

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES

**ANÁLISE QUASI-ESTÁTICA E DINÂMICA
DE PAVIMENTOS ASFÁLTICOS**

Francisco Evangelista Junior

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências (M.Sc.) em Engenharia de Transportes.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jorge Barbosa Soares

**Fortaleza
2006**

FICHA CATALOGRÁFICA

EVANGELISTA-JUNIOR, FRANCISCO

Análise Quasi-Estática e Dinâmica de Pavimentos Asfálticos. Fortaleza, 2006.

xiii, 104 fl., Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes) – Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2006.

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------|
| 1. Transportes – Dissertação | 2. Análise Estrutural Dinâmica |
| 3. Mecânica dos Materiais | 4. Método dos Elementos Finitos |
| 5. Programação Orientada a Objetos | |

CDD 388

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

EVANGELISTA-JUNIOR, F. (2006). Análise Quasi-Estática e Dinâmica de Pavimentos Asfálticos. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado em Engenharia de Transportes, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 104 fl.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Francisco Evangelista Junior

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Análise Quasi-Estática e Dinâmica de Pavimentos Asfálticos.

Mestre / 2006

É concedida à Universidade Federal do Ceará permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Francisco Evangelista Junior
Av. Senador Fernandes Távora 694, Jockey Club
60510-290 – Fortaleza/CE - Brasil

ANÁLISE QUASI-ESTÁTICA E DINÂMICA DE PAVIMENTOS ASFÁTICOS.

Francisco Evangelista Junior

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES.

Aprovada por:

Prof. Jorge Barbosa Soares, Ph.D.
(Orientador)

Prof. Áurea Silva de Holanda, D.Sc.
(Examinador Interno)

Prof. Evandro Parente Junior, D.Sc.
(Examinador Interno)

Prof. Ivaldo Dário da Silva Pontes Filho, D.Sc.
(Examinador Externo)

FORTALEZA, CE – BRASIL
AGOSTO DE 2006

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Evangelista e Alzenira, por todo o amor e carinho que me deram ao longo da vida. Aos meus irmãos, Ivana e Inaldo, e sobrinha, Ana Kílvia, pela constante presença.

Com certeza não é a poesia que eles merecem, mas é fruto de um trabalho árduo e constante que sem a existência deles teria sido impossível.

“...E assim vedes, meu Irmão, que as verdades que vos foram dadas no Grau de Neófito, e aquelas que vos foram dadas no Grau de Adepto Menor, são, ainda que opostas, a mesma verdade.”

[Do ritual do Grau Mestre da Ordem Templária de Portugal.]

EROS E PSIQUE

Conta a lenda que dormia
Uma Princesa encantada
A quem só despertaria
Um Infante, que viria
De além do muro da estrada.

Ele tinha que, tentado,
Vencer o mal e o bem,
Antes que, já libertado,
Deixasse o caminho errado
Por o que à Princesa vem.

A Princesa Adormecida,
Se espera, dormindo espera,
Sonha em morte a sua vida,
E orna-lhe a fronte esquecida,
Verde, uma grinalda de hera.

Longe o Infante, esforçado,
Sem saber que intuito tem,
Rompe o caminho fadado,
Ele dela é ignorado,
Ela para ele é ninguém.

Mas cada um cumpre o Destino
Ela dormindo encantada,
Ele buscando-a sem tino
Pelo processo divino
Que faz existir a estrada.

E, se bem que seja obscuro
Tudo pela estrada fora,
E falso, ele vem seguro,
E vencendo estrada e muro,
Chega onde em sono ela mora,

E, inda tonto do que houvera,
À cabeça, em maresia,
Ergue a mão, e encontra hera,
E vê que ele mesmo era
A Princesa que dormia.

Fernando Pessoa [*Presença*, n.^{os} 41-42, 1934]

AGRADECIMENTOS

Como tudo na vida, cada realização dita pessoal, mesmo que pequena, é fruto de contribuições diretas e indiretas dos muitos que nos cercam. Na impossibilidade de citar todos os nomes segue uma pequena lista de pessoas mais ligadas diretamente a este trabalho, mas desde já agradeço a todos que estiveram por perto durante esta etapa de minha vida e não foram citados.

Ao professor Jorge Barbosa Soares pelo suporte financeiro, incentivo, orientação e confiança no meu potencial ao longo de todos os anos de trabalho em conjunto.

Ao professor Evandro Parente e Àurea Holanda pelas valiosas discussões e sugestões ao meu trabalho e vida acadêmica.

Aos professores Felipe Loureiro e Joaquim Bento Cavalcante Neto pelas preciosas conversas técnicas e pessoais ao longo do mestrado.

Ao professor Mário Azevedo pelo suporte aos problemas computacionais corriqueiros da rede do DET e eterna boa vontade com tudo e todos.

À Michéle Casagrande e Silvrano Adonias pela grande e inestimável ajuda e amizade mesmo em tão pouco tempo de convivência.

Ao professor Jorge Pais e ao técnico laboratorista Carlos Palha da UMinho pela ajuda na execução dos ensaios. À Liseane Padilha pela hospedagem e apoio incondicional em Portugal.

As amigas e colegas de trabalho Lucimar e Annie Karine pela amizade e apoio diário.

Ao colega Marcondes pela ajuda nas figuras e aos laboratoristas Rômulo e André pela grande ajuda na fabricação dos corpos de prova.

Aos colegas e amigos de mestrado Kamila Vasconcelos, Verônica Castelo Branco (responsável pelo envio de quase todos os artigos científicos lidos e referenciados neste trabalho) e Bartolomeu Cabral (*in memorian*); aos alunos de graduação Leonardo Tavares e Marcus Vinícius.

Ao LMP e PETRAN pelo uso de seus recursos físicos e financeiros e CAPES pelo apoio financeiro.

Aos amigos que não tem nenhuma idéia sobre análises quasi-estáticas e dinâmicas, mas que são deveras importantes.

Resumo da Dissertação submetida ao corpo docente do PETRAN/UFC como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia de Transportes.

ANÁLISE QUASI-ESTÁTICA E DINÂMICA DE PAVIMENTOS ASFÁTICOS.

Francisco Evangelista Junior

Agosto/2006

Orientador: Jorge Barbosa Soares, Ph.D.

O presente trabalho apresenta a formulação e implementação de um algoritmo para a solução da equação de equilíbrio dinâmico em meios viscoelásticos lineares com base no Método da Aceleração Média Constante da família de algoritmos de Newmark. O algoritmo foi implementado em um código utilizando o MEF, bem como conceitos de Programação Orientada a Objetos (POO). Apesar da utilização da formulação aqui apresentada ser relativa a análises de pavimentos asfálticos, a mesma formulação pode ser usada para quaisquer tipos de estrutura, geometria e condições de contorno devido à flexibilidade do MEF e a generalização da implementação obtida pelo uso da Orientação a Objetos. O presente estudo principalmente mostra a importância da consideração das forças inerciais (análises dinâmicas) na análise de tensões e deformações de pavimentos asfálticos. Os resultados das simulações das análises dinâmicas foram comparados com os resultados de análises quasi-estáticas (análise no tempo sem a consideração de forças inerciais). As simulações realizadas forneceram informações sobre três parâmetros usados no projeto de pavimentos: (i) deslocamentos verticais no topo da camada superficial asfáltica (d_v); (ii) tensão de tração no fundo da camada superficial asfáltica (σ_{xx}) e (iii) tensão de compressão (σ_{yy}) no topo do subleito. As simulações mostraram a influência, não somente da consideração dinâmica nas análises, mas também do comportamento constitutivo da camada de revestimento (elástico ou viscoelástico), duração do pulso de carregamento e tipo de mistura (CBUQ ou AAUQ). Análises fatoriais permitiram mostrar que nas considerações de análises realizadas atualmente para fins de projeto, onde o revestimento é assumidamente elástico, as forças inerciais são negligenciadas e os carregamentos são estáticos, podem muitas vezes ser não conservadoras. Os resultados encontrados para a tensão de tração no fundo do revestimento (σ_{xx}), onde a não consideração de certos aspectos, tais como a viscoelasticidade da camada de revestimento bem como sua interação com outros fatores, pode mudar a predição destas tensões significativamente para as considerações de projeto. Desta forma, a definição dos parâmetros estruturais importantes para o projeto de pavimentos deve ser melhor discutida, pois durações de carregamento mais longas (velocidade menor do veículo) afetam d_v , enquanto pulsos de duração mais curta (velocidade maior do veículo) afetam sobremaneira σ_{xx} . Análises considerando a passagem múltipla dos diversos eixos da configuração completa de veículos mostraram que não existe a superposição temporal dos efeitos da passagem de uma roda de cada eixo para pulsos de duração maiores que 0,008s na resposta estrutural de pavimentos, mesmo sob a consideração viscoelástica e/ou dinâmica. No presente trabalhos também foram desenvolvidos métodos alternativos para a regressão e interconversão de funções viscoelásticas. Os algoritmos propostos utilizam princípios de otimização, de forma que, a minimização dos erros para a função requerida é obtida eficientemente.

Abstract of Thesis submitted to PETRAN/UFC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.) in Transportation Engineering.

QUASI-STATIC AND DINAMIC ANALYSES OF ASPHALT PAVEMENTS.

Francisco Evangelista Junior

August/2006

Advisor: Jorge Barbosa Soares, Ph.D.

This work presents the formulation of an algorithm for the solution of the dynamic equilibrium equation for viscoelastic media. The algorithm is based on the Average Acceleration Method which belongs to the Newmark algorithm family. The formulation was implemented in a code using the Finite Element Method (FEM) and Object Oriented Programming (OOP). Although the formulation used herein is applied to asphalt pavements, it can be used for any type of structure, geometry and boundary conditions due to the flexibility of the FEM and generalization introduced through the OOP. This study shows, mainly, the importance of considering inertial forces (dynamic analyses) in stress and strain analysis of asphalt pavements. The numerical simulations compare the quasi-static and dynamic responses for two types of mixtures (Hot Mix Asphalt and Sand Asphalt); two constitutive models for these materials (elastic and viscoelastic), and various pulse loads. The results give some information about the main parameters used in pavement design: (i) vertical displacements at the top of surface (asphalt) layer (d_v); (ii) tensile stress at the bottom of the surface layer (σ_{xx}), and (iii) compression stress (σ_{yy}) at the top of subgrade. Factorial analyses showed that, for current pavement design procedures which assume an elastic surface layer, static loads without inertial forces, may lead to non-conservative predictions. As an example, the results of the tensile stress at the top of the surface layer (σ_{xx}), show that the interaction of the asphalt layer viscoelastic behavior with other factors may conduct to significantly relative differences in that stress predictions. Thus, the structural assumptions need to be more discussed for design purposes, since longer pulse loads (lower vehicle speeds) increase d_v , while shorter pulse loads (higher vehicle speeds) increase σ_{xx} . Analyses considering the temporal passage of multiple wheels, for the gears of some vehicle configurations, showed no temporal superposition of the effects of multiple loads (pulses longer than 0.008s) in the structural responses considered herein even considering viscoelastic and/or dynamic analyses. Alternative methodologies for the curve fitting and interconversion of viscoelastic functions are also presented. The proposed algorithms use optimization concepts to minimize the errors in the calculation of the required function.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Problema da pesquisa	2
1.2	Objetivos	3
1.3	Estrutura da Dissertação	4
2	Revisão Bibliográfica	5
2.1	Análise Teórica e Computacional de Pavimentos Asfálticos	5
2.1.1	Análise de pavimentos Através da Teoria da Elasticidade	5
2.1.2	Análise de pavimentos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF)	6
2.1.3	Análise quasi-estáticas e dinâmicas de pavimentos	8
2.2	Noções gerais do MEF	11
2.2.1	Equações básicas	12
2.2.2	Elementos isoparamétricos	14
2.3	Teoria da Viscoelasticidade	16
2.3.1	Analogias mecânicas simples	16
2.3.2	Analogias mecânicas generalizadas	19
2.3.3	Fluência, relaxação, função fluência e módulo de relaxação	21
2.3.4	Integrais hereditárias	23
2.3.5	Módulo de relaxação complexo e função fluência complexa	25
2.3.6	Princípio da Superposição Tempo Temperatura (PSTT) e Tempo Frequência (PSTF)	27
2.3.7	Propriedades dos materiais viscoelásticos e séries de Prony	29
2.3.8	Métodos de interconversão entre funções viscoelásticas	32
2.3.9	Análise de tensões e deformações em meios viscoelásticos e Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV)	38
2.3.10	Incrementalização unidimensional da relação constitutiva viscoelástica	40
2.3.11	Incrementalização multi-dimensional da relação viscoelástica	43
2.4	Fundamentos de Programação Orientada a Objetos	44
2.5	CAP3D	46
2.6	Planejamento fatorial	49
3	Formulação em Elementos Finitos da Equação de Equilíbrio Dinâmico para Meios Viscoelásticos	53
3.1	Solução da Equação de Equilíbrio para Análise Dinâmica	53

3.2	Validação	58
3.2.1	Viga elástica em balanço com carregamento concentrado	59
3.2.2	Viga viscoelástica em balanço com carregamento concentrado	60
4	Materiais e Métodos	62
4.1	Materiais	62
4.1.1	Seleção dos materiais	62
4.1.2	Curvas granulométricas	63
4.1.3	Método de dosagem, parâmetros volumétricos e teor de projeto	63
4.1.4	Ensaio realizado	63
4.2	Modelagem em Elementos Finitos	68
4.2.1	Pavimento analisado	68
4.2.2	Parâmetros para as simulações numéricas e planejamento fatorial	70
5	Resultados e Análises	75
5.1	Análise qualitativa	75
5.1.1	Passagem de uma única roda	75
5.1.2	Passagem de múltiplas rodas	79
5.2	Análise quantitativa da influência da consideração de forças inerciais (análise dinâmica)	85
5.3	Análise quantitativa dos efeitos dos fatores (planejamento fatorial)	86
6	Considerações finais	93
6.1	Sugestões de trabalhos futuros	95

Lista de Figuras

1.1	Fluxograma básico de um método mecanístico-empírico.	2
2.1	Exemplo de malha de elementos finitos 3D de um pavimento.	7
2.2	Equivalência espaço tempo para pulsos de carga (Medina e Motta, 2005). .	9
2.3	Meio contínuo e isotrópico.	12
2.4	Elemento cúbico de 20 nós.	14
2.5	Modelos mecânicos utilizados na viscoelasticidade linear.	17
2.6	Analogia mecânica para o modelo de Maxwell.	17
2.7	Analogia mecânica para o modelo de Kelvin.	18
2.8	Modelos mecânicos do sólido linear padrão.	19
2.9	Domínio no tempo de propriedades viscoelásticas de materiais reais (Schapery, 1978).	20
2.10	Analogia mecânica para o modelo generalizado de Maxwell.	20
2.11	Analogia mecânica para o modelo generalizado de Kelvin ou Voigt.	21
2.12	Função degrau unitária.	22
2.13	Histórico de tensões aplicado.	24
2.14	Diagrama vetorial para as funções complexas D^* e E^* (Schapery, 1978). . .	27
2.15	Representação da construção da Curva Mestra para o $E(t)$ de sólidos vis- coelásticos.	28
2.16	Meio contínuo, isotrópico e viscoelástico.	38
2.17	Estrutura de classes do CAP3D (Holanda et al., 2006b).	47
2.18	Classe <i>Control</i> do CAP3D (Holanda et al., 2006b).	48
2.19	Analogia geométrica para um planejamento fatorial 2^3	50
2.20	Efeitos principais, de segunda e terceira ordens do planejamento 2^3	51
2.21	Analogia geométrica para um planejamento fatorial 2^4	52
3.1	Regra trapezoidal.	55
3.2	Geometria, malha e condições de contorno de uma viga em balanço.	59
3.3	Soluções para uma viga elástica linear em balanço.	60
3.4	Soluções para uma viga viscoelástica linear em balanço.	61
4.1	Distribuição granulométrica das misturas de AAUQ e CBUQ.	63
4.2	Ensaio de <i>creep</i> estático na UMinho.	65
4.3	Funções fluência regredidas e experimentais.	65
4.4	Módulos de relaxação interconvertidos.	66

4.5	Equipamento de carga repetida usado no ensaio de MR	68
4.6	Modelo geométrico e condições de contorno do pavimento.	69
4.7	Pulsos representando a passagem de uma roda do eixo padrão.	71
4.8	Veículos utilizados nas simulações.	73
4.9	Configurações dos veículos simulados (ANFAVEA, 2001).	73
4.10	Pulsos representando a passagem das rodas de cada eixo para diferentes velocidades.	73
5.1	Deslocamentos verticais (d_v) no topo da camada de CBUQ.	76
5.2	Deslocamentos verticais (d_v) no topo da camada de AAUQ.	77
5.3	Resumo dos resultados de deslocamentos máximos (d_v) no topo da camada de revestimento (CBUQ e AAUQ).	78
5.4	Tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada de CBUQ.	78
5.5	Tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada de AAUQ.	79
5.6	Resumo dos resultados das tensões horizontais máximas (σ_{xx}) no fundo da camada de revestimento (CBUQ e AAUQ).	80
5.7	Tensões verticais (σ_{yy}) no topo da camada de subleito quando o revestimento é considerado de CBUQ.	81
5.8	Tensões verticais (σ_{yy}) no topo da camada de subleito quando o revestimento é considerado de AAUQ.	82
5.9	Resumo dos resultados das tensões verticais máximas (σ_{yy}) no topo do subleito quando o revestimento é considerado como CBUQ e AAUQ.	82
5.10	Deslocamentos verticais (d_v) no topo da camada de AAUQ para o 2C.	83
5.11	Deslocamentos verticais (d_v) no topo da camada de AAUQ para o 2S3.	83
5.12	Tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada de AAUQ para o 2C.	83
5.13	Tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada de AAUQ para o 2S3.	84

Lista de Tabelas

2.1	Algoritmo para regressão da série de Prony a partir dos dados experimentais.	32
2.2	Algoritmo para interconversão entre séries de Prony de funções viscoelásticas a partir dos dados experimentais.	37
2.3	Pseudo-código em linguagem estruturada para montagem da matriz de rigidez.	45
2.4	Pseudo-código em linguagem orientada à objetos para montagem da matriz de rigidez.	46
2.5	Sinais algébricos para o cálculo dos efeitos no planejamento 2^3	52
3.1	Algoritmo de Newmark (Aceleração Média Constante).	58
3.2	Módulo de relaxação para a viga em balanço.	60
4.1	Parâmetros volumétricos dos CP's moldados no teor de projeto.	64
4.2	Resultados do ensaio de MR por compressão diametral.	68
4.3	Número de elementos usados para discretização.	69
4.4	Propriedades elásticas dos materiais granulares.	70
4.5	Duração dos pulsos, passos de tempo e respectivas velocidades (V) usadas nas simulações.	71
4.6	Descrição dos níveis para os fatores analisados.	72
5.1	Parâmetros estruturais das análises quasi-estática (q-e) e dinâmica (din) para as condições de elasticidade (el.) e viscoelasticidade (vis.) do revestimento de CBUQ.	86
5.2	Parâmetros estruturais das análises quasi-estática (q-e) e dinâmica (din) para as condições de elasticidade (el.) e viscoelasticidade (vis.) do revestimento de AAUQ.	86
5.3	Resultados de d_v para os níveis e fatores considerados.	87
5.4	Efeitos principais e interações dos fatores para d_v	88
5.5	Resultados de σ_{xx} para os níveis e fatores considerados.	89
5.6	Efeitos principais e interações dos fatores para σ_{xx}	89
5.7	Resultados de σ_{yy} para os níveis e fatores considerados.	91
5.8	Efeitos principais e interações dos fatores para σ_{yy}	92

Capítulo 1

Introdução

Pavimentos flexíveis são sistemas multicamadas compostos comumente por uma camada superficial (revestimento asfáltico) e subcamadas granulares. Atualmente há uma tendência de se referir a estes pavimentos em função dos materiais empregados na sua construção, sendo hoje os pavimentos flexíveis referidos como pavimentos asfálticos. Para determinação das tensões e deformações em sistemas multicamadas, soluções analíticas baseadas na Teoria da Elasticidade podem ser usadas apenas nos casos mais simples. Para casos mais complexos, programas baseados em métodos numéricos, principalmente no Método dos Elementos Finitos (MEF), foram desenvolvidos para a obtenção de soluções aproximadas. Uma vantagem da abordagem numérica é o uso de uma variedade de modelos constitutivos para representação do comportamento mecânico dos materiais, como elástico linear e não-linear, elasto-plástico, viscoelástico e viscoplástico.

Desde o início dos anos 60, a engenharia rodoviária tem migrado dos métodos empíricos para os métodos mecanísticos ou mecanísticos-empíricos para o projeto de pavimentos (Huang, 1993; Medina e Motta, 2005). Estes métodos de dimensionamento fazem uso das respostas estruturais do sistema multicamadas para prever os principais problemas, tais como a deformação permanente (trilha de roda) e a fissuração por fadiga. O método mecanístico-empírico é basicamente dividido em duas partes: (i) análises relacionadas à previsão de tensões, deformações e deflexões nas camadas do pavimento, devido ao carregamento mecânico na superfície e (ii) modelos empíricos que relacionam o cálculo da resposta estrutural à fissuração e à deformação permanente por meio de modelos de desempenho, chamadas funções de transferência (*transfer functions*). A fissuração por fadiga, por exemplo é comumente associada à deformação horizontal na camada de Concreto Asfáltico, enquanto a deformação permanente é associada à tensão máxima de compressão no topo do subleito. A Figura 1.1 ilustra um fluxograma básico de um método mecanístico-empírico.

Por outro lado, sabe-se que as misturas asfálticas, nas condições operacionais dos pavimentos, tem um comportamento viscoelástico linear (Goodrich, 1991; Huang, 1993; SHRP, 1994a), assim sendo suas respostas mecânicas exibem dependência do tempo e da taxa de aplicação do carregamento, fazendo com que a consideração de seu comportamento como elástico não seja realista. Portanto, as respostas estruturais do pavimento, como tensões e deformações, podem ser mais precisamente previstas pela consideração da natureza viscoelástica da mistura asfáltica.

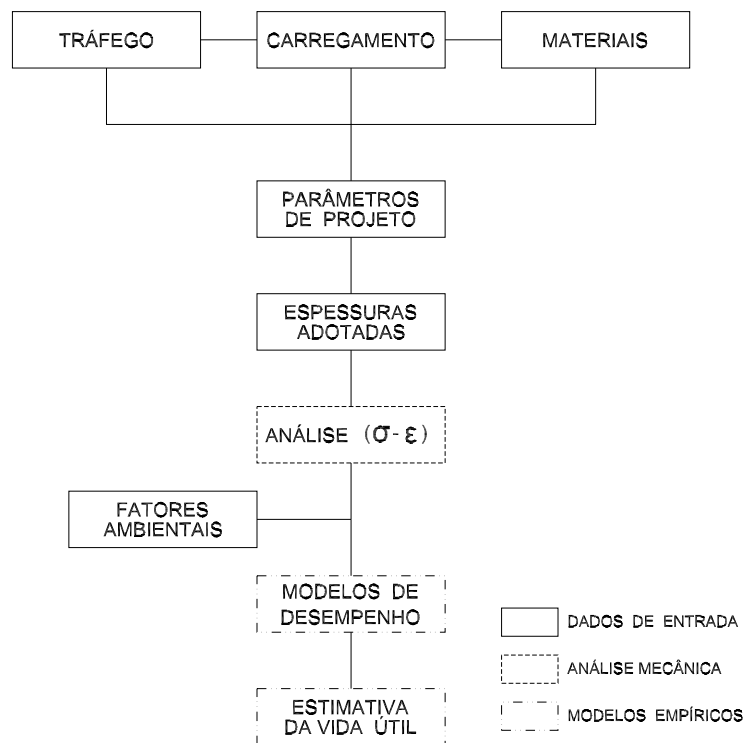


Figura 1.1: Fluxograma básico de um método mecanístico-empírico.

1.1 Problema da pesquisa

Normalmente, a análise de tensões e deformações em pavimentos asfálticos é baseada em carregamentos estáticos, onde o comportamento do revestimento asfáltico é assumido linear elástico, a Teoria da Elasticidade é utilizada para os casos mais simples e o MEF para os casos mais complexos (GAO, 1997; NCHRP, 2004). Contudo, conforme mencionado anteriormente, sabe-se que as misturas asfálticas tem um comportamento viscoelástico; além disso as cargas aplicadas pelo tráfego e a maioria dos equipamentos de medição de deflexão (e.g. *Falling Weight Deflectometer*, *FWD*) nos pavimentos são de natureza dinâmica.

Desta forma, avanços na análise estrutural são importantes, tendo em vista que as respostas estruturais serão usadas em modelos de desempenho que servirão de base para o dimensionamento e para a previsão da vida útil dos pavimentos, quando considerados os métodos mecanísticos-empíricos. Assim sendo, quanto mais próximo da realidade as análises forem, mais acuradas serão as previsões da resposta mecânica do sistema em camadas, e conseqüentemente, um melhor projeto será obtido.

1.2 Objetivos

A partir do contexto observado na seção anterior, a presente dissertação tem como objetivo geral a discussão da importância do uso de análises dinâmicas (inclusão das forças inerciais e dissipativas), bem como a consideração do comportamento viscoelástico do revestimento asfáltico, para a obtenção de um melhor conhecimento das respostas estruturais dos pavimentos asfálticos. Para esta discussão, análises quasi-estáticas e dinâmicas são requeridas, considerando diferentes pulsos de carregamento a fim de avaliar as diferenças nas respostas estruturais geralmente usadas no Brasil para o projeto de pavimentos:

- A deflexão (deslocamento) no topo da camada de revestimento (d_v);
- A tensão de tração no fundo da camada de revestimento (σ_{xx});
- A tensão de compressão no topo da camada de subleito (σ_{yy});

Objetiva-se a formulação e implementação de um algoritmo para a solução da equação de equilíbrio dinâmico para meios elásticos e viscoelásticos lineares no programa CAP3D, que é o sistema computacional em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Pavimentos (LMP/UFC) para a análise estrutural de pavimentos flexíveis, por meio do Método dos Elementos Finitos (Holanda et al., 2006a; Evangelista-Junior et al., 2006).

Inseridos no objetivo geral, encontram-se os seguintes objetivos específicos:

- Contribuir para o melhor entendimento da resposta mecânica dos pavimentos submetidos a carregamentos dinâmicos;
- Compreender melhor os efeitos de diferentes misturas (AAUQ e CBUQ) na resposta estrutural dos pavimentos asfálticos;
- Analisar o efeito de fatores como o tipo de mistura, comportamento constitutivo do revestimento (elástico ou viscoelástico), e pulsos de carregamento (velocidade de passagem dos veículos) nos parâmetros usuais para o dimensionamento mecanístico-empírico de pavimentos;
- Utilizar a técnica de planejamentos fatoriais para avaliar o efeito de cada fator analisado, bem como a interação (sinergia) destes com relação à resposta estrutural;
- Contribuir para o aperfeiçoamento do programa CAP3D em desenvolvimento no LMP/UFC para a análise estrutural de pavimentos flexíveis utilizando o Método dos Elementos Finitos;
- Operacionalizar a caracterização viscoelástica de misturas asfálticas através da formulação de técnicas de regressão e interconversão das propriedades viscoelásticas.

1.3 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação encontra-se organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresenta-se uma perspectiva geral do presente trabalho, que se insere no atual contexto da engenharia rodoviária, bem como os objetivos deste.

A revisão bibliográfica, é apresentada no Capítulo 2, a partir dos principais periódicos da área, que abordam análises teórica e computacional de pavimentos asfálticos com ênfase em trabalhos que consideram estas análises como dinâmicas. Foram introduzidas noções gerais sobre o MEF e os aspectos básicos da Teoria da Viscoelasticidade, Programação Orientada a Objetos e Planejamento Fatorial.

O Capítulo 3 apresenta a formulação em elementos finitos da equação de equilíbrio dinâmico para meios viscoelásticos, usando o algoritmo da família Newmark da Aceleração Média Constante (AMC), ou simplesmente regra trapezoidal.

No Capítulo 4 são apresentados todos os materiais utilizados, as granulometrias adotadas e o processo de fabricação, bem como os resultados dos ensaios realizados (*creep* estático e Módulo de Resiliência). Menciona-se ainda a metodologia adotada para as simulações numéricas com uma única passagem, de roda e com múltiplas passagens, e ainda são apresentados todos os parâmetros assumidos para os fatores e respostas investigadas.

O Capítulo 5 traz os resultados das análises propostas no capítulo anterior. É apresentada a análise fatorial dos efeitos principais e das interações, juntamente com a discussão destes resultados.

Para encerrar, o Capítulo 6 apresenta as considerações finais da dissertação e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Neste Capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica a partir dos principais trabalhos da área, sobre análise teórica e computacional de pavimentos asfálticos, bem como noções gerais sobre o MEF e os aspectos básicos da Teoria da Viscoelasticidade, Programação Orientada a Objetos e Planejamento Fatorial.

2.1 Análise Teórica e Computacional de Pavimentos Asfálticos

Esta seção segue subdividida em três subseções, onde inicialmente é discutida a análise de pavimentos com o uso da Teoria da Elasticidade, em seguida a análise de pavimentos é discutida sob a utilização do MEF, e, finalmente, são discutidos os trabalhos existentes relativos à análises quasi-estáticas e dinâmicas de pavimentos asfálticos.

2.1.1 Análise de pavimentos Através da Teoria da Elasticidade

Respostas analíticas para sistemas de camadas elásticas (Burmister, 1943, 1945) têm sido usadas há muito tempo nas análises de pavimentos asfálticos (Yoder e Witczak, 1975; Huang, 1993). Nestas soluções assume-se uma série de hipóteses, como carregamento estático, condições de continuidade nas interfaces entre as camadas, materiais homogêneos, isotrópicos e elástico lineares. Assumindo-se essas características, apenas duas propriedades do material são necessárias: o Módulo de Elasticidade (E) e o coeficiente de Poisson (ν). No projeto e análise de pavimentos, o Módulo de Resiliência (MR) é frequentemente usado como E , e é baseado na deformação recuperável sob carregamentos repetidos medida em laboratório usando uma solicitação semi-senoidal (*haversine*) (Abramowitz e Stegun, 1972; Huang, 1993). As soluções elásticas foram implementadas em vários programas computacionais, dentre eles podemos destacar o ELSYM5, EVERSTRESS e o KENLAYER.

Ahlborn (1972), na Universidade da Califórnia em Berkeley, desenvolveu um programa largamente usado, o ELSYM, atualmente ELSYM5. Apesar de suas limitações quanto ao modelo constitutivo do material, ELSYM5 permite uma representação realística dos carregamentos reais uma vez que aceita mais que uma área de carregamento. O Princípio da Superposição das tensões e deformações é empregado na determinação dos efeitos de rodas múltiplas, a partir dos resultados calculados para uma única roda.

O programa EVERSTRESS (WDOT, 2006) foi desenvolvido pelo Departamento

de Transportes do Estado de Washington (EUA). Este programa determina tensões, deformações e deslocamentos de um sistema de multicamadas elástico submetido a cargas circulares. Admite até 5 camadas, 20 cargas e 50 pontos de avaliação, além de possibilitar materiais não-lineares (tensões dependentes dos valores dos módulos de elasticidade).

O programa KENLAYER (Huang, 1993), também largamente usado, é baseado em soluções quasi-elásticas pelo Método da Colocação. É um programa para análise tridimensional de pavimentos de camadas com propriedades lineares, não-lineares ou viscoelásticas, sujeitas a carregamentos circulares múltiplos.

Entre os programas viscoelásticos geralmente aplicados na análise de pavimentos, pode-se mencionar o VEROAD (Hopman, 1994), um programa multicamadas linear viscoelástico que leva em conta a viscoelasticidade do material asfáltico e o movimento da roda usando Transformadas de Fourier. Sua desvantagem é que o material viscoelástico é modelado apenas pelo modelo de Kelvin (somente quatro parâmetros).

2.1.2 Análise de pavimentos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF)

Dada a complexidade da geometria e das condições de contorno, dos modelos constitutivos específicos dos materiais do pavimento, assim como a melhoria dos métodos computacionais, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem sido usado para determinar as respostas do pavimento. Pesquisadores como Duncan et al. (1968) começaram usando o MEF na análise estrutural de pavimentos. O MEF também tem algumas vantagens sobre soluções elásticas em sistemas multicamadas porque garante maior flexibilidade na modelagem das respostas não-lineares características dos materiais granulares que constituem a seção do pavimento. Os trabalhos de Dehlen (1969) e Hicks (1970) mostram a importância do comportamento não-linear dos materiais granulares na resposta final dos pavimentos.

Os modelos, baseados neste método, simulam de forma mais realista as estruturas de pavimentos. Podem simular com eficiência o comportamento de materiais não lineares, as distribuições complexas das pressões de contato do pneu e as descontinuidades geométricas. Ao contrário dos modelos analíticos, o MEF necessita que se defina um sistema que é horizontalmente e verticalmente limitado no espaço.

Os modelos axissimétricos supõem que o pavimento tem geometria e materiais constantes nos planos horizontais e que o carregamento tem simetria bi-axial. Desta forma, o carregamento pode ser modelado como circular. A principal vantagem desta abordagem é que estruturas reais (tridimensionais) podem ser resolvidas com uma formulação bidimensional, usando coordenadas cilíndricas, onde o tempo computacional requerido é bastante reduzido. Isto ocorre porque o número de graus de liberdade (equações) é muito menor do que em uma análise tridimensional. Suas limitações, com relação à análise de pavimentos, são que o carregamento só pode ser considerado geometricamente circular e, unicamente uma roda

pode ser modelada. Esta limitação é bastante desvantajosa quando se quer modelar o comportamento do pavimento sob efeito de duas ou mais rodas simultaneamente (Huang, 1993). Esta abordagem não pode ser utilizada na existência de descontinuidades na configuração da estrutura do pavimento, tais como existência de juntas ou fissuras.

Os modelos de elementos finitos tridimensionais, como ilustrado pela Figura 2.1, são considerados, atualmente, a aproximação mais adequada para entender o comportamento dos pavimentos flexíveis, pois procura superar as limitações dos modelos analíticos e dos modelos de elementos finitos 2D. Estes modelos geram resultados mais realistas do que os modelos bidimensionais, devido a possibilidade da modelagem realista da configuração dos carregamentos. Contudo, um maior tempo computacional e maior quantidade de memória é requerida, pois o número de nós e elementos aumenta substancialmente.

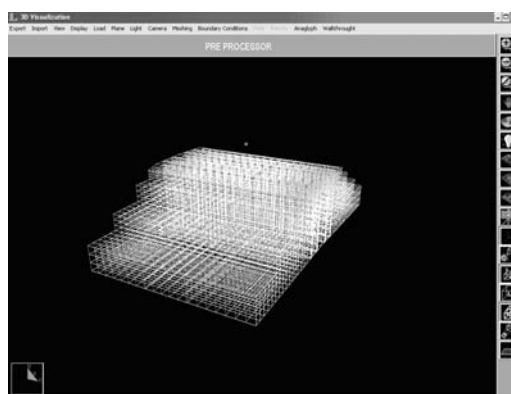


Figura 2.1: Exemplo de malha de elementos finitos 3D de um pavimento.

Cho et al. (1996) examinaram, por meio de análises numéricas em elementos finitos, o efeito de diversas considerações sobre as respostas estruturais dos pavimentos asfálticos. Em suas análises, todas as camadas do pavimento foram consideradas linear elásticas, e o carregamento foi considerado estático. Foram analisadas três abordagens: estado plano de tensões, axissimétrica e tridimensional, que foram comparadas com os resultados advindos da Teoria da Elasticidade (Burmister, 1945). Os piores resultados foram encontrados quando considerado o estado plano de tensões. O modelo axissimétrico, com uso de elementos infinitos, forneceu os melhores resultados, uma vez que os resultados das simulações tridimensionais mostraram-se sensíveis à geometria e condições de contorno utilizadas pelos autores. Apesar deste razoável resultado para as análises tridimensionais, Hjelmsted et al. (1997), Helwany et al. (1998) e Kim e Buttlar (2002) indicam ótimos resultados para estas análises frente as análises bidimensionais.

Com respeito aos programas computacionais para análise de pavimentos baseados no MEF, podemos destacar o ILLIPAVE, MICHPAVE e o FEPAVE.

O programa ILLIPAVE (Raad e Figueroa, 1980), da Universidade de Illinois, Urbana-Champaign, é usado para análises axissimétricas. O programa incorpora o módulo

resiliente (MR), que depende da tensão, e o critério de ruína para materiais granulares e solos finos. As tensões principais na sub-base e no subleito são atualizadas iterativamente. O modelo de Mohr-Coulomb é empregado como critério para assegurar que estas tensões não excedam as tensões resistentes dos materiais.

O programa MICHPAVE (Harichandran et al., 1989) é oriundo da Universidade de Michigan e também considera casos axissimétricos. Ele usa os mesmos métodos para modelar os materiais granulares e solos, além do mesmo critério de falha de Mohr-Coulomb. Pode fazer análises de elementos finitos linear e não-linear de pavimentos flexíveis, em que nestas, calcula um MR equivalente para cada camada do pavimento, sendo obtido como a média dos módulos dos elementos na camada que estão em uma zona de distribuição de carga.

No Brasil, o programa largamente usado para análise de pavimentos é o FEPAVE2. Este programa, originalmente desenvolvido em Berkeley (FEPAVE), e modificado ao longo dos anos no Brasil (Motta, 1991; Silva, 1995), considera a camada asfáltica como linear elástica, algumas vezes o MR é considerado uma função da temperatura, e as subcamadas como não-lineares elásticas (Duncan et al., 1968; Hicks, 1970). Dado que o programa tem somente elementos axissimétricos, o carregamento é tipicamente considerado circular com raio de 10,8 cm e uma pressão no pneu de 0,56 MPa.

É importante observar que, em nível mundial, a análise estrutural de pavimentos, para fins de projeto e dimensionamento, quando realizada utilizando o MEF, utiliza-se da abordagem axissimétrica, tendo em vista as vantagens mencionadas anteriormente (NCHRP, 2004; Medina e Motta, 2005). Nestas análises, apesar das camadas granulares serem consideradas não-lineares ou elásticas, os carregamentos são estáticos e o revestimento é assumido elástico linear.

2.1.3 Análise quasi-estáticas e dinâmicas de pavimentos

Em muitos trabalhos intitulados dinâmicos, verifica-se apenas simulações das solicitações de tráfego por meio de pulsos (cargas variáveis no tempo) simulando o efeito da passagem da roda do veículo na superfície do pavimento (Monismith et al., 1988; Shoukry, 1998; Loulizi et al., 2002; Evangelista-Junior et al., 2005). Nestes trabalhos não são consideradas forças inerciais nem as forças dissipativas. Desta forma, apesar dos pulsos simularem a passagem dinâmica do veículo, e análises transientes sejam realizadas, não podemos denominar estas simulações como dinâmicas, e sim quasi-estáticas.

Com respeito aos carregamentos aplicados, Brown (1973) deduziu uma equação para calcular o tempo de carregamento como uma função da velocidade e profundidade abaixo da superfície do pavimento. O tempo de carregamento foi considerado como a média da duração do pulso de tensão nas três direções, como obtido da teoria das camadas elásticas.

A relação entre o tempo de carregamento t (s), profundidade d (m), e velocidade do veículo v (km/h), conforme mostrado a seguir:

$$\log t = 0,5d - 0,2(1 - 4,7 \log v) \quad (2.1)$$

O tempo de carregamento como definido na equação acima é igual ao inverso da freqüência angular da onda senoidal aplicada. Barksdale e Hicks (1973), por outro lado, definem o tempo de carregamento como a duração do pulso senoidal ou do pulso triangular. McLean (1974) desenvolveu um gráfico para determinar a largura do pulso de uma onda quadrada como uma função da velocidade do veículo debaixo da superfície do pavimento. A duração do pulso da onda quadrada é menor que a do pulso triangular ou senoidal.

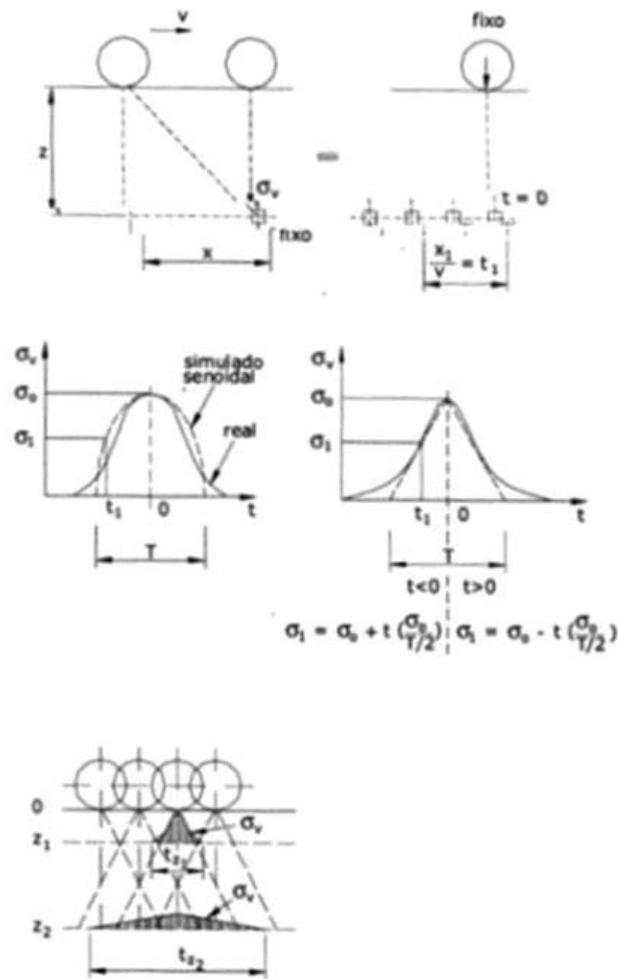


Figura 2.2: Equivalência espaço tempo para pulsos de carga (Medina e Motta, 2005).

A maioria dos trabalhos que consideram os efeitos dinâmicos (inércia e amortecimento) na análise de pavimentos não levam em conta estes efeitos atuando no equilíbrio da estrutura global, e sim, atuantes em modelos na simulação da interação entre os veículos e

os pavimentos (Mamlouk, 1997). Estas simulações são baseadas em modelos analíticos ou semi-analíticos, em que a suspensão dos veículos é modelada por meio de elementos discretos (molas conectadas a amortecedores) de modo a simular os diferentes tipos de suspensão encontrados (Hardy e Cebon, 1993; Mamlouk, 1997). Nestas análises também são investigados os efeitos das irregularidades longitudinais na resposta mecânica dos pavimentos (Bhatti e Stoner, 1998).

Hardy e Cebon (1994) usaram uma bem conhecida integral de convolução para estudar a resposta do pavimento quando sujeito a uma carga móvel. Gunaratne e Sanders (1996) usaram uma técnica baseada na camada rígida combinando transformadas de Fourier para determinar as respostas de uma camada média elástica sujeita à um carregamento distribuído. Sebaaly e Mamlouk (1988) também usaram este método para determinar a resposta dinâmica devido à um veículo em movimento em que o carregamento foi modelado como um pulso de tensão. Zafir et al. (1994) desenvolveram um modelo baseado no contínuo com a técnica da transformada de Fourier para avaliar a resposta do pavimento sujeito ao carregamento móvel do tráfego.

Com relação às análises estruturais de pavimentos asfálticos considerando as forças inerciais e dissipativas, o pioneiro trabalho de Mamlouk (1987) descreve um programa computacional capaz de considerar os efeitos inerciais. Neste trabalho é observado que o efeito dinâmico é mais pronunciado quando uma camada de rocha rasa é encontrada, e carregamentos vibratórios são aplicados. Devido às limitações de processamento e armazenamento de dados da época, o programa requeria uma grande quantidade de esforço computacional para executar, limitando-se em análises de materiais elásticos lineares.

O trabalho posterior de Monismith et al. (1988) mostra que, para pavimentos de Concreto Asfáltico, não é necessário realizar uma análise dinâmica completa. Os efeitos inerciais podem ser ignorados e as respostas dinâmicas locais podem assim ser determinadas essencialmente pelo método estático usando propriedades de material compatíveis com a taxa de carregamento encontrada em campo. Contudo, as análises dinâmicas realizadas pelos autores consideraram a camada asfáltica como elástica e utilizaram um modelo muito simples de amortecimento.

As análises de Zaghloul e White (1993) e White et al. (1997) são bem mais realistas da condição dos pavimentos. Os autores utilizaram rotinas definidas pelo usuário (*UMAT*) do programa computacional em elementos finitos ABAQUS. Os trabalhos contam com análises dinâmicas 3D, em que o revestimento asfáltico foi considerado viscoelástico, e os materiais granulares foram assumidos plásticos de acordo com os modelos Drucker-Prager e CamClay, foram realizadas. A carga foi simulada como uma carga espaço e temporalmente móvel. Em essência, o trabalho mostra uma aproximação de 99 % dos resultados das análises dinâmicas tridimensionais com dados de deflexão medidos em campo. A análise dinâmica foi consider-

ada apenas para o caso da elasticidade linear, e quando as análises levaram em consideração a viscoelasticidade da mistura asfáltica foi utilizado o modelo de Burgers (4 parâmetros).

Uddin e Ricalde (2000), também utilizando a biblioteca *UMAT* do ABAQUS, implementaram modelos não-lineares e de dano. Neste trabalho a viscoelasticidade do revestimento asfáltico foi considerada, bem como a consideração dinâmica. O trabalho não detalha que tipo de algoritmo foi usado para a integração da equação de equilíbrio dinâmico.

Análises dinâmicas 3D em pavimentos asfálticos também foram executadas por Saad et al. (2005) utilizando o programa em elementos finitos ADINA (2001), que apesar de usar modelos não-lineares mais sofisticados para as camadas granulares, considera a camada de revestimento com comportamento elástico linear.

O programa DYNA3D foi desenvolvido nos Laboratórios Lawrence Livermore dos Estados Unidos. A versão pública é ainda usada, mas eles atualmente não têm nenhum suporte para o usuário ou mecanismos de distribuição do programa. Uma versão comercial do DYNA3D é o LS-DYNA. Esta versão foi apresentada em LSTC (1999) e é negociada e mantida pela *Livermore Software Technology Corporation*. Apesar do DYNA3D e do LS-DYNA terem sido usados no passado para análise de pavimentos (particularmente análises dinâmicas 3D de pavimentos), o programa não foi originalmente desenvolvido para aplicações em engenharia de pavimentos. Na realidade o LS-DYNA tem se tornado cada vez mais especializado para simulações de choques de automóveis, análises de conformação mecânica e outras análises dinâmicas 3D não-lineares com grandes deformações.

2.2 Noções gerais do MEF

O MEF, cuja base teórica foi firmada por Turner et al. (1956), Argyris e Kelsey (1960) e Clough (1960) entre outros, baseia-se na transformação de Equações Diferenciais que regem um problema específico em equações algébricas de mais fácil resolução. A modelagem e análise de um problema pelo MEF consistem basicamente de três etapas (Bathe, 1996): (i) pré-processamento; (ii) processamento e (iii) pós-processamento. No MEF, um domínio contínuo é dividido (discretização) em um conjunto finito de subdomínios (elementos finitos) que são analisados separadamente e a solução global da estrutura é conseguida através da imposição de condições de compatibilidade e equilíbrio de forças ao longo do contorno dos elementos conectados entre si (Bathe, 1996). As duas subseções seguintes apresentam uma breve introdução ao MEF citando as equações básicas e a formulação dos elementos isoparamétricos.

Nas equações desta dissertação utilizou-se preferencialmente a notação matricial, em que, letras maiúsculas correspondem a matrizes e minúsculas são correspondentes a vetores. Somente quando necessário, utilizou-se a notação tensorial.

2.2.1 Equações básicas

As deformações (ε) são calculadas, a partir do campo de deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}$, através da expressão:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \quad (2.2)$$

onde $\tilde{u}_{i,j}$ denota a derivada das componentes (u, v, w) do campo de deslocamentos em relação às coordenadas cartesianas (x, y, z). É importante notar que estas coordenadas dizem respeito à configuração inicial da estrutura.

Expandindo a expressão (2.2) e lembrando que $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, as deformações em um caso genérico podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ u_{,z} + w_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Considerando o corpo contínuo e isótropico apresentado pela Figura 2.3, podemos derivar as equações que governam a resposta estática de uma estrutura ou meio através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Este leva em conta que o trabalho das forças externas ($\mathbf{f}$), aplicadas ao corpo (estrutura), é absorvido pelo trabalho das forças internas ($\mathbf{g}$), oriundas das deformações sofridas pela estrutura.

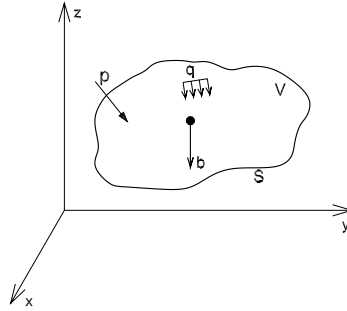


Figura 2.3: Meio contínuo e isótropico.

$$\int_{V_e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^t \mathbf{b} dV + \int_{S_e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^t \mathbf{q} dS + \sum_{i=1}^n \delta \tilde{\mathbf{u}}_i^t \mathbf{p}_i = \int_{V_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.4)$$

em que $\delta \tilde{\mathbf{u}}$ e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ são, respectivamente, pequenos deslocamentos (virtuais) arbitrariamente aplicados e suas correspondentes deformações, $\mathbf{b}$ são as forças de corpo, $\mathbf{q}$ as forças atuantes

na superfície, p_i são carregamentos concentrados, σ são as tensões e V e S denotam volume e superfície (área), respectivamente.

No MEF, o campo dos deslocamentos no interior dos elementos é definido a partir dos deslocamentos nodais ($\mathbf{u}$) através da expressão:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (2.5)$$

em que $\mathbf{N}$ é uma matriz construída a partir das funções de interpolação dos deslocamentos. O vetor das deformações ϵ no interior dos elementos pode também ser expresso em função dos deslocamentos nodais através da expressão:

$$\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{B}$ é a matriz que relaciona os deslocamentos com as deformações.

Substituindo as Equações 2.5 e 2.6 na Equação 2.4 e notando que a condição de equilíbrio deve ser satisfeita para qualquer deslocamento virtual ($\delta \mathbf{u}$), temos a equação que descreve o equilíbrio estático em cada elemento como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (2.7)$$

com os vetores de forças externas $\mathbf{f}$ e internas $\mathbf{g}$, respectivamente, definidos por:

$$\mathbf{f} = \int_{V_e} \mathbf{N}^t \mathbf{b} dV + \int_{S_e} \mathbf{N}^t \mathbf{q} dS + \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad (2.8)$$

$$\mathbf{g} = \int_{V_e} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.9)$$

Para o caso de materiais elásticos lineares, a relação constitutiva é definida pela Lei de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \epsilon \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz constitutiva elástica. Portanto, o vetor de forças internas pode ser escrito como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez dada por:

$$\mathbf{K} = \int_{V_e} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (2.12)$$

2.2.2 Elementos isoparamétricos

De acordo com a formulação isoparamétrica, o campo de deslocamentos, bem como a geometria, no interior de cada elemento é escrito como uma função dos deslocamentos nodais:

$$u = N_i u_i, v = N_i v_i \quad \text{e} \quad w = N_i w_i \quad (2.13)$$

em que N_i são as funções de forma do elemento.

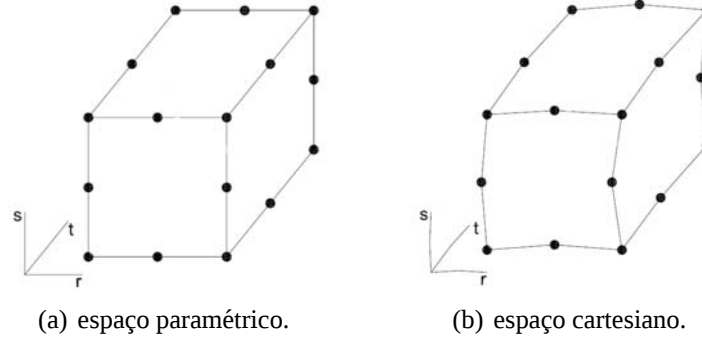


Figura 2.4: Elemento cúbico de 20 nós.

Para permitir a utilização de elementos de lados curvos (Figura 2.4), a geometria de cada elemento é interpolada a partir das coordenadas nodais (x_i, y_i) . A interpolação é feita através das mesmas funções utilizadas para interpolar os deslocamentos. Desta forma:

$$x = N_i x_i, \quad y = N_i y_i \quad \text{e} \quad z = N_i z_i \quad (2.14)$$

Vale ressaltar que as funções de forma N_i são polinômios escritos em função das coordenadas paramétricas (r, s, t) do elemento. Estas funções são definidas de acordo com o tipo e o número de nós do elemento (Cook et al., 1989; Zienkiewicz e Taylor, 1991; Bathe, 1996).

A Equação 2.13 pode ser escrita na forma matricial como:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \\ w_m \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (2.15)$$

onde m é o número de nós do elemento. Portanto, a matriz de interpolação $\mathbf{N}$ tem a seguinte

forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \cdots & \mathbf{N}_m \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Utilizando as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas x , y e z referentes à estrutura indeformada, podemos dizer que $\mathbf{B}$ é uma união de submatrizes definidas por:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Nas expressões anteriores, as derivadas $N_{i,x}$, $N_{i,y}$ e $N_{i,z}$ são calculadas a partir da expressão:

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{,x} & s_{,x} & t_{,x} \\ r_{,y} & s_{,y} & t_{,y} \\ r_{,z} & s_{,z} & t_{,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,r} \\ N_{i,s} \\ N_{i,t} \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{bmatrix} N_{i,r} \\ N_{i,s} \\ N_{i,t} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{\Gamma}$ é a inversa da matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} N_{i,r} x_i & N_{i,r} y_i & N_{i,r} z_i \\ N_{i,s} x_i & N_{i,s} y_i & N_{i,s} z_i \\ N_{i,t} x_i & N_{i,t} y_i & N_{i,t} z_i \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Na expressão acima, $N_{i,r}$, $N_{i,s}$ e $N_{i,t}$ são as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas paramétricas r , s e t , respectivamente.

Na formulação isoparamétrica, todos os integrandos que aparecem nas Equações (2.8), (2.9) e (2.12) são funções das coordenadas paramétricas. O volume infinitesimal dV , da estrutura indeformada, é dado por:

$$dV = c \, d\Omega = c \, dr \, ds \quad (2.20)$$

em que

$$c = \begin{cases} |\mathbf{J}|, & \text{para estado plano de deformação e tridimensional} \\ t|\mathbf{J}|, & \text{para estado plano de tensão} \\ 2\pi r|\mathbf{J}|, & \text{para estado axissimétrico} \end{cases} \quad (2.21)$$

Nesta expressão, t é a espessura do elemento e $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz Jacobiana.

Nas implementações computacionais, as integrações necessárias geralmente são re-

alizadas utilizando a quadratura de Gauss (Zienkiewicz e Taylor, 1991; Cook et al., 1989; Bathe, 1996). Uma vantagem do uso combinado da formulação isoparamétrica com a integração numérica é que ele leva a uma implementação computacional genérica, pois as matrizes apresentadas são válidas para elementos triangulares e quadriláterais com qualquer número de nós.

2.3 Teoria da Viscoelasticidade

Sólidos elásticos e fluidos viscosos diferem largamente em seus comportamentos constitutivos. Corpos elásticos deformados retornam ao seu estado natural ou indeformado quando removido o carregamento. Fluidos viscosos, entretanto, não possuem tendência de recuperação das deformações impostas. Ainda, as tensões em sólidos elásticos são relacionadas diretamente as deformações, enquanto nos fluidos, estas tensões dependem (exceto para o componente hidrostático) da taxa das deformações.

A descrição do comportamento que incorpora ambas as características elásticas dos sólidos e viscosas dos fluidos é denominado Viscoelasticidade. A junção do sólido elástico (*Hookeano*) e o fluido viscoso (*Newtoniano*) representa o largo espectro de comportamento que é descrito na Teoria da Viscoelasticidade (TV). Embora materiais viscoelásticos sejam também dependentes da temperatura, a discussão que segue no escopo desta dissertação é restrita a condições isotérmicas. Todas as formulações seguintes consideram materiais homogêneos e isotrópicos, onde primeiramente consideram o caso unidimensional, e, somente na Seção 2.3.11 o caso tridimensional é considerado.

2.3.1 Analogias mecânicas simples

A viscoelasticidade linear pode ser convenientemente introduzida em um ponto de vista unidimensional através da discussão de analogias mecânicas que modelam a resposta das deformações de vários materiais viscoelásticos.

Como dito anteriormente, um sólido linear elástico é um material onde as tensões (σ) são linearmente proporcionais as deformações (ϵ) por meio do Módulo de Elasticidade ou Módulo de Young E como segue:

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.22)$$

Obviamente esta relação representa um sólido, onde uma tensão constante não nula resulta em uma deformação constante não nula. Muitos materiais na engenharia podem ser representados como sendo elásticos lineares. A analogia mecânica para um sólido elástico é uma mola linear sem massa com uma constante de proporcionalidade E , como mostrado na Figura 2.5a.

Em um fluido viscoso as tensões (σ) são linearmente proporcionais a derivada das deformações ($\dot{\epsilon}$). A lei constitutiva é simples e expressa por:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.23)$$

em que η é a viscosidade do fluido. Obviamente isto representa um fluido, onde uma tensão constante não nula causa uma contínua deformação. É também importante observar que não é possível deformar um fluido viscoso instantaneamente, já que uma mudança repentina em ϵ requer que uma tensão infinita seja aplicada. O amortecedor é o modelo mecânico adotado para a representação dos fluidos como ilustra a Figura 2.5b.

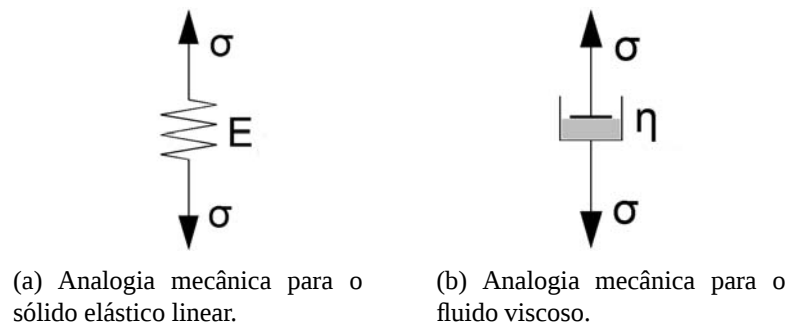


Figura 2.5: Modelos mecânicos utilizados na viscoelasticidade linear.

Várias combinações de elementos de mola e amortecedor, seja por meio de conexões em série e/ou em paralelo, compõem as diversas analogias mecânicas que são capazes de representar o comportamento de diversos materiais viscoelásticos. As três analogias básicas que são usadas para modelar comportamentos mais complexos são brevemente descritas a seguir.

- Fluido de Maxwell

Em um fluido de Maxwell, a mola é conectada em série com o amortecedor como mostra a Figura 2.6. Quando uma tensão σ é aplicada nos dois extremos do modelo, a

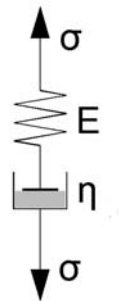


Figura 2.6: Analogia mecânica para o modelo de Maxwell.

deformação total ϵ do elemento é definida como:

$$\epsilon = \epsilon_m + \epsilon_a \quad (2.24)$$

em que ϵ_m e ϵ_a são as deformações na mola e no amortecedor, respectivamente. Sabendo que a tensão em cada elemento é a mesma e igual a σ , e usando-se as Equações 2.22 e 2.23, temos:

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.25)$$

que é a Equação Diferencial que descreve o fluido de Maxwell.

- Sólido de Kelvin (ou Voigt)

No modelo de Kelvin, também chamado de modelo de Voigt, para um sólido, a mola é conectada em paralelo com o amortecedor como pode ser visto na Figura 2.7. Quando uma

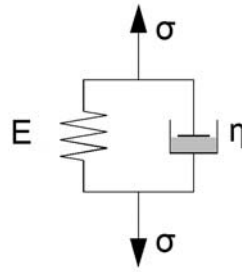


Figura 2.7: Analogia mecânica para o modelo de Kelvin.

tensão σ é aplicada nos dois extremos do modelo, a tensão total σ do elemento é dada por:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \quad (2.26)$$

em que σ_m e σ_a são as tensões na mola e no amortecedor, respectivamente. Sabendo que a deformação em cada elemento é a mesma e igual a ϵ , e novamente usando as Equações 2.22 e 2.23, temos:

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (2.27)$$

que por sua vez é a Equação Diferencial para o modelo de Kelvin ou Voigt.

- Sólido linear padrão

Os modelos simples de Maxwell e Kelvin não são adequados para uma completa representação do comportamento de materiais reais. Modelos mais complexos apresentam uma boa flexibilidade na modelagem da resposta de materiais reais. Um modelo de três parâmetros pode ser construído com duas molas e um amortecedor, e é conhecido como

Sólido Linear Padrão. Neste modelo, a mola pode ser conectada em série com um modelo de Kelvin, como pode se conectar em paralelo com um modelo de Maxwell. A Figura 2.8 ilustra estas duas possibilidades.

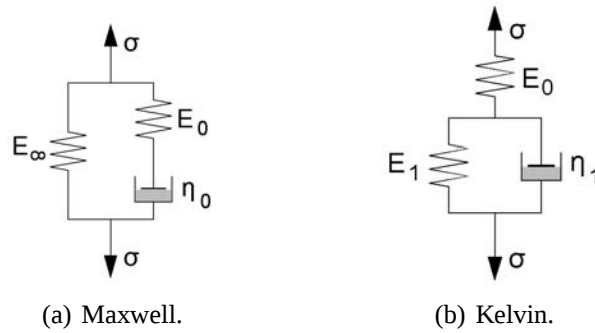


Figura 2.8: Modelos mecânicos do sólido linear padrão.

A relação constitutiva para este modelo em termos dos parâmetros de Maxwell (Figura 2.8a) é dada por:

$$\sigma + \frac{\eta_0}{E_0} \dot{\sigma} = (E_0 + E_\infty) \left(E_\infty \epsilon + \frac{\eta_0}{E_0} \dot{\epsilon} \right) \quad (2.28)$$

Em termos dos parâmetros de Kelvin (Figura 2.8b), a equação constitutiva muda para:

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{E_0}{E_1 C_1} \right) \sigma + \dot{\sigma} = \frac{E_0}{C_1} \epsilon + E_0 \dot{\epsilon} \quad (2.29)$$

em que:

$$C_1 = \frac{E_0 + E_\infty}{E_0 E_\infty} \eta_0 \quad (2.30)$$

Note que, para um mesmo Sólido Linear Padrão, as constantes das molas e do amortecedor para os dois modelos equivalentes não são iguais, embora eles possam ser relacionados entre si (Christensen, 1982)

No entanto as Equações 2.29 e 2.28 apresentam um domínio de variação de poucas ordens de grandeza no tempo e frequência, enquanto sólidos viscoelásticos geralmente apresentam um domínio de variação bem maior, como ilustra a Figura 2.9. Desta forma torna-se necessária a generalização destes modelos de modo a representar mais adequadamente a diversidade dos materiais existentes.

2.3.2 Analogias mecânicas generalizadas

- Modelo generalizado de Maxwell

No modelo generalizado de Maxwell, N modelos simples de Maxwell (Figura 2.6) são conectados em paralelo. Neste modelo, molas e/ou amortecedores podem ser acrescenta-

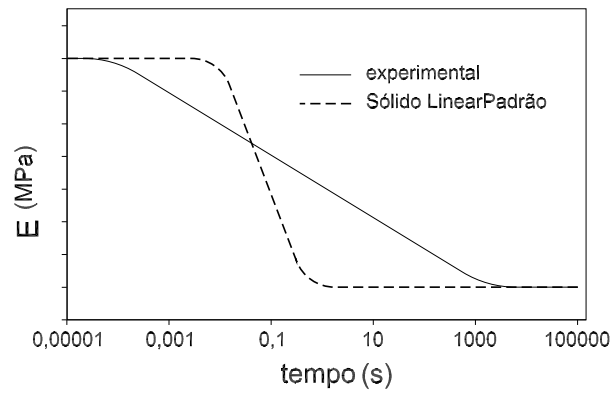


Figura 2.9: Domínio no tempo de propriedades viscoelásticas de materiais reais (Schapery, 1978).

dos caso necessário. Uma elasticidade instantânea é apreendida pelo modelo generalizado de Maxwell com a perda de um amortecedor isolado. A perda de uma mola isolada ($E_{\infty} = 0$) faz o modelo trabalhar como um fluido, enquanto que a inclusão da mola isolada faz o modelo trabalhar como um sólido. Este último é o que é representado na Figura 2.10.

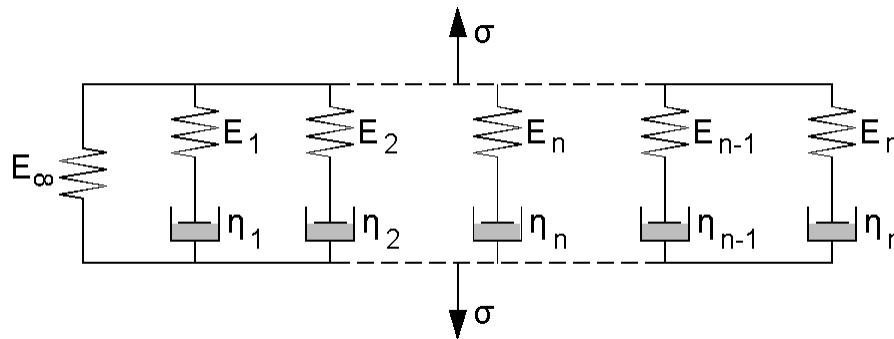


Figura 2.10: Analogia mecânica para o modelo generalizado de Maxwell.

Quando solicitado, a deformação é a mesma para cada elemento do modelo generalizado de Maxwell, e a tensão é simplesmente a soma das tensões de cada elemento σ_i .

- Modelo generalizado de Kelvin ou Voigt

No modelo generalizado de Kelvin, N modelos simples de Kelvin (Figura 2.7) são conectados em série. Neste modelo também podem ser acrescentadas molas e/ou amortecedores se necessário. Uma elasticidade instantânea é apreendida pelo modelo generalizado de Maxwell com a perda de um amortecedor isolado ($\eta_0 \rightarrow \infty$) fazendo o modelo trabalhar como um sólido, enquanto que a inclusão da mola isolada faz o modelo trabalhar como um fluido. A Figura 2.11 apresenta o modelo generalizado de Kelvin para sólidos.

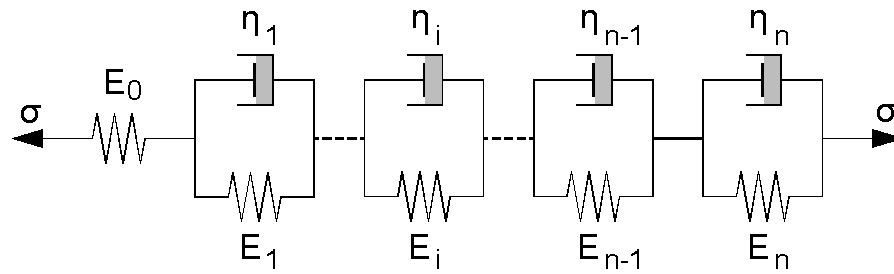


Figura 2.11: Analogia mecânica para o modelo generalizado de Kelvin ou Voigt.

Quando solicitado, o modelo generalizado de Kelvin exibe a mesma tensão σ para cada elemento da série, enquanto a deformação total é a soma das deformações de todos os elementos (ϵ_i).

2.3.3 Fluência, relaxação, função fluência e módulo de relaxação

Uma característica básica dos materiais viscoelásticos é denominada de fluência (ou compliância), que é uma deformação lenta e progressiva do material quando submetido a uma tensão constante, ou seja, as deformações crescem ao longo do tempo mesmo sob uma carga não variável (Lakes, 1999). Uma assíntota pode ou não ser notada, quando a tensão é aplicada por um longo tempo, dependendo se o material é sólido ou fluido.

Uma outra característica básica dos materiais viscoelásticos é denominada de relaxação, que é um decréscimo gradual da tensão quando o material é mantido sob deformação constante, ou seja, as tensões relaxam ao longo do tempo mesmo sob uma deformação não variável (Lakes, 1999). Existe uma tendência de estabilização da tensão quando a deformação é aplicada em um tempo longo, fato este que ocorre instantaneamente nos sólidos elásticos.

Podemos considerar os dois experimentos básicos da viscoelasticidade, os ensaios de fluência e o de relaxação. Estes testes podem ser realizados através de compressão (ou tração) uniaxial ou cisalhamento simples. O ensaio de fluência consiste na aplicação instantânea de uma tensão σ_0 , em um Corpo de Prova (CP) viscoelástico, e a manutenção desta tensão constante durante o período do teste de modo a se medir as deformações $\epsilon(t)$ ao longo do tempo.

No teste de relaxação, uma deformação instantânea ϵ_0 é aplicada e mantida de modo a se medir as tensões $\sigma(t)$ em função do tempo. Matematicamente, as tensões e deformações aplicadas são expressas por meio da função degrau unitária (*unit step function*), mostrada na

Figura 2.12 é definida por:

$$U(t - t_1) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_1 \\ 1, & \text{se } t \geq t_1 \end{cases} \quad (2.31)$$

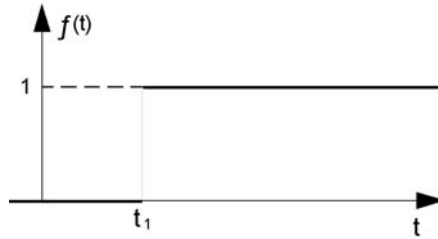


Figura 2.12: Função degrau unitária.

A fluência, também denominada compliância, $D(t)$, de um material sujeito a uma solicação $\sigma = \sigma_0 U(t)$, pode ser escrita na seguinte forma:

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (2.32)$$

Para sólidos viscoelásticos reais, a expressão para a fluência $D(t)$ deduzida a partir do modelo generalizado de Kelvin (Figura 2.11) é bem mais simples de se obter. Desta forma, é bastante usual a utilização das Equações ?? e 2.32 para a formulação da função fluência $D(t)$ dos sólidos viscoelásticos. Assim, temos,

$$D(t) = \left[D_0 + \sum_{i=1}^N D_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right] U(t) \quad (2.33)$$

em que $D_i = 1/E_i$. Se o número de unidades de Kelvin aumentar indefinidamente ($N \rightarrow \infty$) a tal ponto que o grupo finito de constantes (τ_i, D_i) tem que ser substituído por uma função fluência contínua $D(\tau)$, a expressão para o modelo de Kelvin é dada por:

$$D(t) = \int_0^\infty D(\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) d\tau \quad (2.34)$$

em que $D(\tau)$ é chamada de distribuição dos tempos de retardação, ou *spectrum* de retardação.

Em analogia com a fluência, a relaxação das tensões para um material sujeito a deformação $\varepsilon = \varepsilon_0 U(t)$, pode ser escrita na forma:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (2.35)$$

em que $E(t)$ é o módulo de relaxação.

É sabido também que, a formulação do módulo de relaxação, $E(t)$, a partir das Equações ?? e 2.35 do modelo generalizado de Maxwell é bem mais simples. Desta forma, a partir do modelo generalizado de Maxwell (Figura 2.10), o módulo de relaxação, $E(t)$ é:

$$E(t) = \left[E_{\infty} + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right] U(t) \quad (2.36)$$

Novamente aqui, quando $N \rightarrow \infty$, a função $E(\tau)$ substitui as constantes (τ_i, E_i) , resultando em:

$$E(t) = \int_0^{\infty} E(\tau) \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right) d\tau \quad (2.37)$$

em que $E(\tau)$ é chamada de distribuição dos tempos de relaxação, ou *spectrum* de relaxação.

2.3.4 Integrais hereditárias

Na viscoelasticidade linear, os Princípios de Homogeneidade e Superposição também são válidos. Desta forma, considerando uma função resposta R em função de uma sollicitação I , tem-se:

$$R\{CI\} = CR\{I\} \quad (2.38)$$

e

$$R\{I_1 + I_2 + \dots + I_n\} = R\{I_1\} + R\{I_2\} + \dots + R\{I_n\} \quad (2.39)$$

onde C é uma constante arbitrária e o símbolo $\{\}$ representa que a função resposta R é em função da sollicitação I . A Equação 2.38 é conhecida como o Princípio da Homogeneização ou da Proporcionalidade, e a Equação 2.39 como Princípio da Superposição de Boltzmann (Christensen, 1982), ou somente como Princípio da Superposição. Quando alguma destas condições não é satisfeita, o material é dito não-linear.

Assim, considerando um histórico de tensões aproximado por funções degraus de magnitude $\Delta \sigma$, como mostrado pelas linhas contínuas da Figura 2.13, em um material de função fluência $D(t)$, tem-se:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \sigma_1 D(t - \tau_1) + \sigma_2 D(t - \tau_2) + \sigma_3 D(t - \tau_3) = \sum_{i=0}^3 \sigma_i D(t - \tau_i) \quad (2.40)$$

Ainda, se for considerado um histórico de tensões arbitrário ($\sigma = \sigma(t)$), como ilustrado pela linha tracejada da Figura 2.13, aproximado por infinitas funções degrau de magnitude $d\sigma$ para $d\tau$, e aplicando-se o Princípio da Superposição definido na Equação

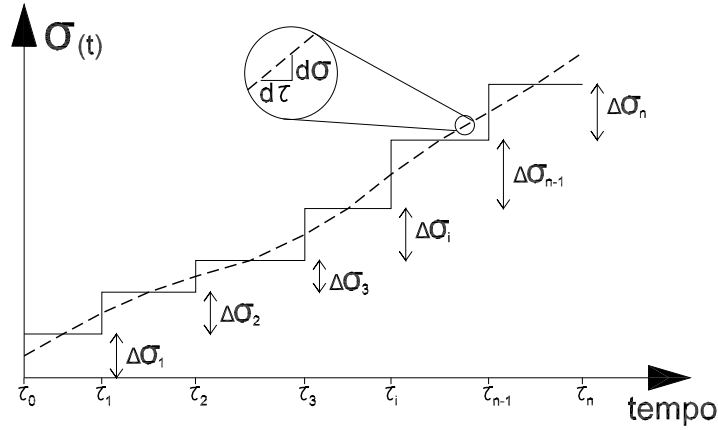


Figura 2.13: Histórico de tensões aplicado.

2.39, tem-se:

$$\varepsilon(t) = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N \rightarrow \infty} D(t - \tau_i) \frac{d\sigma_i}{d\tau_i} d\tau_i \quad (2.41)$$

e conseqüentemente:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t D(t - \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (2.42)$$

em que t é o tempo começando em qualquer referencial e τ é o tempo começando no início do carregamento (força ou deslocamento). As integrais na forma da Equação 2.42 são chamadas de integrais de convolução ou hereditárias uma vez que as deformações (ε), em qualquer instante, sejam dependentes de toda o histórico de tensão (σ). A Equação 2.42 é a relação constitutiva (*stress formulation*) dos materiais viscoelásticos lineares. Assim, pode-se obter a deformação de um material viscoelástico linear uma vez conhecido o histórico de tensões aplicado e a função fluência, $D(t)$.

Para um material inicialmente em repouso ($\sigma = 0$ e $\varepsilon = 0$) em um tempo $t = 0$, e que a solicitação envolve uma descontinuidade (função degrau) de magnitude σ_0 no tempo $t = 0$, a integral da Equação 2.42 assume a seguinte forma:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \int_{-\infty}^t D(t - \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (2.43)$$

De forma análoga, pode-se provar que, para um histórico de deformações, a função contínua que descreve as tensões pode ser expressa por:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2.44)$$

que é a relação constitutiva (*strain formulation*) dos materiais viscoelásticos lineares. Assim, pode-se obter a tensão em um material viscoelástico linear uma vez conhecido o histórico das deformações e o módulo de relaxação, $E(t)$.

Para um material inicialmente em repouso ($\sigma = 0$ e $\varepsilon = 0$) em um tempo $t = 0$, e que a solitação envolve uma descontinuidade (função degrau) de magnitude ε_0 no tempo $t = 0$, a integral da Equação 2.44 assume a seguinte forma:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 D(t) + \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.45)$$

2.3.5 Módulo de relaxação complexo e função fluência complexa

Os materiais viscoelásticos também podem ser caracterizados sob condições harmônicas de carregamento. Estes tipos de solitações são bastante importantes na caracterização dos materiais viscoelásticos pelo fato de permitirem uma caracterização acelerada (Berthelot et al., 2003). Se um material viscoelástico linear é submetido a um carregamento senoidal do tipo:

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad (2.46)$$

em que σ_0 é a tensão inicial aplicada e ω é a frequência angular, a deformação resultante para um estado estável (*steady state*) é definida pela Equação 2.47. Note que a deformação também é uma resposta senoidal de mesmo ω mas com uma amplitude ε_0 e um ângulo de fase δ representando a defasagem entre a solitação (σ) e a resposta (ε).

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta) \quad (2.47)$$

em que δ pode ser definido como:

$$\delta = \frac{t_d}{t_c} \quad (2.48)$$

em que t_d é a defasagem de tempo entre o ciclo de tensão e o ciclo de deformação, e t_c é o tempo do ciclo ou período (T). Para um material elástico ideal $\delta = 0^\circ$, enquanto para $\delta = 90^\circ$ o material é puramente viscoso. A razão entre as amplitudes da tensão e deformação definem o valor absoluto do módulo de relaxação complexo $|E^*|$ e da função fluência complexa $|D^*|$, respectivamente.

$$|E^*| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad (2.49)$$

$$|D^*| = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \quad (2.50)$$

Com o ângulo de fase δ , definimos os componentes de E^* :

$$|E'| = \frac{\sigma_0 \cos(\delta)}{\varepsilon_0} \quad (2.51)$$

$$|E''| = \frac{\sigma_0 \sin(\delta)}{\varepsilon_0} \quad (2.52)$$

em que E' é a parte real do módulo de relaxação complexo, também conhecida como *storage modulus*, e E'' é a parte imaginária, também conhecida como *loss modulus*.

Analogamente os componentes da função fluência complexa são definidos por:

$$|D'| = \frac{\varepsilon_0 \cos(\delta)}{\sigma_0} \quad (2.53)$$

$$|D''| = \frac{\varepsilon_0 \sin(\delta)}{\sigma_0} \quad (2.54)$$

em que D' é a parte real do função fluência complexa, também conhecida como *storage compliance*, e D'' é a parte imaginária também conhecida como *loss compliance*.

Uma generalização da breve descrição acima pode ser atingida expressando a tensão em uma forma complexa como:

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (2.55)$$

e a deformação resultante também em sua forma complexa como:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)} \quad (2.56)$$

A partir das Equações 2.55 e 2.56, o módulo complexo $E^*(i\omega)$ é definido como a quantidade complexa:

$$\begin{aligned} E^*(i\omega) &= \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} \\ E^*(i\omega) &= E' + iE'' \end{aligned} \quad (2.57)$$

Similarmente, a função fluência complexa $D^*(i\omega)$ é definida como:

$$\begin{aligned} D^*(i\omega) &= \frac{\varepsilon^*}{\sigma^*} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} e^{-i\delta} \\ D^*(i\omega) &= D' + iD'' \end{aligned} \quad (2.58)$$

A Figura 2.14 mostra o diagrama dos vetores de E^* e D^* . Note que $E^* = \frac{1}{D^*}$.

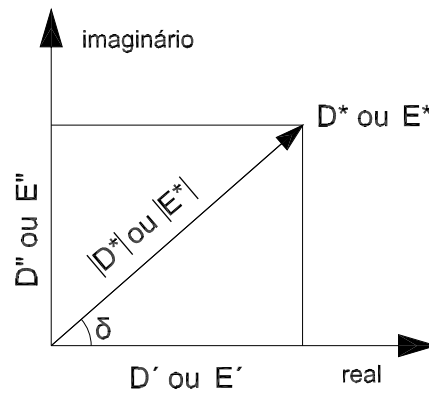


Figura 2.14: Diagrama vetorial para as funções complexas D^* e E^* (Schapery, 1978).

2.3.6 Princípio da Superposição Tempo Temperatura (PSTT) e Tempo Frequência (PSTF)

Existe uma classe especial de materiais cuja dependência da temperatura das propriedades mecânicas é passível de uma descrição analítica. Essa classe especial de materiais é definida como termoreologicamente simples. A correspondente descrição desta dependência da temperatura foi primeiramente proposta por Lee (1996) *apud* Leaderman (1943) e Ferry (1950).

Para estes materiais, o comportamento sob altas taxas de solitação corresponde ao comportamento a baixas temperaturas, e o comportamento a baixas taxas de solitação corresponde ao comportamento a altas temperaturas. Conseqüentemente, a caracterização do comportamento mecânico de longo prazo destes materiais não precisa ser realizada em uma escala real de tempo. Desta forma, ao desejarmos caracterizar o comportamento de um material em um período de 10 anos, por exemplo, podemos realizar experimentos (*creep* e/ou relaxação) em temperaturas acima e igual a uma temperatura de referência (T_R) e construir uma curva da descrição do comportamento no intervalo requerido. Analogamente, se desejarmos prever o comportamento mecânico de um material em tempos imediatamente posteriores a solitação imposta (por exemplo $\times 10^{-4}$ s), podemos realizar experimentos (*creep* e/ou relaxação) em temperaturas abaixo e igual a T_R , e da mesma forma construir uma curva da descrição do comportamento deste material no intervalo requerido.

Uma curva da descrição do comportamento global do material (curva de fluência e/ou relaxação), para ambos os casos acima, pode ser construída pela translação horizontal das curvas de cada temperatura ensaiada no eixo logaritmico do tempo. A curva resultante que descreve este comportamento viscoelástico em um amplo intervalo de tempo (*spectrum*) é chamada de Curva Mestra (*Master Curve*). A distância horizontal entre a Curva Mestra resultante e uma das curvas em uma dada temperatura T é somente dependente da temperatura e definida como a_T (Ferry, 1950, 1980; Christensen, 1982). Esta característica é comumente

definida como Princípio da Superposição Tempo-Temperatura (PSTT). A Figura 2.15 ilustra os conceitos descritos.

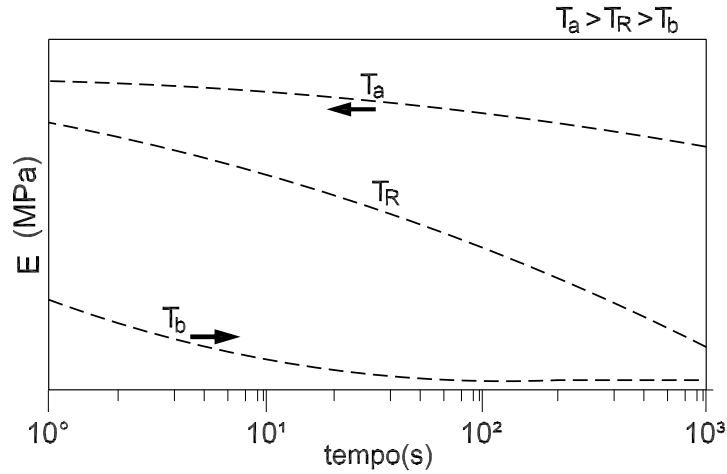


Figura 2.15: Representação da construção da Curva Mestra para o $E(t)$ de sólidos viscoelásticos.

A descrição matemática da dependência da temperatura desta classe de materiais pode ser formulada em termos da função fluência, $D(t)$, ou do módulo de relaxação, $E(t)$, onde, para este último, temos:

$$E(t, T) = E_M(\xi) \quad (2.59)$$

em que $E_M(\xi)$ é o módulo de relaxação da Curva Mestra, e

$$\xi = \frac{t}{a_T} \quad (2.60)$$

em que ξ é o tempo reduzido e a_T é o fator de translação horizontal (*shift factor*) que é função da temperatura (Ferry, 1950). Como pode ser visto pela Equação 2.59, a dependência do tempo e da temperatura do material pode ser representada somente por um simples fator (a_T) e o tempo reduzido (ξ). O fator de translação horizontal (a_T) é uma propriedade básica do material, e em geral, é definido experimentalmente (Ferry, 1980; Lee, 1996).

O mesmo princípio acima também pode ser aplicado na descrição da dependência da temperatura para as funções complexas. Assim, a dependência da temperatura do módulo complexo pode ser representada por:

$$E^*(\omega, T) = E_M^*(\zeta) \quad (2.61)$$

em que $\zeta = \omega a_T$ é a frequência reduzida. É importante observar que o mesmo fator de translação horizontal (a_T) é usado tanto no tempo reduzido como na frequência reduzida.

Desta forma, para solicitações harmônicas também pode ser usado o mesmo

raciocínio do PSTT com relação ao tempo e a frequência utilizadas nos ensaios sendo denominado Princípio da Superposição Tempo-Frequência (PSTF). Assim, frequências maiores são relacionadas a tempos mais curtos de solitação, enquanto frequências menores se relacionam com solitações em tempos mais longos.

2.3.7 Propriedades dos materiais viscoelásticos e séries de Prony

Os dados advindos dos ensaios (*creep* e/ou relaxação), e após a construção da Curva Mestra, requerem uma função de regressão a ser usada na determinação das respostas viscoelásticas. Entre os diversos modelos possíveis, o modelo generalizado de Maxwell e o modelo generalizado de Kelvin, são freqüentemente usados uma vez que propiciam melhor eficiência na implementação matemática do que os outros modelos. As expressões matemáticas dos modelos generalizados de Maxwell e Kelvin são conhecidas como séries de Prony. As expressões da série de Prony para a fluência, $D(t)$, e módulo de relaxação, $E(t)$, são derivadas, a partir das Equações 2.33 e 2.36, respectivamente:

$$D(t) = D_0 + \sum_{i=1}^M D_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \quad (2.62)$$

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \quad (2.63)$$

em que D_0 , D_i , E_∞ , E_i , τ_i e ρ_i são coeficientes da série de Prony e M e N são o número de termos. Fisicamente, τ_i pode ser interpretado como o tempo de retardação e é definido por:

$$\tau_i = \eta_i D_i \quad (2.64)$$

e ρ_i é o tempo de relaxação definido por:

$$\rho_i = \frac{\eta_i}{E_i} \quad (2.65)$$

O modelo dependente do tempo usado no presente trabalho para simular a relação tensão-deformação em misturas asfálticas é o modelo generalizado de Maxwell ilustrado pela Figura 2.10.

Para que a curva dos dados experimentais (Curva Mestra) seja representada pelas Equações 2.62 e/ou 2.63 é necessária uma técnica de regressão para que os parâmetros sejam determinados. Exemplos de métodos usados para esta regressão são o Método da Colocação (Schapery, 1961), Método dos Dados Múltiplos (Cost e Becker, 1970), e o Método dos Resíduos Sucessivos (Huang, 1993). O método de regressão popular no meio de sólidos vis-

coelásticos, principalmente para materiais betuminosos é o Método da Colocação (Schapery, 1961) que vem sendo amplamente usado para materiais betuminosos (Kim e Little, 1990; Kim e Lee, 1995; Souza e Soares, 2003; Evangelista-Junior et al., 2005, 2006).

O Método da Colocação se baseia no estabelecimento de valores *a priori* para os coeficientes τ_i ou ρ_i possibilitando desta forma, a determinação dos coeficientes E_i ou D_i de uma maneira simples por meio da solução de um sistema de equações lineares, uma vez que as séries de Prony são funções lineares com relação a estes últimos.

A partir da série de Prony da função fluência definida pela Equação 2.62, e reescrevendo-a em uma forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_2}} & \cdots & 1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_M}} \\ 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_2}} & \cdots & 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_M}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 - e^{-\frac{t_M}{\tau_1}} & 1 - e^{-\frac{t_M}{\tau_2}} & \cdots & 1 - e^{-\frac{t_M}{\tau_M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(t_1) - D_0 \\ D(t_2) - D_0 \\ \vdots \\ D(t_M) - D_0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Podemos notar que, estabelecendo valores para τ_i para cada instante de observação experimental (t_k), a matriz da equação torna-se numérica, e conseqüentemente, temos um sistema linear do tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que, somente os coeficientes D_i são incógnitas.

O valor para D_0 pode ser estabelecido diretamente a partir dos dados experimentais, em que o menor valor encontrado, ou até mesmo, um valor ligeiramente inferior ao menor valor experimental pode ser assumido. Schapery (1961) observa que, para acurácia e suavidade suficientes para a curva regredida a partir de M ordens de grandeza de tempo (espectro de tempo da Curva Mestra), $M - 2$ termos (pares de coeficientes D_i e τ_i) são necessários. Assim, para determinar o espectro de variação no tempo, a partir dos dados experimentais com N décadas de variação temporal, com N_{min} para a década inicial e N_{max} para década final dos dados, tem-se o primeiro coeficiente (τ_1) iniciando em $\times 10^{N_{min}+1}$ e o último coeficiente (τ_n) finalizando em $\times 10^{N_{max}-1}$, espaçando os coeficientes em uma década de tempo ($\times 10^1$).

Schapery (1961) também preconiza que, para um maior proveito do domínio de variação de cada termo da série, bem como uma maior suavidade da função regredida evitando o efeito de escada (*staircase effect*), os coeficientes τ_i estejam separados por uma década de tempo.

O Método da Colocação pode ser aplicado para qualquer série de Prony, sendo que no caso das séries de Prony para funções complexas, a variável tempo (t_k) é substituída pela variável frequência angular ω_i . A Equação 2.62 mostra a forma matricial da série de Prony do módulo de relaxação, em que para o E_∞ também pode ser atribuído o valor mínimo (ou ligeiramente inferior) observado experimentalmente:

$$\begin{bmatrix} e^{-\frac{t_1}{\rho_1}} & e^{-\frac{t_1}{\rho_2}} & \dots & e^{-\frac{t_1}{\rho_N}} \\ e^{-\frac{t_2}{\rho_1}} & e^{-\frac{t_2}{\rho_2}} & \dots & e^{-\frac{t_2}{\rho_N}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-\frac{t_N}{\rho_1}} & e^{-\frac{t_N}{\rho_2}} & \dots & e^{-\frac{t_N}{\rho_N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(t_1) - E_\infty \\ E(t_2) - E_\infty \\ \vdots \\ E(t_N) - E_\infty \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Uma desvantagem do Método da Colocação é que nem sempre os coeficientes regredidos são todos positivos. Coeficientes negativos além de não serem fisicamente reais, também causam oscilações na Curva Mestra reconstruída (Park e Schapery, 1999). Numerosos trabalhos propuseram abordagens para a superação deste problema. Dentre eles podemos citar os trabalhos de Emri e Tschoegl (1993) que desenvolveram um algoritmo computacional recursivo de modo a evitar coeficientes negativos. (Park e Schapery, 1999) *apud* Kashta e Schwarzt (1994) propuseram um método de ajustamento dos tempos de retardação τ_i e/ou relaxação ρ_i de modo a evitar os coeficientes não positivos. (Park e Schapery, 1999) *apud* Baumgaertel e Winter (1989) empregaram uma regressão não-linear em que todos os coeficientes (D_0, D_i, ρ_i e E_∞, E_i, τ_i), o intervalo de caracterização (*time spectra*) e até o número de termos são variáveis. Apesar de um maior esforço computacional, este método permite uma maior acurácia no processo de regressão.

Park e Kim (1998) propuseram um método de pré-ajuste dos dados experimentais usando uma representação em uma série de potências, permitindo uma maior qualidade na representação subsequente em séries de Prony.

No presente trabalho foi desenvolvido um método alternativo, de forma que, um algoritmo de minimização dos erros entre a função experimental e a regredida, foi utilizado juntamente com o Método da Colocação (Schapery, 1961).

Matematicamente, problemas de minimização podem ser enunciados como:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(\mathbf{x}) && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ & \text{sujeito a} && c_i(\mathbf{x}) = 0 && i = 1 \dots l \\ & && c_i(\mathbf{x}) \leq 0 && i = l + 1 \dots m \\ & && x_i^l \leq x_i \leq x_i^u && i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (2.68)$$

em que $\mathbf{x}$ é um ponto do $\mathbb{R}^n$ sobre o qual são impostos os limites mínimos e máximos (restrições laterais), $f(\mathbf{x})$ é a função a ser minimizada e as funções $c_i(\mathbf{x})$ representam as restrições de igualdade e desigualdade. Assume-se que tanto a função objetivo quanto as restrições são funções contínuas no $\mathbb{R}^n$.

Para o caso da regressão dos dados experimentais nas séries de Prony, como exemplo a série de Prony para a função fluência (Equação 2.62), pretende-se minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre $D(t_k)$, que é a função que fornece os valores dos dados

experimentais, e $D^R(t_k)$, que é a função regredida. Matematicamente, tem-se

$$\text{minimizar} \sum_{k=1}^N [D(t_k) - D^R(t_k)]^2 \quad (2.69)$$

A Tabela 2.1 apresenta o algoritmo baseado nos conceitos acima para a regressão dos coeficientes da serie de prony para a função fluência, $D(t)$.

Tabela 2.1: Algoritmo para regressão da série de Prony a partir dos dados experimentais.

A - Cálculos Iniciais:

1. Atribuição do valor para D_0 .
 2. Determinar o espectro de variação no tempo a partir dos dados experimentais com (N) décadas de variação.
 3. Atribuir valores iniciais para os coeficientes τ_i .
 4. Formação das matrizes da Equação 2.66 ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$).
 5. Cálculo dos coeficientes D_i por meio da resolução de um sistema de equações lineares ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$).
 6. Calcular o somatório das diferenças segundo Equação 2.69.
-

B - Processo de otimização:

1. Aplicar algoritmo de otimização de tal forma que:

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & \text{Equação 2.69} & \\ \text{sujeito a} & D_i > 0 & i = 1 \dots M \\ & \tau_i > 0 & i = 1 \dots M \\ \text{variando} & D_i, \tau_i & i = 1 \dots M \end{array}$$

Apesar do método descrito anteriormente ter sido usado para a regressão de $D(t)$, este pode ser aplicável para qualquer das funções viscoelásticas descritas série de Prony, sejam estas transientes ou complexas.

2.3.8 Métodos de interconversão entre funções viscoelásticas

Desde que a função fluência $D(t)$, o módulo de relaxação $E(t)$, a função fluência complexa D^* e o módulo complexo E^* , medem as propriedades viscoelásticas (reológicas) dos materiais viscoelásticos em diferentes solicitações (forças ou deslocamentos impostos), existem relações de interconversão entre os parâmetros medidos a partir destes testes. Se estas relações de interconversão podem ser laboratorialmente verificadas, um nível de simplificação nos experimentos de laboratório pode ser empregado. Por exemplo, o módulo de relaxação é obtido em um ensaio dispendioso de ser realizado. Equipamentos que apliquem deformações (deslocamentos) controladas são mais raros de serem encontrados devido ao seu custo. Além disso, ensaios dinâmicos requerem solicitações cíclicas que usualmente envolvem um controle mais cuidadoso sobre a solicitação aplicada (senoidal) e a aquisição dos dados do que os ensaios estáticos. Para propósitos práticos, é desejável prever o módulo de relaxação e o módulo complexo a partir dos resultados do ensaio de

creep estático (função fluência, $D(t)$). Isto se deve ao fato que o ensaio de *creep* estático é mais conveniente de ser realizado devido a simplicidade dos procedimentos e equipamentos utilizados.

No caso do ensaio de *creep* estático, a tensão aplicada segue uma função degrau unitária (ver Seção 2.3.3). Assim, utilizando as Equações constitutivas 2.42 e 2.44, tem-se para $t > 0$:

$$\int_0^t E(t - \tau) \frac{\partial D}{\partial \tau} d\tau = 1 \quad (2.70)$$

e

$$\int_0^t E(t - \tau) D(\tau) d\tau = t \quad (2.71)$$

Métodos que utilizem esquemas de integração numérica direta das Equações 2.70 e 2.71 podem ser usados para o cálculo do módulo de relaxação, $E(t)$, a partir dos dados do ensaio de *creep* estático. Dentre eles destacam-se o trabalho de Kim e Lee (1995). Em geral, um intervalo de tempo Δt muito pequeno é requerido para a boa predição de $E(t)$ devido a significativa mudança na compliância do material em tempos curtos de solitação. Deste modo, este método requer um grande esforço computacional.

Existem ainda alguns métodos aproximados de interconversão entre as propriedades viscoelásticas. Maiores detalhes podem ser encontrados em (Ferry, 1980; Christensen, 1982).

Park e Schapery (1999) desenvolveram um método em que a interconversão se aplica a partir dos coeficientes regredidos da Série de Prony de uma das funções viscoelásticas ($\rho_{i...N}$, E_∞ , $E_{i...N}$ ou $\tau_{i...N}$, D_0 , $D_{i...N}$) para o cálculo dos coeficientes da Série de Prony da função requerida. O método se baseia em um procedimento numérico em que, especificando valores de τ_i ou ρ_i , o restante dos coeficientes são obtidos por meio da solução de um sistema linear. Este método foi utilizado com sucesso em Souza (2005). A desvantagem deste método, é que, ao especificar que $\tau_i = \rho_i$, o procedimento gera resultados menos acurados, exigindo muitas vezes que os coeficientes a serem especificados ($\tau_i \neq \rho_i$) sejam determinados graficamente, tornando o procedimento operacionalmente dispendioso.

Métodos bastante usuais para a interconversão entre o módulo de relaxação, $E(t)$, e a função fluência $D(t)$ partem do princípio que, desde que muitos materiais viscoelásticos lineares podem ser representados por simples leis de potências para a região de transição, as seguintes expressões podem ser usadas para o módulo de relaxação e função fluência, respectivamente:

$$E(t) = E_1 t^{-n} \quad (2.72)$$

$$D(t) = D_1 t^n \quad (2.73)$$

em que E_1 e D_1 são constantes positivas e n é a inclinação absoluta da reta, em escala

$\log\text{-}\log$, calculada pela Equação 2.72 ou 2.73, e pode ser definida pela expressão:

$$n = \left| \frac{d \log F(\tau)}{d \log \tau} \right|_{\tau=t} \quad (2.74)$$

em que $F(\tau)$ é a função fonte dos dados experimentais, seja $E(t)$ ou $D(t)$, e $||$ representa o valor absoluto (módulo).

Baseado nisto, Leaderman (1958) desenvolveu a seguinte expressão de relação entre as funções viscoelásticas:

$$E(t)D(t) = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} \quad (2.75)$$

É importante notar que, quando $E(t)$ ou $D(t)$ é uma reta horizontal na escala $\log\text{-}\log$ ($n \rightarrow 0$), o lado direito da Equação 2.75 tende ao valor da unidade, caracterizando a relação quasi-elástica entre as funções viscoelásticas dada pela seguinte expressão:

$$E(t) = \frac{1}{D(t)} \quad \text{para } t > 0 \quad (2.76)$$

Esta relação (Equação 2.76) é inaceitável para a grande maioria dos materiais viscoelásticos, sendo somente aproximadamente válida para as regiões assintóticas da função fluência e do módulo de relaxação.

A interconversão dada pela Equação 2.75 é exata para funções $E(t)$ e $D(t)$ que se comportem globalmente como as funções dadas pelas Equações 2.72 e 2.73, respectivamente. Esta também produz uma boa interconversão quando o logaritmo de $F(\tau)$ tem um comportamento suave (ou suavemente variável) em função de $\log t$, tendo ainda acurácia em regiões em que $E(t)$ ou $D(t)$ sejam aproximadamente uma reta na escala $\log\text{-}\log$.

Park e Kim (1999) apresentam uma diferente relação de interconversão entre $E(t)$ e $D(t)$ em termos das inclinações n na escala $\log\text{-}\log$ consideradas localmente. A partir das Equações 2.72 e 2.73, obtiveram a seguinte expressão para $D(t)$ em termos da constante E_1 e n :

$$D(t) = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi E_1} t^n \quad (2.77)$$

e considerando a seguinte relação de interconversão:

$$E(t^*) = \frac{1}{D(t)} \quad (2.78)$$

em que t^* denota um tempo equivalente tal que $t^* = \alpha t$. Substituindo as Equações 2.72 e 2.77 na Equação 2.78 obtiveram:

$$D(t) = \frac{1}{E(\alpha t)} \quad (2.79)$$

e

$$E(t) = \frac{1}{D(\frac{t}{\alpha})} \quad (2.80)$$

em que

$$\alpha = \left(\frac{\text{sen}(n\pi)}{n\pi} \right)^{1/n} \quad (2.81)$$

O valor de n na Equação 2.81 é a inclinação local da função fonte dos dados experimentais e pode ser calculado segundo a Equação 2.74. Apesar da interconversão produzida pelas Equações 2.79 e 2.80 ser exata quando as funções $E(t)$ e $D(t)$ são representadas por leis de potência dadas nas Equações 2.72 e 2.73, respectivamente, elas apresentam acurácia suficiente para materiais gerais e não representáveis por leis de potência (Park e Kim, 1999). A única imposição para a acurácia desta interconversão é que a função fonte dos dados seja representada por uma curva suave quando plotada em uma escala *log-log*.

As Equações 2.79 e 2.80 mostram que a função é interconvergida a partir do inverso do valor da função fonte para um novo valor de tempo. Isto é, o eixo de tempo logaritmico, $\log t$ é transladado em $\pm \log \alpha$ ao longo do eixo com o sinal dependendo da função fonte dos dados, onde o sinal positivo ou negativo é usado para $E(t)$ ou $D(t)$, respectivamente, como função fonte. O fator de translação α dado pela Equação 2.81, é função de n , que por sua vez é função de t . Park e Kim (1999) atentam para o fato que, enquanto as Equações 2.79 e 2.80 permitem que o valor da função a ser interconvertida seja avaliado por uma translação no tempo (eixo das abscissas) para a função fonte, a Equação 2.75 permite o cálculo da função a ser interconvertida pela translação na função fonte (eixo das ordenadas). Em outras palavras, $E(t)$ e $D(t)$ podem ser inter-relacionados como em uma relação quasi-elástica (Equação 2.76) com uma apropriada translação, seja da função fonte ou do tempo.

Outras relações entre as funções viscoelásticas podem ser obtidas utilizando-se a definição da Transformada de Laplace:

$$\bar{f}(x_k, s) = \int_0^{\infty} f(x_k, t) e^{-st} dt \quad (2.82)$$

É possível mostrar que a transformada de Laplace de $D(t)$ e $E(t)$ podem ser interrelacionadas pela equação:

$$\bar{D}(s) \bar{E}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (2.83)$$

em que $\bar{f}(s)$ é a transformada de Laplace de uma função f , s é a variável de Laplace.

Introduzindo convenientemente a Transformada de Carson $\tilde{f}$ de uma função f como:

$$\tilde{f} = \bar{f} s \quad (2.84)$$

temos, como relação entre $E(t)$ e $D(t)$, a seguinte expressão:

$$\tilde{E} = \frac{1}{\tilde{D}} \quad (2.85)$$

A solução analítica do inverso da transformada de Laplace é muitas vezes impraticável de se obter. Assim, uma maneira alternativa, conhecida como o Método Direto de Schapery (1962), pode ser usada:

$$f(t) = \left[\tilde{f}(s) \right]_{s \rightarrow \frac{0,56}{t}} \quad (2.86)$$

A Equação 2.86 indica que qualquer relação no domínio de Laplace (s) pode ser invertido (transformado) pela substituição da variável t por $0,56/t$ na variável de Laplace s .

Alternativamente, no presente trabalho foi desenvolvida uma solução computacional mais barata e eficiente. No método descrito nos parágrafos seguintes, as relações advindas da aplicação das Transformada de Laplace para as funções viscoelásticas foram mescladas com os conceitos de algoritmos de otimização já anteriormente descrito e utilizados na Seção 2.3.7 para a regressão das funções viscoelásticas.

Aplicando-se a transformada de Carson nas séries de Prony definidas nas Equações 2.62 e 2.63, obtem-se:

$$\tilde{D}(s) = D_0 + \sum_{i=1}^M \frac{D_i}{s \tau_i + 1} \quad (2.87)$$

e

$$\tilde{E}(s) = E_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{E_i s}{s + \frac{1}{\rho_i}} \quad (2.88)$$

em que, mesmo após a transformação para o espaço de Carson, os coeficientes das séries de Prony ($D_0, D_{i's}, \tau_{i's}, E_\infty, E_{i's}$ e $\rho_{i's}$) permanecem inalterados devido ao fato de serem constantes.

Substituindo as Equações 2.87 e 2.88 na relação entre $E(t)$ e $D(t)$, também no espaço de Laplace, como definida na Equação 2.85, resulta na seguinte relação entre os coeficientes quando $s \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{E_\infty} = D_0 + \sum_{i=1}^{M=N} D_i \quad (2.89)$$

$$\text{minimizar} \sum_{k=1}^N [\tilde{E}(s_k) - \tilde{E}^I(s_k)]^2 \quad (2.90)$$

Note que a Equação anterior apenas se aplica quando $M = N$. O restante dos coeficientes podem ser determinados aplicando-se o Método da Colocação (Schapery, 1961), onde para valores assumidos de τ_i , os E_i 's são calculados para diferentes valores de s . No-

Tabela 2.2: Algoritmo para interconversão entre séries de Prony de funções viscoelásticas a partir dos dados experimentais.

A - Cálculos Iniciais:

1. Cálculo do valor para E_∞ a partir da Equação 2.89.
2. Cálculo dos coeficientes E_i^I por meio da relação da Equação 2.85 com $\tilde{D}(s)$ e $\tilde{E}(s)$ dados pelas Equações 2.87 e 2.88, respectivamente.
3. Calcular o somatório das diferenças segundo Equação 2.90.

B - Processo de otimização:

1. Aplicar algoritmo de otimização de tal forma que:

minimizar

sujeito a

variando

Equação 2.90

$E_i > 0$

$\rho_i > 0$

E_i, τ_i

$i = 1 \dots N$

$i = 1 \dots N$

$i = 1 \dots N$

vamente aqui, pode-se aplicar a técnica de otimização já abordada neste trabalho (Equação 2.68) de modo a se obter a minimização da diferença entre a função calculada ($1/\tilde{D}$) e a função objetivo ($\tilde{E}$).

Uma vantagem desta técnica é que ela não exige uma nova regressão dos valores para a série de Prony do módulo de relaxação. Isto se deve ao fato que a função objetivo da minimização dos erros já está na forma da série de Prony do módulo de relaxação. Além do mais, a acurácia é potencialmente boa pois é baseada em uma relação analítica entre as funções $E(t)$ e $D(t)$. A solução apresenta-se barata computacionalmente pois não exige uma ampla discretização no tempo como exige a integração direta da Equação 2.70 ou 2.71.

A Teoria da Viscoelasticidade também prescreve a correspondência entre as propriedades estáticas (domínio do tempo) com as propriedades dinâmicas (domínio da frequência). Uma maneira alternativa de determinar as propriedades dinâmicas é através da representação das séries de Prony (domínio do tempo) das Equações 2.33 e 2.36 como segue:

$$E'(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{E_i \omega^2 \rho_i^2}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (2.91)$$

$$E''(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{E_i \omega \rho_i}{\omega^2 \rho_i^2 + 1} \quad (2.92)$$

$$D'(\omega) = D_0 + \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{\omega^2 \tau_i^2} \quad (2.93)$$

$$D''(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{D_i \omega \tau_i}{\omega^2 \tau_i^2 + 1} \quad (2.94)$$

É importante observar que os coeficientes das Equações 2.91-2.94 são os mesmos utilizados na série de Prony das Equações 2.62 e 2.63, permitindo, desta forma a predição das funções complexas (D^* e E^*) a partir das funções advindas da caracterização estática ($D(t)$ e $E(t)$) e vice-versa. O trabalho de Medeiros-Jr e Soares (2006) demonstram um procedimento de conversão do módulo de relaxação para o módulo complexo, enquanto Kim e Lee (1995) apresentam procedimentos para interconversões generalizadas entre as funções viscoelásticas de misturas asfálticas.

2.3.9 Análise de tensões e deformações em meios viscoelásticos e Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV)

A Teoria da Viscoelasticidade permite que os problemas viscoelásticos sejam tratados de tal maneira que, sejam matematicamente equivalentes a problemas elásticos por meio das Transformadas de Laplace.

Considere a análise de tensões e deformações em um meio contínuo, isotrópico e viscoelástico ocupando um volume V , e delimitado pela superfície S , como mostra a Figura 2.16: em que b_i são as forças de corpo em todo V , $t_i(x_k, t)$ são tensões aplicadas na porção S_1 da superfície S (*surface tractions*), e $g_i(x_k, t)$ são os deslocamentos aplicados na porção S_2 de S . A partir disto, tem-se as seguintes equações:

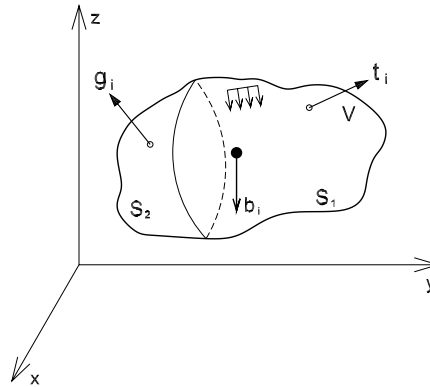


Figura 2.16: Meio contínuo, isotrópico e viscoelástico.

1. Equação de equilíbrio

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho a_i \quad (2.95)$$

2. Relação deslocamento-deformação

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (2.96)$$

3. Condições de contorno

$$\sigma_{ij}(x_k, t) n_i(x_k) = t_i(x_k, t) \quad \text{em } S_1 \quad (2.97)$$

$$u_i(x_k, t) = g_i(x_k, t) \quad \text{em } S_2 \quad (2.98)$$

4. Condições iniciais

$$u_i(x_k, 0) = u_0 \quad (2.99)$$

$$v_i(x_k, 0) = v_0 \quad (2.100)$$

5. Equações constitutivas

Formulação pelas integrais de convolução (Equações 2.42 e 2.44).

Caso a geometria do corpo e as condições de carregamento sejam suficientemente simples, e o comportamento do material possa ser representado por modelos simples, as equações acima podem ser diretamente integradas. Para soluções mais gerais, entretanto, é conveniente a solução por meio do Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV). Este princípio permite que os problemas viscoelásticos sejam tratados de tal maneira que sejam matematicamente equivalentes a problemas elásticos por meio das Transformadas de Laplace (cuja definição mostra a Equação 2.82), em relação ao tempo, das Equações que governam o problema viscoelástico. Dentre os principais trabalhos que aplicaram o PCEV podemos citar o de Schapery (1984), Zhang et al. (1997), Kim et al. (2004) dentre outros. No Brasil, o trabalho de Theisen (2006) apresenta a aplicação de um modelo de comportamento para previsão de deformabilidade de misturas asfálticas, deduzido com bases na teoria da viscoelasticidade e na aplicação do PCE.

As Equações seguintes mostram as transformadas de Laplace para as Equações 2.95-2.100 e para a relação constitutiva dada pela integral de convolução da Equação 2.44 (*strain formulation*) segundo a definição da Equação 2.82.

1. Equação de equilíbrio

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{b}_i = 0 \quad (2.101)$$

2. Relação deslocamento-deformação

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}}{2} \quad (2.102)$$

3. Condições de contorno

$$\bar{\sigma}_{ij}\bar{n}_j = \bar{t}_i \quad \text{em } S_1 \quad (2.103)$$

$$\bar{u}_i = \bar{g}_i \quad \text{em } S_2 \quad (2.104)$$

4. Condições iniciais

$$u_i(x_k, 0) = u_0 \quad (2.105)$$

$$v_i(x_k, 0) = v_0 \quad (2.106)$$

5. Equações constitutivas

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \tilde{E} \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (2.107)$$

Note que a tensão no domínio do tempo pode ser calculada pelo inverso da transformada de Laplace do produto da transformada de Carson do módulo de relaxação ($\tilde{E}$) e a transformada de Laplace da deformação ($\bar{\varepsilon}$). Analogamente, a deformação no domínio do tempo é calculada pelo inverso da transformada de Laplace do produto da transformada de Carson da tensão ($\tilde{\sigma}$) pela transformada de Laplace da função fluência ($\bar{D}$).

2.3.10 Incrementalização unidimensional da relação constitutiva viscoelástica

Um modo de incorporar as relações constitutivas viscoelásticas em uma formulação em elementos finitos é através da integração direta das relações constitutivas viscoelásticas. Quando os primeiros métodos para a integração direta foram formulados, eles requeriam um alto poder de armazenagem dos dados de todas as soluções anteriores necessárias para o passo corrente de tempo (Hammerand, 1999). Além disso, a integração direta exigia um grande número de passos de tempo, e a conseqüente armazenagem das soluções em cada um deles, para permitir análises ao longo do tempo. Dentre estes métodos podemos citar Hammerand (1999) *apud* Lee e Rogers (1963).

Este problema foi mais tarde contornado com o desenvolvimento de técnicas de recursão aplicados na avaliação do histórico da solicitação. Desta forma, estas técnicas permitem, juntamente com a incrementalização das relações constitutivas com relação ao tempo, uma maior eficiência na avaliação das soluções viscoelásticas nas análises transientes. Dentre os principais trabalhos que formulam esta técnica podemos citar Simo e Hughes (1998) *apud* Zak (1967), White (1968) e Taylor et al. (1970). Neste trabalho utilizou-se a formulação de Taylor et al. (1970), que é baseada na incrementalização de $\sigma(t)$ na Equação 2.44. Nesta formulação é assumido que a taxa de variação da deformação é constante durante cada incremento de tempo e o módulo de relaxação $E(t)$ é representado por uma série

de Prony (Equação 2.63). Nesta seção é primeiramente descrita a formulação para o caso unidimensional enquanto a seção seguinte generaliza para o caso multidimensional.

Definindo:

$$\Delta\sigma = \sigma(t + \Delta t) - \sigma(t) \quad (2.108)$$

Substituindo a Equação 2.108 na Equação 2.44, tem-se:

$$\Delta\sigma = \int_0^{t+\Delta t} E(t + \Delta t - \tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau - \int_0^t E(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2.109)$$

logo,

$$\Delta\sigma = \int_0^t E(t + \Delta t - \tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau + \int_t^{t+\Delta t} E(t + \Delta t - \tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau - \int_0^t E(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2.110)$$

Agrupando as integrais de mesmos limites, tem-se:

$$\Delta\sigma = \Delta\bar{\sigma} + \Delta\hat{\sigma} \quad (2.111)$$

em que

$$\Delta\bar{\sigma} = \int_t^{t+\Delta t} E(t + \Delta t - \tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2.112)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\sigma} &= \int_0^t [E(t + \Delta t - \tau) - E(t - \tau)] \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \\ &= \int_0^t \Delta E \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.113)$$

em que

$$\Delta E = E(t + \Delta t - \tau) - E(t - \tau) \quad (2.114)$$

Examinando a equação 2.112 e aproximando a deformação entre os limites da integral por:

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \dot{\varepsilon}_{t+\Delta t} \quad (2.115)$$

com $\dot{\varepsilon}$ considerada constante no mesmo intervalo:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{t+\Delta t} - \varepsilon_t}{t + \Delta t - t} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \quad (2.116)$$

e assumindo o E igual a Equação 2.63 tem-se:

$$\Delta\bar{\sigma} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left(E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-(t+\Delta t+\tau)}{\rho_i}} \right) d\tau \quad (2.117)$$

resolvendo a integral, temos:

$$\Delta\bar{\sigma} = \left[E_{\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{E_i \rho_i}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \right) \right] \Delta\varepsilon \quad (2.118)$$

que pode ser reescrita como:

$$\Delta\bar{\sigma} = \bar{E} \Delta\varepsilon \quad (2.119)$$

com:

$$\bar{E} = E_{\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{E_i \rho_i}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \right) \quad (2.120)$$

Novamente utilizando a Equação 2.63, mas agora para as Equações 2.113 e 2.114, tem-se:

$$\Delta\hat{\sigma} = - \sum_{i=1}^m \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} S_i(t) \right) \quad (2.121)$$

em que

$$S_i(t) = \int_0^t E_i e^{-\frac{(t+\tau)}{\rho_i}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2.122)$$

em que $S_i(t)$ é um escalar para cada termo da série de Prony.

Como $S_i(t)$ é o termo responsável pela avaliação de todo o histórico de carregamento/deformação até o tempo presente da análise ($0 \rightarrow t$), aplica-se o processo de recursão para sua avaliação em cada avanço no tempo.

Começando dividindo a integral da equação 2.122 como:

$$S_i(t) = \int_0^{t-\Delta t} E_i e^{-\frac{(t+\tau)}{\rho_i}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau + \int_{t-\Delta t}^t E_i e^{-\frac{(t+\tau)}{\rho_i}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2.123)$$

reescrivendo t do primeiro termo a direita da equação em função do limite da integral ($t = \Delta t + t - \Delta t$), e pela aproximação feita pela expressão 2.116 ($\dot{\varepsilon}_{t \rightarrow t+\Delta t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t}$), pode-se mostrar que:

$$S_i(t) = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \int_0^{t-\Delta t} E_i e^{-\frac{(t-\Delta t+\tau)}{\rho_i}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau + E_i \dot{\varepsilon} \int_{t-\Delta t}^t e^{-\frac{(t+\tau)}{\rho_i}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2.124)$$

Portanto:

$$S_i(t) = e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} S_i(t - \Delta t) + E_i \rho_i \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_i}} \right) \dot{\varepsilon} \quad (2.125)$$

Desta forma, $S_i(t)$ é avaliado apenas com o S_i do tempo anterior.

2.3.11 Incrementalização multi-dimensional da relação viscoelástica

Assumindo o coeficiente de Poisson ν constante ao longo do tempo:

$$\nu(t) = \nu \implies cte. \quad (2.126)$$

e reescrevendo a relação constitutiva viscoelástica em notação matricial:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{C}(t - \tau) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad (2.127)$$

considerando materiais isotrópicos, a matriz $\mathbf{C}$ é dada por:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{E}(t) \mathbf{C}(\nu) \quad (2.128)$$

em que $\mathbf{C}(\nu)$ é uma matriz constante ao longo do tempo em função de ν . Esta matriz depende do tipo de análise adotado (estado plano de tensões, deformações, axissimétrico ou tridimensional), logo:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{C}(\nu) \int_0^t \mathbf{E}(t - \tau) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad (2.129)$$

Assumindo a mesma definição da equação 2.108 para $\Delta \boldsymbol{\sigma}$, chegamos a uma equação semelhante a Equação 2.111, dada por:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.130)$$

em que

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\nu) \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{E}(t + \Delta t - \tau) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad (2.131)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}(\nu) \int_0^t [\mathbf{E}(t + \Delta t - \tau) - \mathbf{E}(t - \tau)] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \\ &= \int_0^t \Delta \mathbf{E} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.132)$$

com

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}(t + \Delta t - \tau) - \mathbf{E}(t - \tau) \quad (2.133)$$

Novamente assumindo $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} = \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t}$ entre o intervalo $t \rightarrow t + \Delta t$, tem-se para o módulo de relaxação dado pela série de Prony definida pela Equação 2.63:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{E}} \mathbf{C}(\nu) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.134)$$

com $\bar{\mathbf{E}}$ definido pela Equação 2.120. Analogamente a equação 2.128:

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{E}}\mathbf{C}(\nu) \quad (2.135)$$

logo:

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{C}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.136)$$

Utilizando o modelo generalizado de Kelvin para o segundo termo a direita da Equação 2.130 pode-se provar que:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{C}(\nu) \left(\sum_{i=1}^N 1 - e^{\frac{-\Delta t}{\rho_i}} \mathbf{S}_i(t) \right) \quad (2.137)$$

em que:

$$\mathbf{S}_i(t) = \int_0^t \mathbf{E}_i e^{\frac{-(t+\tau)}{\rho_i}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad (2.138)$$

sendo que, para o caso multi-dimensional, $\mathbf{S}_i(t)$ é um vetor para cada termo da série de Prony. Aplicando o processo recursivo descrito pelas equações 2.123 a 2.125 do caso uni-dimensional, pode-se mostrar que:

$$\mathbf{S}_i(t) = e^{\frac{-\Delta t}{\rho_i}} \mathbf{S}_i(t - \Delta t) + E_i \rho_i \left(1 - e^{\frac{-\Delta t}{\rho_i}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.139)$$

com $\mathbf{S}_i(t)$ avaliado também com o $\mathbf{S}_i$ do tempo anterior.

2.4 Fundamentos de Programação Orientada a Objetos

Com uma maior popularização do uso dos recursos de computação na última década (Guimarães, 1992; Vianna, 1992), surgiu a necessidade de reutilização de códigos de programas consagrados em outros sistemas independentes (Carvalho, 1995). As modificações, expansões ou reduções destes códigos aliam-se ao fato da constante necessidade de manutenção dos programas já desenvolvidos. As potencialidades de modificação e expansão de códigos já implementados tornaram-se o diferencial entre as metodologias adotadas para o desenvolvimento dos programas atuais (Rumbaugh et al., 1991). Neste contexto tem-se a universalização do uso da POO não somente nas aplicações gráficas como também nas diversas áreas atingidas pela implementação computacional.

Não indiferente às diversas vantagens advindas com o uso desta metodologia, engenheiros e cientistas nas mais diversas áreas, inclusive em Elementos Finitos, começaram a utilizar esta metodologia de programação. Como prova disto tem-se grande quantidade de artigos publicados nos últimos anos (Fenves, 1990; Gajewski e Kowalczyk, 1996; Sahu et al., 1999).

Em programação, o programa implementado pode ser dividido de maneira abstrata em um módulo principal e em vários outros, secundários, que executam tarefas específicas, sempre que solicitados pelo módulo principal. O módulo principal recebe o nome de cliente e os secundários recebem o nome de fornecedores (Guimarães, 1992). Na metodologia estruturada, a relação entre cliente e os fornecedores se materializa através da transferência de dados onde as duas partes possuem conhecimento das estruturas de dados e operadores. O cliente decide como cada operação deve ser executada chamando a rotina de cada fornecedor. Na programação orientada a objetos, esta relação se modifica sobremaneira, onde o cliente deixa de decidir como cada operação deve ser executada e passa a solicitar esta execução através de mensagens genéricas enviadas ao fornecedor que decide qual tarefa deve ser executada.

No caso de sistemas em elementos finitos, o objetivo principal da orientação a objetos consiste em que, entidades como nós, elementos, carregamentos, materiais, sejam considerados como elementos-chave da representação do domínio do problema e não mais haver, como na filosofia de programação estruturada, uma ênfase demasiada nos processos do código computacional implementado. Desta forma, a preocupação maior para o cliente é o que (objeto) o fornecedor faz e não como (processo) ele faz.

Martha e Parente-Jr (2002) exemplificam através do algoritmo usado para montagem da matriz de rigidez global a programação convencional (estruturada):

Tabela 2.3: Pseudo-código em linguagem estruturada para montagem da matriz de rigidez.

```
Para cada elemento no modelo faça:
{
  conforme (tipo de elemento)
  {
    caso T3:
      Computar-matriz-de-rigidez do T3 (dados do T3, rigidez do T3);
      Montar-na-matriz-global T3 (dados do T3, rigidez do T3);
      parar;
    caso T6:
      Computar-matriz-de-rigidez do T6 (dados do T6, rigidez do T6) ;
      Montar-na-matriz-global T3 (dados do T3, rigidez do T3);
      parar;
    caso Q8:
      Computar-matriz-de-rigidez do Q8 (dados do Q8, rigidez do Q8);
      Montar-na-matriz-global T3 (dados do T3, rigidez do T3);
      parar;
    ...
  }
}
```

Como mostrado na Tabela 2.3 observa-se que o algoritmo global é responsável pela escolha das funções e pela manipulação dos dados relativos ao elemento utilizado (T3, T6,

Q8, ...). O cliente decide qual e como cada ação deve ser utilizada para cada caso chamando uma rotina específica para cada tipo de elemento.

Martha e Parente-Jr (2002) também nos fornece o pseudo-código para a mesma função de montagem da matriz de rigidez utilizando a programação orientada a objetos. O pseudo-código é mostrado na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Pseudo-código em linguagem orientada à objetos para montagem da matriz de rigidez.

```
Para cada elemento no modelo faça:
{
    objeto-elemento → Computar-matriz-de-rigidez (objeto-matrizderigidez);
    objeto-matrizglobal → Montar-na-matriz-global (objeto-matrizderigidez);
}
```

No pseudo-código de Martha e Parente-Jr (2002), *Computar-matriz-de-rigidez* é um método genérico de um objeto elemento abstrato, enquanto *Montar-na-matriz-global* é um método de um objeto matriz global. O primeiro método retorna um objeto matriz de rigidez abstrato, que é passado para o segundo método. O algoritmo global não tem acesso direto aos dados dos objetos, e somente tem referências destes objetos que serão manipulados dentro da rotina fornecedora com funções específicas. Desta forma, a responsabilidade de escolher os procedimentos (ações), que devem ser compatíveis com o tipo de objeto, não é mais do cliente e sim do fornecedor. Martha e Parente-Jr (2002) também atentam para o fato de que na versão orientada a objeto do algoritmo para a montagem da matriz de rigidez, não muda quando um novo tipo de elemento é criado. Este é um aspecto importante e essencial para sistemas que exigem uma expansibilidade de sua complexidade ao longo do tempo, tais como programas de elementos finitos onde novos elementos, modelos constitutivos e algoritmos de análise são continuamente incorporados ao sistema.

A metodologia de orientação a objetos oferece uma solução alternativa para o desenvolvimento de sistemas, que, devido as suas características, reduz as dificuldades de expansão, adaptação e manutenção. A POO utiliza conceitos como: i) capacidade de olhar apenas uma parte no todo (abstração); ii) ordenação e hierarquização das partes do sistema complexo; iii) encapsulamento (ocultação) dos detalhes de uma estrutura complexa, que de outra forma interferiria no entendimento; iv) classificação de objetos semelhantes em uma dada categoria.

2.5 CAP3D

O grupo de Modelagem Computacional do Laboratório de Mecânica dos Pavimentos da Universidade Federal do Ceará (LMP/UFC) decidiu desenvolver um novo sistema

baseado no MEF para análises de pavimentos. Este sistema, denominado CAP3D, foi desenvolvido com os conceitos de orientação a objetos descritos neste capítulo e tem como base o código aberto FEMOOP (Martha e Parente-Jr, 2002). Os requisitos básicos deste novo sistema é a capacidade de lidar com problemas bi e tridimensionais de elementos finitos com materiais de comportamento não-linear e dependentes do tempo.

A seguir encontra-se uma descrição em forma resumida das classes e funções implementadas no sistema CAP3D. Para um maior detalhamento o leitor é remetido à literatura fonte desta revisão constante nos trabalhos de Martha e Parente-Jr (2002) e Holanda et al. (2006b).

A organização geral das classes do CAP3D pode ser vista na Figura 2.17, onde todas as relações são do tipo derivação (*has a*). As principais classes do programa são: *Control*, *Node*, *Element*, *Shape*, *Analysis Model*, *Material*, *Integration Point*, *Constitutive Model* e *Load*. A classe *Control* representa o nível global discutido na seção anterior. Esta classe

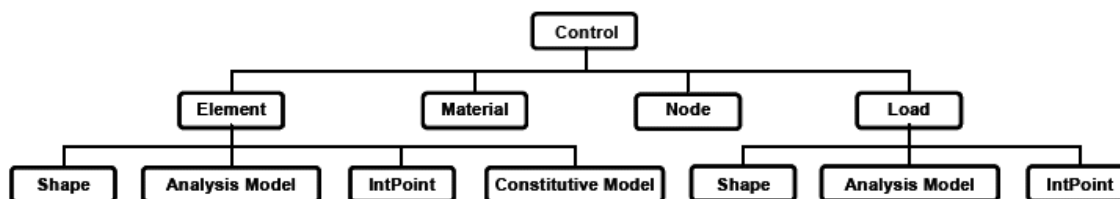


Figura 2.17: Estrutura de classes do CAP3D (Holanda et al., 2006b).

fornece uma interface comum para os algoritmos de análise do problema. Atualmente é composta de 4 subclasses: *LinearStatic*, *EquilibriumPath*, *QuasiStatic* e *LinearNewmark* como ilustrado no esquema da Figura 2.18. A primeira é responsável por análises elásticas lineares sem a consideração das forças inerciais, a segunda é relativa a algoritmos iterativos usados no equilíbrio estático de estruturas de comportamento não-linear. As classes *QuasiStatic* e *LinearNewmark* são responsáveis pelas análises dependentes do tempo gerando estados de equilíbrio baseados em intervalos de tempos anteriores. A subclasse *LinearNewmark* implementa o método de integração direta de Newmark para análises dinâmicas (consideração de forças inerciais e amortecimento) onde os deslocamentos podem ser calculados de forma total ou incremental. Esta classe é proposta e foi implementada no âmbito dos objetivos desta dissertação e as formulações necessárias a sua implementação encontram-se descritas nas seções seguintes. A subclasse *QuasiStatic* implementa análises lineares considerando forças e deslocamentos dependentes do tempo, mas sem a consideração de forças inerciais. Tipicamente, este tipo de análise tem sido usada na determinação de tensões e deformações em pavimentos cuja camada de superfície tem comportamento viscoelástico linear, mas as análises quasi-estáticas não são restritas somente a este tipo de material.

A subclasse *Node* basicamente é responsável pela manipulação (leitura, armazena-

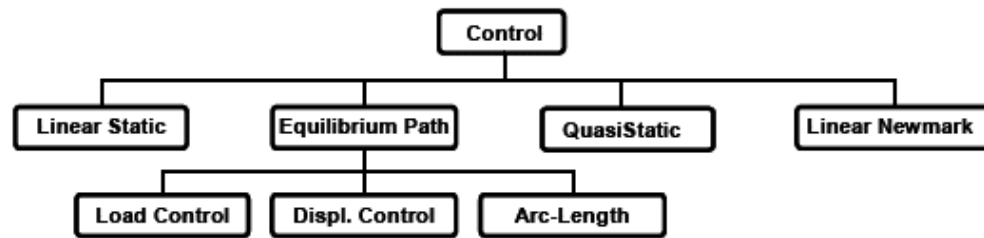


Figura 2.18: Classe *Control* do CAP3D (Holanda et al., 2006b).

mento) de dados relativos aos nós do modelo (coordenadas, condições de suporte, etc.). Ela também lida com algumas variáveis durante a execução do programa, tais como os graus de liberdade (g.d.l.) nodais e os deslocamentos correntes.

Element é a subclasse que define o comportamento geral de um elemento finito. As principais tarefas da classe são: (i) a indicação do número e direção dos g.d.l. nodais ativos; (ii) cálculo dos vetores do elemento (g e f); (iii) cálculo das matrizes (K , M e C) e (iv) determinação das respostas do modelo (tensões e deformações). Uma importante característica desta classe é a capacidade de lidar com modelos multi-dimensionais em elementos finitos de uma maneira genérica.

A subclasse *Shape* em linhas gerais trabalha com a geometria e os aspectos de interpolação do elemento (dimensão, topologia, número de nós, conectividade e ordem de interpolação). Através de suas classes derivadas para elementos uni, bi e tridimensionais fornece as funções de forma e suas derivadas em relação a coordenadas paramétricas e cartesianas e avalia a matriz Jacobiana do elemento.

Para uma modelagem eficiente dos materiais envolvidos nas análises, o CAP3D dispõe de 2 classes: *Material* e *Constitutive Model*. A classe *Material* é uma classe abstrata que lida com os dados dos diferentes modelos constitutivos implementados no programa, que atualmente incluem o elástico linear, viscoelástico linear e o modelo resiliente. O objetivo básico desta classe é armazenar as propriedades dos materiais lidas a partir do arquivo de entrada de dados. A classe abstrata *Constitutive Model* tem como função básica o cálculo do vetor de tensões (σ) a partir de um dado vetor de deformações (ϵ) e a avaliação da matriz constitutiva (C), a ser usada na Equação 2.12 a partir do corrente estado de tensão/deformação.

Deve ser notado que nos modelos (viscoelásticos e elasto-plásticos) em que as tensões não somente dependem do estado de tensão corrente e sim de todo o histórico de carregamento, uma vez que cada ponto de integração tem um histórico de tensões, o sistema automaticamente cria um objeto do tipo *Constitutive Model* para cada ponto de integração da malha de elementos finitos. Obviamente, o tipo de cada um destes objetos depende do material associado ao elemento correspondente. Devido a esta dependência do histórico de

tensões, algumas classes derivadas são necessárias para o armazenamento das variáveis internas (deformações em passos de tempo anteriores) e atualização destas variáveis após a convergência do algoritmo global ser atingida.

Finalmente, a classe *Load* lida com as condições de contorno do problema e as forças de corpo. Assim como classes anteriores, a classe abstrata *Load* permite o tratamento generalizado para diferentes condições de carregamento disponíveis. Além do mais, esta classe também avalia os vetores de carregamentos nodais e a aplicação destes em seus respectivos g.d.l. Assim como implementado na avaliação da Equação 2.12 na classe *Constitutive Model*, a classe *Load* avalia a Equação 2.8 de uma maneira geral, independente da dimensão do elemento, forma, ordem de interpolação e equação diferencial do problema. Esta classe também inclui carregamentos variáveis no tempo, onde cada carregamento distribuído e nodal têm uma função de tempo associada a ele. Desta forma, o termo q da Equação 2.8 pode ser definido por:

$$q = \bar{q} h(t) \quad (2.140)$$

onde $\bar{q}$ representa a variação espacial do carregamento distribuído dentro do elemento e $h(t)$ é uma função de tempo (constante, harmônica, ...) associada ao carregamento.

Para um maior detalhamento das definições das classes no sistema CAP3D o autor encoraja a leitura de Holanda et al. (2006b).

2.6 Planejamento fatorial

Um adequado planejamento é freqüentemente usado em experimentos envolvendo vários fatores em que é necessário estudar o efeito conjunto destes sobre uma determinada resposta. Vários casos especiais do planejamento fatorial geral são importantes pelo fato de serem largamente empregados em pesquisas científicas e por formarem a base de outros planejamentos de considerável valor prático (Montgomery e Runger, 1999).

Por um planejamento fatorial, entende-se que, em cada tentativa completa ou réplica de um experimento, todas as combinações possíveis dos níveis dos fatores são investigadas. Assim, se houver dois fatores A e B , com a níveis do fator A , e b níveis do fator B , então cada réplica conterá todas as ab combinações de tratamentos. O efeito de um fator é definido como a variação na resposta, produzida pela mudança no nível deste fator. Este efeito é denominado principal porque se refere a fatores primários no estudo. Por exemplo, considere um experimento fatorial com dois fatores A e B , cada um com dois níveis (A_{baixo} , A_{alto} , B_{baixo} , B_{alto}). O efeito do fator A (Ef_A) é a diferença entre a resposta média no nível alto de A e a resposta média no nível baixo de A . Desta forma, o sinal do efeito Ef de um fator indica se, a mudança de nível (de $-$ para $+$) daquele fator aumentou ou diminuiu a resposta estudada. Assim, um fator com sinal positivo sinaliza que, ao considerá-lo em seu nível $+$

em uma análise, a resposta observada aumentará em seu valor.

É notório que, em alguns experimentos, a diferença das respostas entre os níveis de um fator não é a mesma em todos os níveis dos outros fatores. Quando isto ocorre, há uma interação entre os fatores considerados. Muitas vezes quando uma interação é grande, os efeitos principais correspondentes têm muito pouco significado prático (Montgomery, 1997). Assim, uma interação significativa pode mascarar o significado dos efeitos principais, sendo o conhecimento do efeito da interação mais importante que os efeitos principais.

O mais importante destes casos especiais é aquele de k fatores, cada um com somente dois níveis (Montgomery e Runger, 1999). Estes níveis podem ser quantitativos, tais como valores numéricos, ou qualitativos, tais como uso ou não uso de uma determinada técnica, os níveis alto (representados pelo sinal +) e baixo (representado pelo sinal -) de um fator. Uma réplica completa de tal planejamento requer $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$ observações, sendo chamada planejamento fatorial 2^k . O planejamento fatorial 2^k é particularmente útil nos estágios iniciais de uma investigação quando muitos fatores são prováveis de serem investigados. Ele fornece o menor número de réplicas para as quais os k fatores podem ser estudados. Devido ao fato de que apenas dois níveis são considerados para cada fator, a suposição de que a resposta seja aproximadamente linear entre os níveis estudados é considerada.

Por exemplo, considere $k = 3$ fatores, cada um com dois níveis. Este planejamento é um planejamento fatorial 2^3 , tendo 8 combinações (corridas) de tratamentos. Uma analogia geométrica adequada seria um cubo com as 8 corridas formando os vértices como ilustrado pela Figura 2.19. Este planejamento permite investigar 3 efeitos principais (A , B e C), juntamente com as interações de segunda ordem (AB , AC e BC) e de terceira ordem (ABC).

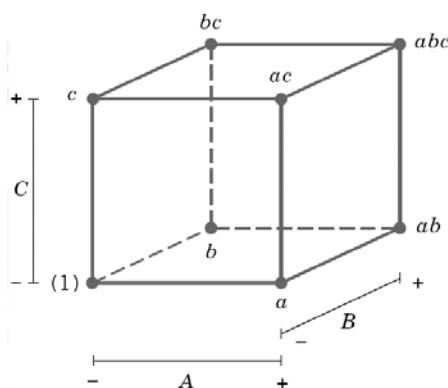


Figura 2.19: Analogia geométrica para um planejamento fatorial 2^3 .

Assim, o efeito principal (Ef) de um fator A qualquer pode ser estimado como:

$$Ef_A = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} \quad (2.141)$$

em que $\bar{y}_{A+}$ é a média das 4 combinações de tratamento do lado direito do cubo da Figura 2.20, quando A estiver em nível alto (+), $\bar{y}_{A-}$ é a média das quatro combinações de tratamento do lado esquerdo do cubo, quando A estiver em nível baixo (-). Em sua forma expandida a Equação 2.141 é:

$$Ef_A = \frac{1}{4n} [a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc] \quad (2.142)$$

em que n é o número de corridas (combinações).

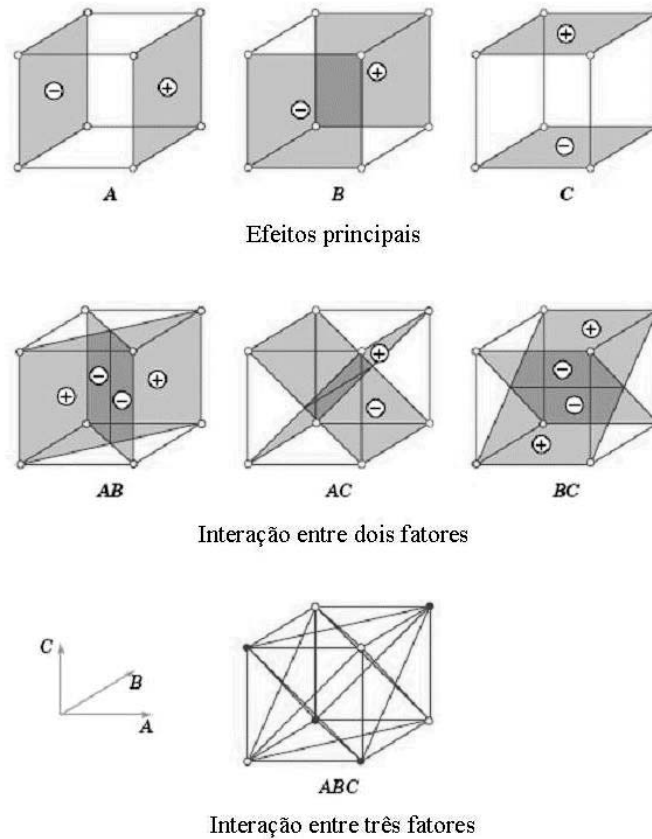


Figura 2.20: Efeitos principais, de segunda e terceira ordens do planejamento 2^3 .

De uma maneira similar os demais efeitos principais (Ef_B e Ef_C) podem ser facilmente calculados.

Os efeitos de interação de segunda ordem, como por exemplo AB , podem ser entendidos como a diferença entre os efeitos médios de A nos dois níveis de B . Visto que a interação (AB) é a metade desta diferença, temos:

$$Ef_{AB} = \frac{1}{4n} [abc - bc + ab - b - ac + c - a + (1)] \quad (2.143)$$

Nessa forma, a interação AB pode ser vista como a diferença média entre as corridas em

dois planos diagonais do cubo da Figura 2.19.

Com relação à interação de terceira ordem ABC , podemos entendê-la como a diferença média entre a interação AB para os diferentes níveis de C , ou seja,

$$Ef_{ABC} = \frac{1}{4n} [abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)] \quad (2.144)$$

Aplicando os conceitos acima, podemos construir uma matriz de sinais positivos e negativos baseada nos numeradores (também denominados de contrastes) das Equações referidas anteriormente, de modo a facilitar o cálculo dos efeitos principais e das interações. A Tabela 2.5 ilustra a matriz construída para o planejamento fatorial da Figura 2.19.

Tabela 2.5: Sinais algébricos para o cálculo dos efeitos no planejamento 2^3 .

Combinação	Efeito fatorial						
	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	—	—	+	—	+	+	—
a	+	—	—	—	—	+	+
b	—	+	—	—	+	—	+
ab	+	+	+	—	—	—	—
c	—	—	+	+	—	—	+
ac	+	—	—	+	+	—	—
bc	—	+	—	+	—	+	—
abc	+	+	+	+	+	+	+

A representação geométrica de um planejamento fatorial com $k = 4$ fatores, cada um com dois níveis, pode ser vista como dois cubos (hipercubo), como mostra a Figura 2.21. De tal forma que neste planejamento 2^4 , teremos 16 combinações.

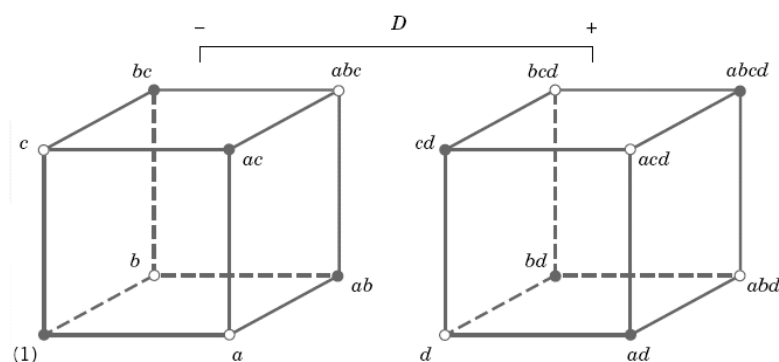


Figura 2.21: Analogia geométrica para um planejamento fatorial 2^4 .

Capítulo 3

Formulação em Elementos Finitos da Equação de Equilíbrio Dinâmico para Meios Viscoelásticos

O presente Capítulo apresenta a formulação em elementos finitos da equação de equilíbrio dinâmico para meios viscoelásticos usando o algoritmo da família Newmark da Aceleração Média Constante (AMC), ou simplesmente regra trapezoidal.

3.1 Solução da Equação de Equilíbrio para Análise Dinâmica

As Equações que governam a resposta dinâmica de uma estrutura ou meio levam em conta que o trabalho das forças externas ($\mathbf{f}$) não são mais absorvidos somente pelo trabalho das forças internas ($\mathbf{g}$), mas também pelo trabalho das forças inerciais e dissipativas. No caso de pequenas deformações que satisfaçam a compatibilidade e as condições de contorno essenciais do problema, a expressão do trabalho virtual para um único elemento pode ser escrita como:

$$\int_{V_e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^t \mathbf{b} dV + \int_{S_e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^t \mathbf{q} dS + \sum_{i=1}^n \delta \tilde{\mathbf{u}}_i^t \mathbf{p}_i = \int_{V_e} \left(\delta \varepsilon^t \boldsymbol{\sigma} + \delta \tilde{\mathbf{u}}^t \rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \tilde{\mathbf{u}}^t \kappa \dot{\mathbf{u}} \right) dV \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{b}$ representa as forças de corpo, $\mathbf{q}$ são as forças superficiais, ρ é a densidade de massa do material e κ é o parâmetro de amortecimento do material. As demais grandezas já foram definidas na Seção 2.2.1.

Como $\tilde{\mathbf{u}}$ é definido a partir dos deslocamentos nodais, como mostra a Equação 2.5, pode-se, consistentemente, afirmar que:

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.2)$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.3)$$

com $\mathbf{u}$ somente em função do tempo.

Substituindo as Equações 2.5, 2.6, 3.2 e 3.3 na Equação 3.1, tem-se:

$$\delta \mathbf{u}^t \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{u}} + \int_{V_e} \kappa \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{u}} - \int_{V_e} \mathbf{N}^t \mathbf{b} dV - \int_{S_e} \mathbf{N}^t \mathbf{q} dS \right) - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \delta \mathbf{u}^t = 0 \quad (3.4)$$

Reescrevendo a Equação 3.4 de uma forma resumida, e notando que a condição de equilíbrio deve ser satisfeita para qualquer deslocamento virtual ($\delta \mathbf{u}$), tem-se a equação que descreve o equilíbrio dinâmico em cada elemento como:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (3.5)$$

em que $\mathbf{g}$ e $\mathbf{f}$ são definidos pelas Equações 2.8 e 2.9, respectivamente, e as matrizes de massa $\mathbf{M}$ e amortecimento $\mathbf{C}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{M} = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \quad (3.6)$$

$$\mathbf{C} = \int_{V_e} \kappa \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \quad (3.7)$$

É importante notar que, com a ausência dos termos que representam as forças inerciais e de amortecimento da Equação 3.5, tem-se a equação de equilíbrio estático já definida pela Equação 2.7 da Seção 2.2.1, onde o equilíbrio é atingido com a igualdade entre forças internas ($\mathbf{g}$) e externas ($\mathbf{f}$).

Devido ao fato de que as matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$ são avaliadas segundo as Equações 3.6 e 3.7, que utilizam as mesmas funções de interpolação utilizadas para deslocamentos ($\mathbf{u}$), estas recebem a designação de consistentes. Outra maneira de determinação da matriz $\mathbf{M}$ é através do processo de *lumping*, onde a massa do elemento é distribuída para os nós dos elementos. Esta distribuição segue alguns métodos tais como o HRZ, *optimal lumping* (Bathe, 1996), dentre outros. Cada método tem suas vantagens e desvantagens em relação à formulação consistente, o que exige considerações em qual método adotar em cada caso, tanto do ponto de vista da acurácia, como da eficiência computacional. Em muitos casos o processo de *lumping* é fisicamente óbvio, mas em outros esta formulação exige uma maior racionalização sobre qual método adotar. Maiores detalhes sobre o processo de *lumping* pode ser encontrado na literatura (Cook et al., 1989; Bathe, 1996).

As Equações 3.1-3.7 são válidas tanto para materiais de comportamento linear como não-linear, uma vez que não foi realizada nenhuma consideração sobre a relação constitutiva ($\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\epsilon}$) para o material.

A resposta de problemas dinâmicos envolvem a solução da Equação 3.5 para u , $\dot{u}$ e $\ddot{u}$ dependentes do tempo. Quando M , C e g são independentes do tempo temos um problema dinâmico linear. Se o comportamento do material for não-linear, tem-se um problema dinâmico não-linear (Cook et al., 1989).

A abordagem geral para a solução de problemas dinâmicos é por meio da integração direta da equação de equilíbrio dinâmico (definida pela Equação 3.5) onde a equação de equilíbrio é calculada em um tempo zero e depois satisfeita discretamente no tempo através do Método das Diferenças Finitas (MDF). Em muitos problemas de propagação de ondas e dinâmica de estruturas, principalmente os não-lineares, a integração direta é preferida, seja por meio de seu métodos explícitos ou implícitos.

Os métodos explícitos são baseados em equações explícitas que fornecem o estado do sistema em um tempo $t + \Delta t$ em função do estado do sistema no tempo t . Estes métodos são condicionalmente estáveis com relação ao valor adotado para o passo de tempo Δt , onde são exigidos valores pequenos de modo a se obter estabilidade da solução.

A idéia básica dos métodos implícitos é o desenvolvimento de relações algébricas entre estados do sistema em dois diferentes instantes de tempo: t e $t + \Delta t$. Assim, após o conhecimento do estado do sistema no tempo t , as equações são resolvidas para o estado do sistema no tempo $t + \Delta t$. Estes métodos requerem a solução de um sistema de equações lineares em cada passo de tempo Δt e podem ser condicionalmente ou incondicionalmente estáveis, onde maiores valores para Δt podem ser adotados.

Na presente dissertação foi usado o algoritmo implícito de Newmark (Cook et al., 1989; Bathe, 1996) como método de integração direta da equação de equilíbrio dinâmico. Entre os diversos algoritmos da família Newmark optou-se pelo Método da Aceleração Média Constante (MAMC) que é idêntico à Regra Trapezoidal (RT), como ilustra a Figura 3.1.

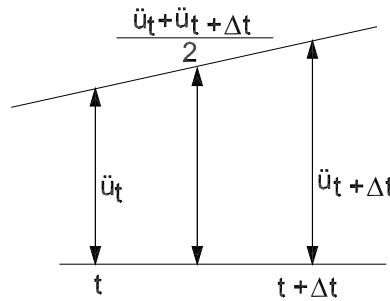


Figura 3.1: Regra trapezoidal.

Desta forma, os campos de velocidade e aceleração em um tempo $t + \Delta t$ são dados por:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} \Delta u - \dot{u}_t \quad (3.8)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta \mathbf{u} - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t - \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (3.9)$$

em que:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t \quad (3.10)$$

Aplicando as Equações 3.8-3.10 na equação de equilíbrio (Equação 3.5) em um tempo $(t + \Delta t)$, e considerando o material elástico linear, obtém-se a expressão para o cálculo dos deslocamentos $(\mathbf{u}_{t+\Delta t})$ em função de grandezas conhecidas no tempo anterior (t) . Detalhes desta formulação e dos procedimentos do algoritmo podem ser encontrados em Cook et al. (1989) e Bathe (1996).

No caso de materiais em que $\mathbf{g}$ seja de alguma forma dependente do tempo (caso dos materiais viscoelásticos), a formulação introduzida acima não pode ser utilizada. Em análises dinâmicas que possuam materiais viscoelásticos, a não linearidade de $\mathbf{g}$ não é resultante de uma não linearidade constitutiva do material, e sim, da dependência do tempo desta relação (Equações 2.42 e 2.44). Assim, outra formulação deve levar em conta a avaliação das tensões $(\boldsymbol{\sigma})$ para estes materiais e uma incrementalização no cálculo dos deslocamentos. Desta forma é necessário determinar a nova expressão e os parâmetros do método da aceleração constante de Newmark em função de incrementos de deslocamento $\Delta \mathbf{u}$.

Defini-se $\boldsymbol{\sigma}$ como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}_t + \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (3.11)$$

em que:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.12)$$

em que:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{C}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.13)$$

Substituindo as Equações 3.11-3.13 na equação de equilíbrio dinâmico (Equação 3.4) para o instante $(t + \Delta t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \mathbf{B}^t (\boldsymbol{\sigma}_t + \hat{\boldsymbol{\sigma}}) dV + \int_{V_e} \mathbf{B}^t \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} dV \Delta \mathbf{u} + \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \int_{V_e} \kappa \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \\ - \int_{V_e} \mathbf{N}^t \mathbf{b}_{t+\Delta t} dV - \int_{S_e} \mathbf{N}^t \mathbf{q}_{t+\Delta t} dS - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{i,t+\Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aplicando as definições das expressões 2.12, 3.6 e 3.7, pode-se provar que:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{r}_{t+\Delta t} \quad (3.15)$$

em que:

$$\mathbf{r}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t} - \hat{\mathbf{g}}_{t+\Delta t} \quad (3.16)$$

com o vetor de forças externas ($\mathbf{f}_{t+\Delta t}$) definido na Equação 2.8 para $(t + \Delta t)$, e o vetor de forças internas ($\hat{\mathbf{g}}_{t+\Delta t}$) agora definido por:

$$\hat{\mathbf{g}}_{t+\Delta t} = \int_{V_e} \mathbf{B}^t (\boldsymbol{\sigma}_t + \hat{\boldsymbol{\sigma}}) dV \quad (3.17)$$

Aplicando a Regra Trapezoidal, definida pelas Equações 3.8-3.10, na equação de equilíbrio dinâmico em $(t + \Delta t)$ (Equação 3.15), tem-se:

$$\mathbf{K}^{ef} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{r}^{ef} \quad (3.18)$$

em que a matriz de rigidez efetiva $\mathbf{K}^{ef}$ e o vetor de forças efetivo $\mathbf{r}^{ef}$, são, respectivamente:

$$\mathbf{K}^{ef} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{r}^{ef} = \mathbf{r}_{t+\Delta t} + (a_2 \dot{\mathbf{u}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t) \mathbf{M} \quad (3.20)$$

com as acelerações e velocidades para os passos seguintes calculadas por:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = a_0 (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}_t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (3.21)$$

e

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + a_6 \ddot{\mathbf{u}}_t + a_7 \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \quad (3.22)$$

e as constantes de integração definidas por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \\ a_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \\ a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 \\ a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \\ a_6 &= \Delta t (1 - \delta) \\ a_7 &= \delta \Delta t \end{aligned} \quad (3.23)$$

com $\delta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{4}$, caracterizando a técnica formulada acima, dentre a família de algoritmos de Newmark, como a da Aceleração Média Constante (ou Regra Trapezoidal) definidos pelas Equações 3.8-3.10.

Em termos práticos, é recomendável a utilização da mesma ordem de integração usada para a matriz de rigidez ($\mathbf{K}$), para o vetor de forças externas ($\mathbf{f}$) e para as matrizes de massa ($\mathbf{M}$) e dissipativa ($\mathbf{C}$). Entretanto, é reconhecido na literatura (Bathe, 1996) que para a integração das matrizes consistentes é necessária uma ordem de integração maior que a utilizada para a matriz $\mathbf{K}$ para obtenção de acurácia suficiente. Isto se deve ao fato de que as matrizes consistentes ($\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$) são calculadas a partir das funções de interpolação dos deslocamentos $\mathbf{N}$, enquanto a matriz de rigidez $\mathbf{K}$ é calculada a partir das derivadas destas funções (matriz $\mathbf{B}$).

A Tabela 3.1 resume os procedimentos necessários para a implementação do algoritmo proposto em um programa de Elementos Finitos.

Tabela 3.1: Algoritmo de Newmark (Aceleração Média Constante).

A - Cálculos Iniciais:

1. Formação das matrizes $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$.
 2. Inicializar $\mathbf{u}_{t=0}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t=0}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{t=0}$.
 3. A partir das condições iniciais: $\mathbf{u}_{t=0}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t=0}$ e $\mathbf{f}_{t=0}$, calcular $\ddot{\mathbf{u}}_{t=0}$ pela Equação 3.5.
 4. Selecionar Δt e os parâmetros $\delta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{4}$ e calcular as constantes de integração definidas na Equação 3.23.
 5. Formar a matriz de rigidez efetiva $\mathbf{K}^{ef}$ e o vetor de forças efetivo $\mathbf{r}^{ef}$ pelas Equações (3.19) e (3.20), respectivamente.
 6. Triangularizar $\mathbf{K}^{ef}$: $\mathbf{K}^{ef} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$.
-

B - Para cada passo de tempo (Δt):

1. Calcular o vetor de forças efetivo pela Equação 3.20.
 2. Resolver o sistema linear dado na expressão (3.18) com a matriz $\mathbf{K}^{ef}$ triangularizada.
 3. Atualizar o vetor dos deslocamentos totais $\mathbf{u}$ com o incremento calculado no passo anterior.
 4. Atualizar as tensões da Equação 3.11.
 5. Calcular acelerações $\ddot{\mathbf{u}}$ e velocidades $\dot{\mathbf{u}}$ para o passo de tempo seguinte ($t + \Delta t$) pelas Equações (3.21) e (3.22).
-

Para materiais viscoelásticos, o efeito de amortecimento é inerente ao próprio comportamento mecânico do material. No caso da formulação da presente pesquisa, que utilizou o modelo generalizado de Maxwell (Figura 2.10), o amortecimento é incluído na própria série de Prony para o módulo de relaxação, $E(t)$ (Equação 2.63). Desta forma, apesar da formulação generalizada descrita nesta seção, a Matriz $\mathbf{C}$ não precisa ser considerada, reduzindo a equação de equilíbrio dinâmico no instante ($t + \Delta t$) para:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{g}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t} \quad (3.24)$$

3.2 Validação

Neste ítem, o algoritmo de Newmark (Regra Trapezoidal) formulado neste capítulo e implementado em um código orientado a objetos (CAP3D) em elementos finitos é validado. Os subitens seguintes descrevem dois exemplos para validação.

3.2.1 Viga elástica em balanço com carregamento concentrado

Considere-se uma viga de comprimento (l) igual a $1,0\text{ m}$, largura (w) de $0,3\text{ m}$ e uma altura (h) de $0,0254\text{ m}$. A Equação 3.25 fornece o carregamento, similar ao ensaio de *creep*, aplicado na extremidade em balanço:

$$p = p_0 U(t) \quad (3.25)$$

onde p é o carregamento concentrado aplicado, p_0 é o carregamento inicial de $0,1\text{ N}$ e $U(t)$ é a função degrau unitária fornecida pela Equação 2.12. A geometria, a malha de 80 elementos $Q8$ e as demais condições de contorno são ilustradas na Figura 3.2.

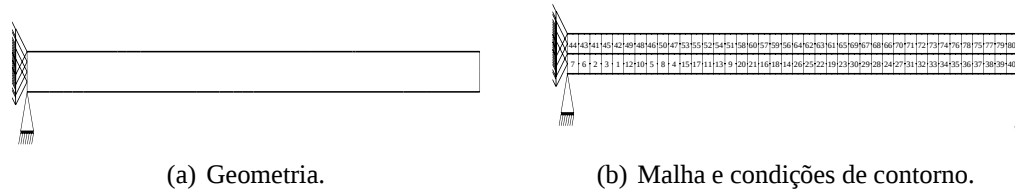


Figura 3.2: Geometria, malha e condições de contorno de uma viga em balanço.

A resposta dinâmica exata para a viga da Figura 3.2, considerando o comportamento elástico linear do material, é uma vibração em torno do ponto de equilíbrio estático, cuja amplitude permanece constante (Hammerand, 1999). O equilíbrio estático para a deflexão na extremidade em balanço (d_{bal}) pode ser determinada a partir da seguinte solução analítica:

$$d_{bal} = \frac{p_0 l^3}{3EI} \quad (3.26)$$

em que E é o Módulo de Elasticidade e I é o momento de inércia da seção transversal.

Assumindo-se um comportamento elástico linear do material da viga, cujas propriedades são $E = 98,2\text{ MPa}$, $\nu = 0$ e $\rho = 2200\text{ kg/m}^3$, tem-se uma resposta estática, onde $d_{bal} = 0,8303\text{ mm}$, segundo a Equação 3.26.

A Figura 3.3 mostra a comparação entre a solução analítica e a análise dinâmica pelo MEF para o algoritmo formulado e implementado da Seção 3.1 para um $\Delta t = 0,01\text{ s}$. Foram plotados para fins de comparação os resultados de Hammerand (1999), que utilizou a mesma formulação aqui apresentada para elementos triangulares de placa. Um estado plano de tensões foi assumido.

Através da Figura 3.3, também podemos observar, para o caso da aceleração média constante, um fenômeno de oscilação em torno do valor esperado ($d_{bal} = 0,8303\text{ mm}$), no qual a amplitude de vibração periodicamente cresce e decresce, fato este também observado por Hammerand (1999). Embora os resultados não sejam mostrados, o mesmo caso também foi analisado para um $\Delta t = 0,001\text{ s}$, onde não houve alteração sensível nos resultados para

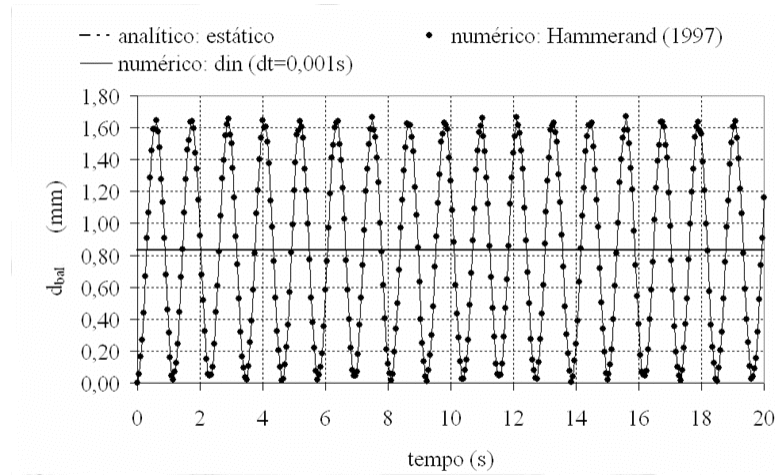


Figura 3.3: Soluções para uma viga elástica linear em balanço.

este passo de tempo menor.

3.2.2 Viga viscoelástica em balanço com carregamento concentrado

Com as mesmas características geométricas da viga do exemplo anterior, considere agora o comportamento do material isotrópico e viscoelástico linear, ainda com $\nu = 0$ e módulo de relaxação definido na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Módulo de relaxação para a viga em balanço.

i	$E_i(\text{Pa})$	ρ_i
∞	$1,96 \times 10^{+7}$	—
1	$7,84 \times 10^{+7}$	2,24

Para uma análise quasi-estática (viscoelástica), a deflexão na extremidade em balanço (d_{bal}) pode ser determinada usando-se o Princípio da Correspondência, resultando na seguinte solução analítica:

$$d_{bal} = \frac{p_0 l^3}{3I} D(t) \quad (3.27)$$

em que I é o momento de inércia da seção transversal e $D(t)$ é a função fluência ou compliância. Observe que esta solução é semelhante à solução para o caso elástico apresentada pela Equação 3.26, sendo a propriedade E substituída por $D(t)$.

Análises quasi-estáticas e dinâmicas, utilizando o MEF, foram realizadas para um $\Delta t = 0,01$ s. A Figura 3.4 compara a solução analítica com as soluções obtidas pelo MEF.

Observa-se que as diferenças entre as soluções analíticas e de elementos finitos, tanto para a análise quasi-estática quanto para a análise dinâmica, não podem ser distin-

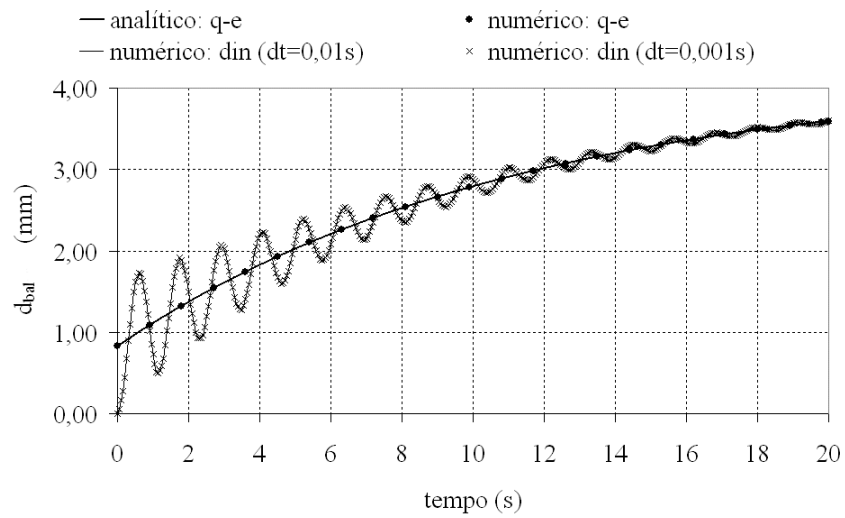


Figura 3.4: Soluções para uma viga viscoelástica linear em balanço.

guidas. Semelhantes simulações foram realizadas para um $\Delta t = 0,001$ s e não apresentaram diferenças apreciáveis nos resultados em relação ao passo de tempo utilizado anteriormente.

Capítulo 4

Materiais e Métodos

Neste capítulo são apresentados os materiais utilizados, as granulometrias adotadas e o processo de fabricação, bem como os resultados dos ensaios realizados (*creep* estático e Módulo de Resiliência). Menciona-se ainda a metodologia adotada para as simulações numéricas para a consideração axissimétrica de uma única passagem de roda, e também para a passagem de múltiplas rodas. São indicados todos os parâmetros assumidos para os fatores analisados, bem como as respostas investigadas.

4.1 Materiais

Como materiais utilizados, duas misturas asfálticas foram projetadas no intuito de que sua caracterização, elástica e viscoelástica, fornecesse as propriedades necessárias, da camada de revestimento asfáltico, para as análises numéricas. Os tipos de misturas selecionados foram Concreto Betuminoso Usinado à Quente (CBUQ) e Areia Asfalto Usinada à Quente (AAUQ). O motivo da escolha destes foi a sua ampla utilização em rodovias do Estado do Ceará, bem como uma diferença considerável entre seus comportamentos viscoelásticos, devido às diferenças nos teores de ligante e distintos esqueletos minerais. Ambas as misturas foram confeccionadas no Laboratório de Mecânica dos Pavimentos da Universidade Federal do Ceará (LMP/UFC), de acordo com os procedimentos de dosagem descritos por Vasconcelos (2004).

4.1.1 Seleção dos materiais

Foram utilizados agregados de origem granítica provenientes da Pedreira de Itaitinga na Região Metropolitana de Fortaleza. Como agregado graúdo adotou-se brita 3/4", e como agregado miúdo pó de pedra. Para confecção dos CP's, os agregados foram fracionados da peneira 3/4" à peneira N° 200, passando por toda a série especificada pelo DNER (DNER, 1998) de forma a assegurar a menor variação possível das granulometrias originais. Como ligante, utilizou-se o CAP 50/70 produzido e comercializado pela Lubnor/Petrobras, a partir de petróleo originário do campo Fazenda Alegre, situado no Estado do Espírito Santo.

4.1.2 Curvas granulométricas

A distribuição granulométrica do CBUQ apresenta Tamanho Máximo Nominal (TMN) de 12,5 mm, enquanto que a mistura de AAUQ apresenta um TMN de 9,5 mm. Isto mostra a diferença entre as granulometrias das misturas. A Figura 4.1.2 ilustra as granulometrias estudadas segundo especificações *Superpave*TM (SHRP, 1994b), sendo todas enquadradas na Faixa C antiga do DNER para a mistura de AAUQ (DNER, 1997a) e a mistura de CBUQ (DNER, 1997b).

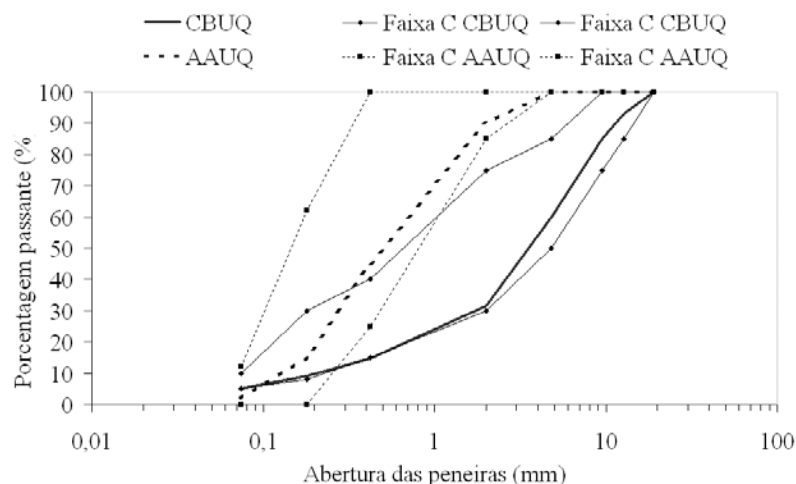


Figura 4.1: Distribuição granulométrica das misturas de AAUQ e CBUQ.

4.1.3 Método de dosagem, parâmetros volumétricos e teor de projeto

A dosagem *Marshall* (compactação por impacto) foi utilizada para a mistura de AAUQ, enquanto a dosagem *Superpave* (amassamento) foi utilizada para a mistura de CBUQ. Na dosagem *Marshall*, 3 CP's foram compactados com 75 golpes por face, onde a compactação por impacto foi realizada com soquete *Marshall* (DNER, 1995). Para os 3 CP's da mistura de CBUQ, 96 giros foram utilizados na compactação por amassamento realizada pelo *Superpave Giratory Compactor* (SGC), com pressão de 600 kPa, 30 rpm e ângulo de 1,25°. No final os 6 CP's apresentaram diâmetro (ϕ) de $10 \pm 0,02$ cm e altura (a) de $6,35 \pm 0,13$ cm. Os parâmetros volumétricos, incluindo o Teor de Projeto (TP) dos CP's obtidos para as duas misturas encontram-se resumidos na Tabela 4.1.

4.1.4 Ensaios realizados

Foram realizados dois tipos de ensaios para a determinação das propriedades das misturas asfálticas, o ensaio de *creep* estático e de Módulo de Resiliência (*MR*). Os ensaios de *creep* estático foram realizados em compressão uniaxial no Laboratório de Vias e

Tabela 4.1: Parâmetros volumétricos dos CP's moldados no teor de projeto.

Parâmetros	Misturas	
	AAUQ	CBUQ
Densidade aparente - Da	2, 20	2, 31
Volume de vazios - Vv (%)	4, 80	2, 4
Volume cheio com betume - VCB (%)	19, 71	14, 29
Vazios no agregado mineral - VAM (%)	24, 50	16, 72
Relação betume/vazios - RBV (%)	80, 45	85, 48
Teor de projeto - TP (%)	9, 2	6, 31

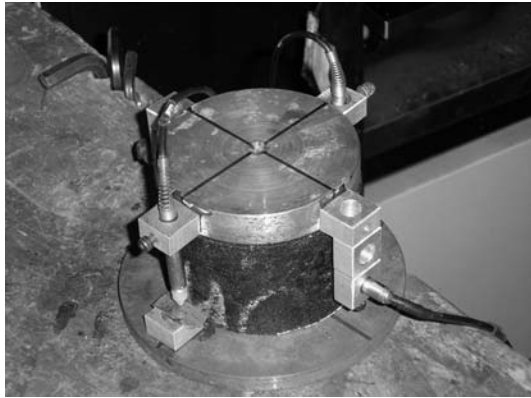
Comunicação da Universidade do Minho em Portugal (UMinho). Os ensaios de MR foram realizados em compressão diametral no LMP/UFC. No intuito de diminuição de alguma variação estatística entre os CP's ensaiados, os ensaios foram realizados nos 3 CP's para cada mistura, totalizando 6 CP's ensaiados. A descrição de cada ensaio é apresentada a seguir.

- *Creep* estático

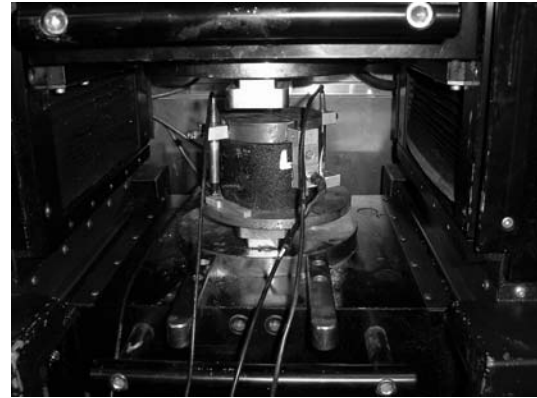
O ensaio de *creep* foi realizado para a determinação da função fluência ou compliância, $D(t)$, das misturas analisadas. Como mencionado anteriormente, apesar da formulação pelo método dos deslocamentos nas análises por Elementos Finitos aqui desenvolvida utilizar o módulo de relaxação, $E(t)$, como dado de entrada, este ensaio é bem mais complexo de ser realizado. Contudo, como também mostrado na Seção 2.3.8, é possível a interconversão entre as funções viscoelásticas, optando-se pelo ensaio de *creep* estático.

O ensaio foi realizado nas temperaturas de -22°C , 22°C e 40°C para cada um dos 3 CP's de cada mistura. Para permitir o condicionamento adequado do CP na temperatura de ensaio, cada amostra foi acondicionada por no mínimo 6 horas na temperatura corrente deste, com exceção da maior temperatura (40°C), que para evitar a perda de adesão na interface ligante-agregado, foram acondicionados por somente 3 horas. Com o objetivo de não induzir danos nas misturas, nem ultrapassar algum limite de linearidade dos materiais, o nível de tensão aplicado foi relativamente baixo, onde uma carga de 900 N foi aplicada uniaxialmente ao CP, contabilizando uma tensão de compressão, na área da seção circular, de aproximadamente 0,1 MPa. Este valor de tensão aplicada também foi utilizada para a manutenção do limite de linearidade dos CP's asfálticos em Soares e Souza (2002). É importante ressaltar que, como cada amostra foi submetida ao mesmo ensaio, mas com temperatura diferente, foi dado um tempo de recuperação entre cada ensaio de no mínimo 3 horas, como recomendado por Kim e Lee (1995) para a recuperação total das deformações. Apesar do valor do limite de linearidade de misturas asfálticas ser variável para cada mistura, intervalos reais de cargas aplicadas podem ser encontradas em Kim et al. (1994).

Os deslocamentos nos corpos de prova foram medidos por meio de LVDT's (*Linear Variable Differential Transducers*), como ilustrado na Figura 4.2. Um par de LVDT's foi instalado à $\frac{1}{2}$ altura do corpo de prova, de forma a medir os deslocamentos uniaxiais (LVDT's 1 e 2) e outro par instalado, também à $\frac{1}{2}$ altura, de forma a medir os deslocamentos laterais (LVDT's 3 e 4). Com a medida dos deslocamentos laterais foi possível a determinação do coeficiente de Poisson (ν). De posse dos deslocamentos uniaxiais, e consequente deformações, a função fluência, $D(t)$ pode ser determinada segundo a Equação 2.32.



(a) configuração dos LVDT's.



(b) execução do ensaio.

Figura 4.2: Ensaio de *creep* estático na UMinho.

A partir dos dados laboratoriais para as três temperaturas ensaiadas, a Curva Mestre, para a temperatura de referência de 22° C, pode então ser construída para cada mistura utilizando o Princípio de Superposição Tempo-Temperatura (Seção 2.3.6). As curvas para ambas as misturas são mostradas na Figura 4.3.

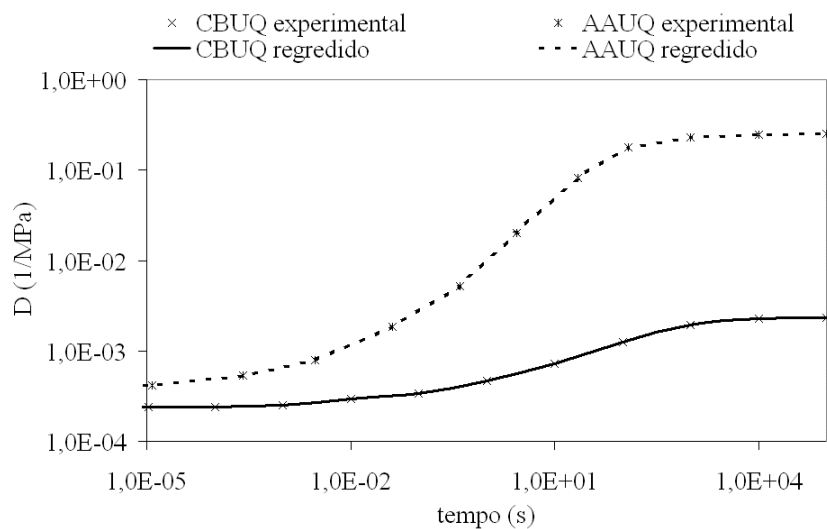


Figura 4.3: Funções fluência regredidas e experimentais.

Nota-se que a inclinação (n) da parte central da curva, região localizada entre as assíntotas, é um indicador da dependência do tempo para cada mistura. Como exemplo, pode-se dizer que uma mistura com uma inclinação nula ($n = 0$) teria um comportamento puramente elástico. Desta forma, de acordo com a Figura 4.3, a mistura de AAUQ possui uma maior inclinação do que a da mistura de CBUQ. Isto possivelmente se deve ao fato de que esta mistura de AAUQ possui uma quantidade de agregados graúdos bem menor do que a mistura de CBUQ (ver Figura 4.1.2), o que torna a matriz asfáltica, de comportamento viscoelástico, bem mais determinante no comportamento mecânico da mistura. Outro ponto importante a ser observado na Figura 4.3 é que a mistura de CBUQ possui menores valores para $D(t)$, ou seja, uma maior rigidez do que a mistura de AAUQ. Este fato é óbvio devido a diferenças do esqueleto mineral entre as duas misturas. Outra diferença marcante entre as duas misturas é o espectro de variação da função fluência ao longo do tempo. Observa-se que a mistura de AAUQ varia 3 décadas de $D(t)$ (10^4 à 10^1), enquanto a mistura de CBUQ varia apenas 1 década (10^4 à 10^3), evidenciando um comportamento bem mais "elástico" da mistura com maior quantidade de agregados (CBUQ).

Os Coeficientes de Poisson (ν) de 0,40 e 0,30 foram calculados para as misturas de AAUQ e CBUQ, respectivamente, com base na razão entre as deformações uniaxiais e laterais dos CP's.

O módulo de relaxação, $E(t)$, foi obtido a partir dos dados experimentais do ensaio de *creep*. A técnica para a interconversão encontra-se descrita na Seção 2.3.8. A Figura 4.4 mostra o módulo de relaxação $E(t)$ interconvertido para as misturas consideradas.

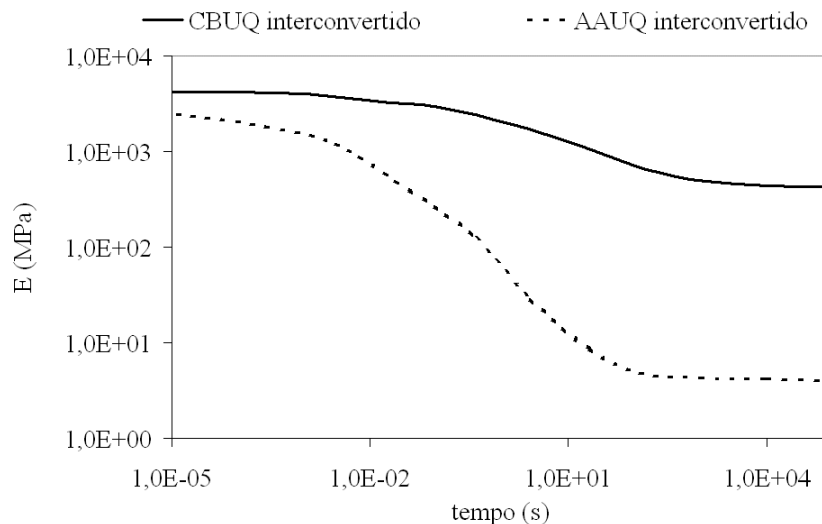


Figura 4.4: Módulos de relaxação interconvertidos.

- Módulo de Resiliência (MR)

O Módulo de Resiliência (MR) vem sendo considerado como o Módulo de Elasticidade (E) que, juntamente com o coeficiente de Poisson (ν), são os parâmetros que representam o comportamento dos materiais quando usada a Teoria da Elasticidade.

A determinação do MR para misturas asfálticas pode ser feita, basicamente, através dos ensaios de compressão diametral e compressão uniaxial (Yoder e Witczak, 1975; Huang, 1993). Nos EUA o ensaio de MR realizado por compressão diametral vem sendo reavaliado, a fim de serem propostas algumas modificações ao método da ASTM adotado (ASTM, 1982). No Brasil este procedimento ainda vem sendo largamente utilizado através do método de ensaio (DNER, 1994), principalmente nas universidades e centros de pesquisa. O presente trabalho contou com caracterização mecânica das misturas realizada também através do ensaio de MR por compressão diametral.

O MR é determinado a partir da aplicação repetida de carregamento aproximadamente na forma de um pulso semi-senoidal com duração de 0,1 s seguido de 0,9 s de repouso (ASTM, 1982; DNER, 1994). No caso da compressão diametral (o mais utilizado no Brasil) o MR de misturas asfálticas é a relação entre a tensão de tração (σ_{xx}), gerada repetidamente no plano diametral de uma amostra cilíndrica, e a deformação recuperável (ε_{xx}) correspondente:

$$MR = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} \quad (4.1)$$

No caso uniaxial, o MR é a relação entre a tensão de compressão (σ_{yy}), gerada repetidamente na seção circular de uma amostra cilíndrica, e a deformação recuperável (ε_{yy}) correspondente:

$$MR = \frac{\sigma_{yy}}{\varepsilon_{yy}} \quad (4.2)$$

A norma brasileira não distingue MR instantâneo de MR total, como é feito na norma americana (ASTM, 1982). O estudo de Brito (2006) mostra diferentes metodologias de cálculo do MR , bem como as diferenças no valor final deste parâmetro, advindas do uso de cada uma delas. Adotou-se para o presente estudo a determinação do MR total, que é calculado considerando a deformação recuperável que ocorre até o final do ciclo de 1 s. A Figura 4.5 mostra o equipamento de carga repetida do LMP/UFC usado para o ensaio de MR .

Para o presente estudo, os ensaios foram realizados à temperatura de 22° C e o resultado foi obtido através da leitura da deformação total. Os valores médios do MR para os três CP's de cada mistura encontram-se resumidos na Tabela 4.2.

Os valores apresentados na Tabela 4.2 foram utilizados como equivalentes ao Módulo de Elasticidade na realização de análises elásticas lineares nas simulações que são apresentadas adiante. O coeficiente de Poisson foi calculado no ensaio de *creep* descrito no item anterior.



Figura 4.5: Equipamento de carga repetida usado no ensaio de MR .

Tabela 4.2: Resultados do ensaio de MR por compressão diametral.

Mistura	MR médio (MPa)
AAUQ	1655
CBUQ	3267

4.2 Modelagem em Elementos Finitos

Com o intuito de avaliar a interação entre diversos fatores na resposta estrutural de um pavimento, foram realizadas duas séries de análises (quasi-estáticas e dinâmicas) através do MEF, para determinar as tensões e deformações em uma seção axissimétrica de um pavimento flexível. A Seção 4.2.1 descreve as características gerais da estrutura do pavimento analisado, enquanto a Seção 4.2.2 descreve as considerações para as análises realizadas.

4.2.1 Pavimento analisado

O pavimento estudado é composto por três camadas sobre um subleito granular. A primeira camada é constituída de uma Mistura Asfáltica com 5 cm de espessura. A segunda e terceira camadas são base e sub-base granulares com espessuras de 15 cm e 20 cm, respectivamente. A geometria e as condições de contorno usadas nas análises são mostradas na Figura 4.6. Foi adotado um modelo axissimétrico com um raio de 216 cm e uma profundidade total de 431 cm. Estas dimensões são baseadas nas recomendações de Duncan et al. (1968) que sugerem um limite radial de aproximadamente 20 vezes o raio do carregamento,

e uma profundidade do subleito de 40 vezes este mesmo raio.

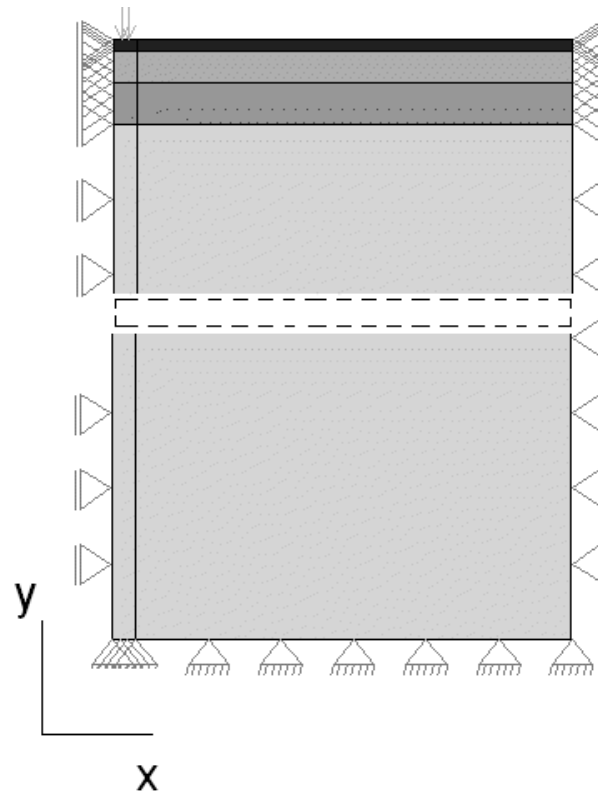


Figura 4.6: Modelo geométrico e condições de contorno do pavimento.

O modelo inclui 1800 elementos quadráticos de 8 nós. O programa *MTool* (TeCGraf/Puc-Rio, 1992) foi usado na geração do modelo geométrico e geração da malha de Elementos Finitos. A Tabela 4.3 mostra o número de elementos para cada camada nas direções do modelo do pavimento.

Tabela 4.3: Número de elementos usados para discretização.

Camadas	n ^o de elementos	
	direção <i>y</i>	direção <i>x</i>
revestimento	5	40
base	10	40
subbase	10	40
subleito	20	40

Para todas as análises descritas nas seções seguintes, o comportamento das três camadas granulares (base, subbase e subleito) foi assumido como elástico linear, com suas propriedades apresentadas na Tabela 4.4. Estes valores são típicos para os materiais granulares utilizados para pavimentação no Brasil (Soares et al., 2000). A camada de revestimento foi considerada tanto como sendo a mistura de AAUQ como a de CBUQ, já que o tipo de

Tabela 4.4: Propriedades elásticas dos materiais granulares.

Camada	E (MPa)	ν	ρ (kg/m ³)
Base	300	0,35	2050
Sub-base	200	0,35	1900
Subleito	100	0,35	1700

mistura foi um dos fatores a ser avaliado nas simulações. Ambas as misturas foram consideradas ora de comportamento elástico linear, ora viscoelástico linear.

Apesar de suas limitações, a axissimetria foi assumida pelo fato de que, quando considerados o MEF na análises de pavimentos, esta abordagem é a mais comumente assumida (GAO, 1997; NCHRP, 2004; Medina e Motta, 2005).

Quando consideradas de comportamento elástico linear, os parâmetros usados nas análises foram o coeficiente de Poisson (ν) e o MR , que, foi assumido como sendo o Módulo de Elasticidade. Os valores destes parâmetros são mostrados na Tabela 4.2 da Seção 4.1.4.

Nas análises que consideram as misturas asfálticas de comportamento viscoelástico linear, os parâmetros necessários para as simulações foram os coeficientes regredidos da série de Prony do módulo de relaxação, $E(t)$, ilustrado na Figura 4.4 da Seção 4.1.4.

4.2.2 Parâmetros para as simulações numéricas e planejamento fatorial

- Passagem de uma única roda

Considerando a estrutura axissimétrica representada na Figura 4.6 (Seção 4.2.1), foram realizadas análises por meio do MEF considerando uma pressão de 0,55 MPa, correspondente à carga de uma roda, aplicada na superfície em uma área circular com raio de 10,8 cm, para simular o carregamento de um eixo padrão de 8,2 tf. Desta forma, foi simulada a passagem de uma roda, responsável por 1/4 (2,05 tf) da carga total do eixo padrão (eixo simples de rodas duplas).

As análises se propõem a estudar a influência da velocidade na resposta dos principais parâmetros estruturais utilizados no projeto de pavimentos asfálticos, que são:

- a deflexão (deslocamento) no topo da camada de revestimento (d_v);
- a tensão de tração no fundo da camada de revestimento (σ_{xx});
- a tensão de compressão no topo da camada de subleito (σ_{yy}).

Para observação destes parâmetros, 4 pulsos em forma de onda semi-senoidal foram simulados tanto em análises quasi-estáticas (análises no tempo, mas sem consideração de forças inerciais), como dinâmicas (análises no tempo com a consideração de forças inerciais).

Como mencionado anteriormente, os pulsos visam a simulação do efeito da passagem da velocidade da roda sobre a superfície do pavimento. A Tabela 4.5 mostra a duração dos pulsos considerados nas análises e suas respectivas velocidades (V), calculadas de acordo com a Equação 2.1 (McLean, 1974). Os passos de tempo (Δt) utilizados para as análises quasi-estáticas e dinâmicas também são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Duração dos pulsos, passos de tempo e respectivas velocidades (V) usadas nas simulações.

Duração (s)	V (km/h)	Δt (s)
0,1	8	$1,0 \times 10^{-3}$
0,013	60	$1,3 \times 10^{-4}$
0,008	100	$8,0 \times 10^{-5}$
0,006	130	$6,0 \times 10^{-5}$

Como neste conjunto de análises foi apenas considerada a passagem de uma roda do eixo padrão, a Figura 4.7 ilustra a forma e duração dos pulsos considerados (Tabela 4.5).

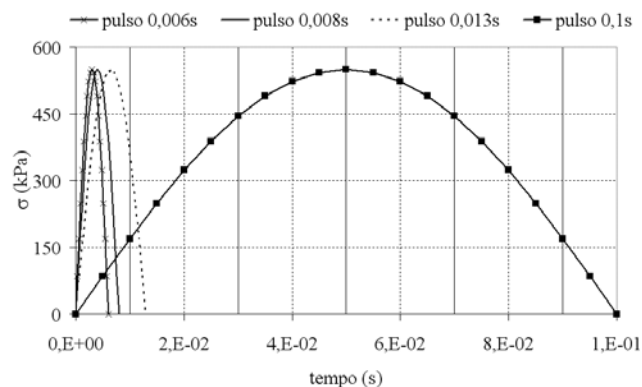


Figura 4.7: Pulsos representando a passagem de uma roda do eixo padrão.

A escolha de um planejamento fatorial foi utilizada, já que desejava-se examinar a variação de 4 fatores com 2 níveis cada, todos variados conjuntamente. Estes números caracterizam um planejamento fatorial 2^4 totalizando 16 combinações a serem realizadas. Os fatores analisados foram:

- Tipo de análise: dinâmica ou quasi-estática (fator A);
- Tipo de comportamento do material asfáltico: viscoelástico ou elástico (fator B);
- Efeito da velocidade e/ou duração do pulso (fator C);
- Tipo de mistura: AAUQ ou CBUQ (fator D).

Desta forma, análises numéricas foram realizadas onde cada fator, em seus 2 níveis ($-$ e $+$) foi combinado, totalizando as 16 análises para cada resposta estrutural analisada (d_v , σ_{xx} e σ_{yy}). A Tabela 4.6 indica os níveis $-$ e $+$ para cada fator analisado.

Tabela 4.6: Descrição dos níveis para os fatores analisados.

Nível	Análise (A)	Comportamento (B)	Velocidade/pulso (C)	Mistura (D)
Baixo ($-$)	quasi-estática	elástico	6 km/h	CBUQ
Alto ($+$)	dinâmica	viscoelástico	100 km/h	AAUQ

- Passagem de múltiplas rodas

Ainda considerando a estrutura axissimétrica representada na Figura 4.6 (Seção 4.2.1), foram realizadas análises por meio do MEF considerando a passagem de todos os eixos de veículos selecionados. Estas análises objetivam a verificação qualitativa de alguma possível influência do efeito da passagem de múltiplas rodas no tempo (superposição temporal). Esta verificação é importante devido ao fato de que, apesar de não haver superposição temporal dos pulsos que simulam cada roda, a consideração do comportamento viscoelástico (dependente do tempo) e/ou a consideração das forças inerciais (análise dinâmica) podem induzir esta superposição nas respostas estruturais.

A carga também é aplicada na superfície em uma área circular com raio de 10,8 cm para simular o carregamento de cada roda. Devido a consideração axissimétrica, apenas a passagem de uma roda por eixo foi considerada não contabilizando nas respostas a superposição espacial de cada eixo.

Foram considerados 2 veículos com configurações distintas de modo a verificar tanto a influência da velocidade (V) de passagem dos eixos de um veículo, como também a influência de diferentes configurações na resposta do (deslocamento) no topo da camada de revestimento (d_v) e na a tensão de tração no fundo da camada de revestimento (σ_{xx}). Os veículos utilizados foram:

- veículo 2C (ônibus e caminhões simples) consituído de 1 eixo dianteiro simples de roda simples (6 tf) e 1 eixo traseiro simples de rodas duplas (10 tf);
- veículo 2S3 (semi-reboque) consituído de 1 eixo dianteiro simples de roda simples (6 tf), 1 eixo intermediário simples de roda dupla (10 tf) e 1 eixo traseiro tandem triplo com 3 eixos acoplados (30 tf);

A Figura 4.8 ilustra os veículos simulados, enquanto a configuração, magnitude das cargas dos eixos, bem como as rodas simuladas são ilustradas na Figura 4.9.



(a) Veículo 2C (ônibus e caminhões simples).



(b) Veículo 2S3 (semi-reboque).

Figura 4.8: Veículos utilizados nas simulações.

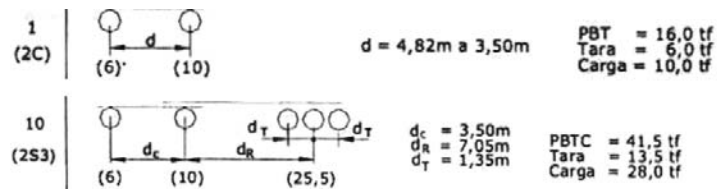
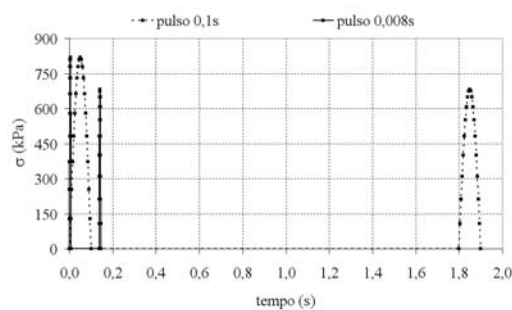


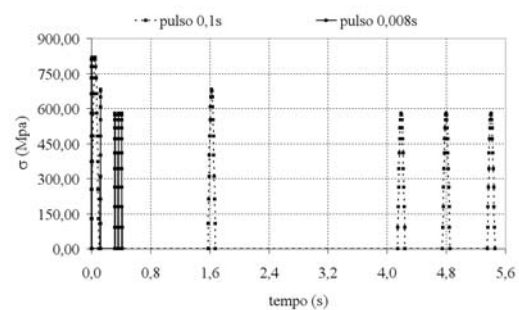
Figura 4.9: Configurações dos veículos simulados (ANFAVEA, 2001).

Para este conjunto de análises, apenas 2 pulsos em forma de onda semi-senoidal foram simulados tanto em análises quasi-estáticas (análises no tempo, mas sem consideração de forças inerciais) como dinâmicas (análises no tempo com a consideração de forças inerciais). Dos pulsos constantes na Tabela 4.5, foram selecionados os pulsos com duração de 0,1 e 0,008s, equivalentes as velocidades de 8 km/h e 100 km/h, respectivamente.

A Figura 4.10 mostra a forma e a duração dos pulsos considerados para cada roda dos veículos investigados. A duração absoluta, bem como o espaçamento temporal entre cada pulso foi determinado de acordo com o a distância entre cada eixo ilustrada pela Figura 4.9.



(a) Veículo 2C (ônibus e caminhões simples).



(b) Veículo 2S3 (semi-reboque).

Figura 4.10: Pulsos representando a passagem das rodas de cada eixo para diferentes velocidades.

Para estes casos não foi realizado nenhum planejamento fatorial tendo em vista

que somente uma análise qualitativa do efeito da passagem de múltiplas rodas é objetivada. Como não foi estudado o efeito do tipo de mistura aqui, por economia de combinações, uma vez que este efeito pode ser considerado *óbvio*. As propriedades da mistura de AAUQ foram usadas para as simulações da passagem múltipla de rodas já que esta mistura apresenta um comportamento bem mais dependente do tempo que a mistura de CBUQ.

Capítulo 5

Resultados e Análises

Este Capítulo apresenta os resultados das análises propostas no capítulo anterior, juntamente com as discussões relevantes. Primeiramente é apresentada uma análise qualitativa dos gráficos oriundos das simulações numéricas. Depois, somente a influência da consideração dinâmica é avaliada, e finalmente, a análise fatorial dos efeitos principais e das interações é apresentada fornecendo uma noção quantitativa da análise.

5.1 Análise qualitativa

5.1.1 Passagem de uma única roda

As Figuras 5.1 e 5.2 mostram os deslocamentos verticais (d_v), do nó localizado no topo do eixo de simetria, para os pulsos indicados quando as misturas de CBUQ e AAUQ foram consideradas como revestimento, respectivamente. Como somente os valores máximos dos parâmetros estruturais são usados no projeto de pavimentos, a Figura 5.3 mostra apenas estes valores para ambas as misturas (AAUQ e CBUQ) do revestimento. Verifica-se que as diferenças entre os deslocamentos obtidos nas análises dinâmicas e quasi-estáticas aumentam com a diminuição do pulso de carga, ou seja, velocidades maiores aumentam o efeito dinâmico, o que é esperado. Contudo, nota-se que o efeito dinâmico leva a uma diminuição dos deslocamentos observados, fazendo com que a utilização do procedimento quasi-estático seja a favor da segurança.

Nota-se que quando o comportamento viscoelástico é considerado, o aumento da duração do pulso (diminuição da velocidade do veículo) leva a um aumento dos deslocamentos. Isto é uma das razões para as maiores deflexões observadas em pavimentos urbanos onde veículos trafegam em velocidades menores.

Quando se compara os dois modelos de material (elástico e viscoelástico), verifica-se que as respostas elásticas são similares às viscoelásticas para o pulso de 0, 1 s. Isto se deve ao fato de que o MR foi utilizado como o parâmetro elástico para estas análises, e, como mencionado anteriormente, este parâmetro é determinado por meio da aplicação repetida de um pulso de 0, 1 s. Se comparar os dois tipos de misturas, observa-se o retorno bem mais lento, quando cessado o ciclo de carregamento, para a mistura de AAUQ, o que evidencia um comportamento bem mais "viscoelástico" do que a mistura de CBUQ. Tanto no caso quasi-estático quanto no dinâmico, a consideração de elasticidade da camada asfáltica tende

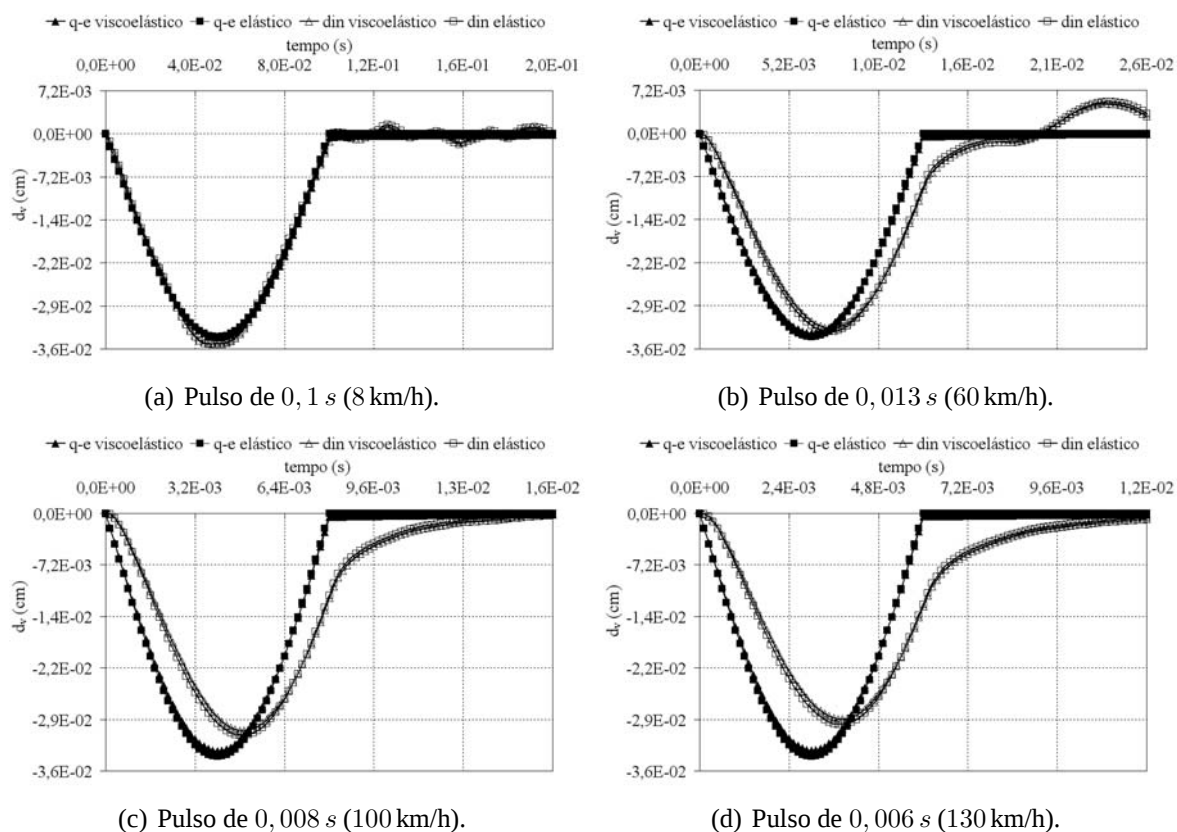


Figura 5.1: Deslocamentos verticais (d_v) no topo da camada de CBUQ.

a fornecer maior rigidez para a estrutura, como observado pelos menores valores de deslocamento. Isto foi observado no trabalho de Silva (1995) ao se utilizar modelos não-lineares e lineares os materiais granulares.

As Figuras 5.4 e 5.5 mostram, respectivamente, para a consideração do revestimento como CBUQ e AAUQ, os resultados obtidos para a tensão horizontal (σ_{xx}) da camada asfáltica, onde o valor de tensão foi observado no ponto de Gauss mais próximo, tanto no eixo de simetria, como no fundo da camada. A Figura 5.6 apresenta os valores máximos encontrados para estas tensões. Pulsos de durações menores, ou seja, velocidades maiores, induzem a valores maiores de σ_{xx} . Isto se deve ao fato de que, para solicitações mais curtas, a contribuição do componente elástico (mola isolada com E_0) do modelo generalizado de Kelvin ou Voigt (Figura 2.7) é maior. Desta forma, a resposta mecânica tende a ser mais rígida quando comparada com o comportamento sob pulsos de maior duração. No caso da aplicação destes últimos, os amortecedores em paralelo com as molas também contribuem, relaxando o material.

O mais importante a observar na resposta das tensões horizontais é que, sob a consideração da viscoelasticidade da camada asfáltica, os valores de σ_{xx} aumentam significativamente para altas velocidades, onde os valores máximos são encontrados para as análises

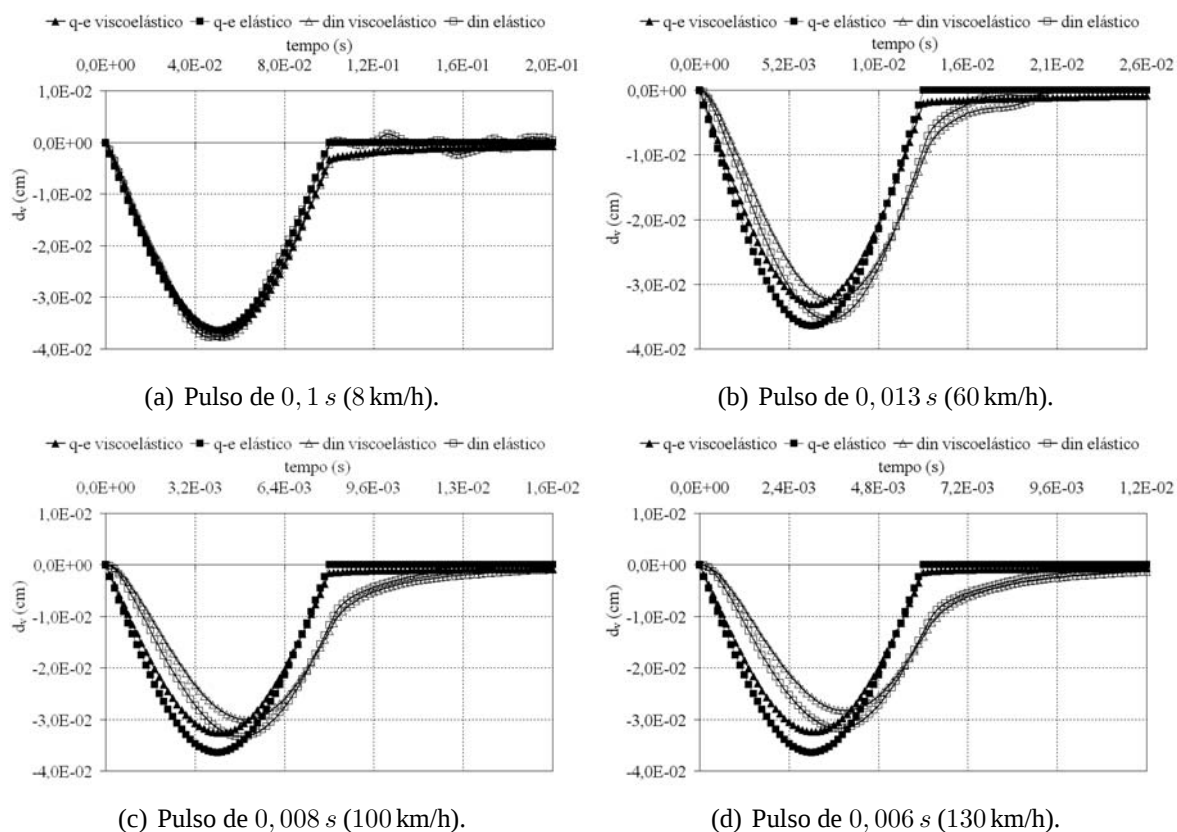


Figura 5.2: Deslocamentos verticais (d_v) no topo da camada de AAUQ.

onde as forças inerciais são consideradas (análises dinâmicas). Na prática, isto pode ser uma razão para o principal problema dos pavimentos rodoviários, o trincamento por fadiga, pois, nas rodovias os veículos trafegam em velocidades maiores, induzindo valores elevados de tensão de tração no fundo do revestimento em uma curta duração de tempo.

Para o parâmetro (σ_{xx}), o procedimento quasi-estático e a consideração da elasticidade linear da mistura asfáltica não é a favor da segurança, principalmente para pulsos de menor duração. É também notório que, quando o revestimento considerado foi de AAUQ, uma tensão de compressão foi induzida no fundo do revestimento quando cessado o ciclo de carregamento. Isto se deve ao fato de que, como as camadas granulares foram consideradas de comportamento elástico linear, ao fim do carregamento estas retornam imediatamente à situação original indeformada, o que não acontece com os materiais de comportamento viscoelástico linear, onde o retorno à posição indeformada não é imediato após o carregamento.

Para a estrutura de pavimento analisada, as camadas granulares comprimem o fundo do revestimento de tal forma que, para pulsos de maior duração (0,1 s), em que os amortecedores do modelo generalizado de Maxwell (Figura 2.10) tem uma maior tempo para serem acionados, produzem uma maior defasagem da resposta mecânica. Este fato já havia sido observado primeiramente no trabalho de Souza e Soares (2003) e posteriormente em

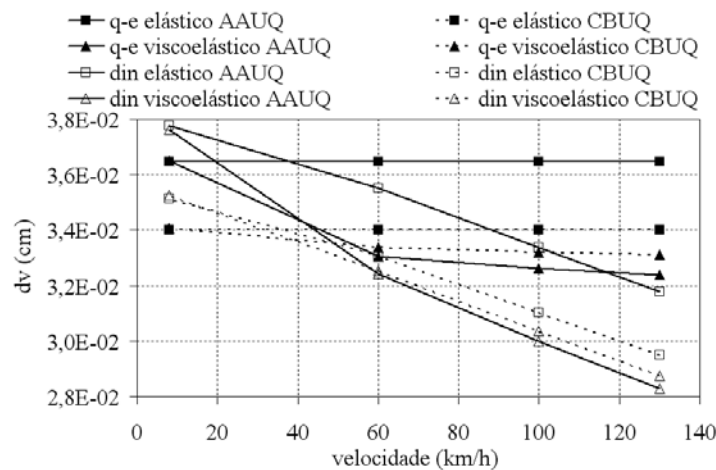


Figura 5.3: Resumo dos resultados de deslocamentos máximos (d_v) no topo da camada de revestimento (CBUQ e AAUQ).

Evangelista-Junior et al. (2005).

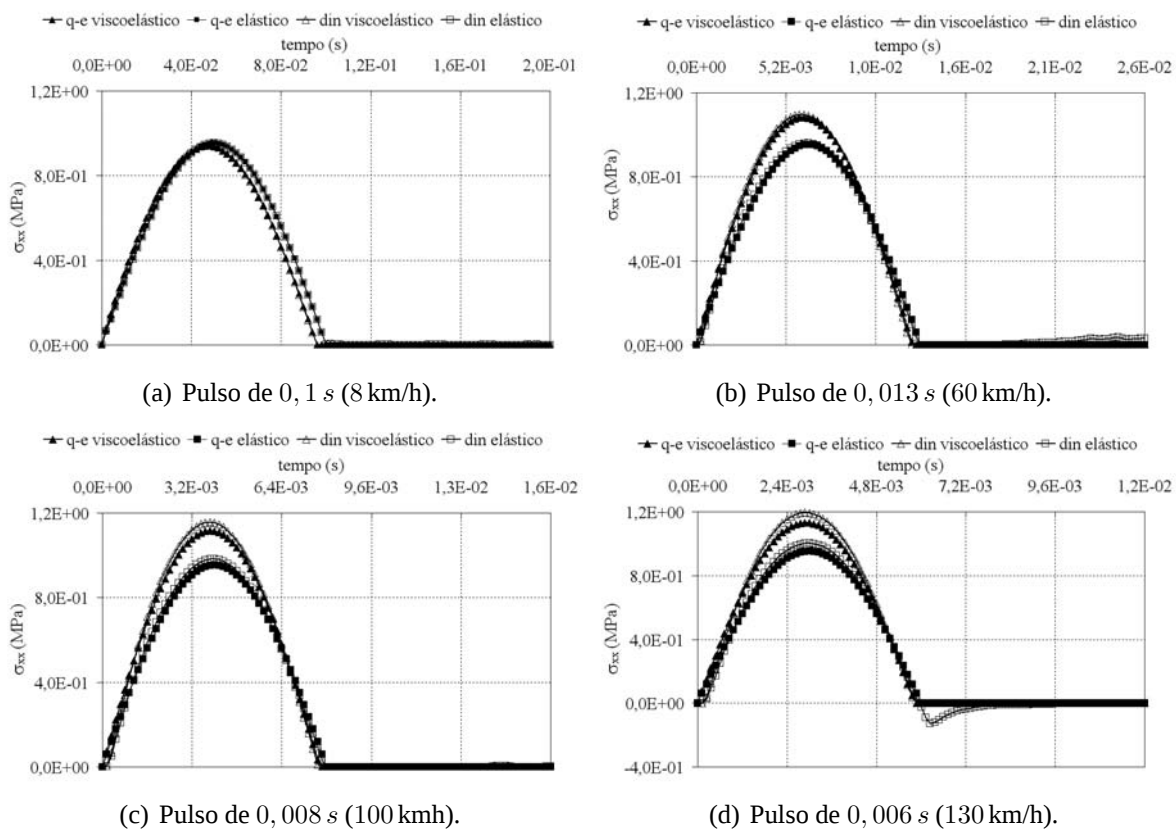


Figura 5.4: Tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada de CBUQ.

No caso das tensões verticais σ_{yy} no topo do subleito, os gráficos resultantes da aplicação dos pulsos, quando considerada a camada de revestimento como CBUQ e AAUQ, são apresentados nas Figuras 5.7 e 5.8, respectivamente. Os valores máximos absolu-

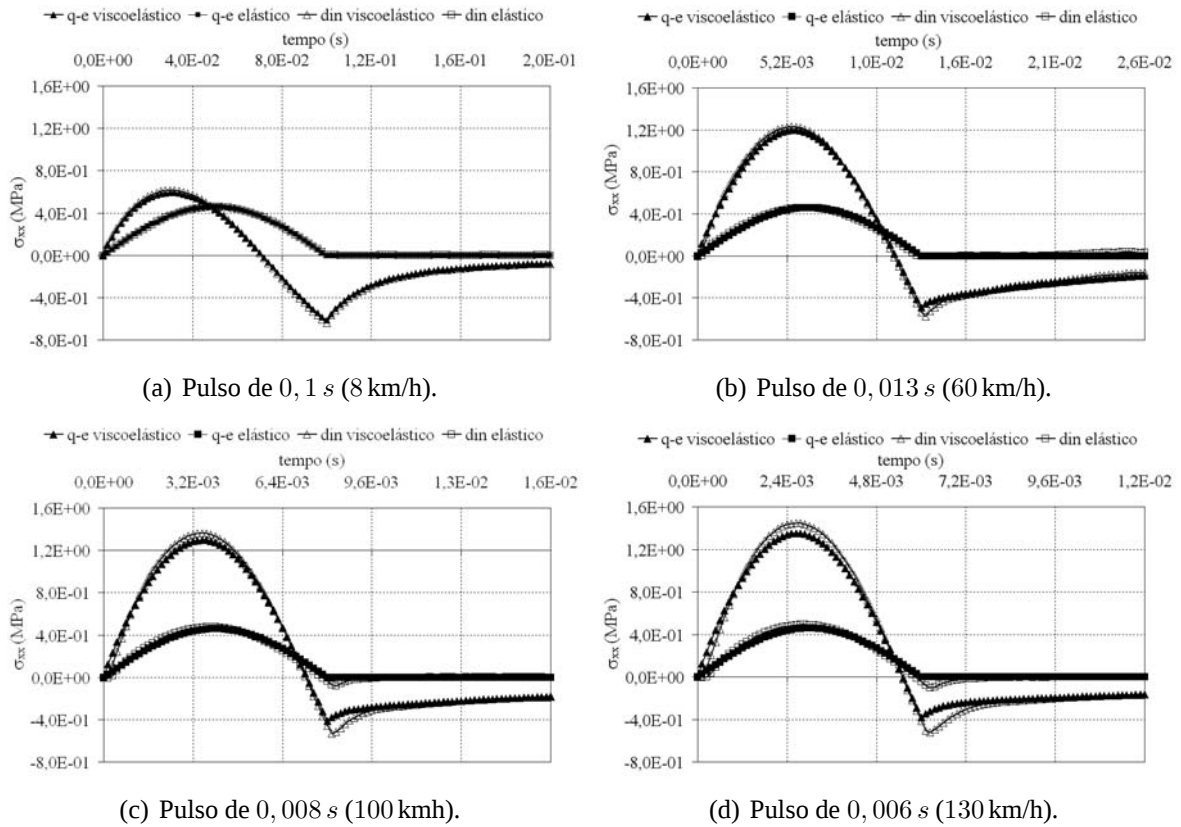


Figura 5.5: Tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada de AAUQ.

tos destas respostas são apresentados na Figura 5.9. A duração do carregamento e as considerações dinâmicas afetam a magnitude σ_{yy} de maneira direta, ou seja, maiores valores de σ_{yy} são atingidos com duração de pulsos menores (maiores velocidades), e as simulações dinâmicas diminuem os valores de σ_{yy} para este pulso (0,015 s). Assim como no caso de d_v , a análise dinâmica é a favor da segurança para ambos os comportamentos constitutivos da camada asfáltica e ambos os tipos de misturas.

5.1.2 Passagem de múltiplas rodas

As Figuras 5.10 e 5.11 mostram os deslocamentos verticais (d_v), do nó localizado no topo do eixo de simetria, para os pulsos indicados para a passagens dos eixos do 2C e 2S3, respectivamente.

Ao compararmos as duas velocidades de passagem, notamos que não temos influência do efeito da passagem das múltiplas rodas nos valores máximos dos deslocamentos de cada eixo. Isto é válido para os dois modelos constitutivos simulados, os dois veículos, e também, os dois tipos de análises considerados quasi-estático e dinâmico. É importante observar que, embora o menor tempo entre os pulsos de menor duração (0,008 s) induza maiores oscilações nos deslocamentos para o tempo entre as aplicações dos pulsos nas

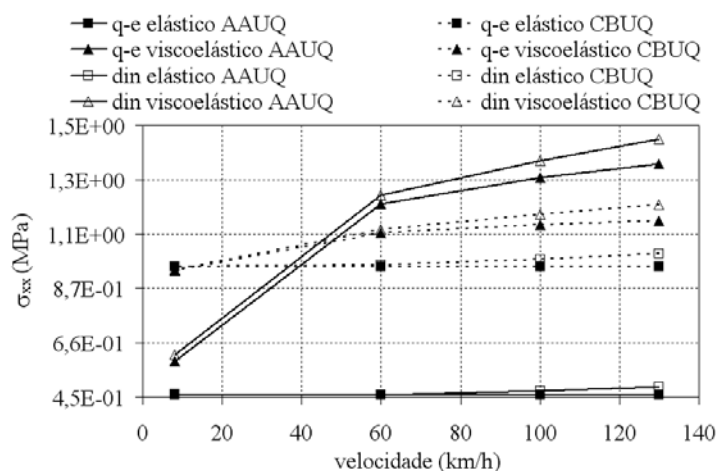


Figura 5.6: Resumo dos resultados das tensões horizontais máximas (σ_{xx}) no fundo da camada de revestimento (CBUQ e AAUQ).

análises dinâmicas, os valores de deslocamentos máximos para cada roda não são afetados. Desta forma, todas as conclusões baseadas na análise da passagem de uma roda (aplicação de apenas um pulso de carga) da seção anterior (Seção 5.1.2) são válidas para esta seção com relação aos deslocamentos verticais (d_v) no topo da camada asfáltica.

As Figuras 5.12 e 5.13 mostram, para a consideração do revestimento como AAUQ, os resultados obtidos para a tensão horizontal (σ_{xx}) da camada asfáltica para a passagem múltipla dos eixos do 2C e 2S3, respectivamente.

Em analogia com os resultados dos deslocamentos verticais, não temos influência do efeito da passagem das múltiplas rodas (superposição temporal) nos valores máximos das tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada de AAUQ. Isto também é válido para os dois modelos constitutivos simulados, os dois veículos, e também, os dois tipos de análises considerados (quasi-estática e dinâmica). As oscilações nos valores de σ_{xx} para os pulsos de menor duração (0,008 s) são bem mais suaves no tempo entre as aplicações dos pulsos para as análises dinâmicas. Aqui também, todas as conclusões baseadas na análise da passagem de uma roda (aplicação de apenas um pulso de carga) são válidas para esta seção com relação às tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada asfáltica.

Análises quantitativas, assim como a consideração dos demais fatores analisados nas seções seguintes, não foram realizadas para a passagem múltipla de rodas uma vez que, baseado no exposto aqui, não temos superposição temporal dos efeitos da passagem de uma roda de cada eixo para pulsos de duração maiores que 0,008 s para ambas as configurações de veículos utilizados (2C e 2S3), tipos de revestimento (AAUQ e CBUQ), tipos de modelos constitutivos (elástico e viscoelástico) e tipos de análise (quasi-estática e dinâmica).

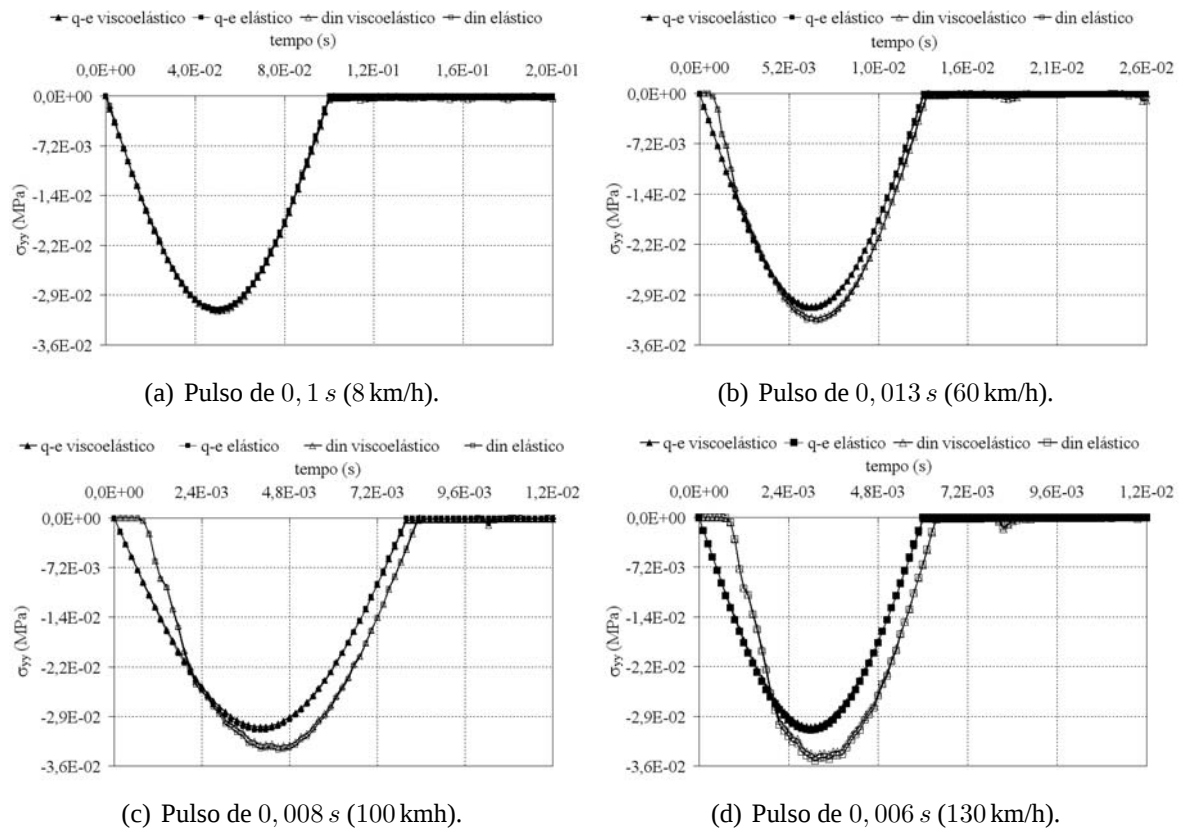


Figura 5.7: Tensões verticais (σ_{yy}) no topo da camada de subleito quando o revestimento é considerado de CBUQ.

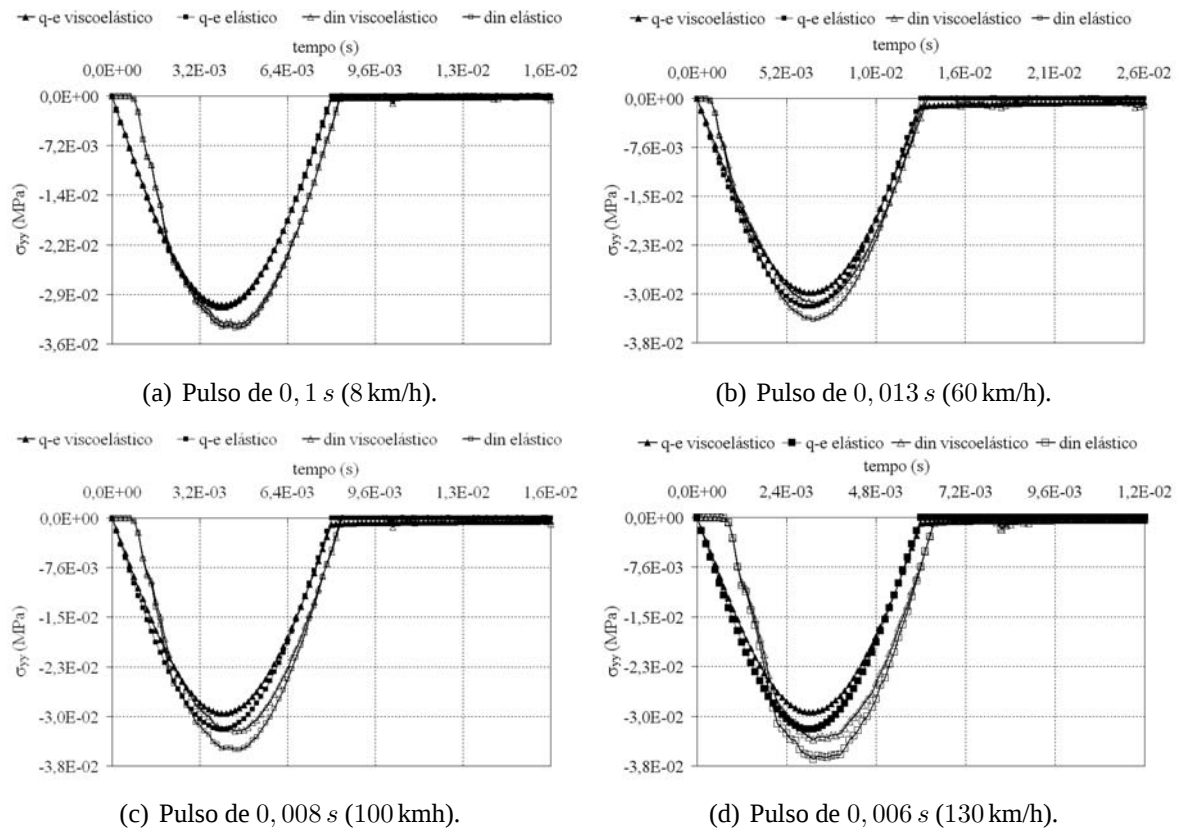


Figura 5.8: Tensões verticais (σ_{yy}) no topo da camada de subleito quando o revestimento é considerado de AAUQ.

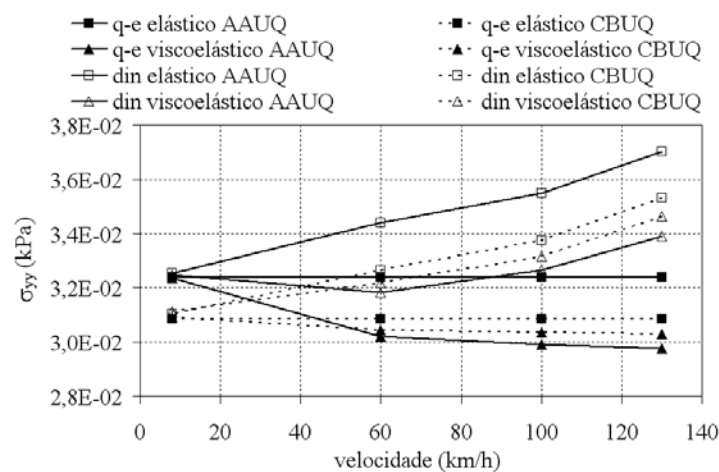
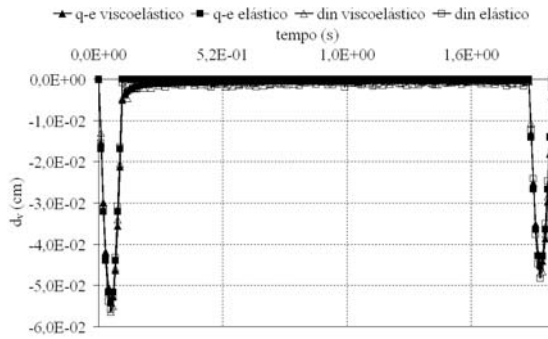
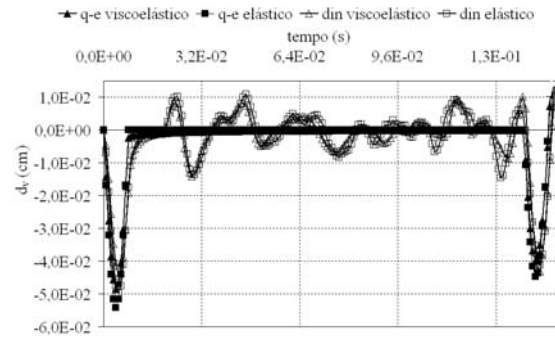


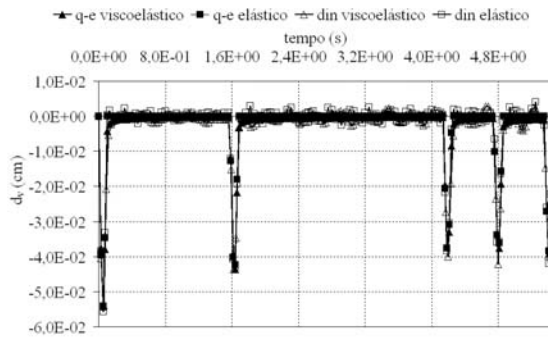
Figura 5.9: Resumo dos resultados das tensões verticais máximas (σ_{yy}) no topo do subleito quando o revestimento é considerado como CBUQ e AAUQ.



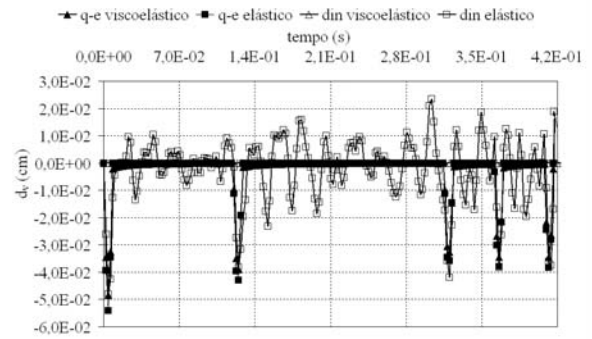
(a) Pulso de 0,1 s (8 km/h).



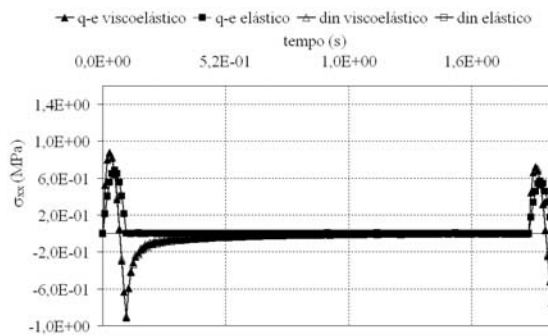
(b) Pulso de 0,008 s (100 km/h).

Figura 5.10: Deslocamentos verticais (d_v) no topo da camada de AAUQ para o 2C.

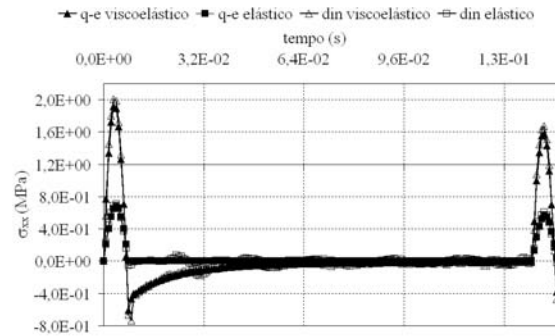
(a) Pulso de 0,1 s (8 km/h).



(b) Pulso de 0,008 s (100 km/h).

Figura 5.11: Deslocamentos verticais (d_v) no topo da camada de AAUQ para o 2S3.

(a) Pulso de 0,1 s (8 km/h).



(b) Pulso de 0,008 s (100 km/h).

Figura 5.12: Tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada de AAUQ para o 2C.

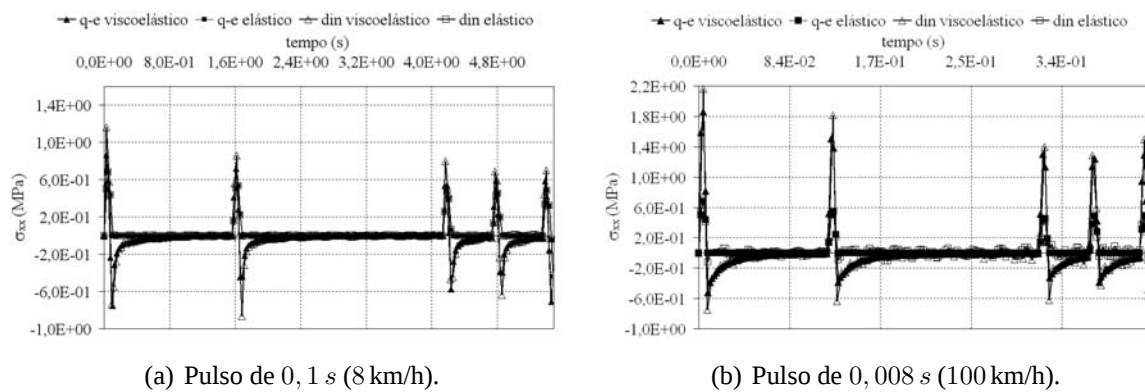


Figura 5.13: Tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada de AAUQ para o 2S3.

5.2 Análise quantitativa da influência da consideração de forças inerciais (análise dinâmica)

As Tabelas 5.1 e 5.2 apresentam os valores máximos dos parâmetros estruturais analisados no sentido de quantificar a influência do comportamento dinâmico para os revestimentos de CBUQ e AAUQ, respectivamente. Uma coluna de diferenças relativas (Δ_r) mostra as diferenças relacionadas à consideração dinâmica. Nota-se que, o valor de (Δ_r) mostra a diferença induzida somente da consideração dinâmica em relação à quasi-estática para todas as simulações. Valores negativos representam que a consideração da análise dinâmica conduz a resultados contra a segurança.

Referindo-se ao deslocamento na camada asfáltica (d_v), a diferença entre as duas considerações (quasi-estática e dinâmica) é mais relevante quando os pulsos de menor duração são aplicados. Pode-se observar também que, para o parâmetro d_v , as considerações dinâmicas levam a uma predição contra a segurança no dimensionamento, alcançando inclusive uma Δ_r de 15% para o pulso mais rápido (0,006 s). Tomando-se os valores de d_v de todos os pulsos e análises, observa-se que os pulsos de longa duração, ou seja, pulsos relativos a velocidades menores, tal como 0,1 s, conduzem a valores superiores de deflexão, tornando estes pulsos mais importantes para a análise deste parâmetro (d_v). Somente para estes pulsos de longa duração a consideração dinâmica favorece a segurança. A partir dos valores das Δ_r , nota-se que a resposta d_v é bem mais sensível a consideração das forças inerciais, para ambos os tipos de misturas.

No caso das tensões horizontais (σ_{xx}) no fundo da camada asfáltica, apesar da não consideração das forças inerciais (dinâmica) na análise levar qualitativamente a resultados contra a segurança, estas diferenças, quantitativamente, atingem maior significância para a mistura de AAUQ ($\Delta_r = -6,8\%$ para o pulso de 0,006 s). É importante notar que, contrariamente ao que acontece para o parâmetro d_v , pulsos mais curtos induzem a valores maiores para σ_{xx} , onde velocidades entre 100 km/h e 130 km/h, apesar de fora de regulamentação, podem propiciar altos valores de tração no fundo do revestimento. O estudo de Evangelista-Junior et al. (2005) mostra que a diferença entre as respostas entre um pulso de 0,01 s é maior que duas vezes o valor de um pulso de 0,1 s ($\Delta_r = 88\%$), para este parâmetro (σ_{xx}). Consequentemente, esta resposta é mais sensível para a velocidade do carregamento aplicado e também à consideração viscoelástica da mistura asfáltica.

Os resultados observados para a tensão vertical (σ_{yy}) no topo do subleito mostram que este parâmetro é bem mais susceptível à consideração da análise dinâmica. Diferenças relativas, da ordem de 13% (contra a segurança), foram encontradas para os pulsos mais curtos, (0,006 s) para ambas as misturas.

Os valores da Tabela 5.1 mostram que as diferenças entre as análises quasi-estáticas e dinâmicas são independentes do modelo constitutivo adotado para a camada asfáltica

(elástico ou viscoelástico) e para o tipo de material (tipo de mistura) considerado, para os três parâmetros analisados.

Tabela 5.1: Parâmetros estruturais das análises quasi-estática (q-e) e dinâmica (din) para as condições de elasticidade (el.) e viscoelasticidade (vis.) do revestimento de CBUQ.

Carregamento e análise	d_v (cm)			σ_{xx} (MPa)			σ_{yy} (MPa)		
	q-e	din	Δ_r (%)	q-e	din	Δ_r (%)	q-e	din	Δ_r (%)
0, 1 s el.	0,034	0,035	-3,3	0,954	0,955	-0,2	0,031	0,031	-0,6
0, 1 s vis.	0,034	0,035	-3,4	0,940	0,942	-0,3	0,031	0,031	-0,7
0,013 s el.	0,034	0,033	2,7	0,954	0,960	-0,7	0,031	0,033	-5,7
0,013 s vis.	0,033	0,033	2,5	1,084	1,097	-1,3	0,030	0,032	-5,5
0,008 s el.	0,034	0,031	9,1	0,954	0,983	-3,0	0,031	0,034	-9,0
0,008 s vis.	0,033	0,030	9,0	1,117	1,157	-3,5	0,030	0,033	-8,9
0,006 s el.	0,034	0,029	14,2	0,954	1,003	-5,0	0,031	0,035	-13,5
0,006 s vis.	0,033	0,029	14,1	1,133	1,194	-5,3	0,030	0,035	-13,4

Tabela 5.2: Parâmetros estruturais das análises quasi-estática (q-e) e dinâmica (din) para as condições de elasticidade (el.) e viscoelasticidade (vis.) do revestimento de AAUQ.

Carregamento e análise	d_v (cm)			σ_{xx} (MPa)			σ_{yy} (MPa)		
	q-e	din	Δ_r (%)	q-e	din	Δ_r (%)	q-e	din	Δ_r (%)
0, 1 s el.	0,036	0,038	-3,5	0,459	0,461	-0,3	0,032	0,032	-0,4
0, 1 s vis.	0,036	0,038	-3,0	0,590	0,615	-4,1	0,032	0,032	-0,4
0,013 s el.	0,036	0,035	2,6	0,459	0,460	-0,1	0,032	0,034	-6,0
0,013 s vis.	0,033	0,032	2,0	1,200	1,230	-2,6	0,030	0,032	-5,3
0,008 s el.	0,036	0,033	8,9	0,459	0,476	-3,6	0,032	0,035	-9,1
0,008 s vis.	0,033	0,030	8,4	1,300	1,360	-4,9	0,030	0,033	-8,7
0,006 s el.	0,036	0,032	13,7	0,459	0,492	-6,8	0,032	0,037	-13,3
0,006 s vis.	0,032	0,028	13,5	1,350	1,450	-6,8	0,030	0,034	-12,9

5.3 Análise quantitativa dos efeitos dos fatores (planejamento fatorial)

A seção anterior, apesar de um embasamento quantitativo, indicou a influência da consideração das análises dinâmicas nas respostas estruturais do pavimento, não discutindo a influência das outras considerações assumidas, como também interação entre elas na resposta mecânica final do pavimento investigado. Desta forma, apenas com as técnicas do planejamento fatorial se pode tirar conclusões sobre a interação de todos os fatores e sua conseqüente sinergia.

A Tabela 5.3 indica os níveis baixos (–) e altos (+), para cada uma das combinações

realizadas, para os 4 fatores analisados, quando se considera a deflexão no topo do revestimento (d_v). Neste tipo de tabela, a primeira coluna representa a nomenclatura das combinações efetuadas (ver Figura 2.19), enquanto que as colunas 2 à 5 (fatores) apresentam em que nível cada fator foi considerado (ver Tabela 4.6), de modo a produzir o resultado apresentado na coluna 6. A simulação da combinação (1) apresentou $d_v = 3,40 \times 10^{-2}$ quando todos os fatores – foram simulados, ou seja, um pulso de 0,1 s (6 km/h) foi aplicado em uma análise quasi-estática (sem consideração das forças inerciais), com o revestimento considerado como a mistura de CBUQ com comportamento elástico linear ($MR = 3267$ MPa).

Tabela 5.3: Resultados de d_v para os níveis e fatores considerados.

Combinações	Fatores				d_v (cm)
	(A)	(B)	(C)	(D)	
(1)	–	–	–	–	$3,40 \times 10^{-2}$
a	+	–	–	–	$3,52 \times 10^{-2}$
b	–	+	–	–	$3,41 \times 10^{-2}$
ab	+	+	–	–	$3,52 \times 10^{-2}$
c	–	–	+	–	$3,40 \times 10^{-2}$
ac	+	–	+	–	$3,10 \times 10^{-2}$
bc	–	+	+	–	$3,32 \times 10^{-2}$
abc	+	+	+	–	$3,04 \times 10^{-2}$
d	–	–	–	+	$3,65 \times 10^{-2}$
ad	+	–	–	+	$3,78 \times 10^{-2}$
bd	–	+	–	+	$3,65 \times 10^{-2}$
abd	+	+	–	+	$3,76 \times 10^{-2}$
cd	–	–	+	+	$3,65 \times 10^{-2}$
acd	+	–	+	+	$3,34 \times 10^{-2}$
bcd	–	+	+	+	$3,26 \times 10^{-2}$
abcd	+	+	+	+	$3,00 \times 10^{-2}$

A partir dos valores de d_v da Tabela 5.3, e dos conceitos expostos na Seção 2.6, os contrastes e os efeitos principais e de interação foram determinados. A Tabela 5.4 apresenta estes valores, bem como seu efeito médio ($\bar{E}f$), definido como a razão, em porcentagem, entre o Ef para cada fator principal ou interação, e a média aritmética das respostas obtidas de todas as combinações para o parâmetro analisado (neste caso d_v). Desta forma, temos uma porcentagem de quanto cada fator ou interação afeta a resposta de cada parâmetro analisado. É importante salientar que os efeitos negativos indicam que ao variar o fator de seu nível – para +, a resposta (neste caso d_v) decresceu.

A partir dos valores dos efeitos absolutos (Ef) e médios ($\bar{E}f$) dos fatores para a deflexão no topo do revestimento (d_v), nota-se que os efeitos médios principais dos fatores A (consideração quasi-estática ou dinâmica) e D (diferentes misturas, AAUQ e CBUQ) são

Tabela 5.4: Efeitos principais e interações dos fatores para d_v .

Fator	Contraste (cm)	E_f (cm)	E_f (%)
A	$-6,79 \times 10^{-3}$	$-8,48 \times 10^{-4}$	-2,48
B	$-8,63 \times 10^{-3}$	$-1,08 \times 10^{-3}$	-3,15
AB	$4,43 \times 10^{-4}$	$5,54 \times 10^{-5}$	0,16
C	$-2,58 \times 10^{-2}$	$-3,22 \times 10^{-3}$	-9,42
AC	$-1,63 \times 10^{-2}$	$-2,04 \times 10^{-3}$	-5,97
BC	$-8,71 \times 10^{-3}$	$-1,09 \times 10^{-3}$	-0,95
ABC	$7,77 \times 10^{-4}$	$9,71 \times 10^{-5}$	0,34
D	$1,37 \times 10^{-2}$	$1,72 \times 10^{-3}$	1,57
AD	$2,21 \times 10^{-4}$	$2,76 \times 10^{-5}$	0,12
BD	$-6,08 \times 10^{-3}$	$-7,59 \times 10^{-4}$	1,21
ABD	$1,76 \times 10^{-4}$	$2,20 \times 10^{-5}$	0,13
CD	$-6,01 \times 10^{-3}$	$-7,51 \times 10^{-4}$	1,09
ACD	$-1,95 \times 10^{-5}$	$-2,44 \times 10^{-6}$	-0,02
BCD	$-5,46 \times 10^{-3}$	$-6,82 \times 10^{-4}$	-0,75
ABCD	$5,34 \times 10^{-4}$	$6,68 \times 10^{-5}$	1,28

os menores valores encontrados entre os efeitos principais ($-2,48$ e $1,57$, respectivamente). Isto indica que estas considerações pouco influenciarão o resultado final de d_v . Este resultado confirma a discussão qualitativa e quantitativa das seções anteriores que indicou que a consideração dinâmica era contra a segurança, já que esta diminui o valor final de d_v . O efeito variação dos pulsos nas análises (fator C) mostrou-se o mais significativo dentre os efeitos principais, em que, velocidades maiores tendem a diminuir o valor de d_v observado, indicando que pulsos de curta duração não são a favor da segurança.

Estudando os efeitos das interações entre os fatores, observa-se que a interação AC , que é a interação entre a consideração ou não das forças inerciais (análises dinâmicas ou quasi-estáticas) com a variação da duração dos pulsos da análise (velocidades dos veículos sobre o pavimento), é bem mais significativa que o efeito principal da consideração dinâmica. Isto é um resultado esperado, tendo em vista que o efeito dinâmico tende a ser bem mais significativo para velocidades de carregamento altas. O importante desta observação é que, sendo as velocidades de carregamento (variação da duração dos pulsos) mais importantes e impactantes para as deflexões d_v dentre todos os fatores estudados, a consideração das forças inerciais termina sendo mais efetiva e importante na observação da resposta final de d_v , mesmo com sua consideração isolada pouco efetiva nesta resposta. Isto é preconizado por Montgomery (1997), que atenta para o fato de que o conhecimento do efeito de uma interação pode ser bem mais importante que o conhecimento dos efeitos principais isolados.

Analisando, o planejamento fatorial para as tensões de tração no fundo da camada de revestimento (σ_{xx}), tem-se a Tabela 5.5 que fornece os valores deste parâmetro para cada

combinação dos níveis fatoriais nas simulações realizadas. A Tabela 5.6 mostra os valores para os efeitos.

Tabela 5.5: Resultados de σ_{xx} para os níveis e fatores considerados.

Combinações	Fatores				σ_{xx} (MPa)
	(A)	(B)	(C)	(D)	
(1)	—	—	—	—	$9,54 \times 10^{-1}$
a	—	—	—	—	$9,55 \times 10^{-1}$
b	+	+	—	—	$9,40 \times 10^{-1}$
ab	+	+	—	—	$9,42 \times 10^{-1}$
c	—	—	+	—	$9,54 \times 10^{-1}$
ac	+	—	+	—	$9,83 \times 10^{-1}$
bc	—	+	+	—	$1,12 \times 10^{+0}$
abc	+	+	+	—	$1,16 \times 10^{+0}$
d	—	—	—	+	$4,59 \times 10^{-1}$
ad	+	—	—	+	$4,61 \times 10^{-1}$
bd	—	+	—	+	$5,90 \times 10^{-1}$
abd	+	+	—	+	$6,15 \times 10^{-1}$
cd	—	—	+	+	$4,59 \times 10^{-1}$
acd	+	—	+	+	$4,76 \times 10^{-1}$
bcd	—	+	+	+	$1,30 \times 10^{+0}$
abcd	+	+	+	+	$1,36 \times 10^{+0}$

Tabela 5.6: Efeitos principais e interações dos fatores para σ_{xx} .

Fator	Contraste (MPa)	Ef (MPa)	Ef (%)
A	$1,81 \times 10^{-1}$	$2,27 \times 10^{-2}$	2,64
B	$2,32 \times 10^{+0}$	$2,90 \times 10^{-1}$	34,04
AB	$8,29 \times 10^{-2}$	$1,04 \times 10^{-2}$	1,23
C	$1,89 \times 10^{+0}$	$2,36 \times 10^{-1}$	28,26
AC	$1,22 \times 10^{-1}$	$1,52 \times 10^{-2}$	1,84
BC	$1,80 \times 10^{+0}$	$2,26 \times 10^{-1}$	27,13
ABC	$3,52 \times 10^{-2}$	$4,41 \times 10^{-3}$	0,66
D	$-2,28 \times 10^{+0}$	$-2,85 \times 10^{-1}$	-43,41
AD	$3,47 \times 10^{-2}$	$4,34 \times 10^{-3}$	0,91
BD	$1,70 \times 10^{+0}$	$2,13 \times 10^{-1}$	59,88
ABD	$5,97 \times 10^{-2}$	$7,46 \times 10^{-3}$	1,86
CD	$1,05 \times 10^{+0}$	$1,32 \times 10^{-1}$	49,16
ACD	$-9,48 \times 10^{-3}$	$-1,19 \times 10^{-3}$	-0,40
BCD	$1,08 \times 10^{+0}$	$1,35 \times 10^{-1}$	39,06
ABCD	$1,55 \times 10^{-2}$	$1,94 \times 10^{-3}$	0,88

Analisando os efeitos principais, observa-se que as análises dinâmicas (fator A) não afetam significativamente os valores de σ_{xx} ($\bar{E}f_A = 2,64\%$). Com relação ao alto efeito

para o fator D ($\bar{E}f_D = -43,41\%$), que representa o tipo de mistura usado como material do revestimento (AAUQ e CBUQ), podemos dizer que, como esperado, ao usarmos misturas de AAUQ, cujo esqueleto mineral é composto por apenas agregados miúdos, tende-se a diminuir bastante o valor de σ_{xx} . Isto, dentre várias razões, pode ser explicado pela própria diferença de rigidez entre as duas misturas observadas pelos valores de MR (Tabela 4.5) e pelas funções viscoelástica $D(t)$ e $E(t)$ como mostra as Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente. O importante a observar aqui são os efeitos principais para os fatores B e C e suas interações com os outros fatores. Examinando o fator B , vemos que a consideração do comportamento viscoelástico da camada de revestimento aumenta a resposta média de σ_{xx} em torno de 34,04%, ou seja, para o caso da estrutura analisada, uma simples consideração do comportamento do revestimento como elástico linear leva a um aumento médio das tensões de tração de 34,04% contra a segurança, já que o comportamento viscoelástico linear das misturas asfálticas é bem mais realista. A velocidade de passagem dos veículos no pavimento também tem grande influência para as tensões σ_{xx} . Como já observado, na análise qualitativa, pulsos mais rápidos (velocidade maior de passagem de veículo) induz maiores valores ($\bar{E}f_C = 28,26\%$) para σ_{xx} . Aqui também, este efeito principal também não favorece a segurança.

Analisando o valor de $\bar{E}f_{BD} = 59,88\%$, nota-se que, para misturas com uma inclinação n da região de transição da função $D(t)$ elevada, como o caso da mistura de AAUQ, não podem deixar de serem consideradas de comportamento viscoelástico, tendo em vista que a interação entre a consideração do comportamento e o tipo de mistura aumentam em demasiado o valor de σ_{xx} . Um grande efeito é esperado pela interação entre o comportamento constitutivo e os tempos dos pulsos, uma vez que os materiais viscoelásticos em sua essência dependem da taxa de aplicação das solicitações, o que é confirmado por um $\bar{E}f_{BC} = 27,13\%$. Este tipo de característica dos materiais viscoelásticos é evidenciado pelo alto efeito da interação entre o tipo de misturas (AAUQ e CBUQ) e os pulsos aplicados $\bar{E}f_{CD} = 49,16\%$. Como consequência, o efeito da interação destes 3 fatores, B , C e D , também expressa um relevante aumento no valor das tensões de tração. Vale ainda ressaltar que, a consideração dinâmica nas análises de pavimentos, mesmo através de suas interações com os outros fatores, não possui nenhum efeito relevante para o valor final de σ_{xx} . Lembrando ainda que, com exceção do efeito do tipo de mistura Ef_D , todos os efeitos apresentados na Tabela 5.6 levam a não consideração de segurança pra fins de valores de σ_{xx} para projeto.

A Tabela 5.7 mostra os resultados para os valores de σ_{yy} , para cada simulação realizada e a Tabela 5.8 apresenta os efeitos dos fatores nas análises. O fator com maior efeito na resposta da tensão de compressão (σ_{yy}) no topo do subleito foi, como observado nas seções anteriores, o efeito da consideração das forças inerciais (dinâmico) aumentando estas

tensões em 4,78% em média. As análises dinâmicas apesar da pouca significância quantitativa, contribuem de forma que sua não consideração seja contra a segurança. O efeito óbvio da interação entre os fatores A e C foi observado ($\bar{E}f_{AC} = 4,21\%$). Analogamente aos efeitos produzidos nos valores de d_v , a consideração do comportamento viscoelástico linear do revestimento levou a menores valores de σ_{yy} . Nenhum outro efeito proveniente das interações pode ser considerado relevante.

Tabela 5.7: Resultados de σ_{yy} para os níveis e fatores considerados.

Combinações	Fatores				σ_{yy} (MPa)
	(A)	(B)	(C)	(D)	
(1)	—	—	—	—	$3,09 \times 10^{-2}$
a	+	—	—	—	$3,10 \times 10^{-2}$
b	—	+	—	—	$3,09 \times 10^{-2}$
ab	+	+	—	—	$3,11 \times 10^{-2}$
c	—	—	+	—	$3,09 \times 10^{-2}$
ac	+	—	+	—	$3,38 \times 10^{-2}$
bc	—	+	+	—	$3,03 \times 10^{-2}$
abc	+	+	+	—	$3,32 \times 10^{-2}$
d	—	—	—	+	$3,24 \times 10^{-2}$
ad	+	—	—	+	$3,25 \times 10^{-2}$
bd	—	+	—	+	$3,24 \times 10^{-2}$
abd	+	+	—	+	$3,25 \times 10^{-2}$
cd	—	—	+	+	$3,24 \times 10^{-2}$
acd	+	—	+	+	$3,55 \times 10^{-2}$
bcd	—	+	+	+	$2,99 \times 10^{-2}$
abcd	+	+	+	+	$3,27 \times 10^{-2}$

É importante observar que, uma análise fatorial completa é realizada quando um teste de hipóteses sobre a significância dos efeitos é realizada, por meio de uma análise de variância (Montgomery e Runger, 1999). Para as simulações em questão isto não foi possível devido ao fato de que as respostas (d_v , σ_{xx} e σ_{yy}) advindas das simulações do comportamento mecânico do pavimento não são variáveis aleatórias (hipótese básica de todo teste de hipóteses), e sim, valores determinísticos (resposta única e invariável), já que tratam-se de modelos. Desta forma, o planejamento fatorial apresentado serviu apenas para uma noção quantitativa dos efeitos (assumida a linearidade entre os níveis variados) destes fatores nas respostas estruturais estudadas.

Tabela 5.8: Efeitos principais e interações dos fatores para σ_{yy} .

Fator	Contraste (MPa)	Ef (MPa)	Ef (%)
A	$1,22 \times 10^{-2}$	$1,53 \times 10^{-3}$	4,78
B	$-6,40 \times 10^{-3}$	$-8,00 \times 10^{-4}$	-2,49
AB	$-4,58 \times 10^{-4}$	$-5,72 \times 10^{-5}$	-0,18
C	$4,90 \times 10^{-3}$	$6,12 \times 10^{-4}$	1,90
AC	$1,09 \times 10^{-2}$	$1,36 \times 10^{-3}$	4,21
BC	$-6,44 \times 10^{-3}$	$-8,05 \times 10^{-4}$	-0,71
ABC	$-4,45 \times 10^{-4}$	$-5,57 \times 10^{-5}$	-0,21
D	$8,25 \times 10^{-3}$	$1,03 \times 10^{-3}$	0,96
AD	$-4,52 \times 10^{-5}$	$-5,65 \times 10^{-6}$	-0,03
BD	$-4,46 \times 10^{-3}$	$-5,58 \times 10^{-4}$	0,87
ABD	$-3,26 \times 10^{-4}$	$-4,07 \times 10^{-5}$	-0,25
CD	$-3,53 \times 10^{-3}$	$-4,41 \times 10^{-4}$	0,63
ACD	$2,36 \times 10^{-4}$	$2,95 \times 10^{-5}$	0,27
BCD	$-4,01 \times 10^{-3}$	$-5,01 \times 10^{-4}$	-0,55
ABCD	$-2,46 \times 10^{-4}$	$-3,08 \times 10^{-5}$	-0,59

Capítulo 6

Considerações finais

No presente trabalho foi formulado um algoritmo para a solução de equilíbrio dinâmico em meios viscoelásticos lineares com base no Método da Aceleração Média Constante da família dos algoritmos de Newmark. Este algoritmo foi implementado no programa computacional CAP3D que é um programa, baseado no MEF, em Programação Orientada a Objetos (POO), e vem sendo utilizado para análises estruturais em pavimentos. Apesar da utilização da formulação aqui apresentada ser relativa a análises de pavimentos asfálticos, a mesma formulação pode ser usada para quaisquer tipos de estrutura, geometria e condições de contorno devido à flexibilidade do MEF e a generalização da implementação obtida pelo uso da Orientação a Objetos.

O presente estudo principalmente mostra a importância da consideração das forças inerciais (análises dinâmicas) na análise de tensões e deformações de pavimentos asfálticos. Os resultados das simulações das análises dinâmicas foram comparados com os resultados advindos de análises quasi-estáticas (análise no tempo sem a consideração de forças inerciais) para dois tipos de misturas (AAUQ e CBUQ) consideradas como material de revestimento, ora de comportamento elástico, ora viscoelástico linear.

As simulações realizadas forneceram informações sobre três parâmetros usados no projeto de pavimentos: *(i)* deslocamentos verticais no topo da camada superficial asfáltica (d_v); *(ii)* tensão de tração no fundo da camada superficial asfáltica (σ_{xx}) e *(iii)* tensão de compressão (σ_{yy}) no topo do subleito. As simulações mostraram a influência, não somente da consideração dinâmica nas análises, mas também do comportamento constitutivo da camada de revestimento (considerada elástica ou viscoelástica), pulsos de carregamento (simulando a velocidade de passagem dos veículos) e tipo de mistura.

Quando a análise dinâmica e o comportamento viscoelástico da camada asfáltica são considerados, deve-se oferecer uma maior atenção à duração do carregamento, isto porque a tensão horizontal (σ_{xx}) no fundo da camada asfáltica apresenta grande sensibilidade a estas considerações, sendo os seus valores crescentes para pulsos de duração mais curta. Desta forma, a definição do carregamento (forma e duração) para todos os parâmetros estruturais importantes para o projeto de pavimentos deve ser melhor discutida, pois durações de carregamento mais longas (velocidade menor do veículo) afetam d_v , enquanto pulsos de duração mais curta (velocidade maior do veículo) afetam sobremaneira σ_{xx} e σ_{yy} . A influência das velocidades de carregamento explicam, de certa forma, os principais problemas encontra-

dos nos pavimentos asfálticos, onde as deformações permanentes dos pavimentos urbanos, podem ser explicadas pelas velocidades inferiores que os veículos trafegam nas cidades, afetando sobremaneira as deflexões d_v . Já no caso dos pavimentos rodoviários, as velocidades são maiores, e a fadiga do revestimento é o principal defeito, o que pode ser explicado pelo maior valor induzido de σ_{xx} .

O planejamento fatorial realizado mostrou-se eficiente ao quantificar os efeitos absolutos e médios da variação de cada fator nas respostas estruturais em estudo (d_v , σ_{xx} e σ_{yy}). Através da análise fatorial, podemos ver que o conhecimento do efeito de uma interação pode ser mais importante do que o conhecimento dos efeitos principais isolados. Ou seja, sendo as velocidades de carregamento (variação da duração dos pulsos) bem mais importantes e impactantes para as deflexões d_v , dentre todos os fatores estudados, a consideração das forças inerciais acaba sendo bem mais efetiva e importante na observação da resposta final de d_v , apesar do baixo valor de seu efeito considerado isoladamente.

As análises fatoriais permitiram mostrar que nas considerações de análises realizadas atualmente (NCHRP, 2004; Medina e Motta, 2005), apesar de assumida a não-linearidade dos materiais granulares, o revestimento é assumidamente elástico, as forças inerciais são negligenciadas e os carregamentos são, em sua grande maioria, estáticos, podendo muitas vezes ser não conservadoras, ou seja, contra a segurança. Como exemplo cita-se os resultados encontrados para a tensão de tração no fundo do revestimento σ_{xx} , onde a não consideração de certos aspectos, tais como a viscoelasticidade da camada de revestimento e sua interação com outros fatores, pode mascarar a predição destas tensões entre 30% e 60%, o que é bastante significativo para as considerações de projeto.

Análises considerando a passagem múltipla dos diversos eixos da configuração completa de veículos mostraram que não existe a superposição temporal dos efeitos da passagem de uma roda de cada eixo para pulsos de duração maiores que 0,008 s para ambas configurações de veículos analisadas (2C e 2S3), tipos de revestimento (AAUQ e CBUQ), tipos de modelos constitutivos (elástico e viscoelástico) e tipos de análise (quasi-estática e dinâmica). Desta forma, todas as análises e conclusões considerando a passagem de uma única roda são válidas para estas a passagem múltipla de rodas.

No presente trabalho também foram desenvolvidos métodos alternativos para a regressão e interconversão de funções viscoelásticas. Os algoritmos propostos utilizam princípios de otimização de forma que, a minimização dos erros entre a função experimental e a regredida fosse alcançada para o caso da regressão das propriedades em termos da série de Prony. Para o caso da interconversão, a minimização dos erros entre a função regredida, $D(t)$ ou $E(t)$ e a requerida, $E(t)$ ou $D(t)$, é obtida eficientemente.

Dentre as limitações da presente dissertação, destacam-se:

- a consideração axissimétrica na análise em elementos finitos, limitando as análises à

passagem de apenas uma roda de cada eixo, assumindo uma área de contato circular;

- consideração da elasticidade das camadas granulares, tendo em vista que estes materiais são, em sua grande maioria, elásticos não-lineares ou elasto-plásticos;
- não consideração da variabilidade espacial do carregamento, uma vez que, somente a velocidade é simulada, e tem-se, para situações reais, cargas móveis na superfície do pavimento.

6.1 Sugestões de trabalhos futuros

Como sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros, cita-se:

- consideração da tridimensionalidade da estrutura do pavimento de tal forma que as diferentes configurações dos eixos dos veículos sejam consideradas;
- implementação de cargas móveis nas análises dinâmicas, já que a simulação do efeito de velocidade por meio de pulsos é apenas uma aproximação;
- consideração do comportamento das camadas granulares como elásticos não-lineares (modelos resilientes) ou plásticos;
- análise do planejamento fatorial considerando a variação de diferentes fatores, tais como espessura da camada de revestimento, não-linearidade das camadas granulares, efeito de várias combinações de eixos (e.g. *tandem*), variação da forma das cargas (não-uniformidade), dentre outros;
- utilização do planejamento fatorial com o intuito de otimizar o dimensionamento de pavimentos asfálticos, analisando os efeitos de diferentes misturas nas respostas estruturais significantes ao dimensionamento;
- estudos de comparação entre valores de deflexão (d_v) obtidos em campo e os simulados numericamente, de modo a se ter uma idéia da real influência das considerações inerciais;
- utilização do algoritmo implementado para simulações numéricas de ensaios laboratoriais, tais como o módulo complexo, E^* , de modo a analisar a influência dos efeitos inerciais nos resultados finais;

Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A., 1972. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover, New York, NY, USA, 9th edition.
- ADINA, 2001. Adina - finite element computer program, theory and —modeling guide. Technical Report Volume 1 - ARD 01-7, The Institution of Transportation and Traffic Engineering.
- Ahlborn, G., 1972. *ELSYM, Computer Program for Determining Stresses and Deformations in Five Layer Elastic Systems*. University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA.
- ANFAVEA, 2001. Anuário estatístico. associação nacional dos fabricantes de veículos automotores.
- Argyris, J. H. & Kelsey, S., 1960. *Energy Theorems and Structural Analysis*. Butterworth Scientific Publications, London, UK.
- ASTM, 1982. *ASTM D 4123 - Standard Method of Indirect Tension Test for Resilient Modulus of Bituminous Mixtures*. American Society of Testing and Materials.
- Barksdale, R. D. & Hicks, R. G., 1973. Material characterization and layered theory for use in fatigue analyses. Technical Report 140, Highway Research Board, Washington, D.C., USA.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- Baumgaertel, M. & Winter, H. H., 1989. Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data. *Rheologica Acta*, vol. 28, pp. 511–519.
- Berthelot, C. F., Allen, D. H., & Searcy, C. R., 2003. Method for performing accelerated characterization of viscoelastic constitutive behavior of asphaltic concrete. vol. 15, n. 5, pp. 496–505.
- Bhatti, M. A. & Stoner, J. W., 1998. Nonlinear pavement distress model using dynamic vehicle loads. vol. 4, n. 2, pp. 71–78.
- Brito, L. A. T., 2006. Avaliação e análise paramétrica do ensaio de compressão diametral sob cargas repetidas em misturas asfálticas. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Departamento de Engenharia Civil.

- Brown, S. F., 1973. Determination of Young's modulus for bituminous materials in pavement design. *Highway Research Record*, vol. 431, pp. 38–49.
- Burmister, D. M., 1943. The theory of stresses and displacements in layered systems and applications to the design of airport runways. In *Highway Research Board*, volume 23, pp. 126–144.
- Burmister, D. M., 1945. The general theory of stresses and displacements in layered soil systems. *Journal of Applied Physics*, vol. 16, pp. 84–94.
- Carvalho, M. T. M., 1995. Uma estratégia para desenvolvimento de aplicações configuráveis em mecânica computacional.
- Cho, I. H., MaCullough, B. F., & J. Weissmann, 1996. Considerations on finite element method application in pavement structural analysis. vol. 1539, pp. 96–101.
- Christensen, R. M., 1982. *Theory of Viscoelasticity*. Dover, New York, NY, USA, 2nd edition.
- Clough, R. W., 1960. The finite element method in plane stress analysis. In *Second ASCE Conference on Electronic Computation*, pp. 345–378.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., & Plesha, M. E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 3rd edition.
- Cost, T. L. & Becker, E. B., 1970. A multidata method of approximate laplace transform inversion. vol. 2, pp. 207–219.
- Dehlen, G. L., 1969. *Effect of Nonlinear Material on the Behavior of Pavements Subject to Traffic Loads*. PhD thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA.
- DNER, 1994. *DNER-ME 133/94: Determinação do Módulo de Resiliência de Misturas Betuminosas*. Departamento Nacional de Estradas de Rodagem, Brasil.
- DNER, 1995. *DNER-ME 43/95: Misturas Betuminosas a Quente - ensaio Marshall*. Departamento Nacional de Estradas de Rodagem, Brasil.
- DNER, 1997a. *DNER-ES 312/97: Pavimentação - areia asfalto a quente*. Departamento Nacional de Estradas de Rodagem, Brasil.
- DNER, 1997b. *DNER-ES 313/97: Pavimentação - concreto betuminoso*. Departamento Nacional de Estradas de Rodagem, Brasil.

- DNER, 1998. *DNER-ME 83/98: Agregados - análise granulométrica*. Departamento Nacional de Estradas de Rodagem, Brasil.
- Duncan, J. M., Monismith, C. L., & Wilson, E. L., 1968. Finite element analysis of pavements. *Highway Research Record*, vol. 228.
- Emri, I. & Tschoegl, N. W., 1993. Generating line spectra from experimental responses. part i: relaxation modulus and creep compliance. *Rheologica Acta*, vol. 32, pp. 311–321.
- Evangelista-Junior, F., Parente Junior, E., Holanda, A. S., Araújo, T. D. P., & Soares, J. B., 2006. Dynamic analysis of asphaltic pavements. In *Accepted for publication in XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, Brasília, Distrito Federal.
- Evangelista-Junior, F., Parente Junior, E., & Soares, J. B., 2005. Viscoelastic and elastic structural analysis of flexible pavements. In *XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, Guarapará, Espírito Santo.
- Fenves, G. L., 1990. Object-oriented programming for engineering software development. *Engineers with Computers*, vol. 6, n. 3, pp. 1–15.
- Ferry, J. D., 1950. Mechanical properties of substances of high molecular weight; vi. dispersion in concentrated polymer solutions and its dependence on temperature and concentration. *Journal of American Chemical Society*, vol. 72, n. 3746, pp. 51–66.
- Ferry, J. D., 1980. *Viscoelastic Properties of Polymers*. Wiley & Sons, New York, NY, USA, 3rd edition.
- Gajewski, R. R. & Kowalczyk, T., 1996. A prototype object-oriented finite element method program: Class hierarchy and graphic user interface. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, vol. .
- GAO, 1997. Transportation infrastructure: Highway pavement design guide is outdated. Technical report, United States General Accounting Office, Gaithersburg, MD USA.
- Goodrich, J. L., 1991. Asphaltic binder rheology, asphalt concrete rheology and asphalt concrete mix properties. *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists, AAPT*, vol. 60, pp. 80–120.
- Guimarães, L. S. G., 1992. Disciplina de programação orientada a objetos para análise e visualização bidimensional de modelos de elementos finitos. Master's thesis, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil.

- Gunaratne, M. & Sanders, O., 1996. Iii - response of layered elastic medium to a moving strip load. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 20, pp. 191–208.
- Hammerand, D. C., 1999. *Geometrically-Linear and Nonlinear Analysis of Linear Viscoelastic Composites Using the Finite Element Method*. PhD thesis, Virginia Polytechnic and State University, Blacksburg, VA, USA.
- Hardy, M. S. A. & Cebon, D., 1993. An experimental comparison of air and steel lorry suspensions in braking. Technical Report CUED/C-MECH/TR57, Cambridge University Engineering Department, UK.
- Hardy, M. S. A. & Cebon, D., 1994. Importance of speed and frequency in flexible pavement response. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 120, n. 3, pp. 463–482.
- Harichandran, R. W., Yeh, M.-S., & Baladi, G., 1989. Mich-pave users manual, final report. Technical Report FHWA-MI-RD-89-023, Department of Civil and Environmental Engineering, Michigan State University, East Lansing, MI.
- Helwany, S., Dyer, J., & Leidy, J., 1998. Finite element analysis of flexible pavements. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, vol. 124, n. 5, pp. 491–499.
- Hicks, R. G., 1970. *Factores Influencing of Resilient Properties of Granular Materials*. PhD thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA.
- Hjelmsted, K. D., Kim, J., & Zuo, Q., 1997. Finite element procedures for three dimensional pavement analysis. In *ASCE Airfield Pavement Conference*, pp. 125–137, Seattle, WA.
- Holanda, A. S., Parente Junior, Araújo, T. D. P., Melo, L. T. B., Evangelista-Junior, F., & Soares, J. B., 2006a. Finite element modeling of flexible pavements. In *Accepted for publication in XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, Brasília, Distrito Federal.
- Holanda, A. S., Parente Junior, Araújo, T. D. P., Melo, L. T. B., Evangelista-Junior, F., & Soares, J. B., 2006b. A object oriented system for finite element analysis of pavements. In *III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Lisbon, Portugal.
- Hopman, P. C., 1994. VEROAD: A linear visco-elastic multilayer program for the calculation of stresses, strains and displacements in asphaltic road constructions: A visco-elastic multilayer system. Technical report, Delft University of Technology, Delft University of Technology. Delft, The Netherlands.

- Huang, Y. H., 1993. *Pavement Analysis and Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Kashta, J. & Schwarzt, F. R., 1994. Calculation of discrete retardation spectra from creep data: I-method. *Rheologica Acta*, vol. 33, pp. 517–529.
- Kim, J. & Buttlar, W. G., 2002. Analysis of reflective cracking control system involving reinforced grid over base-isolated interlayer mixture. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, vol. 128, n. 4, pp. 375–384.
- Kim, Y. R., Hibbs, B. O., Lee, Y. C., & Inge, E. H., 1994. Asphalt pavement material properties affected by temperature. Technical Report Contract n. 23241-93-6, North Carolina Department of Transportation.
- Kim, Y. R. & Lee, Y.-C., 1995. Interrelationships among stiffnesses of asphalt-aggregate mixtures. *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists, AAPT*, vol. 64, pp. 575–609.
- Kim, Y. R. & Little, D. N., 1990. One-dimensional constitutive modeling of asphalt concrete. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 116, n. 4, pp. 751–772.
- Kim, Y. R., Seo, Y., King, M., & Momem, M., 2004. Dynamic modulus testing of asphalt concrete in indirect tension mode. In *Transpostation Research Board (TRB) Annual Meeting CD-ROM*, pp. 125–137, Washington, DC, USA, WA.
- Lakes, R. S., 1999. *Viscoelastic Solids*. CRC Press.
- Leaderman, H., 1943. Elastic and creep properties of filamentous materials and other high polimers. Technical report, Textile Foundation, Washington, DC, USA.
- Leaderman, H., 1958. Viscoelastic phenomena in amorphous high polymeric systems. *Rheology*, vol. 2.
- Lee, E. H. & Rogers, T. G., 1963. Solution of viscoelastic stress analysis problems using measured creep or relaxation functions. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 30, n. 1, pp. 127–133.
- Lee, H. J., 1996. *Uniaxial Constitutive Modeling of Asphalt Concrete Using Viscoelasticity and Continuum Damage Modeling*. PhD thesis, Civil Engineering Department, North Caroline University, North Caroline, NC, USA.
- Loulizi, A., Al-Qadi, I. L., Lahouar, S., & Freeman, T. E., 2002. Measurement of vertical compressive stress pulse in flexible pavements and its representation for dynamic loading tests. In *81st Transportation Research Board (TRB)*, Washington, D.C., USA.

- LSTC, 1999. *LS-DYNA Keyword Users Manual (Version 950)*. Livermore Software Technology Corporation, Livermore, CA, USA.
- Mamlouk, M. S., 1987. Dynamic analysis of multilayer pavement structures - theory, significance and verification. In *6th International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavements*, volume 1, pp. 466–474, Washington, D.C., USA.
- Mamlouk, M. S., 1997. General outlook of pavement and vehicle dynamics. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, vol. 123, n. 6, pp. 515–517.
- Martha, L. F. C. R. & Parente-Jr, E., 2002. An object-oriented framework for finite element programming. In *Fifth World Congress on Computational Mechanics*.
- McLean, D. B., 1974. *Permanent Deformation Characteristics of Asphalt Concrete*. PhD thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA.
- Medeiros-Jr, M. S. & Soares, J. B., 2006. Obtenção do módulo dinâmico a partir dos resultados de *creep*. *Revista Engenharia Civil da Universidade do Minho*, vol. Aceito para publicação.
- Medina, J. & Motta, L. M. G., 2005. *Mecânica dos Pavimentos*. COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2nd edition.
- Monismith, C. L., Souza, J., & Lysmer, J., 1988. Modern pavement design technology including dynamic loading conditions - vehicle/pavement interaction, where the truck meets the road. Technical Report SP-765, Society of Automotive Engineerings, Inc.
- Montgomery, D. C., 1997. *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 4th edition.
- Montgomery, D. C. & Runger, G. C., 1999. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 2nd edition.
- Motta, L. M. G., 1991. *Método de Dimensionamento de Pavimentos Flexíveis; Critério de Confiabilidade e Ensaio de Cargas Repetidas*. PhD thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- NCHRP, 2004. Guide for mechanistic-empirical design. Technical Report Appendix RR: Finite Element Procedures for Flexible Pavements Analysis, National Cooperative Highway Research Program (NCHRP)/Strategic Highway Research Program(SHRP).
- Park, S. W. & Kim, Y. R., 1998. Analysis of layered viscoelastic system with transient temperatures. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 124, n. 2, pp. 223–231.

- Park, S. W. & Kim, Y. R., 1999. Interconversion between relaxation modulus and creep compliance for viscoelastic solids. vol. 11, n. 1, pp. 76–81.
- Park, S. W. & Schapery, R. A., 1999. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. part i- a numerical method based on prony series. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, pp. 1653–1675.
- Raad, L. & Figueroa, J., 1980. Load response of transportation support systems. vol. 106, n. TE1.
- Rumbaugh, J., Blaha, M., Premerlani, W., Eddy, F., & Lorensen, W., 1991. *Object Oriented Modelling and Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1st edition.
- Saad, B., Mitri, H., & Poorooshasb, H., 2005. Three-dimensional dynamic analysis of flexible conventional pavement foundation. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, vol. 131, n. 6, pp. 460–468.
- Sahu, R., Panthaki, & Gerstle, W. H., 1999. An object-oriented framework for multidisciplinary, multi-physics, computational mechanics. *Engineers with Computers*, vol. 15, pp. 105–125.
- Schapery, R., 1978. Class notes in viscoelasticity. unpublished.
- Schapery, R. A., 1961. A simple collocation method for fitting viscoelastic models to experimental data. Technical Report GALCIT SM 61-23A, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA.
- Schapery, R. A., 1962. Aproximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. Technical Report GALCIT SM 62-2, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA.
- Schapery, R. A., 1984. Correspondence principles and a generalized j integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media. *International Journal of Fracture*, vol. 25, pp. 195–223.
- Sebaaly, P. E. & Mamlouk, M. S., 1988. Development of dynamic fatigue criterion. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, vol. 114.
- Shoukry, S., 1998. 3d finite element modeling for pavement analysis and design. In *First National Symposium on 3D Finite Element Modeling for Pavement Analysis and Design*, pp. 1–51, Charleston, WV,.

- SHRP, 1994a. *SHRP-A-415: Permanent Deformation Response of Asphalt Aggregate Mixes*. Strategic Highway Research Program, Washington, D.C., USA.
- SHRP, 1994b. *The SUPERPAVE Mix Design System Manual of Specifications, Test Methods, and Practices*, SHRP-A-379. Strategic Highway Research Program (SHRP) of National Research Council (NRC), Washington, DC, USA.
- Silva, P. D. E. A., 1995. Contribuição para o aperfeiçoamento do emprego do programa FEPAVE2 em estudos e projetos de pavimentos flexíveis. Master's thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Simo & Hughes, 1998. *Computational Inelasticity*. Springer.
- Soares, J. B., Motta, L. M. G., & Benevides, S. A. S., 2000. Dimensionamento mecânico de reforço considerando alternativa de base com revestimento fresado incorporado. In *Simpósio Internacional de Manutenção e Restauração de Pavimentos e Controle Tecnológico*, São Paulo, SP, Brasil.
- Soares, J. B. & Souza, F. V., 2002. Verificação do comportamento viscoelástico linear em misturas asfálticas. In *16 Encontro de Asfalto do Instituto Brasileiro de Petróleo (IBP)*.
- Souza, F. V., 2005. Modelo multi-escala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos suscetíveis ao dano. Master's thesis, Departamento de Engenharia de Transportes (DET), Universidade Federal do Ceará (UFC).
- Souza, F. V. & Soares, J. B., 2003. Efeito da consideração do comportamento viscoelástico linear do revestimento no cálculo de tensões e deslocamentos em pavimentos asfálticos. In *XVII Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes, ANPET*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Taylor, R. L., Pister, K. S., & Goudreau, G. L., 1970. Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 2, pp. 45–79.
- TeCGraf/Puc-Rio, 1992. *Mtool - Bidimensional Mesh Tool, Manual do Usuário*.
- Theisen, K. M., 2006. Aplicação do princípio da correspondência elásto-viscoelástica para previsão de deformabilidade de misturas asfálticas. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Departamento de Engenharia Civil.
- Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., & Topp, L. J., 1956. Stiffness and deflection of complex structures. *Journal of Aeronautical Science*, vol. 23, pp. 805–823.

- Uddin, W. & Ricalde, L., 2000. Nonlinear material modeling and dynamic finite element simulation of asphalt pavement. In *14th Engineering Mechanics Conference*, ASCE, Austin, TX, USA.
- Vasconcelos, K. L., 2004. Comportamento mecânico de misturas asfálticas à quente dosadas pelas metodologias marshall e superpave com diferentes granulometrias. Master's thesis, Departamento de Engenharia de Transportes (DET), Universidade Federal do Ceará (UFC).
- Vianna, A. C., 1992. Modelagem geométrica completa para modelos bidimensionais de elementos finitos. Master's thesis, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil.
- WDOT, 2006. Everstress.
- White, J. L., 1968. Finite elements in linear viscoelasticity. In *2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pp. 498–516, Dayton, OH, USA.
- White, T. D., Zaghoul, S. M., Anderson, G. L., & Smith, D. M., 1997. Pavement analysis for moving aircraft load. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, vol. 123, n. 6, pp. 436–446.
- Yoder, E. J. & Witczak, M. W., 1975. *Principles of Pavement Design*. Wiley & Sons, 2nd edition.
- Zafir, Z. R., Siddhartan, R., & Sebaaly, P. E., 1994. Dynamic pavement strains from moving traffic loads. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, vol. 120, n. 5, pp. 821–842.
- Zaghoul, S. & White, T., 1993. Use of a three-dimensional dynamic finite element program for analysis of flexible pavements. *Transportation Research Record*, vol. 1388, pp. 60–69.
- Zak, A. R., 1967. Structural analysis of realistic solid-propellant materials. *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 5, n. 3, pp. 270–275.
- Zhang, W., Drescher, A., & Newcomb, D. E., 1997. Viscoelastic analysis of diametral compression of asphalt concrete. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 123, n. 6, pp. 596–603.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., 1991. *The Finite Element Method*, volume 2. McGraw Hill, 4th edition.