual jogo e qual figura eles iriam montar, a Figura 52 mostra um exemplo do jogo 10, no qual o aluno teria que montar um homem sentado.

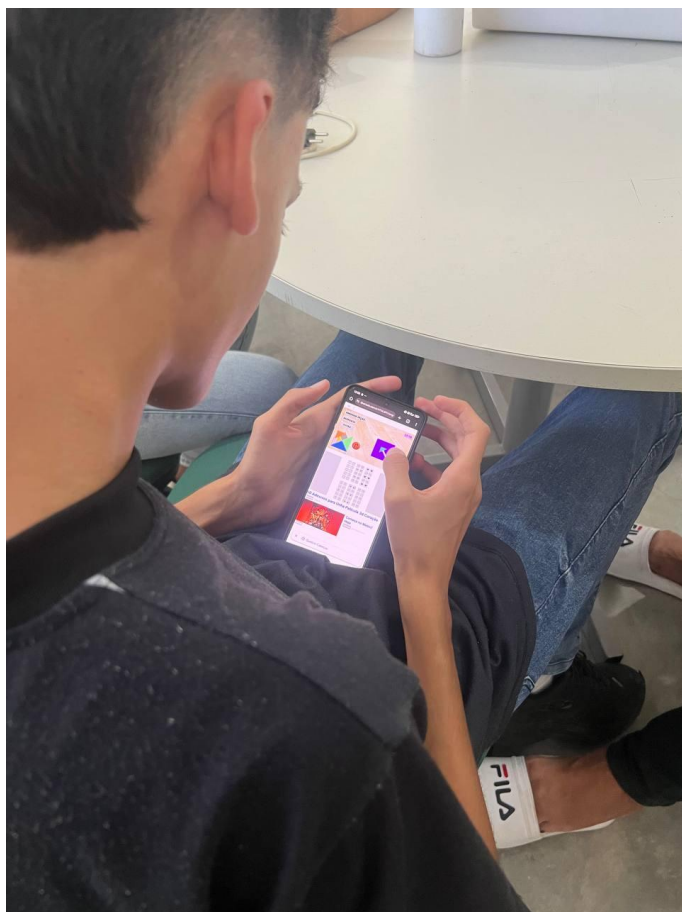
Figura 52 - Homem sentado do jogo 10.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

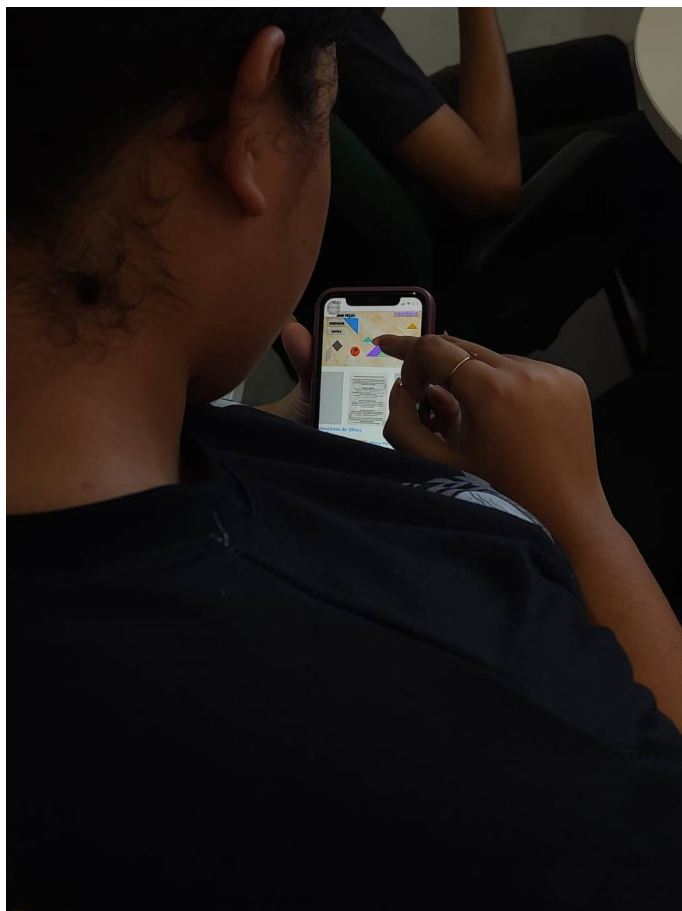
A atividade gerou um envolvimento notável por parte dos estudantes. Eles demonstraram um grande entusiasmo pelas diversas formas que podiam montar, explorando as possibilidades criativas do jogo. Foi evidente a forma participativa e efetiva com que se dedicaram à tarefa. Mais do que isso, a atividade estimulou a cooperação e o trabalho em grupo. Os alunos frequentemente compartilhavam ideias, discutiam estratégias para formar as figuras propostas e auxiliavam uns aos outros na resolução dos desafios, reforçando a ideia de que a matemática pode ser aprendida de forma colaborativa e prazerosa. As Figuras 53 e 54 mostra o processo de montagem das figuras pelos alunos.

Figura 53 - Aluno montando um desenho do Tangram.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Figura 54 - Aluna montando uma figura do Tangram.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

6.3. Aprendendo sobre Equidecomposição com o Stomachion.

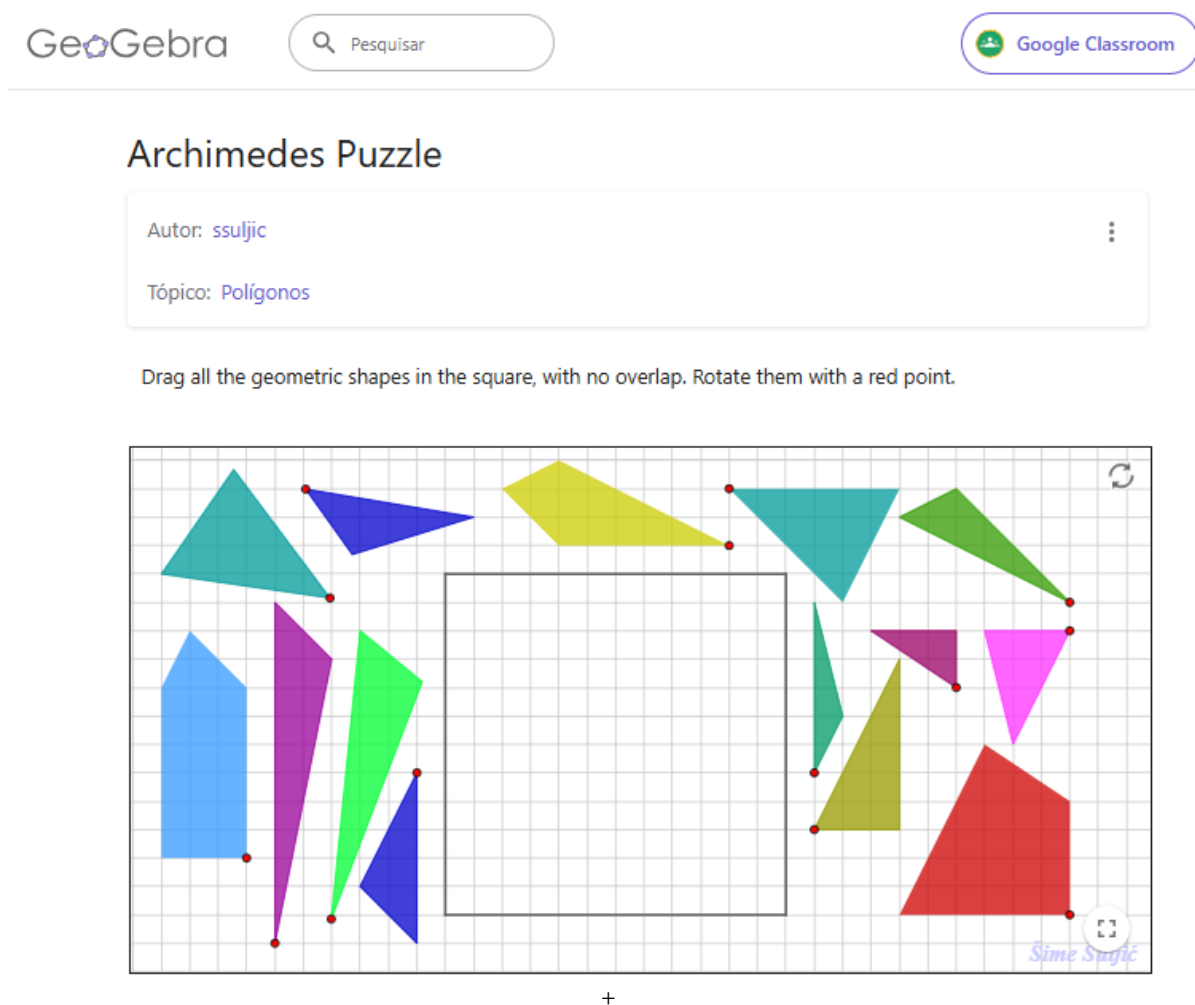
Se o Tangram introduziu os alunos ao universo da equidecomposição de forma acessível, o Stomachion representou um passo além na exploração desse conceito. Este antigo quebra-cabeça, com suas 14 peças distintas, proporcionou um desafio mais complexo e aprofundado, ampliando a compreensão dos estudantes sobre como figuras variadas podem ser construídas a partir de um conjunto fixo de polígonos, mantendo a área original.

A interação com o Stomachion, tanto nas discussões durante a palestra quanto por meio dos jogos online, demonstrou a capacidade dos alunos de enfrentar problemas mais elaborados. Embora o número maior de peças e as formas mais irregulares do Stomachion apresentassem um desafio superior, os estudantes se dedicaram com a mesma curiosidade e perseverança. Essa atividade foi crucial para solidificar a ideia de que a equidecomposição não se restringe a formas simples ou a um número limitado de peças. Foi visível como a experimentação com o Stomachion incentivou o pensamento estratégico e a persistência na

busca por soluções, habilidades essenciais não só para a matemática, mas para diversas áreas do conhecimento.

A atividade de montagem do Stomachion foi realizada através da plataforma Geogebra, utilizando o jogo *Archimedes Puzzle*, conforme a Figura 55.

Figura 55 - Interface do jogo Archimedes Puzzle.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A Figura 56 mostra a participação dos alunos na montagem do Stomachion.

Figura 56 - Alunos montando o Stomachion.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

6.4. Conclusão das Atividades

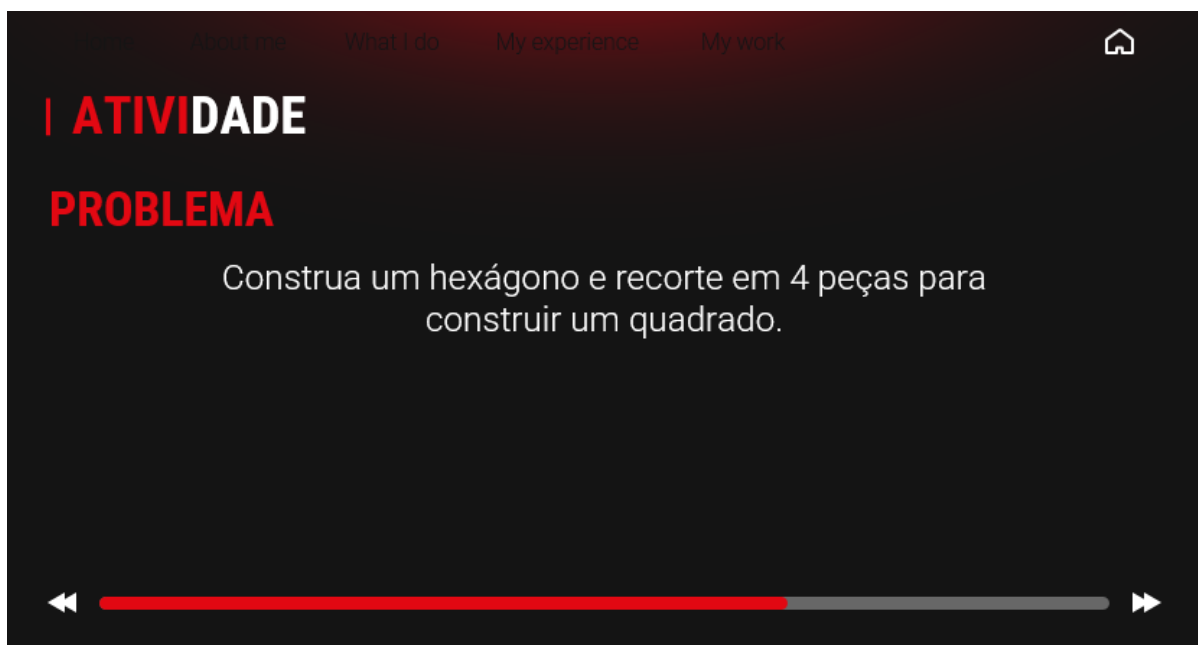
Para consolidar o aprendizado e estender a experiência para além do ambiente da palestra, consideramos crucial que os alunos levassem a reflexão sobre a equidecomposição para casa. Acreditamos que a assimilação de conceitos matemáticos complexos é mais efetiva quando os estudantes têm a oportunidade de revisitar e manipular as ideias em seu próprio tempo e espaço. Dessa forma, o aprendizado não fica restrito ao momento da aula, mas se torna um processo contínuo e mais significativo.

Com esse objetivo em mente, propusemos uma atividade prática de corte e recorte para ser realizada em casa. Essa tarefa não só reforçou os conceitos explorados com o Tangram e o Stomachion, mas também incentivou a autonomia dos alunos na resolução de problemas. Ao repetir a experiência de decompor e recompor figuras, eles puderam solidificar a compreensão da invariância da área e aprimorar suas habilidades espaciais. A expectativa é que essa atividade extraclasse estimule a curiosidade e o pensamento crítico, incentivando-os a

perceber a matemática presente em diversas situações do dia a dia.

A Figura 57 mostra o slide da palestra com a atividade que os alunos deveriam desenvolver em casa.

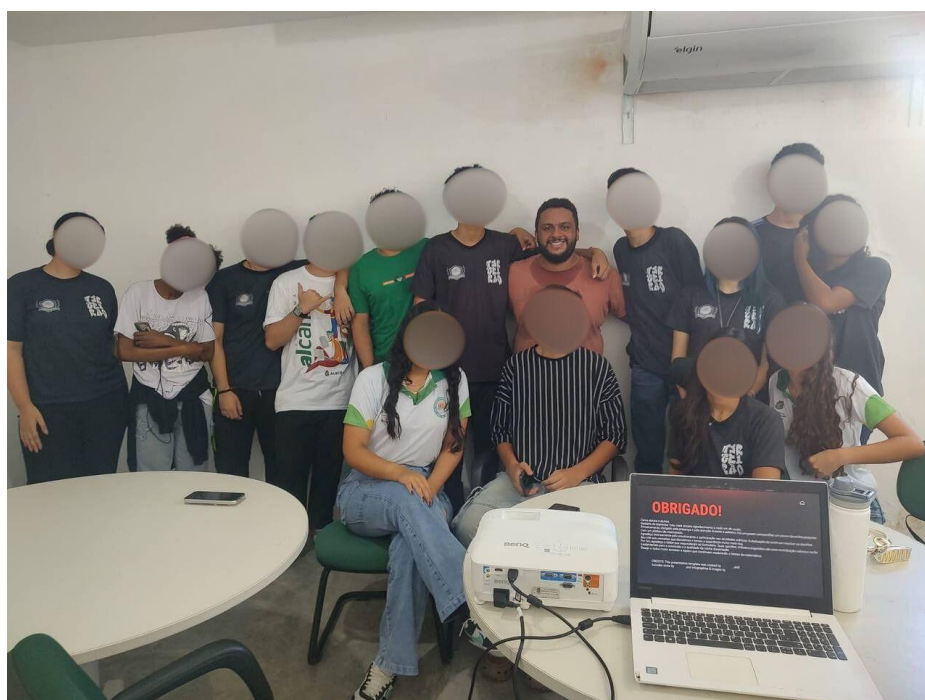
Figura 57 - Slide com a atividade proposta.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A Figura 58 mostra o momento de conclusão e agradecimentos pela participação dos alunos.

Figura 58 - Foto com os alunos que participaram da palestra e das atividades.



Fonte: Autoral.

6.5. Relato de Implementação do Produto Educacional: Um Estudo de Caso

A aplicação do produto educacional foi realizada em uma escola da rede pública estadual que opera em regime de tempo integral. O público-alvo consistiu em estudantes do terceiro ano do ensino médio, um grupo que, devido à modalidade da escola, possui uma rotina acadêmica intensa, com uma carga horária de nove aulas diárias e entre cinco a sete aulas semanais de matemática. A instituição conta com cinco turmas de terceiro ano, totalizando um universo de aproximadamente 150 a 175 alunos, o que inicialmente sugeria um campo vasto para a aplicação da proposta didática.

Contudo, a implementação enfrentou um desafio conjuntural significativo. O período escolhido para a aplicação coincidiu com os preparativos para as festividades juninas da escola, um evento cultural de grande relevância para a comunidade escolar. A maior parte do corpo discente estava profundamente envolvida nos ensaios e na organização das apresentações, o que resultou em uma disponibilidade de tempo muito reduzida para atividades extracurriculares. Diante deste cenário, a participação na atividade não pôde ser generalizada, sendo necessário realizar um convite direcionado aos estudantes que demonstraram interesse e cuja agenda era compatível.

A adesão, conseqüentemente, foi limitada pelo fator externo descrito. De todo o universo de alunos do terceiro ano, um grupo de 14 estudantes se dispôs a participar da intervenção pedagógica, conforme a Figura 58. Embora o número seja reduzido em comparação com o total de alunos da série, a formação de um grupo menor e voluntário permitiu um acompanhamento mais próximo e uma análise qualitativa mais aprofundada da interação dos participantes com o produto educacional proposto.

Adicionalmente, a experiência revelou um desafio de ordem prática e de infraestrutura, que se impõe a qualquer educador que deseje replicar esta abordagem. A aplicação das atividades depende intrinsecamente do acesso à tecnologia. É imprescindível a disponibilidade de um laboratório de informática funcional ou que os alunos possuam dispositivos móveis próprios, como celulares ou tablets. Em ambos os casos, o acesso estável à internet é uma condição não-negociável, uma vez que os jogos e as ferramentas interativas são acessados online, um requisito que pode representar uma barreira em diferentes contextos escolares.

7 RESULTADOS

Com a conclusão da fase de intervenção didática, que incluiu a palestra introdutória e as atividades com os jogos online de Tangram e Stomachion, o próximo passo foi a coleta de dados para avaliar o impacto do produto educacional. Este capítulo se dedica à apresentação e análise dos resultados obtidos através de um questionário *online* da ferramenta Google Formulário, disponível na íntegra no Apêndice A.

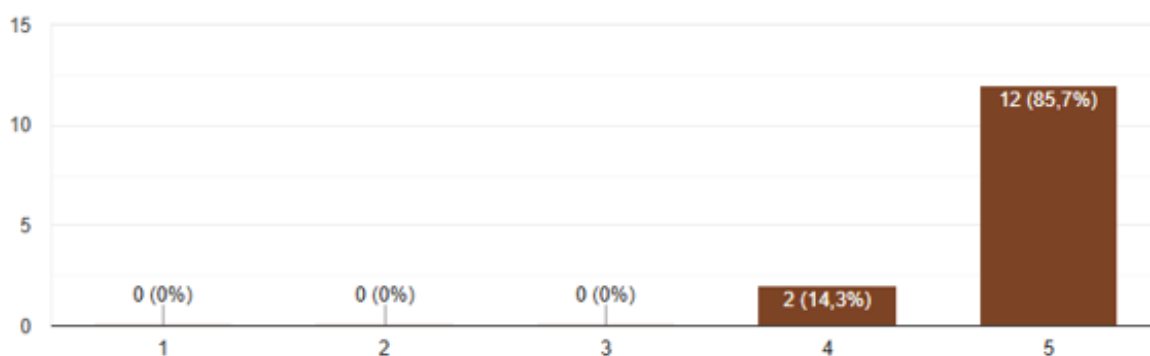
O formulário foi elaborado com o intuito de captar as percepções dos estudantes sobre a palestra, os jogos e a relevância da equidecomposição. As informações coletadas nos permitem compreender a efetividade das estratégias pedagógicas empregadas, identificar pontos fortes e áreas que podem ser aprimoradas. Ao analisar as respostas, buscaremos inferir o nível de engajamento dos alunos, a clareza da exposição dos conteúdos e o impacto das atividades lúdicas no processo de aprendizagem da matemática. A seguir, detalharemos os principais achados, organizando-os de forma a fornecer uma visão clara e objetiva do desempenho do produto educacional.

O Gráfico 1 mostra o quanto os alunos ficaram satisfeitos com a palestra e o Gráfico 2 mostra o quanto os alunos acharam relevante o conteúdo exposto na palestra, em uma escala de 1 a 5, com 1 sendo pouco satisfeito e 5 muito satisfeito.

Gráfico 1 - Quantitativo de alunos satisfeitos com a palestra.

Você ficou satisfeito com a palestra?

14 respostas

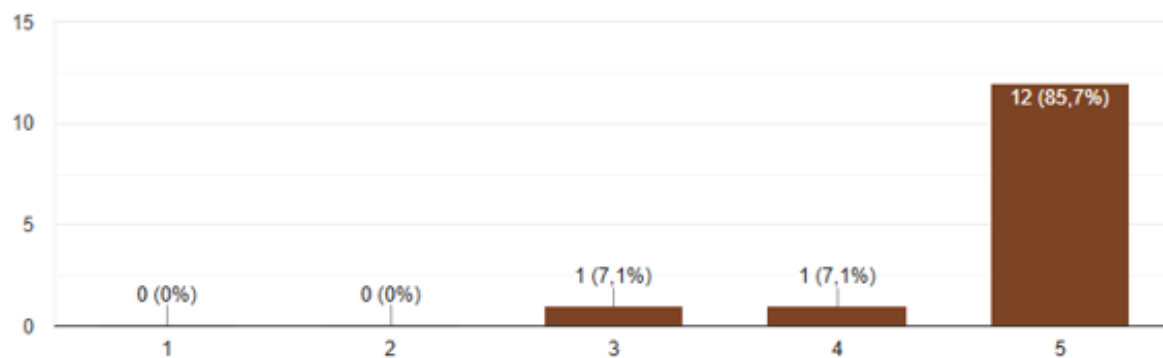


Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Gráfico 2 - Quantitativo de alunos que acharam a palestra útil.

A palestra foi relevante e útil?

14 respostas



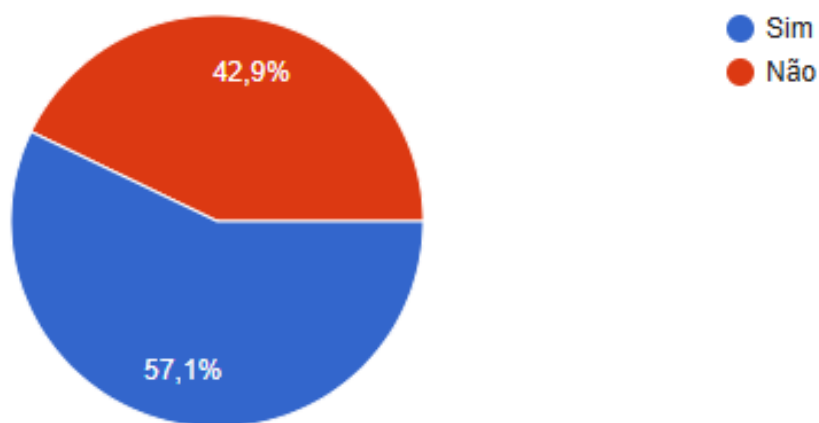
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Os Gráficos 3 e 4 mostram os percentuais de alunos que conheciam o Tangram e o Stomachion, enquanto os Gráficos 5 e 6 mostram os percentuais conforme o padrão do Gráfico 1 e 2, acerca da preferência pelos jogos.

Gráfico 3 - Percentual de alunos que conheciam o Tangram.

Já conhecia o Tangram?

14 respostas

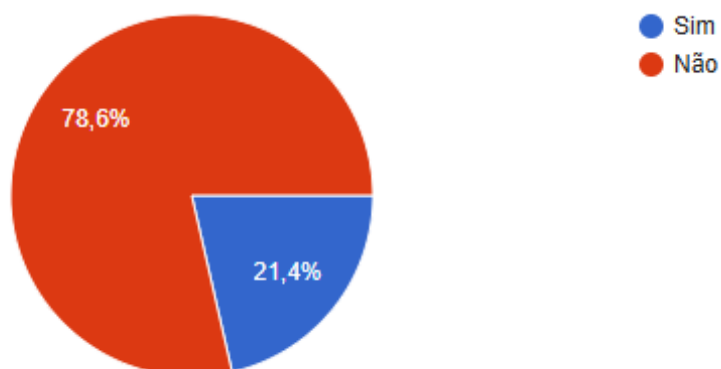


Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Gráfico 4 - Percentual de alunos que conheciam o Stomachion.

Já conhecia o Stomachion?

14 respostas

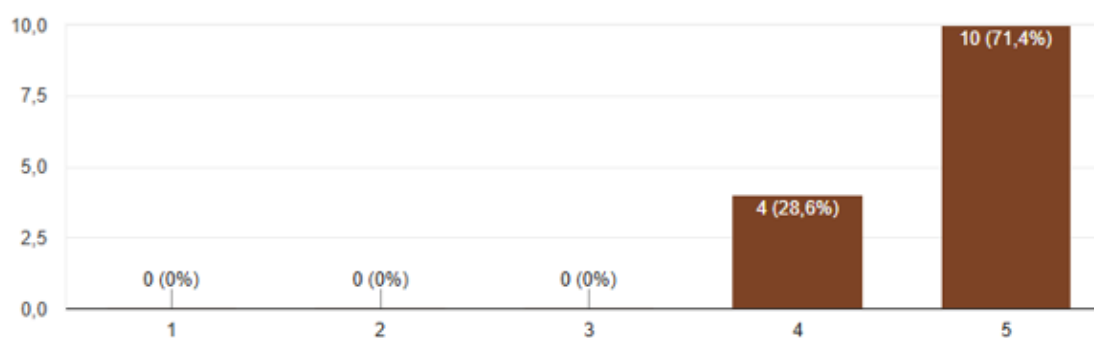


Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Gráfico 5 - Percentual sobre o que alunos acharam do Tangram.

O que você achou do Tangram?

14 respostas

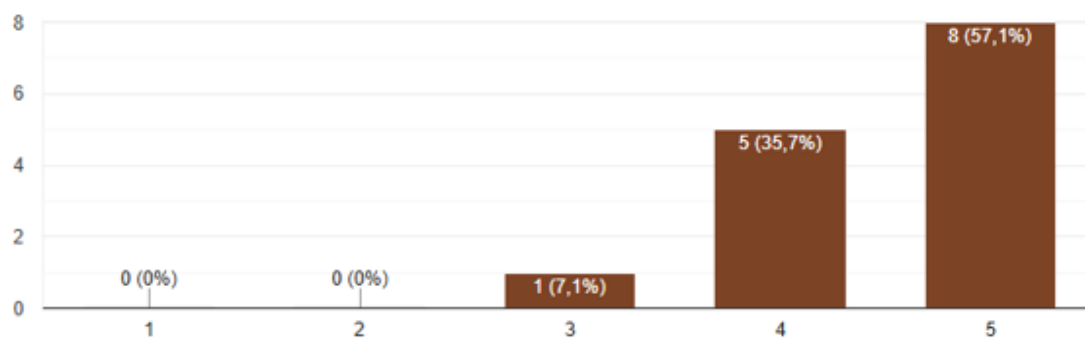


Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Gráfico 6 - Percentual sobre o que alunos acharam do Stomachion.

O que achou do Stomachion?

14 respostas



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

O formulário apresentou duas perguntas, que foram deixadas em aberto para que os alunos entrevistados respondessem com suas palavras. Os questionamentos foram,

- O que você mais gostou na palestra?
- Quais sugestões/dicas/elogios você pode fazer?

As Figuras 59 e 60 mostram algumas respostas para os questionamentos feitos no formulário.

Figura 59 - Respostas sobre a pergunta: O que você mais gostou na palestra?

O que você mais gostou na palestra?

14 respostas

A parte do dinâmica de montar as peças
Gostei como foi dinâmico e interativo. formas divertidas de aproximar alunos pra a matemática
Saber que um forma geométrica pode se transformar em outra, e as diversas formas de fazer isso.
Da interatividade dos jogos
Do tangram
Me interessei pela por uma área da matemática que não possuía conhecimento sobre.
Montar formas
Da forma divertida de aprender sobre as formas geométricas
Gostei da parte dos jogos, e de descobrir esses jogos.

Fonte: elaborado pelo autor (2025)

Figura 60 - Respostas sobre a pergunta: Quais sugestões/dicas/elogios você pode fazer?

Quais sugestões/dicas/elogios você pode fazer.

14 respostas

Nada a declarar
Foi muito divertido de trabalhar, ainda melhor com a explicação do professor
Esclarecedor!
Não sei
Gostei muito do palestrante, ele explicou de forma clara e objetiva.
Me interessei, e achei muito legal.
Ótima aula
Ambos o Stomachion e o Tangram são bons, n tenho nada que reclamar.
Os jogos Stomachion e Tangram são dinâmicos e divertidos, tornando o aprendizado mais fácil e divertido.

Fonte: elaborado pelo autor (2025)

Com base nos dados coletados e apresentados neste capítulo, é possível afirmar que o produto educacional obteve um resultado amplamente positivo. As análises das respostas dos formulários, aliadas às observações feitas durante a aplicação das atividades, reforçam a eficácia da abordagem proposta para o ensino de áreas e volumes por meio da equidecomposição.

É importante ressaltar que, mesmo com um volume de dados que pode não permitir um cálculo estatístico de alta precisão, a qualidade da participação e a interação demonstrada pelos alunos foram indicadores robustos da importância e do impacto da palestra e das práticas com os jogos online. O entusiasmo e o engajamento evidenciados, tanto na palestra quanto nas interações com os jogos online e as atividades práticas, são indicadores fortes de que as metodologias empregadas foram bem-sucedidas em despertar o interesse e facilitar a compreensão do conteúdo. Acreditamos firmemente que este produto educacional, com suas atividades lúdicas e interativas, será uma ferramenta muito útil no aprendizado dos estudantes sobre áreas de figuras planas. Ele não só contribui para a construção de um conhecimento matemático mais sólido e significativo, mas também promove o desenvolvimento de habilidades essenciais como o raciocínio lógico, a resolução de problemas e o trabalho colaborativo.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação buscou explorar a riqueza e a aplicabilidade do conceito de equidecomposição, tanto no plano quanto no espaço, como uma ferramenta poderosa para o ensino de áreas e volumes. Ao longo deste trabalho, demonstramos que a ideia de transformar figuras sem alterar sua medida é fundamental não apenas para a compreensão de princípios geométricos, mas também para o desenvolvimento de um pensamento matemático mais flexível e criativo. A jornada desde os teoremas clássicos até as aplicações práticas no cotidiano escolar pavimentou o caminho para a culminância deste estudo: a criação de um produto educacional inovador e eficaz.

O desenvolvimento e a aplicação do nosso produto educacional, composto por jogos online interativos e atividades práticas de corte e recorte, confirmaram a hipótese central de que a ludicidade e a manipulação são catalisadores essenciais para a aprendizagem. Apesar de uma base de dados que limita inferências estatísticas de alta precisão, a observação direta e o feedback qualitativo dos alunos revelaram um engajamento notável e um entusiasmo contagiante. A participação ativa e a interação cooperativa durante as atividades foram evidências claras do impacto positivo da abordagem, validando a importância de métodos de ensino que transcendem a mera transmissão de conteúdo.

Mais do que o domínio específico de fórmulas de área e volume, o sucesso do produto educacional reside na sua capacidade de fomentar um conjunto de competências e habilidades essenciais, alinhadas tanto à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) quanto às demandas da vida dos jovens. Vimos os estudantes desenvolverem o pensamento científico, crítico e criativo ao buscarem soluções inovadoras para os quebra-cabeças. A comunicação e a argumentação foram exercitadas nas discussões sobre estratégias, enquanto o trabalho em equipe e a cooperação floresceram na resolução coletiva dos desafios.

Adicionalmente, a inserção de jogos online promoveu uma cultura digital educativa, ensinando os jovens a utilizar a tecnologia como uma ferramenta de aprendizado significativo. A autonomia e a proatividade foram estimuladas na atividade de corte e recorte para casa, reforçando a ideia de que o aprendizado vai além da sala de aula. Por fim, a resiliência e a persistência, tão cruciais para a superação de obstáculos na vida, foram exercitadas na superação dos desafios apresentados pelo Stomachion e outras figuras complexas.

Em suma, esta dissertação reitera que a matemática pode ser explorada de forma instigante e relevante, indo muito além dos livros didáticos. Ao oferecer uma abordagem didática que integra a equidecomposição com metodologias ativas e lúdicas, conseguimos não

apenas facilitar a compreensão de conceitos geométricos importantes, mas também cultivar um conjunto de habilidades e competências que são indispensáveis para o desenvolvimento integral dos jovens no século XXI. Acredita-se que este trabalho e seu produto educacional representam uma contribuição valiosa para o ensino da matemática, inspirando futuras práticas pedagógicas que unam rigor científico com alegria e descoberta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- BOLTIANSKI, V. G. Figuras equivalentes e equicompostas. São Paulo: Atual, 1996.
- BOLTYANSKI, V. Hilbert's Third Problem. Washington: Scripta Mathematica, 1978.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. A History of Mathematics. 3. ed. Hoboken: Wiley, 2012.
- BRASIL, M. d. E. Base Nacional Comum Curricular. 3. ed. Brasília - DF: MEC, 2017.
- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ministério da Educação, 1998.
- BRUNER, Jerome S. Toward a theory of instruction. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1966.
- CHACE, A. B. The Rhind Mathematical Papyrus. Oberlin: Mathematical Association of America, 1927.
- COXETER, H. S. M. Introduction to geometry. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- DANTE, L. R. Didática da Matemática na Educação Básica. São Paulo: Ática, 2013.
- DAVIS, M. The undecidable: Basic papers on undecidable propositions. New York: Raven Press, 2006.
- DIAS, R. Terceiro problema de Hilbert e teorema de Dehn. São José do Rio Preto: Unesp, 2013.
- DOUGHERTY, R.; FOREMAN, M. "Banach-Tarski Paradox Using Pieces with the Property of Baire". Proceedings of the AMS, v. 121, n. 3, p. 102-115, 1994.
- D'AMBROSIO, Ubiratan; LOPES, Celi A. E. (Org.). História da matemática e etnomatemática: saberes e práticas para a educação matemática. Campinas, SP: Autores Associados, 2014.
- EUCLIDES. Os elementos. São Paulo: Unesp, 2009
- FEFERMAN, S. Alfred Tarski: Life and Logic. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- FERNANDES, L. G. O vestibular tradicional e as novas formas de acesso ao ensino superior: um estudo comparativo. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2018.
- GAMA, L. B. O paradoxo de Banach-Tarski. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal Fluminense, 2016.
- GILLINGS, R. J. Mathematics in the Time of the Pharaohs. Cambridge: MIT Press, 1972.
- GOMIDES, Amanda Figueiredo; FERREIRA, Geraldo César Gonçalves. De Pick a Euler: exemplos e demonstrações. Revista de Matemática de Ouro Preto, v. 4, p. 1-24, 2022.

- HADWIGER, H. Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin: Springer, p.112, 1957.
- HARTSHORNE, Robin. Geometry: Euclid and Beyond. New York: Springer, p. 1-526, 2000.
- HEATH, Thomas L. The Thirteen Books of Euclid's Elements. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1921.
- HILBERT, D. Fundamentos de geometria. Portugal: Gradiva, 2003.
- HONSBERGER, R. Mathematical Gems I. MAA, p.45, 1973.
- HUIZINGA, Johan. Homo ludens: o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva, 2000.
- JECH, T. The Axiom of Choice. Mineola: Dover Publications, 2008.
- KLINE, Morris. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press, 1972.
- LIBÂNEO, J. C. Didática. São Paulo: Cortez, 2013.
- LIMA, E. L. Conceitos e controvérsas - polígonos equidecomponíveis. 1985. Disponível em: . Acesso em: 25 de setembro de 2017.
- LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- MARQUES, E. C. Tópicos sobre polígonos. São Carlos: S.n., 2012.
- MORI, I. Avaliação em Matemática: reflexos nos processos de ensino e aprendizagem. São Paulo: Editora Unesp, 2016.
- MYCIELSKI, J. "Finite Axiom of Choice and the Banach-Tarski Paradox". Bulletin of the Polish Academy of Sciences, v. 37, p. 1-6, 1989.
- NASSER, L. Geometria: ensino e avaliação. Rio de Janeiro: SBM, 2019.
- NCTM. Principles and Standards for School Mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.
- NUNES, T.; BRYANT, P. Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.
- OLIVEIRA, J. C.; CORDEIRO, M. C.; ALMEIDA, S. N.; PEREIRA, L. M. O Teorema de Banach-Tarski na Circunferência. ReviSeM, v.2, p. 146-155, 2019.
- PANEK, L. Teorema de Banach-Tarski. 2006.
- PAVANELLO, R. M.; CAMPOS, I. S. Geometria na Escola Básica: Teoria e Prática. São Paulo: Cortez, 2013.

PAVANELLO, R. M.; PIETROPAOLO, R. C. O ensino de geometria na escola: teorias e práticas. Campinas: Papirus, 2013.

RIBEIRO, M. A. ENEM e vestibulares: um diálogo necessário. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

ROBINS, G.; SHUTE, C. The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text. London: British Museum Publications, 1987.

SAH, C.-H. Hilbert's third problem: scissors congruence. *American Mathematical Monthly*, v. 86, n. 1, p. 24-30, 1979.

SEIDENBERG, A. "The Origin of Mathematics". *Archive for History of Exact Sciences*, v. 18, p. 301-342, 1978.

SERRAZINA, L. O ensino da geometria na escola básica. In: GRUPO DE TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Investigar para aprender Geometria*. Lisboa: APM, 2002. p. 23-38.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. *Bolema*, 2000.

SMITH, David Eugene. *History of Mathematics*. Boston: Ginn and Company, 1923. 2 v.

SOARES, L. G. O ENEM como instrumento de democratização do acesso ao ensino superior no Brasil. São Paulo: Cortez, 2004.

SOLOVAY, R. M. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Annals of Mathematics*, v. 92, p. 1-56, 1970.

SOUZA, J. C. de Mello e. *As maravilhas da matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro: Bloch, 1973.

STEWART, James. *Calculus: Early Transcendentals*. 9. ed. Cengage Learning, 2020.

STILLWELL, John. *Numbers and Geometry*. New York: Springer, 1998.

STRUICK, D. J. *A Concise History of Mathematics*. 4th rev. ed. New York: Dover, 1987

VELLEMAN, D. J. *How To Prove It: a structured approach*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2006.

VYGOTSKY, Lev S. *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press, 1987.

WAGON, S. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

WALLACE, E. C.; WEST, S. F. *Roads to Geometry*. New York: Prentice Hall, p.247, 1992.

WARNER, S. *Set Theory for Beginners: a rigorous introduction to sets, relations, partitions, functions, induction, ordinals, cardinals, Martin's axiom and stationary sets*, Get 800, 2019.

WEISS, B. Measurable Dynamics. Providence: AMS, 1995.

ZABALZA, M. A. Delineamento e desenvolvimento curricular. Porto Alegre: Artmed, 2004.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS

24/06/2025, 08:45

Avaliação da Palestra sobre Equidecomposição

Avaliação da Palestra sobre Equidecomposição

Caros alunos e alunas,

Gostaria de agradecer a participação e o interesse de todos na apresentação de hoje sobre equidecomposição.

Como parte do meu trabalho de mestrado, a perspectiva de vocês é extremamente valiosa. Por isso, preparei um breve formulário para coletar suas impressões. Peço gentilmente que dediquem alguns minutos para preenchê-lo.

Meu principal pedido é que sejam completamente sinceros. Quero muito saber o que vocês realmente pensaram: os pontos positivos que se destacaram, as ideias que talvez não tenham ficado tão claras e qualquer sugestão que queiram fazer. A crítica construtiva é muito bem-vinda e essencial para o desenvolvimento do projeto.

Sua contribuição honesta fará uma grande diferença.

** Indica uma pergunta obrigatória.*

1. Nome *

2. Você ficou satisfeito com a palestra? *

Marcar apenas uma oval.

1 2 3 4 5

Pou ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Muito satisfeito

3. A palestra foi relevante e útil? *

Marcar apenas uma oval.

1 2 3 4 5

Pou ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Muito útil

24/06/2025, 08:45

Avaliação da Palestra sobre Equidecomposição

4. O que você mais gostou na palestra? *

5. O que você achou do Tangram? *

Material da sessão e de pré-leitura

Marcar apenas uma oval.

	1	2	3	4	5	
Frac	☐	☐	☐	☐	☐	Excelente

6. Já conhecia o Tangram? *

Marcar apenas uma oval.

☐ Sim

☐ Não

7. O que achou do Stomachion? *

Marcar apenas uma oval.

	1	2	3	4	5
	☐	☐	☐	☐	☐

8. Já conhecia o Stomachion? *

Marcar apenas uma oval.

☐ Sim

☐ Não

24/06/2025, 08:45

Avaliação da Palestra sobre Equidecomposição

9. Quais sugestões/dicas/elogios você pode fazer. *

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE B – PALESTRA APLICADA AOS ALUNOS



MATEMÁTICA SERIES EQUIDECOMPOSIÇÃO



Here is where your presentations begins



| EPISÓDIOS

01
EQUIDECOMPOSIÇÃO

Conhecendo o conceito da equidecomposição

02
TANGRAM

Aprendendo sobre equidecomposição com o Tangram

03
STOMACHION

Aprendendo sobre equidecomposição com o Stomachion

04
ATIVIDADE

Praticando os conhecimentos adquiridos





01
EQUIDECOMPOSIÇÃO

Cortar e recortar.



| EQUIDECOMPOSIÇÃO

Cortar e Recortar

Desde o começo do século XVIII, a equidecomposição tem se tomado parte do que é conhecido como Matemática Recreativa. Bolyanski diz que,

Duas figuras são equidecomponíveis, se, cortando de certo modo uma delas em um número finito de partes, pode-se (ao dispor essas partes de outra forma) compor com essas a segunda figura.



| EQUIDECOMPOSIÇÃO

Qual a utilidade?



ATRATATIVO

Dificuldade dos alunos em compreender a **conservação de área** sob diferentes formatos



DINÂMICO

A necessidade de uma abordagem mais **visual, lúdica e conceitual**



RESOLVER QUESTÕES

A sua utilidade é auxiliar na solução de problemas.

| EQUIDECOMPOSIÇÃO

O Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien.

O Teorema diz que
Dois polígonos que têm áreas iguais são
equicompostos.

E se pensarmos no espaço 3D?

Seria possível dizer que
Dois poliedros que têm volumes iguais são
equicompostos?

Hilbert pergunta e Dehn responde.

Essa problemática está diretamente associada ao terceiro dos vinte e três problemas propostos por David Hilbert (1862-1943) durante o segundo Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris no ano de 1900. Diversos estudiosos da área dedicaram-se à investigação da decomposição de poliedros, cabendo a Max Wilhelm Dehn (1878-1952), então orientando de doutorado de Hilbert, a contribuição de uma resposta negativa ao problema em questão.



TANGRAM 02

Brincando com Quebra-Cabeça

| TANGRAM

O QUE É?

É um quebra-cabeças geométrico chinês formado por 7 peças, chamadas tans: são 2 triângulos grandes, 2 pequenos, 1 médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo.

PARA QUE SERVE?

Utilizando todas essas peças sem sobrepô-las, podemos formar várias figuras. Segundo a Enciclopédia do Tangram é possível montar mais de 5000 figuras.



03

STOMACHION

Um Quebra-Cabeça mais elaborado.

STOMACHION

O QUE É?

É constituído por um conjunto de 14 peças planas (originalmente em marfim) de várias formas poligonais com duas características fundamentais: - podem unir-se de modo a formar um quadrado; - a área de cada peça é comensurável com a área do quadrado anterior. O que significa comensurável? Significa que o quociente entre a área de cada peça e a área do quadrado total é um número racional.

O QUE É?

A invenção de um dos mais antigos quebra-cabeças geométrico que se conhece é atribuída a Arquimedes, sábio grego que viveu em Siracusa, Sicília, no séc. III a.C..

STOMACHION

MAS, QUANTAS MANEIRAS EXISTEM PARA FORMAR O QUADRADO?

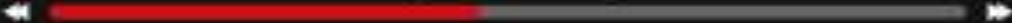
Foi apenas em 2003 que o cientista da computação Bill Cutler, utilizando um programa de computador, determinou que existem **17.152 maneiras** de montar o quadrado.





STOMACHION

AGORA É COM VOCÊ



04 ATIVIDADE

Resolvendo problemas com o uso da equidecomposição.





ATIVIDADE



01 UNESP
Prova de 2018.



02 FUVEST
Prova de 2014.





03 AFA
Prova de 2021.



04 ENEM
Prova de 2008.



| ATIVIDADE

PROBLEMA

Construa um hexágono e recorte em 4 peças para construir um quadrado.



| ATIVIDADE

SOLUÇÃO

1. Em uma folha de cartolina, construa um **hexágono regular** com **10 cm** de lado. Nomeie seus vértices em sequência de A a F.
2. Divida o hexágono em duas metades idênticas cortando-o ao longo de sua maior diagonal (do vértice A ao vértice D).
3. Pegue uma das metades (o trapézio ABCD). Encontre o ponto médio do lado BC e chame-o de M. Corte em linha reta do vértice D até o ponto M.
4. Repita o processo na outra metade (o trapézio DEFA): encontre o ponto médio N do lado EF e corte em linha reta do vértice A até o ponto N.



| FORMULÁRIO

Caros alunos e alunas,

Gostaria de agradecer a participação e o interesse de todos na apresentação de hoje sobre equidecomposição. Como parte do meu trabalho de mestrado, a perspectiva de vocês é extremamente valiosa. Por isso, preparei um breve formulário para coletar suas impressões. Peço gentilmente que dediquem alguns minutos para preenchê-lo. Meu principal pedido é que sejam completamente sinceros. Quero muito saber o que vocês realmente pensaram: os pontos positivos que se destacaram, as ideias que talvez não tenham ficado tão claras e qualquer sugestão que queiram fazer. A crítica construtiva é muito bem-vinda e essencial para o desenvolvimento do projeto. Sua contribuição honesta fará uma grande diferença.



APÊNDICE C – AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKEL

No limiar do século XX, a matemática enfrentou uma profunda crise de fundamentos, impulsionada pela descoberta de paradoxos no seio da teoria "ingênua" dos conjuntos, desenvolvida por Georg Cantor. O mais célebre desses paradoxos, formulado por Bertrand Russell, questionava a existência de um "conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si mesmos", levando a uma contradição lógica insuperável. Tais antinomias revelaram que a noção intuitiva de "conjunto" era perigosamente imprecisa, tornando imperativa a reconstrução da teoria sobre um arcabouço lógico rigoroso e livre de contradições. A solução encontrada foi o método axiomático: em vez de permitir a formação arbitrária de conjuntos, um conjunto de axiomas seria estabelecido para especificar, de forma explícita e precisa, quais coleções poderiam ser consideradas conjuntos e quais operações sobre eles eram legítimas. Nesse contexto, o sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel (ZF) emergiu como a estrutura canônica, oferecendo uma base sólida e consistente sobre a qual a vasta edificação da matemática moderna pôde ser erguida com segurança.

Ernst Zermelo (1871-1953), matemático alemão nascido em Berlim, foi a figura central na resposta inicial à crise dos fundamentos. Em seu trabalho seminal de 1908, "Investigações sobre os fundamentos da teoria dos conjuntos I" (*Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*), Zermelo postulou o primeiro sistema axiomático abrangente para a teoria dos conjuntos. Sua motivação primária era fornecer uma prova rigorosa para o seu controverso Princípio do Bom Ordenamento, o qual depende diretamente do Axioma da Escolha. Para defender a validade de sua demonstração, Zermelo compreendeu a necessidade de delimitar claramente os princípios que regiam a existência e a manipulação de conjuntos. O sistema resultante, hoje conhecido como Teoria dos Conjuntos de Zermelo (Z), foi um marco histórico, pois substituiu a intuição pela precisão axiomática, filtrando os paradoxos conhecidos e estabelecendo as fundações para o desenvolvimento futuro da área.

Abraham Adolf Halevi Fraenkel (1891-1965), matemático teuto-israelense nascido em Munique, deu uma contribuição crucial que refinou e fortaleceu o sistema de Zermelo. Na década de 1920, Fraenkel — e, de forma independente, Thoralf Skolem — identificou uma lacuna no sistema axiomático de Zermelo: ele não era forte o suficiente para garantir a existência de certos conjuntos infinitos que os matemáticos consideravam necessários, como o conjunto $\{Z_0, Z_1, Z_2, \dots\}$, onde $Z_0 = \emptyset$ e $Z_{n+1} = P(Z_n)$ (o conjunto das partes de Z_n). Para sanar essa deficiência, Fraenkel introduziu o poderoso Axioma da Substituição (ou do Reemplaçamento). Este axioma permite a formação de um novo conjunto a partir de um já existente, substituindo seus elementos pelos resultados de uma função. A adição deste postulado

ao sistema de Zermelo deu origem à Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), o sistema robusto e amplamente aceito que conhecemos hoje, capaz de construir os números ordinais e cardinais e de formalizar praticamente todos os conceitos matemáticos.

A seguir, são apresentados os nove axiomas que constituem o sistema de Zermelo-Fraenkel (ZF). Cada um é apresentado com seu enunciado formal em linguagem matemática e, subsequentemente, com sua interpretação em linguagem natural para elucidar seu significado.

Axioma 01 (Extensionalidade): Dois conjuntos são idênticos se, e somente se, eles possuem exatamente os mesmos elementos.

Em uma linguagem matemática, temos

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A = B).$$

Este axioma define a igualdade entre conjuntos, estabelecendo que um conjunto é determinado unicamente por seus membros.

Axioma 02 (Existência do Conjunto Vazio): Existe um conjunto que não possui elementos.

Em uma linguagem matemática, temos

$$\exists A \forall x (x \notin A).$$

Este conjunto é único, pelo Axioma da Extensionalidade, e é chamado de conjunto vazio, denotado por $\emptyset$. O axioma garante que o universo de conjuntos não é vazio.

Axioma 03 (Formação de Pares): Para todo par de conjuntos A e B existe um conjunto C que contém A e B e nenhum outro elemento. Formalmente $C = \{A, B\}$.

Em uma linguagem matemática, temos

$$\forall A, \forall B, \exists C (\forall x (x \in C \rightarrow (x = A \vee x = B))).$$

Axioma 04 (União): Para qualquer conjunto F , cujos elementos são outros conjuntos, existe um conjunto A que contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos de F . Este conjunto A é a união dos elementos de F , denotado por $\cup F$.

Em uma linguagem matemática, temos

$$\forall F \exists A \forall x (x \in A \Leftrightarrow \exists B (x \in B \wedge B \in F)).$$

Axioma 05 (Conjunto das Partes): Para todo conjunto A , existe um conjunto P cujos elementos são todos os subconjuntos de A . Este conjunto é chamado de conjunto das partes (ou potência) de A e é denotado por $P(A)$.

Em uma linguagem matemática, temos

$$\forall A, \exists B (\forall C (C \subset A \rightarrow C \in B)).$$

Axioma 06 (Separação): Para qualquer conjunto A e qualquer propriedade ϕ

que se possa definir, existe um conjunto B cujos elementos são exatamente os elementos de A que satisfazem a propriedade ϕ .

Em uma linguagem matemática, temos que para qualquer fórmula $\phi(x)$ na linguagem da teoria dos conjuntos, postula-se:

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \phi(x))).$$

Axioma 07 (Substituição): Se A é um conjunto e temos uma regra, definida por ϕ que associa cada elemento $x \in A$ a um único objeto y , então existe um conjunto B que é a coleção de todos esses objetos y .

Em uma linguagem matemática, temos que para qualquer fórmula $\phi(x, y)$ que define uma função, postula-se:

$$\forall A \exists B \forall y (y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A \phi(x, y)).$$

Axioma 08 (Infinito): Existe pelo menos um conjunto infinito.

Em uma linguagem matemática, temos

$$\exists A (\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)).$$

O axioma postula a existência de um conjunto A que contém o conjunto vazio e que, para cada elemento x que ele contém, também contém o conjunto $x \cup \{x\}$. Este é o fundamento para a construção do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$).

Axioma 09 (Regularidade): Todo conjunto não vazio A contém um elemento x que é disjunto de A .

Em uma linguagem matemática, temos

$$\forall A (A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A (x \cap A = \emptyset)).$$

A exposição dos axiomas de Zermelo-Fraenkel revela o alicerce sobre o qual a maior parte da matemática contemporânea é rigorosamente construída. Mais do que apenas um sistema para evitar paradoxos, o arcabouço de ZF é notavelmente construtivo. A partir desses nove postulados, é possível edificar, passo a passo, todo o universo dos objetos matemáticos. Conceitos fundamentais como o de par ordenado (a, b) , por exemplo, não são primitivos; eles são definidos em termos de conjuntos (usualmente pela definição de Kuratowski, $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$), uma construção viabilizada pelos Axiomas do Par e da União. Com os pares ordenados, definem-se produtos cartesianos, relações e, crucialmente, funções, solidificando a base para virtualmente todas as áreas da matemática.

A aplicação mais emblemática desse poder construtivo é a geração dos sistemas numéricos. O Axioma do Infinito garante a existência de um conjunto que serve de modelo para os números naturais ($\mathbb{N}$). A partir deles, os números inteiros ($\mathbb{Z}$) são construídos como classes

de equivalência de pares de naturais; os números racionais ($\mathbb{Q}$), como classes de equivalência de pares de inteiros; e, finalmente, os números reais ($\mathbb{R}$) emergem de construções mais sofisticadas, como os Cortes de Dedekind ou as classes de equivalência de sequências de Cauchy, que dependem fortemente do Axioma do Conjunto das Partes. Assim, a análise real, com suas noções de limite, continuidade e completude, encontra sua justificação última nesse sistema axiomático.

Apesar de sua vastidão, é igualmente notável o que o sistema ZF, por si só, não consegue resolver. Como mencionado anteriormente, muitos resultados cruciais, especialmente em análise funcional e álgebra abstrata, dependem de um décimo postulado: o Axioma da Escolha (AE). A junção de ZF com AE forma o sistema ZFC, o padrão ouro da matemática atual. Contudo, a investigação metamatemática revelou questões ainda mais profundas sobre os limites desse sistema. A famosa Hipótese do Contínuo, que questiona se existe algum conjunto com cardinalidade estritamente entre a dos números naturais e a dos números reais, é o exemplo magno. Os trabalhos de Kurt Gödel (1940) e Paul Cohen (1963) demonstraram, em conjunto, que a Hipótese do Contínuo é indecidível em ZFC: ela não pode ser nem provada nem refutada a partir dos axiomas.

Este fato, a existência de proposições matemáticas cuja veracidade não pode ser determinada pelo sistema axiomático padrão, abre um fascinante campo de investigação filosófica e lógica sobre a natureza da verdade matemática. Demonstra que, embora o sistema ZF(C) forneça um porto seguro e extraordinariamente poderoso para a prática matemática, ele não encerra todas as questões, deixando a porta aberta para o desenvolvimento de novas axiomáticas (como as que postulam a existência de grandes cardinais) e para uma contínua reflexão sobre os fundamentos do conhecimento matemático.