UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EDUARDO DE VASCONCELOS MARTINS

LEMA E JOGOS: PROGRAMA CURRICULAR DE UMA DISCIPLINA ELETIVA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

FORTALEZA
2025

EDUARDO DE VASCONCELOS MARTINS

LEMA E JOGOS: PROGRAMA CURRICULAR DE UMA DISCIPLINA ELETIVA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M342l Martins, Eduardo de Vasconcelos.
LEMA e Jogos : programa curricular de uma disciplina Eletiva de Análise Combinatória e Probabilidade para o Ensino Fundamental / Eduardo de Vasconcelos Martins. – 2025.
148 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Laboratórios de matemática. 2. Jogos em educação matemática. 3. Matemática - estudo e ensino. 4. Análise combinatória e probabilidade. 5. Disciplinas eletivas. I. Título.

CDD 510

EDUARDO DE VASCONCELOS MARTINS

LEMA E JOGOS: PROGRAMA CURRICULAR DE UMA DISCIPLINA ELETIVA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em: 25/07/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Carina Brunehilde Pinto da Silva
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

AGRADECIMENTOS

À minha amada esposa, Fábia, por ter sido apoio em toda a duração do mestrado. Obrigado por ter sido tão importante para minha saúde mental. Obrigado pela sua organização, paciência, pelas conversas e por ter me deixado centrado. Tudo isso aqui também é por você.

À minha mãe, Cleiziane, por sempre ter acreditado no poder da educação e por ter garantido que, durante a minha vida, estivéssemos confortáveis para que eu pudesse estudar.

À minha avó, Elizete (*in memoriam*), por em vida ter confiado que eu era capaz. Obrigado pela sua memória que ficará em mim para sempre. Eu sei que, se você tivesse vendo tudo isso, estaria muito orgulhosa pelas minhas conquistas.

Aos meus colegas de turma, pela parceria dedicada em todo o período do curso, demonstrando que fomos uma turma diferenciada.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela sua existência e pela oportunidade que gera a tantos professores, especialmente do interior.

Ao professor Marcelo, por ter aceito a orientação e por ter sido guia nesse processo.

“Os sábios educam pelo exemplo, e nada há que avassale o espírito humano mais suave e profundamente do que o exemplo” (Malba Tahan, 1938).

RESUMO

As áreas da matemática conhecidas como Análise Combinatória e Probabilidade são, muitas vezes, desconsideradas no ensino de matemática na etapa do Ensino Fundamental Anos Finais, por não fazerem parte das matrizes de referência para a elaboração de avaliações externas importantes. Nesse contexto e ao considerar que, caso o professor de matemática tenha como objetivo o aprendizado efetivo dos seus estudantes, ele deve buscar recursos educacionais diversos, este trabalho pretende elaborar o programa curricular de uma disciplina eletiva para o Ensino Fundamental através da criação de um Laboratório de Ensino de Matemática com ênfase na elaboração de Jogos que ensinam Análise Combinatória e Probabilidade. A literatura já considera eficazes essas duas metodologias de ensino e, ao aliá-las a uma disciplina que não necessariamente precisa seguir uma matriz curricular definida, acredita-se que o aprendizado dessas duas importantes áreas da matemática não será ignorado e será garantido. O programa curricular compreende a duração de dezesseis semanas e apresenta os planos de aulas de todos esses momentos. A metodologia da pesquisa envolveu levantamento bibliográfico sobre LEMA e Jogos, questionários com diretores e professores, análise de livro didático do ensino fundamental e a elaboração, em si, do programa curricular. No currículo construído, são sugeridos sete jogos que se considera vantajosos para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade.

Palavras-chave: laboratórios de matemática; jogos em educação matemática; matemática – estudo e ensino; análise combinatória e probabilidade; disciplinas eletivas.

ABSTRACT

The mathematical fields known as Combinatorics and Probability are often overlooked in middle school mathematics instruction, particularly in the final years of elementary education, as they are not included in the reference matrices used for major external assessments. In this context, and considering that mathematics teachers who aim for effective student learning must seek diverse educational resources, this work proposes the development of a curricular program for an elective subject in middle school through the creation of a Mathematics Teaching Laboratory (LEMA) focused on the design of educational games that teach Combinatorics and Probability. Literature already supports the effectiveness of both methodologies, teaching laboratories and games, and by combining them in a subject that does not necessarily follow a rigid curricular matrix, it is believed that learning in these two important areas of mathematics will no longer be neglected, but rather ensured. The curricular program spans sixteen weeks and includes detailed lesson plans for each class. The research methodology included a literature review on LEMA and educational games, questionnaires with school administrators and teachers, analysis of middle school textbooks, and the development of the curricular proposal itself. The final program suggests seven educational games considered advantageous for the teaching of Combinatorics and Probability. It is expected that teachers who implement this elective course will observe significant improvements in students' learning outcomes.

Keywords: mathematics laboratories; games in mathematics education; mathematics – study and teaching; combinatorics and probability; elective courses.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ETI	Escola em Tempo Integral
ICE	Instituto de Corresponsabilidade pela Educação
Inep	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LEMA	Laboratório de Ensino de Matemática
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
Saeb	Sistema de Avaliação da Educação Básica
Spaece	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O professor que ensina matemática tenta encontrar, em sua prática diária, estratégias para otimizar o processo de ensino de matemática. Um dos principais objetivos dos professores é fazer com que os estudantes aprendam significativamente os conteúdos matemáticos e internalizem-nos verdadeiramente. Com esse objetivo em mente, o professor tenta enxergar de quais maneiras diferentes ele pode conseguir a atenção, o interesse e a disposição dos estudantes para com o estudo da matemática. É necessário, portanto, que professores que ensinam matemática tenham em sua prática diária a busca por conhecimentos didáticos que os auxiliem no processo de transmissão do conhecimento matemático.

Entretanto, um dos problemas enfrentados por professores da educação básica é a falta de tempo disponível para atividades que não envolvem necessariamente a sala de aula, como por exemplo a elaboração de planos de aula, de provas, a correção de provas, o preenchimento de diários, frequências, mapas de notas, os diálogos com a comunidade escolar, com a equipe gestora, dentre outros. Assim, é comum falas como "é difícil usar metodologias de ensino quando não há tempo para planejar".

Sendo assim, a problemática tratada nessa pesquisa versa sobre a tentativa de amenizar as dificuldades mencionadas acima. Ou seja, o objetivo desse trabalho é a elaboração de um programa de uma disciplina eletiva (disciplinas construídas por professores e alunos) a ser aplicada no Ensino Fundamental Anos Finais, que envolverá a criação de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEMA) com ênfase na elaboração de Jogos que ensinam as disciplinas de Análise Combinatória e Probabilidade. Acredita-se que o programa aqui proposto também pode ser aplicado em disciplinas eletivas do Ensino Médio, mediante adaptações.

Entende-se que, ao criar um programa de disciplina contendo planos de aula que o professor poderá seguir ou adaptar para sua realidade, esses professores poderão aplicar diferentes práticas pedagógicas que irão estimular o estudo da matemática em seus alunos.

O referencial teórico utilizado para a elaboração desse trabalho se debruça sobre as pesquisas de Lorenzato (2012) e Oliveira e Kikuchi (2018) sobre a relevância do LEMA no ensino de matemática, que, em linhas gerais, pode ser definido em um primeiro sentido como um espaço com ferramentas e materiais didáticos que servem para a aprendizagem de conceitos matemáticos (Oliveira; Kikuchi, 2018), podendo essas ferramentas serem Jogos que ensinam matemática, conforme será aprofundado posteriormente.

Como sabe-se que a construção de um LEMA também pode se dar através de criação de Jogos, levou-se em consideração também os trabalhos de Lemes (2022; 2024) e

Grando (2015;2024) sobre as grandes potencialidades da utilização de Jogos no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Grando (2015) enquadra os Jogos no ensino de matemática dentro da categoria dos recursos didáticos, que "são entendidos como modelos concretos ou não, que possam contribuir e facilitar a aprendizagem matemática dos alunos das escolas" (Grando, 2015), dessa forma, entende-se que os Jogos têm grandes potencialidades para com o processo de aprendizagem de matemática.

O presente trabalho se delineou dessa maneira porque, conforme será visto posteriormente, o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade é comumente deixado de lado no Ensino Fundamental Anos Finais das escolas públicas em detrimento dos conteúdos que são cobrados nas avaliações externas. Ou seja, professores que ensinam matemática por vezes *não trabalham tais conteúdos durante o ano inteiro* por não serem contemplados nas matrizes de referência para elaboração de itens dessas provas.

Assim, ao apresentar para os professores que ensinam matemática um programa disciplinar de eletiva que pode trazer o conteúdo de Análise Combinatória e Probabilidade para a realidade dos estudantes da escola pública, espera-se que essa realidade mude, visto que esses conteúdos poderão ser explorados em sala de aula sem causar impactos no desenrolar da disciplina de matemática, através de eletivas. Ademais, também é relevante destacar a grande importância dos conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes da Educação Básica.

Conceição, Pereira e Santos (2016) destacam que o estudo da Análise Combinatória tem relevância no desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo dos estudantes, em especial quando a abordagem do professor não se atém à memorização de fórmulas prontas e acabadas, e explora a utilização do Princípio Fundamental da Contagem (que será definido no decorrer do trabalho).

Lopes (2008) atrela a importância do estudo da Probabilidade por trazer conceitos e palavras como chance, incerteza e aleatoriedade, que constantemente são vistas no cotidiano. Além disso, a autora afirma que "esses temas [Probabilidade e Estatística] são essenciais na educação para a cidadania, uma vez que possibilitam o desenvolvimento de uma análise crítica sob diferentes aspectos científicos, tecnológicos e/ou sociais." (Lopes, 2008).

Além disso, há de se considerar também o seguinte ponto positivo para a abordagem da Análise Combinatória e Probabilidade já no Ensino Fundamental de forma sistemática e categórica: quando os estudantes tiverem o contato com esses conteúdos durante o Ensino Médio, não sentirão a grande dificuldade de aprendizagem que normalmente acontece com os alunos dessa etapa, pois, de acordo com Handaya (2016), os alunos de todas as etapas, até mesmo no Ensino Superior, têm dificuldades em ler e interpretar problemas, classificá-los segundo o tipo e subtipo (em relação à Análise Combinatória) e memorizar fórmulas. Assim, tratar dessas nomenclaturas, fórmulas e resolução de problemas já no Ensino Fundamental será de grande vantagem para os alunos.

Quanto à sua metodologia, o presente trabalho classifica-se, primeiramente, como uma pesquisa exploratória, na medida em que tenta entender e delinear sobre a problemática do ensino de matemática através de Jogos e da criação de um LEMA como uma melhoria da prática pedagógica. Além disso, quanto à abordagem, trata-se de uma pesquisa qualitativa. Quanto aos procedimentos metodológicos, a pesquisa é bibliográfica e documental, visto que na construção do referencial teórico, foram buscadas obras que tratassem de, principalmente, a utilização de Jogos e LEMA no ensino de matemática, bem como documentos oficiais norteadores dos currículos da Educação Básica (Marconi; Lakatos, 2017).

Ademais, como o trabalho tenta se aprofundar em de que maneira a Análise Combinatória e a Probabilidade podem ser melhor abordadas na sala de aula do Ensino Fundamental, classifica-se como uma pesquisa exploratória (Marconi; Lakatos, 2017). Além disso, para ter mais informações sobre de que forma as práticas das disciplinas eletivas acontecem no dia-a-dia das escolas brasileiras em tempo integral, a pesquisa também contou com questionários sendo aplicados com dois diretores e dois professores de escolas da cidade de Sobral, no Ceará, tornando-se, assim, uma pesquisa de campo.

Por fim, esse texto terá a seguinte estrutura: no segundo capítulo, será traçada uma conversa acerca de algumas das principais obras relacionadas ao LEMA e aos Jogos no ensino de matemática; no terceiro capítulo, haverá breves definições sobre alguns dos conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade que são necessários para que professores apliquem de forma adequada o produto aqui proposto; no quarto capítulo, é trazida uma discussão acerca das disciplinas eletivas, como se dá sua aplicação nas escolas de Ensino Fundamental e quais são os discursos de diretores e professores de escolas que já aplicaram disciplinas eletivas.

O produto educacional proposto pelo autor desse texto para professores que ensinam matemática está apresentado no quinto capítulo. Nesse capítulo, são expostos apenas pequenos resumos dos planos de aula semanais que estarão completamente explorados no Apêndice A, onde estará o material completo do programa disciplinar de uma eletiva que envolverá a elaboração de um LEMA com ênfase na criação de Jogos que servirão como recurso para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 O Laboratório de Ensino de Matemática

É importante que o leitor deste trabalho esteja familiarizado com as principais definições do LEMA. O primeiro contato com a terminologia *laboratório* remete, normalmente, à sua utilização atrelada às Ciências Naturais, entretanto, no contexto da Matemática, o termo *laboratório* estará vinculado à forte atuação do estudante de matemática no processo de construção (literalmente falando) do conhecimento.

Ewbank (1971) afirma que o LEMA pode ter três definições: um lugar, um processo ou um procedimento (que, em uma tradução mais fiel ao contexto das pesquisas em ensino de matemática, pode significar metodologia). Como um lugar, o LEMA é um espaço para experimentação, testes, construção de recursos didáticos; como um processo, pode-se interpretar que o autor acredita que o LEMA segue novas abordagens, em que os alunos deslocam-se, conversam entre si, fazem escolhas por conta própria; já como procedimento (ou metodologia) é que o LEMA pode ser completamente explorado, já que será orientação que o professor seguirá como principal abordagem no seu cotidiano (Ewbank, 1971).

Oliveira e Kikuchi (2018), ao analisarem este primeiro sentido de LEMA, afirmam que "o laboratório de Matemática é um espaço que possui ferramentas para a aprendizagem de matemática, como materiais estruturados [...], jogos matemáticos [...] e jogos comerciais com possibilidades de gerar debates e discussões em torno de conteúdos matemáticos". Percebe-se, então, que a literatura cria margens para que o laboratório possa abordar quaisquer recursos didáticos que tenham o objetivo de aprendizagem matemática, dentre os quais se destaca, aqui, os Jogos.

Os autores Rêgo e Rêgo (2012), ao trazerem uma definição de LEMA, vão inteiramente de acordo com a primeira concepção de Ewbank, pois afirmam que

> O Laboratório de Ensino de Matemática em uma escola constitui um importante espaço de experimentação para o aluno e, em especial, para o professor, que tem a oportunidade de avaliar na prática, sem as pressões do espaço formal tradicional da sala de aula, novos materiais e metodologias, resultados de pesquisas disponibilizados na literatura, ampliando sua formação de modo crítico [...] (Rêgo; Rêgo, 2012).

No texto, é possível perceber que os autores consideram o espaço do laboratório benéfico não apenas para os estudantes da educação básica, mas também para o professor de matemática que utiliza essa metodologia, atrelando uma importância tanto para a formação do professor, quanto também para a reflexão das práticas pedagógicas, em um espaço em que não haverá as “pressões” da educação formal e tradicional.

Lorenzato (2012) amplia ainda mais as concepções acerca do LEMA, ao defender que o laboratório pode até mesmo ser “um local para guardar materiais essenciais, tornando-os acessíveis para as aulas” (Lorenzato, 2012), ou seja, para o autor, o LEMA pode ser um depósito, um arquivo. Entretanto, ao fazer análises mais profundas, o autor chega à conclusão de que

> O LEMA, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar tanto ao aluno quanto ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender (Lorenzato, 2012).

Percebe-se, novamente, que, segundo a literatura, a principal concepção do LEMA está atrelada ao espaço, e além disso, em concordância com Oliveira e Kikuchi (2018), o autor também direciona uma importância para o professor, e não somente para o aluno.

Já definido o objeto principal do estudo nessa seção, cabe agora trazer quais são as principais justificativas, ou seja, os *porquês*.

Segundo Rêgo e Rêgo (2012), a utilização do LEMA justifica-se por diversas razões, em especial porque o estudante “desenvolve o gosto pela descoberta, a coragem para enfrentar desafios e para vencê-los, desenvolvendo conhecimentos na direção de uma ação autônoma”, ou seja, o aluno que aprende com LEMA será capaz de enfrentar com mais intrepidez desafios matemáticos.

Além disso, o uso de materiais concretos inseridos no LEMA é importante pois, “a partir de sua utilização adequada, os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos” (Rêgo; Rêgo, 2012). Observa-se, então, que um professor que utiliza a metodologia do laboratório em sua escola, tem como um de seus principais objetivos vencer o estigma negativo que a disciplina de matemática possui entre os alunos da educação básica.

Torna-se interessante, também, trazer os pensamentos de Passos (2009) para a discussão desse texto. A autora, além de considerar que o LEMA pode ser abordado em três âmbitos diferentes: lugar, processo e atitude, acredita que a criação de um LEMA se justifica principalmente porque leva “os estudantes a pensar por eles mesmos, a questionar, observar padrões – resumindo, desenvolver uma atitude de investigação matemática” (Passos, 2009).

Todas essas justificativas somam-se também às considerações de Lorenzato (2012) acerca do LEMA. O autor acredita que a utilização do livro didático de matemática não é suficiente, tornando-se necessária, para o pleno desenvolvimento da aprendizagem de matemática, a ação do indivíduo (neste caso, o estudante) sobre o objeto. Ou seja, ao afirmar isso, o autor deixa clara a ideia de que o estudante precisa testar, manipular, criar e construir materiais que traduzam os principais conceitos trazidos pelo livro. Ademais, o mesmo autor traz outros benefícios importantes: o temor, a ansiedade e a indiferença que normalmente aparecem em estudantes da educação básica são substituídos pela satisfação, a alegria e o prazer pelo aprendizado (Lorenzato, 2012).

Recai agora, sobre esse texto, o seguinte questionamento: *quais são os desafios para a implementação do LEMA em uma escola?* Ou seja, *quais são as dificuldades que um professor que ensina matemática passa ao tentar construir um LEMA na escola?*

Primeiro de tudo, o professor precisa saber *quando* utilizar o LEMA: quais conteúdos e conceitos matemáticos se quer desenvolver através da criação de materiais didáticos manipuláveis? Ewbank (1971) responde essa pergunta ao afirmar que cabe aos professores "identificar nos livros-texto e/ou nos guias curriculares quais são os principais conceitos matemáticos que deverão ser desenvolvidos durante o ano, para então consultar as fontes do LEMA" (Ewbank, 1971 apud Passos, 2009), ou seja, o professor, em seus primeiros momentos de planejamento individual ou coletivo no início do ano letivo, deve analisar os conteúdos anuais e verificar em quais deles é possível a construção de material didático manipulável através do LEMA.

Lorenzato (2012) reitera que o professor não pode simplesmente decidir aplicar o LEMA como uma metodologia de ensino de matemática em suas aulas, ele precisa familiarizar-se com o material didático criado, ou seja, o professor *precisa* saber utilizar esse material. Isso quer dizer que, antes de iniciar sua aula com material didático manipulável, o professor precisa ter dedicado um tempo mínimo necessário para o aprofundamento do material, para que a prática não se resuma ao uso pelo uso.

Santos e Cunha (2021) trazem diversos fatores impeditivos à implementação do LEMA, muitos deles trazidos por falas professores que ensinam matemática na rede pública de ensino. Pode-se enfatizar, do trabalho de Santos e Cunha (2021), o fato de que a prática com LEMA "requer dos profissionais melhor capacitação de seu uso, de modo a proporcionar uma aprendizagem significativa" e que "é necessário que o docente de Matemática disponha de uma diversidade de materiais e que [...] possa saber o momento correto de utilizá-los e explorá-los [...]" (Santos; Cunha, 2021).

Ademais, os autores destacam que algumas falas recorrentes de professores que ensinam matemática é de que as secretarias de educação e as escolas não dispõem de ambiente adequado para a construção de um LEMA. Sabe-se, pela literatura, que não é necessária uma sala específica, entretanto, os professores afirmam que a maioria dos locais não são adequados e muitas vezes têm que ser divididos com outros componentes curriculares (Sousa; Cunha, 2021).

Também é importante destacar a importância da formação de professores e seu papel na capacitação inicial de professores que lecionarão matemática na rede pública (Sousa; Cunha, 2021). Faz-se necessário, nesse contexto, a inserção urgente de disciplinas que enfatizarão a relevância e a prática da construção do LEMA em escolas e a manipulação de materiais didáticos que ensinam matemática, visto que seu uso vem sendo amplamente categorizado como crucial para o aprendizado de matemática.

Em resumo, há certas dificuldades que podem desencorajar professores que ensinam matemática a instalarem em suas escolas o LEMA, dentre elas se destacam a escolha do momento adequado para utilizar o LEMA, a dedicação de um certo tempo para a familiarização do professor com o material didático em questão, a capacitação para preparar os professores para a utilização do LEMA, a falta de espaço considerado adequado para a criação de um laboratório e a falta de disciplinas sobre o assunto nos cursos de licenciatura em matemática.

Um outro questionamento pode aparecer para o leitor: *Há outras maneiras de abordar o LEMA, que não seja um espaço?*

Assim como já exposto por Ewbank (1971), o LEMA pode ter diversos significados. Além disso, de forma mais atual, Rodrigues (2011) traz diferentes abordagens e potencialidades para o LEMA, conforme expostas no Quadro 1. São elas: laboratório como depósito/arquivo, como sala de aula, como disciplina, como laboratório de tecnologia, como laboratório tradicional ou de matemática, como laboratório de ensino de matemática ou sala ambiente e como laboratório de educação matemática ou agente de formação.

Quadro 1 – As diferentes abordagens para o LEMA

Abordagem do LEMA	Descrição da Abordagem
Depósito/Arquivo	Nesse contexto, o LEMA funcionará apenas como apoio. Ele será entendido apenas como um lugar, um depósito de materiais que servirão para a realização de atividades práticas, mas que tais materiais serão levados para diferentes lugares.
Sala de Aula	Aqui, a sala de aula como um todo é entendida como um laboratório, e não necessariamente a sala de aula precisa estar "lotada" de materiais didáticos. Ou seja, o professor traz vivências práticas de matemática para a sala de aula.
Disciplina	O LEMA é entendido como disciplina para as licenciaturas em matemática, em que os estudantes passam a conhecer e usar o laboratório objetivando o ensino e a aprendizagem

	de matemática.
Laboratório de Tecnologia	Trata-se de um ambiente com a presença de tecnologias digitais, como computadores, que contenham softwares que facilitam o desenvolvimento e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos e que permitam momentos de pesquisa e aprofundamento de conceitos.
Tradicional	É um local propriamente destinado para a realização de experiências que auxiliam no aprendizado de matemática. Tem proximidade com os laboratórios “tradicionais”, ou seja, de Ciências, com teor investigativo.
Ensino de Matemática	“Este tipo de laboratório tem como foco central a realização de atividades de ensino com ênfase na vivência de processos que auxiliam a construção do conhecimento matemático” (Rodrigues, 2011).
Educação Matemática	“tem como foco central a realização de atividades de ensino, pesquisa e extensão com ênfase na formação inicial e continuada de professores em Matemática” (Rodrigues, 2011).

Fonte: Rodrigues (2011).

Percebe-se que a literatura apresenta diversas abordagens diferentes para a utilização do LEMA. Desde um ambiente que funcionará apenas como um depósito de materiais, até uma sala com tecnologias digitais e um ambiente de pesquisa em educação matemática. Dessa maneira, o professor que ensina matemática na educação básica tem um grande leque de possibilidades à sua disposição.

Considera-se que esse trabalho se enquadra na terceira abordagem trazida por Rodrigues (2011), que considera que o LEMA pode ser uma disciplina. Neste caso, a disciplina criada será uma eletiva para o Ensino Fundamental Anos Finais, com ênfase na criação de Jogos que ensinam análise combinatória e probabilidade. Cabe trazer ao texto a discussão acerca do motivo pelo qual é interessante propor um LEMA dentro de uma disciplina eletiva no Ensino Fundamental.

Para essa discussão, são considerados vários pontos:

I. *Complementaridade do currículo regular:* como será visto nos próximos capítulos, sabe-se que muitos professores que ensinam matemática restringem-se ao ensino dos conteúdos que são cobrados nas avaliações externas. Ao trabalhar o LEMA como uma disciplina que aborda análise combinatória e probabilidade, construir-se-á o conhecimento acerca de áreas importantíssimas da matemática;

II. *Autonomia e protagonismo dos estudantes*: como a proposta do LEMA envolve a autonomia dos estudantes, percebe-se que, ao inserir essa característica tão importante em uma disciplina, o ganho para o aprendizado dos estudantes será grandioso.

III. *Ambiente para vivências práticas e experimentais*: sabe-se que os professores que ensinam matemática enfrentam o grande desafio da falta de tempo. Ao *impor* que o LEMA seja inserido como uma *disciplina*, os estudantes vivenciarão práticas experimentais todas as semanas, algo que, mesmo com um professor que utiliza do LEMA como metodologia de ensino, não aconteceria de forma recorrente;

IV. *Interdisciplinaridade*: assim como será visto no programa educacional deste trabalho, uma disciplina que insere a metodologia do LEMA para o cotidiano dos estudantes pode fortemente trazer outras disciplinas para a vivência dos alunos, em especial a disciplina de Artes;

O leitor que chegou até aqui há de reconhecer que o LEMA, como uma metodologia de ensino comprovadamente eficaz, pode ser facilmente associado a uma disciplina eletiva, o que fará, como será visto no decorrer do trabalho, com que os resultados no ensino de determinados conteúdos matemáticos sejam significativamente positivos.

2.2 Os jogos na educação matemática

Os estudantes do Ensino Fundamental possuem idades entre 11 e 15 anos, aproximadamente. Alunos dessa idade têm, em seu convívio individual e social, bastante contato com Jogos e atividades lúdicas, sejam elas virtuais ou não. É consenso da literatura em Educação Matemática que o interesse dos estudantes pela disciplina é potencializado quando, nas aulas, eles encontram uma relação entre o conteúdo trabalhado e o seu cotidiano.

É nesse contexto que os Jogos vêm como um forte auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática: como estão amplamente presentes no convívio dos estudantes fora da escola, e eles aprendem melhor matemática quando se associa o conteúdo com seu convívio, é interessante vincular os Jogos com o ensino de matemática! O professor que ensina matemática encontrará um forte aliado no ensino dessa disciplina se conseguir, em seu cotidiano, utilizá-los. Esta seção se destina a discussões acerca das potencialidades do uso de jogos em sala de aula.

Antes mesmo de iniciar o diálogo sobre Jogos, a pesquisadora Grando atrela grande importância aos materiais manipulativos, que são o foco de um laboratório de ensino de matemática. Para ela, esses materiais possibilitam a visualização e diferentes representações de relações matemáticas, o que ajuda os estudantes a estabelecer relações, observar regularidades e padrões e pensar matematicamente (Grando, 2015).

Entretanto, quando se refere a Jogos, a autora tem um olhar mais específico e cauteloso, segundo ela

> o uso de jogos como recursos para o ensino de matemática difere da simples manipulação de materiais. O jogo possui características próprias que dão a ele um *status* diferenciado. O jogo tem regras que necessitam ser respeitadas durante toda a partida, é necessário ficar claro quem é o vencedor ou se há um empate, tem um movimento (começo, meio e fim) e isso lhe garante uma ordem, além de ser uma atividade voluntária (Grando, 2015).

Em sua tese, Andrade (2017) defende que “o jogo pode ser considerado como um instrumento que pode contribuir como condutor do desenvolvimento intelectual, social e emocional das crianças.”. Além disso, a autora também afirma que o professor de matemática deve incentivar o uso de jogos em sala de aula. Lemes, Cristóvão e Grando (2024) afirmam que o jogo “se caracteriza como uma prática com sentido e significado, dado a partir de uma atividade livre, exterior à vida habitual, capaz de absorver o jogador totalmente”.

Pode-se perceber, pela concordância entre os autores da literatura, que ao se definir os Jogos como um recurso de ensino de matemática, tem de se tomar um certo cuidado. Os Jogos, para ser aplicados como uma metodologia de ensino favorável, tem que ter sentido pedagógico e tem que ser aplicado com intencionalidade, seguindo regras.

Segundo Avanço e Lima (2020) apud Lemes, Cristóvão e Grando (2024), há dois tipos de Jogos no contexto de ensino de matemática: os Jogos Educativos e os Jogos Pedagógicos:

I. Os primeiros são aqueles que, mesmo “sem querer”, podem ser usados para ensinar, ou seja, eles podem gerar aprendizado simplesmente por serem jogados. Para exemplificar, um jogo de tabuleiro qualquer, como xadrez e dama, não têm propósitos pedagógicos a princípio, mas, por desenvolver o raciocínio lógico de quem os joga, tem grande potencial de aprendizado.
II. Os segundos são aqueles que foram pensados e planejados para serem usados dentro da escola, apresentando objetivos claro de ensino, ou seja, são os que têm intencionalidade e que normalmente são atrelados à conteúdos escolares.

Através da análise dessas definições, entende-se que a maior parte dos jogos propostos neste trabalho são caracterizados como *pedagógicos*, visto que eles são diretamente atrelados aos conteúdos de análise combinatória e probabilidade e que foram criados com o objetivo direto de ensinar esses conteúdos.

Em Grando (2015), também se percebe uma distinção entre duas categorias de jogos, mesmo sem dar nomes a elas. Segundo a autora, o primeiro tipo de abordagem tem a ver com a adaptação ou a criação de um jogo objetivando ensinar matemática com a ajuda dele. Uma segunda abordagem para o uso de jogos no ensino de matemática envolve entender a matemática a partir de um jogo que já existe, ou seja, "explorar, também, a matemática *a partir* desse jogo, uma matemática que possibilita *dar sentido* à estratégia do jogo" (Grando, 2015).

A pesquisadora defende e incentiva a utilização da segunda metodologia descrita acima. Entretanto, é fato comprovado pela literatura que as duas abordagens para jogos no ensino de matemática são benéficas. No caso deste trabalho, utilizar-se-á a primeira perspectiva metodológica, em que *os jogos são adaptados ou criados com o objetivo direto de ensinar matemática.*

Tendo sido definidos os Jogos como recursos pedagógicos para o ensino de matemática, cabe agora a discussão sobre *o porquê utilizá-los*. São várias as razões:

Lemes, Cristóvão e Grando (2024) afirmam que

> os Jogos são recursos didáticos favoráveis ao desenvolvimento de habilidades socioemocionais dos alunos, mostrando-se como possibilidades potencialmente lúdicas para as práticas de sala de aula de Matemática. Ao propiciar que as propostas didáticas sejam desencadeadas pela ação dos educandos, a utilização de Jogos no ensino da Matemática é reconhecida por suas contribuições para a socialização, o trabalho coletivo e o diálogo (Lemes; Cristóvão; Grando, 2024).

Em sua tese, Lemes (2022) sintetiza as possibilidades pedagógicas da utilização de materiais manipulativos (que, nesse contexto, são os jogos) através das características principais de tais materiais, que são: "diversificação da dinâmica de ensino, centralidade do aluno na aprendizagem da matemática, ações potencialmente lúdicas, [jogos como] agentes facilitadores da aprendizagem matemática e fontes de sentido e significado para a aprendizagem matemática" (Lemes, 2022). Entende-se, portanto, que todas essas características podem ser interpretadas como *benefícios diretos* para os alunos que aprendem através de jogos.

Ao tecer comentários sobre contratempos que o professor pode enfrentar na aplicação de jogos, Bianchini, Gerhardt e Dullius apresentam diversos pontos positivos que esse recurso apresenta, dos quais mencionam-se:

> [...] fixação de conceitos de forma motivadora para o aluno; introdução de conceitos de difícil compreensão; desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas; tomar decisões e saber avaliá-las; participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento; favorecer a socialização entre os alunos (Bianchini; Gerhardt; Dullius, 2010)

Outro ponto interessante para ser discutido tem a ver com os *desafios e as dificuldades que os professores enfrentam ao tentar inserir os jogos como recursos para o ensino de matemática*.

Uma das dificuldades está interligada ao planejamento. Professores têm afazeres burocráticos que tomam bastante tempo, o que faz com que o planejamento seja reduzido e que eles não consigam inserir jogos na sua prática. Bianchini, Gerhardt e Dullius (2010) concordam, ao afirmarem que "o jogo deve ser visto pelo professor como uma das várias estratégias pedagógicas e o sucesso da sua utilização está diretamente ligado ao planejamento", ou seja, o professor de matemática que tentar inserir em seu cotidiano os jogos sem que haja planejamento, poderá fracassar no objetivo da aprendizagem significativa da disciplina.

Um desafio que os professores enfrentam em relação a essa temática é a necessidade de vencer a concepção tradicional de ensino, ou seja, é "fundamental que o professor reconheça a disciplina como um processo que não se limita à aplicação de fórmulas ou à resolução de algoritmos" (Lemes; Cristóvão; Grando, 2024). A metodologia tradicional de ensino, com o professor como detentor do conhecimento e o estudante como agente passivo ainda está arraigada nos sistemas de ensino, algo que deve ser deixado de lado, e entende-se que vencer essa prática é dificultoso.

É essencial que o professor, também, conheça as limitações do jogo que pretende aplicar. Ele deve conhecer profundamente quais são as potencialidades do jogo, para evitar usos inadequados e que possam gerar equívocos conceituais no aprendizado dos estudantes. Segundo Grando (2015), "o desconhecimento sobre a utilização de jogos em aulas de matemática pode levar a alguns equívocos." A partir dessa análise, entende-se que o professor deve tomar tempo o suficiente para conhecer o jogo, estar preparado para situações imprevistas e se tornar especialista na jogabilidade dele, para que não enfrente casos inusitados em sala de aula.

Atrelada a concepção tradicional de ensino de matemática, muitos professores ainda acreditam que o aprendizado ocorrerá na medida em que o comportamento de seus estudantes seja mantido, ou seja, cada aluno permaneça sentado em sua carteira, em silêncio, aparentemente atento à explicação, respondendo às suas perguntas como robôs mecanizados, sem contato direto com colegas, desencorajado a apresentar dúvidas e com a utilização integral do tempo de sala de aula com exposição teórica do assunto.

O comportamento de um estudante da atualidade não pode se assemelhar ao descrito acima, e essa é uma das dificuldades que alguns dos professores de matemática pode enfrentar. Segundo Bianchini, Gerhardt e Dullius (2010), o professor de matemática pode encontrar alguns contratempos, como a possibilidade do jogo "ocupar mais tempo de aula do que aula teórica" e o fato de que uma aplicação mal planejada do jogo pode "desencadear indisciplinar", o que é veementemente indesejado pelos professores.

Agora, pretende-se responder *quais são, de fato, os cuidados que o professor deve tomar ao tentar aplicar os jogos como recursos educativos em sala de aula?*

Como já dito anteriormente e concordado pelos pesquisadores analisados neste referencial teórico, o professor precisa ter planejamento e intencionalidade pedagógica ao tentar aplicar os jogos, de forma que se considera até mesmo desvantajoso utilizar jogos quando não se tem o objetivo bem definido, nem mesmo todas as etapas da aula já descritas em um bom planejamento.

O professor deve se atentar para o fato de que, na inserção de jogos na sala de aula, ele seja o mediador do processo de ensino e aprendizagem. Nesse contexto, ser o mediador é fornecer *feedbacks* imediatos aos seus alunos, apontar possíveis erros conceituais que eles estejam cometendo, liderar e designar estudantes para diferentes tarefas e atribuições para o jogo, tirar as dúvidas que podem vir a aparecer sem tomar uma atitude de detentor do conhecimento e manter uma comunicação adequada e segura com seus estudantes.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

No Ensino Superior, é comum que os assuntos concernentes à análise combinatória e à probabilidade apareçam atrelados em uma disciplina única, que desenvolverá, primeiramente, alguns conceitos relacionados à teoria dos conjuntos e que, em seguida, debruça-se em princípios básicos de contagem. Após o desenvolvimento desses princípios, é comum que os livros-texto apresentem métodos de contagem mais avançados como o Arranjo, a Combinação e a Permutação. Algumas obras trazem, também, métodos de contagem diversos como a Inclusão-Exclusão, Permutações Caóticas, Lemas de Kaplansky, Princípio de Dirichlet, entre outros. É o que acontece em Morgado *et al*. (2016) e em Santos, Mello e Murari (2007). Outras obras também abordam o pensamento lógico, como por exemplo em Hunter (2011).

Neste capítulo, será desenvolvido um diálogo introdutório sobre a análise combinatória e a probabilidade no Ensino Superior, através de uma análise das três obras citadas acima, bem como também a de Muniz Neto (2016). Serão enfatizados, neste diálogo, os conceitos e definições que podem, potencialmente, ser trabalhados no Ensino Fundamental. Posteriormente, este capítulo conterá também uma análise dos livros didáticos de ensino fundamental que integram o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do intervalo 2024-2027, programa do Ministério da Educação (MEC) que distribui livros didáticos para as escolas públicas brasileiras.

3.1 A abordagem de Análise Combinatória e Probabilidade em graduações

Morgado *et al*. (2016) introduz o seu texto definindo a Análise Combinatória como uma área que trata de resolver problemas de contagem de tipos específicos de subconjuntos de um conjunto finito, deixando de lado a necessidade de listar cada um dos seus elementos. Tal concepção também é compartilhada por Muniz Neto (2016) em sua introdução. Logo, percebe-se que os autores tratam a área como a responsável por realizar a contagem de elementos de um conjunto sem que seja necessária a contagem enfadonha elemento por elemento.

Inicialmente, é importante tratar de um princípio de contagem que aparece de forma natural para todos os estudantes: o *princípio aditivo*. Para elaborar esse princípio, definimos que um conjunto A é *finito* se $A \neq \emptyset$, ou seja, se A possui ao menos um único elemento. Além disso, se $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, dizemos que o conjunto A tem n elementos e denotamos $|A| = n$, que diz que a quantidade de elementos de A é igual a n. Dessa forma, o princípio aditivo afirma que, se A e B são conjuntos finitos e disjuntos (ou seja, $A \cap B = \emptyset$, o que significa que A e B não têm elementos em comum), então existem $|A| + |B|$maneiras de escolher um elemento de $A \cup B$ (Hunter, 2011; Santos; Mello, Murari, 2007). Há exemplos simples de aplicação do princípio aditivo.

Exercício 3.1: Um estudante deseja plantar uma muda em seu jardim. No banco de muda, ele tem as seguintes opções: 2 plantas frutíferas, 3 plantas de jardinagem e 5 plantas de arborização. Quantas são as opções de mudas de plantas desse estudante?

Solução: esse exercício pode não parecer uma aplicação do princípio aditivo, mas é possível fazer a seguinte análise. Sejam os conjuntos A, B, C:

$$A = \{f_1, f_2\}$$
$$B = \{j_1, j_2, j_3\}$$
$$C = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

Onde A é o conjunto de plantas frutíferas, B é o conjunto das plantas de jardinagem e C é o conjunto das plantas de arborização, f_n são os diferentes tipos de plantas frutíferas, para $n \leq 2$, j_m são os diferentes tipos de plantas de jardinagem, para $m \leq 3$ e a_l são os diferentes tipos de plantas de arborização, para $l \leq 5$. Dessa forma, o total de opções que o estudante tem é $|A| + |B| + |C| = 2 + 3 + 5 = 10$ escolhas possíveis.

Outro conceito importante que se insere nos métodos básicos de contagem é o *princípio multiplicativo*. Nesse contexto, pode-se pensar no produto cartesiano $A \times B$ entre dois conjuntos não necessariamente disjuntos. $A \times B$ é o conjunto de pares ordenados (a_i, b_j) com $i, j \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$, $b_j \in B$ e tais que $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, onde $n, m \in \mathbb{N}$ são os números de elementos dos conjuntos A e B, respectivamente. O princípio multiplicativo para dois conjuntos afirma que o número total de pares ordenados é igual ao produto nm (Hunter, 2011). É simples apresentar exercícios desse princípio.

Exercício 3.2: Uma sorveteria oferece, em seu cardápio, 8 diferentes opções de sabores de sorvete e 5 diferentes opções de cobertura. Qual é o número total de sorvetes com cobertura possível de ser feito por um estudante?

Solução: para resolver este exercício contextualizando com a definição do princípio multiplicativo atrelada ao plano cartesiano apresentada anteriormente, define-se A como o conjunto dos diferentes sabores de sorvete e B como o conjunto de coberturas diferentes. Como $|A| = 8$ e $|B| = 5$, segue-se que o número total de pares ordenados do conjunto $A \times B$ é igual a $8 \cdot 5 = 40$. Logo, o total de sorvetes diferentes que a sorveteria oferece é 40. Trata-se de um exercício simples e facilmente adotado no Ensino Fundamental.

Tanto o princípio aditivo quanto o princípio multiplicativo podem ser generalizados para um número finito de conjuntos.

Generalização do Princípio Aditivo: Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos disjuntos 2 a 2, e se A_i possui a_i elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos (Hunter, 2011).

Generalização do Princípio Multiplicativo: Se uma escolha A_i pode ser tomada de m_i maneiras diferentes, para $i = 1,2,3, \ldots, n$, então essas n escolhas podem ser tomadas de $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ maneiras diferentes.

O professor que pretende apresentar a generalização do conceito do princípio multiplicativo para seus alunos deve fazê-lo utilizando uma escrita simplificada, visto que a generalização acima pode ser de difícil entendimento para alunos do ensino fundamental. Uma generalização alternativa pode ser a seguinte:

Generalização do Princípio Multiplicativo *(adaptado para o Ensino Fundamental)*: Se você precisa fazer várias escolhas, uma depois da outra, e sabe quantas opções tem em cada escolha, então basta multiplicar os números de opções para saber quantas combinações diferentes você pode formar.

Ainda assim, acredita-se que é mais vantajoso, primeiramente, apresentar a versão do princípio multiplicativo para dois conjuntos, para que depois seja possível generalizá-la da forma como o professor preferir.

Para o pleno entendimento do estudante da próxima estratégia de contagem, Permutação, é imprescindível que esteja familiarizado com o *fatorial*. Sabe-se que o fatorial não é um conteúdo da matemática trabalhado no ensino fundamental. Entretanto, para o contexto desse trabalho, é imprescindível que o professor leitor do texto esteja inteiramente familiarizado com o conceito para o pleno entendimento dos próximos.

O fatorial de um número n é definido como o produto de todos os números naturais menores do que ou iguais a n e é denotado por $n!$. Logo, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$. A permutação pode ser útil para um problema como o seguinte.

Exercício 3.3: Joana tem três troféus em sua prateleira: um de vôlei, um de natação e um de matemática, conquistados desde o início de sua vida escolar. Ela quer organizá-los lado a lado. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

Solução: Denotemos os troféus de vôlei, natação e matemática por V, N e M, respectivamente. Uma sequência de três letras (VNM, por exemplo) é uma das possíveis formas de organizar a prateleira de Joana. Dessa forma, sendo P o conjunto com todas as organizações possíveis da prateleira, tem-se que

$$P = \{VNM, VMN, NMV, NVM, MNV, MVN\}$$

Totalizando seis maneiras diferentes. Não coincidentemente, $6 = 3!$.

Definição 3.4 (Permutação): O número de modos de ordenar n objetos distintos é $P_n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 = n!$ (Morgado *et al.*, 2016).

Exercício 3.5: Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO? (Morgado *et al.*, 2016).
Solução: A palavra PRÁTICO tem sete letras e tais letras podem ser interpretadas como "objetos" a serem reordenados. Dessa maneira, existem $7! = 5040$ maneiras diferentes de reorganizar as letras P, R, A, T, I, C e O.

Para o contexto do ensino fundamental, entende-se que ambos problemas acima podem, sem dificuldade, ser explorados nas aulas.

Um terceiro método prático de contagem é conhecido como Arranjo. Santos, Mello e Murari (2007) definem Arranjos como grupos de p elementos diferentes que são tomados de um conjunto com n elementos no total, com $p \leq n$. Uma característica importante do Arranjo é que tais grupos com p elementos são diferentes entre si de acordo com sua ordem e com sua natureza. Ou seja, para exemplificar, se tomarmos um grupo com três pessoas (A, B e C) tais que ocuparão dois cargos de confiança (líder e vice-líder), é necessário entender que escolher A e B respectivamente para líder e vice-líder é diferente de escolher B e A para líder e vice-líder, e essa diferenciação caracteriza o Arranjo.

Para o cálculo da quantidade total de Arranjos sem que seja necessário montar uma linha de raciocínio sempre que for resolver, é utilizada uma fórmula. A seguir, tem-se a dedução desta fórmula.

A quantidade total de Arranjos de um grupo com n elementos tomados p a p é denotado A_n^p. Para se encontrar uma expressão que contabilize a quantidade de Arranjos, utilizaremos o princípio multiplicativo. Seja n elementos no total, que serão distribuídos em p lugares distintos. Na Figura 1, cada retângulo representa um lugar.

Figura 1 – Recurso para dedução do Arranjo

Lugar 1	Lugar 2	...	Lugar p
		...	

Fonte: elaborado pelo autor.

Como se tem um total de n elementos, para o lugar 1, esse lugar tem n maneiras de ser preenchido. Nesse caso, foi feita a primeira escolha. Para a segunda escolha, tem-se $n-1$ elementos possíveis de serem escolhidos. Para a terceira escolha, tem-se $n-2$ elementos possíveis de serem escolhidos. E assim sucessivamente, até chegar no lugar de número p, que terá, de acordo com o raciocínio indutivo, $n-(p-1)$ maneiras de ser escolhido. Pelo princípio multiplicativo, tem-se que a quantidade total de Arranjos é o produto da quantidade de elementos de cada uma das escolhas feitas:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \big(n-(p-1)\big)$$

A Figura 1 pode ser modificada para ficar da maneira abaixo (Figura 2).

Figura 2 – Recurso para dedução do Arranjo (inseridos os lugares).

Lugar 1	Lugar 2	...	Lugar p
		...	
n	$n-1$		$n-(p-1)$

Fonte: elaborado pelo autor.

Além disso, a expressão para A_n^p também pode ser modificada para se tornar mais usual. Para isso, multiplica-se por $\frac{(n-p)\cdot(n-(p+1))\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-p)\cdot(n-(p+1))\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = 1$, de maneira estratégica, para que se possa chegar ao que se pretende, conforme mostrado abaixo.

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \big(n-(p-1)\big) \cdot \frac{(n-p)\cdot\big(n-(p+1)\big)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-p)\cdot\big(n-(p+1)\big)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

$$\Rightarrow A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

A expressão acima é amplamente utilizada em livros-texto de Ensino Médio e Ensino Superior, e serve para calcular a quantidade de Arranjos de n elementos tomados p a p. Sem a necessidade de apresentar o fatorial, entende-se, também, que é possível explorar o Arranjo até mesmo no ensino fundamental. É simples exercitar este conceito.

Exercício 3.6: Considerando-se os dígitos $1,2,3,4,5$, quantos números de 2 algarismos diferentes podem ser formados? (Santos; Mello; Murari, 2007).

Solução: Primeiro, é necessário identificar quem são os elementos deste problema. Tem-se que n é a quantidade total de elementos que se quer agrupar p a p. Logo, $n=5$ e $p=2$. Substituindo na expressão encontrada para o arranjo, tem-se

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Logo, a resposta para o exercício é 20 maneiras distintas.

Em livros-texto de Ensino Superior, também se conceitua a Combinação. Considera-se que a Combinação também é uma estratégia de contagem que pode ser trabalhada no Ensino Fundamental, caso se utilize uma estratégia correta, que não esteja vinculada a fórmulas, mas que crie um raciocínio quantitativo. Morgado *et al.* (2016) apresentam a Combinação como uma estratégia de contagem que é capaz de responder à pergunta “Quantos são os subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos?”.

Os livros didáticos da educação básica separam Arranjo e Combinação em diferentes fórmulas. Enquanto o Arranjo toma grupos com p elementos tais que *a sequência desses elementos diferencia um arranjo de outro*, a Combinação também toma grupos com p elementos, porém, *uma combinação com p elementos e outra combinação com os mesmos p elementos configuram-se como a mesma combinação (ou seja, o mesmo subconjunto).*

Para exemplificar, pode-se modificar o exemplo tratado acima em Arranjo. Ao se considerar três pessoas (A, B e C) para dois cargos (agora, não distintos) de líderes, é fácil verificar que a quantidade total de grupos de duas pessoas que pode ser feita é três grupos: A e B, A e C, B e C. Ou seja, a Combinação de três elementos tomados dois a dois *é igual a três*, enquanto que o Arranjo de três elementos tomados dois a dois *é igual a seis*, conforme visto anteriormente. Isso porque, no Arranjo, tanto A e B quanto B e A configuravam grupos diferentes. Na Combinação, são o mesmo grupo, já que ambos são líderes.

Pretende-se, agora, chegar a uma expressão que calcule a quantidade total de combinações de n elementos tomados p a p. Sejam tais elementos $a_1, a_2, \ldots, a_5$, que serão escolhidos em grupos menores com 3 elementos. Sabe-se, pelo Arranjo, que há $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$ maneiras de escolher 3 elementos de um total de 5. Entretanto, por exemplo, as sequências (a_1, a_2, a_4), (a_1, a_4, a_2), (a_4, a_2, a_1), (a_4, a_1, a_2), (a_2, a_1, a_4), (a_2, a_4, a_1) são todas uma mesma combinação repetida seis vezes. Na contagem total de 60 maneiras, cada combinação foi contada seis vezes, como se fossem diferentes. Dessa forma, ao final, faz-se necessário dividir o total de arranjos contados pelo total de maneiras de se permutar os elementos para que não se conte a mesma combinação múltiplas vezes (ou seja, nesse caso, dividir por $3! = 6$) (Morgado *et al.*, 2016).

Representamos o número de combinações de n elementos tomados p a p por C_n^p. A sua fórmula será

$$C_n^p = A_n^p \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} \Rightarrow C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exercício 3.7: Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes? (Morgado *et al.*, 2016).

Solução: Nesse contexto, $n = 10$ e $p = 4$, logo

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} = 210 \text{ saladas distintas.}$$

Definição 3.8 (Arranjo): Arranjos de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são grupos de p elementos diferentes entre si pela ordem e pela natureza. A quantidade total de Arranjos é dada por $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ (Santos; Mello; Murari, 2007).

Definição 3.9 (Combinação): Combinações de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são grupos de p elementos que não se diferenciam pela ordem. A quantidade total de Combinações é dada por $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

As definições e os conceitos de Análise Combinatória passados acima são os que se considera necessário para que o professor que irá aplicar o programa disciplinar da eletiva aqui sugerida tenha conhecimento para que consiga o fazer de forma eficaz. Os livros-texto utilizados como referencial são de Ensino Superior e apresentam diversos outros métodos de contagem mais sofisticados, que, por não terem aparente aplicabilidade no Ensino Fundamental em turmas regulares, não serão trazidos para este texto.

Faz-se necessário, portanto, tratar também sobre como a probabilidade é introduzida em um dos livros-texto utilizados em graduações. A probabilidade é uma aplicação direta das técnicas desenvolvidas anteriormente nesta seção. Isso deve-se ao fato de as estratégias de contagem serem especialmente úteis para calcular o número de elementos de um conjunto chamado *espaço amostral*, que será definito posteriormente.

A Teoria das Probabilidades é uma área de matemática que se incube de estudar experimentos determinísticos e aleatórios. Um experimento é dito determinístico quando apresenta o mesmo resultado quando realizado sob a mesmas condições. Já os experimentos aleatórios apresentam resultados diferentes quando realizado sob as mesmas condições (Morgado *et al.*, 2016). Esse texto, e normalmente os livros-texto da Educação Básica e do Ensino Superior estudam os *experimentos aleatórios* em específico. A Teoria das Probabilidades, portanto, tenta criar *modelos* que estudam esses experimentos.

A primeira definição de probabilidade nasceu com o matemático Jerônimo Cardano, que a abordou como sendo a divisão entre o número de chamados *casos favoráveis* e o *número de possíveis resultados*. Uma das maneiras de se calcular a probabilidade é através do cálculo do número de elementos desse conjunto de todos os possíveis resultados. Na Teoria das

Probabilidades, esse conjunto recebe o nome de *espaço amostral.* Dessa maneira, por exemplo, ao se realizar o experimento de lançar uma moeda e anotar o seu resultado, só existem dois resultados possíveis: cara ou coroa. Logo, o espaço amostral (representado pela letra Ω) do experimento lançamento de uma moeda é $\Omega = \{cara, coroa\}$. No lançamento de um dado, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. No sorteio do primeiro número da Mega Sena, $\Omega = \{1, \dots, 60\}$ (Morgado *et al*., 2016).

É importante, agora, definir também o chamado *evento*. Eventos são quaisquer subconjuntos de um espaço amostral. Para facilitar, pode-se utilizar o lançamento de um dado como o experimento em questão. Sejam A, B e C respectivamente os eventos cair um número par, cair um número primo e cair um múltiplo de três. Os subconjuntos serão, portanto $A = \{2,4,5\}, B = \{2,3,5\}$ e $C = \{3,6\}$. Como os eventos A e B têm ambos três resultados possíveis, é imediato que, como o total de possibilidades desse experimento é seis, então a Probabilidade de acontecerem os experimentos A e B é de 50%. Esse é o pensamento que ajuda a perceber a probabilidade como a razão da Definição 3.10.

Definição 3.10 (Probabilidade): Se todos os resultados possíveis de um evento são igualmente prováveis, então a probabilidade de um evento é dada por

$$Probabilidade = \frac{quantidade\ de\ elementos\ do\ evento}{quantidade\ de\ elementos\ do\ espaço\ amostral}$$

Percebe-se, portanto, que os eventos A e B anteriores são *equiprováveis*, pois ambos possuem a mesma quantidade de elementos. Entretanto, o evento C tem uma probabilidade menor de acontecer, visto que sua quantidade de elementos é de apenas dois. Logo, a Probabilidade de acontecer o evento C é

$$P = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

É importante falar que *quantidade de elementos do evento* também pode ser entendido como *número de casos favoráveis,* e *quantidade de elementos do espaço amostral* também pode ser visto com *número de casos possíveis.* É importante trazer alguns exemplos clássicos.

Exercício 3.11: Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter 2 caras? Qual é a probabilidade de obter pelo menos 2 caras? (Morgado *et al*., 2016).

Solução: pode-se resolver facilmente o Exercício 3.11 organizando-se, em uma tabela, todos os resultados possíveis e contando-os, para saber qual é a quantidade total de casos possíveis desse experimento. Seja C o resultado *coroa* e seja K o resultado *cara*. O Quadro 2 explicita todo os resultados possíveis.

Quadro 2 – Resultados do lançamento de 3 moedas

		Resultados possíveis							
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Moedas	*1*	C	C	C	K	K	K	C	K
	2	C	C	K	C	K	C	K	K
	3	C	K	C	C	C	K	K	K

Fonte: elaborado pelo autor.

Através da análise do quadro acima, é possível perceber que existem oito resultados possíveis. Logo $|\Omega| = 8$. O problema questiona qual a probabilidade de se obter 2 caras, ou seja, um evento em que aconteça *exatamente duas vezes a letra C*. Observa-se que isso acontece nos resultados 2, 3 e 4. Logo, a probabilidade do evento A (cair exatamente duas caras) é de

$$P_A = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

No segundo questionamento, pergunta-se a probabilidade de se obter *pelo menos* duas caras, de forma que se deve incluir os resultados em que há mais do que duas caras. Os resultados para esse evento (digamos, B), são os de número 1, 2, 3 e 4. Logo, a probabilidade é

$$P_B = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Algumas aplicações imediatas do conceito de probabilidades são os eventos chamados *certos* e *impossíveis*. Um evento certo é aquele que irá acontecer com certeza, ou seja, que tem 100% de Probabilidade. Um exemplo de evento certo é o de cair um número de 1 a 6 no lançamento de um dado comum. Outro exemplo de evento certo é o de o Sol nascer no Brasil amanhã (desconsiderando a possibilidade de uma catástrofe em escala universal). Um evento impossível é aquele que não tem chances de acontecer. Um exemplo de evento impossível é o de cair 7 no lançamento de um dado comum.

Além desses conceitos de probabilidade, é importante também tratar da Probabilidade Condicional. Este tipo de probabilidade aparece quando quer se calcular a chance de um evento acontecer dado que um outro evento já aconteceu. Para exemplificar, tem-se o exemplo a seguir.

Exercício 3.12: Dado que no lançamento de um dado caiu um número primo, qual a probabilidade de ele ser par?

Solução: Se o questionamento fosse “qual a probabilidade de cair um número par?”, já sabemos que a resposta seria $\frac{1}{2}$. Porém, foi inserida uma condição, a de que o número que caiu é primo. Logo, o espaço amostral do experimento foi "comprometido". Chamemos de A o evento *cair um número primo* e B o evento *cair um número par.* O que queremos é calcular a probabilidade de acontecer o evento B, dado que já aconteceu o evento A. Como o evento A já aconteceu, temos um total de três possibilidades: $\{2,3,5\}$. Agora, dado, que queremos que caia um número par (evento B), o único elemento favorável é o $\{2\}$. Logo, a probabilidade de B acontecer, dado que A aconteceu é

$$P(B/A) = \frac{1}{3}$$

O numerador vem do fato de só haver um número primo (o 2) de um total de três primos (2,3,5). O denominador vem do fato de o novo espaço amostral ser 3, já que era necessário que tivesse caído um número primo (que são os números 2,3,5).

Definição 3.13 (Probabilidade Condicional): Dados dois eventos A e B, a probabilidade de B acontecer, dado que A já aconteceu é representada por $P(B/A)$ e é calculada como

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

E também pode ser chamada de *probabilidade a posteriori* (Morgado, 2016).

Um resultado importante que é muito comumente utilizado também no Ensino Médio é a *multiplicação de probabilidades*, que é apenas uma derivação da Probabilidade Condicional. Isolando $P(A \cap B)$ no resultado anterior, temos que $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$, ou seja, a probabilidade de dois eventos acontecerem simultaneamente é o resultado da multiplicação das probabilidades de ocorrer um deles ($P(B)$) pela de ocorrer outro evento, dado que o primeiro já aconteceu $\left(P(B/A)\right)$.

É importante também tratar dos chamados *eventos independentes*, que possuem um cálculo diferenciado de probabilidade. Define-se da seguinte maneira: dois eventos A e B são independentes se a probabilidade dos dois ocorrerem for a multiplicação das probabilidades de um ocorrer pela do outro ocorrer. Ou seja, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (Morgado, 2016). Eventos independentes são comumente tratados com retiradas de objetos de urnas, com reposição, assim como mostra o Exercício 3.14.

Exercício 3.14: A sala de aula do 9° ano possui uma urna contendo 6 bolas azuis e 4 bolas vermelhas de iguais tamanhos e massas. Qual a probabilidade de se retirar uma bola azul, devolvê-la, e logo em seguida tirar uma bola vermelha?

Solução: Sejam A o evento retirar uma bola azul e B o evento retirar uma bola vermelha. Nota-se que, como há reposição da bola na urna logo após a primeira retirada, os eventos são independentes, dessa forma, podemos calcular a probabilidade pedida multiplicando as probabilidades de eles ocorrerem de forma independente.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

Tanto esse exercício quanto outros exemplos disponíveis na literatura são considerados exemplos *clássicos* do cálculo de probabilidade. Dessa forma, os conceitos matemáticos relacionados à análise combinatória e à probabilidade trazidos nessa seção são de extrema importância. O professor que pretende aplicar a eletiva aqui proposta deve estar muito bem familiarizado com essas definições, visto que imprevistos podem acontecer e o professor deve ter pleno domínio dos conteúdos e da situação.

3.2. Análise Combinatória e Probabilidade no livro didático do Ensino Fundamental

A partir de agora faz-se necessário, também, entender de que maneira a análise combinatória e probabilidade é trabalhada nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Para isso, é crucial que o leitor entenda que o autor desta obra é professor de matemática da rede pública de ensino do município de Sobral, no interior do estado do Ceará. Logo, a análise dessa seção dar-se-á sobre o livro didático aprovado pelo PNLD e que é adotado em toda a rede municipal de Sobral, que é a coleção Desafios da Matemática, do autor Ênio Silveira, editora Moderna. É importante também ressaltar que esse mesmo livro será utilizado pela rede até o ano letivo de 2027, visto que o PNLD tem vigência de 4 anos.

No livro didático do 6° ano, o Capítulo 12 se chama *Probabilidade e Estatística,* não havendo, portanto, um capítulo específico para a análise combinatória. Entretanto, dentro desse capítulo, é contemplado (de forma superficial, sem definição formal) o princípio multiplicativo através da resolução de exercícios simples, explorando também a árvore de possibilidades. Há um total de 6 exercícios sobre o assunto. Depois da rápida abordagem sobre combinatória, o livro define probabilidade e propõe 7 exercícios. Percebe-se que, no livro do 6° ano, não é tratada a definição de *espaço amostral* nem de *evento* (Silveira, 2022).

No livro didático do 7° ano, a *Probabilidade e estatística* também é abordada no Capítulo 12. Aparecem definições mais formais, como a probabilidade associada a *experimento aleatório*. Logo em seguida são propostos 5 exercícios (sem lançar mão do uso da Análise

Combinatória). Há uma seção denominada *Cálculo de probabilidades*, onde são apresentadas estratégias de resolução de problemas e adiante são apresentados mais 6 exercícios sobre probabilidade. Percebe-se, assim, que no 7° ano o princípio multiplicativo foi deixado de lado, de forma que a abordagem do livro se deteve apenas a um aprofundamento no cálculo de probabilidades (Silveira, 2022).

Já no livro didático do 8° ano, nota-se uma abordagem diferente. A probabilidade é dissociada da Estatística e recebe um capítulo próprio. No Capítulo 6, intitulado *Probabilidade*, o livro aborda uma seção chamada de *Possibilidades*, onde são montadas árvores de possibilidades em exercícios resolvidos. Depois, há uma subseção dedicada ao princípio multiplicativo, sendo essa a primeira série em que se dedica uma seção inteira para um dos conteúdos de combinatória. Depois, são propostos 6 exercícios que abordam a construção de árvore de possibilidades e o princípio multiplicativo. A partir daí, a probabilidade é então definida como a razão entre dois números (onde finalmente os termos *espaço amostral* e *evento* são definidos), bem como são feitos comentários sobre eventos certos, impossíveis e complementares. Na finalização do capítulo, são propostos mais 6 exercícios, dos quais alguns abordam ao mesmo tempo a análise combinatória e a probabilidade (Silveira, 2022).

Por fim, no livro didático do 9° ano, a probabilidade volta a ocupar o Capítulo 12, intitulado *Probabilidade e estatística*. Da mesma forma que no 8° ano, o texto define probabilidade, bem como experimentos aleatórios, espaço amostral, evento e espaço amostral equiprovável. Define também a probabilidade como a razão entre dois números, conforme visto anteriormente, e logo em seguida apresenta 4 problemas (os quais não há abordagem da análise combinatória). Em seguida, há uma seção destinada à abordagem de *Eventos independentes e eventos dependentes*, onde é explicado sobre a multiplicação de frações. A parte destinada à probabilidade finaliza com mais 7 problemas que abordam a probabilidade e a multiplicação de probabilidades (Silveira, 2022). Uma síntese desses resultados está presente no Quadro 3.

Quadro 3 – Síntese dos conceitos e definições presentes nos livros didáticos e quantidades de exercícios

	6° ano	7° ano	8° ano	9° ano
PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO			X	
EXPERIMENTO ALEATÓRIO	X	X	X	X
EVENTO			X	X
EVENTOS COMPLEMENTARES			X	
EVENTOS DEPENDENTES E INDEPENDENTES				X
ESPAÇO AMOSTRAL			X	X
ESPAÇO AMOSTRAL EQUIPROVÁVEL				X
PROBABILIDADE	X	X	X	X

CÁLCULO DE PROBABILIDADE	X	X		X
MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES				X
QUANTIDADE DE EXERCÍCIOS	13	11	12	11

Fonte: elaborado pelo autor.

Percebe-se, através da análise do livro didático, que a abordagem da análise combinatória foi superficial (em exceção do 8° ano, que destinou uma seção para o princípio multiplicativo). Considera-se que a probabilidade foi trabalhada de maneira razoável, em todas as séries, trazendo sempre o conceito da probabilidade como a razão entre dois valores. Entretanto, acredita-se que a quantidade de exercícios e problemas desafiadores foi reduzida em todos os livros: 13, 11, 12 e 11 exercícios no total, respectivamente nos livros das séries do 6°, 7°, 8° e 9° anos. Além disso, é notório que a probabilidade é normalmente inserida no último capítulo do livro (Capítulo 12).

O autor deste texto defende que a análise combinatória e a probabilidade devam ocupar um espaço de maior importância nos livros didáticos, visto que professores que ensinam matemática tomam a sequência didática e os exercícios propostos do livro como a base curricular para seu cotidiano. Ao trabalhar os conteúdos dessa maneira, os estudantes terão seu primeiro contato com definições mais avançadas apenas no Ensino Médio, onde já deverão trabalhar com permutações, arranjos e combinações, de forma que esse salto conceitual pode gerar dificuldades no processo de aprendizado.

A abordagem desses métodos de contagem não necessariamente precisa se ater a fórmulas. E, como será visto nos capítulos seguintes, há maneiras mais interessantes para os estudantes de se trabalhar a análise combinatória e a probabilidade (que, neste trabalho, será através da criação de Jogos que ensinam matemática).

3.3 Análise Combinatória e Probabilidade nas matrizes de referência

É importante que o leitor esteja familiarizado com as principais avaliações externas de grande escala realizadas pelas escolas públicas.

Em escala nacional e a cada dois anos, acontece a aplicação das provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) que "é um conjunto de avaliações externas em larga escala que permite ao Inep realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante." (Inep, s.d.) Nesse contexto, a sigla Inep refere-se ao Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, uma autarquia vinculada ao Ministério da Educação (MEC) que realiza estudos, pesquisas e avaliações sobre o sistema educacional brasileiro.

Os alunos do 5° e 9° anos do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio fazem essas avaliações do Saeb nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática. Progressivamente, tais avaliações estão incorporando também as disciplinas de Ciências Humanas e Ciências da Natureza, porém, de forma amostral.

Acredita-se que o que nos interessa para esse texto é o fato de que as avaliações do Saeb são elaboradas com base em *matrizes de referência*, que são tabelas com parâmetros norteadores para a construção dos itens avaliativos que compõem as provas do Saeb (Inep, s.d.). Ou seja, essas avaliações são construídas com base em um conjunto de conteúdos pré-definidos e não são abordados outros assuntos diferentes desses nas provas. Como o foco deste trabalho é a elaboração de uma disciplina eletiva para o Ensino Fundamental Anos Finais, enfatizar-se-á matriz de referência de Matemática do 9° ano.

A matriz é dividida em quatro *eixos*, conforme o Quadro 3. Cada eixo possui *descritores*, que são semelhantes a habilidades, ou seja, são descrições de conteúdos que devem ser desenvolvidos com os estudantes.

Quadro 4 – Matriz de referência para a elaboração da prova de matemática do Saeb, 9° ano

I. Espaço e Forma	
D1	Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.
D2	Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com as suas planificações.
D3	Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.
D4	Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.
D5	Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.
D6	Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não-retos.
D7	Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram.
D8	Resolver problema utilizando propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares).
D9	Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.
D10	Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.
D11	Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.
II. Grandezas e Medidas	
D12	Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.
D13	Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
D14	Resolver problema envolvendo noções de volume.
D15	Resolver problema utilizando relações entre diferentes unidades de medida.
III. Números e Operações/Álgebra e Funções	
D16	Identificar a localização de números inteiros na reta numérica.

D17	Identificar a localização de números racionais na reta numérica.
D18	Efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
D19	Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
D20	Resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
D21	Reconhecer as diferentes representações de um número racional.
D22	Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
D23	Identificar frações equivalentes.
D24	Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de "ordens" como décimos, centésimos e milésimos.
D25	Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
D26	Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
D27	Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.
D28	Resolver problema que envolva porcentagem.
D29	Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
D30	Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
D31	Resolver problema que envolva equação do 2º grau.
D32	Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).
D33	Identificar uma equação ou inequação do 1º grau que expressa um problema.
D34	Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema.
D35	Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau.
IV. Tratamento da Informação	
D36	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
D37	Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

Fonte: Brasil (2022).

Uma rápida e simples análise da matriz de referência do Quadro 3 fornece a informação de que os conteúdos de análise Combinatória e probabilidade *não são contemplados nas avaliações do Saeb*. Dessa maneira, os conteúdos trabalhados em sala de aula pelos professores de matemática do Ensino Fundamental Anos Finais, que normalmente estão alinhados à matriz de referência do Saeb com o objetivo de melhorar o desempenho na avaliação, podem não englobar os conteúdos de análise Combinatória e probabilidade, deixando de lado uma importante área da matemática com a qual, ao ingressarem no Ensino Médio, os estudantes provavelmente terão seu primeiro contato.

Vale também trazer a informação de que no estado do Ceará, onde este trabalho é desenvolvido, há também o Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica (Spaece), que é uma "avaliação externa em larga escala que avalia as competências e habilidades dos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, em Língua Portuguesa e Matemática" (Seduc, 2025) aplicada exclusivamente com os estudantes das escolas públicas do estado do Ceará. É uma prova que é realizada de forma censitária nas escolas municipais e estaduais do estado. Todos os estudantes do 5° e 9° anos do Ensino Fundamental, bem como os estudantes da 3ª série do Ensino Médio realizam anualmente esta avaliação de Língua Portuguesa e Matemática. Além disso, os alunos do 2° ano do Ensino Fundamental fazem uma avaliação de Alfabetização. (Seduc, 2025)

Para a elaboração das provas de Matemática do último ano do Ensino Fundamental, é utilizada uma matriz de referência que contém descritores. A matriz de referência do Spaece, disponível no Quadro 4, é também dividida em quatro eixos, assim como a matriz do Saeb.

Quadro 5 – Matriz de referência para a elaboração da prova de matemática do Spaece, 9° ano

I. Interagindo com Números e Funções	
D07	Resolver situação problema utilizando mínimo múltiplo comum ou máximo divisor comum com números naturais.
D08	Ordenar ou identificar a localização de números inteiros na reta numérica.
D10	Resolver problema com números inteiros envolvendo suas operações.
D11	Ordenar ou identificar a localização de números racionais na reta numérica.
D12	Resolver problema com números racionais envolvendo suas operações.
D13	Reconhecer diferentes representações de um mesmo número racional, em situação-problema.
D15	Resolver problema utilizando a adição ou subtração com números racionais representados na forma fracionária (mesmo denominador ou denominadores diferentes) ou na forma decimal.
D17	Resolver situação problema utilizando porcentagem.
D18	Resolver situação problema envolvendo a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.
D19	Resolver problema envolvendo juros simples.
D21	Efetuar cálculos com números irracionais, utilizando suas propriedades.
D24	Fatorar e simplificar expressões algébricas.
D25	Resolver situação-problema que envolva equações de 1º grau.
D26	Resolver situação-problema envolvendo equação do 2º grau.
D27	Resolver situação-problema envolvendo sistema de equações do 1º grau.
II. Convivendo com a Geometria	
D48	Identificar e classificar figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo e círculo, destacando algumas de suas características (número de lados e tipo de ângulos).
D49	Resolver problemas envolvendo semelhança de figuras planas.
D50	Resolver situação-problema aplicando o Teorema de Pitágoras ou as demais relações métricas no triângulo retângulo.
D51	Resolver problemas usando as propriedades dos polígonos (soma dos ângulos internos, número de diagonais e cálculo do ângulo interno de polígonos regulares).
D52	Identificar planificações de alguns poliedros e/ou corpos redondos.
III. Vivenciando as Medidas	
D65	Calcular o perímetro de figuras planas, em uma situação problema.
D67	Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

D69	Resolver problemas envolvendo noções de volume.
IV. Tratamento da Informação	
D75	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas ou gráficos.
D77	Resolver problemas usando a média aritmética.

Fonte: Seduc (2025).

Uma rápida e simples análise faz chegar à conclusão de que na matriz do Spaece, assim como na matriz de referência do Saeb, os conteúdos análise combinatória e probabilidade *não são abordados nas avaliações externas*. Percebe-se que nessas duas avaliações externas realizadas nos últimos anos nenhum estudante do Ensino Fundamental foi avaliado conforme seus conhecimentos em métodos de contagem ou no cálculo de uma simples Probabilidade.

O autor desse trabalho entende que a ausência de descritores (ou habilidades) que contemplam os assuntos dessas importantes áreas faz com que professores que ensinam matemática *não os trabalhem* em sala de aula, ocasionando uma lacuna no processo de formação matemática dos estudantes do Ensino Fundamental. Compreende-se que, ao não abordar conteúdos de análise combinatória e probabilidade no Ensino Fundamental, ocorrerá no Ensino Médio uma grande dificuldade por parte dos estudantes na aprendizagem dessas áreas.

Por fim, é relevante falar sobre uma importante mudança que acontecerá nas provas do Saeb a partir deste ano de 2025. Em um informativo elaborado pelo Inep, é exposto que as provas do Saeb de 2025 serão as primeiras provas a mesclar a matriz de referência de 2001 (exposta anteriormente) com a nova matriz de referência que foi elaborada em 2018 e que está alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Dessa forma, confirma-se que esta importante avaliação em escala nacional está passando por um período de transição em suas provas.

A matriz de referência do Saeb de 2018, alinhada à BNCC, está disponível no Anexo A. Entretanto, para complementar a discussão desenvolvida neste capítulo, trar-se-á para esta seção as habilidades que têm relação com Análise Combinatória e Probabilidade e que, a partir deste ano, serão avaliadas nas provas do Saeb. Tais habilidades estão disponíveis no Quadro 5.

Quadro 6 – Recorte da nova matriz de referência para a elaboração da prova de matemática do Saeb, 9° ano

Código	Descrição
9E2.4	Resolver problemas que envolvam a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios equiprováveis independentes ou dependentes.

Fonte: Brasil (2022).

A nova matriz de referência do Saeb, que é agora alinhada à BNCC, apresenta *uma* habilidade cuja descrição está vinculada à probabilidade. Percebe-se, também, que como não há habilidades que se relacionam com o conteúdo de análise combinatória, as provas do Saeb dos próximos anos ainda *não avaliarão* o conhecimento dos estudantes nessa área. Trata-se de um avanço, já que a partir de agora a probabilidade está obrigatoriamente inserida no cotidiano dos estudantes, entretanto, compreende-se que ainda não é o suficiente, visto que uma parte importante da matemática, a Análise Combinatória, não está sendo considerada.

É importante perceber que o fato de as duas áreas aqui tratadas não serem recorrentes nessas matrizes de referência, a prática dos professores, que naturalmente estará vinculada aos descritores e habilidades, não trará para o cotidiano dos estudantes a análise combinatória e a probabilidade. Assim, entende-se que trabalhos como este, que trazem alternativas para o ensino dessas áreas em disciplinas que não façam parte da formação básica (ou seja, disciplina regulares), favorecerão o ensino e a aprendizagem dos estudantes nessas áreas tão importantes.

4 ELETIVAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), de 1996, estabelece, em um de seus capítulos, a composição dos dois níveis escolares, sendo eles: educação básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio; e ensino superior. A educação básica, como descrito, é dividida em três etapas. Além disso, a LDB também normatiza que deve haver uma Base Nacional Comum Curricular, ao afirmar que

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (Brasil, 1996).

A BNCC, assim definida, foi escrita e publicada integralmente em 2018, sendo definida como “um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (Brasil, 2018). É importante acrescentar que esse documento não se trata apenas de um currículo, mas um conjunto de orientações para a prática pedagógica a ser utilizada pelos professores da Educação Básica.

Em seu texto, a BNCC menciona a chamada *parte diversificada*, onde deixa a critério dos órgãos estaduais e municipais de Educação a organização de disciplinas externas à Base Comum (ou seja, disciplinas como matemática, ciências e geografia, por exemplo), de forma que cada localidade brasileira tem a liberdade de elaborar um currículo diferenciado para suas etapas de ensino, que servirá para *incorporar* o currículo da Educação, e não *substituir* aquelas disciplinas obrigatórias citadas anteriormente.

Assim, surge a possibilidade de abordar as chamadas *disciplinas Eletivas*, que na literatura estão vinculadas à chamada Escola da Escolha, e que serão abordadas neste capítulo.

4.1 A Escola da Escolha

A Escola da Escolha é um modelo educacional abrangente e inovador, que se baseia no compromisso com a formação integral dos estudantes ao considerar suas dimensões corporal, afetiva, espiritual e cognitiva. Ela visa formar um jovem autônomo, solidário e competente, capaz de participar efetivamente da sociedade como um ser que sabe tomar decisões e escolhas com base em seus interesses pessoais (Instituto de Corresponsabilidade pela Educação, 2020).

O modelo pedagógico da Escola da Escolha, aqui trazido pelo Instituto de

Corresponsabilidade pela Educação (ICE), é compreendido por um conjunto de disciplinas que devem compor o currículo de um estudante da Escola em Tempo Integral (ETI). Nas obras do ICE, esse conjunto de disciplinas recebe o nome de Metodologias do Êxito, que

> são componentes curriculares da Parte Diversificada que exercem o papel de articuladores entre o mundo acadêmico e as práticas sociais, ampliando, enriquecendo e diversificando o repertório de experiências e conhecimentos dos estudantes. Elas são executadas por meio de aulas e procedimentos teóricos e metodológicos que favorecem a experimentação de atividades dinâmicas contextualizadas e significativas para os estudantes em distintas áreas (Instituto de Corresponsabilidade pela Educação, 2020).

As Metodologias do Êxito envolvem disciplinas como Projeto de Vida, Pensamento Científico, Protagonismo Juvenil, Estudo Orientado e Práticas Experimentais, disciplinas tais que estão sempre vinculadas às áreas de conhecimentos básicas propostas pela BNCC (que são quatro, a saber, Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas) (Instituto de Corresponsabilidade pela Educação, 2020).

A Metodologia do Êxito não preconiza que os professores trabalhem de forma individualizada com suas disciplinas básicas de formação, mas incentiva que haja interdisciplinaridade entre as áreas de conhecimento. Além disso, o professor e o estudante ocupam papel fundamental na construção dos conhecimentos que farão parte do currículo da escola, e o docente deve realizar, de forma crucial, um bom planejamento (Instituto de Corresponsabilidade pela Educação, 2020).

No Ensino Fundamental Anos Finais, as disciplinas mencionadas acima estimulam a criatividade e a autonomia dos estudantes. Além disso, elas ocupam um lugar de mesma importância do que todas as outras disciplinas, devendo ter planejamento e avaliação próprios. Este texto enfatiza a importância das disciplinas eletivas, que serão tratadas na seção seguinte.

4.2 As Disciplinas Eletivas em Escolas em Tempo Integral

As disciplinas eletivas são componentes curriculares construídos por professores e estudantes, com base nos interesses desses. São oferecidos semestralmente e têm como objetivo "diversificar, aprofundar e/ou enriquecer os conteúdos e temas trabalhados nos componentes curriculares da Base Nacional Comum Curricular." (Instituto de Corresponsabilidade pela Educação, 2020). O diferencial está no fato de que os estudantes é quem construirão parte do seu currículo escolar, através da escolha da eletiva que fará parte da sua grade de horários.

As Eletivas são importantes porque possibilitam o aprofundamento de temas de interesse do público escolar ao fornecer mais tempo para o desenvolvimento de atividades voltadas para essa prática, que é de um total de duas horas-aula semanais (ou pelo menos, esta é a carga-horária vigente nas ETIs no município de Sobral, no Ceará). É fundamental, dessa forma, que as eletivas sejam atraentes e façam sentido para os estudantes. Além de fazer com que eles entendam que a escola não limita seu conhecimento, mas sim lhe faz aprender sobre áreas diversas de conhecimento, que de fato são interessantes para eles (Instituto de Corresponsabilidade pela Educação, 2020).

Para o planejamento de uma eletiva, é fundamental que o professor dedique um tempo para conhecer seu público-alvo e para planejar a execução das atividades da disciplina. Ao estruturar um novo componente curricular, o professor deve detalhar o seguinte:

I. título (que deve ser atraente e despertar o interesse);
II. turmas envolvidas (que, normalmente, vêm em duplas);
III. componentes curriculares (buscando a interdisciplinaridade);
IV. professores (podendo ser mais do que apenas um);
V. justificativa (a razão pela qual a Eletiva é proposta);
VI. objetivo (o que se pretende alcançar);
VII. conteúdos (o que se pretende aprender e ensinar);
VIII. metodologia (como se vai trabalhar);
IX. recursos didáticos (o que será necessário);
X. proposta para a culminância (o que será desenvolvido ao fim);
XI. avaliação (a forma como o professor avaliará seus estudantes); e
XII. referências bibliográficas;

Para a divulgação das eletivas, deve haver um momento em que os professores construirão cartazes ou promoverão um momento de apresentação das disciplinas desenvolvidas por eles, o que é chamado de Feira das Eletivas. No pátio ou na quadra, cada professor constrói um painel (ou mesão temático) onde apresentará todas as características de sua eletiva proposta (com base no modelo do parágrafo anterior). Nessa ocasião, os estudantes assistirão às explanações dos professores e tomarão a decisão de qual disciplina eles querem cursar, podendo escolher até três prioridades. Caberá à gestão da escola a organização dos estudantes em cada eletiva (Instituto de Corresponsabilidade pela Educação, 2020).

Tais componentes curriculares não almejam a enturmação dos estudantes junto com colegas de mesma classe, mas sim a “mistura” de alunos de diferentes séries e faixas etárias. Por exemplo uma disciplina de Astronomia pode acolher estudantes do 6° ano até o 9° ano do

Ensino Fundamental em uma mesma sala de aula, o que estimula a troca de experiências e individualidades entre os estudantes, aprimorando o seu potencial de socialização (Instituto de Corresponsabilidade pela Educação, 2020). Porém, a critério da escola, também é possível separar em dois grupos: eletivas que apenas abarcarão estudantes do 6° e do 7° anos e disciplinas que receberão os estudantes do 8° e 9° anos, como normalmente é trabalhado nas ETIs do município de Sobral.

Por fim, ao final da eletiva, deve haver uma data prevista no calendário escolar para a realização da *Culminância*, um momento que objetiva mostrar ao público o que foi construído durante as aulas da disciplina. É crucial a participação de toda a comunidade escolar, de forma que até mesmo os pais dos estudantes podem ser convidados para prestigiar o momento. Na quadra ou no pátio, os alunos da escola reúnem-se para compartilhar o que foi desenvolvido no decorrer da eletiva: podem ser esculturas, desenhos, jogos, maquetes, fotografias, artes em geral, dentre outros produtos (Instituto de Corresponsabilidade pela Educação, 2020). O dia da Culminância pode, para exemplificar, coincidir com a data da festa junina da escola quando certamente haverá a massiva presença da comunidade escolar.

Em relação à disciplina proposta por este trabalho, em que os estudantes "colocarão a mão na massa" na construção de jogos que envolvam o ensino e a aprendizagem de análise combinatória e probabilidade, acredita-se que se desenvolverão neles várias habilidades como o Esforço, o Autodidatismo, a Capacidade de Iniciativa, a Capacidade de Planejamento, o Desenvolvimento de Estratégias, dentre outros. Uma possibilidade para a aplicação da disciplina aqui proposta é criar estudantes que, ao chegarem no Ensino Médio, não terão a aversão aos conteúdos de análise combinatória e probabilidade que é tão comum tanto aos estudantes quanto aos professores.

4.3 A visão de quem tem experiência

Objetivando trazer para este texto experiências reais de quem já trabalhou em ETIs que ofertam disciplinas eletivas, foram realizados questionários tanto com gestores educacionais, quanto com professores e estudantes que já vivenciaram tais componentes curriculares. Esta seção trará as principais contribuições destes personagens em relação às suas experiências com disciplinas eletivas.

Em relação aos gestores escolares, foram aplicados dois questionários de forma *online* com dois diretores de ETIs que ofertam disciplinas eletivas. Para estes diretores, as perguntas realizadas foram as constantes no Quadro 6.

Quadro 7 – Lista de questionamentos feitos para os diretores entrevistados

Número Sequencial	Questionamento
01	A partir de que momento do começo do ano letivo você considera adequado o planejamento das disciplinas Eletivas?
02	Quais critérios são considerados na definição das temáticas e professores responsáveis pelas Eletivas?
03	De que maneira acontece o processo das escolhas que os alunos fazem sobre as Eletivas?
04	Quais habilidades e competências você acredita que os alunos desenvolvem ao participar dessas disciplinas?
05	Qual o papel da gestão escolar no apoio para professores e alunos, objetivando o pleno desenvolvimento das disciplinas Eletivas?
06	Você percebe alguma diferença no comportamento ou desempenho dos alunos durante as Eletivas em comparação com as disciplinas regulares?
07	No momento da escolha e planejamento das Eletivas por parte dos professores, as opiniões e os interesses dos estudantes são ouvidos?
08	Você considera viável e interessante uma eletiva voltada à criação de jogos matemáticos com foco em combinatória e probabilidade? Por quê?

Fonte: elaborado pelo autor.

Neste texto, os diretores serão chamados de A e B, visto que suas identidades não serão reveladas. Abaixo estão as respostas dos diretores para o questionamento 01.

A: "Logo no início do ano, na semana pedagógica, para que os professores envolvidos possam construir os projetos, pois as mesmas devem iniciar junto com o calendário normal das aulas."

B: "Para a criação e desenvolvimento das eletivas, é necessário que o professor já comece a planejar e criar sua ementa no início do ano letivo, no período de Jornada Pedagógica, pois como se trata de uma disciplina, é importante que os estudantes já tenham acesso ao feirão e escolhas no primeiro mês de aula"

Pode-se perceber que há uma concordância em suas respostas: ambos acreditam que o planejamento da eletiva deve acontecer no início do ano letivo, mais precisamente durante a semana (ou jornada) pedagógica, que se configura como um período que acontece normalmente em janeiro em que a gestão pedagógica e os professores se reúnem para traçar objetivos e metas para o ano letivo corrente. Acredita-se que essa é a ação correta, visto que um professor que pretende aplicar uma eletiva precisa antecipar-se em seu planejamento, para elaborar a apresentação para a Feira das Eletivas, o cronograma, as aulas, as avaliações e quaisquer outros aspectos do seu novo componente curricular. Para a pergunta 02, as respostas foram as seguintes:

A: "Pra professor, não existe critério, todo professor pode ofertar uma eletiva, desde que assim *tenha interesse.”*

B: “Por se tratar de uma disciplina que está fora da base comum curricular, a definição das temáticas vai de acordo com a disciplina ministrada pelo professor associada a uma pratica utilizada fora do ambiente escolar, trazendo um mix de estudos e uma definição de sentido ao que é estudado nas aulas. A escolha de professores é pautada na quantidade de aulas que o docente possui e na quantidade de turmas existentes na escola.”

Percebe-se, pelas respostas dos diretores, que há escolas que tomam como ponto de partida a iniciativa de professores que tiverem interesse em lecionar as disciplinas, como é o caso do diretor A. Há também escolas que direcionam as disciplinas eletivas para professores através de uma análise logística de quantidades de aulas de cada professor, bem como a quantidade de turmas existentes na escola, como é o caso da escola do diretor B.

Para a questão 03, que buscou investigar de que maneira acontece o processo das escolhas que os alunos fazem sobre as eletivas, ambos diretores relataram a mesma experiência: acontece o *Feirão das Eletivas*, onde professores constroem painéis que objetivam apresentar sua disciplina para os estudantes, que escolherão três Eletivas de sua prioridade. Após o processo de escolha dos alunos, a gestão pedagógica incube-se de realizar a distribuição de estudantes por disciplina. Percebe-se que a atitude das escolas está de acordo com os ideais propostos pela Escola da Escolha.

Já para o questionamento 04, que tentou levantar informações sobre quais habilidades e competências são desenvolvidas nos estudantes, destaca-se que, para o diretor A, as habilidades desenvolvidas são: senso crítico de escolhas e competências de formação pessoal como higiene, prevenção de doenças, gravidez, características físicas e motoras, e habilidades cognitivas de várias disciplinas. O diretor B destacou a autonomia, o protagonismo, a independência e a liderança. Em relação à questão de número 05, tem-se as seguintes respostas:

A: “O apoio da gestão vem desde o primeiro planejamento, passando pela disponibilização de recursos para realização das mesmas [as disciplinas Eletivas] *e acompanhando de forma individual a participação dos alunos, garantindo uma frequência e participação de forma satisfatória e propícia a aprendizagem.”*

B: “A gestão escolar deve atribuir importância ao que é proposto nas eletivas, checar se o que foi desenvolvido em ementa está sendo executado e oferecer suporte de materiais e espaços, além de facilitar e viabilizar aulas de campo e produção de materiais.”

As respostas acima são referentes ao questionamento sobre a ação da gestão escolar no apoio a professores e alunos nas disciplinas. Através da análise, é possível também ver uma concordância: ambos diretores mencionaram apoio na disponibilização de recursos e materiais;

mas também falam sobre um auxílio no processo de planejamento (diretor A) e suporte na viabilização de aulas de campo (diretor B).

A questão 06 tentou coletar informações sobre uma possível diferença no comportamento ou no desempenho dos estudantes durante as Eletivas, em comparação com as disciplinas regulares. O diretor A atrelou uma melhor participação dos estudantes ao fato de que a disciplina eletiva foi escolhida por eles, logo, por terem mais interesse naquela temática, eles têm maior atenção às aulas. O diretor B, em sua resposta, mencionou que, pelo fato de as turmas serem formadas de acordo com a escolha e não de acordo com as séries, há uma mudança de interação entre estudantes de diferentes séries.

A sétima pergunta buscou investigar se no momento da escolha e planejamento das eletivas por parte dos professores, as opiniões e os interesses dos estudantes são ouvidos. O diretor A declarou positivamente, visto que ao final do período da disciplina, todos respondem uma avaliação em que há questionamentos sobre as metodologias aplicadas pelo professor, conteúdos disponibilizados, aprimoramentos e sugestões para próximos anos. O diretor B deixou claro que as disciplinas são elaboradas com base no público da escola e no perfil que os estudantes apresentam. O último questionamento visava a opinião dos diretores especificamente sobre o programa disciplina criado nesse trabalho, no qual as respostas foram:

A: "Sim, além de contribuir diretamente para a aprendizagem matemática, fortalece na formação individual."

B: "Sim, pois o estudo teórico alinhado as práticas de jogos, fazem com que os alunos aprendam mais rápido e exercitem na prática o que é proposto em sala."

Percebe-se, portanto, que ambos diretores concordam e apoiam a idealização de uma disciplina eletiva que visa o ensino e a aprendizagem de análise combinatória e probabilidade através da criação de um laboratório com ênfase em jogos.

Além da entrevista com os dois diretores, conforme discutido anteriormente, também foi realizado o questionário com dois professores de matemática que já ministraram disciplinas eletivas. O objetivo da entrevista é entender todo o processo de planejamento, montagem, escolha, avaliação e culminância das eletivas. O questionário aplicado foi o apresentado no Quadro 7, que também tem alguns questionamentos similares aos da entrevista com os diretores.

Quadro 8 – Lista de questionamentos feitos para os professores entrevistados

Número Sequencial	Questionamento
01	Qual foi a temática da eletiva que você ministrou e como ela foi estruturada? Se já tiver ministrado mais do que uma, você pode escolher falar sobre apenas uma delas.

02	Como os alunos reagiram à proposta da eletiva? Eles se mostraram interessados e engajados?
03	Você percebeu alguma mudança significativa no comportamento, na participação ou na autoestima dos alunos durante a disciplina, em comparação com as disciplinas regulares?
04	Que tipos de habilidades ou competências os alunos mais desenvolveram ao longo da eletiva?
05	Quais recursos e metodologias você utilizou ao longo das aulas?
06	Que desafios você enfrentou ao planejar e executar uma disciplina eletiva? Como lidou com eles?
07	De que maneira se deu o processo de avaliação dos estudantes durante o desenvolvimento da Eletiva?
08	Você acredita que uma eletiva voltada à criação de jogos matemáticos com ênfase em análise combinatória e probabilidade poderia ser bem recebida pelos alunos? Que sugestões daria para seu sucesso?

Fonte: elaborado pelo autor.

Nas análises das suas respostas, os professores serão identificados como C e D, visto que não será revelada suas identidades. O questionamento 1 buscou identificar de maneira simples qual foi a temática da eletiva trabalhada por esses professores. De maneira resumida, suas respostas foram as seguintes:

C: "A temática escolhida foi Astronomia. Foi estruturada numa sequência didática que abordava inicialmente conceitos básicos sobre astronomia seguido de um aprofundamento sobre o estudo da luz e composição dos astros e finalizando com uma mostra de experimentos desenvolvidos ao logo da eletiva com os alunos"

D: "A eletiva que ministrei 'Astronomia e Astrofísica: A Ciência do Universo' era voltada para o público de 8° e 9° ano e teve a participação de 28 alunos. As aulas foram divididas em temas voltados para o ensino da Astronomia e Cosmologia, conceitos básicos e os tipos de astros, e para o ensino de Astrofísica com ênfase na participação da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Olimpíada Brasileira de Foguetes. O objetivo principal da eletiva foi promover a alfabetização científica para aprendizagem significativa sobre a terra e o universo afim do aluno fazer conexões do conhecimento científico e o mundo ao seu redor"

Percebe-se, pelas respostas, que apesar de os entrevistados serem professores de matemática da rede pública de ensino da cidade de Sobral, ambos trabalharam temáticas geralmente não abordadas na matemática: a astronomia. O professor C voltou sua atenção, no decorrer da disciplina, para a montagem de experimentos relacionados à temática. Por sua vez, o professor D preferiu voltar as aulas para uma abordagem teórica com ênfase na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica, objetivando a alfabetização científica.

A atitude de abranger outras áreas no desenvolvimento de uma disciplina Eletiva vai totalmente de acordo com o que preconiza as Metodologias do Êxito, ou seja, fica claro que na prática até mesmo os professores de matemática sentem-se a vontade para abordar e aprofundar, em suas disciplinas eletivas, temáticas diferentes da matemática.

O segundo questionamento tentou entender qual foi a reação dos estudantes para com a disciplina eletiva. Destaca-se a resposta do professor D, que foi a seguinte:

D: "Os alunos demonstraram muito interesse em participar, antes mesmo da feira de apresentação e inscrições, alguns alunos já comentavam que iriam participar porque acham interessante estudar astronomia."

É perceptível, na resposta, que os estudantes demonstram interesse quando sabem que irão trabalhar temas que são diferentes do que eles estão habituados. Astronomia é, conhecidamente, uma temática inicial das Ciências que desperta bastante interesse, o que faz com que os estudantes se sintam motivados. No terceiro questionamento, buscou-se entender se há alguma mudança no comportamento dos estudantes, quando se compara com as disciplinas regulares da escola. Os professores disseram:

C: "Os alunos são mais participativos e curiosos quando estão engajados em algo que lhes interessa e que por eles foi selecionado."

D: "Sim, os alunos eram muito engajados e gostavam de interagir muito durante as aulas, alguns alunos que também são meus alunos na disciplina matemática, tinham uma participação diferente quando era aula da Eletiva. Nas confecções e lançamentos dos foguetes muitos alunos que interagiam pouco durante as aulas, se mostraram muito participativos e interessados em entender como tudo funcionava e animados para lançarem os foguetes."

Ambas falas dos professores têm concordância: os alunos agem de forma diferente nas disciplinas eletivas. O professor D ainda destacou a aula sobre a montagem de foguetes a serem lançados, e afirmou que há estudantes que, nas aulas de matemática, não demonstram tanto interesse, mas que na montagem de foguetes eles foram mais participativos. Isso deixa claro que há estudantes que possuem diferentes perfis de aprendizagem, e que disciplinas com abordagens diversas serão muito vantajosas para seu aprendizado.

Para a quarta pergunta, que tentou descobrir quais são as habilidades e competências que os professores acreditam que os alunos constroem ao cursar a sua disciplina eletiva, os professores destacaram o senso crítico para discussões, trabalho em equipe, autonomia, liderança, abertura a novos conhecimentos, comunicação, pensamento criativo e até mesmo habilidades e competências já citadas na BNCC como essenciais.

Na quinta pergunta, questionou-se quais foram as metodologias usadas para o desenvolvimento da disciplina eletiva. As respostas foram as seguintes:

C: "Foram utilizados experimentos de baixo custos com materiais acessíveis, além das aulas serem apresentadas com slides e animações didáticas."

D: "Recursos digitais: plataformas online e jogos educativos, Materiais audiovisuais: Filmes, vídeos, documentários; materiais para construção de maquetes."

Ao verificar as respostas da quinta pergunta, percebe-se que ambos professores não se detiveram a aulas expositivas, de maneira que se debruçaram sobre diferentes recursos de aprendizagem, como animações, plataformas online, filmes, materiais de baixo custo para a construção de experimentos, dentre outros.

A sexta pergunta buscou investigar quais são os desafios enfrentados ao planejar e executar a disciplina, a qual as respostas se seguem:

C: "O desafio foi a adaptação de uma linguagem mais avançada para o público alvo. Através da busca por materiais e estudo sobre as formas de aprendizagem, foi possível superar"

D: "O primeiro desafio é organizar os alunos de diferentes séries e salas em uma turma nova, eles se adaptarem, se conhecerem e interagirem entre si e durante as aulas. Outro desafio é a necessidade de recursos digitais: Datashow, caixa de som, internet em sala, que são necessários em quase todas as aulas, então toda semana era necessário ter esses materiais. Tempo para planejamento era outro fator, pois o dia de planejamento já era reservado para as aulas regulares (planos de aula, listas de exercícios, diários)."

Percebe-se uma grande diferença entre as respostas. O professor C destacou como desafio a dificuldade de conseguir adaptar uma linguagem mais avançada (referindo-se ao conteúdo de astronomia) e técnica para uma linguagem que pudesse ser entendida pelo seu público. Tal dificuldade faz sentido até mesmo na disciplina eletiva que este trabalho pretende propor, visto que métodos de contagem não são normalmente integrados no currículo do ensino fundamental, necessitando, portanto, de uma adaptação no tratamento da linguagem.

Já o professor D destacou, *a priori*, um desafio inicial de adaptação dos estudantes a uma nova classe, onde terão contato com estudantes de outras séries. Além disso, destacou a dificuldade de se conseguir recursos digitais, bem como a quantidade de tempo disponível para planejar as atividades da eletiva, que afirmou ser insuficiente, visto que boa parte do tempo se destina para tarefas burocráticas.

Para o penúltimo questionamento, a pergunta tentou descobrir de que maneira os professores avaliaram seus alunos na disciplina eletiva. As respostas foram as seguintes:

C: "A avaliação se deu ao longo de todo o processo de ministração da disciplina, através das observações em sala, das discussões em grupo, dos questionários explorados em cada encontro e também através de uma avaliação na parte final da eletiva."
D: "Participação nas aulas, atividades (quiz) feitas em sala de aula e apresentação na culminância das eletivas."

Ambos professores afirmaram avaliar seus estudantes através da observação da participação dos alunos, o que se entende como correto para as Metodologias do Êxito. A diferença entre as respostas está no fato de o professor C ter aplicado uma avaliação final da eletiva (que se supõe que seja uma prova) e o professor D ter aplicado *quizzes* e ter avaliado a apresentação da Culminância.

Por fim, para o último questionamento, as respostas foram as seguintes:
C: "Acredito piamente. Os alunos gostam sempre de estarem vendo algo diferente, seja um material, um experimento ou até mesmo uma explicação. Ter um bom relacionamento com os alunos uma busca aprofundada de recursos irá facilitar o desenvolvimento e participação e no engajamento das atividades."
D: "Sim, jogos são sempre bem avaliados pelos alunos, principalmente se for utilizado tecnologias ou materiais cotidianos que eles conheçam e se interessem."

A pergunta para as respostas acima foi para tentar identificar se os professores acreditam que uma disciplina que ensina Análise Combinatória e Probabilidade através da construção de jogos pedagógicos que auxiliem no processo de aprendizado desses conteúdos seria vantajosa e bem recebida pelos estudantes. Ambos professores acreditam que sim. Enquanto que o professor C atrelou sua resposta ao interesse dos estudantes em ver algo novo, seja um material, experimento ou explicação, o professor D afirmou que jogos são sempre bem avaliados pelos alunos.

É importante deixar claro que a pesquisa conduzida e detalhada acima foi composta por simples aplicação de questionário que buscou coletar a visão de poucos indivíduos que fazem parte de escolas que têm disciplinas eletivas em sua grade curricular. Fazem-se necessárias, portanto, pesquisas mais aprofundadas e aplicadas em larga escala, para que se tenham resultados mais precisos sobre o desempenho de disciplinas eletivas.

5 PROPOSTA: LEMA, COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

5.1 Orientações básicas para a introdução de um LEMA

Antes de apresentar o desenrolar da disciplina eletiva, é importante apresentar para o professor um pequeno conjunto de dicas e orientações que ele próprio tem que estar atento e que, também, deve apresentar para seus alunos nas aulas iniciais ou até mesmo no Feirão das Eletivas, momento em que os estudantes farão a escolha de sua disciplina. São exemplos de atitudes que serão mais importantes ainda se o professor irá aplicar uma eletiva pela primeira vez. Cada parágrafo conterá uma pauta que é desenvolvida no próprio texto.

Explique aos estudantes que se trata de uma disciplina transversal. Na verdade, é necessário até mesmo que o professor explique aos alunos o que de fato é uma eletiva, caso seja a primeira vez que seus alunos estudarão em uma. Explique-os que não é obrigatória e que ela é fruto da escolha deles mesmos. Porém, mesmo não sendo uma disciplina obrigatória, ela deve ser tratada com respeito e importância.

Priorize o protagonismo dos estudantes na construção dos jogos. Essa fala se repetirá várias vezes no decorrer deste capítulo. O objetivo de inserir os estudantes na construção de um LEMA é que eles sejam protagonistas de sua aprendizagem, ou seja, eles participem ativamente do processo de construção do conhecimento. Assim, o professor não pode se inserir como o detentor único do conhecimento, e deve considerar todas as opiniões de seus alunos.

Não tome o programa disciplinar como único e inabalável. O programa apresentado na próxima seção é, antes de tudo, uma sugestão. Caso o professor pretenda aplicá-lo do começo ao fim, seguindo fielmente todas as etapas, ele será encorajado a isso. Entretanto, é importante saber que o professor pode adaptar todos os jogos à sua realidade e às ideias propostas pelos alunos. E até mesmo é encorajado a levar em consideração os jogos já conhecidos pelos alunos.

Realize perguntas estratégicas durante as aulas para promover reflexões. Isso quer dizer que o professor não deve dar respostas. Ele deve fazer questionamentos que provoquem pensamentos, novas ideias, reflexões, mudanças de ideias, dentre outros pensamentos, em concordância com as considerações de Lorenzato (2012). Lembre-se de que os estudantes devem *construir* o conhecimento. E ele não irá construir o conhecimento se as perguntas não forem estrategicamente pensadas e estruturadas de maneira a fazê-los pensar e criar estratégias cada vez mais.

Adapte o andamento das aulas conforme o ritmo da turma e o interesse dos alunos. Essa regra é uma continuação da anterior: o programa não é rígido. É importante que o professor entenda que ele pode adaptar da maneira que achar melhor, e isso inclui até mesmo tomar 4 aulas para a construção de um único jogo, se achar coerente.

Favoreça a interdisciplinaridade sempre que possível. Caso o professor já esteja aplicando a eletiva com um colega de outra área, a interdisciplinaridade aparecerá naturalmente. Entretanto, é importante saber que as Metodologias do Êxito preconizam o contato entre diferentes áreas do conhecimento. Assim como o leitor verá, as atividades propostas por este trabalho têm grande relação com disciplinas como Artes e Educação Física, por exemplo, mas nada impede o professor de criar relação com outras áreas do conhecimento.

Estimule a criatividade dos estudantes na confecção de materiais (cartas, tabuleiros, dados, etc.). É nesse contexto que o professor de Artes será de grande ajuda. Entretanto, é claro que os alunos também apresentarão boas ideias, que devem sempre ser consideradas e postas em prática pelo professor.

Planeje momentos de aprofundamento e problematização após a prática dos jogos. O professor deve lembrar que os jogos como recursos para o ensino de matemática não funcionam se a abordagem for "jogar por jogar". É importante que o jogo seja usado como material pedagógico, ou seja, para o aprendizado, e que, após a aplicação do jogo, o professor de fato verifique se o aprendizado aconteceu, especialmente através de aulas com aprofundamento e aplicação de problemas desafiadores sobre o conteúdo. A prática de aprofundamento e problematização são, também, apoiadas por Teixeira (2021).

Promova um ambiente acolhedor, que valorize o erro como parte do processo de aprendizagem. Os estudantes não podem, em hipótese alguma sentir-se desencorajados por alguma atitude ou fala do professor. O docente tem que ser o mediador, um auxiliar, alguém com quem o aluno pode contar para lhe ajudar a construir o conhecimento, retirar dúvidas, dentre outras situações.

Garanta tempo suficiente para montagem, teste e ajustes dos jogos. Assim como já dito anteriormente, caso o professor precise de mais semanas para a construção de um jogo, essas semanas devem ser usadas.

Registre os principais momentos e armazene com segurança os produtos da eletiva para uso na Culminância. A Culminância é um momento muito importante. É quando os estudantes exporão para toda a comunidade escolar tudo o que construíram durante seis meses. É crucial que o que foi feito pelos estudantes seja registrado (através de fotos ou relatórios) e armazenado (de forma segura) para que, na Culminância, essas informações sejam expostas.

Estimule a elaboração de explicações matemáticas sobre os jogos criados. Muito além de explicações matemáticas, o professor pode estimular os seus alunos a criação da manuais de utilização. Espera-se que, após a finalização da eletiva, os jogos criados fiquem guardados na escola a disposição do uso por parte dos professores e a alunos futuros. Com a criação de um manual de regras e explicações matemáticas sobre os jogos, os estudantes facilitarão o uso de qualquer estudante ou professor que tiver contato com o material.

Incentive os alunos a aplicarem os jogos em outras turmas ou com colegas. Isso é algo que já acontecerá na Culminância e no Jogo dos Discos (como será discutido na seção seguinte). Porém, o professor pode incentivar a socialização com outras turmas desde o primeiro jogo. Acredita-se que é um ponto positivo.

Planeje com antecedência a culminância. Assim como o leitor verá no programa disciplinas na próxima seção, a Culminância deve ser planejada com no mínimo 1 semana de antecedência. O professor deve designar alunos para diferentes tarefas voltadas a uma organizada Culminância.

Acredita-se que, se o professor levar em consideração e pôr em prática todas essas dicas, sua eletiva será aplicada com o devido sucesso e com a confirmação do principal objetivo: a aprendizagem dos estudantes.

5.2 Programa disciplinar

Nesta seção, será apresentada uma síntese do produto educacional proposto por este trabalho: um programa semestral de uma disciplina eletiva aplicável no ensino fundamental, que envolverá a criação de um LEMA com ênfase em jogos que abordem a análise combinatória e a probabilidade. O produto educacional (Apêndice A) conterá uma sugestão de plano de aula para cada encontro do professor com os estudantes pertencentes à eletiva. No decorrer do texto, o produto educacional também receberá os nomes de cronograma e calendário.

Para a organização de um calendário de eletiva, estima-se que, normalmente, as escolas iniciam suas atividades de um ano letivo no início do mês de fevereiro e encerram o primeiro semestre letivo ao final do mês de junho, o que resulta em 20 semanas de aulas efetivas, podendo ter flutuações de algumas semanas para mais ou para menos, considerando-se feriados e atividades escolares. Seguindo esta lógica, o segundo semestre letivo se inicia em agosto, devendo encerrar em meados do mês de dezembro. Uma simples contagem permite verificar que ambos semestres possuem, nas escolas públicas da cidade de Sobral, onde a pesquisa é realizada, uma quantidade de semanas aproximadamente igual.

A experiência coletiva evidencia que as disciplinas Eletivas não iniciam juntamente com o semestre letivo, devido às atividades de acolhimento e preparação das escolas, planejamento das eletivas e processo de escolha por parte dos alunos. Além disso, ao final dessas disciplinas, é necessário que ocorra a Culminância, o que tomará pelo menos um dia letivo de aula. Dessa maneira, a disciplina criada neste trabalho terá a duração de 16 semanas, compostas por duas aulas de 50 minutos cada uma, totalizando uma hora e 40 minutos semanais.

O programa da eletiva será subdividido em 16 partes, cada uma delas referente ao plano de ação da aula correspondente. Cada plano de aula será preenchido com as partes fundamentais de um plano, que são apresentadas por Oliveira (2011) como identificação, objetivos, conteúdo, procedimentos metodológicos, recursos, atividades docentes e discentes, avaliação, cronograma e referências básicas. Para uma leitura mais fluida e dinâmica, neste capítulo serão apresentadas somente as partes da identificação, objetivos e conteúdo de cada plano de aula, de forma que o programa completo estará disponível no Apêndice A. O Quadro 8 apresenta, inicialmente, o plano de aula da semana 1.

Quadro 9 – Plano de aula da semana 1

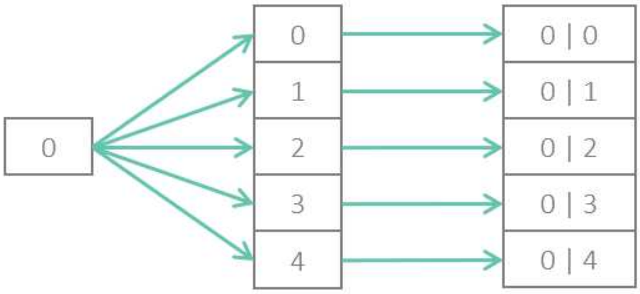
Identificação	**Disciplina:** Eletiva Jogos Matemáticos Combinatórios e Probabilísticos **Aula 1:** Introdução à disciplina. Explorando o dominó.
Objetivos	Apresentar aos estudantes as motivações da disciplina, bem como o cronograma geral; Introduzir o jogo dominó e suas possíveis variações; Realizar explicações iniciais sobre as variações do dominó e iniciar a montagem.
Conteúdo	Introdução ao conceito de contagem.

Fonte: elaborado pelo autor.

A aula da semana 1 é composta por adequações ao conhecido jogo dominó (amplamente comercializado e utilizado) que foram propostas por Teixeira (2021). Acredita-se que, ao iniciar a disciplina utilizando jogos com que os estudantes já têm familiaridade, o interesse e a disposição desses serão potencializados. O motivo da escolha desse Jogo vem do fato de que, com a adequação, os estudantes terão um primeiro contato com um método de contagem simples, visto que desenvolverão diagramas para contar quantas são as peças necessárias para a criação de um dominó diferente.

A Figura 3 mostra um exemplo de esquema que pode ser construído pelos alunos. Nesse exemplo, os alunos devem montar todas as peças que contém o zero do dominó de 4, uma adequação do dominó convencional com peças que só vão até o número 4. Esse esquema ajuda no processo de visualização de problemas matemáticos que, inicialmente, podem parecer complexos para os estudantes, mas que, no decorrer da esquematização, pode se tornar cada vez mais fácil. Outros tipos de dominós também serão montados pelos alunos (até o dominó de 8).

Figura 3 – Exemplo de esquema para a construção de peças de dominó



Fonte: elaborado pelo autor.

Após a montagem dos dominós, os estudantes o jogarão, dando significado ao seu processo criativo e encorajando o interesse pela matemática.

Em sua continuidade, a semana 2 também deve versar sobre o dominó, apresentado na semana 1. Entretanto, este segundo encontro trará possibilidades de imersão e aprofundamento sobre o que o jogo pode trazer. Dessa forma, propõe-se que o professor, em sua segunda aula, explore as diversas possibilidades desse "novo" dominó, bem como permita que os estudantes criem estratégias próprias para jogá-lo e também apresente problemas escritos, que estimularão o pensamento combinatório dos estudantes, especialmente através da criação de árvores de possibilidades.

Quadro 10 – Plano de aula da semana 3

Identificação	**Disciplina:** Eletiva Jogos Matemáticos Combinatórios e Probabilísticos **Aula 3:** O desenvolvimento do Princípio Multiplicativo através do "Jogo das Bandeiras"
Objetivos	Desenvolver os conceitos iniciais do Princípio Multiplicativo através da construção de bandeiras com quantidades de listras e de cores previamente determinadas; Aprimorar o raciocínio lógico e a memorização dos estudantes através da jogabilidade Desafiante e Desafiado.
Conteúdo	Princípio Multiplicativo

Fonte: elaborado pelo autor.

Na aula da semana 3, os estudantes da eletiva serão inseridos no aqui intitulado Jogo das Bandeiras, também apresentado inicialmente por Teixeira (2021) e adaptado pelo autor deste trabalho. Neste jogo, os estudantes farão parte da montagem através da construção de bandeiras simples, contendo X listras, que serão pintadas por Y cores diferentes. Por exemplo, um grupo de estudantes pode ficar responsável por construir bandeiras com 3 listras pintando-as com 2 cores, totalizando $2^3 = 8$ bandeiras diferentes.

Após a construção dos diferentes grupos de bandeiras, eles serão destinados ao jogo propriamente dito: um aluno será o *Desafiante* e outro será o *Desafiado*. O objetivo do *Desafiado* é acertar qual foi a bandeira escolhida pelo *Desafiante*. Mais detalhes e regras do Jogo das Bandeiras estão no Apêndice A.

Para exemplificar, a Figura 4 apresenta um conjunto de bandeiras que pode ser utilizado pelo professor como uma atividade para seus alunos, supondo que seja pedido que eles construam todas as bandeiras possíveis contendo 2 listras e 3 cores (laranja, azul e verde). Como há 3 possibilidades de escolha para a primeira cor e 3 possibilidades de escolha para a segunda cor, percebe-se que são possíveis 9 bandeiras diferentes.

Figura 4 – Exemplos de bandeiras no Jogo das Bandeiras

Fonte: elaborado pelo autor.

A expectativa é que os alunos percebam a existência do princípio multiplicativo através da construção das bandeiras. O professor, neste contexto, será o mediador do processo de construção do conhecimento dos estudantes, fazendo perguntas estratégicas para os alunos, objetivando, ao final, que eles conjecturem que a quantidade total de bandeiras possíveis de serem construídas é igual a Y^X, uma aplicação direta do princípio multiplicativo, conceito fundamental para o pleno entendimento da análise combinatória.

Novamente, a aula seguinte à apresentação e à montagem do Jogo das Bandeiras será um momento de exploração, aprofundamento e problematização sobre o Jogo, quando o professor explorará todas as possibilidades. O plano de aula da semana 4 está disponível por completo no Apêndice A.

Quadro 11 – Plano de aula da semana 5

Identificação	**Disciplina:** Eletiva Jogos Matemáticos Combinatórios e Probabilísticos **Aula 5:** Princípio Multiplicativo, Permutação e Arranjo no “Descubra a Senha”
Objetivos	Aprofundar e exercitar o que foi aprendido sobre o princípio

	multiplicativo através da construção e da prática do Jogo "Descubra a Senha"; Desenvolver uma ideia inicial sobre a Permutação e o Arranjo; Conjecturar as fórmulas para os cálculos de Permutação e Arranjo.
Conteúdo	Princípio Multiplicativo, Permutação e Arranjo

Fonte: elaborado pelo autor.

Já na semana 05 de aula da eletiva, os estudantes terão um vislumbre sobre os conceitos de Permutação e Arranjo, mas também serão aprofundadas as estratégias do princípio fundamental da contagem (também chamado de princípio multiplicativo). Nessa semana será apresentado aos estudantes o jogo Descubra a Senha, inspirado pelo jogo *Cara a Cara*. Nesse jogo de vários níveis de dificuldade, também teremos os personagens *Desafiante* e *Desafiado*, onde o *Desafiado* deve adivinhar qual foi a senha numérica escolhida pelo *Desafiante*, com a ajuda de perguntas estratégicas elaboradas por ele ou criadas anteriormente pelos alunos e professor e inseridas em *cards* de auxílio.

Os níveis de dificuldade estarão atrelados à quantidade de dígitos que a senha pode ter: 1, 2, 3 ou 4 dígitos (é claro que o jogo pode abarcar senhas com maiores quantidades de dígitos, porém essa quantidade pode ser tão grande que será impossível jogá-lo, algo que o professor deve questionar aos estudantes). Os alunos serão questionados pelo professor, no decorrer da montagem do jogo, quantas são as senhas possíveis de acordo com a quantidade de dígitos que ela possui, desenvolvendo o raciocínio combinatório. A diferença neste jogo será a inserção da possibilidade de não poder repetir números na senha, introduzindo o Arranjo, bem como um número limitado de dígitos para uma senha com a mesma quantidade de dígitos, introduzindo a Permutação.

O *Desafiado* fará perguntas do tipo *"A sua senha possui dígitos repetidos?"*, que, a depender da resposta, ele retirará as possíveis senhas que não se encaixam com a resposta dada pelo *Desafiante*. Após excluir todas as possibilidades que não vão de acordo com as respostas do *Desafiante*, o *Desafiado* vence o jogo. Caso não consiga adivinhar a senha após uma quantidade de rodadas predefinida, ele perde. Mais informações e regras estão dispostas no Apêndice A para apreciação do leitor. A semana seguinte, que será a aula 06 da eletiva, envolverá aprofundamento e possibilidades de diferentes abordagens desse jogo, bem como a aplicação de problemas escritos por parte do professor.

Para exemplificar, Figura 5 apresenta uma tabela de senhas de três dígitos construídas inicialmente pelos alunos utilizando os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9, sem repeti-los. Nesse exemplo, após algumas perguntas feitas pelo Desafiado, ele pôde descartar algumas senhas (na Figura, as senhas descartadas foram pintadas). Restam apenas as senhas 789 e 987 para que o Desafiado possa arriscar qual delas foi escolhida pelo Desafiante. Esse exemplo está mais bem explicado no Apêndice A.

Figura 5 – Exemplo de jogabilidade do "Descubra a Senha"

567	568	569	576	578	579	586	587	589	596	597	598
657	658	659	675	678	679	685	687	689	695	697	698
756	758	759	765	768	769	785	786	789	795	796	798
856	857	859	865	867	869	875	876	879	895	896	897
956	957	958	965	967	968	975	976	978	985	986	987

Fonte: elaborado pelo autor.

Acredita-se que os estudantes poderão, após a criação e o manejo do Jogo Adivinhe a Senha, perceber os padrões que se repetem quando se calcula a quantidade de senhas possíveis nos casos em que há Permutação e Arranjo, bem como o Princípio Multiplicativo, de forma que eles poderão chegar a calcular as possibilidades sem se ater a fórmulas e sem precisar montar todas as possíveis senhas. Dessa maneira, o ensino de Análise Combinatória será aprimorado, visto que os estudantes não terão um contato direto com fórmulas que normalmente são aplicadas sem contexto, demonstração ou explicações prévias, o que normalmente acontece quando o professor se atém às abordagens tradicionais do ensino de Análise Combinatória.

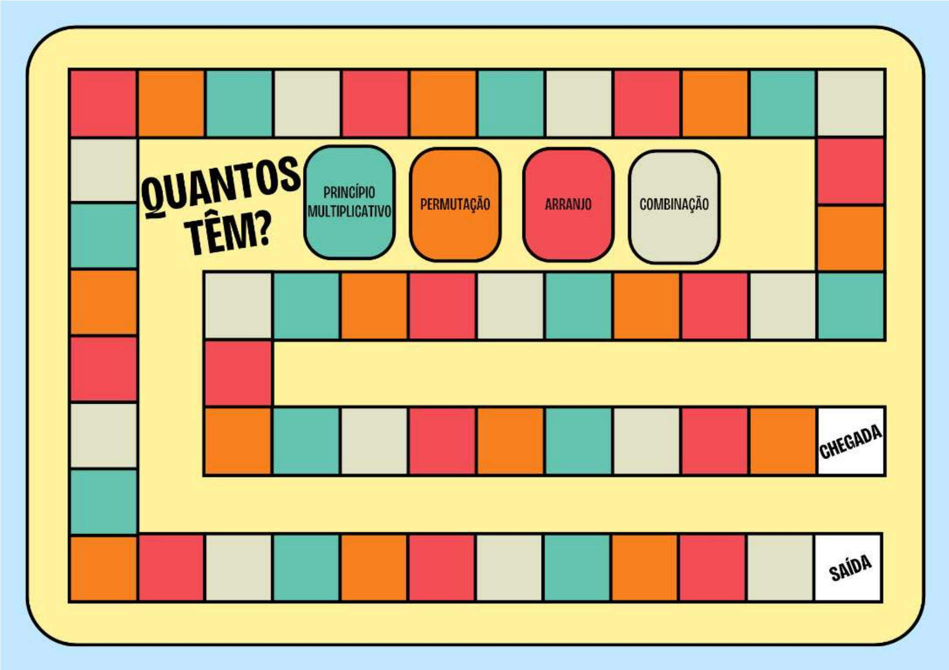
Quadro 12 – Plano de aula da semana 7

Identificação	**Disciplina:** Eletiva Jogos Matemáticos Combinatórios e Probabilísticos **Aula 7:** Métodos de Contagem no Jogo "Quantos têm?"
Objetivos	Aprimorar o desempenho dos estudantes no cálculo de Princípio Multiplicativo, Permutações e Arranjos; desenvolver uma visão inicial sobre a Combinação; exercitar cálculos simples de quantidades de Combinações; iniciar a montagem do jogo Quantos têm?
Conteúdo	Princípio Multiplicativo, Permutação, Arranjo e Combinação

Fonte: elaborado pelo autor.

Na semana 07 de aulas, os estudantes terão seu primeiro contato com um clássico Jogo de tabuleiro. "Quantos têm?" pode ser jogado por estudantes que jogam individualmente ou grupos maiores de pessoas, em que cada jogador ou grupo terá um pião que andará pela trilha do tabuleiro conforme os questionamentos forem sendo respondidos de forma correta. Trata-se de um simples jogo em que o jogador (ou grupo) da vez joga um dado e anda a quantidade de casas determinado pelo resultado do lançamento do dado (o interessante é que esse dado pode ser construído pelos alunos).

Figura 6 – Exemplo de tabuleiro para o Quantos têm?



Fonte: elaborado pelo autor.

Ao cair em uma determinada casa, um jogador lerá a carta da vez (que está organizada em um monte de cartas) e lerá em voz alta o questionamento. O desafio dos estudantes agora será responder perguntas do tipo *"Joana, Marcela, Raquel e Vanessa pretendem participar como goleiras de um jogo de futsal. Porém, só duas jogadoras podem ser escolhidas. Quantas duplas podem ser formadas com as quatro garotas?"*. Ao responder corretamente a quantidade de duplas, o jogador receberá a quantidade de pontos que caiu no dado que lançou anteriormente (ou a quantidade de pontos que a carta determinar). Porém, ele terá direito de adivinhar *qual o grupo* escolhido pela estudante que leu a carta. Se acertar o grupo escolhido, receberá um ponto a mais, além dos que já recebeu.

Ao final da partida, quando algum dos grupos chegar ao final da trilha do tabuleiro, será contabilizada a quantidade de pontos total e, depois de definir as regras do jogo juntamente com os alunos, o professor definirá a equipe vencedora. Nota-se que é um jogo de conhecimento matemático (aplicado no momento em que os estudantes respondem a quantidade de grupos formados) e de sorte (no momento em que tentam adivinhar qual é o grupo escolhido). Algo interessante que pode ser feito pelo professor é fazer questionamentos sobre a *Probabilidade de acerto* do grupo escolhido.

Novamente, é importante enfatizar que no processo de montagem do Jogo, os estudantes é que terão o papel principal, tanto na confecção do tabuleiro quanto na montagem dos piões, das cartas e possivelmente dos dados (que pode ter mais do que 6 lados). Ao praticarem o jogo, o professor pode encorajá-los a realizar a contagem de grupos diferentes utilizando uma *árvore de possibilidades.* Porém, no decorrer do jogo, o professor pode perguntar "é necessário montar a árvore de possibilidades, ou podemos fazer o cálculo de quantos grupos existem?", o que pode encorajar os estudantes a tentar conjecturar um método de resolução ou fórmula que os ajude a responder de forma mais rápida. O professor, se quiser, também pode inserir a variável *tempo de resposta.*

Há diversas maneiras de explorar e adaptar o Jogo "Quantos têm?". Por isso, destina-se a aula 08 da eletiva para essa finalidade. É provável que durante a aula 07, os estudantes ainda não consigam terminar a tempo a montagem de todas as partes do Jogo. Como esse Jogo apresenta uma complexidade maior, é possível destinar três semanas de aula para ele. Fica a critério do professor.

O leitor deve ter percebido que o tabuleiro sugerido na Figura 6 possui quatro espaços para os montes de princípio multiplicativo, permutação, arranjo e combinação. Não pretende-se atrelar aos estudantes tanta importância para essa divisão entre os métodos de contagem, porém, entende-se que, no ensino médio, provavelmente os alunos terão o contato com essa diferenciação, de forma que introduzir no ensino fundamental pode ser mais vantajoso para seu aprendizado futuro.

Quadro 13 – Plano de aula da semana 9

Identificação	**Disciplina:** Eletiva Jogos Matemáticos Combinatórios e Probabilísticos **Aula 9:** Probabilidade no Jogo "+Provável"
Objetivos	Desenvolver uma visão inicial sobre a Probabilidade, através da apresentação de problemas clássicos e simples; Exercitar cálculos simples de Probabilidade; Aprimorar o conhecimento sobre frações e comparação de frações, ao exercitar os cálculos de Probabilidade; Iniciar a montagem do jogo +Provável.
Conteúdo	Introdução à Probabilidade.

Fonte: elaborado pelo autor.

+Provável é um jogo de cartas baseado no comercializado jogo "Dobro" (Figura 7) que pode ser jogado por até cinco pessoas simultaneamente. Cada carta traz consigo um problema simples de probabilidade, em que o jogador deve estar atento para calcular o valor da carta, que é exatamente o mesmo valor da Probabilidade de acontecer o evento que está descrito nela. Por exemplo, se a carta apresentar o texto "no sorteio de um número de 1 a 100, a probabilidade de cair um número par", então esta carta tem valor $\frac{1}{2}$.

Figura 7 – Cartas do jogo Dobro.

Fonte: Bravo Jogos, 2025.

Cada jogador recebe seis cartas, e o restante das cartas fica no monte, em cima da mesa, virado para baixo. Para começar, escolhe-se aleatoriamente algum dos jogadores para colocar uma de suas cartas virada para cima na mesa. Sempre que descartar, o jogador deve tomar uma carta do monte, de modo a permanecer com as seis cartas. O próximo jogador deve, então, colocar na mesa uma carta cujo evento seja mais provável do que o evento do jogador anterior. Feito isso, passará a vez para o próximo, que deverá fazer o mesmo.

Quando chegar o momento em que um aluno não possui uma carta cujo evento é mais provável do que a carta da mesa, ele vai pegar todas as cartas da mesa e guardá-las. Em um certo momento, as cartas do monte acabarão e o jogo se encaminhará para o fim. Assim, o jogo continua até que todos os jogadores descartem todas as suas cartas, sempre pegando as cartas da mesa caso não tenha uma para jogar. A estratégia está no fato de que, para descartar o número máximo de cartas, deve-se começar por eventos *pouco prováveis*.

É importante trazer para a discussão que a confecção das cartas, bem como a elaboração dos problemas contidos nela devem ser feitos pelos estudantes. No Apêndice A, está disposto a quantidade de cartas que devem existir de cada valor, porém, obviamente o professor pode fazer adaptações juntamente com seus estudantes. Caso o professor queira aplicar as cartas já feitas, também é possível. Mas é interessante fazer com que os estudantes reflitam sobre os problemas de Probabilidade que eles mesmos devam criar.

É relevante mencionar que um conhecimento relacionado que irá ser desenvolvido pelos estudantes na prática desse Jogo é o de *frações*. Ao calcular Probabilidades, os estudantes devem realizar a simplificação dessas frações, objetivando torná-las irredutíveis, bem como a *comparação de frações*, o que acontecerá sempre que algum jogador descartar uma carta que deve ter valor *maior* do que a carta anterior.

Além disso, para que os estudantes não tenham o primeiro contato com a Probabilidade já na elaboração do Jogo, é importante que o professor desenvolva com eles uma aula introdutória expositiva apresentando o conceito básico de Probabilidade como a razão entre dois números, e traga exercícios simples que façam com que eles se familiarizem com os problemas desse conteúdo.

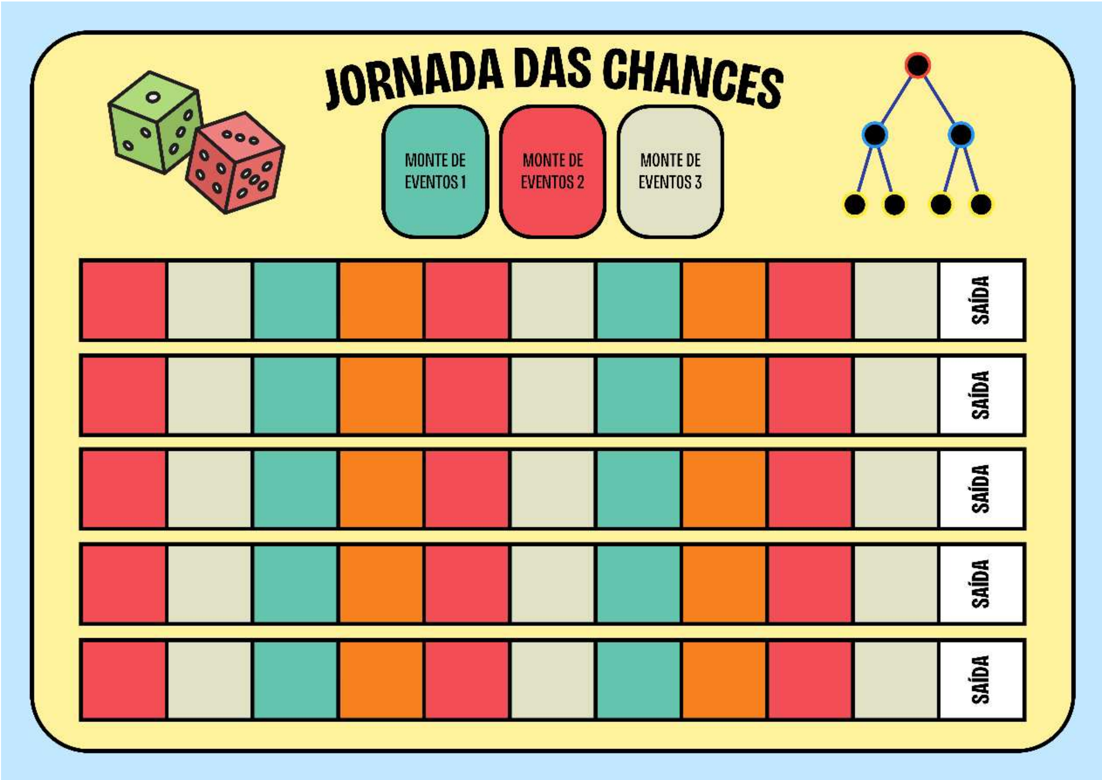
Quadro 14 – Plano de aula da semana 11

Identificação	**Disciplina:** Eletiva Jogos Matemáticos Combinatórios e Probabilísticos **Aula 9:** Experimentos aleatórios e Probabilidade no Jogo "Jornada das Chances"
Objetivos	Relembrar e aprofundar o conhecimento construído sobre Probabilidade; Exercitar cálculos simples de Probabilidade; Construir experimentos simples e clássicos de cálculo de Probabilidade; Construir o tabuleiro e as cartas do jogo Jornada das Chances.
Conteúdo	Introdução à Probabilidade.

Fonte: elaborado pelo autor.

Na semana 11, os estudantes terão contato com um Jogo em que terão que, de fato, *realizar experimentos* de problemas de Probabilidade. "Jornada das Chances" é composto por um tabuleiro contendo cinco (ou qualquer outra quantidade maior do que um, com base na realidade da turma) trilhas diferentes, com dez casas cada uma. No tabuleiro, haverá três montes com suas cartas viradas para cima. Cada uma das cartas conterá um experimento aleatório que *deve* ser realizado dentro de sala de aula. Há inúmeros exemplos: lançamento de dados de diferentes quantidades de lados, bolas dentro de urnas, moedas, sorteio de números de 1 a 100, sorteio de uma carta de um baralho normal, dentre outros tipos de experimentos.

Figura 8 – Exemplo de tabuleiro para o jogo Jornada das Chances



Fonte: elaborado pelo autor.

Na vez do jogador (ou grupo), o jogador deve escolher qual dos três eventos ele quer realizar. Por exemplo, ele poderia encontrar as cartas “cair um número par no lançamento de um dado”, “cair um múltiplo de 6 no sorteio de 1 a 100” e “cair um às de cor preta no sorteio de uma carta do baralho”. O estudante deve ter a interpretação de que a primeira carta, das apresentadas agora, é a mais provável de acontecer. Dessa forma, o estudante *fará o experimento*. Se for favorável, ou seja, se o evento descrito na carta acontecer, então ele andará uma casa para frente. Caso não aconteça, ele permanecerá parado no local onde estava antes do experimento.

Nota-se que “Jornada das Chances” é um jogo que exige dos estudantes um conhecimento de cálculo de Probabilidades, ao comparar diferentes eventos e deduzir qual deles é mais provável de acontecer, e também um jogo de sorte, pois dependerá do resultado favorável do evento. Ganha o jogador ou grupo que primeiro chegar até a última casa da trilha. O grupo que começará a jogar será escolhido mediante sorteio. Quando um grupo escolher um evento para realizar, esse evento deverá voltar para a parte de baixo do monte, de forma que poderá aparecer novamente.

O autor deste trabalho acredita que o “Jornada das Chances” é um Jogo que pode ter diversos aprofundamentos. Dessa maneira, a semana seguinte (semana 12) também deverá versar sobre a prática desse Jogo, que pode apresentar diferentes ramificações. O professor, nesse contexto, é um personagem mediador da construção do conhecimento. Deve encorajar os estudantes a pensarem e estruturarem maneiras diferentes de abordar os diferentes jogos trazidos aqui.

Quadro 15 – Plano de aula da semana 13

Identificação	**Disciplina:** Eletiva Jogos Matemáticos Combinatórios e Probabilísticos **Aula 13:** Probabilidade geométrica no "Jogo dos Discos"
Objetivos	Construir malhas quadriculadas adequadas para o Jogo dos Discos com moedas; Discutir com os estudantes o conceito de Probabilidade Geométrica; Fazer lançamentos para calcular a probabilidade de ganho com os diferentes tipos de moedas.
Conteúdo	Probabilidade Geométrica

Fonte: elaborado pelo autor.

Na semana 13, os estudantes terão o contato com um conceito não muito comum nos programas de ensino de matemática da Educação Básica, a Probabilidade Geométrica. O "Jogo dos Discos" foi proposto em Caetano e Paterlini (2013) e objetiva fazer com que os estudantes realizem continuamente o experimento de lançar discos no chão de algum dos ambientes da escola tentando não sobrepor o disco e os rejuntes do piso. O jogador vence o Jogo quando lança o disco e este não sobrepõe o rejunte (nem discos lançados anteriormente).

Essa atividade pode ser explorada de forma mais ampla, e pode fazer parte da culminância da disciplina eletiva. De início, os estudantes devem medir a área das cerâmicas das salas ou de outro ambiente da escola. Com essa informação em mãos, eles deverão construir discos de papel de diferentes diâmetros. Para facilitar os lançamentos, é importante que esse disco seja construído de papéis mais pesados ou papelões. Depois disso, devem fazer lançamentos para encontrar qual é o disco que apresentará aproximadamente 50% de chance de cair sobre o rejunte.

A aula da semana 14 deverá ser destinada para o planejamento dessas atividades diferenciadas de aprofundamento do Jogo dos Discos. Além disso, o professor pode utilizar esta aula para aprimorar e trabalhar outras possibilidades no "Jogo dos Discos". Uma possibilidade é utilizar moedas em vez de discos de papelão, e uma cartolina quadriculada em vez do piso de uma das salas da escola (conforme está devidamente detalhado no Apêndice A).

Como foi estipulado inicialmente que o programa elaborado neste trabalho teria a duração de 16 semanas, restam apenas dois encontros para finalizar as atividades. É recomendado que, na semana 15 de aulas, os estudantes e o professor reúnam-se para refletir como será a apresentação final da culminância (lembrando que pode ser utilizando o "Jogo dos Discos"). Podem ser elaborados, por exemplo, cartazes contendo mapas mentais explicativos sobre os jogos que foram criados e elaborados pelos estudantes.; painéis decorativos com detalhes sobre o andamento das aulas; revelação de fotografias que capturem os principais momentos da disciplina; dentre outros.

Todos esses planejamentos terão aplicação na última semana de aula, a Culminância, que, conforme já dito, é um momento em que todas as eletivas da escola realizam novamente um feirão divulgando para as outras turmas, para os funcionários da escola e para a comunidade escolar todos os resultados do desenvolvimento das aulas.

Todas as atividades aqui propostas são *sugestões*. Dessa maneira, o professor pode apropriar-se de apenas algumas das aulas aqui expostas e adaptar as outras, bem como também pode seguir o programa da mesma forma que está expresso aqui. Além disso, considera-se que os jogos descritos nesse trabalho serão de grande ajuda até mesmo em aulas regulares da disciplina de matemática, visto que são jogos que explorarão o raciocínio matemático dos estudantes.

É importante ressaltar que a situação ideal da construção dos jogos é a que os estudantes são os principais responsáveis pela elaboração, confecção, escrita das regras e prática dos jogos, visto que o objetivo do professor que aplica esta eletiva é o desenvolvimento do aprendizado em Análise Combinatória e Probabilidade. Além disso, todo o programa da disciplina está mais bem desenvolvido no Apêndice A, onde são apresentadas todas as etapas do desenvolvimento do plano de aula que tem a estrutura proposta por Oliveira (2011).

6 CONCLUSÃO

Uma das principais motivações para a realização deste trabalho tem a ver com a importância que diversos autores, como Conceição, Pereira e Santos (2016), Lopes (2008) e Handaya (2016), atrelam aos conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade. A experiência em sala de aula e em diferentes redes de ensino fazem perceber que esses conteúdos são muitas vezes pouco abordados e deixados de lado, em especial quando se discute sobre o Ensino Fundamental.

Isso se prova através da análise do livro didático utilizado (2024-2027) na rede municipal de ensino de Sobral, no Ceará. Tal livro, em todas as séries do ensino fundamental, apresentou baixa quantidade de exercícios e quase nenhuma importância foi atrelada, em especial, à Análise Combinatória, até mesmo para conceitos simples como o Princípio Multiplicativo, que pode ser abordado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Além disso, por intermédio da investigação que se deu em relação às matrizes de referência para a elaboração das principais avaliações externas (Saeb e Spaece), percebeu-se que nenhuma dessas avaliações, até o ano de 2025, não abordou nenhum conteúdo de Análise Combinatória e Probabilidade. Porém, um avanço foi notado nos avisos do Inep, que afirmou que a avaliação do Saeb de 2025 seguirá uma nova matriz de referência, norteada pela BNCC, e que contém uma habilidade que abarca o conteúdo de Probabilidade.

Esse ponto tem que ser discutido, pois as matrizes de referências muitas vezes são o principal documento norteador dos conteúdos abordados por professores de matemática em sala de aula, o que quer dizer que há professores que lecionam apenas os conteúdos presentes nessas matrizes. Assim, percebe-se que há estudantes que até então podem não ter tido contato algum nem mesmo com a Probabilidade.

Este trabalho pretendeu, portanto, abordar os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade em um local onde, normalmente, o professor não é obrigado a seguir uma matriz de referência. Este lugar é a disciplina eletiva. Conforme discutido, a disciplina eletiva é trabalhada em ETIs e abre espaço para conteúdos divergentes e não presentes na BNCC. Nela, o professor é livre para lecionar de forma interdisciplinar, utilizar diversos recursos educacionais, trabalhar a autonomia, o trabalho em equipe, o engajamento, a criatividade, a socialização, dentre outras competências importantes.

Para a disciplina eletiva, este trabalho uniu a criação de um LEMA com a elaboração de Jogos pedagógicos para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade por seis meses, a duração da eletiva, como uma estratégia para a abordagem desses importantes conteúdos. Não somente é feito o cronograma geral da disciplina, como é apresentado para o professor leitor deste trabalho, em formato de programa curricular, todos os planos de aula que o professor se identificar e quiser seguir, como uma forma de facilitar o trabalho de um professor que, normalmente, não tem tempo para profundos planejamentos devido a trabalhos burocráticos exigidos pela profissão.

Na disciplina elaborada e exposta no Capítulo 5 deste trabalho, o professor é convidado a desenvolver com seus alunos jogos que estimulem a criatividade e o raciocínio quantitativo e probabilístico dos seus estudantes. Nessas atividades, o estudante é agente ativo do próprio aprendizado e o professor é um agente mediador da construção do conhecimento do estudante, fornecendo *feedbacks* e avaliações de forma imediata.

Adicionalmente ao programa curricular desenvolvido, também foi aplicado um questionário com dois diretores e dois professores que trabalham em ETIs que possuem disciplinas eletivas. Através dos questionários, percebeu-se que as eletivas são, de fato, muito benéficas para o aprendizado dos alunos, visto que eles as escolhem de acordo com o seu interesse e participam ativamente do seu desenvolvimento. Além disso, pôde-se perceber que os professores utilizam de diferentes metodologias de ensino em disciplinas eletivas.

O produto educacional deste trabalho, o programa curricular, ficará disponível para professores que ensinam matemática na forma de um *ebook* (que, neste trabalho, está disponível no Apêndice A). Objetiva-se que este *ebook* seja de grande ajuda para os professores que, como dito, têm dificuldades para efetuar bons planejamentos e que têm interesse em ensinar Análise Combinatória e Probabilidade de maneira diferenciada.

Sobre limites deste estudo e possíveis continuidades, acredita-se que a pesquisa aqui realizada possa ser executada de forma mais ampla, com a participação de uma grande quantidade de professores, e em uma maior quantidade de municípios que possuem ETIs. A visão de professores, diretores e (principalmente) alunos é importante e deve fazer parte dos principais resultados da literatura sobre disciplinas eletivas. Dessa forma, acredita-se que deve ser feita, futuramente, uma pesquisa desse tipo.

Ademais, deve haver também uma aplicação efetiva do programa curricular proposto, de forma a medir o aprendizado dos estudantes e concluir que, de fato, a utilização de Jogos e a construção de LEMA como metodologias para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, são eficazes. Apesar do autor acreditar nessa efetividade, deve fazer parte da literatura um estudo que analisa os resultados do aprendizado e a visão dos estudantes e professores acerca da disciplina eletiva aqui proposta.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Kalina Ligia Almeida de Brito**. Jogos no ensino de matemática:** uma análise na perspectiva da mediação. 2017. 238 f. 2017. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.

AVANÇO, Leonardo Dias; LIMA, José Milton de. Diversidade de discursos sobre jogo e educação: delineamento de um quadro contemporâneo de tendências. **Educação e Pesquisa**, [*s. l.*], v. 46, p. e215597, 2020.

BIANCHINI, Gisele; GERHARDT, Tatiane; DULLIUS, Maria Madalena. Jogos no ensino de matemática "quais as possíveis contribuições do uso de jogos no processo de ensino e de aprendizagem da matemática?". **Revista Destaques Acadêmicos**, [*s. l*], v. 2, n. 4, 2010. p. 1-8.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 29 abr. 2025.

BRASIL, Casa Civil. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 29 abr. 2025.

BRAVO JOGOS. **Dobro:** jogo de tabuleiro. [*S. l.; s. n.*], 2025. Disponível em: https://bravojogos.com.br/jogos-de-tabuleiro-e-cardgames/jogo-dobro-p. Acesso em: 21 jun. 2025.

CAETANO, Paulo Antonio Silvani; PATERLINI, Roberto Ribeiro. **Jogo dos discos**: módulo I. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013.

CEARÁ. Secretaria da Educação do Ceará. **SPAECE.** Fortaleza: Seduc, 2025. Disponível em: https://www.seduc.ce.gov.br/spaece/. Acesso em: 29 abr. 2025.

CONCEIÇÃO, Dérick; PEREIRA, Ducival; SANTOS, Maria. O ensino-aprendizagem de Análise Combinatória: o desempenho de alunos de Belém do Pará. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. [*S. l.; s. n.*], 2016. p. 1-12.

EWBANK, William A. The mathematics laboratory: What? Why? When? How?. **The Arithmetic Teacher**, [*s. l*] v. 18, n. 8, p. 559-564, 1971.

GRANDO, Regina Célia. Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, [*s. l.*], v. 5, n. 02, p. 393-416, 2015.

HANDAYA, Armando. Uma reflexão sobre dificuldade de aprendizagem de análise combinatória. **Revista Sinergia**, [*s. l.*], v. 18, n. 1, p. 13-17, 2017.

HUNTER, David J. **Fundamentos da matemática discreta**. Tradução de: Paula Porto

Martins. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

INEP. **Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC**. Brasília, DF: INEP, 2022.

INEP. **Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb).** Brasília, DF: INEP, 2025. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb. Acesso em: 29 abr. 2025.

INSTITUTO DE CORRESPONSABILIDADE PELA EDUCAÇÃO. **Inovações em conteúdo, método e gestão:** metodologias de êxito. 3. ed. [*s. l.*]: ICE, 2020.

LEMES, Jean Carlos. **Propostas com materiais manipulativos e jogos para o ensino da matemática na perspectiva inclusiva:** um estudo com foco nos conhecimentos de futuros professores**.** 2022. 234f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, 2022.

LOPES, Celi Espasandin. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cadernos Cedes**, [*s. l.*], v. 28, p. 57-73, 2008.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In:* LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012. p. 3-37.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 8 ed. São Paulo: Atlas, 2017.

MORGADO, Augusto César *et al*. **Análise combinatória e probabilidade.** 10 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de matemática elementar:** combinatória. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

OLIVEIRA, Manoel Cipriano. Plano de aula: ferramenta pedagógica da prática docente. **Pergaminho**, [*s. l.*], n. 2, p. 121-129, 2011.

OLIVEIRA, Zaqueu Vieira; KIKUCHI, Luzia Maya. O laboratório de matemática como espaço de formação de professores. **Cadernos de Pesquisa**, [*s. l.*], v. 48, n. 169, p. 802-829, 2018.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. *In:* LORENZATO, Sérgio (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

RÊGO, Rômulo Marinho; RÊGO, Rogéria Gaudencio. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. *In:* LORENZATO, Sérgio (org.). **Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012. p. 39-56.

RODRIGUES, Fredy Coelho. **Laboratório de Educação Matemática:** descobrindo as potencialidades do seu uso em um curso de formação de professores. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Minas Gerais, 2011.

SANTOS, José Adenilson Vilar dos; CUNHA, Douglas da Silva. O uso do laboratório no ensino da Matemática: Desafios e possibilidades encontradas pelos professores em suas práticas pedagógicas. **Revista Educação Pública**, [*s. l.*], v. 21, nº 41, 16 de novembro de 2021.

SANTOS, José Plínio de O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à análise combinatória.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

SILVEIRA, Ênio. **Desafios de matemática com Ênio Silveira:** 6° ano. São Paulo: Moderna, 2022.

SILVEIRA, Ênio. **Desafios de matemática com Ênio Silveira:** 7° ano. São Paulo: Moderna, 2022.

SILVEIRA, Ênio. **Desafios de matemática com Ênio Silveira:** 8° ano. São Paulo: Moderna, 2022.

SILVEIRA, Ênio. **Desafios de matemática com Ênio Silveira:** 9° ano. São Paulo: Moderna, 2022.

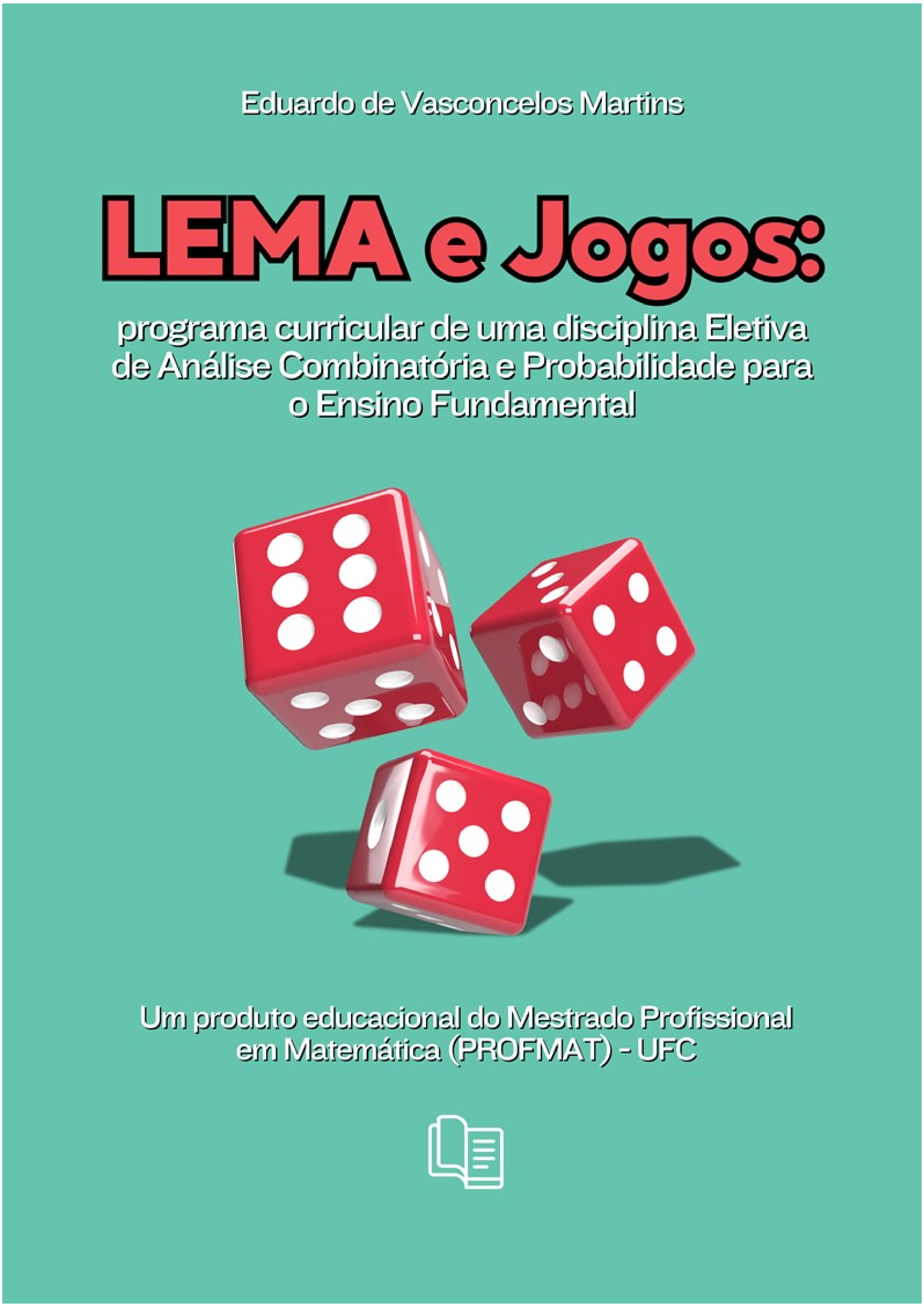
TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Curiosidades, passatempos, desafios e jogos combinatórios**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

APÊNDICE A – EBOOK “LEMA E JOGOS: PROGRAMA CURRICULAR DE UMA DISCIPLINA ELETIVA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE PARA O ENSINO FUNDAMENTAL”

Esta parte do material é destinada para a inserção do produto educacional, necessário para a devida finalização do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Este material, como já dito anteriormente, é o programa curricular contendo todas as aulas que o professor irá seguir ao aplicar a disciplina eletiva discutida. As próximas páginas contêm Figuras que são recortes do *ebook*, produto educacional que ficará disponível digitalmente e que pode ser acessado através do endereço do *QR Code* da Figura abaixo.

Figura 9 – QR Code de acesso ao produto educacional.

Fonte: elaborado pelo autor.



Fonte: elaborado pelo autor.

APRESENTAÇÃO

A partir de agora, você lerá o *ebook* **LEMA e Jogos: programa curricular de uma disciplina Eletiva de Análise Combinatória e Probabilidade para o Ensino Fundamental**, que é um produto educacional vinculado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal do Ceará (UFC), orientado pelo professor Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

Este material foi construído com o objetivo maior de auxiliar professores que ensinam matemática que se encaixam nas seguintes categorias: lecionam disciplinas eletivas para o Ensino Fundamental anos finais; têm interesse pelas disciplinas de Análise Combinatória e Probabilidade; gostam de ensinar matemática através de Jogos; e têm pouco tempo para elaborar um programa curricular para sua disciplina eletiva.

Neste material, o autor dará todas as indicações de como o professor pode prosseguir com suas aulas. Todos os passos de um plano de aula convencional são dados, com a pretensão de que o professor de matemática siga-os para ter êxito e bons resultados em sua disciplina eletiva.

O texto não está escrito por completo neste material. Há outros capítulos que o completam, a saber: um referencial teórico sobre a principal literatura sobre LEMA e Jogos como recursos para o ensino de matemática; Análise Combinatória e Probabilidade, suas principais definições e uma análise de livro didático; uma discussão sobre as disciplinas eletivas e o material que as embasam.

Todos esses textos estão disponíveis, por completo, no repositório de Dissertações da UFC, para serem apreciados pelos professores que assim tiverem interesse.

Fonte: elaborado pelo autor.

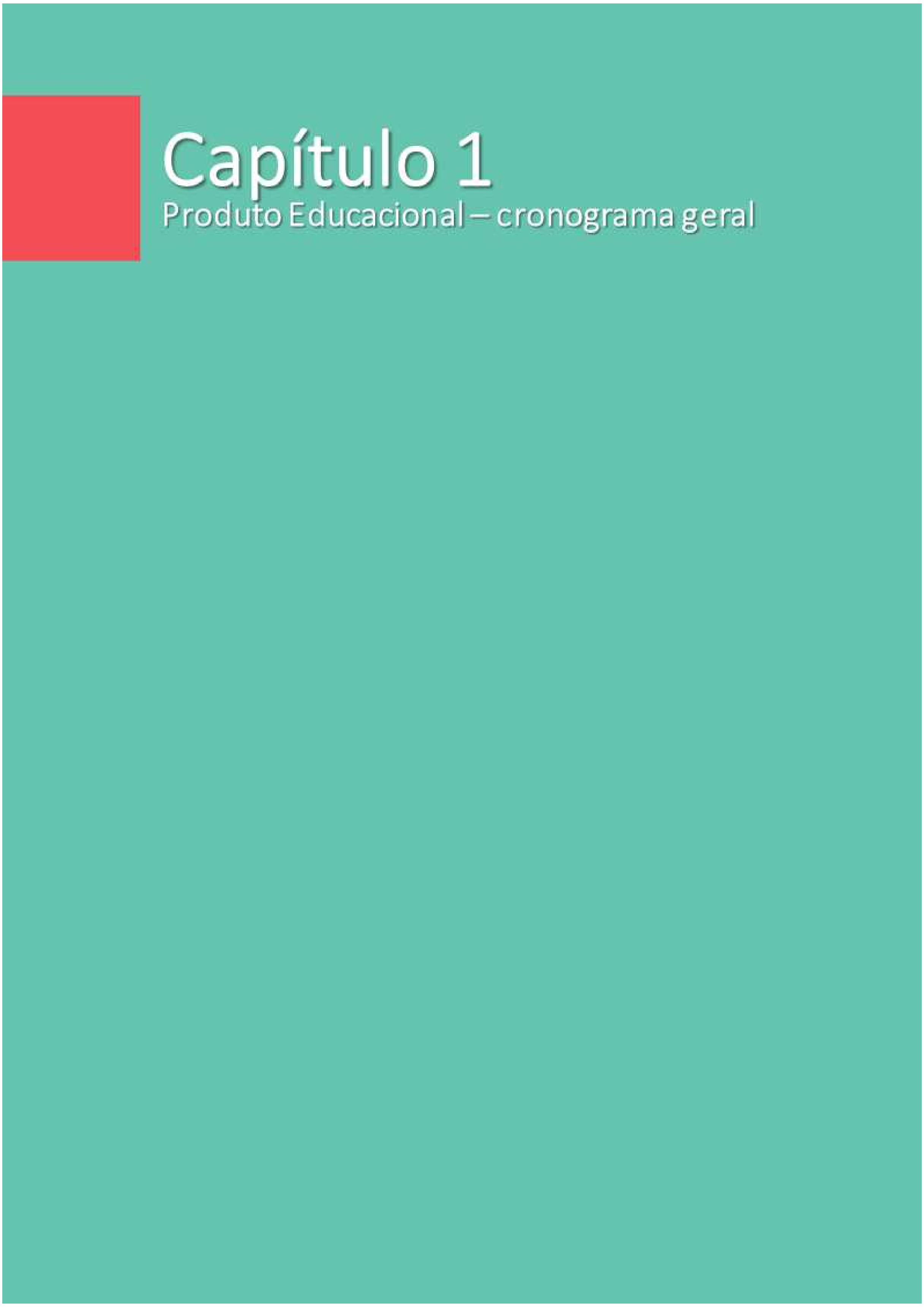
APRESENTAÇÃO

Espera-se que o professor usufrua do *ebook* da melhor maneira possível, afinal, ele foi elaborado pensando em todos os desafios que os docentes enfrentam em seu dia a dia, em especial, a dificuldade em conseguir tempo para planejamentos exaustivos como esse.

Boa leitura e boa eletiva!

Eduardo de Vasconcelos Martins

Fonte: elaborado pelo autor.



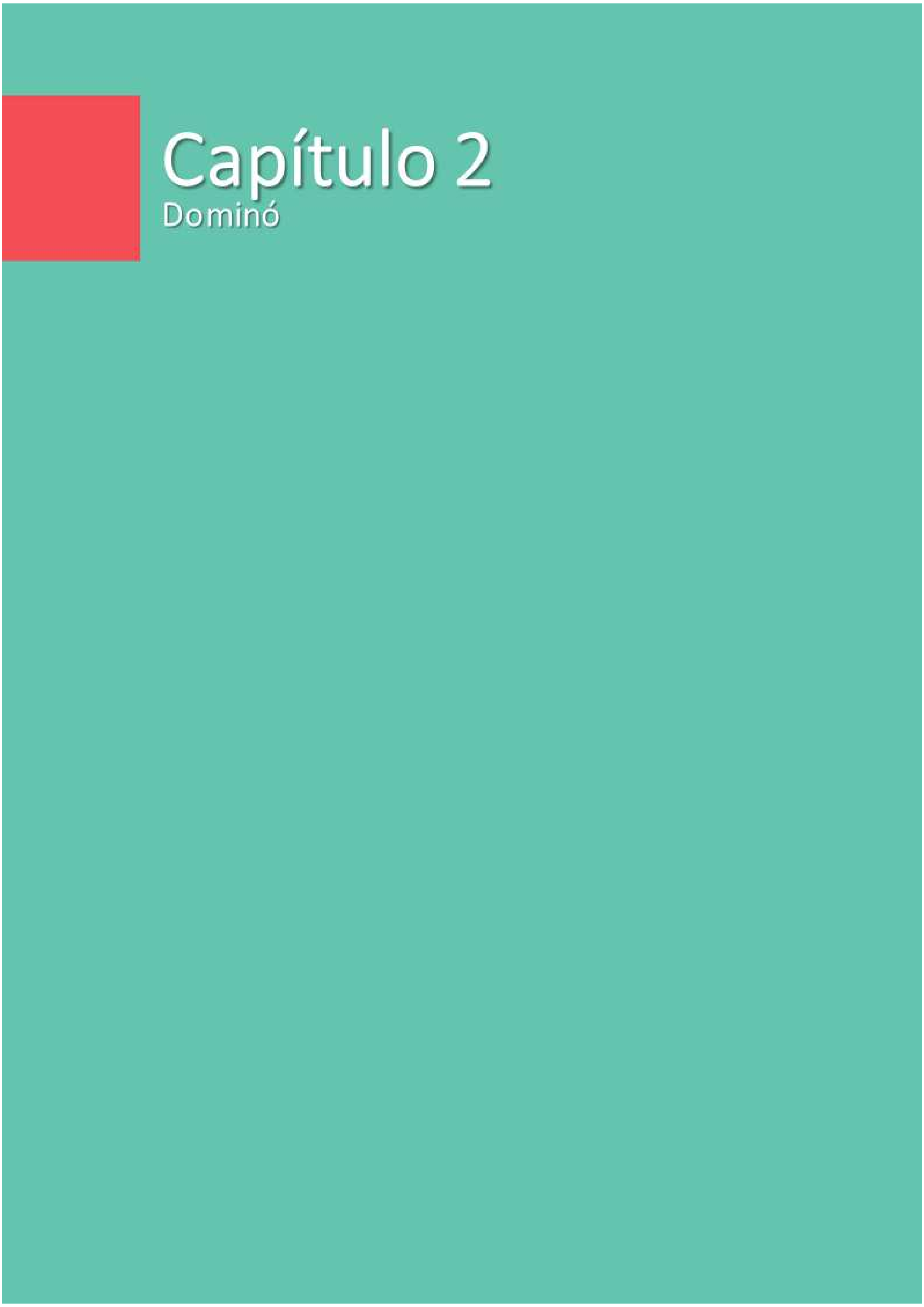
Fonte: elaborado pelo autor.

04 Capítulo 1 – Produto educacional – cronograma geral

Para melhor guiar o leitor deste material, o autor preparou uma tabela que apresenta, em linhas gerais e de forma direta, quais serão as atividades desenvolvidas em cada semana da disciplina Eletiva.

Semana	Atividade	Conteúdo
1	Dominó – aula inicial	Introdução à Contagem
2	Dominó – aprofundamento e execução do jogo	Introdução à Contagem
3	Jogo das Bandeiras – aula inicial e montagem	Princípio Multiplicativo
4	Jogo das Bandeiras – aprofundamento e execução do jogo	Princípio Multiplicativo
5	Descubra a Senha – aula inicial e montagem	Princípio Multiplicativo, Permutação e Arranjo
6	Descubra a Senha – aprofundamento e execução do jogo	Princípio Multiplicativo, Permutação e Arranjo
7	Quantos têm? – aula inicial e montagem	Princípio Multiplicativo, Permutação, Arranjo e Combinação
8	Quantos têm? – aprofundamento e execução do jogo	Princípio Multiplicativo, Permutação, Arranjo e Combinação
9	+Provável – aula inicial e montagem	Probabilidade
10	+Provável – aprofundamento e execução do jogo	Probabilidade
11	Jornada das Chances – aula inicial e montagem	Probabilidade
12	Jornada das Chances – aprofundamento e execução do jogo	Probabilidade
13	Jogo dos Discos – aula inicial e montagem	Probabilidade Geométrica
14	Jogo dos Discos – aprofundamento e execução do jogo	Probabilidade Geométrica
15	Planejamento das atividades da Culminância	Não há
16	Culminância	Não há

Fonte: elaborado pelo autor.



Fonte: elaborado pelo autor.

06 Capítulo 2 – Dominó

A aula da semana 1 é composta por adequações ao conhecido jogo Dominó (amplamente comercializado e utilizado) que foram propostas por Teixeira (2021). Acredita-se que, ao iniciar a disciplina utilizando Jogos com que os estudantes já têm familiaridade, o interesse e a disposição desses serão potencializados. O motivo da escolha desse Jogo vem do fato de que, com a adequação, os estudantes terão um primeiro contato com um método de contagem simples, visto que desenvolverão diagramas para contar quantas são as peças necessárias para a criação de um Dominó diferente. Após a montagem dos Dominós, os estudantes o jogarão, dando significado ao seu processo criativo e encorajando o interesse pela matemática.

Trata-se de um jogo de rápida montagem e de simples execução, mas que será uma ótima aula inicial para a eletiva, pois a partir dele os estudantes conhecerão um método de contagem chamado de árvore de possibilidades.

– **Entendendo o Jogo**

Na verdade, é o Dominó simples. Entretanto, nesse contexto, os estudantes serão desafiados a construir com suas próprias mãos Dominós com diferentes quantidades de peças. Por exemplo:

I. Dominó de 2 – que não pode ser aplicado como um jogo;
II. Dominó de 3;
III. Dominó de 4;
IV. Dominó de 5;
V. Dominó de 6 – ou o Dominó clássico;
VI. Dominó de 7;
VII. Dominó de 8.

No processo de montagem desse jogo, os estudantes aprenderão de que maneira eles podem fazer esquemas para a contagem de peças de Dominó.

A seguir, apresenta-se o plano de aula da semana 01 da Eletiva – montagem do Dominó de diferentes quantidades.

– **1 Identificação**
Aula 1 do Dominó.

– **2 Objetivos**
Explicar os propósitos da disciplina, bem como seu andamento e o cronograma;
Apresentar o Dominó tradicional e de que maneira podem ser construídos outros dominós;
Dividir a turma em grupos e designar para cada grupo um Dominó diferente;
Iniciar a montagem dos Dominós.

Fonte: elaborado pelo autor.

– **3 Conteúdo**
Introdução à Contagem – árvore de possibilidades.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momento inicial)
Como é a primeira aula da disciplina eletiva, é importante que o professor explane quais são os objetivos principais da disciplina, apresente o cronograma geral a ser seguido inicialmente e converse com os estudantes sobre o Dominó, bem como as suas potencialidades e possibilidades.

5 – 15 min (Conversas sobre o Dominó e divisão dos grupos)
Nesses minutos, o professor pode fazer perguntas sobre o Dominó original, como por exemplo se os alunos sabem jogar. Além disso, perguntar:

Quantas são as peças do Dominó?
Quantas vezes cada número aparece nas peças?
Há peças repetidas?
Quantas são as peças com números iguais?

É essa sondagem que fará com que o professor conheça a realidade da turma.
Após, o professor deve separar a turma em grupos, a depender da quantidade de alunos total, e designar, para cada grupo, a construção de um diferente Dominó. Por exemplo, a divisão a seguir pode ser seguida:

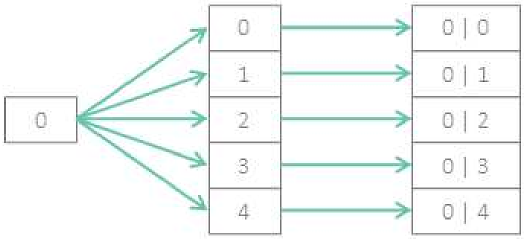
- **Grupo 1 – Dominó de 3;**
- **Grupo 2 – Dominó de 4;**
- **Grupo 3 – Dominó de 5;**
- **Grupo 4 – Dominó de 7;**
- **Grupo 5 – Dominó de 8.**

15 – 75 min (Montagem dos Dominós)
A partir de agora, os estudantes irão, de fato, construir os Dominós. Os materiais a serem utilizados podem ser de todos os tipos. Porém, é provável que os alunos prefiram a confecção das peças usando papelão, papéis cortados, cola e pincéis.
Porém, o mais interessante a se desenvolver nesta aula não é a montagem em si, e sim o raciocínio quantitativo dos estudantes. Desenvolvamos, por exemplo, o processo de montagem do Grupo 2 – Dominó de 4.
No Dominó de 4, os estudantes só podem usar cinco quantidades de números: **0, 1, 2, 3 e 4.** A partir dessa informação, o professor deve fazer indagações para seus estudantes, como por exemplo:

Quantas são as peças necessárias para se construir um Dominó de 4?
Como é possível determinar quais são essas peças?

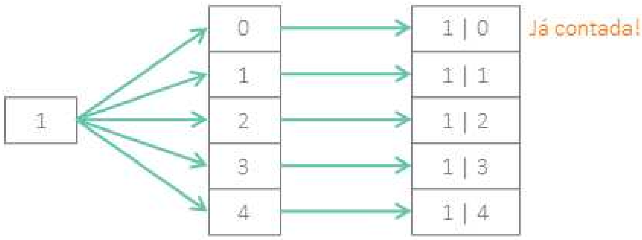
Fonte: elaborado pelo autor.

Para que cada grupo consiga, inicialmente, montar as suas peças de Dominó, eles precisam saber quais são as duplas de números que vão integrar essas peças. Cada dupla de números será inserida em uma peça. Como é possível determinar as duplas de números do Dominó de 4?



O diagrama acima mostra todas as possibilidades de peças de Dominó de 4 contendo o número zero. Ou seja, não há mais peças com o número 0, são apenas cinco.

Agora, pode ser feito o diagrama das peças com o número 1. É claro que não é mais necessário montar a peça dos números 1 e 0, já que foi feita anteriormente, logo, o diagrama ficará da seguinte maneira:



Logo, são quatro peças somadas às cinco peças anteriores, totalizando nove peças até o momento. Os próximos diagramas também seguirão o mesmo padrão de se reduzir em uma unidade para cada número diferente. Não é necessário, para esse texto, montar os diagramas, basta resumir:

- Peças com 2 → 3 novas peças;
- Peças com 3 → 2 novas peças;
- Peças com 4 → 1 nova peça.

O total de peças necessárias para montar um Dominó de 4 é a soma 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 peças.

Esses esquemas são extremamente vantajosos para o aprendizado dos estudantes porque, a partir do momento em que eles construírem esses esquemas, eles serão capazes de fazê-los de forma mental e rápida, otimizando o processo de raciocínio quantitativo.

O professor deve pedir para que cada grupo elabore esses esquemas, como uma forma de avaliação, e também como uma maneira de auxiliá-los a distinguir quais são as peças que ainda faltam para serem montadas em seus Dominós.

Fonte: elaborado pelo autor.

75 – 85 min (Avaliação do professor)

Agora, o professor deve tomar um tempo para fazer questionamentos estratégicos para seus alunos. Aqui, será descrito exemplos de perguntas para o grupo que fará o Dominó de 4. Exemplos:

Qual o total de peças que compõem o Dominó de 4?
Quantos jogadores pode ter o Dominó de 4?
Quantas peças cada jogador receberá, para que sejam entregues todas as peças?
O Dominó de 4 pode, de fato, ser jogado?
O Dominó de 4 poderia ser comercializado?

Perguntas retiradas de Teixeira (2021).

Esses questionamentos farão com que os estudantes pensem e reflitam sobre o processo. O professor pode pedir para que os alunos anotem as respostas para essas perguntas em folhas, para que possam ser entregues. Essas perguntas podem ser adaptadas para os outros tipos de Dominó?

85 – 95 (Socialização)

Nesse momento, aqueles grupos que já tiverem terminado de confeccionar seus Dominós, deverão levantar-se para apresentar aos seus colegas as peças montadas, criando um momento de socialização, em que cada grupo mostrará aos seus companheiros o que foi capaz de construir.

É possível que alguns grupos ainda não tenham terminado de construir suas peças. Tais grupos poderão terminar a construção na aula seguinte.

95 – 100 (Finalização)

Nos últimos momentos da aula, é importante que o professor faça um apanhado geral do que foi desenvolvido nessa primeira semana de eletiva. Faça um resumo das ações tomadas e um panorama do que será feito na semana seguinte.

– **5 Recursos**

Os recursos que serão utilizados dependem da forma como os estudantes construirão as peças. Porém, é possivel supor que, por padrão, os alunos utilizarão papelão, papel, cola, pincéis, caneta, lápis, etc.

– **6 Avaliação**

A avaliação pode acontecer da forma como o professor pretender. Como já visto, o professor desenvolverá um questionário a ser entregue aos alunos. Tal questionário pode ser avaliativo. Além disso, o professor tem que ser mediador do processo de construção e de aprendizagem, fornecendo auxílios sempre que necessário e dando *feedbacks* imediatos aos estudantes quando eles solicitarem. O professor será, mais do que nunca, um amigo que ajudará seus alunos a fazer o que foi solicitado.

Fonte: elaborado pelo autor.

Terminada a primeira semana de aulas da eletiva, agora o professor precisa sentar e planejar como se dará as atividades da segunda semana.

É importante que o professor saiba que os alunos têm que ver sentido no que eles produziram, então, a segunda semana deve ser destinada para que eles consigam, de fato, **jogar os Dominós que foram produzidos.** Assim, eles verão que o que eles mesmos produziram está sendo amplamente utilizado.

Agora, segue-se o plano de aula da segunda semana, referente ao segundo momento para o Dominó.

– **1 Identificação**

Aula 2 da montagem do Dominó.

– **2 Objetivos**

Finalizar a montagem das peças do Dominó;
Jogar o Dominó construído pelo próprio grupo;
Utilizar, também, os Dominós construídos pelos outros grupos da turma.

– **3 Conteúdo**

Introdução à Contagem.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momentos Iniciais)

O início da aula deve ser destinado, como antes, para uma introdução sobre o que será realizado no decorrer dos momentos. Deve ser relembrado, também, todas as atividades desenvolvidas na semana anterior.

5 – 35 min (Finalização das peças)

É possível que alguns dos grupos, em especial aqueles com maiores quantidades de peças, ainda não tenham terminado a construção dessas peças. Dessa maneira, o professor deve disponibilizar um tempo maior para essa atividade.

35 – 95 min (Jogabilidade do Dominó)

Agora, o professor deve fornecer o momento que, talvez, os alunos mais estejam esperando: poder **jogar o Dominó construído por eles mesmos.** Esse momento não deve ser menosprezado pelo professor, porque é nele que os estudantes criarão apreço pela disciplina e pelo o que está sendo desenvolvido.

Nesse contexto, o professor deve tentar deixar de lado a concepção tradicional de ensino, em que o aluno fica sentado, parado, sem questionar, ouvindo passivamente as falas do professor e

Fonte: elaborado pelo autor.

sem interagir com seus colegas. Aqui, o estudante poderá interagir, jogar, conversar com seus colegas e aprender com esse processo.

95 – 100 min (Finalização da aula)
Novamente, os últimos minutos devem ser destinados a um resumo geral de todas as atividades realizadas nessas duas primeiras semanas de aula. **Se o professor quiser e caso tenha sobrado tempo suficiente, ele pode dar início a pequenas explicações sobre o que será visto na semana seguinte, quando os estudantes serão inseridos ao Princípio Multiplicativo.**

– 5 Recursos

Os recursos que serão utilizados dependem da forma como os estudantes construirão as peças. Porém, é possível supor que, por padrão, os alunos utilizarão papelão, papel, cola, pincéis, caneta, lápis, etc.

– 6 Avaliação

O professor tem que ser mediador do processo de construção e de aprendizagem, fornecendo auxílios sempre que necessário e dando *feedbacks* imediatos aos estudantes quando eles solicitarem. Como nesta aula os alunos poderão jogar os Dominós, o professor pode verificar, individualmente com seus alunos, quais são as estratégias que estão sendo usadas para a jogabilidade, como uma forma de avaliação.

Cabe, agora, discutir quais são os pontos positivos de uma atividade como esta no processo cognitivo e de aprendizado de matemática dos alunos.

– Conclusão

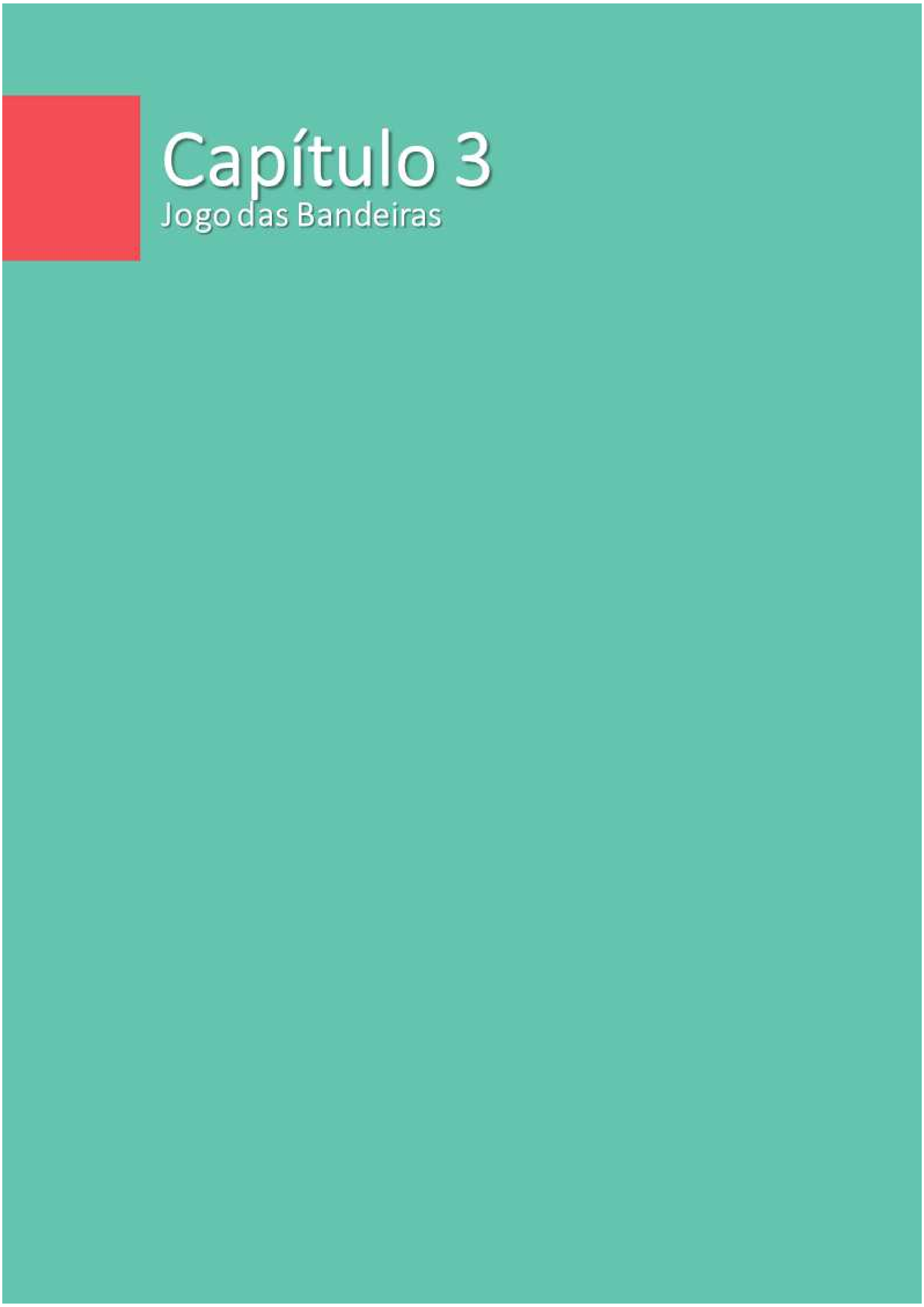
Os benefícios que acredita-se estarem interligados a essa atividade são os seguintes:

I. **Desenvolvimento da Visualização:** como os alunos serão convidados e construir esquemas que os ajudem a contar quantas são as peças do Dominó, eles se submeterão a uma estratégia de aprendizagem de matemática muito poderosa, que ajuda a entender conceitos mais complicados: a visualização.
II. **Engajamento e tomada de decisão**: os alunos serão analisados pelo professor de acordo com a sua tomada de decisão. É nessas atividades que o professor poderá identificar quais são os líderes da turma e quais são aqueles alunos naturalmente engajados. Além disso, o professor também poderá incentivar aqueles estudantes com problemas de aprendizagem a tentarem se engajar cada vez mais nessas atividades diferenciadas.
III. **Trabalho em equipe:** quase todas as partes dessa atividade se desenvolvem tendo contato com outras pessoas, em especial no momento da Socialização. Logo, acredita-se que a atividade é extremamente vantajosa para desenvolver essa importante a habilidade.

Fonte: elaborado pelo autor.

12 Capítulo 2 – Dominó

Fonte: elaborado pelo autor.



Fonte: elaborado pelo autor.

14 Capítulo 3 – Jogo das Bandeiras

O Jogo das Bandeiras será a temática principal da terceira semana da Eletiva. Esse Jogo foi adaptador pelo autor deste trabalho com inspiração em Teixeira (2021).

– **Entendendo o Jogo**

A montagem desse Jogo é simples: os alunos devem montar bandeiras com listras horizontais coloridas, bem como as bandeiras de países como a Alemanha e a Rússia (podendo também ser verticais, a critério do professor).


Bandeira da Alemanha


Bandeira da Rússia

Eles podem usar papelões e tinta do tipo guache ou até mesmo folhas sem pauta e pincéis, o que importa é que o professor defina a quantidade de listras e a quantidade de cores que devem ser utilizadas por cada grupo.

Exemplos:

i. um grupo com quatro alunos pode ficar responsável por montar todas as bandeiras possíveis contendo 2 listras com 3 cores previamente escolhidas pelo professor;
ii. outro grupo pode ficar responsável pela montagem de bandeiras contendo 2 listras e podendo usar 5 cores.

Espera-se que, através da montagem, os estudantes **percebam a existência do Princípio Multiplicativo** e saibam calcular qual é a quantidade de bandeiras possíveis de montar antes mesmo de precisar construí-las, até mesmo se o professor conseguir adequar o Jogo para exemplos com Arranjo, Combinação e Permutação.

Mas a jogabilidade não pode parar com a montagem das bandeiras. A segunda semana do Jogo das Bandeiras é uma extensão do Jogo com a competição entre dois jogadores: um **Desafiante** e um **Desafiado**.

Função do Desafiante: escolher e anotar, em um papel, uma das bandeiras montadas pelo seu grupo.
Função do Desafiado: acertar, com base em perguntas estratégicas, qual foi a bandeira escolhida pelo Desafiante.

O professor e os alunos devem, anteriormente, definir a quantidade máxima de perguntas que o Desafiado pode fazer. Por exemplo: o Desafiado só pode fazer cinco perguntas e então arriscar qual foi a bandeira escolhida. É claro que a quantidade máxima de perguntas depende da quantidade de bandeiras que o grupo produziu.

Fonte: elaborado pelo autor.

Essa etapa do Jogo é crucial e desafiadora especialmente se o professor e os alunos definirem que o Desafiado **NÃO PODE** olhar para as bandeiras construídas. Dessa forma, o Desafiado terá de memorizar todas as bandeiras construídas e, mentalmente, fazer uma árvore de possibilidades com base nas cores e quantidade de listras definidas pelo professor.

Acredita-se que esse trabalho mental de memorização de bandeiras é benéfico para o pensamento quantitativo e combinatório dos estudantes, pois eles mesmos terão de construir estratégias e imaginar todas as possibilidades de bandeiras.

Uma decisão que se considera assertiva para o desenvolvimento da **autonomia** dos estudantes é a de que o professor deve mostrar as possibilidades para os estudantes e eles, em grupos pré-definidos, escolherem de que maneira irão construir as bandeiras: se irão usar folhas coloridas, do caderno, brancas, ou se utilizarão lápis de cor, pincéis ou tintas, tudo isso conforme a disponibilidade de materiais da escola, dos professores e dos alunos.

O professor também deve estar aberto à possibilidade de adequações do Jogo com base em propostas e ideias dos estudantes: ou seja, se os alunos tiverem outras ideias de montagem das bandeiras, o professor deve considerar essas sugestões. Caso, por exemplo, a escola dispuser de computadores e algum aluno propor a construção de bandeiras com essa ferramenta, deve-se ponderar essa possibilidade.

Agora, seguem-se as etapas do plano de aula da Semana 1 (100 minutos) para a aplicação do Jogo.

– **1 Identificação**

Aula 1 do Jogo das Bandeiras (Princípio Multiplicativo).

– **2 Objetivos**

Desenvolver os conceitos iniciais do Princípio Multiplicativo através da construção de bandeiras com quantidades de listras e de cores previamente determinadas;

Aprimorar o raciocínio lógico e a memorização dos estudantes através da jogabilidade Desafiante e Desafiado.

– **3 Conteúdo**

Princípio Multiplicativo.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momento Inicial)

Nesse momento, o professor deve fazer uma introdução sobre o Jogo, explicando qual é o objetivo principal, quais são os materiais necessários e quais são os conhecimentos que ele espera que os alunos construam. A partir de então, o professor dividirá a sala em grupos, e fornecerá os materiais necessários para a construção.

Fonte: elaborado pelo autor.

5 – 70 min (Construção das Bandeiras)

Após a divisão dos grupos, o professor entregará para cada grupo a informação de quantas listras e quantas cores devem ser usadas. Aqui, neste plano de aula, faremos a sugestão de aula para **seis grupos**. Sugere-se o seguinte:

Grupo 1: 2 listras e 3 cores;
Grupo 2: 2 listras e 4 cores;
Grupo 3: 2 listras e 5 cores;
Grupo 4: 3 listras e 2 cores;
Grupo 5: 3 listras e 3 cores;
Grupo 6: 4 listras e 2 cores.

O professor, após a entrega da quantidade de listras e de cores, solicita que os alunos façam a confecção das bandeiras.

Nesse ponto, o professor é **mediador** do processo, auxiliando os estudantes nas dúvidas pertinentes, mas sem dar a resposta da quantidade total de bandeiras possível de ser construídas. É importante que os estudantes entendam que eles são os protagonistas dessa aula, e que são responsáveis pelo resultado.

70 – 80 min (Socialização)

Após a construção das bandeiras, considera-se relevante um momento de socialização entre os grupos e o professor. Cada grupo pode fazer uma rápida apresentação, informando para seus colegas qual foi o desafio passado pelo professor, ou seja, quantas listras e quantas cores deveriam ter as bandeiras criadas por eles.

Sugestão: sugere-se que, neste momento, antes dos alunos falarem em voz alta quantas bandeiras forem construídas, o professor faça perguntas para o restante da turma, como por exemplo:

"Quantas bandeiras vocês acreditam que esse grupo construiu?"
"Vocês acham que esse grupo construiu mais ou menos bandeiras que o seu grupo?"

Esses questionamentos farão os estudantes raciocinarem sobre a relação entre a quantidade de bandeiras e a quantidade de listras e cores.

Ao final da socialização, os grupos informam para o restante da turma e para o professor **quantas foram as bandeiras que eles construíram**, de forma que o resultado esperado seja esse:

Grupo 1: 9 bandeiras;
Grupo 2: 16 bandeiras;
Grupo 3: 25 bandeiras;
Grupo 4: 8 bandeiras;
Grupo 5: 27 bandeiras;
Grupo 6: 16 bandeiras.

80 min – 95 min (Conjectura)

Esse é um momento crucial para o aprendizado dos estudantes, e o professor pode abordá-lo de diversas maneiras. O objetivo desse momento da aula é fazer com que os alunos cheguem à

Fonte: elaborado pelo autor.

conclusão de que há uma estrita relação entre a quantidade de bandeiras possível de se construir com as quantidades de listras e de cores. Novamente, o professor atua como **mediador do processo de aprendizado dos alunos**, fazendo perguntas norteadoras e estratégicas, sem dar aos alunos a resposta direta, e sim fazendo-os indagarem sobre o cálculo da quantidade de bandeiras.
Sugerem-se os seguintes questionamentos:

"Vocês acham que é possível calcular a quantidade de bandeiras sem construí-las?"

"Analisem a quantidade de listras e de cores de suas respectivas e equipes e tentem encontrar alguma relação entre esses números e a quantidade de bandeiras construídas."

"Qual a relação entre esses números?"

"É possível calcular a quantidade de bandeiras de X listras e Y cores?"

Espera-se que, após estas duas últimas perguntas, os estudantes, ao analisarem individualmente e com seus respectivos grupos, consigam chegar a uma relação: a de que a quantidade de bandeiras é igual a Y^X, sendo X a quantidade de listras e Y a quantidade de cores.

95 – 100 min (Finalização)
No último momento da aula, o resultado esperado é que os estudantes tenham chegado à relação estabelecida. Caso não tenham percebido tal relação, é interessante que o professor, após novas explicações, forneça aos seus alunos qual é essa relação.
Assim, além de concluir a aula, o professor pode fazer um apanhado geral, relembrando aos estudantes todas as etapas que se seguiram.

– 5 Recursos
Os recursos que serão utilizados dependem da forma como os estudantes construirão as bandeiras.

– 6 Avaliação
A avaliação pode acontecer da forma como o professor pretender. Sugere-se que, no início da aula, um professor entregue um **guia prático de experimento,** contendo um passo a passo do que os estudantes devem fazer para construir as bandeiras, algumas regras e questões básicas.
Caso o professor prefira, as perguntas que este livro sugere que sejam feitas pelo professor de foram oral podem ser adaptadas para um material escrito, de forma que o professor, ao fim da aula, analisará este material e o tomará como avaliativo.

Este primeiro dia de aula com o Jogo das Bandeiras é, em resumo, uma atividade que tenta estimular o pensamento e o raciocínio lógico-quantitativo dos estudantes para com a quantidade total de maneiras de se construir objetos.

Fonte: elaborado pelo autor.

Caso o objetivo final seja atingido (a conjectura do Princípio Multiplicativo para o cálculo da quantidade de bandeiras), então o professor pode considerar que os alunos estão caminhando para o entendimento concreto desse conceito de Análise Combinatória.

A partir de agora, na segunda aula de 100 minutos dessa Eletiva, sugere-se que o professor dê explanações teóricas sobre o Princípio Multiplicativo, apresentando sua definição e exemplos clássicos, para que assim os estudantes dominem o cálculo dessa importante ferramenta de contagem. Além disso, entra em questão também a parte da jogabilidade do Jogo das Bandeiras.

Agora, seguem-se as etapas do plano de aula da Semana 2 (100 minutos) para a aplicação do Jogo.

– **1 Identificação**

Aula 2 do Jogo das Bandeiras (Princípio Multiplicativo).

– **2 Objetivos**

Desenvolver os conceitos iniciais do Princípio Multiplicativo através da construção de bandeiras com quantidades de listras e de cores previamente determinadas;

Aprimorar o raciocínio lógico e a memorização dos estudantes através da jogabilidade Desafiante e Desafiado.

– **3 Conteúdo**

Princípio Multiplicativo.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momento Inicial)

Nesse momento, é imprescindível que o professor relembre todos os passos ocorridos na última semana e que esclareça para os alunos que a Eletiva é uma construção por etapas, e que cada etapa tem a sua devida importância.

5 – 55 min (Explicação sobre o Princípio Multiplicativo)

Cinquenta minutos podem ser destinados para a explicação teórica do professor sobre o Princípio Multiplicativo. Nesse momento, o professor pode utilizar o que o **livro didático** tem à disposição sobre a Análise Combinatória, e fazer explicações e exercícios sobre o assunto, com o objetivo de consolidar o conceito.

55 – 95 min (Jogabilidade)

O Jogo das Bandeiras deve, finalmente, ser aplicado com os estudantes, no que talvez seja um

Fonte: elaborado pelo autor.

dos momentos mais aguardados por eles. O professor deve lembrar de explicar adequadamente qual é o papel do Desafiado e o papel do Desafiante.

Nesse contexto, **a criatividade e o convívio dos estudantes com jogos deve ser levada em consideração**, e todas as dicas e sugestões que os alunos apresentarem devem ser consideradas pelo professor, de forma a adaptar o jogo à realidade da escola.

Nesses minutos, o professor pode até mesmo sugerir que os grupos de alunos sejam misturados, para que cada estudante tenha contato com as diferentes bandeiras construídas pelos seus colegas e encontre um desafio maior ao tentar adivinhar a bandeira escolhida dentre as bandeiras que ele não construiu.

Antes de iniciar o Jogo, é importante que as regras sejam estabelecidas, como por exemplo a quantidade de perguntas que pode ser feita pelo desafiado.

O exemplo abaixo ajudará a esclarecer essa parte do Jogo. Abaixo estão todas as bandeiras possíveis de serem construídas com 2 listras e as cores laranja, azul e verde:

Essas podem ser as bandeiras construídas pelo Grupo 1, por exemplo. Se o professor e os alunos estipularem que o Desafiado só pode fazer **duas perguntas**, uma delas pode ser:

"A sua bandeira tem duas cores diferentes?"

Caso a resposta seja afirmativa, o Desafiado terá seis possibilidades de resposta: as bandeiras 1, 2, 4, 5, 6 e 7. Ele poderá, então, fazer uma segunda pergunta:

"A sua bandeira tem a cor azul?"

Caso a resposta seja negativa, o Desafiado reduzir-se-á à duas possibilidades de resposta: as bandeiras 2 e 5, de forma que a sua probabilidade de acertar aumenta.

É importante que o professor não menospreze o momento da jogabilidade e que seja um importante guia nesse processo.

Fonte: elaborado pelo autor.

Quanto maior o número de bandeiras, obviamente deverá ser maior a quantidade de perguntas permitidas pelo Desafiado.

95 – 100 (Finalização)
Nesse último momento, a turma se despedirá do Jogo das Bandeiras, então é interessante que o professor faça um apanhado geral, relembrando todos os conceitos desenvolvidos no decorrer das duas aulas.

– **5 Recursos**
Os recursos desse segundo momento são as bandeiras que, inicialmente, foram construídas pelos alunos com a ajuda do professor. Além delas, o livro didático e pincéis de quadro.

– **6 Avaliação**
A avaliação acontecerá de forma processual e durante todo o momento da aula. O professor deve reparar de que maneira os alunos respondem aos seus questionamentos, bem como verificar de que forma eles respondem aos exercícios sobre o Princípio Multiplicativo. O resultado dessas avaliações contínuas serão guia da tomada de decisão do professor para cada momento da aula.

É importante deixar claro para o professor que há diversas maneiras de aprofundar e aprimorar o Jogo das Bandeiras.

Duas delas são as seguintes: em vez de permitir que as cores possam ser repetidas na construção das bandeiras, o professor pode acrescentar a regra de que não é permitido repetir cores, o que pode *dificultar* um pouco o andamento do Jogo, mas isso não é um ponto negativo, visto que os alunos estarão se preparando para uma situação nova; outra possibilidade é a inserção de *símbolos* nas bandeiras, como por exemplo Sol, Árvore, Estrelas, o que ocasionará uma discussão interessante sobre as diferentes possibilidades de bandeiras, visto que as bandeiras *poderão ou não* ter símbolos em seus desenhos.

– **Conclusão**

Cabe, então, quais devem ser os benefícios cognitivos e de aprendizado que os estudantes obterão ao construir o Jogo das Bandeiras.

I. **Dedução formal do Princípio Multiplicativo:** caso os estudantes **consigam** chegar à conclusão de que, para calcular a quantidade de bandeiras possíveis de ser construídas com 2 listras e 3 cores, bastaria multiplicar 3 vezes 3, então o objetivo central da aplicação do Jogo foi atingido: os alunos conseguiram deduzir uma fórmula. Como o Princípio Multiplicativo é uma das bases para a abstração de conceitos mais profundos da Análise Combinatória, considera-se esse benefício o mais importante;
II. **Memorização e criação mental de Árvores de Possibilidades:** como o estudante tentará adivinhar qual foi a bandeira escolhida pelo Desafiante, ele fará o raciocínio mental de

Fonte: elaborado pelo autor.

quais são **TODAS** as bandeiras construídas pelo seu grupo ou por um grupo alheio, e, após fazer perguntas e analisar suas respostas, excluirá as bandeiras que não foram escolhidas e considerará apenas aquelas que satisfazem às perguntas feitas;

III. **Engajamento e tomadas de decisão**: caso a aplicação do Jogo das Bandeiras seja feita quase que, completamente, seguindo as ideias e as sugestões dos estudantes, o ganho será gigantesco. O estudante tem que se considerar como um personagem importantíssimo no seu processo de aprendizagem, e ao lhe dar voz e possibilidades de escolhas, ele tomará esse papel para si e será capaz de construir o conhecimento de forma significativa, que é o objetivo do professor que ensina matemática. Considera-se, então, que se trata de uma aprendizagem ativa.

IV. **Trabalho em equipe:** uma importantíssima habilidade que será desenvolvida pelos alunos na aplicação do Jogo das Bandeiras, visto que, em quase todos os momentos, ele terá contato com seus colegas e com o professor, de forma que desenvolverá o diálogo e as atitudes que devem ser tomadas em um trabalho em equipe.

V. **Possível interdisciplinaridade:** como o jogo envolve a criação de bandeiras, acredita-se que pode haver uma interessante conversa com professores de outras disciplinas, a saber: Artes e Geografia. Com a ajuda do professor de Artes, os estudantes podem ter contato com diversas outras maneiras de construção de bandeiras, o que pode estimular sua criatividade. Já com o professor de Geografia, os alunos teriam contato com países que possuam bandeiras da forma como o jogo propõe que elas sejam construídas, o que pode gerar diálogos importantes e de ganho para os alunos.

Fonte: elaborado pelo autor.

22 Capítulo 3 – Jogo das Bandeiras

Fonte: elaborado pelo autor.

Fonte: elaborado pelo autor.

Para o leitor que realizou a leitura do capítulo anterior, relativo ao Jogo das Bandeiras, perceberá que o jogo Descubra a Senha nada mais é do que uma modificação do Jogo das Bandeiras para a utilização de números em vez de cores.

A diferença desse jogo está nas possibilidades. Como o leitor perceberá, é mais fácil construir sequências de números do que de cores. Além disso, os estudantes também estarão submetidos a novos tipos de conceitos da Análise Combinatória: a Permutação e o Arranjo.

– **Entendendo o Jogo**

Enquanto que, no Jogo das Bandeiras, o objetivo dos estudantes era montar bandeiras com dadas quantidade de listras e cores, aqui no Descubra a Senha, o objetivo dos estudantes é **montar todas as possibilidades de senhas com uma dada quantidade de determinados caracteres.**

Por exemplo, o professor pode solicitar que os estudantes monte todas as possíveis senhas de 3 caracteres utilizando os algarismos 3, 5 e 7. É esperado que a resposta seja igual a que está abaixo:

333	335	337	353	355	357	373	375	377
533	535	537	553	555	557	573	575	577
733	735	737	753	755	757	773	775	777

A quantidade de senhas, neste caso, é calculada por uma simples aplicação do Princípio Multiplicativo. Porém, além disso, é possível que o professor desafie seus estudantes na construção de senhas inserindo algumas imposições, como por exemplo:

i. Construa todas as senhas possíveis de 4 caracteres usando os números 2, 4, 6 e 8, sem repetir tais números → **trata-se de uma Permutação.**
ii. Construam todas as senhas possíveis de 3 caracteres usando os números 2, 4, 6 e 8, sem repetir tais números → **trata-se de um Arranjo.**

Percebe-se que, nesses contextos, os alunos estarão submetidos a diferentes técnicas de contagem. O objetivo será, portanto, que eles **percebam** como se calcula a quantidade total de senhas, através do auxílio do professor, que será apenas um **mediador no processo de construção do conhecimento dos alunos.**

A turma será dividida em grupos para a construção de todas as possíveis senhas, porém, a jogabilidade do Descubra a Senha se dará através da mecânica de Desafiante e Desafiado, que está explicada abaixo:

Função do Desafiante: escolher e anotar, em um papel, uma das senhas montadas pelo seu grupo.

Fonte: elaborado pelo autor.

Função do Desafiado: acertar, com base em perguntas estratégicas, qual foi a senha escolhida pelo Desafiante.

Antes de se jogar o Descubra a Senha, o professor e os alunos precisam estabelecer qual deve ser a quantidade máxima de perguntas que o Desafiado pode fazer para o Desafiante. É claro que a quantidade de perguntas dependerá da quantidade de senhas montadas pelo grupo: quanto mais senhas forem, mais perguntas serão necessárias para descobrir!

Como este jogo baseou-se no famoso jogo Cara a Cara, o professor e os estudantes podem pensar em construir uma espécie de **cartilha contendo todas as senhas criadas pelos grupos** para que, com base nas respostas do Desafiante, o Desafiado possa **riscar quais são aquelas senhas que podem ser descartadas**.

Considera-se que este jogo é vantajoso para o processo de aprendizagem dos estudantes visto que, na construção das senhas, os estudantes passarão a ter bastante familiaridade com a construção de Árvores de Possibilidades (o professor, como mediador, terá o dever de dar algumas dicas que ajudam os alunos a construírem as senhas, porém, sem dar diretamente as respostas).

Além disso, entende-se que o professor não deve ser o detentor do conhecimento nem o possuidor de todas as regras desse jogo, ou seja, **ele deve levar em consideração todas as sugestões propostas pelos estudantes**, desde a construção da senhas até a confecção das cartilhas. É com esse tipo de atitude que se desenvolverá a autonomia e a criatividade dos alunos.

Agora, seguem-se as etapas do plano de aula da Semana 1 (100 minutos) para a aplicação do Jogo.

– **1 Identificação**

Aula 1 da construção do jogo Descubra a Senha.

– **2 Objetivos**

Aprofundar e exercitar o que foi aprendido sobre o Princípio Multiplicativo através da construção e da prática do Jogo "Descubra a Senha";

Desenvolver uma ideia inicial sobre a Permutação e o Arranjo;

Conjecturar as fórmulas para os cálculos de Permutação e Arranjo.

– **3 Conteúdo**

Princípio Multiplicativo, Permutação e Arranjo.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

Fonte: elaborado pelo autor.

0 – 5 min (Momento Inicial)
No início da aula, o professor deve fazer uma introdução explicando como se dará a dinâmica do jogo, deixando claro qual é o principal objetivo do jogo. Logo em seguida, deve dividir a turma em grupos, de acordo com a quantidade de estudantes. Neste plano de aula, far-se-á a sugestão para **seis grupos**.

5 – 35 min (Construção das Senhas com Princípio Multiplicativo)
Nesse ponto, o professor deve saber que a aula e o desenvolvimento dos conceitos propostos devem acontecer de forma gradual. Inicialmente, pode-se propor o seguinte:

Grupo 1: senhas com 3 caracteres contendo os algarismos 4, 5 e 6;
Grupo 2: senhas com 4 caracteres contendo os algarismos 0, 1 e 2;
Grupo 3: senhas com 2 caracteres contendo os algarismos 7, 8 e 9;
Grupo 4: senhas com 3 caracteres contendo os algarismos 5, 6, 7 e 8;
Grupo 5: senhas com 4 caracteres contendo os algarismos 2, 3, 5 e 7;
Grupo 6: senhas com 2 caracteres contendo os algarismos 2, 4, 6 e 8.

Em todos os grupos acima, o método de contagem da quantidade de senhas é o mesmo: utilização do Princípio Multiplicativo. Espera-se que os alunos, depois da experiência com o Jogo das Bandeiras e da aula sobre o assunto, tenham mais familiaridade e facilidade com o cálculo da quantidade de senhas.
O professor deve ajudá-los a perceber que a quantidade de senhas em cada situação será dado pela quantidade de algarismos disponíveis para a senha elevado a quantidade de caracteres. Por exemplo, o Grupo 4 deve perceber que a quantidade de senhas é dado por $4^3 = 64$.

35 – 40 min (Socialização)
Após a construção das senhas pelos grupos, deve haver um momento de socialização, em que cada grupo deve demonstrar para os outros grupos qual foi o desafio passado pelo professor, bem como explicar qual foi o método de contagem utilizado.
Espera-se que os grupos obtenham as seguintes respostas:
Grupo 1: $3^3 = 27$ senhas;
Grupo 2: $3^4 = 81$ senhas;
Grupo 3: $3^2 = 9$ senhas;
Grupo 4: $4^3 = 64$ senhas;
Grupo 5: $4^4 = 256$ senhas (essa quantidade de senhas é grande demais, portanto, o professor pode falar que o grupo não precisa escrever todas as senhas);
Grupo 6: $4^2 = 16$ senhas.

Após a socialização dos grupos, o professor deve deixar claro que todos os alunos utilizaram o Princípio Multiplicativo.

Fonte: elaborado pelo autor.

40 – 80 (Construção das senhas com Permutação e Arranjo)

A partir desse momento, os alunos serão submetidos a uma nova forma de contagem, com o acréscimo da seguinte regra: **os dígitos da senha não podem se repetir**. O leitor deve saber que essa imposição muda completamente a forma de contagem de senhas. Dessa maneira, o professor terá um papel importante de **mediador do processo de aprendizagem dos alunos.** Para os grupos, o professor pode dar os seguintes desafios:

Grupo 1: senhas com 3 caracteres contendo os algarismos 4, 5 e 6;
Grupo 2: senhas com 4 caracteres contendo os algarismos 0, 1, 2 e 3;
Grupo 3: senhas com 2 caracteres contendo os algarismos 6, 7, 8 e 9;
Grupo 4: senhas com 3 caracteres contendo os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9;
Grupo 5: senhas com 4 caracteres contendo os algarismos 2, 3, 5 e 7;
Grupo 6: senhas com 2 caracteres contendo os algarismos 0, 2, 4, 6 e 8.

Lembrando que os algarismos não podem ser repetidos, percebe-se que os Grupos 1, 2 e 5 devem utilizar a Permutação para a contagem total de senhas, e que os Grupos 3, 4 e 6 devem usar o Arranjo para o cálculo dessa quantidade.

Entretanto, como os estudantes **não estão familiarizados com as fórmulas nem os conceitos de Permutação e Arranjo,** eles devem construir as senhas montando-as manualmente, com a ajuda e a mediação do professor.

É provável que os estudantes, mediante sua experiência no Jogo das Bandeiras, utilizem desenhos em Árvores de Possibilidades como uma estratégia eficiente para o cálculo da quantidade de senhas.

80 – 85 min (Socialização)

Novamente, os estudantes devem se submeter ao momento de socialização, esperando-se que tenham obtido os seguintes resultados:

Grupo 1: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ senhas
Grupo 2: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ senhas;
Grupo 3: $4 \cdot 3 = 12$ senhas;
Grupo 4: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ senhas;
Grupo 5: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ senhas;
Grupo 6: $5 \cdot 4 = 20$ senhas.

Nesse momento, o esperado dos estudantes é que eles expliquem para seus colegas qual foi a linha de raciocínio utilizada para encontrar essas quantidades de senhas. **Caso o professor perceba que os alunos conseguiram montar todas as senhas com muita facilidade**, o que pode ser realizado é que o professor aumente a dificuldade do desafio, de forma a fazer com que eles obtenham mais senhas.

Fonte: elaborado pelo autor.

85 – 95 min (Resolução, por parte do professor)
É hora do professor mostrar para os estudantes como fazer a construção de todas as senhas, sem precisar necessariamente escrever todas elas. Normalmente, a explicação fica por conta dos dígitos e as quantidades de possibilidades, conforme podemos ver no exemplo abaixo:

Grupo 01

Dígito 1	Dígito 2	Dígito 3
3 possibilidades	2 possibilidades	1 possibilidade

O cálculo para a quantidade de senhas do Grupo 01 é 3!, que vem da Permutação de 3 elementos. **Como os estudantes ainda não conhecem o Fatorial, o professor apenas mostrará como se calcula, sem apresentar o Fatorial.**
O professor pode dizer, por exemplo, que quando se quer saber quantas senhas de X dígitos utilizando X algarismos diferentes existem, basta multiplicar o X por todos os números naturais menores do que ele.

95 – 100 min (Conclusão e resumo da aula)
Nesses últimos minutos, o professor pode relembrar a todos os alunos os principais acontecimentos da aula, bem como dar um vislumbre de como será a próxima aula, na semana seguinte.

– 5 Recursos
Os recursos dependem do combinado com o professor e os alunos. Porém, esse jogo é bastante simples e pode ser feito com lápis, caneta, borracha e folhas de papel.

– 6 Avaliação
A avaliação acontecerá de forma processual, através da observação do professor da atitude e das ideias dos alunos.

Caso os estudantes tenham participado de forma ativa na aula do Jogo das Bandeiras, e tenham entendido como se calcula a quantidade total de possibilidades de Bandeiras, então é provável que eles tenham encontrado certa facilidade para o cálculo da quantidade total de senhas contendo dígitos diferentes.

Se os estudantes ainda não estiverem familiarizados com esse cálculo, o professor tem liberdade de dedicar um momento a mais para seus alunos aprimorarem o pensamento quantitativo.

Agora se os alunos tiveram muita facilidade no cálculo, em especial naqueles casos em que utiliza-se Arranjo para a contagem, o professor pode também encontrar maneiras de tornar mais desafiador o Descubra a Senha.

Fonte: elaborado pelo autor.

Agora, dando continuidade, a segunda aula do Descubra a Senha será, de fato, **jogar o Descubra a Senha.** Entretanto, acredita-se que é importante uma explicação teórica inicial sobre o assunto, com exercícios simples, de forma que os estudantes aprimorem o cálculo em si, em especial a multiplicação.

O jogo Descubra a Senha fica mais interessante quanto mais senhas tiverem para construir e tentar adivinhar, então, o professor pode solicitar novos desafios para os grupos, de forma que se tenham mais e mais senhas, tornando o jogo cada vez mais divertido e desafiador. Além disso, o professor também pode pensar em uma espécie de **brinde**, para incentivar os alunos e fazê-los tentar se destacar no processo de memorização das senhas criadas.

Agora, segue-se para o segundo plano de aula do Descubra a Senha.

– **1 Identificação**
Aula 2 do jogo Descubra a Senha.

– **2 Objetivos**
Exercitar a jogabilidade do Descubra a Senha;
Apresentar os conceitos iniciais de Arranjo e Permutação, explicitando sua diferença e em que situação aplicá-los.
Resolver exercícios clássicos de Arranjo e Permutação.

– **3 Conteúdo**
Princípio Multiplicativo, Permutação e Arranjo.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momento Inicial)
O instante inicial da aula apresenta uma grande importância, visto que o professor pode relembrar tudo o que foi executado pelos seus estudantes na semana anterior. Além disso, explicar tudo o que vai acontecer nesta aula.

5 – 55 min (Explicações sobre Permutação e Arranjo)
Nesses cinquenta minutos de aula, o professor pode tomar seu livro didático como um auxiliar para as explicações teóricas de Permutação e Arranjo. Ao explicar tais conceitos, o professor deve fazer uma ligação entre o que está sendo ensinado e o Descubra a Senha.
É importante que o professor saiba que **não é necessária a utilização de fórmulas para o cálculo de quantidades de Permutações e Arranjos, de forma que os estudantes podem fazer tais cálculos apenas utilizando o raciocínio lógico-quantitativo trazido pelo professor.**

Fonte: elaborado pelo autor.

55 – 95 min (Jogabilidade)
O jogo Descubra a Senha será um grande auxiliar no raciocínio quantitativo dos estudantes. É com a jogabilidade que os estudantes farão, mentalmente e de forma rápida, quais são todas as possibilidades, e com esse exercício, **os alunos passarão a criar estratégias para a formação de novas senhas. Acredita-se que isso fará com que os alunos criem estratégias, também, para cálculos mais complexos.**
Vale lembrar que no momento da jogabilidade do Descubra a Senha, as opiniões e sugestões dos alunos sobre o desenrolar do jogo devem ser consideradas e, se possível, postas em ação, já que o objetivo geral dessa aula é seu aprendizado.

O leitor deve lembrar que a jogabilidade do Descubra a Senha depende do desempenho de dois estudantes: o Desafiante e o Desafiado.
Antes de iniciar o jogo, é importante que as regras sejam estabelecidas, como por exemplo a quantidade de perguntas que pode ser feita pelo desafiado.

Aqui, pode-se trazer um exemplo prático. As senhas do Grupo 4 da aula anterior, eram todas as senhas com 3 caracteres contendo os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9, sem repeti-los. As senhas são as seguintes:

567	568	569	576	578	579	586	587	589	596	597	598
657	658	659	675	678	679	685	687	689	695	697	698
756	758	759	765	768	769	785	786	789	795	796	798
856	857	859	865	867	869	875	876	879	895	896	897
956	957	958	965	967	968	975	976	978	985	986	987

Um Desafiante escolhe uma das senhas acima. Cabe ao Desafiado fazer perguntas estratégicas, como por exemplo:

"A senha escolhida possui o algarismo 7?"

Caso a resposta seja **afirmativa**, o Desafiado pode riscar várias das senhas que estarão presentes em sua folha (ou na mente). As senhas descartadas na primeira pergunta foram riscadas de **verde**. Uma próxima pergunta do Desafiado pode ser a seguinte:

"A sua senha possui três algarismos consecutivos?"

Caso a resposta **negativa,** o Desafiado poderá riscar, novamente, algumas das senhas propostas. Nesse exemplo, foram marcadas de **amarelo** as senhas que não possuem três algarismos consecutivos. Para eliminar ainda mais senhas, o Desafiado pode questionar:

"A sua senha possui os algarismos 8 e 9?"

Fonte: elaborado pelo autor.

Caso a resposta seja **afirmativa**, mais senhas poderão ser descartadas, as quais estão marcadas em **azul**. Restam, então, seis senhas para que o Desafiado possa **arriscar qual a senha escolhida pelo Desafiante.**

Percebe-se, portanto, que a jogabilidade do Descubra a Senha é um forte exercício para a criatividade dos estudantes, visto que eles precisam pensar em perguntas estratégicas. Além disso, há também a chance de o Desafiante pensar em qual pode ser a senha mais difícil de ser descoberta.

Caso seja permitida mais uma pergunta, de acordo com as regras definidas pelos alunos e professores, o desafiado pode questionar:

"Sua senha é uma sequência de números, decrescente ou crescente?"

Caso a resposta seja **positiva**, então o Desafiado poderá escolher entre duas senhas, pois terá riscado as senhas que foram marcadas em **vermelho**.

95 – 100 min (Finalização da aula)

Para a finalização desta aula, o professor pode fazer um apanhado geral sobre tudo o que foi trabalhado nas duas semanas, enfatizando as partes principais e revisando os processos que envolvem os cálculos de Permutação e Arranjo.

– 5 Recursos

Como dito anteriormente, novamente é importante falar que os Recursos dependem de como a turma, como um todo, decidiu trabalhar o Descubra a Senha.

– 6 Avaliação

Como o professor é um agente mediador do processo de aprendizagem nessas aulas, a sua avaliação se dará através da análise da participação e das ideias dos estudantes em relação ao jogo.

– Conclusão

Cabe, então, quais devem ser os benefícios cognitivos e de aprendizado que os estudantes obterão ao construir e jogar o Descubra a Senha.

I. **Dedução formal do cálculo de Permutação e Arranjo**: caso os estudantes **consigam** chegar à conclusão de como se calcula a quantidade total de Permutações e Arranjos, considera-se que o objetivo geral estará atingido. Por exemplo, para o Grupo 4, o cálculo da quantidade total de senhas se dá por uma simples multiplicação $5 \cdot 4 \cdot 3$. Ao ser submetido a outros problemas, se o aluno conseguir fazer o cálculo da quantidade total de possibilidades **sem que seja necessário montar todas as possibilidades**, então o professor terá feito um ótimo trabalho através do jogo.;
II. **Memorização e criação mental de Árvores de Possibilidades:** o estudante que conseguir jogar o Descubra a Senha sem "colar" na folha quais são todas as senhas, estará sendo submetido a um processo de trabalho mental grandioso, já que estará memorizando todas

Fonte: elaborado pelo autor.

possíveis senhas. Considera-se que isso possui um grande valor.

III. **Engajamento e tomadas de decisão:** caso a aplicação do Descubra a Senha seja feita quase que, completamente, seguindo as ideias e as sugestões dos estudantes, o ganho será gigantesco. O estudante tem que se considerar como um personagem importantíssimo no seu processo de aprendizagem, e ao lhe dar voz e possibilidades de escolhas, ele tomará esse papel para si e será capaz de construir o conhecimento de forma significativa, que é o objetivo do professor que ensina matemática. Considera-se, então, que se trata de uma aprendizagem ativa.

IV. **Trabalho em equipe:** uma importantíssima habilidade que será desenvolvida pelos alunos na aplicação do Jogo das Bandeiras, visto que, em quase todos os momentos, ele terá contato com seus colegas e com o professor, de forma que desenvolverá o diálogo e as atitudes que devem ser tomadas em um trabalho em equipe.

No início deste capítulo, foi mencionado que o jogo Descubra a Senha baseia-se no famoso jogo Cara a Cara. Nele, os jogadores têm uma espécie de painel, onde podem descer o rosto dos personagens que não foram escolhidos por seu oponente.

No jogo Descubra a Senha, **o painel pode ser construído pelos alunos de diversas maneiras, e pode até mesmo não ser um painel.** Cabe a eles decidir, de forma artística, qual é a melhor maneira de se organizar todas as senhas possíveis, e isso se trata de um processo de decisão e autonomia dos estudantes.

Fonte: elaborado pelo autor.

Fonte: elaborado pelo autor.

Na sétima semana de aula, os alunos agora terão seu primeiro contato com a montagem de um jogo de tabuleiro. Assim como qualquer jogo de tabuleiro clássico, cada jogador terá um **pião** que andará pelo tabuleiro, partindo da **SAÍDA** até a **CHEGADA**.

Para indicar a quantidade de casas a serem andadas, podem ser usados dados comuns. Além de dados, o professor e os alunos podem entrar em um consenso sobre o método de escolha da quantidade de casas a serem andadas.

Importante: como dados são simples cubos, os estudantes é que podem construí-los, caso a escola não disponha. Além disso, também pode ser feitos dados com mais faces, que são comumente utilizados em jogos de RPG.

Novamente, entende-se que a montagem do tabuleiro deve ser feita pelos estudantes, utilizando sua criatividade. Há, então, uma interdisciplinaridade com Artes, visto que o professor dessa disciplina pode entrar como um auxiliar nesse processo, estimulando a criatividade dos estudantes. É interessante que seja dado aos estudantes com maior familiaridade com desenhos e pinturas a tarefa de confecção dos tabuleiros, dos dados e dos piões.

– **Entendendo o Jogo**

Quantos têm? é um jogo de tabuleiros que pode ser jogado individualmente ou em grupos (como normalmente as turmas têm muitos alunos, é encorajado que seja feito em grupos).

No tabuleiro, deve haver quatro montes de cartas com cores diferentes, cada cor referindo-se a um método diferente de contagem, de todos que foram aprendidos até então, com acréscimo de um novo: a Combinação. Logo, além da Combinação, haverá um monte de cartas para Princípio Multiplicativo, Permutação e Arranjo.

Uma pessoa deve ser eleita a **Contadora**, que vai ser responsável pela leitura das cartas. Quando um estudante jogar o dado e andar pelo tabuleiro, ele cairá em uma casa que terá uma das quatro cores, cada uma delas referente a um método de contagem. O Contador retira a carta de cima e lê o questionamento para o jogador da vez, que responderá **QUANTOS TÊM?**.

Duas coisas podem acontecer: o grupo ou jogador pode **errar** a contagem. Caso erre, nada acontecerá. Caso o grupo ou jogador **acerte** a contagem, ele ganhará a quantidade de pontos que foi dada pelo dado jogado anteriormente.

Para acrescentar um elemento a mais no jogo, a pessoa que é Contadora do jogo escolherá uma das possibilidades do problema escolhido. Caso o grupo que acerte a resposta do problema **também acerte qual foi a escolha do Contador, receberá um ponto a mais.**

O grupo que chegar primeiro ao final do tabuleiro, receberá também uma certa quantidade de pontos como uma premiação pela sorte com os dados. Essa quantidade de pontos deve ser definida pelos professores e pelos alunos. O jogo acaba quando **todos os integrantes chegarem ao final do tabuleiro**. Ganha o grupo ou indivíduo que tiver acumulado a maior quantidade de pontos. Como deve ser imaginado pelo leitor deste texto, devem ser feitas muitas cartas, que devem ser elaboradas pelos próprios alunos.

Fonte: elaborado pelo autor.

Caso o professor entenda que os estudantes ainda não desenvolveram bem os cálculos de Princípio Multiplicativo, Permutação e Arranjo, e ainda não são capazes de serem introduzidos à combinação, então o jogo pode ser feito com apenas esses três métodos de contagem.

Para a aula da primeira semana, é necessário que haja um momento de explicação do professor sobre a Combinação: lembrando que, como os estudantes **ainda não estão familiarizados com o Fatorial, não é interessante o uso de fórmulas.** O ensino do professor deve ser gradual e deve conversar com todas as ideias dos estudantes.

A partir de agora, apresenta-se o plano de aula da primeira semana referente ao jogo Quantos têm?

– **1 Identificação**

Aula 1 da construção do jogo Quantos têm? e explanação inicial sobre a Combinação.

– **2 Objetivos**

Aprimorar o desempenho dos estudantes no cálculo de Princípio Multiplicativo, Permutações e Arranjos;
Desenvolver uma visão inicial sobre a Combinação;
Exercitar cálculos simples de quantidades de Combinações;
Iniciar a montagem do jogo Quantos têm?.

– **3 Conteúdo**

Princípio Multiplicativo, Permutação, Arranjo e Combinação.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momento inicial)

Recomenda-se que a aula se inicie com falas sobre quais serão os objetivos desse novo jogo, deixando claro que nele se concentrará todos os métodos de contagem aprendidos anteriormente, bem como um novo método que será explanado hoje.

5 – 55 min (Introdução à Combinação e resolução de exercícios)

Após a introdução da aula, o professor deve solicitar atenção aos estudantes, pois ele apresentará um novo tipo de problema: aquele em que, dentre os grupos formados, a sequência de elementos do grupo não modifica qual é o grupo.
Ou seja, o professor deve esclarecer que há problemas em que há uma diferença entre escolher senhas com dígitos iguais, e há problemas em que escolher um grupo de três pessoas será o mesmo que escolher outro grupo, com as mesmas três pessoas, só que em ordem diferente. O professor pode dar os seguintes exemplos:

Fonte: elaborado pelo autor.

"Quantas senhas de três dígitos podem ser formadas com os dígitos 2, 3 e 5?"

Sabe-se que, caso os algarismos possam ser repetidos, há um total de 27 senhas (Princípio Multiplicativo).

"Há alguma diferença entre as senhas 235 e 532?"

É esperado que os alunos digam que há uma diferença entre essas senhas, e que a sequência de dígitos ser diferente fez com que outra senha fosse criada.
Agora, o professor pode apresentar outro exemplo que fará com que eles pensem que há casos em que a sequência não importa.

"As aluna Lana, Joyce, Raquel e Isabel formarão duplas para participar de um concurso de dança. Quantas duplas podem ser formadas?"

Nesse momento, o professor ainda não utiliza fórmulas, apenas apresenta esquemas para responder que serão formadas 6 duplas.

"Há alguma diferença entre a dupla Joyce e Raquel e Raquel e Joyce?"

Espera-se que os estudantes percebam que, agora, há problemas em que trocar a sequência de elementos de um grupo **não muda qual foi o grupo formado.**
Então, o professor usará todo esse tempo de cinquenta minutos para apresentar diversos problemas que se encaixam em Combinação. Ele pode utilizar o livro didático ou materiais disponíveis na internet para auxiliá-lo nessa etapa.

55 – 95 min (Início da montagem do jogo)
Agora, o professor pode dar início ao momento da aula em que os aluno iniciarão a montagem do jogo. O professor tem duas escolhas:

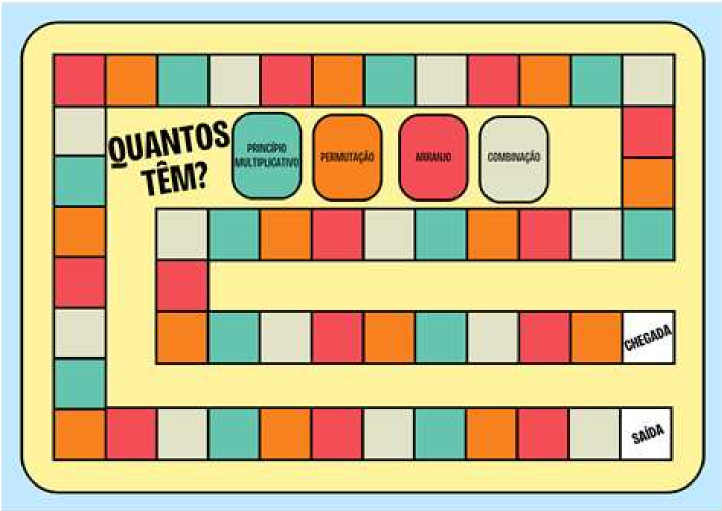
Método 01: dividir a sala em cinco grupos, quatro deles responsáveis pelas montagem das cartas de cada método de contagem e um quinto grupo responsável pela confecção dos piões, dos dados e do tabuleiro. **Ao final, os grupos juntam-se na formação de um único tabuleiro.**

Método 02: dividir a sala em uma quantidade de grupos que o professor quiser, mas dar para cada grupo a responsabilidade da montar, cada um, o seu tabuleiro, suas cartas, piões e dados. **Ao final, a turma inteira terá mais do que um único tabuleiro para jogar.**

É claro que o professor tem autonomia para dividir a turma e fazer o trabalho da maneira que bem entender, diferente dos dois métodos apresentados anteriormente.

Fonte: elaborado pelo autor.

A imagem abaixo mostra um exemplo de tabuleiro.



É importante ressaltar que a imagem acima é **apenas um exemplo**, e a turma juntamente com o professor têm total autonomia na montagem do tabuleiro. Abaixo, há um exemplo de jogabilidade:

Exemplo de Jogabilidade

Supondo que um jogador comece na SAÍDA jogue um dado simples, resultado no número 3. Ao andar três casas, percebe-se que o jogador cairá em uma casa laranja, que refere-se a uma permutação. O Contador, então, tomará uma carta do monte "PERMUTAÇÃO" e vai ler a carta para o jogador, por exemplo:

"Em um banco com três lugares, de quantas maneiras diferentes Bruno, Renato e Anísio podem se sentar nesses três lugares?"

A resposta, através do uso da permutação, é 6 maneiras diferentes. Caso o grupo acerte essa resposta adequadamente, ele acumulará seis pontos **(que devem ser contabilizados pelo Contador)**. Após essa parte, o(s) jogador(es) devem **escolher uma maneira desses três alunos sentarem-se no banco.**

Suponha que escolham: RENATO → ANÍSIO → BRUNO.
Casso essa maneira seja a que foi escolhida pelo Contador, então essa equipe acumulará ainda mais um ponto.

Fonte: elaborado pelo autor.

95 – 100 min (Finalização)
Os últimos minutos da aula, como sempre foi proposto, devem ser destinados para um apanhado geral de todos os acontecimentos. Nesse momento, o professor retira as dúvidas, dá dicas, novos encaminhamentos, ideias, dentre outros.

– **5 Recursos**
Os recursos utilizados podem variar. Para a montagem do tabuleiro, podem ser utilizados papelões de caixa. Certamente serão utilizadas folhas de papel A4. Para a confecção dos tabuleiros, podem ser utilizados pincéis e tinta. Para a montagem dos dados e dos piões, os materiais necessários vão de acordo com o que a turma e o professor decidirem.

– **6 Avaliação**
É importante que, para avaliar, o professor esteja ciente de que deve transitar por entre os grupos para verificar a forma como os estudantes estão trabalhando, vendo quem são aqueles alunos que se destacam entre os outros, bem como se estão cometendo erros de cálculo de contagem.

Dados os direcionamentos da primeira aula do jogo Quantos têm? é importante deixar claro, aqui, que **todas as sugestões acima não passam de sugestões.** Este material pretende ser um norte para o professor que tem interesse em trabalhar análise combinatória e probabilidade no ensino fundamental, logo, ele é totalmente adaptável.

Por exemplo, na montagem do tabuleiro, caso os estudantes sugiram que seja feito um tabuleiro circular, ou que a sala vire um grande tabuleiro, essas ideias devem ser consideradas e, se possível, postas em prática pelo professor.

Além disso, o tabuleiro mostrado na página anterior nada mas é do que um tabuleiro com trilha normal. Os alunos e o professor podem inserir regras e atributos extras, que influenciem na jogabilidade, como por exemplo, a possibilidade de se inserir atalhos, ou até mesmo ter cartas extras, como também casas que façam os piões voltarem.

É provável que os alunos não tenham tido tempo suficiente para a montagem total do tabuleiro e das cartas, dessa forma, será dado na segunda aula um tempo complementar para essa atividade.

Ao final desse tempo de montagem, os alunos devem iniciar a jogabilidade. É importante, novamente, fazer com que eles recebam alguns tipos de premiações por jogarem e se destacarem nesse jogo.

A partir de agora, apresenta-se o plano de aula do segundo momento para o desenvolvimento do jogo Quantos têm?.

– **1 Identificação**
Aula 2 da construção do jogo Quantos têm? e jogabilidade.

Fonte: elaborado pelo autor.

– 2 Objetivos

Finalizar a construção dos tabuleiros e das cartas do Quantos têm?;
Aprimorar a resolução de problemas clássicos de Princípio Multiplicativo, Permutação, Arranjo e Combinação através da jogabilidade do Quantos têm?.

– 3 Conteúdo

Princípio Multiplicativo, Permutação, Arranjo e Combinação.

– 4 Procedimentos Metodológicos

0 – 5 min (Momento inicial)

Nos primeiros minutos da aula, o professor deverá relembrar tudo o que aconteceu na última semana de aula, deixando claro também quais são os objetivos desta aula.

5 – 45 min (Finalização da montagem)

O professor pode, de acordo com sua percepção e dos alunos com base no que já foi feito na primeira aula, fornecer mais tempo para a montagem do tabuleiro e, em especial, das cartas. Acredita-se que as cartas serão a principal dificuldade dos estudantes, visto que seu domínio no conteúdo de Análise Combinatória ainda não está muito bem estabelecido. O professor, portanto, será um grande auxiliar na leitura e confirmação dos problemas criados pelos alunos, para que o jogo montado por eles seja totalmente acurado.
Traz-se, para o leitor, alguns exemplos de cartas dos quatro métodos de contagem propostos pela atividade. **Mas vale salientar que será mais vantajoso ainda se os próprios alunos construírem as cartas. Se o professor trouxer os conteúdos das cartas prontos, os alunos estarão sendo personagens passivos do seu processo de aprendizagem.**

Quadro: 5 problemas de Princípio Multiplicativo.

Problema	Resposta
Um restaurante oferece 3 tipos de entrada (saladas, sopas e batatas), 4 pratos principais (carne, macarrão, peixe e risoto) e 2 sobremesas (sorvete e mousse). De quantas formas um cliente pode montar um combo?	24
Uma loja vende 5 modelos de camisas (polo, jaqueta, regata, casual e blusão) e 3 modelos de calças (skinny, slim e wide). Quantos looks diferentes podem ser montados?	15
Um cofre tem um código de 2 letras seguidas de 2 algarismos. Quantas senhas diferentes podem ser criadas usando as letras A, B, C e os números 1, 2, 3?	81
Uma nova sorveteria oferece seis sabores (baunilha, chocolate, menta, morango, creme e açaí) e cinco coberturas (caramelo, chocolate, amora, doce de leite e limão). Quantos sorvetes diferentes podem ser formados?	30
Um robô deve realizar uma sequência de 3 movimentos: virar à esquerda ou à direita, depois andar ou parar, e por fim saltar ou não. Quantas sequências diferentes são possíveis?	8

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro: 5 problemas de Permutação.

Problema	Resposta
Quantas senhas diferentes de 4 dígitos podem ser feitas com os números 1, 2, 3 e 4, sem repetir?	24
De quantas formas os alunos Adalberto, Bruna, Carlita e Daniel podem apresentar um trabalho, um de cada vez?	24
Um aluno quer empilhar os livros de Matemática, Ciências, História, Geografia e Educação Física. De quantas maneiras diferentes ele pode empilhar?	120
Quantas sequências diferentes podem ser feitas com as letras da palavra **"FIM"**?	6
Haverá uma apresentação das turmas do 6°, 7°, 8° e 9° anos, um por vez. Quantas sequências diferentes de apresentação podem ser feitas?	24

Quadro: 5 problemas de Arranjo.

Problema	Resposta
As turmas do 6°, 7°, 8° e 9° disputarão um interclasse de vôlei, com Campeão e Vice-Campeão. Quantos pódios diferentes podem ser formados?	12
Os times cearenses Fortaleza, Ceará, Guarany, Ferroviário e Floresta disputarão os três primeiros lugares de um campeonato interno. Quantos pódios diferentes podem ser formados?	60
Júlia, Lucas, Maria e Natan participarão de uma apresentação. De quantas formas 3 deles podem ser escolhidos e ordenados na fala?	24
Os alunos Ana, Bruno, Carla, Daniel, Eduardo, Fernanda, Gabriel, Helena, Igor e Jaqueline disputarão a eleição para presidente e vice-presidente do grêmio estudantil. De quantos modos distintos pode ser feita essa escolha?	90
Os algarismos de 0 a 9 serão escolhidos para fazer uma senha, sem repetição. Se a senha tem três dígitos, quantas senhas podem ser formadas?	720

Quadro: 5 problemas de Combinação.

Problema	Resposta
Para montar um grupo de estudo, Ana, Bruno, Carla, Daniel e Elisa devem formar uma equipe com 3 pessoas. De quantas maneiras diferentes esse grupo pode ser formado?	10
Um curso de idiomas oferece turmas para iniciantes em inglês, espanhol, alemão, italiano e japonês. De quantas formas distintas um estudante pode se matricular em 2 desses cursos?	10
Um professor quer selecionar 2 alunos entre Laura, Marcelo, Natan e Olivia para uma tarefa. De quantas formas essa dupla pode ser formada?	6

Fonte: elaborado pelo autor.

Continuação do quadro de Combinação

De uma escola do Ensino Fundamental do 1° ao 9° ano, duas turmas serão escolhidas para uma viagem. De quantas maneiras diferentes essa escolha pode ser feita?	36
A senha de um banco é composta por três letras, escolhidas aleatoriamente entre A e Z (26 letras no total). Quantas senhas diferentes podem ser formadas?	2600

As cartas acima servem apenas para auxiliar o professor e os alunos no processo de montagem das cartas. **Entretanto, enfatiza-se que a construção das cartas deve se dá por meio dos alunos.**

45 – 95 min (Jogabilidade do Quantos têm?)

A partir da finalização da montagem do jogo, os alunos devem jogá-lo. Percebe-se que, caso o professor tenha solicitado que cada grupo montasse um jogo diferente, obviamente os integrantes de cada grupo saberiam das respostas do jogo montado por eles mesmos. **Dessa maneira, é interessante que os grupos troquem entre si os jogos criados, de forma que estarão jogando sem saber previamente as respostas.**

É importante que o professor não menospreze o momento da jogabilidade, visto que, nessa situação, os estudantes encontrarão estratégias para a resolução e se familiarizarão com os problemas, bem como a forma como classificar os problemas de acordo com o método de contagem empregado para resolvê-los.

95 – 100 min (Finalização da aula)

Na finalização da aula, é importante que o professor recolha todos os materiais construídos e guarde-os em lugar seguro, para que possam ser reutilizados depois. Além disso, deve ser feito um apanhado geral resumindo tudo o que foi trabalhado durante essas duas aulas, bem como retirar dúvidas remanescentes dos estudantes.

– 5 Recursos

Os recursos utilizados podem variar. Para a montagem do tabuleiro, podem ser utilizados papelões de caixa. Certamente serão utilizadas folhas de papel A4. Para a confecção dos tabuleiros, podem ser utilizados pincéis e tinta. Para a montagem dos dados e dos piões, os materiais necessários vão de acordo com o que a turma e o professor decidirem.

– 6 Avaliação

É importante que, para avaliar, o professor esteja ciente de que deve transitar por entre os grupos para verificar a forma como os estudantes estão trabalhando, vendo quem são aqueles alunos que se destacam entre os outros, bem como se estão cometendo erros de cálculo de contagem.

Como esse jogo envolve a criatividade e a criação dos estudantes, em especial das cartas e do tabuleiro, pode ser que o professor ache necessário mais tempo destinado para ele. Dessa

Fonte: elaborado pelo autor.

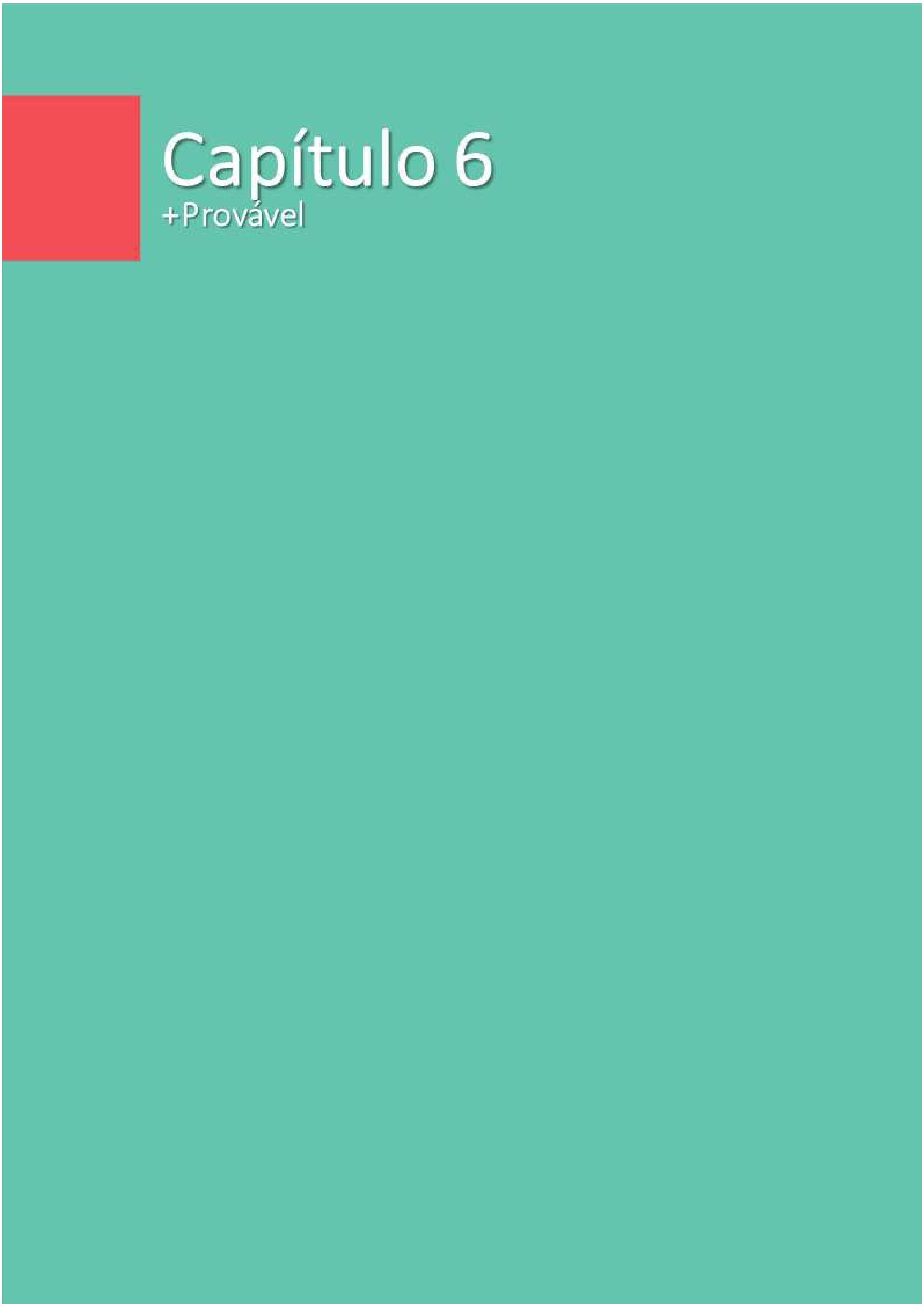
forma, caso seja necessário, três aulas devem ser usadas para a finalização e a jogabilidade do Quantos têm?.

– **Conclusão**

É importante trazer para o leitor quais são os benefícios que se considera atrelados aos alunos que jogarem e construírem o Quantos têm?.

I. **Aprendizagem através de metodologia ativa.** Como os alunos, nesse processo de construção de jogos, serão os principais autores das regras, das cartas, e de toda a jogabilidade, entende-se que o aprendizado dos conceitos de análise combinatória se dará de forma ativa que, de acordo com a literatura, se mostra como essencial.
II. **Compreensão prática da Combinação.** Através do entendimento da Combinação como uma construção que pode acontecer sem fórmulas, o estudante entenderá o cerne desse método de contagem.
III. **Interpretação e elaboração de problemas.** Só é capaz de elaborar problemas de contagem aqueles que dominam os conhecimentos de contagem. Em uma disciplina de Análise Combinatória, espera-se que os estudantes, com o passar das aulas, dominem os métodos de contagem suficientemente bem para serem capazes de criar situações-problema.
IV. **Raciocínio lógico-dedutivo.** Uma vez que os estudantes entendam a lógico por trás do cálculo de quantidades, espera-se que ele seja capaz de deduzir um padrão para este cálculo, de forma que consigam chegar à fórmulas.
V. **Engajamento e trabalho em equipe.** Dado que em todos os momentos os estudantes têm de estar em contato com colegas e/ou professores, para tomarem decisões assertivas, entende-se que eles irão desenvolver o engajamento e o trabalho em equipe, habilidades essenciais para estudantes da atualidade.

Fonte: elaborado pelo autor.



Fonte: elaborado pelo autor.

Depois de quatro semanas exercitando o raciocínio quantitativo através de jogos que estimulam os métodos de contagem, é hora de os estudantes terem seu primeiro contato com um jogo que desenvolva a Probabilidade.

O +Provável é um jogo de cartas que se baseia em um já comercializado jogo chamado de Dobro (imagem abaixo), que pode ser jogado por até cinco pessoas simultaneamente, e cada uma delas recebe seis cartas com valores de 2 a 12.

No contexto deste material, as cartas não valerão um número entre 2 e 12, e sim uma probabilidade.

– **Entendendo o Jogo**

+Provável é um jogo de cartas baseado no comercializado jogo "Dobro" que pode ser jogado por até cinco pessoas simultaneamente. **Cada carta traz consigo um problema simples de probabilidade clássica, em que o jogador deve estar atento para calcular o valor da carta, que é exatamente o mesmo valor da Probabilidade de acontecer o evento que está descrito nela.** Por exemplo, se a carta apresentar o texto "no sorteio de um número de 1 a 100, a probabilidade de cair um número par", então esta carta tem valor $\frac{1}{2}$.

Cada jogador recebe seis cartas, e o restante das cartas fica no monte, em cima da mesa, virado para baixo. Para começar, escolhe-se aleatoriamente algum dos jogadores para colocar uma de suas cartas virada para cima na mesa. Sempre que descartar, o jogador deve tomar uma carta do monte, de modo a permanecer com as seis cartas. O próximo jogador deve, então, colocar na mesa uma carta cujo evento seja mais provável do que o evento do jogador anterior.

Quando chegar o momento em que um aluno não possui uma carta cujo evento é mais provável do que a carta da mesa, ele vai pegar todas as cartas da mesa e guardá-las. Em um

Fonte: elaborado pelo autor.

certo momento, as cartas do monte acabarão e o jogo se encaminhará para o fim. Assim, o jogo continua até que todos os jogadores descartem suas cartas, sempre pegando as cartas da mesa caso não tenha uma para jogar. A estratégia está no fato de que, para descartar o número máximo de cartas, deve-se começar por eventos pouco prováveis.

Quando todas as cartas do monte acabarem e nenhum jogador puder pegar mais cartas, o jogo continuará com descartes até que todos os jogadores tenham descartado todas as suas cartas. **Ganhará o +Provável aquele que tiver recolhido a menor quantidade de cartas.**

Através desse jogo, espera-se que os alunos criem familiaridade com o cálculo rápido de probabilidades e com os problemas clássicos de probabilidade clássica. **A partir de agora, tem-se a descrição do plano de aula da primeira semana da construção do jogo +Provável.**

– **1 Identificação**
Aula 1 da construção do jogo +Provável e explanação inicial sobre a Probabilidade.

– **2 Objetivos**
Desenvolver uma visão inicial sobre a Probabilidade, através da apresentação de problemas clássicos e simples;
Exercitar cálculos simples de Probabilidade;
Aprimorar o conhecimento sobre frações e comparação de frações, ao exercitar os cálculos de Probabilidade;
Iniciar a montagem do jogo +Provável.

– **3 Conteúdo**
Probabilidade (introdução).

– **4 Procedimentos Metodológicos**
0 – 5 min (Momento inicial)
Inicialmente, o professor deve explicar para toda a turma que, a partir de agora, os jogos restantes da eletiva versarão sobre uma área da matemática chamada de Probabilidade, e que os jogos sobre contagem não serão mais jogados, mas que o conhecimento construido na criação e na jogabilidade dos jogos anteriores serão extremamente úteis para o cálculo de Probabilidade.

5 – 55 min (Introdução teórica à Probabilidade)
Em cinquenta minutos, recomenda-se que o professor faça uma **explanação teórica sobre os conceitos de Probabilidade**, explicando para os alunos a sua definição formal (que, normalmente, é trazida nos livros didáticos como a razão entre dois números), isso porque, para que os estudantes sejam capazes de criar problemas que envolvam a Probabilidade, eles devem estar familiarizados com o conceito e com problemas clássicos.

Fonte: elaborado pelo autor.

É importante que, além de apresentar propriamente dita a definição de Probabilidade, o **professor também resolva diversos problemas e exercícios**, visto que, acima de tudo, o jogo +Provável nada mais é do que a resolução de exercícios com cálculo de probabilidade.
Também é importante verificar o manejo dos alunos com a **simplificação de frações**, visto que os valores das cartas serão dados pelo valor da fração de Probabilidade simplificada.
Caso o professor acredite que seja necessário destinar mais tempo para a explicação teórica de Probabilidade, certamente ele poderá fazer isso.

55 – 95 (Explicação do jogo e início montagem)
A partir do momento em que o professor explica para seus alunos o conceito de Probabilidade de como calculá-la, é possível iniciar a montagem do jogo.
Recomenda-se, então, que o professor primeiramente explique como funciona o jogo, com base nas regras explicadas acima, e logo em seguida divida a sala em grupos para dar início à montagem das cartas.
As quantidades de cartas se basearão no jogo Dobro. A tabela abaixo mostra a quantidade de cartas que devem ser construídas e quais os valores dessas cartas. Recomenda-se que essas quantidades sejam seguidas à risca, visto que elas foram pensadas estrategicamente para a durabilidade padrão de jogo.

Valor da carta (em Probabilidade)	Quantidade de cartas
$\frac{1}{100}$	5
$\frac{1}{20}$	6
$\frac{1}{10}$	6
$\frac{1}{5}$	6
$\frac{1}{4}$	6
$\frac{1}{3}$	5
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{3}{5}$	4
$\frac{3}{4}$	3
$\frac{4}{5}$	3
1 (evento certo)	1

Fonte: elaborado pelo autor.

Além das cartas de Probabilidades, também podem ser feitas cartas especiais. **Para o contexto do jogo +Provável, recomenda-se três cartas especiais: curinga, passa a vez e inverte o sentido**, cujas quantidades e funções estão descritas na tabela.

Nome da Carta	Função	Quantidade de cartas
Curinga	A carta Curinga vale qualquer probabilidade que o jogador escolher. Serve para situações em que o jogador não possui uma carta com probabilidade maior do que a da mesa. Usando o Curinga, ele pode escolher de quanto será a probabilidade da carta.	3
Passa a vez	O nome já diz: caso o jogador não tenha uma carta com probabilidade maior do que a da mesa, ele pode usar a carta Passa a vez para dar a vez ao seu colega do lado.	2
Inverte o sentido	Essa carta serve também como uma Passa a vez, porém, além de isentar o jogador de descartar alguma carta de probabilidade, também inverte o sentido de jogo (horário ↔ anti-horário).	2

O professor pode apresentar essas tabelas para os alunos, com o objetivo de auxiliá-los no entendimento da Jogabilidade do +Provável. Depois de mostrar essas tabelas e explicar como funciona o jogo, o professor dividirá a sala em grupos e dará para os grupos as responsabilidades de construir o jogo.

É importante deixar claro para os alunos que eles é quem serão responsáveis por criar os problemas que devem ser inseridos nas cartas.

Por exemplo: devem ser criadas **seis cartas com probabilidade de 1%**, logo, os alunos do grupo serão responsáveis por criar seis problemas cujo cálculo de probabilidade resulte em exatamente $\frac{1}{100}$. **Vale enfatizar, que a carta NÃO PODE trazer o valor da resposta do cálculo de probabilidade,** pois o jogador é que terá de calculá-las durante as partidas.

Nesse momento, o professor deve lembrar que ele é o **mediador do processo de aprendizagem dos seus estudantes.** Ele não deve facilitar demais nem dificultar demais a construção das cartas. Se o professor perceber que os alunos estão com muitas dificuldades na elaboração de problemas de Probabilidade, então ele pode escolher entre fornecer materiais didáticos que tenham esses problemas, ou então oferecer um tempo maior de aula teórica preparatória para que os alunos aumentem a sua familiaridade com o assunto.

O professor deve lembrar, também, que os estudantes terão suas próprias ideias para serem im-

Fonte: elaborado pelo autor.

plementadas na elaboração do jogo, e que essas ideias têm que ser levadas em consideração e colocadas em prática.

95 – 100 min (Finalização)
Como sempre, os últimos minutos devem servir para o professor como um apanhado geral de todos os momentos da aula, destacando os principais acontecimentos dos momentos, retirando as dúvidas dos alunos, e dando orientações sobre as próximas aulas.

– 5 Recursos
Os recursos utilizados podem variar. Materiais reciclados podem ser utilizados para a montagem das cartas, como por exemplo, caixas de papelão que podem ser recortadas para virar as cartas do jogo. Caso a escola disponha de materiais mais elaborados, podem ser usadas plastificadoras para a confecção das cartas.

– 6 Avaliação
Como nessa primeira aula houve um momento de explicação teórica sobre Probabilidade, o professor deve avaliar os estudantes através de suas respostas e resoluções dos exercícios propostos por ele durante as explicações. Dessa maneira, o professor saberá em que momento pode prosseguir com as atividades posteriores.
É importante que, para avaliar, o professor esteja ciente de que deve transitar por entre os grupos para verificar a forma como os estudantes estão trabalhando, vendo quem são aqueles alunos que se destacam entre os outros, bem como se estão cometendo erros de cálculo de contagem.

A primeira aula tem um objetivo muito importante: **apresentar para os estudantes a definição formal de Probabilidade**. Então, o professor deve saber avaliar se esse conhecimento foi realmente adquirido por seus estudantes, pois só é possível jogar o +Provável se, de fato, os alunos tiverem pleno domínio do cálculo de Probabilidades.

Percebe-se, também, que como há confecção de cartas para o jogo, diversas maneiras podem ser utilizadas para construir tais cartas: elas podem ser impressas e recortadas, podem ser desenhadas a mão, podem haver desenhos para facilitar o entendimento dos alunos, podem haver figuras para associá-las à fração, dentre outros.

As ideias dos alunos para a confecção das cartas devem ser consideradas e postas em prática pelo professor, visto que, nesse contexto, o objetivo da aula é mediar conhecimento através de uma aprendizagem ativa, em um ambiente que os estudantes são considerados os protagonistas da sua própria construção de conhecimento.

Também pode existir a possibilidade de os estudantes quererem mudar as regras do jogo, ou criar novas cartas com funções diferentes. O professor tem autonomia para acatar com essas ideias, e pode até mesmo designar um novo grupo, diferente dos demais, para criar um jogo que siga essas novas regras criadas por seus estudantes.

Fonte: elaborado pelo autor.

Agora, segue-se o plano do segundo momento de aula da construção do jogo +Provável.

– 1 Identificação

Aula 2 da construção do jogo +Provável.

– 2 Objetivos

Criar problemas de Probabilidade cujas resoluções sejam utilizadas nas cartas;
Finalizar a construção das cartas do jogo +Provável;
Iniciar a jogabilidade do +Provável.

– 3 Conteúdo

Probabilidade.

– 4 Procedimentos Metodológicos

0 – 5 min (Momento inicial)

Os primeiros momentos da aula devem ser destinados para que o professor tome a palavra e relembre quais foram os conhecimentos construídos na última aula, bem como quais foram as atividades desenvolvidas, o que foi feito até então e o que falta ser feito nesta aula. Esse momento deve servir como um norte para os estudantes.

5 – 45 min (Finalização da construção das cartas)

O professor deve fornecer aos estudantes um tempo adicional para a finalização da confecção das cartas. É provável que seja nessa segunda aula que as cartas seja, de fato, construídas, pois na aula passada os estudantes devem ter focado seus esforços na criação dos problemas de Probabilidade.

Nesse *ebook*, será fornecido quais são os problemas que podem ser usados nas cartas. Mas, vale enfatizar que só aplicar o jogo não terá ganho cognitivo e de aprendizado suficientemente grande quanto a construção do jogo acontecer por parte dos alunos.

Tabela: sugestão de 5 cartas de valor $\frac{1}{100}$.

A probabilidade de cair o número 53 no sorteio dos números de 1 a 100.
A probabilidade de abrir aleatoriamente na página 14 de um livro de 100 páginas.
Na fabricação de 1000 peças de moto, uma fábrica produziu 10 peças com defeito. A probabilidade de uma peça vir com defeito.
A probabilidade de você ser sorteado em um auditório que contém no total 100 alunos.
Uma urna contém 99 bolas azuis e 1 bola vermelha. A probabilidade de, ao pegar uma bola de forma aleatória, vir a bola vermelha.

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela: sugestão de 6 cartas de valor $\frac{1}{20}$.

No sorteio de um número de 1 a 20, a probabilidade de o número sorteado ser o 11.
Uma jogadora da seleção de vôlei treinou saques 40 vezes e errou 2 saques. A probabilidade de a jogadora errar o saque.
Uma biblioteca tem 1000 livros, dentre os quais 50 são de matemática. A probabilidade de, ao pegar um livro aleatoriamente, ele ser de matemática.
Ao lançar um dado de 20 lados, a probabilidade de cair o número 18.
Ao sortear um número aleatório dentre 1 e 60, a probabilidade de cair um número múltiplo de 20.
Uma impressora, na impressão de um livro de 80 livros, apresentou defeito em 4 folhas. A probabilidade da impressão vir com defeito.

Tabela: sugestão de 6 cartas de valor $\frac{1}{10}$.

No lançamento de um dado de 10 lados, a probabilidade de cair o número 7.
Na cobrança de 20 pênaltis, um goleiro agarrou a bola 2 vezes. A probabilidade de ele defender o pênalti.
Em um saco com 100 bolas, 80 são vermelhas, 10 são azuis e 10 são verdes. A probabilidade de ser retirada uma bola verde.
Em uma indústria com mil funcionários, 900 não são gestores. No sorteio de um funcionário, a probabilidade de ser um gestor.
Um jovem tem 70 peças de roupas, das quais 7 são shorts. Ao pegar uma peça ao acaso, vir um short.
10 pessoas inscreveram-se no sorteio de um relógio. A probabilidade de Marcos ganhar o sorteio.

Tabela: sugestão de 6 cartas de valor $\frac{1}{5}$.

Se os meteorologistas da cidade estimam a chance de chover de 80%, a probabilidade de não chover.
Um cofre tem a mesma quantidade de moedas de R$ 1,00, R$ 0,50, R$ 0,25, R$ 0,10 e R$0,05. Ao pegar uma moeda aleatoriamente, a probabilidade de cair uma moeda de R$ 0,50.
Uma estante tem 10 livros de Matemática, 10 de Português e 30 de Ciências. Ao retirar um ao acaso, a probabilidade de ser de Matemática.
Um grupo de cinco amigos sorteará quem vai pagar a conta do restaurante. A probabilidade da sorteada ser a Joana.
De 10 saltos ornamentais, um atleta acertou 8 saltos com perfeição. A probabilidade de ele errar o salto.

Fonte: elaborado pelo autor.

Um saco contém 4 bolas pretas e 1 bola branca. A probabilidade de a bola branca ser sorteada ao acaso.

Tabela: sugestão de 6 cartas de valor $\frac{1}{4}$.

João tem 4 camisetas: uma azul, uma vermelha, uma verde e uma branca. A probabilidade de ele pegar ao acaso a camiseta vermelha
Um dado de 8 faces (octaedro) é lançado. A probabilidade de cair um número par menor do que 5.
Em uma caixa há 12 palitos: 3 vermelhos, 4 verdes, 3 azuis e 2 amarelos. A probabilidade de tirar ao acaso um palito azul.
Uma carta é sorteada entre 16 cartas numeradas de 1 a 16. A probabilidade de sair um número múltiplo de 4.
Um aplicativo de streaming recomenda aleatoriamente um entre 20 filmes. 5 deles são de comédia. A probabilidade de ser recomendado ao acaso um filme de comédia.
Entre 100 alunos inscritos em um concurso, 25 são do 9º ano. Um aluno será sorteado. A probabilidade de ele ser do 9º ano

Tabela: sugestão de 5 cartas de valor $\frac{1}{3}$.

Numa lanchonete, há 15 opções: 5 sanduíches, 6 salgados e 4 doces. Se uma opção for escolhida aleatoriamente, a probabilidade de ser um sanduíche.
De um catálogo com 30 filmes, 10 são de terror. A probabilidade de um filme de terror ser escolhido aleatoriamente.
Na fabricação de 300 canetas, 200 não apresentaram defeito algum. A probabilidade de uma caneta ser sorteada e vir com defeito.
Dos 30 alunos de uma turma de 8° ano, 10 usam óculos. Um deles será sorteado ao acaso. A probabilidade do aluno sorteado usar óculos.
Um dado com doze lados (dodecaedro) será lançado. A probabilidade de cair um número múltiplo de 3.

Tabela: sugestão de 4 cartas de valor $\frac{1}{2}$.

Durante um espetáculo, o mágico convida alguém da plateia para escolher entre duas caixas idênticas. Uma delas contém um coelho e a outra está vazia. A probabilidade de o voluntário escolher a caixa com o coelho.
Em uma mesa com quatro chaves, há duas delas capazes de abrir um cofre. A probabilidade de ser escolhida ao acaso uma chave que abra o cofre.
Um cadeado eletrônico tem oito botões. Quatro abrem o portão e quatro ativam o alarme. A probabilidade de ser escolhido um botão que ativa o alarme.

Fonte: elaborado pelo autor.

Numa biblioteca, há 10 livros em destaque: 5 são de ficção científica e 5 são de romance. Um é sorteado para leitura da semana. A chance de o livro escolhido ser de ficção científica.

Tabela: sugestão de 4 cargas de valor $\frac{3}{5}$.

Uma equipe de competição tem 15 robôs, dos quais 9 são autônomos e os outros são controlados remotamente. Ao se escolher ao acaso, a probabilidade de o robô ser autônomo.
De uma coleção com 20 moedas, 8 delas são de prata e o restante de cobre. Ao ser escolhida ao acaso, a probabilidade de a moeda ser de cobre.
Num safari virtual, há 100 animais: 60 são mamíferos, os demais são répteis, aves e insetos. Um animal é sorteado. A probabilidade de ser um mamífero.
Na mochila de Júlia há cinco livros: Gramática, Geografia, História, Geometria e Álgebra. A probabilidade de ser retirado ao acaso um livro que não seja de Matemática.

Tabela: sugestão de 3 cartas de valor $\frac{3}{4}$.

Jéssica treinou 100 chutes ao gol, dos quais acertou 75. A probabilidade de Jéssica acertar um chute ao gol.
Em uma urna, há 20 bolas divididas entre quatro cores: azul, vermelho, amarelo e verde. Ao se retirar uma bola ao acaso, a probabilidade de ela não ser verde.
Em uma escola, o Clube de Ciências tem 48 alunos, sendo que 36 participaram da última feira de ciências. No sorteio de um aluno, a probabilidade de ele ter participado da feira.

Tabela: sugestão de 3 cartas de valor $\frac{4}{5}$.

Ronald treinou 100 saques, dos quais errou apenas 20. A probabilidade de Ronald acertar um saque.
Em um laboratório há 10 pílulas, das quais 8 são inofensivas e 2 causam efeitos colaterais. Ao se escolher ao acaso, a probabilidade de a pílula ser inofensiva.
Um número aleatório será sorteado da lista {2,3,4,5,7}. A probabilidade de o número sorteado ser primo.

Decretado o fim da construção das cartas, é necessário iniciar-se o jogo.

45 – 95 (Jogabilidade do +Provável)
Cinquenta minutos devem ser destinados para que os estudantes joguem o +Provável. Aqui, é necessário trazer dicas:

1. Caso seja necessário, o professor pode considerar escolher um ou mais estudantes para ser o **Mestre das Cartas**, que servirá como **fiscal do jogo, para verificar se as jogadas estão corretas.**

Fonte: elaborado pelo autor.

2. Caso o professor tenha designado mais do que um grupo para construir o jogo, e agora ele tenha mais do que um baralho, então ele pode solicitar que os estudantes **troquem seus conjuntos de cartas entre si**, para que um grupo não jogue com as cartas que eles próprios tenham criado, de forma que serão submetidos aos problemas criados por seus colegas.

Vale ressaltar que o professor não pode menosprezar o momento de jogo dos seus estudantes. É nesse momento que será provado quais são aqueles alunos que se empenharam na construção das cartas e na elaboração dos problemas.

95 – 100 min (Finalização)
Nesses últimos momentos da aula, espera-se, novamente, que professor faça reflexões com seus estudantes sobre tudo o que aconteceu durante o decorrer da aula, bem como retirar suas dúvidas e auxiliá-los na jogabilidade. **O professor também deve utilizar o espaço do Laboratório para guardar com segurança todos os jogos que estão sendo criados no decorrer da eletiva.**

– 5 Recursos

Os recursos utilizados podem variar. Materiais reciclados podem ser utilizados para a montagem das cartas, como por exemplo, caixas de papelão que podem ser recortadas para virar as cartas do jogo. Caso a escola disponha de materiais mais elaborados, podem ser usadas plastificadoras para a confecção das cartas.

– 6 Avaliação

É crucial que, especialmente no momento da jogabilidade do +Provável, o professor caminhe por entre os grupos para verificar de que maneira os alunos estão construindo as cartas. É com essa avaliação processual e contínua que o professor terá um norte para tomar decisões sobre suas próximas ações.

Findadas as duas aulas para a construção do +Provável, há alguns pontos significativos que devem ser ressaltados ou trazidos para discussão:

I. Caso os alunos demonstrem dificuldades no processo criativo de elaboração de problemas, o professor deve entender que isso é completamente normal e deve avaliar que, caso seja necessário, ele pode voltar para exercitar novamente o cálculo de probabilidade;
II. O professor pode sugerir que os alunos criem um manual de regras do jogo, para que, caso outras turmas tenham interesse em jogá-lo, tenham facilidade para o entendimento;
III. O armazenamento dos jogos criados no Laboratório é de extrema importância. Todos os jogos devem ser eternizados e guardados em sala para usos futuros, podendo até ser compartilhados com outros professores para uso em suas salas de aula.

– Conclusão

Comenta-se, agora, quais são os principais benefícios na construção e jogabilidade do +Provável.

Fonte: elaborado pelo autor.

I. **Aprimoramento de ferramentas matemáticas importantes.** Além de estarem trabalhando constantemente com o raciocínio probabilístico, os alunos que montarem e jogarem o +Provável também estarão treinando ferramentas relevantes para a matemática como um todo, são elas: a simplificação de frações, a representação de frações como porcentagem e a comparação de frações com diferentes numeradores e denominadores;

II. **Estímulo da criatividade.** Ao fazer com que os alunos tentem criar situações em que seja possível calcular a probabilidade delas acontecerem, o professor estará estimulando a criatividade dos estudantes, pois eles pensarão em acontecimentos aleatórios e que podem ser transformados em um problema matemático resolvível;

III. **Domínio de estratégias de cálculo mental.** Ao simplificar frações, os alunos estarão exercitando cada vez mais, em especial, a divisão. Como em um jogo a rapidez é mais do que essencial, espera-se que os estudantes saibam construir estratégias mentais de cálculo rápido.

IV. **Aprendizagem através de metodologia ativa.** Como os alunos, nesse processo de construção de jogos, serão os principais autores das regras, das cartas, e de toda a jogabilidade, entende-se que o aprendizado dos conceitos de probabilidade se dará de forma ativa que, de acordo com a literatura, se mostra como essencial.

V. **Engajamento e trabalho em equipe.** Dado que em todos os momentos os estudantes têm de estar em contato com colegas e/ou professores, para tomarem decisões assertivas, entende-se que eles irão desenvolver o engajamento e o trabalho em equipe, habilidades essenciais para estudantes da atualidade.

Fonte: elaborado pelo autor.

Fonte: elaborado pelo autor.

O sexto jogo da disciplina eletiva aqui elaborada é o primeiro em que os estudantes terão que, na própria jogabilidade, **realizar experimentos.**

Entende-se que o ensino de probabilidade é, muitas vezes, desconexo de práticas. Muitos são os problemas e exercícios que envolvem o lançamento de dados, a retirada de bolas de urnas, a retirada de uma carta aleatória do baralho, dentre outros. Percebe-se que, de todos os experimentos ditos anteriormente, nenhum deles é impossível de ser realizado em sala de aula.

Então, por qual razão, no aprendizado de Probabilidade, os estudantes não são encorajados a realizar experimentos para colocar em prática todos esses cálculos que eles fazem e verificar que, de fato, eles são verdadeiros?

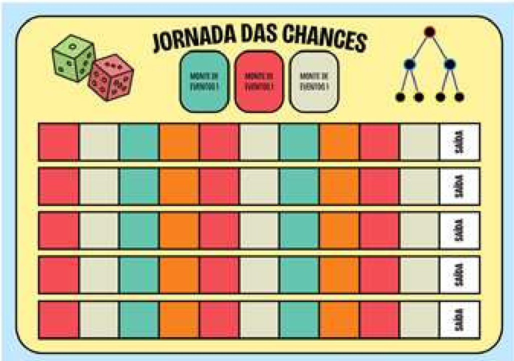
O jogo proposto nesse capítulo vai ao encontro desse pensamento. Deve-se fazer com que os estudantes de fato experimentem, e percebam que as probabilidades que eles calculam são reais e fazem algum sentido na vida real.

O Jornada das Chances é um jogo de tabuleiro que vai fazer com que os alunos, ao jogarem, realmente façam experimentos e desafiem seus conhecimentos em Probabilidade.

– Entendendo o Jogo

Jornada das Chances é, também, um jogo de tabuleiro. Mas, ele é diferente. No tabuleiro, haverá dois ou mais caminhos, em que cada um desses caminhos será ocupado pelo pião do aluno (ou grupo de alunos). Cada caminho vai ter dez casas.

No meio do tabuleiro, haverá três montes de cartas viradas para cima (ver exemplo de tabuleiro na imagem abaixo), as quais o jogador da vez deverá ler. Em cada carta, haverá um evento. O dever do indivíduo que está jogando é **escolher o evento que ele considera mais provável que aconteça.** Depois de escolhido o evento, o jogador deverá realizar o experimento proposto e, caso o experimento seja favorável, o jogador andará 1 casa.



Vencerá o jogador (ou grupo) que chegar primeiramente até a última casa de sua trilha. Trata-se de um jogo de sorte e de estratégia. A estratégia do jogo vem do fato de que os estudantes terão que ter um conhecimento suficientemente aprofundado de Probabilidade para saber qual dos três eventos é o mais provável de acontecer.

Fonte: elaborado pelo autor.

Quando a carta for escolhida, ela irá para o final do monte onde estava originalmente, e as outras duas continuam viradas para cima, para a escolha do próximo jogador. Ao final da rodada (ou seja, assim que todos os jogadores tiverem feito seus experimentos), as cartas de cima devem ser colocadas no final do monte, independente de terem sido escolhidas ou não.

A partir de agora, apresenta-se o plano da primeira aula referente à montagem do jogo Jornada das Chances

– **1 Identificação**
Aula 1 da construção do jogo Jornada das Chances.

– **2 Objetivos**
Relembrar e aprofundar o conhecimento construído sobre Probabilidade;
Exercitar cálculos simples de Probabilidade;
Construir experimentos simples e clássicos de cálculo de Probabilidade;
Construir o tabuleiro e as cartas do jogo Jornada das Chances.

– **3 Conteúdo**
Probabilidade.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momento inicial)
Nos primeiros momentos da aula, é interessante que o professor apresente todos os objetivos da aula, bem como relembre quais foram os principais acontecimentos da última aula e quais foram, também, os principais aprendizados.

5 – 45 min (Rememorando e aprofundando a Probabilidade)
Acredita-se que é vantajoso para os estudantes e para o andamento da Eletiva um momento de aprofundamento do conceito e da resolução de problemas de Probabilidade.
Nesses trinta minutos, recomenda-se que o professor relembre para seus estudantes qual é o conceito de probabilidade, bem como resolva exercícios que acredita serem importantes e que não foram trazidos nas últimas aulas.

45 – 50 (Explicação sobre o novo jogo)
Em cinco minutos, recomenda-se que o professor explique para seus alunos qual vai ser o propósito deste novo jogo. O professor deve explicar também que, a partir de agora, o mais importante desse jogo será a **realização de experimentos**, logo, é crucial que os alunos tenham o olhar crítico e percebam quais são aqueles experimentos que podem ser construídos em sala de aula, para serem realizados durante o jogo.

Fonte: elaborado pelo autor.

Recomenda-se que, antes mesmo dos alunos irem atrás dos materiais necessários para a montagem dos experimentos, é necessário **planejar quais serão construídos, através da construção de uma lista de experimentos**. Uma sugestão está na tabela abaixo.

Tabela: sugestão de experimentos para serem construídos pelos alunos.

Moedas para experimentos que envolvem o lançamento de moedas.
Uma caixa que servirá para os experimentos de retirada de bolinhas.
Dados de todas as quantidades de lados (é muito fácil encontrar dados simples, porém, através da planificação de sólidos geométricos, é possível construir dados de todos os tipos).
Baralhos comuns e também baralhos de jogos famosos (como o Uno).
Cartinhas com a numeração de 1 a 100, para sorteios simples de números.
Roleta da sorte (que pode ser construída com papelão, de forma bastante simples).

A tabela apresenta apenas alguns exemplos. Caso os alunos e o professores consigam pensar em outros exemplos, serão bem-vindos.
Considera-se que essa lista é essencial para que, depois de construída, os alunos possam ir atrás de conseguir todos os materiais necessários para a construção dos experimentos, visto que, nesse caso, os experimentos PRECISAM ser construídos antes das cartas.

50 – 95 (Confecção dos experimentos e das cartas)
Nessa parte da aula, o professor deve designar aqueles alunos que ele considera com maiores aptidões para a montagem das cartas e para a montagem dos experimentos.
Uma parte dos alunos fica responsável por conseguir os materiais necessários, outra parte por MONTAR os experimentos e outra parte por elaborar as cartas, para que, na aula seguinte, já seja possível jogar o Jornada das Chances.
Nesse momento, o professor será líder de todos os seus alunos, escolhendo quais dos alunos receberão quais atribuições para que haja fluidez no desenrolar da aula.

95 – 100 (Finalização)
Nos últimos minutos da aula, o professor deve dar um *feedback* para os estudantes, com base no que foi feito, nos pontos positivos e negativos e quais pontos podem ser melhorados para a próxima aula, sempre deixando claro que o objetivo maior é o aprendizado de probabilidade, e não jogar por jogar, nem construir por construir.
O professor pode, além de tudo, ajudar os alunos a fazerem uma lista dos materiais que faltam para que, na próxima aula, eles já sejam trazidos.
Além disso, deve deixar claro para os estudantes qual é o objetivo da próxima aula: terminar a montagem do jogo e jogá-lo.

Fonte: elaborado pelo autor.

– **5 Recursos**
Os recursos utilizados dependem diretamente de quais experimentos os alunos decidirem fazer. Por exemplo, para a construção dos dados talvez seja necessário folhas de papel 60kg ou papelões. O importante é que haja um planejamento, para que não falte material necessário para a construção e a realização do jogo.

– **6 Avaliação**
Como a elaboração do jogo é por conta dos alunos, o professor será um avaliador no sentido de verificar quais estudantes estão participando de forma ativa na função que lhe foi designada, e quais grupos estão desempenhando papel fundamental na construção do jogo.

Novamente, é crucial lembrar o professor que se faz necessário haver **um local de segurança para guardar todos os materiais desenvolvidos pelos alunos, afinal, esses materiais têm uma importância gigantesca no processo de aprendizagem e de criatividade dos alunos.** O professor pode solicitar para a escola uma estante para guardar esses materiais, por exemplo.

Algo que também pode ser feito é solicitar que os estudantes construam, utilizando papelão ou outros materiais, uma caixa para guardar todos os jogos construídos até então, com etiquetas para que outros estudantes também possam utilizá-los.

Agora, segue-se o plano da segunda aula referente à elaboração do jogo Jornada das Chances.

– **1 Identificação**
Aula 2 da construção do jogo Jornada das Chances.

– **2 Objetivos**
Finalizar a construção do jogo Jornada das Chances através da construção dos experimentos que serão realizados e da confecção das cartas;
Jogar o jogo Jornada das Chances.

– **3 Conteúdo**
Probabilidade.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momento inicial)
No primeiro momento da aula, o professor deve relembrar qual o objetivo dos estudantes nessa segunda aula: o de finalizar e jogar o Jornada das Chances.

5 – 45 min (Construção dos experimentos e confecção das cartas)

Fonte: elaborado pelo autor.

Em seguida, os estudantes devem voltar aos seus postos, designados pelo professor. Seja para montar as cartas, seja para construir os experimentos.

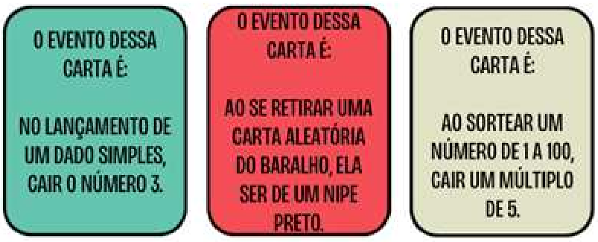
É crucial que o professor esteja presente nesse momento, para verificar se as cartas estão sendo escritas de forma acurada (matematicamente corretas), e se os experimentos estão sendo construídos de forma que, ao serem utilizados, transformem-se em experimentos REALMENTE ALEATÓRIOS.

45 – 95 min (Jogabilidade do Jornada das Chances)

É chegado o momento dos estudantes colocarem em prática tudo o que fizeram na última semana e nesta aula. **Como esse jogo não tem seu resultado interferido por quem foi responsável por construir as cartas, qualquer aluno poderá jogar.** Um exemplo faz-se necessário.

Caso o jogador (ou grupo de jogadores) número 1 veja as cartas abaixo, qual deve ser a melhor decisão?

Figura: exemplos de cartas do Jornada das Chances.



→ A probabilidade de acontecer o evento da carta verde é de $\frac{1}{6}$, o equivalente a aproximadamente 17% de chances.

→ A probabilidade de acontecer o evento da carta vermelha é de $\frac{1}{2}$, já que metade das 52 cartas do baralho é de um nipe preto.

→ A probabilidade de acontecer o evento da carta cinza é de $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, o que equivale a exatamente 20%.

Um jogador que sabe calcular Probabilidade prontamente escolherá a carta vermelha. Duas coisas podem acontecer:

1. Caso ele retire a carta do baralho e seja de nipe preto, ele andará uma casa, e a carta irá para o fim do monte.
2. Caso ele retire a carta do baralho e seja de nipe vermelho, ele não andará a casa, e a carta também irá para o fim do monte.

Nota-se que diversas regras de jogabilidade podem ser inseridas nesse jogo, e a autonomia dos estudantes na sugestão dessas regras deve ser encorajada, ou seja, o professor deve levar em

Fonte: elaborado pelo autor.

consideração e colocar em prática as ideias dos seus estudantes para uma melhoria do Jornada das Chances.

95 – 100 min (Finalização)
No fim da aula, o professor deve separar um momento para fazer um resumo de todos os acontecimentos das duas últimas aulas, realizando uma sondagem de todos os pontos positivos e negativos da atividade desenvolvida. Algo interessante que pode ser feito é colher informações, com os alunos, sobre de que maneira o jogo pode ser melhorado.

– **5 Recursos**
Os recursos utilizados dependem diretamente de quais experimentos os alunos decidirem fazer. Por exemplo, para a construção dos dados talvez seja necessário folhas de papel 60kg ou papelões. O importante é que haja um planejamento, para que não falte material necessário para a construção e a realização do jogo.

– **6 Avaliação**
Como a elaboração do jogo é por conta dos alunos, o professor será um avaliador no sentido de verificar quais estudantes estão participando de forma ativa na função que lhe foi designada, e quais grupos estão desempenhando papel fundamental na construção do jogo.

O cerne dos benefícios do Jornada das Chances se concentra no fato de os estudantes realizarem, de fato, experimentos. Percebe-se, em uma rápida análise de livros didáticos, que os exercícios e problemas clássicos apresentados são montados em cima de experimentos simples e de baixo custo que podem, facilmente, ser realizados em sala de aula.

Entretanto, o que a experiência mostra é que os professores, no ensino de Probabilidade, concentram o aprendizado em problemas puramente teóricos, em que os estudantes tem que apenas imaginar o experimento sendo realizado, sem colocá-lo em prática. Acredita-se que esse tipo de ensino é desvantajoso e o aprendizado de Probabilidade pode ser potencializado pela realização de experimentos simples.

Agora, é crucial discutir os benefícios do Jornada das Chances.

– **Conclusão**

Entende-se como benefícios os seguintes.

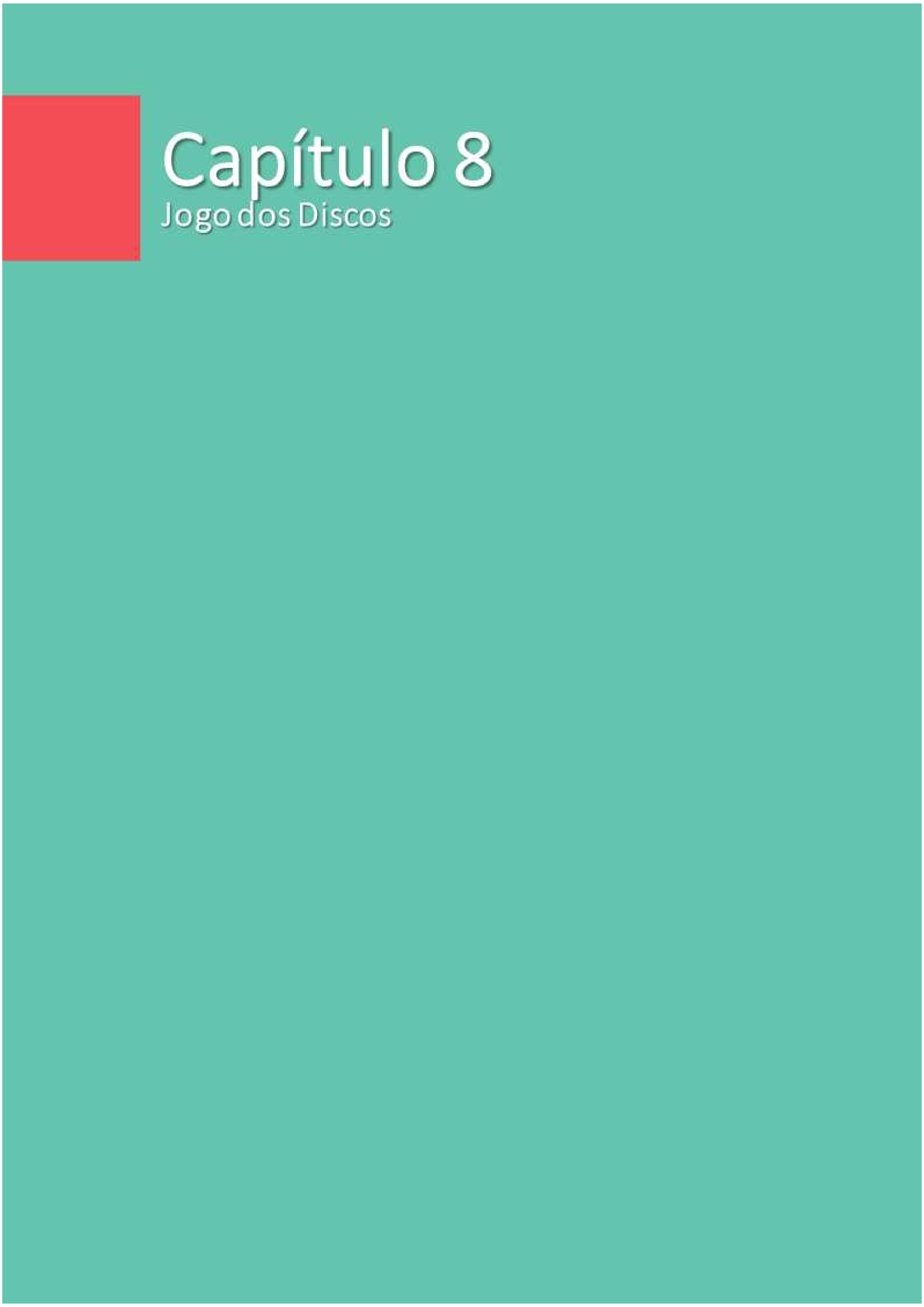
I. **Estímulo da criatividade.** O processo criativo dos estudantes é posto em prática a partir do momento em que eles são encorajados a imaginar quais experimentos podem ser realizados em sala de aula.
II. **Aprendizagem ativa e lúdica.** A aprendizagem ativa se dá no momento em que os alunos são desafiados a tomarem decisões por conta própria, de forma ativa e imaginativa. Além disso, atividades lúdicas são comprovadamente eficazes para o aprendizado de matemática, de forma que o jogo Jornada das Chances contribui com tal.

Fonte: elaborado pelo autor.

III. **Engajamento e trabalho em equipe.** Dado que em todos os momentos os estudantes têm de estar em contato com colegas e/ou professores, para tomarem decisões assertivas, entende-se que eles irão desenvolver o engajamento e o trabalho em equipe, habilidades essenciais para estudantes da atualidade.

IV. **Tomada de decisão.** Entende-se que colocar os alunos em situações em que eles precisam tomar decisões é vantajoso, pois desenvolve competências importantes para um indivíduo que viverá em sociedade. Quando o estudante lê as três cartas, ele é obrigado a imaginar e calcular mentalmente todas as probabilidades envolvidas, logo, após uma análise criteriosa, ele deverá chegar a uma conclusão assertiva.

Fonte: elaborado pelo autor.



Fonte: elaborado pelo autor.

A disciplina eletiva chega, agora, na 13ª semana de aula. Nela, os alunos serão inseridos em um contexto não muito trabalhado na educação básica: a Probabilidade Geométrica. O Jogo dos Discos é um atividade proposta em Caetano (2013) e objetiva fazer com que os alunos realizem continuamente o experimento de lançar discos no chão de algum dos ambientes da escola tentando não sobrepor o disco e os rejuntes do piso.

O jogador vence o Jogo quando lança o disco e este não sobrepõe o rejunte do piso do local escolhido.

Essa atividade pode ser explorada de forma mais ampla, e pode fazer parte da culminância da disciplina Eletiva. De início, os estudantes devem medir a área das cerâmicas das salas ou de outro ambiente da escola. Com essa informação em mãos, eles deverão construir discos de papel de diferentes diâmetros. Para facilitar os lançamentos, é importante que esse disco seja construído de papéis mais pesados ou papelões.

Para que o Jogo dos Discos tenha sentido prático, é necessário que os Discos tenham um tamanho necessário para que, no lançamento, a probabilidade de ganhar o jogo seja de aproximadamente 50%.

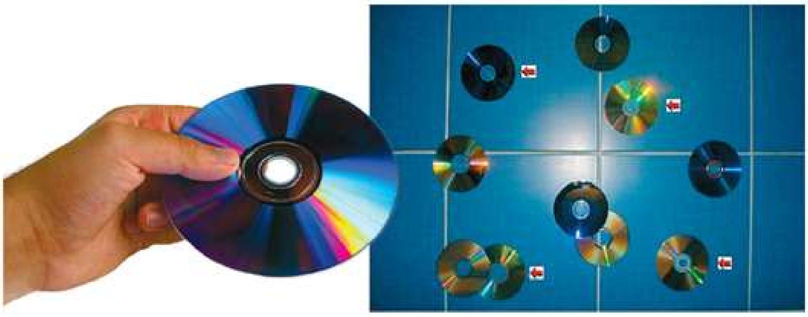
Os alunos da disciplina podem interpretar o Jogo dos Discos como uma oportunidade para angariar fundos para alguma atividade extracurricular ou uma "festinha" de finalização da disciplina (que pode ser, por exemplo, na culminância das disciplinas eletivas).

Isso porque esse Jogo pode ser usado como apostas. No dia da culminância ou então em uma data especificada pela gestão e pelo professor, cada estudante do restante da escola pode pegar uma pequena quantia de, por exemplo, R$0,25 e fazer o lançamento do disco.

Caso vença, essa pessoa receberá um brinde. Para que os alunos da Eletiva "saiam ganhando", eles deverão fazer com que os discos tenham determinada área, e isso deverá ser determinado depois de repetir o experimento várias vezes (ou então depois de aulas expositivas pelo professor, determinando como se calcula a Probabilidade Geométrica nesse caso).

Há também uma variação desse Jogo, a possibilidade de fazê-lo utilizando moedas. Em uma cartolina, pode-se desenhar uma malha quadriculada. Depois disso, fazer lançamentos de moedas de diferentes valores. A figura abaixo mostra o exemplo do lançamento de CDs em cerâmica, e aponta para os casos em que o jogador venceu (apontados com uma seta).

Figura: lançamentos realizados no Jogo dos Discos.



Fonte: Caetano (2013).

Fonte: elaborado pelo autor.

– **Entendendo o Jogo**

O jogo já foi basicamente explicado no texto anterior. Porém, os alunos da eletiva definem regras específicas para o jogo. Por exemplo: cada pessoa que for lançar, terá direito a quantos lançamentos? Essas regras devem ser definidas anteriormente.

Caso o jogo seja feito na data da culminância, inserindo estudantes de outras turmas, os alunos fazem uma fila e, um após um, devem fazer os lançamentos. Lembrando que é interessante dar brindes para que os jogadores tenham interesse em participar do jogo.

Agora, segue-se o plano de aula da semana 1 da construção do Jogo dos Discos.

– **1 Identificação**

Aula 1 da construção do Jogo dos Discos.

– **2 Objetivos**

Construir malhas quadriculadas adequadas para o Jogo dos Discos com moedas;
Discutir com os estudantes o conceito de Probabilidade Geométrica;
Fazer lançamentos para calcular a probabilidade de ganho com os diferentes tipos de moedas.

– **3 Conteúdo**

Probabilidade Geométrica.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momento inicial)

Assim como sempre vem se fazendo, os momentos iniciais da aula devem ser destinados para uma introdução do professor, com explicações sobre como se dará o restante da aula e exposição dos principais objetivos.

5 – 45 min (Explicação sobre a ideia de Probabilidade Geométrica)

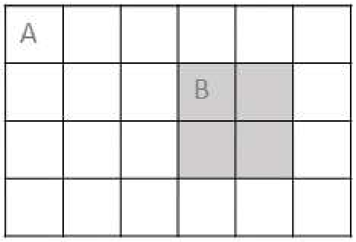
É importante que o professor, antes mesmo de pedir para que os alunos construam a malha quadriculada para os lançamentos das moedas, faça uma rápida explicação sobre a Probabilidade Geométrica.

Define-se a probabilidade geométrica da seguinte maneira: seja uma região A maior do que uma região B. Se escolhermos, aleatoriamente, um ponto dentro de A, e se B estiver dentro de A, então a probabilidade desse ponto escolhido ser também da região B é dada por

$$p = \frac{\text{área da região } B}{\text{área da região } A}$$

A figura abaixo ajudará a entender melhor a situação.

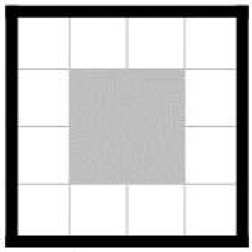
Fonte: elaborado pelo autor.



A região A tem área igual a 24, e a região B tem área igual a 4. Logo, ao se escolher aleatoriamente um ponto de A, a probabilidade desse ponto também pertencer a B é de

$$p = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

No caso do jogo dos discos, deve-se considerar que o "ponto" do lançamento de uma moeda é exatamente o ponto central do disco. Uma moeda de 10 centavos, por exemplo, tem diâmetro de 2 cm. Logo, seu raio é de 1 cm. **Como o disco (moeda) não pode cair em cima das linhas da malha quadriculada, então a distância entre o centro do disco e as linhas da malha quadriculada tem que ser de no mínimo 1 cm, para que se possa considerar jogo ganho.**



Na imagem acima, a área total é de 16 cm^2, pois cada quadradinho tem área 1 cm^2. Entretanto, para ser considerado favorável, o centro da moeda **precisa cair na região acinzentada**, pois se cair na região branca, a moeda ficará em cima da borda. A probabilidade da moeda cair em uma região favorável é

$$p = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Em resumo: se a malha quadriculada for feita com quadrados de 4 cm de lado (área total de 16 cm^2), então a probabilidade de uma moeda de 10 centavos ser lançada na região favorável (sem tocar as bordas) é de 25%.

É importante que haja uma explicação teórica sobre a Probabilidade Geométrica através de exercícios e problemas que serão parecidos com o Jogo dos Discos. Entretanto, para melhor aprendizado, devem haver experimentos, que é a próxima etapa da aula.

Fonte: elaborado pelo autor.

45 – 90 min (Construção das malhas quadriculadas)

Nesses cinquenta minutos, o professor deve designar cinco grupos diferentes para construir diferentes malhas quadriculadas para o lançamento dos discos, que irão ser, inicialmente, moedas. Cada grupo ficará responsável por construir malhas quadriculadas para as moedas de R$0,05, R$0,10, R$0,25, R$0,50 e R$1,00.

Depois de desenhadas as malhas quadriculadas, os alunos devem iniciar os lançamentos das moedas. É ideal que, mesmo tendo sido calculada a probabilidade de a moeda cair na região central, os alunos façam os lançamentos para calcular a probabilidade da seguinte maneira:

$$p = \frac{quantidade\ de\ lançamentos\ favoráveis}{quantidade\ total\ de\ lançamentos}$$

Para se ter um resultado preciso, é necessário que sejam feitos muitos lançamentos. O professor pode sugerir que sejam feitos 100 lançamentos, pois facilitará o cálculo da probabilidade.

Ao final dos lançamentos e depois de ter sido feito o cálculo teórico da probabilidade geométrica, os alunos devem fazer uma comparação entre o resultado teórico e o resultado prático, e a partir disso, discutir sobre essa diferença.

É válido ressaltar que, em todo esse processo de montagem das malhas quadriculadas, lançamentos das moedas e cálculo da probabilidade geométrica, o professor deverá ser um auxiliar dos estudantes, apontando onde algum processo pode ser melhorado.

90 – 100 min (Socialização e Finalização)

Ao final da aula, um pequeno tempo deve ser destinado para um apanhado geral de tudo o que foi visto durante a aula, apresentando um resumo e mostrando os resultados das turmas.

Cada grupo, separadamente, deve levantar e mostrar para seus colegas como ficou a montagem da malha quadriculada, qual foi o resultado da dos lançamentos, a probabilidade experimental calculada e a probabilidade teórica.

Entende-se que esse momento é bastante rico, pois os estudantes serão submetidos ao momento de apresentação, em que exercerão a oratória e o diálogo com seus pares.

– 5 Recursos

Considera-se que a lista de recursos necessários para a execução dessa aula depende da forma como o professor e os alunos pretendem montar. Entretanto, alguns materiais podem ser padrão, como por exemplo: cartolina de várias cores e tamanhos, réguas para a construção da malha quadriculada, lápis, moedas de todos os valores, papelões.

– 6 Avaliação

Assim como dito anteriormente, o professor deve ter um olhar aguçado sobre toda a situação. Ele deve estar presente nos grupos para verificar de que maneira os alunos estão conversando entre si e tomando decisões importantes. É dessa maneira que ele tomará decisões.

Fonte: elaborado pelo autor.

Considera-se que a realização do Jogo dos Discos é muito importante para o aprendizado dos estudantes, em especial porque mais do que nunca é possível **criar uma aliança entre a teoria e a prática**, e os alunos verão que a matemática pode ser se conectar com a realidade, e ser capaz de modelar problemas divertidos e interessantes, como esses inseridos em jogos.

Na segunda aula do Jogo dos Discos, propõe-se que, agora, os alunos interajam com outros ambientes da escola, para escolherem em quais deles serão lançados os discos para o Jogo dos Discos no chão da escola.

Qualquer ambiente pode ser usado: sala de aula, refeitório, quadra, laboratórios etc. O importante é que, nesse processo de escolha, os estudantes utilizem argumentos sólidos e entrem em consenso.

A partir de agora, desenvolve-se o plano da segunda semana de aula para a construção do Jogo dos Discos.

– **1 Identificação**

Aula 2 da construção do Jogo dos Discos.

– **2 Objetivos**

Rememorar o cálculo teórico e prático da Probabilidade Geométrica;
Visitar diferentes ambientes da escola para realizar a medição dos pisos;
Construir os discos com base nos cálculos de probabilidade realizados;
Testar o Jogo dos Discos no chão da escola.

– **3 Conteúdo**

Probabilidade Geométrica.

– **4 Procedimentos Metodológicos**

0 – 5 min (Momento inicial)

Nos primeiros minutos da aula, é importante que o professor relembre aos estudantes quais foram as ações tomadas na última aula, bem como apresente para eles os objetivos principais a serem alcançados nessa segunda aula.

5 – 25 min (Relembrando o cálculo de probabilidade geométrica)

Após a introdução, como os alunos do ensino fundamental não são habituados com a probabilidade geométrica, é imprescindível que o professor relembre como se calcula. Nesse tempo, o professor deve ajudar os estudantes no cálculo da probabilidade do Jogo dos Discos com base nas medições das áreas dos pisos, com a intenção de que a probabilidade do jogador ganhar seja de aproximadamente 50%.

Fonte: elaborado pelo autor.

25 – 35 min (Explorando a escola e medindo os pisos)
Nesse pequeno tempo, os estudantes terão que visitar os lugares da escola para realizar as medições necessárias.

35 – 65 min (Cálculo e construção dos discos)
Após as medições, os alunos com a ajuda do professor devem fazer o cálculo para saber o tamanho ideal do disco que será lançado.
O ideal é que a sala seja dividida em grupos, cada grupo construindo um disco ideal para um ambiente da escola diferente, conforme sugerido anteriormente.
Os discos podem ser construídos com papelão, com a ajuda de compasso. Algo que pode ser interessante para os alunos é que eles são livres para usar sua imaginação na confecção artística dos discos. Juntamente ao papelão, pode ser colado papel branco para que sejam feitos desenhos com pincéis e tintas.

65 – 75 min (Socialização)
Em dez minutos, cada grupo feito pelo professor deverá socializar os seus resultados. Com base nas medições, deverão apresentara para os outros grupos como foram feitos os cálculos para determinar a medida do discos, bem como mostrar para seus colegas os discos que foram construídos.

75 – 95 min (Testes de lançamentos)
Agora, os alunos deverão pegar os discos construídos e realizar os testes de lançamentos. É interessante, novamente, que sejam realizados muitos lançamentos para que se compare o resultado teórico (através da fórmula) com o resultado prático (através dos experimentos).
Caso haja uma divergência, ela pode ser explicada por conta da espessura do rejunte, visto que esse fator não foi considerado no cálculo da probabilidade.

95 – 100 min (Finalização)
Por fim, novamente, o professor deve realizar um resumo geral de todos os momentos da aula. Além disso, deve deixar claro que esse é o último jogo construído na disciplina eletiva e que, daqui pra frente, os estudantes deverão se preparar para realizar a culminância.

A importância desse jogo não vem só do fato de os estudantes aprenderem um novo conceito importante como o da probabilidade geométrica, como também do contato deles com outras turmas, visto que a proposta é que haja um momento de socialização com toda a escola, além do importante fato de precisar ser realizados experimentos.

Fonte: elaborado pelo autor.

REFERÊNCIAS

CAETANO, Paulo Antonio Silvani; PATERLINI, Roberto Ribeiro. **Jogo dos discos:** módulo I. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. Curiosidades, Passatempos, Desafios e Jogos Combinatórios. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

Fonte: elaborado pelo autor.

ANEXO A – MATRIZ DE REFERÊNCIA DO SAEB DE 2018, ALINHADA À BNCC

(continua)

EIXOS DO CONHECIMENTO	EIXOS COGNITIVOS			
	Compreender e aplicar conceitos e procedimentos		Resolver problemas e argumentar	
NÚMEROS	9N1.1	**Escrever** números racionais (representação fracionária ou decimalfinita) em sua representação por algarismos ou em língua maternaOU **associar** o registro numérico ao registro em língua materna.	9N2.1	**Resolver** problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão,potenciação ou radiciação envolvendo números reais, inclusive notação científica.
	9N1.2	**Compor** OU **decompor** números racionais positivos (representaçãodecimal finita) na forma aditiva, ou em suas ordens, ou em adiçõese multiplicações.	9N2.2	**Resolver** problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
	9N1.3	**Identificar** números racionais ou irracionais.	9N2.3	**Resolver** problemas que envolvam porcentagens, incluindo os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, aplicação de percentuais sucessivos e determinação das taxas percentuais.
	9N1.4	**Comparar** OU **ordenar** números reais, com ou sem suporte da retanumérica, OU **aproximar** números reais para múltiplos da potênciade 10 mais próxima.	9N2.4	**Resolver** problemas que envolvam as ideias de múltiplo, divisor,máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum.
	9N1.5	**Calcular** o resultado de adições, subtrações, multiplicações ou divisões envolvendo números reais.		
	9N1.6	**Calcular** o resultado de potenciação ou radiciação envolvendo números reais.		
	9N1.7	**Representar** frações menores ou maiores que a unidade por meio de representações pictóricas OU **associar** frações a representaçõespictóricas.		
	9N1.8	**Identificar** frações equivalentes.		
	9N1.9	**Converter** uma representação de um número racional positivo paraoutra representação.		
	9N1.10	**Determinar** uma fração geratriz para uma dízima periódica.		
	9N1.11	**Identificar** um número natural como primo, composto, "múltiplo/fator de" ou "divisor de" OU **identificar** a decomposição de um número natural em fatores primos OU **relacionar** as propriedadesaritméticas (primo, composto, "múltiplo/fator de" ou "divisor de") de um número natural à sua decomposição em fatores primos.		

Fonte: Brasil (2022).

(continuação)

EIXOS DO CONHECIMENTO	EIXOS COGNITIVOS			
	Compreender e aplicar conceitos e procedimentos		Resolver problemas e argumentar	
ÁLGEBRA	9A1.1	**Resolver** uma equação polinomial de 1° grau.		Álgebra está contemplada como **estratégia** nas habilidades "Resolver problemas" da unidade temática Números. Por isso, não foi incluída a habilidade "Resolver problemas que possam serrepresentados por equações de 1° grau".
	9A1.2	**Inferir** uma equação, inequação polinomial de 1° grau ou um sistema de equações de 1° grau com duas incógnitas que modelaum problema.	9A2.1	**Resolver** problemas que envolvam variação de proporcionalidadedireta ou inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas,divisões proporcionais e taxa de variação.
	9A1.3	**Identificar** uma representação algébrica para o padrão ou a regularidade de uma sequência de números racionais OU **representar** algebricamente o padrão ou a regularidade de uma sequência de números racionais.	9A2.2	**Resolver** problemas que envolvam cálculo do valor numérico deexpressões algébricas.
	9A1.4	**Identificar** representações algébricas equivalentes.	9A2.3	**Resolver** problemas que possam ser representados por sistema deequações de 1° grau com duas incógnitas.
	9A1.5	**Associar** uma equação polinomial de 1° grau com duas variáveis auma reta no plano cartesiano.	9A2.4	**Resolver** problemas que possam ser representados por equaçõespolinomiais de 2° grau.
	9A1.6	**Inferir** uma equação polinomial de 2° grau que modela um problema.	9A2.5	**Resolver** problemas que envolvam função afim.
	9A1.7	**Resolver** uma equação polinomial de 2° grau.		
	9A1.8	**Associar** uma das representações de uma função afim ou quadrática a outra de suas representações (tabular, algébrica,gráfica) OU **associar** uma situação que envolva função afim ouquadrática a uma das suas representações (tabular, algébrica, gráfica).		

Fonte: Brasil (2022).

(continuação)

EIXOS DO CONHECIMENTO	EIXOS COGNITIVOS			
	Compreender e aplicar conceitos e procedimentos		Resolver problemas e argumentar	
GEOMETRIA	9G1.1	**Identificar**, no plano cartesiano, figuras obtidas por uma ou mais transformações geométricas (reflexão, translação, rotação).	9G2.1	**Descrever** OU **esboçar** o deslocamento de pessoas e/ou de objetos em representações bidimensionais (mapas, croquis etc.), plantas de ambientes ou vistas, de acordo com condições dadas.
	9G1.2	**Relacionar** o número de vértices, faces ou arestas de prismas ou pirâmides, em função do seu polígono da base.	9G2.2	**Construir/desenhar** figuras geométricas planas ou espaciais que satisfaçam condições dadas.
	9G1.3	**Relacionar** objetos tridimensionais às suas planificações ou vistas.	9G2.3	**Resolver** problemas que envolvam relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos internos ou externos de polígonos ou cevianas (altura, bissetriz, mediana, mediatriz) de polígonos.
	9G1.4	**Classificar** polígonos em regulares e não regulares.	9G2.4	**Resolver** problemas que envolvam relações métricas do triângulo retângulo, incluindo o teorema de Pitágoras.
	9G1.5	**Identificar** propriedades e relações existentes entre os elementos de um triângulo (condição de existência, relações de ordem entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos, soma dos ângulos internos, determinação da medida de um ângulo interno ou externo).	9G2.5	**Resolver** problemas que envolvam polígonos semelhantes.
	9G1.6	**Classificar** triângulos ou quadriláteros em relação aos lados ou aos ângulos internos.	9G2.6	**Resolver** problemas que envolvam aplicação das relações de proporcionalidade abrangendo retas paralelas cortadas por transversais.
	9G1.7	**Reconhecer** polígonos semelhantes ou as relações existentes entre ângulos e lados correspondentes nesses tipos de polígonos.	9G2.7	**Resolver** problemas que envolvam relações entre os elementos de uma circunferência/círculo (raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central, ângulo inscrito).
	9G1.8	**Reconhecer** circunferência/círculo como lugares geométricos, seus elementos (centro, raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central, ângulo inscrito).	9G2.8	**Determinar** o ponto médio de um segmento de reta ou a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano.
	9G1.9	**Identificar** retas ou segmentos de retas concorrentes, paralelos ou perpendiculares.		
	9G1.10	**Identificar** relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.		

Fonte: Brasil (2022).

(coclusão)

EIXOS DO CONHECIMENTO	EIXOS COGNITIVOS			
	Compreender e aplicar conceitos e procedimentos		Resolver problemas e argumentar	
GRANDEZAS E MEDIDAS			9M2.1	**Resolver** problemas que envolvam medidas de grandezas (comprimento, massa, tempo, temperatura, capacidade ou volume)em que haja conversões entre unidades mais usuais.
			9M2.2	**Resolver** problemas que envolvam perímetro de figuras planas.
			9M2.3	**Resolver** problemas que envolvam área de figuras planas.
			9M2.4	**Resolver** problemas que envolvam volume de prismas retos ou cilindros retos.
PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	9E1.1	**Identificar** os indivíduos (universo ou população-alvo da pesquisa),as variáveis e os tipos de variáveis (quantitativas ou categóricas) emum conjunto de dados.	9E2.1	**Resolver** problemas que envolvam dados estatísticos apresentados em tabelas (simples ou de dupla entrada) ou gráficos (barras simples ou agrupadas, colunas simples ou agrupadas, pictóricos, delinhas, de setores ou em histograma).
	9E1.2	**Representar** OU **associar** os dados de uma pesquisa estatísticaou de um levantamento em listas, tabelas (simples ou de dupla entrada) ou gráficos (barras simples ou agrupadas, colunas simples ou agrupadas, pictóricos, de linhas, de setores, ou em histograma).	9E2.2	**Argumentar** OU **analisar** argumentações/conclusões com base nos dados apresentados em tabelas (simples ou de dupla entrada)ou gráficos (barras simples ou agrupadas, colunas simples ou agrupadas, pictóricos, de linhas, de setores ou em histograma).
	9E1.3	**Inferir** a finalidade da realização de uma pesquisa estatística ou de um levantamento, dada uma tabela (simples ou de dupla entrada) ou gráfico (barras simples ou agrupadas, colunas simples ou agrupadas, pictóricos, de linhas, de setores ou em histograma) comos dados dessa pesquisa.	9E2.3	**Explicar/descrever** os passos para a realização de uma pesquisaestatística ou de um levantamento.
	9E1.4	**Interpretar** o significado das medidas de tendência central (médiaaritmética simples, moda e mediana) ou da amplitude.	9E2.4	**Resolver** problemas que envolvam a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios equiprováveisindependentes ou dependentes.
	9E1.5	**Calcular** os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média aritmética simples, moda ou mediana).		

Fonte: Brasil (2022).