



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EMANUEL MENDONÇA VIANA

HIPERSUPERFÍCIES CUJAS GEODÉSICAS TANGENTES
NÃO COBREM O ESPAÇO AMBIENTE

FORTALEZA

2012

EMANUEL MENDONÇA VIANA

HIPERSUPERFÍCIES CUJAS GEODÉSICAS TANGENTES
NÃO COBREM O ESPAÇO AMBIENTE

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática da Universidade Fede-
ral do Ceará, como requisito parcial
para obtenção de Título de Mestre em
Matemática. Área de concentração:
Geometria Diferencial.

Orientador:

Prof. Dr. Antônio Gervásio Colares.

FORTALEZA

2012

V667h Viana, Emanuel Mendonça

Hipersuperfícies cujas geodésicas tangentes não cobrem o espaço ambiente/

Emanuel Mendonça Viana. - 2012

51f.: enc.; 31 cm

Dissertação(mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Antônio Gervásio Colares.

1- Geometria Diferencial. 2. Variedades riemannianas. I. Título

CDD 516.36

À Deus, minha mãe Rita Mendonça e minha irmã
Camila Viana.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, princípio e fim da minha vida, por ser meu refúgio, minha fortaleza e por renovar minhas forças nos muitos momentos de fraqueza.

Ao meus pais Rita Mendonça e Valdésio Viana pela educação recebida desde o berço. Eles são meus alicerces. Em especial, a minha mãe, minha irmã e a Beatriz que foram ombro amigo quando muitos foram censura, foram apoio e divã nos muitos momentos difíceis, fizeram-me seguir em frente quando eu mesmo achava estar prestes a capitular, me proporcionaram momentos imprescindíveis de lazer e alegria, bem como equilíbrio necessário para chegar até aqui. A elas me faltam palavras para agradecer.

Ao meu tio Gerardo Valdisio Rodrigues Viana, pelo apoio, orientação e, principalmente, por palavras de incentivo durante o início dos meus estudos. A ele me faltam palavras para agradecer.

À Raquel Sales, sincera, delicada e que me deu muita força nessa parte final da batalha.

Agradeço também ao professor Antonio Gervásio Colares, por ter sido meu orientador (tanto na graduação quanto no mestrado), pela orientação, o incentivo, a paciência, a ajuda e colaboração para este trabalho científico. Muitos de seus valiosos conselhos (nos mais variados assuntos) ficarão para sempre gravados em minha memória. Aos professores Marcos Ferreira de Melo e Sebastião Carneiro de Almeida, pelo apoio, incentivo e por terem aceitado o convite de participar da banca.

Também agradeço aos amigos da pós-graduação em matemática da UFC, Diego Eloi, Marlon Oliveira, Leandro Pessoa, Loster Sá, Vanderson Lima pelas conversas despreocupadas e trocas de ideias sobre matemática e outros tantos assuntos. Essas conversas ajudaram-me sobre-maneira a tornar mais prazerosos o convívio e a rotina da pós-graduação. Em especial, consigno aqui meu apreço ao amigo Diego Eloi, que serviu incontáveis vezes como muro de lamentações, tendo sempre na manga uma palavra subsequente de apoio e consideração.

Agradecimentos especiais aos meus amigos, Renato Spartani, Ricardo Spartani, Paulo Spartani, Rafael Motta, Camila Sá, Fábio Motta, Hercília Diniz, Vinicius Arcelino, Rodrigo Romero, Francisca Fernandes do Vale, Marcos Venícios, Jairo Lima, José Luis Maia,

Leandro Lima que apoiaram-me nos momentos mais difíceis, em palavras e ações. Em especial, a família Spartani que tenho vocês como minha segunda família.

Não podia deixar de lembrar os professores João Lucas Marques Barbosa, Jorge Herbert, Antonio Caminha Muniz Neto, Abdênago Barros, Luquésio Petrola, Francesco Mercuri, Lev Birbrair, Afonso Oliveira, pelos belos cursos ministrados, demonstrando grande dedicação e excelente didática.

A todas as pessoas acima, e a quem mais possa minha humana falibilidade ter feito esquecer, queria deixar registrados meus mais sinceros agradecimentos.

À Andréa pela competência e agilidade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

”Há três caminhos para o fracasso: não ensinar o que sabe, não praticar o que ensina e não perguntar o que ignora”.

(São Beda)

Resumo

Seja $I : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma imersão de uma variedade conexa n -dimensional Σ em uma variedade Riemanniana completa conexa $(n + 1)$ -dimensional M sem pontos conjugados. Suponha que a união das geodésicas tangentes a I não cobrem M . Sobre essa hipótese temos dois resultados:

1. Se a cobertura universal de Σ é compacta, então M é simplesmente conexa.
2. Se I é um mergulho próprio e M é simplesmente conexa, então $I(\Sigma)$ é um gráfico normal sobre um subconjunto aberto de uma esfera geodésica. Além disso, existe um conjunto estrelado aberto $A \subset M$ tal que $\overline{A}$ é uma variedade com fronteira $I(\Sigma)$.

Palavras-chaves: Variedade Riemanniana, hipersuperfície, geodésica, conjunto estrelado.

Abstract

Let $I : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ be an immersion of an n -dimensional connected manifold Σ in an $(n + 1)$ -dimensional connected completed Riemannian manifold M without conjugate points. Assume that the union of geodesics tangent to I does not cover M . Under these hypotheses we have two results:

1. M is simply connected provided that the universal covering of Σ is compact.
2. If I is a proper embedding and M is simply connected, then $I(\Sigma)$ is a normal graph over an open subset of a geodesic sphere. Furthermore, there exists an open star-shaped set $A \subset M$ such that $\overline{A}$ is a manifold with the boundary $I(\Sigma)$.

Keywords: Riemannian manifold, hypersurface, geodesic, star-shaped set

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	14
1.1 Definições e propriedades básicas	14
2 Resultados Básicos	20
2.1 Grupo fundamental e espaços de recobrimento	20
2.1.1 Homotopia	20
2.1.2 O grupo fundamental	22
2.1.3 Espaços simplesmente conexos	25
2.1.4 Espaços de recobrimento	26
2.1.5 Teorema fundamental dos levantamentos	28
2.1.6 Homomorfismos entre recobrimentos	28
2.1.7 Automorfismos de recobrimento	30
2.2 Hipersuperfícies	32
2.3 Aplicações Próprias	32
2.4 Superfícies com bordo	33
3 Primeira e Segunda Respostas	37
3.1 Sobre imersões de uma variedade n -dimensional em um espaço euclidiano $(n + 1)$ -dimensional	37
3.2 Resultados Principais	43

Introdução

Seja $I : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma imersão de uma variedade conexa n -dimensional Σ em uma variedade Riemanniana completa conexa $(n + 1)$ -dimensional M sem pontos conjugados.

Uma condição muito forte que podemos supor é que I seja totalmente geodésica. No nosso trabalho, assumiremos uma condição mais fraca, a saber, que a união das geodésicas tangentes à I não cobrem M . Mais precisamente, seja $W = W(I)$ o conjunto dos pontos de M que não pertencem a nenhuma geodésica tangente à I .

Poderíamos perguntar em que situações podemos ter $W \neq \emptyset$. Uma importante resposta a esta questão foi dada por B. Halpern [6]. A fim de enunciar o resultado precisaremos da seguinte definição:

Definição 0.1. *Um subconjunto B de uma variedade Riemanniana completa M é dito estrelado com respeito a x_0 se $x_0 \in B$ e, para qualquer $p \in B$, existe uma única geodésica mínima normal que liga x_0 a p e que a imagem desta única geodésica está contida em B .*

Teorema 0.2 (B. Halpern [6]). *Seja $I : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, uma imersão de uma variedade fechada Σ com $W \neq \emptyset$. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. Σ é difeomorfa a n -esfera $\mathbb{S}^n$.
2. I é um mergulho.
3. Existe um único $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ conjunto estrelado aberto tal que $\partial V = I(\Sigma)$.
4. $\mathbb{R}^{n+1} - \bigcup_{p \in \Sigma} T_p = \text{int}(\text{Kernel } V)$, onde T_p é o hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$ desenhado em $I(p)$ e tangente a $I(\Sigma)$ e $\text{Kernel } V = \{p \in V / tp + (1 - t)q \in V, \forall q \in V, 0 \leq t \leq 1\}$.

Reciprocamente, se $I(\Sigma) = \partial V$, para algum conjunto estrelado aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $\text{int}(\text{Kernel } V) \neq \emptyset$, então $\bigcup_{p \in \Sigma} T_p \neq \mathbb{R}^{n+1}$.

O teorema 0.2 foi estendido por M. Beltagy [3] no caso em que M é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e sem pontos conjugados, usando o fato de que a aplicação exponencial de uma tal variedade é um difeomorfismo e, assim, aplicando-se o teorema 0.2 no espaço tangente de qualquer ponto de W . S. Alexander [2] modificou o teorema 0.2 restringindo a atenção para a união V dos espaços tangentes em pontos de sela de Σ e obteve uma conclusão mais fraca.

Observação 0.3. *Os teoremas de Halpern [6] e de Alexander [2] podem ser estendidos para o caso em que M é a esfera padrão $\mathbb{S}^{n+1}$ usando a projeção estereográfica associada com o ponto antípoda $-p$, onde $p \in W$, no caso de Halpern, e $p \in \mathbb{S}^{n+1} - V$, no caso de Alexander.*

Hilario Alencar e Katia Frensel [1] provaram que se M é um espaço forma Q_c^{n+1} e I é mínima com W sendo um conjunto aberto não-vazio, então I é totalmente geodésica. Este resultado para uma imersão mínima $I : M^2 \rightarrow Q_c^3$, $c \geq 0$, com W não-vazio foi provado por T. Hasanis e D. Koutroufiotis [5]. Outro resultado em [1] nos diz que se $\Sigma^n \subset Q_c^{n+1}$ é fechado e tem curvatura média constante com $W \neq \emptyset$, então Σ é uma esfera redonda.

O nosso próximo resultado, que pode ser encontrado em [10], diz o seguinte:

Teorema 0.4. *Seja $I : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$, $n \geq 2$, uma imersão com $W \neq \emptyset$, onde M é uma variedade Riemanniana completa, conexa e sem pontos conjugados. Se o recobrimento universal de Σ é compacto, então M é simplesmente conexa.*

Observação 0.5. *A inclusão $T^n \subset T^{n+1}$ de toros planos mostra que a hipótese da compacidade do recobrimento universal de Σ é essencial no teorema 0.4.*

O seguinte resultado é novo, mesmo no caso em que $M = \mathbb{R}^{n+1}$. Antes de enunciar o próximo teorema, que novamente pode ser encontrado em [10], precisamos da seguinte definição:

Definição 0.6. *Sejam S e X subconjuntos de uma variedade Riemanniana M , onde a inclusão $S \subset M$ é um mergulho. Dizemos que X é um gráfico normal sobre S se existe um homeomorfismo $h : S \rightarrow X$ tal que, para qualquer ponto $x \in S$, a imagem $h(x)$ é conectada a x por uma única geodésica minimizante; além disso, esta única geodésica é normal a S .*

Teorema 0.7. *Seja Σ uma hipersuperfície propriamente mergulhada numa variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e sem pontos conjugados M . Se $W \neq \emptyset$, então temos:*

1. Σ é um gráfico normal sobre um aberto de uma esfera geodésica de M ;
2. Existe um aberto A tal que A e seu fecho $\overline{A}$ são estrelados com respeito a qualquer ponto de W ; além disso, $\overline{A}$ é uma variedade que tem Σ como bordo.

Observação 0.8. *Se considerarmos a espiral $S \subset \mathbb{R}^2$ dada por $r = 1 - 2^{-\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, (em coordenadas polares), o produto $S \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mostra que a hipótese de Σ ser propriamente mergulhada é essencial no teorema 0.7.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, definiremos os conceitos e propriedades preliminares necessários para a demonstração dos dois principais teoremas da nossa dissertação e para a demonstração do teorema devido a Halpern [6].

1.1 Definições e propriedades básicas

Definição 1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

1. $\bigcup_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$
2. *Para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha \cap \mathbf{x}_\beta = A \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(A)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis.*
3. *A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).*

O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou as aplicações $\mathbf{x}_\alpha$) com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p ; $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p . Uma família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M .

A condição (3) comparece por razões puramente técnicas. Em verdade, dada uma estrutura diferenciável em M , podemos facilmente completá-la em uma máxima, agregando a ela todas as parametrizações que junto com alguma parametrização da estrutura satisfazem a condição (2).

Observação 1.2. *Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de uma maneira natural uma topologia em M . Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ é aberto de $\mathbb{R}^n$. É imediato verificar que M e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a intersecção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações $\mathbf{x}_\alpha$ são contínuas.*

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.

Nesse ponto estenderemos a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades. De agora em diante, quando indicarmos uma variedade por M^n , o índice superior n indicará a dimensão de M .

Definição 1.3. *Sejam M_1^n e M_2^m duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Decorre da condição (2) da definição 1.1 que a definição dada é independente da escolha das parametrizações. A aplicação 1.1 é chamada a expressão de φ nas parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Em seguida, estenderemos às variedades diferenciáveis a noção de vetor tangente.

Definição 1.4. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$.

Se escolhermos uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ em $p = \mathbf{x}(0)$, então o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização $\mathbf{x}$ por

$$\alpha'(0) = \sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0. \quad (1.2)$$

Essa expressão pode ser obtida em [4], página 8. Observe que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ é o vetor tangente em p à "curva coordenada":

$$x_i \rightarrow \mathbf{x}(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots).$$

A expressão 1.2 mostra que o vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Decorre também de 1.2 que o conjunto $T_p M$, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n , e que a escolha de uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ determina uma base associada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}$ em $T_p M$. A estrutura linear de $T_p M$ assim definida não depende da parametrização e $T_p M$ é dito *espaço tangente* de M em p .

Com a noção de espaço tangente podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

Proposição 1.5. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_p M_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .*

Demonstração. Vê [4], página 9. □

Definição 1.6. *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela proposição 1.5 é chamada diferencial de φ em p .*

Definição 1.7. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.*

A noção de difeomorfismo é a noção natural de equivalência entre as variedades diferenciáveis. É uma consequência imediata do teorema da função composta que se $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo, então $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é um isomorfismo para todo $p \in M_1$; em particular as dimensões de M_1 e M_2 são iguais. Uma recíproca local deste fato é o seguinte teorema.

Teorema 1.8. *Seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^n$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é um isomorfismo. Então φ é um difeomorfismo local em p*

Demonstração. A demonstração é uma aplicação imediata do teorema da função inversa do $\mathbb{R}^n$. □

Definição 1.9. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N .*

Observe-se que se $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão φ .

Na maior parte das questões puramente locais de Geometria é indiferente tratar com imersões e mergulhos. Isto provém da seguinte proposição que mostra ser toda imersão localmente (em um certo sentido) um mergulho.

Proposição 1.10. *Seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^n$, $n \leq m$, uma imersão entre as variedades M_1 e M_2 . Para todo $p \in M_1$, existe uma vizinhança $V \subset M_1$ de p tal que a restrição $\varphi|_V : M_1 \rightarrow M_2$ é um mergulho.*

Demonstração. Vê [4], página 14. □

Nesse ponto, definimos o fibrado tangente de M , onde M é uma variedade diferenciável.

Definição 1.11. *Para qualquer variedade diferenciável M , definimos o fibrado tangente de M , denotado por TM , como sendo a união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M :*

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M.$$

Podemos escrever um elemento dessa união disjunta como um par ordenado (p, v) , com $p \in M$ e $v \in T_p M$, isto é,

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}.$$

O fibrado tangente pode ser equipado com uma aplicação projeção $\pi : TM \rightarrow M$, dada por $\pi(p, v) = p$.

O fibrado tangente pode ser pensado simplesmente como uma coleção de vetores; mas ele é muito mais que isso. O nosso próximo lema mostra que TM pode ser visto como uma variedade diferenciável. Este é o espaço natural de se trabalhar quando estamos tratando de questões que envolvem posições e velocidades, como no caso da Mecânica.

Lema 1.12. *Para qualquer variedade n -dimensional M , o fibrado tangente TM tem uma topologia natural e uma estrutura diferenciável que o torna uma variedade $2n$ -dimensional diferenciável. Com essa estrutura, $\pi : TM \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável.*

Demonstração. Vê [7], página 81. □

Definição 1.13. *Uma variedade fechada é uma variedade compacta sem fronteira.*

Definiremos métrica Riemanniana, afim de conceituar variedade Riemanniana.

Definição 1.14. *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle, \rangle$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

As funções g_{ij} são chamadas *expressão da métrica Riemanniana* no sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

Definiremos agora o que seria um conjunto estrelado em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.15. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se estrelado quando contém um ponto p (o vértice) tal que o segmento de reta unindo qualquer outro ponto $x \in X$ a p está contido em X .*

Por exemplo, todo conjunto convexo é estrelado e qualquer um dos seus pontos serve de vértice.

Capítulo 2

Resultados Básicos

Neste capítulo, definiremos conceitos e resultados básicos para as demonstrações do primeiro e segundo resultado devido à S. Mendonça e H. Mirandola [10].

2.1 Grupo fundamental e espaços de recobrimento

2.1.1 Homotopia

Nesta seção são apresentados conceitos e propriedades básicas para a prova do primeiro teorema principal da nossa dissertação. Aqui apresentamos os conceitos de homotopia, grupo fundamental e espaços de recobrimento. Finalmente, relacionamos recobrimento e grupo fundamental.

Definição 2.1. *Sejam X e Y espaços topológicos. Duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ dizem-se homotópicas quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I := [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A aplicação H chama-se então uma homotopia entre f e g . Escreve-se, neste caso, $H : f \simeq g$, ou simplesmente $f \simeq g$.*

Dada a homotopia $H : f \simeq g$, consideremos, para cada $t \in I$, a aplicação contínua $H_t : X \rightarrow Y$, definida por $H_t(x) = H(x, t)$. Dar a homotopia H equivale a definir uma "família contínua a um parâmetro" $(H_t)_{t \in I}$ de aplicações de X em Y . A "continuidade" da família significa, neste caso, que $(x, t) \mapsto H_t(x)$ é uma aplicação contínua. Temos $H_0 = f$ e $H_1 = g$, de modo que a família $(H_t)_{t \in I}$ começa com f e termina com g .

Intuitivamente, o parâmetro t pode ser imaginado como sendo o tempo. A homotopia é então pensada como um processo de deformação contínua da aplicação f . Tal deformação

tem lugar durante uma unidade de tempo. No instante $t = 0$ temos f ; para $t = 1$ temos g . Nos instantes intermediários, $0 < t < 1$, as aplicações H_t fornecem os estágios intermediários da deformação.

Exemplo 2.2. *Duas aplicações constantes $f, g : X \rightarrow Y, f(x) = p, g(x) = q$, são homotópicas se, e somente se, p e q pertencem à mesma componente conexa por caminhos do espaço Y . Com efeito, se existe um caminho $a : I \rightarrow Y$ com $a(0) = p$ e $a(1) = q$, definimos uma homotopia $H : X \times I := [0, 1] \rightarrow Y$ entre f e g pondo $H(x, t) = a(t)$, $\forall (x, t) \in X \times I$. Reciprocamente, se H é uma homotopia entre as aplicações constantes $f(x) = p$ e $g(x) = q$, fixando arbitrariamente $x_0 \in X$, obteremos um caminho $a : I \rightarrow Y$ ligando p a q pondo $a(t) = H(x_0, t)$.*

Proposição 2.3. *Sejam X, Y espaços topológicos. A relação de homotopia, $f \simeq g$, é uma equivalência no conjunto das aplicações contínuas de X em Y .*

Demonstração. Vê [9], página 9. □

As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são chamadas *classes de homotopia*. A classe de homotopia de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é indicada pelo símbolo $[f]$.

Definição 2.4. *Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ chama-se uma equivalência homotópica quando existe $g : Y \rightarrow X$ contínua tal que $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$. Diz-se então que g é um inverso homotópico de f e que os espaços topológicos X e Y tem o mesmo tipo de homotopia. Escrevemos, neste caso, $X \equiv Y$ ou $f : X \equiv Y$.*

Exemplo 2.5. *A esfera unitária $\mathbb{S}^n$ tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. De fato, considerando as aplicações contínuas $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, $r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$, dadas por $i(x) = x$ (inclusão) e $r(y) = y/|y|$ (projeção radial), vemos que $r \circ i = id_{\mathbb{S}^n}$ enquanto que $i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ é homotópica à aplicação identidade de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ mediante uma homotopia linear pois todo ponto $y \neq 0$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ pode ser ligado por $y/|y|$ por um segmento de reta que não contém o zero. Este mesmo argumento mostra que se B^{n+1} é a bola fechada de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^{n+1}$, então $B^{n+1} - \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera $\mathbb{S}^n$.*

Sejam $p = (1, 0, \dots, 0)$ e $q = (-1, 0, \dots, 0)$ os pólos norte e sul da esfera $\mathbb{S}^n$. A projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nos dá um homeomorfismo entre $\mathbb{S}^n - \{p, q\}$ e $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Segue-se então do exemplo acima que $\mathbb{S}^n - \{p, q\}$ tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera $(n - 1)$ -dimensional $\mathbb{S}^{n-1}$.

2.1.2 O grupo fundamental

Vamos, a partir de agora, considerar um caso particular do conceito geral de homotopia. Estudaremos homotopias de caminhos, isto é, de aplicações contínuas $a : J \rightarrow X$, definidas num intervalo compacto $J = [s_0, s_1]$. Dedicaremos atenção especial aos caminhos fechados: aqueles em que $a(s_0) = a(s_1)$.

Definição 2.6. *Sejam $a, b : I := [0, 1] \rightarrow X$ caminhos. Dizemos que a e b são caminhos homotópicos se eles possuem as mesmas extremidades: $a(0) = b(0) = x_0$ e $a(1) = b(1) = x_1$ e existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que*

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= a(s), H(s, 1) = b(s), \\ H(0, t) &= a(0) = b(0), \\ H(1, t) &= a(1) = b(1), \end{aligned}$$

qualquer que sejam $s, t \in I$.

Em particular, os caminhos fechados $a, b : I := [0, 1] \rightarrow X$ são homotópicos (isto é, $a \simeq b$) quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que, pondo $a(0) = a(1) = x_0 \in X$, tem-se

$$H(s, 0) = a(s), H(s, 1) = b(s), H(0, t) = H(1, t) = x_0$$

para quaisquer $s, t \in I$.

Indicaremos sempre, com $\alpha = [a]$ a classe de homotopia do caminho $a : I \rightarrow X$, isto é, o conjunto de todos os caminhos em X que possuem as mesmas extremidades que a e que são homotópicos a a com extremos fixos durante a homotopia.

Exemplo 2.7. *Seja X um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado. Se $a, b : I \rightarrow X$ são caminhos com as mesmas extremidades, então $a \simeq b$. Com efeito, basta definir $H : I \times I \rightarrow X$ pondo $H(s, t) = (1 - t)a(s) + t.b(s)$. Vê-se que H é uma homotopia entre a e b . Essa homotopia é dita homotopia linear.*

Definição 2.8. *Sejam $a, b : I := [0, 1] \rightarrow X$ caminhos tais que o fim de a coincide com a origem de b . Definiremos o produto ab como sendo o caminho que consiste em percorrer*

primeiro a e depois b , ou seja, definiremos $ab : I \rightarrow X$ pondo:

$$ab(s) = \begin{cases} a(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ b(2s - 1) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Como $a(1) = b(0)$, as regras acima bem definem uma aplicação $ab : I \rightarrow X$, tal que $ab|_{[0, 1/2]}$ e $ab|_{[1/2, 1]}$ são contínuas. Segue-se que ab é contínua e portanto é um caminho, que começa em $a(0)$ e termina em $b(1)$.

O *caminho inverso* de $a : I \rightarrow X$ é, por definição, o caminho $a^{-1} : I \rightarrow X$, dado por

$$a^{-1} = a(1 - s), 0 \leq s \leq 1.$$

Indicaremos com e_x o caminho constante, tal que $e_x(s) = x, \forall s \in [0, 1]$. Para sua classe de homotopia, usaremos a notação $\varepsilon_x = [e_x]$.

O conjunto dos caminhos num espaço topológico X , munido da lei da composição e do inverso que acabamos de introduzir, não cumpre nenhum dos axiomas de grupo. (vê [9], página 30).

As propriedades desejadas para a lei da composição ab são encontradas quando se consideram classes de homotopia de caminhos. Começaremos notando que se $a, b : I \rightarrow X$ são caminhos tais que $a(1) = b(0)$ então vale a

Proposição 2.9. $a \simeq a', b \simeq b' \Rightarrow ab \simeq a'b' \text{ e } a^{-1} \simeq (a')^{-1}$

Demonstração. Vê [9], página 30. □

Num espaço topológico X , sejam α uma classe de homotopia de caminhos que tem origem num ponto $x \in X$ e terminam num ponto $y \in X$, e β uma classe de homotopia de caminhos que começam em y e terminam em $z \in X$. Definiremos o produto $\alpha.\beta$ tomando os caminhos $a \in \alpha, b \in \beta$ e pondo

$$\alpha\beta = [ab].$$

Assim, por definição, $[a].[b] = [ab]$. A proposição 2.9 mostra que o produto $\alpha.\beta$ está bem definido.

Analogamente, definiremos $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$, onde $a \in \alpha$. A segunda parte da proposição 2.9 mostra que a definição de classe inversa está bem definida.

Proposição 2.10. *Sejam $a, b, c : I \rightarrow X$ caminhos tais que cada um deles termina onde o seguinte começa. Sejam $\alpha = [a], \beta = [b], \gamma = [c]$ suas classes de homotopia, $x = a(0)$*

a origem de a , $y = a(1)$ seu fim, e_x, e_y os caminhos constantes sobre esses pontos e $\varepsilon_x = [e_x], \varepsilon_y = [e_y]$ as classes de homotopia dessas constantes. Tem-se então:

1. $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_x$;
2. $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_y$;
3. $\varepsilon_x\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon_y$;
4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

Demonstração. Vê [9], página 32. □

O conjunto das classes de homotopia (com extremos fixos) dos caminhos num espaço topológico X , munido da lei de composição acima definida, chama-se o *grupóide fundamental* de X . Às vezes representamos ele por $\Pi(X)$.

Consideraremos pares do tipo (X, x_0) , onde $x_0 \in X$ será chamado o *ponto básico* do espaço topológico X . Os caminhos fechados $a : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ serão chamados caminhos fechados com base no ponto x_0 . As homotopias (salvo quando explicitamente o contrário) serão relativas a ∂I .

Definição 2.11. O subconjunto $\pi_1(X, x_0)$ do grupóide fundamental, formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 constitui (em virtude da proposição 2.10) um grupo, chamado o grupo fundamental do espaço X com base no ponto x_0 .

O elemento neutro desse grupo é a classe de homotopia $\varepsilon_x = \varepsilon_{x_0}$ do caminho constante no ponto x_0 .

Até que ponto a escolha do ponto básico afeta a estrutura do grupo fundamental? A resposta a essa pergunta é dada pela

Proposição 2.12. Se x_0, x_1 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de X , então $\pi(X, x_0)$ e $\pi(X, x_1)$ são isomorfos.

Demonstração. Vê [9], página 34. □

Corolário 2.13. Se X é conexo por caminhos, então, para quaisquer pontos básicos $x_0, x_1 \in X$, os grupos fundamentais $\pi(X, x_0)$ e $\pi(X, x_1)$ são isomorfos.

É claro que o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ depende apenas da componente conexa por caminhos do ponto x_0 no espaço X . Por isso é natural, ao estudar o grupo fundamental, considerar apenas espaços conexos por caminhos.

Na proposição seguinte, supomos que os espaços considerados são conexos por caminhos para que não haja ambiguidade sobre a escolha dos pontos básicos.

Proposição 2.14. *Se dois espaços topológicos X, Y , conexos por caminhos, tem o mesmo tipo de homotopia, então seus grupos fundamentais são isomorfos.*

Demonstração. Vê [9], página 39. □

Proposição 2.15. *O grupo fundamental de um produto cartesiano $X \times Y$ é isomorfo ao produto cartesiano dos grupos fundamentais de $X \times Y$.*

Demonstração. Vê [9], página 45. □

2.1.3 Espaços simplesmente conexos

Definição 2.16. *Um espaço topológico X diz-se simplesmente conexo quando é conexo por caminhos e (para todo $x_0 \in X$) tem-se $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$, ou seja, quando seu grupo fundamental for trivial.*

Isto significa que, para todo caminho fechado $a : I \rightarrow X$, com base no ponto x_0 , tem-se $a \simeq e_{x_0}$.

Todo espaço contrátil, que é aquele que tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto, é simplesmente conexo. Em particular, o espaço $\mathbb{R}^n$ e as bolas, abertas ou fechadas, são simplesmente conexos.

Proposição 2.17. *Se $n > 1$, a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa.*

Demonstração. Vê [9], página 44. □

Exemplo 2.18. *Se $n > 2$, então $\mathbb{R}^n - \{0\}$ é simplesmente conexo. De fato, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Corolário 2.19 (Corolário da proposição 2.15). *Se X e Y são simplesmente conexos, então o produto cartesiano $X \times Y$ é simplesmente conexo.*

Observação 2.20. O grupo fundamental do círculo $\mathbb{S}^1$ é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Para um cálculo detalhado, veja [9], páginas 53-58. Além disso, da proposição 2.15, temos que o grupo fundamental do toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é abeliano livre, com dois geradores, ou mais explicitamente, $\pi_1(\mathbb{T}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2.1.4 Espaços de recobrimento

Definição 2.21. Uma aplicação $p : \tilde{X} \rightarrow X$ chama-se uma aplicação de recobrimento (ou, simplesmente, recobrimento) quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ é uma reunião de abertos U_{α} , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre V . Cada aberto V desse tipo chama-se uma vizinhança distinguida. O espaço $\tilde{X}$ chama-se um espaço de recobrimento de X e, para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ chama-se a fibra sobre x . Às vezes, X chama-se a base.

Da definição acima, temos que uma aplicação de recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local de $\tilde{X}$ sobre X .

Teorema 2.22. Se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e $p' : \tilde{X}' \rightarrow X'$ são aplicações de recobrimento, então

$$p \times p' : \tilde{X} \times \tilde{X}' \rightarrow X \times X'$$

é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração. Vê [11], página 339. □

Exemplo 2.23 (Aplicações de recobrimento).

$$\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \xi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

$$\zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \zeta(s, t) = (e^{is}, e^{it})$$

A prova de que a aplicação ξ é de fato um recobrimento pode ser encontrada em [11], página 337.

Todo subconjunto aberto de uma vizinhança distinguida é ainda uma vizinhança distinguida. Assim, quando X é localmente conexo, localmente compacto, etc., podemos escolher as vizinhanças distinguidas de modo que sejam conexas, compactas, etc.

Proposição 2.24. *Se a base X de um recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é conexa, então todas as fibras $p^{-1}(x)$, $x \in X$, possuem o mesmo número cardinal, que se chama o "número de folhas" do recobrimento.*

Demonstração. Para todos os pontos x de uma vizinhança distinguida V , o número cardinal da fibra $p^{-1}(x)$ é o mesmo. Segue-se que o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $p^{-1}(x)$ tem um número cardinal dado é aberto. Isto determina uma decomposição de X como reunião de abertos disjuntos, em cada um dos quais o cardinal de $p^{-1}(x)$ é constante. Como X é conexo, só pode existir um desses abertos. $\square$

É importante saber reconhecer quando um homeomorfismo local $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento. Caracterizaremos agora os recobrimentos com um número finito de folhas.

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ diz-se fechada quando a imagem $f(F)$ de todo subconjunto fechado $F \subset X$ é um subconjunto fechado de Y .

Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ chama-se própria quando é fechada e, para todo $y \in Y$, a imagem inversa f^{-1} é compacta.

Proposição 2.25. *Sejam X um espaço de Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo local. Cada uma das afirmações abaixo implica a seguinte:*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que cada imagem inversa $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, possui n elementos.*
2. *f é própria e sobrejetiva.*
3. *f é uma aplicação de recobrimento cujas fibras $f^{-1}(y)$ são finitas.*

Se Y for conexo, então as 3 afirmações são equivalentes.

Demonstração. Vê [9], página 121. $\square$

Definição 2.26. *Sejam $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Um levantamento de g (relativamente a f) é uma aplicação contínua $\tilde{g} : Z \rightarrow X$ tal que $f \circ \tilde{g} = g$.*

O diagrama abaixo ilustra a situação.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \tilde{g} & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Lema 2.27. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento e seja $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Qualquer caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ começando em x_0 tem um único levantamento $\tilde{f}$ em $\tilde{X}$ começando em $\tilde{x}_0$.*

Demonstração. Vê [11], página 342. □

2.1.5 Teorema fundamental dos levantamentos

Dada uma aplicação de recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$, sejam $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $x = p(\tilde{x})$. Usaremos a notação $H(\tilde{x})$ para representar a imagem do homomorfismo $p_\# : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$, induzido pela projeção de recobrimento p .

A próxima proposição nos mostra como o grupo fundamental permite que se dê uma resposta algébrica ao problema topológico de saber se uma aplicação contínua $f : Z \rightarrow X$, com valores na base de um recobrimento, admite um levantamento $\tilde{f} : \tilde{Z} \rightarrow \tilde{X}$. Nesse ponto, é conveniente lidar com pares (X, x_0) , isto é, espaços com ponto básico.

Proposição 2.28. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, onde X é conexo por caminhos. Sejam Z um espaço conexo e localmente conexo por caminhos (logo conexo por caminhos) e $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ uma aplicação contínua. Dado $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, f possui um levantamento $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se, e somente se, $f_\# \pi_1(Z, z_0) \subset H(\tilde{x}_0)$.*

Demonstração. Vê [9], página 153. □

Corolário 2.29. *Sejam X conexo por caminhos e Z simplesmente conexo, localmente conexo por caminhos. Toda aplicação contínua $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ admite um levantamento $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, onde $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ é escolhido arbitrariamente*

2.1.6 Homomorfismos entre recobrimentos

Definição 2.30. *Sejam $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ dois recobrimentos com a mesma base X . Um homomorfismo entre eles é uma aplicação contínua $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que $p_2 \circ f = p_1$, o que torna comutativo o diagrama abaixo:*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

Diz-se que $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ é um *isomorfismo* quando f é um homeomorfismo tal que $p_2 \circ f = p_1$. Então $f^{-1} : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ também é um isomorfismo. Neste caso, os recobrimentos p_1 e p_2 dizem-se *isomorfos*.

Um *endomorfismo* é um homomorfismo de um recobrimento em si mesmo. Dado o recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$, um endomorfismo é, portanto, uma aplicação contínua $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ f = p$.

Quando o endomorfismo f for um homeomorfismo de $\tilde{X}$ sobre si mesmo, diremos que f é um *automorfismo*. O conjunto $G(\tilde{X}|X) = \text{Aut}(p)$ dos automorfismos do recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ constitui um grupo relativamente à composição de aplicações.

A condição $p_2 \circ f = p_1$ significa que f aplica cada fibra $p_1^{-1}(x)$ na fibra $p_2^{-1}(x)$. Em particular, um endomorfismo $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ aplica cada fibra $p^{-1}(x)$ em si própria. Um isomorfismo f induz, para cada $x \in X$, uma bijeção da fibra $p_1^{-1}(x)$ sobre a fibra $p_2^{-1}(x)$. Um automorfismo, por sua vez, determina uma permutação em cada fibra p^{-1} .

Note que um homomorfismo $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ é um levantamento da aplicação contínua $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ relativamente ao recobrimento $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$. Assim, quando $\tilde{X}_1$ é conexo, dois homomorfismos que assumam o mesmo valor num ponto $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ são iguais.

Exemplo 2.31. Consideremos as aplicações de recobrimento $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, do plano no toro e $p_2 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$, do cilindro no toro, dadas, respectivamente, por

$$p_1(s, t) = (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$$

e

$$p_2(z, t) = (z, e^{2\pi it}).$$

A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, do plano no cilindro, dada por

$$f(s, t) = (e^{2\pi is}, t)$$

cumpra a condição $p_2 \circ f = p_1$, logo é um homomorfismo entre recobrimentos.

Na proposição seguinte, temos os recobrimentos $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$. Dados os pontos $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ e $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ com $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$, indicaremos com $H_1(\tilde{x}_1)$ e $H_2(\tilde{x}_2)$ respectivamente os subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ que são imagens dos homomorfismos induzidos $(p_1)_\# : \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ e $(p_2)_\# : \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Proposição 2.32. Sejam $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ conexos, localmente conexos por caminhos. Existe um homomorfismo $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ com $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se, e somente se, $H_1(\tilde{x}_1) \subset H_2(\tilde{x}_2)$.

Demonstração. Segue-se da proposição 2.28, pois um homomorfismo f é um levantamento de p_1 relativamente ao recobrimento p_2 . $\square$

Corolário 2.33. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, cujo domínio $\tilde{X}$ é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Para todo recobrimento $q : \tilde{Y} \rightarrow X$ com $\tilde{Y}$ conexo, existe um recobrimento $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ tal que $q \circ f = p$.*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ & \searrow f & \\ & & \tilde{Y} \\ & \nearrow q & \\ X & & \end{array}$$

Demonstração. De fato, para quaisquer $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ com $p(\tilde{x}) = q(\tilde{y})$, temos $\{0\} = p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \subset q_{\#}\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y})$. $\square$

Por causa do corolário acima, um recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ com $\tilde{X}$ simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos chama-se um *recobrimento universal*, pois $\tilde{X}$ recobre qualquer outro recobrimento $\tilde{Y}$ do espaço X .

Corolário 2.34. *Nas hipóteses da Proposição 2.32, o homomorfismo $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, com $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, é um isomorfismo se, e somente se, $H_1(\tilde{x}_1) = H_2(\tilde{x}_2)$.*

Corolário 2.35. *Dois recobrimentos simplesmente conexos de um espaço localmente conexo por caminhos são isomorfos.*

Exemplo 2.36. *Quais são os recobrimentos $p : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{S}^1$, do círculo $\mathbb{S}^1$, com $\tilde{X}$ conexo? Se identificarmos o grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ com $\mathbb{Z}$, seus subgrupos são os da forma $n\mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Os recobrimentos $p_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $p_n(z) = z^n$ determinam os subgrupos $n\mathbb{Z}$ com $n > 0$, enquanto $p_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $p_0(t) = e^{2\pi it}$, determina o subgrupo $\{0\}$. Qualquer outro recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{S}^1$, com $\tilde{X}$ conexo, é isomorfo a um destes.*

2.1.7 Automorfismos de recobrimento

A discussão da seção anterior será agora particularizada para o caso de um único recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$.

Suporemos, em toda esta seção, $\tilde{X}$ conexo e localmente conexo por caminhos.

Sejam $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. Como vimos acima, existe um endomorfismo $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ se, e somente se, $H(\tilde{x}_0) \subset H(\tilde{x}_1)$.

O *normalizador* do subgrupo H num grupo G é o conjunto $N(H)$ formado pelos elementos $g \in G$ tais que $g^{-1}Hg = H$. O normalizador $N(H)$ é o maior subgrupo de G que contém H como subgrupo normal. H é um subgrupo normal do grupo G se, e somente se, $N(H) = G$.

A próxima proposição estabelece um isomorfismo entre o grupo $G(\tilde{X}|X)$ dos automorfismos do recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e o grupo quociente $N(H(\tilde{x}_0))/H(\tilde{x}_0)$. Para demonstrá-la, é conveniente começar com o

Lema 2.37. *Seja $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ um endomorfismo do recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Para quaisquer $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\alpha \in \pi_1(X, p(\tilde{x}))$, vale $f(\tilde{x}.\alpha) = f(\tilde{x}).\alpha$.*

Demonstração. Sejam $\alpha = [a]$ e $\tilde{a}$ um levantamento de a começando no ponto $\tilde{x}$. Então $\tilde{x}.\alpha = \tilde{a}(1)$, donde $f(\tilde{x}.\alpha) = f(\tilde{a}(1))$. Por outro lado, $f \circ \tilde{a}$ é um levantamento de a que começa no ponto $f(\tilde{x})$. Logo,

$$f(\tilde{x}).\alpha = (f \circ \tilde{a})(1) = f(\tilde{a}(1)) = f(\tilde{x}.\alpha),$$

o que prova o lema. □

Proposição 2.38. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, com $\tilde{X}$ conexo e localmente conexo por caminhos. Para cada $\tilde{x}_0$, existe um isomorfismo de grupos $G(\tilde{X}|X) \approx N(H(\tilde{x}_0))/H(\tilde{x}_0)$.*

Demonstração. Definimos uma aplicação $\phi : N(H(\tilde{x}_0)) \rightarrow G(\tilde{X}|X)$ pondo, para cada $\alpha \in N(H(\tilde{x}_0))$, $\phi(\alpha) = f$, onde $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ é o automorfismo tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0.\alpha$.

Se $\phi(\alpha) = f$ e $\phi(\beta) = g$, temos $\tilde{x}_0.\alpha = f(\tilde{x}_0)$ e $\tilde{x}_0.\beta = g(\tilde{x}_0)$. Pelo lema acima,

$$(f \circ g)(\tilde{x}_0) = f(g(\tilde{x}_0)) = f(\tilde{x}_0.\beta) = f(\tilde{x}_0).\beta = \tilde{x}_0.\alpha\beta.$$

Portanto, $f \circ g = \phi(\alpha\beta)$ e ϕ é um homomorfismo de grupos.

Tem-se $\phi(\alpha) = id_{\tilde{X}}$, ou seja, $\tilde{x}_0.\alpha = \tilde{x}_0$, se, e somente se, $\alpha \in H(\tilde{x}_0)$. Assim, $H(\tilde{x}_0)$ é o núcleo de ϕ . Afirmamos que ϕ é sobrejetivo. De fato, dado $f \in G(\tilde{X}|X)$, seja $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Como $\pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente em $p^{-1}(x_0)$, existe $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0.\alpha$. Sendo f um automorfismo, temos $\alpha \in N(H(\tilde{x}_0))$. Como $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0.\alpha$, segue-se que $f = \phi(\alpha)$. O "Teorema do Isomorfismo" para grupos nos fornece, por passagem ao quociente, um isomorfismo $\bar{\phi} : N(H(\tilde{x}_0))/H(\tilde{x}_0) \rightarrow G(\tilde{X}|X)$. □

Corolário 2.39. *Se $\tilde{X}$ é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, então o grupo $G(\tilde{X}|X)$ dos automorfismos do recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$.*

2.2 Hipersuperfícies

Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ chama-se uma *hipersuperfície* de classe C^k quando é localmente o gráfico de uma função real de n variáveis de classe C^k . Mais precisamente, para cada $p \in M$ deve existir um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e uma função $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, tais que $p \in V$ e $V \cap M =$ gráfico de ξ .

A afirmação " $V \cap M =$ gráfico de ξ " significa que, para um certo inteiro $i \in [1, n]$, tem-se

$$V \cap M = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i = \xi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})\}.$$

Evidentemente, dada qualquer função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, seu gráfico é uma hipersuperfície $M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in U\}$ de classe C^k .

Podemos considerar também as *hipersuperfícies diferenciáveis*, que são localmente gráficos de funções diferenciáveis.

2.3 Aplicações Próprias

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos se diz *fechada* quando, para todo subconjunto fechado $F \subset X$, sua imagem $f(F)$ é fechada em Y . A proposição seguinte caracteriza as aplicações fechadas. Note que ela exprime a continuidade da "aplicação inversa" $y \mapsto f^{-1}(y)$, cujos valores são conjuntos.

Proposição 2.40. *A fim de que $f : X \rightarrow Y$ seja fechada, é necessário e suficiente que, dados arbitrariamente $y \in Y$ e um aberto $U \supset f^{-1}(y)$ em X , exista V aberto em Y tal que $y \in V$ e $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset U$.*

Demonstração. A prova encontra-se em [9], página 205. □

Definição 2.41. *Sejam X, Y subconjuntos de espaços euclidianos. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ diz-se própria quando a imagem inversa $f^{-1}(K)$ de todo compacto $K \subset Y$ é um conjunto compacto.*

Por exemplo, se X é compacto, toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é própria. Já se Y é compacto, $f : X \rightarrow Y$ só pode ser própria quando $X = f^{-1}(Y)$ for compacto. Um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação própria.

Os lemas abaixo visam dar alguma familiaridade com o conceito de aplicação própria.

Lema 2.42. *Toda aplicação própria $f : X \rightarrow Y$ é fechada.*

Demonstração. A prova encontra-se em [8], página 500. □

Para enunciar o lema seguinte, precisamos da seguinte

Definição 2.43. *Dado $X \subset \mathbb{R}^m$, dizemos que uma sequência de pontos $x_k \in X$ tende para o infinito em X , e escrevemos $\lim x_k = \infty$ em X , quando (x_k) não possui subsequências que converjam para pontos de X . Se $X = \mathbb{R}^n$, " $\lim x_k = \infty$ em X " significa " $\lim |x_k| = +\infty$ ".*

Lema 2.44. *As seguintes afirmações a respeito de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ são equivalentes:*

1. *Para todo compacto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ é compacto.*
2. *Se $\lim x_k = \infty$ em X , então $\lim f(x_k) = \infty$ em Y .*

Demonstração. A prova encontra-se em [8], página 501. □

O significado intuitivo de ser própria é "se x tende para a fronteira de X , então $f(x)$ tende para a fronteira de Y ". (em [9], pag. 207).

2.4 Superfícies com bordo

Um *semi-espço* num espaço vetorial E é um conjunto do tipo

$$H = \{x \in E; \alpha(x) \leq 0\},$$

onde $\alpha \in E^*$ é um funcional linear não-nulo. O *bordo* do semi-espço H é o conjunto $\partial H = \{x \in E; \alpha(x) = 0\}$.

Proposição 2.45. *∂H é um subespaço vetorial de codimensão 1 em E .*

Demonstração. A prova está em [8], página 472. □

Um semi-espço $H \subset \mathbb{R}^n$ é reunião disjunta $H = \text{int. } H \cup \partial H$ do seu interior em $\mathbb{R}^n$ com o seu bordo. Os subconjuntos $A \subset H$, abertos com H , são dois tipos:

1. $A_1 \subset \text{int. } H$; neste caso, A_1 é também aberto em $\mathbb{R}^n$.
2. $A_2 \cap \partial H \neq \emptyset$, então A_2 não é aberto em $\mathbb{R}^n$, pois nenhuma bola com centro num ponto $x \in \partial H$ pode estar contida em H .

Seja $H \subset \mathbb{R}^n$ um semi-espço. O bordo de um aberto $A \subset H$ é, por definição, o conjunto $\partial A = A \cap \partial H$. Observe que ∂A é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^n$. Com efeito, sendo A aberto em H , temos $A = U \cap H$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então, $U \cap \partial H = U \cap (H \cap \partial H) = (U \cap H) \cap \partial H = A \cap \partial H = \partial A$. Logo, ∂A é um subconjunto aberto da hipersuperfície $\partial H = \alpha^{-1}(0)$.

O bordo de um aberto $A \subset H$ é invariante por difeomorfismos. Antes de demonstrar este fato, lembremos que um difeomorfismo (de classe C^k) entre dois abertos $A \subset H \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset K \subset \mathbb{R}^m$ de semi-espços é uma bijeção diferenciável (de classe C^k) $f : A \rightarrow B$, cuja inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ também é diferenciável (de classe C^k). Pela Regra da Cadeia, das igualdades $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ concluimos que, para todo $x \in A$, com $y = f(x)$, $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $(f^{-1})'(y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ são isomorfismos, inversos um do outro. Em particular, $n = m$. A invariância de ∂A é expressa pelo

Teorema 2.46. *Sejam $A \subset H$, $B \subset K$ abertos em semi-espços de $\mathbb{R}^n$. Se $f : A \rightarrow B$ é um difeomorfismo de classe C^1 , então $f(\partial A) = \partial B$. Em particular, a restrição $f|_{\partial A}$ é um difeomorfismo entre as hipersuperfícies ∂A e ∂B .*

Demonstração. Consideremos um ponto $x \in \text{int. } A$, isto é, existe $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $x \in U \subset A$. Restrito a U , f é um difeomorfismo de classe C^1 sobre sua imagem $f(U)$. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Como $f(U) \subset B$, segue-se que $f(x) \in \text{int. } B$. Isto significa que $f(\text{int. } A) \subset \text{int. } B$. Logo, $f^{-1}(\partial B) \subset \partial A$. Analogamente, $f^{-1}(\partial A) \subset \partial B$. Portanto, $f(\partial A) = \partial B$. $\square$

Observação 2.47. *Resulta do "Teorema da Invariância do Domínio", (demonstrado em Topologia) que o teorema acima vale, mais geralmente, quando f é apenas um homeomorfismo de A sobre B .*

Estenderemos agora o conceito de parametrização.

Uma *parametrização* (de classe C^k e dimensão m) de um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo $\varphi : U_0 \rightarrow U$ de classe C^k , definido num aberto U_0 de um semi-espaço de $\mathbb{R}^m$, tal que $\varphi'(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear injetiva, para cada $u \in U_0$.

Definição 2.48. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ chama-se uma *superfície com bordo* (de dimensão m e classe C^k) quando cada ponto $x \in M$ pertence a um aberto $U \subset M$ que é imagem de uma parametrização $\varphi : U_0 \rightarrow U$, de classe C^k num aberto de algum U_0 semi-espaço de $\mathbb{R}^m$.

O teorema abaixo nos informa sobre as mudanças de parametrização numa superfície com bordo M , de classe C^k ($k \geq 1$) e dimensão $m + 1$, contida em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.49. Sejam $\varphi : U_0 \rightarrow U$, $\psi : V_0 \rightarrow V$ parametrizações de classe C^k de abertos $U, V \subset M$, com $U \cap V \neq \emptyset$. Então a mudança de parametrização $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$ é um difeomorfismo de classe C^k .

Demonstração. Vê [8], pag. 475. □

Definição 2.50. Seja M uma superfície com bordo. O bordo de M é o conjunto ∂M formado pelos pontos $x \in M$ tais que, para toda parametrização $\varphi : U_0 \rightarrow U$ de classe C^1 de um aberto $U \subset M$, com $x = \varphi(u)$, tem-se necessariamente $u \in \partial U_0$.

Pelo Teorema 2.49, juntamente com o fato de que cada mudança de parametrização é um difeomorfismo, dado $x \in M$, basta que exista uma parametrização $\varphi : U_0 \rightarrow U$ de classe C^1 de um aberto $U \subset M$, com $x = \varphi(u)$ e $u \in \partial U_0$, para que se tenha $x \in \partial M$. Dito de outro modo, se M é uma superfície com bordo e $x = \varphi(u) \in U$ para alguma parametrização $\varphi : U_0 \rightarrow U$, de classe C^1 num aberto $U_0 \subset \mathbb{R}^m$, então, para qualquer outra parametrização $\psi : V_0 \rightarrow V \subset M$, de classe C^1 num aberto V_0 de algum semi-espaço em $\mathbb{R}^m$, se $x = \psi(v)$, deve-se ter $v \in \text{int. } V_0$.

Se M é uma superfície com bordo, de classe C^k e dimensão $m + 1$, seu bordo ∂M é uma superfície (sem bordo) de classe C^k e dimensão m . As parametrizações que caracterizam ∂M como superfície são as restrições ao bordo $\partial U_0 = U_0 \cap \partial H$, das parametrizações $\varphi : U_0 \rightarrow U$ de classe C^k , que tem como imagem um aberto $U \subset M$ tal que $U \cap \partial M \neq \emptyset$.

A restrição $\varphi|_{\partial U_0} : \partial U_0 \rightarrow \partial U$ tem $\partial U = U \cap \partial M$ como imagem e seu domínio é o subconjunto aberto ∂U_0 do espaço vetorial m -dimensional ∂H . Para obter uma parametrização em ∂M que seja definida num aberto de $\mathbb{R}^m$, devemos tomar uma base em ∂H

e representar cada elemento $u \in \partial H$ pela lista de suas m coordenadas em relação a tal base.

Outra maneira de parametrizar ∂U é a seguinte. Escrevemos os elementos de $\mathbb{R}^{m+1}$ sob a forma $u = (u_0, u_1, \dots, u_m)$, pomos $H_0 = \{u \in \mathbb{R}^{m+1}; u_0 \leq 0\}$, identificamos ∂H_0 com $\mathbb{R}^m$ pela correspondência $(0, v_1, \dots, v_m) \mapsto (v_1, \dots, v_m)$ e "padronizamos" as parametrizações de classe C^k em M , considerando apenas aquelas que são definidas em subconjuntos abertos do semi-espço H_0 . Para todo semi-espço $H \subset \mathbb{R}^{m+1}$, existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $T(H_0) = H$. Então, dada uma parametrização $\psi : V_0 \rightarrow U$, de classe C^k no aberto $V_0 \subset H$, pomos $U_0 = T^{-1}(V_0)$ e obtemos $\varphi = \psi \circ T : U_0 \rightarrow U$, uma parametrização *padronizada* (isto é, definida num aberto de H_0), de classe C^k e com a mesma imagem que ψ . Se $\varphi : U_0 \rightarrow U$ é padronizada e $U \cap \partial M \neq \emptyset$, a restrição $\varphi|_{\partial U_0} : \partial U_0 \rightarrow \partial U$ é uma parametrização na superfície ∂M , definida num subconjunto aberto $\partial U_0 \subset \mathbb{R}^m$.

O teorema seguinte é fonte de exemplos de superfícies com bordo.

Teorema 2.51. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de classe C^k numa superfície M , de classe C^k e dimensão $m + 1$. Se $a \in \mathbb{R}$ é valor regular de f , então o conjunto $N = \{x \in M; f(x) \leq a\}$ é uma superfície de classe C^k , com dimensão $m + 1$, cujo bordo é $\partial N = f^{-1}(a)$.*

Demonstração. Vê [8], pag. 477. □

Por exemplo, a bola fechada de centro num ponto $x_0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ e raio $a > 0$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ tais que $f(x) \leq a^2$, onde $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = |x - x_0|^2 = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle$. Como o único valor não-regular de f é 0, segue-se que a bola fechada é uma superfície, cujo bordo é a esfera.

Capítulo 3

Primeira e Segunda Respostas

Neste capítulo, demonstraremos o teorema devido a Halpern [6] e os nossos dois principais teoremas. Estes respondem também a pergunta: em que situações podemos ter $W \neq \emptyset$? Lembre-se que W é o conjunto dos pontos de M que não pertencem a nenhuma geodésica tangente à imersão $I : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ de uma variedade conexa n -dimensional Σ em uma variedade Riemanniana completa conexa $(n+1)$ -dimensional M sem pontos conjugados.

3.1 Sobre imersões de uma variedade n -dimensional em um espaço euclidiano $(n+1)$ -dimensional

Nesta seção apresentaremos o teorema que primeiro responde a pergunta sobre em quais condições temos $W \neq \emptyset$. Esse resultado é devido a Halpern em [6].

Antes de apresentarmos esse teorema, denotaremos por $T_p\Sigma$ o espaço tangente a Σ em p e o espaço tangente induzido de I por dI_p . Além disso, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, seja $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Para $p, q \in \mathbb{R}^n$, defina $[p, q] = \{(1-x)p + xq / 0 \leq x < 1\}$ e defina $[p, q], (p, q], (p, q)$ similarmente. Se $A \subset \mathbb{R}^n$, então $\partial A = \text{bdry } A$, $\text{int. } A$ e $\text{cl } A = \overline{A}$ irão denotar, respectivamente, a fronteira, o interior e o fecho de A .

Teorema 3.1. *Seja Σ variedade suave (infinitamente diferenciável) n -dimensional ($n \geq 2$) conexa, fechada e compacta. Seja $I : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão suave de Σ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para cada $p \in \Sigma$, considere o hiperplano T_p em $\mathbb{R}^{n+1}$ desenhado em $I(p)$ e tangente a $I(\Sigma)$. Se $\bigcup_{p \in \Sigma} T_p \neq \mathbb{R}^{n+1}$, então:*

1. Σ é difeomorfa a n -esfera $\mathbb{S}^n$.
2. I é um mergulho.
3. Existe um único conjunto estrelado aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\partial V = I(\Sigma)$.
4. $\mathbb{R}^{n+1} - \bigcup_{p \in \Sigma} T_p = \text{int}(\text{Kernel } V)$, onde int denota o interior, T_p é o hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$ desenhado em $I(p)$ e tangente a $I(\Sigma)$ e $\text{Kernel } V = \{p \in V / tp + (1-t)q \in V, \forall q \in V, 0 \leq t \leq 1\}$.

Reciprocamente, se $I(\Sigma) = \partial V$, para algum conjunto estrelado aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $\text{int}(\text{Kernel } V) \neq \emptyset$, então $\bigcup_{p \in \Sigma} T_p \neq \mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. (1) Podemos supor que $0 \notin \bigcup_{p \in \Sigma} T_p$, pois $\bigcup_{p \in \Sigma} T_p \neq \mathbb{R}^{n+1}$. Note que $I(p) \in T_p, \forall p \in \Sigma$, e assim $0 \notin I(\Sigma)$. Considere a aplicação diferenciável $\mathbf{p} : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ (projeção radial) dada por

$$\mathbf{p}(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Vamos calcular a derivada $\mathbf{p}'(x) : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow T_{p(x)}\mathbb{S}^n$. Todo vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ se decompõe na soma $v = \lambda x + \bar{v}$, onde $\bar{v} = v - \lambda x$ é ortogonal ao vetor x no qual estamos considerando a derivada. Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ e todo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, temos

$$\mathbf{p}'(x).v = \mathbf{p}'(x).\lambda x + \mathbf{p}'(x).\bar{v}.$$

Mas $\mathbf{p}'(x).\lambda x = 0$, pois $\mathbf{p}$ é constante, igual a $\frac{x}{\|x\|}$, ao longo da semi-reta $\vec{O}x$, sobre a qual se situa o vetor λx . Logo,

$$\mathbf{p}'(x).v = \mathbf{p}'(x).\bar{v}.$$

Sendo ortogonal a x , o vetor $\bar{v}$ é tangente, no ponto x , à esfera $\mathbb{S}$ de centro 0 e raio $\|x\|$, restrita à qual $\mathbf{p}$ é simplesmente a multiplicação pela constante $\frac{1}{\|x\|}$, logo

$$\mathbf{p}'(x).v = \mathbf{p}'(x).\bar{v} = \frac{\bar{v}}{\|x\|} = \frac{v - \lambda x}{\|x\|}.$$

Daí, $d\mathbf{p}|_x.v = 0$ se, e somente se, $v = \lambda x$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

De $0 \notin \bigcup_{p \in \Sigma} T_p$, segue-se que cada $v \in dI|_p T_p \Sigma = T_p - I(p), v \neq 0$, não é da forma $v = \lambda I(p), \lambda \in \mathbb{R}$, pois de outro modo, supondo $\lambda \neq 0$, teríamos

$$\begin{aligned} -\frac{v}{\lambda} &= -I(p) \\ -\lambda^{-1}.v &= -I(p) \in dI|_p T_p \Sigma \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -I(p) &= w - I(p), w \in T_p \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Contradição.

Combinando essas observações, concluímos que

$$d(\mathbf{po}I)|_p = d\mathbf{p}_{I(p)} \circ dI|_p$$

é injetiva e, portanto, um isomorfismo sobre $T_{\mathbf{p}(I(p))}$, para cada $p \in \Sigma$. Segue-se do Teorema da Função Implícita que, para cada $p \in \Sigma$, $\mathbf{po}I$ aplica alguma vizinhança aberta de p difeomorficamente sobre uma vizinhança aberta de $(\mathbf{po}I)(p) \in \mathbb{S}^n$. Daí, para cada $q \in \mathbb{S}^n$, $(\mathbf{po}I)^{-1}(q)$ é um espaço discreto. Mas $(\mathbf{po}I)^{-1}(q)$ é um subespaço fechado do espaço compacto Σ e assim $(\mathbf{po}I)^{-1}(q)$ é compacto e, portanto, deve ser finito.

Seja $(\mathbf{po}I)^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_N\}$ com $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$. Como foi dito acima, para cada $1 \leq i \leq N$, existe uma vizinhança aberta U_i de p_i que é aplicada difeomorficamente sobre uma vizinhança V_i de q . Como Σ é Hausdorff, os U_i podem ser escolhidos disjuntos. Então

$$V = \bigcap_{i=1}^N V_i \cap \left(\mathbb{S}^n - (\mathbf{po}I) \left(\Sigma - \bigcup_{i=1}^N U_i \right) \right)$$

é uma vizinhança aberta de q tal que $(\mathbf{po}I)^{-1}(V)$ é uma união disjunta de abertos, onde cada um desses abertos é aplicado difeomorficamente (e assim homeomorficamente) sobre V . Segue-se que $(\mathbf{po}I)(\Sigma)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{S}^n$.

Como Σ é compacta, temos que $(\mathbf{po}I)(\Sigma)$ também é compacta e então fechada. Pelo fato de $\mathbb{S}^n$ ser conexa, temos que

$$(\mathbf{po}I)(\Sigma) = \mathbb{S}^n,$$

e isso mostra que $\mathbf{po}I : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma aplicação de recobrimento. Desde que Σ é conexa e $\mathbb{S}^n$ ($n \geq 2$) é simplesmente conexa, então $\mathbf{po}I$ deve ser homeomorfismo. Daí, deve ser injetiva e, portanto, um difeomorfismo, ou seja, Σ é difeomorfa a $\mathbb{S}^n$.

(2) Desde que $\mathbf{po}I$ é injetiva, então I é injetiva. Daí, I é um mergulho (note que Σ é compacta).

(3) Considere o conjunto

$$V = \bigcup_{p \in \Sigma} [0, I(p)),$$

onde $[0, I(p)) = \{(1-t)0 + t.I(p); 0 \leq t < 1\}$. Claramente, V é conjunto estrelado aberto com respeito a 0, isto é, 0 é seu centro. Seja $W = \bigcup_{p \in \Sigma} \{t.I(p); t > 1\}$. Como $\mathbf{po}I$ é um homeomorfismo, W é conexo e $V \cup W = \mathbb{R}^{n+1} - I(\Sigma)$.

Pelo Teorema da Separação de Jordan-Brouwer, temos que $\mathbb{R}^{n+1} - I(\Sigma)$ consiste de duas componentes abertas: uma limitada X e uma ilimitada Y , tais que

$$\mathbb{R}^{n+1} - I(\Sigma) = X \cup Y$$

e $\partial X = I(\Sigma) = \partial Y$. Desde que V e W são conexos, disjuntos, $V \cup W = \mathbb{R}^{n+1} - I(\Sigma)$ e W é ilimitado, segue-se que $V = X$ e $W = Y$. Daí, V é aberto e $\partial V = I(\Sigma)$.

Mostraremos que V é o único conjunto estrelado aberto cuja $\partial V = I(\Sigma)$. Suponha que V' seja outro conjunto estrelado aberto tal que $\partial V' = I(\Sigma)$. Pelo fato de V' ser estrelado, temos que ele é conexo e assim $V' \subset V$ ou $V' \subset W$. Além disso, temos que $\mathbb{R}^{n+1} - cl V'$ é aberto,

$$V' \cup (\mathbb{R}^{n+1} - cl V') = \mathbb{R}^{n+1} - I(\Sigma),$$

$\mathbb{R}^{n+1} - cl V'$ é ilimitado. Como V e W são componentes conexas e

$$V \cup W = \mathbb{R}^{n+1} - I(\Sigma) = V' \cup (\mathbb{R}^{n+1} - cl V'),$$

segue-se que $V' = V$.

(4) Vimos que um ponto arbitrário de $Z = \mathbb{R}^{n+1} - \bigcup_{p \in \Sigma} T_p$ (que podemos tomar como sendo o 0, deslocando a origem, se necessário) é centro para V , isto é, esse ponto pertence ao *Kernel* V . Daí, $Z \subset \text{Kernel } V$. Vamos estabelecer que $Z \subset \text{int}(\text{Kernel } V)$, mostrando que Z é aberto. Para mostrar isso, simplesmente temos que mostrar que um ponto arbitrário de Z (que, mais uma vez, podemos tomar como sendo 0) está em um conjunto aberto N contido em Z , isto é, $0 \in N \subset Z$.

Considere a aplicação $k : T\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$k(v) = I(\pi(v)) + dI|_{\pi(v)}(v),$$

onde $v \in T\Sigma$ ($T\Sigma$ é o fibrado tangente de Σ) e $\pi : T\Sigma \rightarrow \Sigma$ é a projeção canônica. Então

$$Z = \mathbb{R}^{n+1} - k(T\Sigma).$$

Seja $l = \sup_{p \in \Sigma} \|I(p)\|$. Como Σ é compacto, temos que l é finito. Desde que k é contínua, $k^{-1}(B_l)$ é fechada, onde $B_l = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| \leq l\}$.

Note que $I : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão, isto é, I é diferenciável e $dI_p : T_p\Sigma \rightarrow T_{I(p)}$ é injetiva para todo $p \in \Sigma$. Assim, podemos definir uma métrica Riemanniana em Σ via I . Como $\mathbb{R}^{n+1}$ tem uma métrica Riemanniana, I induz uma métrica em Σ dada por

$$\langle v, w \rangle_p = \langle dI|_{\pi(v)}(v), dI|_{\pi(w)}(w) \rangle_{I(p)},$$

para todos os pares de vetores $v, w \in T_p\Sigma$ tais que $\pi(v) = \pi(w)$. Esse produto interno é claramente contínuo e, como dI_p é injetiva, $\langle, \rangle_p$ é positivo definido.

Observe que se $\|v\| > 2l$, onde $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$, então

$$\begin{aligned} \|k(v)\| &= \|I(\pi(v)) + dI|_{\pi(v)}(v)\| \\ &= \|I(\pi(v))\| + 2 \cdot \langle I(\pi(v)), dI|_{\pi(v)}(v) \rangle + \|dI|_{\pi(v)}(v)\| \\ &> \|I(\pi(v))\| + \|dI|_{\pi(v)}(v)\| \\ &\geq \|dI|_{\pi(v)}(v)\| - \|I(\pi(v))\| \\ &\geq \|v\| - l \\ \|k(v)\| &> 2l - l = l. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Isso mostra que $k^{-1}(B_l) \subset \{v \in T\Sigma; \|v\| \leq 2l\} = Q$, onde Q é compacto, desde que Σ é compacto e utilizando o Teorema de Tychonoff. Por conseguinte, desde que $k^{-1}(B_l)$ é fechada, $k^{-1}(B_l)$ também é compacta. Então

$$k(k^{-1}(B_l)) = B_l \cap k(T\Sigma)$$

é compacta e, portanto, fechada. Finalmente,

$$\begin{aligned} 0 \in N &\equiv \text{int}(B_l) - k(T\Sigma) \\ &= \text{int}(B_l) - (B_l \cap k(T\Sigma)) \subset \mathbb{R}^{n+1} - k(T\Sigma) = Z \end{aligned}$$

e $N = \text{int}(B_l) - (B_l \cap K(T\Sigma))$ é claramente aberto. Daí, Z é aberto e $Z \subset \text{int}(\text{Kernel } V)$, como queríamos demonstrar.

Em seguida, vamos estabelecer a inclusão inversa, isto é, $Z \supset \text{int}(\text{Kernel } V)$. Considere um ponto arbitrário do $\text{int}(\text{Kernel } V)$, que pode ser tomado mais uma vez como sendo 0. Em seguida, tome um ponto arbitrário $p \in \Sigma$.

Como V é estrelado, temos que $\text{cl } V$ também é estrelado e $\text{Kernel}(\text{cl } V) \supset \text{Kernel } V$. Desde que $0 \in \text{int}(\text{Kernel } V)$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$D_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| < \epsilon\} \subset \text{Kernel } V.$$

Então $C = \bigcup_{\|x\| < \epsilon} [x, I(p)) \subset \text{cl } V$. Na verdade, temos que $C \subset V$. Para ver isso, note que

$$C = \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} \alpha(D_\epsilon) + (1 - \alpha)I(p),$$

e assim C é aberto. Além disso, $\text{int}(\text{cl } V) = V$. Portanto,

$$C \subset \text{int}(\text{cl } V) = V,$$

como afirmado.

Agora suponha que $0 \notin Z$. Então $-I(p) \in dI|_p T\Sigma$ e assim existe uma curva γ em Σ tal que $\gamma(0) = p$ e $(I\circ\gamma)'(0) = -I(p)$. Segue-se então que $(I\circ\gamma)(t) \in C$, para t suficientemente pequeno e positivo. Mas isso contradiz o fato que $C \subset V$ e $I(\Sigma) = \partial V \subset \mathbb{R}^{n+1} - V$. Por isso, devemos ter $0 \in Z$, como desejávamos. Portanto, $Z \supset \text{int}(\text{Kernel } V)$ e assim $Z = \mathbb{R}^{n+1} - \bigcup_{p \in \Sigma} T_p = \text{int}(\text{Kernel } V)$.

Finalmente, mostraremos a afirmação inversa. Suponha $I(\Sigma) = \partial V$, para algum conjunto estrelado aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\text{int}(\text{Kernel } V) \neq \emptyset$. Mostraremos que $Z \neq \emptyset$, ou seja, $\bigcup_{p \in \Sigma} T_p \neq \mathbb{R}^{n+1}$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $0 \in \text{int}(\text{Kernel } V)$. Desse modo é suficiente mostrar que $0 \notin dI|_p T_p \Sigma$, para cada $p \in \Sigma$. Tome $p \in \Sigma$. Como $0 \in \text{int}(\text{Kernel } V)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| < \epsilon\} \subset \text{Kernel } V$. Considere $C = \bigcup_{\|x\| < \epsilon} [x, I(p))$. Mostraremos que $C \subset V$.

Seja $y = (1 - \alpha)x + \alpha I(p)$, $0 \leq \alpha < 1$, $\|x\| < \epsilon$, um ponto arbitrário de C . Como $I(\Sigma) = \partial V$, existe uma sequência x_m em V tal que $x_m \rightarrow I(p)$. A sequência

$$\begin{aligned} y_m &= \frac{y - \alpha x_m}{1 - \alpha} \\ y_m &= \frac{(1 - \alpha)x + \alpha I(p) - \alpha x_m}{1 - \alpha} \\ y_m &= x + \frac{\alpha(I(p) - x_m)}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

é tal que $y_m \rightarrow x$ e daí $\|y_m\| < \epsilon$, para algum m . Então $y_m \in \text{Kernel } V$ e assim $y = (1 - \alpha)y_m + \alpha x_m \in V$. Daí, $C \subset V$, como queríamos demonstrar.

Agora podemos utilizar o "argumento da curva", utilizado no último parágrafo da prova de $\text{int}(\text{Kernel } V) = Z$, para chegarmos a conclusão desejada, ou seja, $0 \notin dI|_p T\Sigma$. Daí, $0 \in Z \neq \emptyset$. E isso completa a prova do teorema. $\square$

3.2 Resultados Principais

Nesta seção, apresentaremos e demonstraremos os dois principais teoremas da nossa dissertação. Estes são devidos a S. Mendonça e H. Mirandola [10]

Teorema 3.2. *Seja $I : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$, $n \geq 2$, uma imersão com $W \neq \emptyset$, onde M é uma variedade Riemanniana completa, conexa e sem pontos conjugados. Se o recobrimento universal de Σ é compacto, então M é simplesmente conexa.*

Demonstração. Seja $I : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma imersão, onde M é uma variedade Riemanniana completa, conexa e sem pontos conjugados com $W \neq \emptyset$. Seja $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal de M com a métrica induzida e seja $v : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ o recobrimento universal de Σ . Pelo Teorema Fundamental dos Levantamentos, para qualquer $p \in \Sigma$, $\bar{p} \in v^{-1}(p)$ e $\tilde{q} \in \pi^{-1}(I(p))$, existe uma imersão $J : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \widetilde{M}$, a saber o levantamento de I , satisfazendo $J(\bar{p}) = \tilde{q}$ e tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Sigma} & \xrightarrow{J} & \widetilde{M} \\ v \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Sigma & \xrightarrow{I} & M \end{array}$$

Seja $W(J) \subset \widetilde{M}$ o conjunto dos pontos que não pertencem a nenhuma geodésica tangente à J . Seja A o conjunto dos levantamentos de I .

Afirmção 1. *Para $W = W(I)$ segue-se que*

$$\pi^{-1}(W) = \bigcap_{J \in A} W(J)$$

Demonstração. Assuma que $\tilde{q} \notin \pi^{-1}(W)$. Desde que $q = \pi(\tilde{q}) \notin W$, existe uma geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = q$ que é tangente à imersão I em $t = a$. A geodésica γ pode ser levada pela geodésica $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \widetilde{M}$ com $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{q}$ e tal que $\tilde{\gamma}$ é tangente à

alguma imersão $J \in A$ em $t = a$. Note que a geodésica $\tilde{\gamma}$ é definida por $\tilde{\gamma} := \pi^{-1} \circ \gamma(t)$ e assim temos $\tilde{\gamma}(0) = \pi^{-1} \circ \gamma(0) = \pi^{-1}(q) = \tilde{q}$. Então $\tilde{q} \notin W(J)$. Assim, mostramos que $\pi^{-1}(W) \subset \bigcap_{J \in A} W(J)$.

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{M} \\ & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow \pi \\ [0, a] & \xrightarrow{\gamma} & M \end{array}$$

Reciprocamente, assuma que $\tilde{q} \notin W(J)$, para algum $J \in A$. Então existe uma geodésica $\tilde{\gamma}$ tangente à imersão J contendo $\tilde{q}$. A geodésica $\gamma := \pi \circ \tilde{\gamma}$ é tangente à imersão I e contém $\pi(\tilde{q}) = q$. Portanto, $\pi(\tilde{q}) \notin \pi^{-1}(W)$ e, daí, $\tilde{q} \notin \pi^{-1}(W)$. Assim, $\bigcap_{J \in A} W(J) \subset \pi^{-1}(W)$. $\square$

Para provar o teorema, assumimos que $\tilde{\Sigma}$ é compacta. Tome $x_0 \in M$ e fixe um levantamento $J \in A$. Pela afirmação 1, $\pi^{-1}(x_0) \subset W(J)$. Segue pelo teorema de Beltagy [3] que $J(\tilde{\Sigma})$ é um mergulho difeomorfo a esfera que é fronteira de um disco topológico compacto D contendo o conjunto $\pi^{-1}(x_0)$. Temos também que D e seu interior $\text{int } D$ são conjuntos estrelados com respeito a qualquer ponto de $W(J)$, e então eles são estrelados com respeito a qualquer ponto de $\pi^{-1}(x_0)$.

Como $\pi^{-1}(x_0)$ é discreto e está contido em um disco compacto, o conjunto $\pi^{-1}(x_0)$ e o grupo $\text{Aut}(\pi)$ dos automorfismos de π são ambos finitos, a saber, a cardinalidade de $\text{Aut}(\pi) \leq n!$, onde n é o número de elementos de $\pi^{-1}(x_0)$. Para qualquer $\phi \in \text{Aut}(\pi)$, temos que $\bar{J} := \phi \circ J$ também é um levantamento de I , pois $\pi = \pi \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\Sigma} & \xrightarrow{J} & \widetilde{M} & \xrightarrow{\phi} & \widetilde{M} \\ v \downarrow & & \downarrow \pi & \swarrow \pi & \\ \Sigma & \xrightarrow{I} & M & & \end{array}$$

Novamente, temos que $\pi^{-1}(x_0) \subset W(\bar{J})$ e que $\bar{J}(\tilde{\Sigma})$ é um mergulho e tal que $\bar{J}(\tilde{\Sigma})$ é fronteira de um disco topológico compacto $\phi(D)$ contendo o conjunto $\pi^{-1}(x_0)$. Além disso, temos que $\phi(D)$ e $\text{int } \phi(D)$ são conjuntos estrelados com respeito a qualquer ponto de $\pi^{-1}(x_0)$.

Assim, temos que

$$E = \bigcap_{\phi \in \text{Aut}(\pi)} \phi(D)$$

é invariante sobre $Aut(\pi)$ e que $int E$ é estrelado com respeito a qualquer ponto de $\pi^{-1}(x_0)$. De fato, como $Aut(\pi)$ é finito, temos

$$int E = \bigcap_{\phi \in Aut(\pi)} int \phi(D)$$

e, daí, $int E$ é estrelado com respeito a qualquer ponto em $\pi^{-1}(x_0)$, desde que é interseção de conjuntos estrelados.

Afirmção 2. *E é disco topológico compacto.*

Demonstração. Fixe um $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Sabemos que o $int E$ é estrelado com respeito a $\tilde{x}_0$. Fixe um vetor unitário $v \in T_{\tilde{x}_0} \widetilde{M}$ e $\phi \in Aut(\pi)$. Desde que $\tilde{x}_0 \in W(\phi \circ J)$, afirmamos que a geodésica

$$\gamma : t \mapsto exp_{\tilde{x}_0} tv$$

atravessa transversalmente a hipersuperfície $\phi \circ J(\widetilde{\Sigma}) = \partial\phi(D)$ em um único ponto. De fato, existe um tempo $t_{v,\phi}$ tal que γ intersecta $\partial\phi(D)$, desde que $\phi(D)$ é estrelado com respeito a $\tilde{x}_0$. Provaremos que essa interseção é única. Como $\phi(D)$ é uma variedade com fronteira $\partial\phi(D)$, temos que $\gamma(t) \notin \phi(D)$, para $t > t_{v,\phi}$ suficientemente próximo de $t_{v,\phi}$. Se γ intersecta $\partial\phi(D)$ uma segunda vez, isso contradiz o fato de $\phi(D)$ ser estrelado com respeito a $\tilde{x}_0$.

Desde que a interseção é transversal em $t_{v,\phi}$, o tempo $t_{v,\phi}$ irá depender diferenciavelmente sobre v . Seja

$$t(v) = \min_{\phi \in Aut(\pi)} t_{v,\phi}.$$

Então $t(v)$ depende continuamente sobre v . Dado $w \in E$, seja

$$v(w) = \frac{(exp_{x_0})^{-1}w}{\|(exp_{x_0})^{-1}w\|}.$$

Seja $B \subset T_{\tilde{x}_0} \widetilde{M}$ o disco unitário compacto centrado em 0. Agora, definimos

$$F : B \rightarrow E$$

por

$$F(z) = \begin{cases} exp_{\tilde{x}_0} t \left(\frac{z}{\|z\|} \right) & \text{se } z \neq 0 \\ \tilde{x}_0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

F tem inversa contínua, pois a $\exp_{\tilde{x}_0}$ é um difeomorfismo sobre B , e sua inversa $G : E \rightarrow B$ é dada por

$$G(w) = \begin{cases} \frac{1}{t(v(w))}(\exp_{\tilde{x}_0})^{-1}w & \text{se } w \neq \tilde{x}_0 \\ 0 & \text{se } w = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

pois de $F(0) = \tilde{x}_0$ temos que $G(\tilde{x}_0) = 0$, desde que F tem inversa contínua, e de $F(z) = \exp_{\tilde{x}_0} t \left(\frac{z}{\|z\|} \right) z$ vem que

$$\begin{aligned} w &= \exp_{\tilde{x}_0} t \left(\frac{z}{\|z\|} \right) z \\ (\exp_{\tilde{x}_0})^{-1}w &= t \left(\frac{z}{\|z\|} \right) z \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como $t := t \left(\frac{z}{\|z\|} \right)$ é único e $w = \exp_{\tilde{x}_0} tz$, podemos ver essa última equação da forma $w = \exp_{\tilde{x}_0} z$. Daí, $z = (\exp_{\tilde{x}_0})^{-1}w$ e de 3.2 vem

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{t \left(\frac{(\exp_{\tilde{x}_0})^{-1}w}{\|(\exp_{\tilde{x}_0})^{-1}w\|} \right)} (\exp_{\tilde{x}_0})^{-1}w \\ z &= \frac{1}{t(v(w))} (\exp_{\tilde{x}_0})^{-1}w \end{aligned}$$

que é a inversa de F quando $w \neq \tilde{x}_0$ □

Finalmente, para qualquer $\phi \in \text{Aut}(\pi)$, temos que ϕ deve fixar um ponto em E , desde que $\phi(E) \subset E$ e E é um disco compacto pela afirmação 2. Então temos que $\text{Aut}(\pi)$ é trivial e, portanto, M é simplesmente conexa. □

Observação 3.3. *A inclusão $T^n \subset T^{n+1}$ de toros planos mostra que a hipótese da compacidade do recobrimento universal de Σ é essencial no teorema 3.2. Note pelo exemplo 2.31 que o recobrimento do toro $\mathbb{T}^2$ é o plano $\mathbb{R}^2$ e o plano não é compacto. E sabemos que o grupo fundamental do toro $\mathbb{T}^2$ é $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e isso mostra que o toro não é simplesmente conexo. Isto confirma nossa observação para o caso $n = 2$.*

Mais geralmente, pelo teorema 2.22, temos que a aplicação

$$\xi \times \xi \dots \xi : \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \mathbb{R}}_n \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \mathbb{S}^1$$

é uma aplicação de recobrimento do toro $\mathbb{T}^n$, já que $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \mathbb{S}^1}_n$, onde ξ denota a aplicação do exemplo 2.23.

Agora, enunciaremos e provaremos nosso segundo resultado.

Teorema 3.4. *Seja Σ uma hipersuperfície propriamente mergulhada numa variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e sem pontos conjugados M . Se $W \neq \emptyset$, então temos:*

1. Σ é um gráfico normal sobre um aberto de uma esfera geodésica de M ;
2. Existe um aberto A tal que A e seu $\overline{A}$ são estrelados com respeito a qualquer ponto de W ; além disso, $\overline{A}$ é uma variedade que tem Σ como bordo.

Demonstração. **1.** Seja M uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e sem pontos conjugados. Seja $\Sigma \subset M$ uma hipersuperfície conexa e propriamente mergulhada satisfazendo $W \neq \emptyset$.

Fixe $x_0 \in W$. Em particular, $x_0 \notin \Sigma$. Desde que Σ é propriamente mergulhada, existe alguma pequena esfera geodésica S centrada em x_0 que não intersecta Σ .

Defina $F : \Sigma \rightarrow S$ como se segue. Dado $p \in \Sigma$, existe uma única geodésica normal $\gamma := [x_0, p]$ ligando x_0 a p . Como γ é ortogonal a S em um único ponto de intersecção, chamaremos esse ponto de $F(p)$. Desde que $x_0 \in W$, segue-se que γ também é transversal a Σ ; daí $F : \Sigma \rightarrow S$ é um difeomorfismo local sobre sua imagem aberta $F(\Sigma) \subset S$. Então, para mostrar que $F : \Sigma \rightarrow F(\Sigma)$ é um difeomorfismo é suficiente mostrar que F é injetiva.

Defina o conjunto

$$C := \{p \in \Sigma; \#([x_0, p] \cap \Sigma) = 1\}.$$

Mostraremos que $C = \Sigma$.

Afirmção 3. $C \neq \emptyset$

De fato, usando o fato que Σ é hipersuperfície propriamente mergulhada, obtemos um ponto $p_0 \in \Sigma$ tal que $d(x_0, p_0) = \min_{p \in \Sigma} d(x_0, p)$. Assim, $p_0 \in C$.

Afirmção 4. $\Sigma - C$ é aberto como subconjunto de Σ .

Para provar essa afirmação, tome $x_1 \in \Sigma - C$. Assim, existe $x_2 \in \Sigma$ com $x_2 \neq x_1$ e $x_2 \in [x_0, x_1]$. Em particular, $F(x_1) = F(x_2) = q$. Como F é difeomorfismo local, existem vizinhanças disjuntas de x_1 e x_2 em Σ aplicadas por F sobre a mesma vizinhança de $q \in S$. Portanto, $\Sigma - C$ é aberto de Σ .

Afirmção 5. $\Sigma - C$ é fechado como subconjunto de Σ .

De fato, tome a sequência $x_k \rightarrow a \in \Sigma$, com $x_k \in \Sigma - C$. Desde que Σ é propriamente mergulhada, existe uma vizinhança aberta U de $a \in M$ tal que a intersecção $\Sigma \cap U$ é conexa e a restrição $F|_{\Sigma \cap U}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem aberta.

Pela definição de C , para cada k , existe um ponto $y_k \neq x_k$ com $y_k \in [x_0, x_k] \cap \Sigma$. Como (x_k) é limitado, temos que (y_k) também é limitado. Assim, podemos supor, passando para uma subsequência, que (y_k) converge para algum ponto $b \in [x_0, a]$. Como Σ é propriamente mergulhada, temos que $b \in \Sigma$. Como $F|_{\Sigma \cap U}$ é injetiva, temos que $y_k \notin U$; daí $b \neq a$. Portanto, $a \in \Sigma - C$.

Pela conexidade de Σ , temos que $\Sigma = C$ e $F : \Sigma \rightarrow F(\Sigma)$ é um difeomorfismo.

2. Mostraremos que Σ é fronteira de um conjunto aberto estrelado com respeito a x_0 . Considere o conjunto

$$A := \{z \in M; \sharp([x_0, z] \cap \Sigma) = 0\}.$$

Dado $z \in A$, a distância entre $[x_0, z]$ e Σ é positiva, desde que Σ é propriamente mergulhada. Isso implica que A é aberto.

Afirmção 6. $\bar{A} - A = \Sigma$

De fato, dado $p \in \Sigma$, o segmento geodésico $[x_0, p] - \{p\} \subset A$; daí $\Sigma \subset \bar{A}$. Além disso, temos que $A \cap \Sigma \neq \emptyset$. Assim, $\Sigma \subset \bar{A} - A$.

Agora tome $p \in \bar{A} - A$ e assumamos por contradição que $p \notin \Sigma$. Como $p \notin A$, a geodésica $[x_0, p]$ intersecta Σ transversalmente em um único ponto $q \neq p$. Considere o vetor unitário $v \in T_{x_0}M$ tal que $\exp_{x_0} t_0 v = p$, para algum $t_0 > 0$. Como F é um difeomorfismo sobre sua imagem aberta, então existe uma vizinhança aberta U de v na esfera $S^{n-1} \subset T_{x_0}M$ tal que a geodésica $t \mapsto \exp_{x_0} t w$ atravessa Σ em um único ponto para algum $w \in U$. Desde que Σ é propriamente mergulhada, podemos escolher U e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\exp_{x_0} t w \notin \Sigma$ se $|t - t_0| < \epsilon$ e isso define uma vizinhança V de p com $V \subset M - A$, o que contradiz o fato que $p \in \bar{A}$. Assim, temos que $p \in \Sigma$ e daí $\bar{A} - A \subset \Sigma$. Portanto, $\bar{A} - A = \Sigma$.

Claramente, temos que A e $\bar{A} = A \cup \Sigma$ são estrelados com respeito a x_0 . Note que a igualdade $\bar{A} = A \cup \Sigma$ vem do fato que $A \subset \bar{A}$ e que $\bar{A} = A \cup (\bar{A} - A) = A \cup \Sigma$. Para concluir a prova, precisamos mostrar que $\bar{A}$ é uma variedade com fronteira Σ . Tome $p \in \Sigma$ com $p = \exp_{x_0} t_0 v$, para algum vetor unitário $v \in T_{x_0}M$. Mais uma vez, existe uma vizinhança aberta U de v em $S^{n-1} \subset T_{x_0}M$ tal que para cada $w \in U$ a geodésica $t \mapsto \exp_{x_0} t w$ atravessa Σ transversalmente em único ponto $q_w = \exp_{x_0} t_w w$. Assim, o

tempo t_w depende diferenciavelmente de w . Então uma pequena vizinhança W de p em $\bar{A}$ pode ser definida como

$$W = \exp_{x_0}\{tw; w \in U, t_w - \epsilon < t \leq t_w\},$$

onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Então provamos que $\bar{A}$ é uma variedade diferenciável com fronteira Σ .

Observação 3.5. *Se considerarmos a espiral $S \subset \mathbb{R}^2$ dada por $r = 1 - 2^{-\theta}, \theta \in \mathbb{R}$, (em coordenadas polares), o produto $S \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mostra que a hipótese de Σ ser propriamente mergulhada é essencial no teorema 3.4.*

□

Referências Bibliográficas

- [1] ALENCAR, H.; FRENSEL, K. Hypersurfaces whose tangent geodesics omit a nonempty set. In: LAWSON, B. ; TENENBLATT, K. (Eds.) *Differential geometry*. Harlow, England : Longman Scientific. & Technical, 1991. v. 52, p. 1-13. (Pitman monographs and surveys in pure applied mathematics)
- [2] ALEXANDER, S. Saddle points of compact hypersurfaces. *Geometriae Dedicata*, v. 6, n. 3, p. 353-362, 1977.
- [3] BELTAGY, M. Immersions into manifolds without conjugate points. *J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser.*, v. 3, n. 3, p. 265-271, 1990.
- [4] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro : SBM, 2008. (Projeto Euclides)
- [5] HASANIS, T., KOUTROFIOTIS, D. A property of complete minimal surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 281, n. 2, p. 833-843, 1984.
- [6] HALPERN, B.: On the immersion of an n-dimensional manifold in n+1-dimensional Euclidean space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 30, p. 181-184, 1971.
- [7] LEE, J. M.: *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer-Verlag, 2002. (Graduate texts in mathematics. v. 218)
- [8] LIMA, E. L.: *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 2. (Projeto Euclides)
- [9] LIMA, E. L.: *Grupo Fundamental e Espaços de recobrimento*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. (Projeto Euclides)
- [10] MENDONÇA, S., MIRANDOLA, H. Hypersurfaces whose tangent geodesics do not cover the ambient space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v.136, n. 3, p. 1065-1070, 2008.

- [11] MUNKRES, J. R.: *Topology*. New Jersey: Prentice Hall, 2000.